République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

Bouasla Saida

Intitulé

Etude de la positivité de la solution d'un problème à valeurs aux limites de type intégrale pour une équation différentielle d'ordre deux

Dirigée par : Dr.Frioui Assia

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Guebbai Hamza	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Frioui Assia	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Ayachi Asma	M CB	Univ-Guelma

Session 30 Juin 2020

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord , nous remercions Allah le tout Puissant, de nous avoir. donné la santé, la volonté, la patience et la persévérance.pour réaliser ce modeste travail. Nous adressons aussi toute notre gratitude et nos remerciements · les plus sincères à notre encadreure Madame "Frioui Assia" , Maitre de conférence A à l'université de Guelma pour tout le support qu'elle m'a apportée tout au long de la conception et la rédaction de ce mémoire Nous tenons également à remercier vivement les membres de jury. pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance et d'examiner notre travail.

♡

Dédicace

A ma très chère mère .
Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.
A mon très cher père.
Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager.
Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.
A mes chers frérer, et ma soeurs et leurs enfants,source de joie et de bonheur.
A tous mes amis,et ma belle kouki.
A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet.
Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible,je vous dis merci.

❖ *saida*

Résumé

On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude de l'existence de la solution positive d'un problème aux limites associé à une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre deux à conditions aux limites de type intégrale suivant :

$$(P)\begin{cases} u'' + a(t)f(u) = 0, \qquad 0 < t < 1 \\ u(0) = 0 \ , \ u(1) = \alpha \int_0^\eta u(s)ds \end{cases}$$

où $\eta \in]0,1[$, et $0 < \alpha < 2/\eta^2$.

En se basant sur le théorème de Guo-Krasnosel'skii dans un cône, et sous certaines conditions sur la non-linéarité de la fonction de f des conditions suffisantes pour l'éxistence de la solution positive sont obtenues.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة يكمن في دراسة وجود حلول لمعادلة غير خطية من الدرجة الثانية ذات الشروط الحدية عند ثلاث نقاط نهتم في هذه المذكرة على إثبات وجود حلول ايجابية باستخدام نظرية قيو كراز- نوزلسكي

0.1 Introduction

Au cours de ces dernières années un interêt considérable a été attribué à l'étude des problèmes aux limites plus particulièrement aux problèmes liés aux équations différentielles à conditions aux limites non locales. Ces équations ont suscité un intérêt considérable en raison de leur capacité à modéliser des phénomènes complexes. En raison des applications étendues des équations différencielles en ingénierie et en science, la recherche dans ce domaine s'est considérablement développée. Lié à ce contexte, on propose dans ce mémoire une étude sur l'existence de la solution positive d'un problème aux limites engendré par une équation différentielle non linéaire d'ordre deux à conditions aux limites en trois points avec un type intégral

$$u'' + a(t)f(u) = 0, \quad 0 < t < 1 \tag{1.1}$$

$$u(0) = 0\ ,\ u(1) = \alpha \int_0^\eta u(s)ds, \tag{1.2}$$

où $\eta \in \left]0,1\right[$, ,$0 < \alpha < 2/\eta^2$ et $f : [0,1] * \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue.

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de ce type d'équations, cependant et en se basant sur le théorème de Guo-Krasnosel'skii, nous nous proposons alors d'étudier l'éxistence de la solution positive du problème aux limites (1.1) -(1.2).

Ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Nous présentons dans ce chapitre quelques définitions fondamentales concernant les opérateurs compacts les fonctions convexes et concaves et leurs propriétés, ainsi que le théorème d'Ascolie-Arzela.

Chapitre 2 : Ce chapitre est consacré à quelques théorèmes de points fixes tels que le théorème de Banach, de Brouwer, de Schauder et plus particulièrement à l'étude de l'existence de la solution du problème.

Chapitre 3 : Ce dernier est dédié à l'étude du problème aux limites $(1.1) - (1.2)$ traitant l'éxistence de la solution positive.

Chapitre 1

Rappels et notions

1.1 Notations

$\cdot \|.\|$: norme.

$\cdot \mathbb{R}^{+}$: L'espace de nombres réels positif.

$\cdot E$: espace de banach.

$\cdot \Omega$: un ouvert borné d'un espace de Banach.

$\cdot K$: un cône.

$\cdot$ $C(X, Y)$: L'ensemble des fonctions continues de X dans Y.

$\cdot$ $L(X, Y)$: L'ensemble des opérateurs linéaire de X dans Y

$\cdot$ $K(X, Y)$: L'ensemble de tout les opérateurs compacts de X dans Y.

1.2 définitions

Définition 1.2.1. *Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, dordre* n *est une relation entre la variable réelle* t*, une fonction inconnue* $t \mapsto x(t)$ *et ses dérivées* $x', x'', ..., x^{(n)}$ *au point* t *définie par :*

$$F\left(t, x, x^{'}, x^{''}, ...x^{n}\right) = 0$$

où F *n'est pas indépendante de sa dernière variable* $x^{(n)}$*. On prendra* t *dans un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *(*I *peut être* $\mathbb{R}$ *tout entier).*

La solution x *en général sera à valeurs dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*,* $N \in \mathbb{N}$ *où* N *sera le plus souvent égal à* $1, 2ou3$*. On dit que cette équation est scalaire si* F *est à valeurs dans* $\mathbb{R}$*.*

1.2.1 Équation différentielle linéaire

Une équation différentielle est dite linéaire si la fonction F associée est linéaire. Autrement dit, une équation différentielle linéaire dordre n est une équation de la forme

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

où les a_i sont appelés coefficients de l'équation et sont des fonctions de t. L'adjectif linéaire porte donc sur l'inconnue y de l'équation.

1.2.2 Équations différentielles non linéaires

En règle générale, les équations différentielles linéaires sont issues de modèles relativement simples. Si lon veut des modèles un peu plus complexes (et donc plus proches de la réalité), on obtient en règle générale des équations non linéaires. Ce sont, pour la plupart, des équations que lon ne sait pas résoudre de façon exactes. Ces équations sont résolues dans d'autres espaces que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme les espaces de Banach et de Fréchet en utilisant la théorie des semi groupes combinée avec les théorèmes des points fixes.

1.3 Espaces Fonctionnels

1.3.1 Rappels sur les espaces métriques

Définition 1.3.1. *Soit E un ensemble non vide. Une distance (ou métrique) sur E est une application $d : E * E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tout $x,\ y$ et z de E*

1. $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrique), et*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Exemple 1.3.1. $d(x, y) = \dfrac{\mid x - y \mid}{1 + \mid x - y \mid}$ *est une distance sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x,\ y \in \mathbb{R}$ on a*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mid x - y \mid}{1 + \mid x - y \mid} = 0 \Leftrightarrow \mid x - y \mid = 0 \Leftrightarrow x = y.$
2. $d(x, y) = \dfrac{\mid x - y \mid}{1 + \mid x - y \mid} = \dfrac{\mid -1 \mid\mid y - x \mid}{1 + \mid -1 \mid\mid x - y \mid} = \dfrac{\mid y - x \mid}{1 + \mid y - x \mid} = d(y, x).$

Définition 1.3.2. ***(Espace métrique)***

On appelle espace métrique tout ensemble non vide E muni d'une distance d. Cet espace sera noté par (E, d).

Exemple 1.3.2. *Lespace $C([0; 1], \mathbb{R})$ et dit métrique, lorsqu'il est muni d'une des distances suivantes*

1. $d_1(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$
2. $d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 [f(t) - g(t)]^2 dt}.$
3. $d_\infty(f, g) = \displaystyle\max_{t \in [0;1]} |f(t) - g(t)|.$

Définition 1.3.3. ***(Espace métrique complet)***

On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.

Définition 1.3.4. ***(Espace vectoriel normé)***

Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, *(homogénéité),*

2) $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$ *et*

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.3.5. ***(Espace de Banach)***

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui est complet pour la métrique associée à cette norme.

Exemple 1.3.3. *L'éspace $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ l'espace de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel. Le nombre $\|f\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$, où $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, muni de cette norme $(C, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.*

Définition 1.3.6. ***(Espace** $C([a,b])$*

Des fonctions continues sur $[a,b]$, de norme $\|x\| = \max\limits_{t\in[a;b]} |x(t)|$.

Définition 1.3.7. ***(Espace** $C^k([a,b]$ *)*

Des fonctions k fois continument dérivables sur $[a,b]$, de norme :

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max \left|x^i(t)\right|, \quad \textit{telle que } x^0(t) = x(t).$$

Définition 1.3.8. ***(La continuité**)*

Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, f une application de E dans F, et a un point de E, on dit que f est continue en a si :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in E,\ d_E(x,a) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Si l'application f est continue en tout point a de E, on dit qu'elle est continue sur E ou tout simplement continue.

Définition 1.3.9. ***(La continuité uniforme)***

Soient (E, d_E) *et* (F, d_F) *deux espaces métriques. Une application* $f : E \to F$ *est dite uniformément continue si :*

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ \forall x,\ y \in E,\ d_E(x, y) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

δ *ne dépend que* ε.

Définition 1.3.10. *Une famille de fonctions* $F \subset C(\ X,\ \mathbb{R})$ *est dite uniformément bornée s'il existe* $M > 0$ *telle que :*

$$|u(x)| \leq M, \quad \forall x \in X, \quad \forall u \in F.$$

Définition 1.3.11. *Soit* (X, d) *un espace métrique donné, une famille de fonctions* $F \subset C(X, \mathbb{R})$ *est dite équicontinue si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in X^2, d(x, y) < \delta, \forall u \in F, on\ a : |u(x) - u(y)| < \epsilon.$$

Remarque 1.3.1. *Il est clair que la continuité uniforme sur* E *implique la continuité sur* E.
Par contre, la réciproque est fausse, par exemple l'application $x \to x^2$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *mais elle n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.12. ***(Application contractante)***

Une application (opérateur) P *sur un espace métrique* $(X; \rho)$ *est dite contractante s'il existe* $0 < r < 1$ *tel que :*

$$\rho(Px; Py) \leq \rho(x; y)$$

Définition 1.3.13. ***(Principe de l'application contractante)***

Soit P *une application contractante sur un espace métrique complet* X, *alors il existe un unique point fixe* x *avec* $Px = x$. *De plus* $x = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} x_n$, *où* x_0 *est un élément quelconque de* X *et* $x_{i+1} = Px_i; i = 1; 2...$

1.4 Propriétés des fonctions convexes et concaves

1.4.1 La convexité

Définition 1.4.1. *Un sous-ensemble S de $\mathbb{R}$ est dit convexe si pour tout $x,\ y \in S$ et pour tout $\lambda \in [0;1]$, on a*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \ S.$$

Définition 1.4.2. *(**La fonction convexe**)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si pour tout $x,\ y$ de I et tout $\lambda \in [0;1]$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Exemple 1.4.1. *La fonction $x \rightarrow \mid x \mid$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car si $\lambda \in [0;1]$, alors :*

$$\mid \lambda x + (1-\lambda)y \mid \leqslant \mid \lambda x \mid + \mid (1-\lambda)y \mid = \lambda \mid x \mid + (1-\lambda) \mid y \mid .$$

1.4.2 La concavité

Définition 1.4.3. *La fonction f est dite concave si :*

$$\forall (x,y) \in I, \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Remarque 1.4.1. *la fonction f est dite concave si $-f$ est convexe.*

Théorème 1.4.1. *[4]*

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I.

Alors f est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si :

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x), \forall (x,y) \in I$$

$$(resp. f(y) - f(x) \leq f'(x)(y-x), \forall (x,y) \in I).$$

Théorème 1.4.2. *[4] Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I alors :*

f est convexe sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

f est concave sur $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

1.4.3 Inégalités de convexité

Proposition 1.4.1. ***(Inégalité des pentes)***

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \text{ pour tout } a < b < c \in I$$

Proposition 1.4.2. *[4]*

Si $f : I \longmapsto R$ est convexe, son graphe est situé au dessus de ses tangentes, c'est à dire que si f est dérivable en un point $a \in I$ on a :

$$f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a) \text{ pour tout } \; x \in I$$

Si f est dérivable et convexe sur I alors sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes. ***"Pour les fonctions concaves l'inégalité est inversée".***

Preuve. Si $x = a$, l'inégalité est vraie. Si $x > a$, pour tout $y \in]a, x[$ on obtient :

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

en appliquant l'inégalité des pentes à $a < y < x$, et en faisant tendre y vers a on en déduit :

$$f'(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

donc :

$$f(x) > f(a) + (x-a)f'(a).$$

Enfin, si $x < a$, pour tout réel y tel que $x < y < a$, l'inégalité des pentes montre que :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(a)-f(y)}{a-y} = \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

et en faisant tendre y vers a on obtient :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq f'(a), \quad \text{d'ou le résultat.}$$

□

Proposition 1.4.3. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f est convexe si et seulement si la fonction f' est croissante.*

Preuve. Supposons f convexe, et soient $a < b \in I$. Pour tout réel $a < x < b$,

l'inégalité des pentes montre que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = P(a, b) \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

donc en faisant tendre x vers a on en déduit que : $f'(a) \leq P(a, b)$, et en faisant tendre x vers b on en déduit que : $P(a, b) \leq f'(b)$, d'ou $f'(a) \leq f'(b)$ et la fonction f' est donc croissante.

Réciproquement, si f'est croissante, pour tous $a < b \in I$ et tout $x \in]a, b[$ il existe d'aprés le théoréme des accroissements fini des réels $\alpha \in]a, x[$ *et* $\beta \in]x, b[$ tels que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\alpha) \text{ et } \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(\beta)$$

et on a : $\alpha < \beta$ donc $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, et on obtient :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

$$f(x) - f(a) \leq \frac{x - a}{b - x}(f(b) - f(x))$$

d'ou :

$$f(x) \leq f(a) + \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a))$$

et cette inégalité reste vraie si $x = a$ ou $x = b$, on en conclut que f est convexe. $\square$

1.5 Notions sur les opérateurs

1.5.1 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.5.1. *Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur A défini sur X dans Y et dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*

pour tout u, v dans X et α, β dans $\mathbb{R}$

i) $Au \in Y$.

ii) $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

Définition 1.5.2. *Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y et dit borné s'il existe une constante positive C, telle que :*

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X , \forall u \in X.$$

Proposition 1.5.1. *Soient X et Y deux espaces normés et $A : X \to Y$ un opérateur linéaire, les proprietés suivantes sont équivalentes*

i) *L'opérateur A est continu sur X.*

ii) *L'opérateur A est continu au point x_0.*

iii) *L'opérateur A est borné.*

1.5.2 Opérateurs compacts

Définition 1.5.3. *Soit U un ensemble d'un espace normé X, U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extaire un sous-recouvrement fini i.e.*

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouvert) } ; \; U \subset \bigcup_{j\in J} V_j, \exists V_{j(k)}, \; j(k) = 1, 2, ..., n \text{ tel que } U \subset \bigcup_{k=0}^{n} V_j\,(k)$$

Définition 1.5.4. *Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.*

Soit X et Y deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de X.

Définition 1.5.5. *Une application continue $T : \Omega \subset X \to Y$ est dite compacte si $T\left(\overline{\Omega}\right)$ est relativement compacte. Elle est dite complètement continue, si l'image de tout sous ensembe borné B de Ω est relativement compacte.*

Remarque 1.5.1.

1- Toute application compacte est complètement continue (car pour tout borné $B \subset \Omega$ on a $T(B) \subset T\left(\overline{\Omega}\right)$). La réciproque est vraie si Ω est borné.

2- Si $T : X \to Y$ est une application linéaire, avec X et Y des espaces de Banach ; pour que T soit compact il suffit que $T(B(0;1))$ soit précompact. Si l'un au moins des espaces X ou Y est de dimension finie, alors T est compact si et seulement si T est continue.

Remarque 1.5.2. *Tout opérateur linéaire compact est continu*

La condition de compacité est généralement utilisée sous la forme :

Pour toute suite bornée $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, il existe une sous suite $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ telle que Ax_{n_k} converge.

1.5.3 Théorème d'Ascoli-Arzela

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications entre autre la compacité de certains opérateurs. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

Théorème 1.5.1. *[1]*

Soit X un espace métrique complet, $A \subset C(X;\mathbb{R})$, A est relativement compact (i.e : $\bar{A}$ est compact) si et seulement si :

1) *A est uniformément bornée.*

2) *A est équicontinue sur X.*

Définition 1.5.6. *[8]*

Soient $(E, \ ||.||)$ un espacede Banach et $K \subset E$ un sous ensemble non vide fermé de E. K est dit un cône s'il satisfait les conditions :

1) *$(\alpha u + \beta v) \in K$ pour tout u, $v \in K$ et pour $\alpha, \beta \geq 0$.*

2) *$u \in K$ et $-u \in K$ implique $u = 0$.*

Tous cône $K \subset E$ définit un ordre dans E donné par $x \leq y$
si et seulement si $y - x \in K$.

Chapitre 2

Existence de solution du problème (P) et théorèmes de points fixes

2.1 Théorèmes du point fixe

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques théorèmes de point fixe. A savoir le théorème du point fixe de Banach, celui de Brouwer et de Schauder.

Le développement de la théorie du point fixe a été un des plus important outils d'existence dans l'étude des problèmes aux limites, cette théorie consiste à transformer le problème donné en un problème de point fixe en construisant un opérateur A. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Définition 2.1.1. *[8]*

Soit A une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que :

$$A(x) = x.$$

2.1.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace mé trique complet dans lui-même.

Théorème 2.1.1. *Soit* (M, d) *un espace métrique complet et soit* $A : M \to M$ *une application contractante i.e qu'il existe* $0 < k < 1$ *telle que* $d(A(x), A(y)) \leq k\ d(x, y)$ *;*

$\forall\ x, y \in M$*, alors* A *admet un unique point fixe* $x^* \in M$*, de plus pour tout* $x \in M$ *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} A^n(x) = x^*$$

et :

$$d(A^n(x), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, A(x)).$$

Preuve. **(a) Unicité** Supposons qu'il existe $x, y \in M$ tel que

$$x = A(x)$$

et

$$y = A(y)$$

Alors

$$d(x; y) = d(A(x), A(y)) \leq kd(x, y).$$

Par conséquent

$$d(x, y) = 0$$

ce qui entraine

$$x = y$$

(b) Existence Soit $x \in M$, nous allons établir que $\{A^n(x)\}$ est une suite de Cauchy.

Pour tout $n \in N$, on a :

$$d(A^n(x), A^{n+1}(x)) \leq kd(A^{n-1}(x), A^n(x)) \leq ...... \leq k^n d(x, A(x))$$

Ainsi, pour $m > n$, où $n > 0$ on a

$$\begin{aligned} d(A^n(x), A^m(x)) &\leq d(A^n(x), A^{n+1}(x)) + d(A^{n+1}(x), A^{n+2}(x)) + ... + d(A^{m-1}(x), T^m(x)) \\ &\leq k^n d(x, A(x)) + ... + k^{m-1} d(x, A(x)) \\ &\leq k^n d(x, A(x))[1 + k + k^2 + ... + k^{m-n-1}] \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k} d(x, A(x)) \end{aligned}$$

Ainsi pour $m > n$, $n > 0$,

$$d(A^n(x), A^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, A(x)) \qquad (1)$$

Ceci montre que$\{A^n(x)\}$est une suite de Cauchy et comme M est espace complet, alors il existe $x^* \in M$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} A^n(x) = x^*$$

De plus, la continuité de A entraine que

$$a = \mathop{lim}_{n\to\infty} A^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} A(A^n(x)) = A(a)$$

par conséquent, x^* est un point fixe de A. Ainsi si $m \to \infty$ dans (1) alors

$$d(A^n(x), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, A(x))$$

$\square$

2.1.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer fait partie de la grande famille des théorèmes de point fixe qui énonce que si une fonction continue f vérifie certaines propriétés alors il existe un point fixe x^* tel que :

$$f(x^*) = x^*.$$

Théorème 2.1.2. *[8]*

Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe.

Théorème 2.1.3. *Soit M une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie $(X, \|.\|)$ et soit $A : M \longrightarrow M$ une application continue, alors A admet un point fixe.*

2.1.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de brouwer pour monter l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de banach.

Théorème 2.1.4. *[8]* ***(Premier théorème de Schauder)***

Soit M une partie non vide, compacte et convexe d'un espace de Banach X. Alors toute application continue $A : M \longrightarrow M$ admet un point fixe dans M.

Théorème 2.1.5. ***(Deuxième théorème de Schauder)***

Soit M une partie non vide et convexe d'un espace normé X et soit $A : M \longrightarrow K$ une application continue, ou K est un sous ensemble compact de M. Alors A possède un point fixe dans K.

2.2 Solution du problème (P)

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $||y||_{\infty} = \max_{t\in[0,1]} |y(t)|$, $\forall\, y \in E$. Pour commencer étudions un problème auxilliaire donné par le lemme préliminaire suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit $y \in E$. Si $\alpha\eta^2 \neq 2$ alors le problème à valeurs aux limites intégrale en trois points :*

$$\begin{cases} u'' + y(t) = 0, \qquad 0 < t < 1 \\ u(0) = 0\ ,\ \alpha \int_0^{\eta} u(s)ds = u(1), \end{cases} \tag{2.1}$$

admet une solution unique :

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{2t}{2-\alpha\eta^2} &\int_0^1 (1-s)y(s)ds \\ &- \int_0^t (t-s)y(s)ds \\ &- \frac{\alpha t}{2-\alpha\eta^2} \int_0^{\eta} (\eta - s)^2 y(s)ds. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Preuve. On a :

$$u''(t) = -y(t), \tag{2.3}$$

pour $t \in [0,1]$en intégratant par rapport à s de 0 à t,

on obtient :

$$u'(t) = u'(0) - \int_0^t y(s)ds, \tag{2.4}$$

$$u(t) = u'(0)t - \int_0^t \left(\int_0^x y(s)ds \right) dx, \tag{2.5}$$

$$u(t) = u'(0)t - \int_0^t (t-s)y(s)ds, \tag{2.6}$$

et :

$$u(1) = u'(0) - \int_0^1 (1-s)y(s)ds. \tag{2.7}$$

en intégratant (2.6) de 0 à η, pour $\eta \in [0.1]$,

$$\begin{aligned}\int_0^\eta u(s)ds &= u'(0)\frac{\eta^2}{2} - \int_0^\eta\left(\int_0^x (x-s)y(s)ds\right)dx,\\ &= u'(0)\frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s)ds, \end{aligned}\tag{2.8}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}u'(0) - \int_0^1 (1-s)y(s)ds &= u'(0)\frac{\alpha\eta^2}{2} - \frac{\alpha}{2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s)ds,\\ u'(0) - u'(0)\frac{\alpha\eta^2}{2} &= \int_0^1 (1-s)y(s)ds - \frac{\alpha}{2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s)ds,\\ u'(0)\left(1-\frac{\alpha\eta^2}{2}\right) &= \int_0^1 (1-s)y(s)ds - \frac{\alpha}{2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s)ds, \end{aligned}\tag{2.9}$$

donc :

$$u'(0) = \frac{2}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)y(s)ds - \frac{\alpha}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s)ds, \tag{2.10}$$

Par conséquent (2.1) a une solution unique.

$$u(t) = \frac{2t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)y(s)ds - \frac{\alpha t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s)ds - \int_0^t (t-s)y(s)ds. \tag{2.11}$$

□

définissons l'opérateur intégral $A : E \to E$,par :

$$\begin{aligned}Au(t) = \frac{2t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds - \int_0^t (t-s)a(s)f(u(s))ds\\ - \frac{\alpha t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 a(s)f(u(s))ds \quad \text{où} \quad 2 \neq \alpha\eta^2.\end{aligned}$$

En accord avec le lemme (2.1), le problème (1.1)-(1.2) a une solution si et seulement si l'opérateur A admet un point fixe dans E. Pour ce faire, nous prouvons tout d'abord par le théorème d'Ascoli-Arzela que A est un opérateur complètement continu.

1) Montrons que la famille $\{Au(t)\}$ est uniformément bornée :

$$\exists\ M>0,\ \ |Au(t)|\ \ \le M,\ \forall t\in[0,1],\ \forall u\in E$$

Soit $B=\{u\in C[0,1],\quad \|u\|\le 1\}$ alors pour $u\in B$, on a :

$$|Au(t)|\le\left|\frac{2}{2-\alpha\eta^2}\right|\int_0^1(1-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$+\int_0^t(1-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$+\left|\frac{\alpha}{2-\alpha\eta^2}\right|\int_0^\eta(\eta-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$\le\left|\frac{2}{2-\alpha\eta^2}\right|\int_0^1(1-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$+\max_{0\prec t\prec 1}\int_0^t(t-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$+\left|\frac{\alpha}{2-\alpha\eta^2}\right|\int_0^\eta(\eta-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$\le\left|\frac{2}{2-\alpha\eta^2}\right|\int_0^1(1-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$+\int_0^1(1-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$+\left|\frac{\alpha}{2-\alpha\eta^2}\right|\int_0^\eta(\eta-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$\le\left(\left|\frac{2}{2-\alpha\eta^2}\right|+1\right)\int_0^1(1-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$+\left|\frac{\alpha}{2-\alpha\eta^2}\right|\int_0^\eta(\eta-s)\,|a(s)f(u(s))|\,ds$$

$$\leq \left|\frac{4-\alpha\eta^2}{2-\alpha\eta^2}\right| \int_0^1 (1-s)\left|a(s)f(u(s))\right| ds$$

$$+\left|\frac{\alpha}{2-\alpha\eta^2}\right| \int_0^\eta (\eta-s)\left|a(s)f(s,u(s))\right| ds$$

$$\leq M.$$

Donc la famille $\{Au\,(t)\}$ est uniformément bornée.

2) On montre que la famille $\{Au\,(t)\}$ est équicontinue : La fonction f est continue sur le compact $[0,1]$ alors elle est uniformément continue c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall s \in [0,1]\,,\ \forall u_1, u_2 \in [0,1]\,;$$

$$|u_1 - u_2| < \delta \Longrightarrow |f\left(u_1(s)\right) - f\left(u_2(s)\right)| < \epsilon$$

$$|Au_1(s) - Au_2(s)| \leq \left|\frac{2}{2-\alpha\eta^2}\right| \int_0^1 (1-s)\left|a(s)f(u_1(s)) - f(u_2(s))\right| ds$$

$$+\int_0^1 (1-s)\left|a(s)\left(f(u_1(s)) - f(u_2(s))\right)\right| ds$$

$$+\left|\frac{\alpha}{2-\alpha\eta^2}\right| \int_0^\eta (\eta-s)\left|a(s)f(u_1(s)) - f(u_2(s))\right| ds,$$

$$\leq \left|\frac{2}{2-\alpha\eta^2}\right| \int_0^1 (1-s)a(s)\varepsilon ds$$

$$+\int_0^1 (1-s)a(s)\varepsilon ds$$

$$+\left|\frac{\alpha}{2-\alpha\eta^2}\right| \int_0^\eta (\eta-s)a(s)\varepsilon ds,$$

$$\leq \varepsilon\left(\left|\frac{2}{2-\alpha\eta^2}\right| \int_0^1 (1-s)a(s)ds\right)$$

$$+\varepsilon\left(\int_0^1 (1-s)a(s)ds\right)$$

$$+\varepsilon\left(\left|\frac{\alpha}{2-\alpha\eta^2}\right|\int_0^\eta (\eta-s)a(s)ds\right)$$

$$\leq \varepsilon M \leq \varepsilon_0.$$

Donc la famille $\{Au\,(t)\,,\ u \in B\}$ est équicontinue est par conséquent l'opérateur A est complètement continu.

Chapitre 3

Solution positive du problème aux limites (P)

Notons que l'un des théorèmes le plus utilisé lorsqu'il s'agit de la recherche du point fixe positif est le théorème de Guo-Krasnoslski. Ce théorème généralise celui des valeurs intermédiaires connu sur $\mathbb{R}$ à un espace de Banach quelconque, une généralisation qui assure l'existence d'un point fixe positif bien sûr si on prend un cône positif pour un opérateur complètement continue, ça veut dire continu et envoie les bornés dans les relativement compacts sous certaines condition imposées uniquement sur la frontière des certaines ouverts du cône K.

Dans ce chapitre notre but donc est d'étudié moyennant ce théorème l'existence de la solutions positive du problème à valeurs aux limites(1.1)-(1.2).

Définition 3.0.1. *$u(t)$ est dite une solution positive si $u(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,1]$.*

Supposons les hypothèses suivantes :

H_1) $f \in C([0;\infty);[0;\infty))$ telles que :

$$f_0 = \lim_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u} \quad \text{et } f_\infty = \lim_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u}$$

H_2) $a \in C([0,1];[0;\infty))$ et il existe $t_0 \in [\eta, 1]$ tel que $a(t_0) > 0$.

Notons que $f_0 = 0$ et $f_\infty = \infty$ est appelé cas super-linéaire et le cas $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$ est appelé cas sous-linéaire.

Nous énonçons à présent le théorème principal soit celui de l'existence de la solution positive du problème.

3.1 Théorème principal

Théorème 3.1.1. *Sous les hypothèses H_1 et H_2, le problème (1.1)-(1.2) a au moins une solution positive dans les deux cas super-linéaire ainsi que sous-linéaire.*

La preuve de ce théorème se base essentiellement sur le théorème de Guo-Krasnosels'kii et pour ce faire nous avons encore besoin des lemmes suivants :

Théorème 3.1.2. *[2]* ***(Guo-Krasnosels'Kii)***

Soit Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés d'un espace de Banach E tels que $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et K un cône de E.

$$\mathcal{A} : K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right) \to K$$

un opérateur complètement continu, tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

i) $||\mathcal{A}u|| \leq ||u||$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, *et* $||\mathcal{A}u|| \geq ||u||$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$,

ii) $||\mathcal{A}u|| \geq ||u||$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, *et* $||\mathcal{A}u|| \leq ||u||$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors l'opérateur $\mathcal{A}$ admet au moins un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right)$.

Lemme 3.1.1. *Soit* $0 < \alpha < 2/\eta^2$*, alors pour* $y \in C[0,1]$ *et* $y(t) \geq 0$ *, pour* $t \in (0,1)$*, l'unique solution du problème (2.1)satisfait :*

$$u(t) \geq 0, \quad t \in [0,1]$$

Preuve. Du fait que :

$$u''(x) = -y(t) \leq 0$$

nous savons que le graphe de $u(t)$ est concave vers le bas sur $]0,1[$, alors :

1) Si $u(1) \geq 0$, et $u(0) = 0$ alors :

$$\int_0^\eta u(s)ds \geq \frac{1}{2}\eta u(\eta) \tag{3.1}$$

où $\frac{1}{2}\eta u(\eta)$ est l'aire du triangle sous la courbe $u(t)$ de 0 à η pour $\eta \in [0,1]$

2) Si $u(1) < 0$, d'après(1.2), alors :

$$\int_0^\eta u(s)ds \leq 0$$

de plus puisque u est concave et $\int_0^\eta u(s)ds \leq 0$, alors $u(\eta) < 0$ et :

$$u(1) = \alpha \int_0^\eta u(s)ds \geq \frac{\alpha\eta}{2}u(\eta) > \frac{u(\eta)}{\eta}$$

□

Lemme 3.1.2. *Soit* $\alpha\eta^2 > 2$*, si* $y \in [0,1]$ *et* $y(t) \geq 0$*, pour tout* $t \in [0,1]$*, alors le problème (2.1) n'admet pas une solution positive.*

Preuve. Supposons que le problème a une solution positive u, alors :

1) Si $u(1) > 0$, alors $\int_0^\eta u(s)ds > 0$, cela implique que $u(\eta) > 0$, et

$$\frac{u(1)}{1} = \alpha \int_0^\eta u(s)ds \geq \frac{\alpha\eta}{2}u(\eta) = \frac{\alpha\eta^2}{2}\frac{u(\eta)}{\eta} > \frac{u(\eta)}{\eta}$$

ce qui contredit la concavité de u.

2) Si $u(1)=0 \Longrightarrow \int_0^\eta u(s)ds = 0$ et $u(t)=0 \ \forall t \in \left]0,1\right[$,

$\exists \tau \in \left]\eta, 1\right[$ telque $u(\tau)>0$ alors $u(0)=u(\eta)<u(\tau)$, ce qui contredit la concavité de u.

□

Lemme 3.1.3. *Soit* $0<\alpha<2/\eta^2$ *, alors pour* $y \in C\left[0,1\right]$ *et* $y \geq 0$ *l'unique solution du problème (2.1) satisfait :*

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u\left(t\right) \geq \gamma \left\|u\right\|$$

Où

$$\gamma := \min\left\{\eta, \frac{\alpha\eta^2}{2}, \frac{\alpha\eta(1-\eta)}{2-\alpha\eta^2}\right\}.$$

Preuve. Pour $u \in C\left[0,1\right]$, soit $\left\|u\right\| = u\left(\overline{\tau}\right)$. nous divisons la preuve en trois cas :

1) Si $\eta \leq \tau \leq 1$, et $\inf\limits_{t\in[\eta,1]} u\left(t\right) = u(\eta)$ alors il en resulte des propritètès de la concavité de u

$$\frac{u(\eta)}{\eta} \geq \frac{u(\tau)}{\tau} \geq u(\tau)$$

donc :

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u\left(t\right) \geq \eta \parallel u \parallel$$

2) Si $\eta \leq \tau \leq 1$, et $\inf\limits_{t\in[\eta,1]} u\left(t\right) = u(1)$ alors il en resulte des propritètès de la concavité de u :

$$u(1) = \alpha \int_0^\eta u(s)ds \geq \frac{\alpha\eta^2}{2}\left[\frac{u(\eta)}{\eta}\right] \geq \frac{\alpha\eta^2}{2}\frac{u(\tau)}{\tau} \geq \frac{\alpha\eta^2}{2}u(\tau).$$

donc :

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u\left(t\right) \geq \frac{\alpha\eta^2}{2} \parallel u \parallel$$

3) Si $\tau \leq \eta \leq 1$, et $\inf\limits_{t\in[\eta,1]} u\left(t\right) = u(1)$ en utilisant la concavité de u et (1.2)-(3.1),

On a :

$$\begin{aligned} u(\tau) &\leq u(1) + \frac{u(1)-u(\eta)}{1-\eta}(0-1) \\ &\leq u(1)\left[1 - \frac{1-2/\alpha\eta}{1-\eta}\right] \\ &= u(1)\frac{2-\alpha\eta^2}{\alpha\eta(1-\eta)} \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u\left(t\right) \geq \frac{\alpha\eta(1-\eta)}{2-\alpha\eta^2} \parallel u \parallel .$$

□

3.2 Preuve du théorème principal

On va prouver que le problème (1.1)-(1.2) possède au moins une solution positive dans les deux cas sur-linéaire et sous-linéaire.

Supposons que $0 < \alpha < 2/\eta^2$.

D'aprés **le lemme(2.2.1)** , u est solution du problème aux limites intégrale (1.1)-(1.2) si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur A où A est défini par :

$$\begin{aligned} Au(t) = \frac{2t}{2-\alpha\eta^2} & \int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds \\ & - \int_0^t (t-s)a(s)f(u(s))ds \\ & - \frac{\alpha t}{2-\alpha\eta^2} \int_0^\eta (\eta-s)^2 a(s)f(u(s))ds. \end{aligned}$$

Notons par :

$$K = \left\{ u \ /u \in C\left[0,1\right], \ u \geq 0, \ \inf_{t\in[\eta,1]} u\left(t\right) \geq \gamma \left\|u\right\| \quad \right\},$$

où :

$$\gamma = \min\left\{ \eta, \frac{\alpha\eta^2}{2}, \frac{\alpha\eta(1-\eta)}{2-\alpha\eta^2} \right\}.$$

Montrons que K vérifie les conditions d'un cône.

1) K et un sous ensemble non vide car on a déja montrer qu'il existe au mois une solution $u(t)$ telle que :

$$\inf_{t\in[0,1]} u\left(t\right) \geq \gamma \left\|u\right\| \ et \ u(t) \geq 0 \ \forall t \in [0,1].$$

2) On va montrer que K est convexe :

K ensemble convexe $\Rightarrow \ \forall x, y \in K, t \in [0,1]$

$$tx + (1-t)y \in K$$

On a : $x \in K$ alors :

$$x \in K \ alors \left\{x \ /x \in C\left[0,1\right], \ x \geq 0, \ \inf x\left(t\right) \geq \gamma \left\|x\right\| \quad \right\};$$

$$y \in K \ alors \left\{y \ /y \in C\left[0,1\right], \ x \geq 0, \ \inf y\left(t\right) \geq \gamma \left\|y\right\| \quad \right\};$$

$$\forall t \in [0,1], ona : \ tx \in K \ et(1-t)y \in K$$

On a donc :

$$tx + (1-t)y \in C[0,1] \ et \ tx + (1-t)y \geq 0$$

3) On a montre que $\inf(tx + (1-t)y) \geq \gamma \parallel tx + (1-t)y \parallel$

$$\begin{aligned}
\inf(tx + (1-t)y) &\geq \inf(tx) + \inf(1-t)y \\
&\geq \gamma t \parallel x \parallel + \gamma(1-t) \parallel y \parallel \\
&\geq \gamma \parallel tx \parallel + \gamma \parallel (1-t)y \parallel \\
&\geq \gamma \parallel tx + (1-t)y \parallel .
\end{aligned}$$

et on a aussi :

$$x \in K \ alors \left\{x \ /x \in C\left[0,1\right], \ x \geq 0, \ \inf x\left(t\right) \geq \gamma \left\|x\right\| \quad \right\}$$

et :

$$\lambda \geq 0 \ \Rightarrow \lambda x \in C[0,1] \, et \ \lambda x \geq 0$$

donc :

$\inf \lambda x(t) \geq \gamma \parallel \lambda x \parallel \Rightarrow \lambda \inf x(t) \geq \gamma\lambda \parallel x \parallel, \ donc \ \lambda x \in K.$

Si maintenant : $x \in K \Rightarrow x \geq 0 \ et \ si - x \in K \Rightarrow x \leq 0$ donc $x = 0$ donc K et un cône.

4) On montre que $AK \subset K$:

i) pour $u \in K$ alors on a :

$$Au(t) = \frac{2t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds$$
$$- \int_0^t (t-s)a(s)f(u(s))ds$$
$$- \frac{\alpha t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 a(s)f(u(s))ds.$$

Comme A est défini sur $C[0,1]$ alors $Au \in C[0,1]$.

ii)On montre que $Au \geq 0$:

On a d'aprés **le lemme(3.1.1)**, d'autre part ; $A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ et :

$$Au(t) = \frac{2t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds$$
$$- \int_0^t (t-s)a(s)f(u(s))ds$$
$$- \frac{\alpha t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 a(s)f(u(s))ds \geq 0.$$

iii) Montrons que :

$$\inf Au(t) \geq \gamma \parallel Au \parallel$$

On a d'aprés **le lemme(3.1.3)** u est l'unique solution du problème (1.1)-(1.2) satisfait :

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u\left(t\right) \geq \gamma \left\|u\right\|$$

où

$$\gamma = \min\left\{\eta, \frac{\alpha\eta^2}{2}, \frac{\alpha\eta(1-\eta)}{2-\alpha\eta^2}\right\}.$$

Si on applique $A : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ à cette inégalité on obtient :

$$\inf_{t\in[\eta,1]} Au\,(t) \geq \gamma \left\| Au \right\|$$

donc $AK \subset K$

Preuve. Cas sur-linéaire ($f_0 = 0$ *et* $f_\infty = \infty$)

Comme $f_0 = 0$, alors pour tout $\epsilon > 0$,il existe $H_1 > 0$ tel que :

$$f(u) \leq \epsilon u \quad pour\ 0 < u < H_1$$

satisfait :

$$\frac{2\epsilon}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \leq 1.$$

Soit Ω_1 un ensemble ouvert dans E défini par :

$$\Omega_1 = \{u \in C[0,1] \ / \ \|u\| < H_1\}.$$

Alors pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$ on a :

$$\begin{aligned} Au(t) &\leq \frac{2t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds \\ &\leq \frac{2t\epsilon}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)u(s)ds \\ &\leq \frac{2\epsilon}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \left\|u\right\| \\ &\leq \left\|u\right\|. \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\|Au\| \leq \|u\| \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_1.$$

Maintenant si $f_\infty = \infty$, alors il existe $\widehat{H}_2 > 0$ telle que $f(u) \geq \rho u$ pour $u > \widehat{H}_2$ où $\rho > 0$ est choisi de sorte que :

$$\rho\gamma\frac{2\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \geq 1.$$

Soit $H_2 = \max\left\{2H_1, \widehat{H}_2/\gamma\right\}$. Notons par Ω_2 l'ouvert :

$$\Omega_2 = \{u \in C[0,1], \|u\| < H_2 \}.$$

Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u(t) \geq \gamma \|u\| = \gamma H_2 \geq \widehat{H}_2,$$

et ainsi de :

$$\begin{aligned}
Au(\eta) &= \frac{2\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds - \frac{\alpha\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 a(s)f(u(s))ds \\
&- \int_0^\eta (\eta-s)a(s)f(u(s))ds \\
&= \frac{2\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds - \frac{\alpha\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta (\eta^2-2\eta s+s^2)a(s)f(u(s))ds \\
&- \frac{1}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta (2-\alpha\eta^2)(\eta-s)a(s)f(u(s))ds \\
&= \frac{2\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s)) + \frac{\alpha\eta^2}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta sa(s)f(u(s))ds \\
&- \frac{\alpha\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta s^2 a(s)f(u(s))ds - \frac{2\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta a(s)f(u(s))ds \\
&+ \frac{2}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta sa(s)f(u(s))ds \\
&= \frac{2\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_\eta^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds + \frac{2(1-\eta)}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta sa(s)f(u(s))ds \\
&+ \frac{\alpha\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta s(\eta-s)a(s)f(u(s))ds \\
&\geq \frac{2\eta}{2-\alpha\eta^2}\int_\eta^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds \\
&\geq \frac{2\eta\rho}{2-\alpha\eta^2}\int_\eta^1 (1-s)a(s)u(s)ds \geq \frac{2\eta\rho\gamma}{2-\alpha\eta^2}\int_\eta^1 (1-s)a(s)ds\,\|u\| \geq \|u\|
\end{aligned}$$

par conséquent :

$$\|Au\| \geq \|u\| \text{ pour tout } u \in K \cap \partial\Omega_2.$$

En vue de la premiére assertion du théoreme de Guo-Krasnosels'kii, il en résulte que A a un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)$ tel que $H_1 \leq \|u\| \leq H_2$.

Cas sou-lineaire c'est à dire $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$.

Comme $f_0 = \infty$, alors il existe $H_3 > 0$ tel que $f(u) \geq Mu$ pour $0 < u < H_3$ où $M > 0$ satisfait :

$$\frac{2\eta\gamma M}{2 - \alpha\eta^2} \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds \geq 1.$$

soit :

$$\Omega_3 = \{u \in C\,[0,1] \;\mid\; \|u\| < H_3\}$$

pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_3$

on obtient :

$$\begin{aligned} Au(\eta) &= \frac{2\eta}{2-\alpha\eta^2} \int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds - \frac{\alpha\eta}{2-\alpha\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^2 a(s)f(u(s))ds \\ &- \int_0^\eta (\eta - s)a(s)f(u(s))ds \\ &\geq \frac{2\eta}{2-\alpha\eta^2} \int_\eta^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds \\ &\geq \frac{2\eta\gamma M}{2-\alpha\eta^2} \int_\eta^1 (1-s)a(s)ds\, \|u\| \geq \|u\|\,. \end{aligned}$$

donc :

$$\|Au\| \geq \|u\| \ \ , \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_3.$$

Maintenant si $f_\infty = 0$ alors, il existe $\widehat{H}_4 > 0$ telle que $f(u) \leq \lambda u$ pour $u \geq \widehat{H}_4$ où $\lambda > 0$ est telle que :

$$\frac{2\lambda}{2-\alpha\eta^2} \int_0^1 (1-s)a(s)ds \leq 1.$$

Soit $H_4 = \max\left\{2H_3, \widehat{H}_4/\gamma\right\}$. Notons par Ω_2 l'ouvert :

$$\Omega_4 = \{u \in C[0,1], \|u\| < H_4\}\,.$$

Si $u \in K \cap \partial\Omega_4$, alors

$$\inf_{t\in[\eta,1]} u(t) \geq \gamma\,\|u\| = \gamma H_4 \geq \widehat{H_4},$$

par suite :

$$
\begin{aligned}
Au(t) &= \frac{2t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds - \frac{\alpha t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^2 a(s)f(u(s))ds \\
&- \int_0^t (t-s)a(s)f(u(s))ds \\
&\le \frac{2t}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))ds \\
&\le \frac{2\lambda \|u\|}{2-\alpha\eta^2}\int_0^1 (1-s)a(s)ds \le \|u\| .
\end{aligned}
$$

ainsi

$$\|Au\| \le \|u\| \ , \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_4.$$

En vue de la deuxième assertion du théoreme de Guo-Krasnosels'kii, il en résulte que A a un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega}_4 \setminus \Omega_3\right)$ tel que $H_3 \le \|u\| \le H_4$. Ce qui achève la démonstration du théorème et donc le problème (1.1)-(1.2) possède au moins une solution positive. □

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté un résultat d'existence de la solution positive d'un problème aux limites associé à une équations différentielle non linéaire d'ordre deux à conditions aux limites en trois points de type intégral.

Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii.

Bibliographie

[1] H.Brézis, Analyse Fonctionnelle,Théorie et Applications,Masson Paris1983.

[2] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[3] Jessada Tariboon and Thanin Sitthiwirattham,"Positive Solutions of a Nonlinear Three-Point Integral Boundary Value Problem",vol.2010

[4] H.Hervé," Fonctions homogène, concaves et convexes",université de bordeaux, France,16 mars 2014.

[5] A. Granas, J. Dugundji. Fixed point theory, Springer, Monographs in mathematics, 1985.

[6] A. Kolmogrov, S. Fomine. Elements de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir. 1977.

[7] B.Liu,"Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problem", Computers & Mathematics ith Applications. An International Journal,vol.44,no.1-2,pp.201-211,2002.

[8] N.Mostapha,"Etude de certains problèmes aux conditions aux limites pour l'equation différencielle non linéaire trois et quatre",Mémoire de Magistère en mathématique,promotion 2010-2011.

[9] Y. Ping Sun, Non trivial Solution For a Three Point Boundary Value Problem. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2004 (2004), No. 111, pp. 1-10.

[10] D. R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.