République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Melle Boumaza Ferial

Intitulé

Processus Ponctuels et fiabilité

Dirigé par Dr. Bouhadjar Slimane

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Ezzebsa Abdelali	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Bouhadjar Slimane	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Benchaabane Abbes	MCA	Univ-Guelma

Session septembre 2020

Remerciements

Je tiens à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a unis pour la réalisation de ce modeste travail, et de m'avoir donné la force et la patience de l'accomplir malgré la situation actuelle a cause de coronavirus

je remercie également **DR. EZZEBSA ABDELALI** d'avoir accepté d'être président de jury de soutenance.

Mon sincère gratitude à mon encadreur **Dr. BOUHADJAR SLIMANE**, pour la qualité de son

enseignement, ses conseils précieux et son intérêt incontestable qu'il porte à tous ses

étudiants. Je vous remercie de m'avoir encadrée, orientée, et aidée sans cesse.

Je remercie également ***Dr.*** **BENCHAABEN ABBES** d'avoir accepté de faire part de ce jury et d'examiner ce travail.

Enfin, je n'oserais oublier de remercier tout le corps professoral de ***l'Université 8 Mai 1945 Guelma Département mathématique*** pour le travail énorme qu'ils effectuent pour nous créer les conditions les plus favorables pour le déroulement de nos études

DEDICACES

C’est tout simplement avec toute la gratitude , l’amour, le respect et la reconnaissance, que je dédie ce modeste mémoire…

A ton âme cher père….

Vous étiez et vous resteriez mon exemple éternel, vous resteriez graver dans mon cœur sa tous jamais. Que Dieu ait ton âme dans son saint miséricorde.

A ma source de joie ma mère …..

Elle m’a donné l’espoir et le courage pour les moments difficiles .Aucune dédicace ne saurait exprimer l’amour, l’estime, le dévouement et le respect que j’ais toujours eu pour toi .

A mes sœurs Samia et Manel qui ma soutenu
A mon cher et unique frère Mohamed amine ….

Merci d’être toujours là pour moi, d’être mes conseillé, de m’avoir encouragée et m’accompagner pendant ce petit bout de chemin. Je vous souhaite pleine de réussite.

A toutes ma famille maternelle et paternelle …..

Malgré la distance, vous êtes toujours dans mon cœur, je vous remercie pour votre hospitalité sans égal et votre affection si sincère.

A ***toutes mes chères copine :Basma , nada ,chaima ,chiraz , fatima, insaf ,bouthaina,ines, imen, randa et Racha…..***

En témoignage de l’attachement, de l’amour et de l’affection que je port pour vous.

A tous mes proffesseurs ,A tous ma promo universitaire 2019/2020….

Résumé

Afin d'estimer le taux de panne d'un système, qui est l'objectif de ce mémoire, et avec une vision processus ponctuel qui nous permet d'obtenir des résultats, en donnant une proposition qui explique les instants successifs de défaillance d'un matériel (ou système) de taux de défaillance $\lambda(t)$ se modélisent par ce processus (de paramètre $\lambda(t)$) , en utilisant plusieurs méthodes de probabilités et statistique on va obtenir une bonne estimation pour le taux de défaillance de système .

Pour réaliser cet objectif, on a besoin des notions de base sur la fiabilité et quelques propriétés importantes concernant les processus ponctuels, et c'est ce que nous allons aborder dans les deux premiers chapitres.

Table des matières

Introduction

La fiabilité est un concept qui intéresse de plusieurs domaines de l'activité humaine économique, scientifique, technique et industriel minutieusement liée à des notions de sécurité de fonctionnement, de qualité, d'efficacité ou de performance [2] , [3]. On peut dire aussi que la fiabilité est l'étude des défaillance des systèmes essentiellement des produits manufacturés et cette étude est importante a différents niveaux de la vie du matériels, ou veut dire aussi niveaux de la planification ou de fabrication, afin de pouvoir élever le degré de fiabilité selon les normes spécifiées ; au niveau de l'exploitation, afin d'estimer les incidences du support logistique sur ses conditions d'utilisation ; au niveau des services de maintenance, dans le but de prévoir les dates de prophylaxie et d'arrêts préventifs ; au niveau des gestionnaires des pièces de recharge, afin d'estimer le volume des stocks de sécurité et assurer par là même la disponibilité de la pièce, en évitant les stocks morts etc. ... Donc la théorie de la fiabilité a évolué l'étude des méthodes de probabilité et statistique permettant d'améliorer les prévisions de panne ou le contrôle de qualité nécessaire à la sortie d'une chaîne de production. Plus les caractéristiques d'un produit ou d'un système, ne sont appréhendées tôt dans son cycle de vie, moins les risques financiers ou reliés à la sûreté des installations dus au non réalisation des performances attendues sont élevés. Dans un contexte d'exigences de systèmes de plus en plus fiables et sûrs, et de durées de garanties croissantes, il est impératif de vérifier le plus tôt possible que les performances des systèmes sont conformes au cahier des charges.

L'idéal, pour identifier la fiabilité du produit ou système avant même sa fabrication en série, est de procéder de façon classique à des séries d'essais sur des prototypes quand ils existent. Le problème est l'investissement en temps et en quantité de matériel important demandé car les matériels étant de plus en plus fiables, l'observation de défaillances est de moins en moins probable. Les industriels ne peuvent plus se permettre de tels coûts financiers. A l'extrême, certains systèmes se fabriquent à l'unité, ce qui rend les politiques d'essai difficiles.

Ainsi, cette problématique a été la source, pour la communauté scientifique, de nombreuses voies de recherche. Celles-ci sont basées principalement sur la modélisation stochastique des apparitions des défaillances au cours du temps et sur l'estimation statistique des paramètres des modèles à partir des résultats d'essai.

Notre but, dans ce mémoire est l'estimation de taux de défaillance d'un système donc l'étude de sa fiabilité [4] (car ses deux paramètres sont distinct (liée)) en utilisant les modélisations par un processus ponctuel, plus précisant on suppose que les instants successifs de défaillance $\lambda(t)$ se modélise par un processus ponctuel (de paramètre $\lambda(t)$), en suite on utilise des méthodes de probabilités et statistique pour obtenir une bonne estimation du taux de défaillance.

Le mémoire est composé de trois chapitres

Chapitre 1 : Notions de base sur la théorie de fiabilité

Chapitre2 : Notions générales sur les processus ponctuel,

Chapitre 3 :Processus ponctuel et fiabilité qui est la base de ce travail, totalement on va utiliser la modélisation par processus ponctuel pour estimer le taux de panne d'un système. Ce processus est un type de processus stochastique nous l'appelons aussi processus de comptage.

Chapitre 1

Notions générales sur la fiabilité

Dans ce chapitre on va rappeler quelques notions de base concernant la fiabilité qu'on utilisera après, et on rappelle brièvement quelques résultats sur les systèmes en série et les systèmes en parallèle [2] , [3].

1.1 Définitions générales

La fiabilité sert à étudier l'aptitude du système à fonctionner correctement durant une période déterminée dans des conditions d'utilisation et de maintenance spécifiées d'exploitation. Aussi la fiabilité est la probabilité de n'avoir aucune défaillance pendant la durée t.

Durée de vie d'un système.

Le terme système au sens large, il peut n'avoir qu'un composant. Ce système est mis en marche a la date $t = 0$ et il s'agit d'évaluer la date de première défaillance que nous noterons, dans la suite, "T". C'est une variable aléatoire positive de fonction de répartition F.

La variable T est appelée la durée de vie (life time) du système (le temps de défaillance du système), et on a :

$$F(t) = P(T \leq t)$$

Fiabilité d'un système

La fiabilité d'un système est noté "R". C'est la probabilité de la durée de vie de bon fonctionnement du système,

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= 1 - F(t). \end{aligned}$$

Remarques

1) Comme la fonction F est croissante, la fonction de fiabilité R est une fonction décroissante continue a droite en tout point de $\mathbb{R}_{+}$.

2) $\lim\limits_{t \to \infty} R(t) = 0$ et $R(0) = 1$.

3) T une variable aléatoire généralement continue mai parfois elle peut être discrète.

Durée de survie

Le terme durée de survie désigne généralement le temps écoulé jusqu'à la survenue d'un système précis, donc si un système a bien fonctionné jusqu'à la date t, le temps d'attente de la panne est appelée la durée de survie du système au temps t et elle représente la variable aléatoire $(T - t)$ à condition $T > t$, nous la notons "T_{t}".

La distribution deT_{t} est donnée par

$$\begin{aligned} P(T_{\mathrm{t}} > x) &= P(T - t > x/T < t) \\ &= \frac{\mathrm{R}(t + \varkappa)}{\mathrm{R}(\varkappa)}, \text{ pour } \varkappa \geq 0. \end{aligned}$$

C'est au-delà de ce concept que nous allons présenter des autres caractéristiques principales de fiabilité, nous allons commencer par analyser le comportement de la fonction de répartition de T_{t} lorsque la variable tend vers zéro.

$$\begin{aligned} P\left(T \leq\ x\ \right) &= \frac{\mathrm{R}\left(\mathrm{t}\right)-\mathrm{R}\left(\mathrm{t}+\varkappa\right)}{\mathrm{R}\left(\mathrm{t}\right)}, \\ &= x\frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{t}\right)}{\mathrm{R}\left(\mathrm{t}\right)}\ +0\left(x\right). \end{aligned}$$

C'est une fonction de $\varkappa$, presque linéaire, dont le coefficient proportionnalité est $\frac{\mathrm{f(t)}}{\mathrm{R(t\ )}}$.

1.2 Taux de panne (ou taux de défaillance)

Le coefficient $\frac{\mathrm{f(t)}}{\mathrm{R(t)}}$ est appelé taux de défaillance (ou hasard rate) et on le note $h\left(t\right)$ ou h, il est donc défini par :

$$\begin{aligned} h\left(t\right) &= \frac{R\left(t\right)-R\left(t+\varkappa\right)}{\varkappa.R\left(t\right)} \\ &= -\left[\log R\left(t\right)\right]'. \end{aligned}$$

Le taux de défaillance est une expression relative à la fiabilité des équipements et chacun de leurs composants, donc il veut dire une grandeur permettant de mesurer la vitesse d'apparition des pannes. Il est possible, en effet, d'interpréter $h\left(t\right)$ comme le pourcentage moyen de pannes par unité de temps, qui apparaissent à la date $t=0$, un groupe de N éléments indépendants et identiques sont mis en fonctionnement. Ces éléments tombent en panne, les uns après les autres. Un contrôle est effectué pour constater les dégâts, il reste N_{t} élément en bon état. La loi de $N\left(t\right)$ est binomiale

(N essais avec probabilité R (t) de réussite de chaque essais).

$$P(N(T)=K)=\frac{N!}{(N-K)!\,K!}(R(t))^{k}(1-R(t))^{N-K}$$

N le nombre moyen d'éléments en fonctionnement à la date t est donc :

$$E(N(t))=NR(t).$$

Le taux de défaillance d'un élément peut donc être traduit en termes d'espérance

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{N.R(t)-N.R(t+\varkappa)}{\varkappa.N.R(t)} \\ &= \lim_{\varkappa\to 0}\frac{E(N(t))-E(N(t+\varkappa))}{\varkappa.E(N(t))}. \end{aligned}$$

C'est le rapport entre le nombre moyen de pannes par unité de temps et le nombre moyen d'éléments en bon fonctionnement, il traduit une vitesse dégradation.

La notion de "taux de défaillance "est pour le fiabiliste, une caractéristique importante. Sa connaissance suffit à déterminer la fiabilité grâce à la relation suivante :

$$R(t)=\exp\left(-\int_0^t h(u)\,du\right).$$

La primitive H de h s'annulant en 0 est appelée la fonction de risque (ou hasard fonction).

$$H(t)=\log\left(\frac{1}{R(t)}\right).$$

Dans les applications concrètes, il est très fréquent de supposer le taux de défaillance constant. Il faut dire que les calculs s'en trouvent grandement simplifiés. Dans ce cas, la fonction H est linéaire et la distribution est exponentielle.

La seule distribution de durée de vie vérifiant $R(0)=1$, et dont le taux de défaillance est constant, égale à a, est la loi exponentielle de paramètre a, avec :

$$F(t) = 1 - e^{-a\varkappa}.$$

Démonstration. On suppose que la durée de vie T a une densité de la forme :

$$f(t) = ae^{-a\varkappa}.$$

La fiabilité s'écrit alors :

$$R(t) = \exp(-at).$$

Le taux de défaillance est donc :

$$\begin{aligned} h(t) &= -\left[\log(R(t))\right]' \\ &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= a. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $h(t)$ est constant et vaut a. Alors :

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left(-\int_0^t h(\varkappa)\,d\varkappa\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t a.d\varkappa\right), \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$R(t) = \exp(-at),$$

c'est-à-dire :

$$F(t) = 1 - \exp(-at).$$

Donc la loi est exponentielle.

La durée de vie moyenne. (MTTF)

L'espérance de la durée de vie T joue un grand rôle en fiabilité ; c'est "le temps moyen de défaillance " nous le notons "m" :

$$m = E(t),$$

c'est une mesure importante de la qualité d'un système, pour la calculer, il est préférable d'utiliser la formule d'intégration suivante :

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^{\infty} (1 - F(u))\, du \\ &= \int_0^{\infty} R(u)\, du. \end{aligned}$$

L'espérance de survie à la date t est appelée "durée moyenne de vie résiduelle de panne (M.R.T.F. Mean Residual Time to Failure), elle est notée "$m(t)$".

La formule de la durée de vie résiduelle est donnée par :

$$m(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^{+\infty} R(u)\, du.$$

1.3 Fonction de structure

Considérons maintenant un système de n éléments (composants), en supposant que tous les composants sont indépendants. On précis qu'un composant ne possède que deux états ; il fonctionne ou il est en panne. Si X_i est l'état du composant i ,on pose :

$$X_{i=}\begin{cases} 1, \text{ si le i}^{\text{ème}} \text{ composant fonctionne} \\ 0, \text{ si le i}^{\text{ème}} \text{ composant en panne .} \end{cases}$$

Cette dichotomie est variable aussi pour le système :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, \text{ si le système fonctionne} \\ 0, \text{ si le système en panne.} \end{cases}$$

On dit que la fonction Φ est la fonction de structure du système .alors on déduit qu'on peut écrire la fiabilité du système comme suit :

$$\begin{aligned} R &= P(\Omega(x) = 1) \\ &= E(\Phi(x)). \end{aligned}$$

1.4 Montage en série (système en série)

Un montage en série est un système composé de n composants disposés linéairement, si au moins un composant est en panne on dit que ce système est tombe en panne.

La fonction de structure du système est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi &= \min_{1\leq i\leq n} X_i \\ &= \prod_{i=1}^{n} X_i, \end{aligned}$$

où $X_{1,}X_2, ..., X_n$ sont les états respectifs des composants 1,2,....,n.

On note la durée de survie (le temps de panne) du système :

$$T = \min_{1\leq i\leq n} T_i,$$

où T_i est le temps de panne du composant i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

La fiabilité R est le produit des fiabilités :

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t),$$

où R_i(t) est la fiabilité du composant i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= P\left(\min_{1 \leq i \leq n} T_i > t\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t), \end{aligned}$$

puisque on a supposé que les composants sont indépendants.

Donc,

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t).$$

1.5 Montage en parallèle (système en parallèle)

Un montage en parallèle est composé de n éléments (composants) disposés en parallèle, si tous les composants sont en panne, le système complet tombe en panne.

La fonction de structure du système est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \max_{1 \leq i \leq n} X_i \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - X_i). \end{aligned}$$

Le temps de panne du système est donnée par :

$$T = \max_{1 \le i \le n} T_i.$$

La fiabilité est donnée par :

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t)),$$

où $R(t)$ est la fiabilité du composant i, $i = 1,2,\ldots,n$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= 1 - P(T \le t) \\ &= 1 - P\left(\max_{1 \le i \le n} T_i \le t\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P(T_i > t)]. \end{aligned}$$

Donc,

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t)).$$

Chapitre 2

Notions générales sur les processus ponctuels

En probabilité et statistique un processus ponctuel est un type particulier de processus stochastiques pour lequel une réalisation est un ensemble des points isolés du temps et /ou de l'espace [5].

2.1 Processus ponctuels

On observe un phénomène dont les instants d'occurrence forment une suite croissante de variables aléatoires positives qu'on la note $(T_n)_{n\geq 1}$, les variables T_n peuvent prendre la valeur $+\infty$.

Définition 2.1.1. La trace de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}_+$ est appelée processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$. On note N sa fonction de comptage définie par

$$N(t) = \sum_{n\geq 1} 1\{T_n \leq t\}.$$

Si on connait la loi du processus $(T_n)_{n\geq 1}$, on peut aussi connaitre la loi du processus $N = N(t)_{n\geq 1}$. L'inverse est aussi vrai.

Définition2.1.2. Un processus ponctuel est simple si les variables aléatoires T_n sont presque-sûrement deux à deux distinctes sur $\mathbb{R}_+$, c'est à dire si pour tout n et tout ω on a

$$T_n(\omega) < +\infty \Rightarrow T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega).$$

2.2 Processus de poisson

Le processus de poisson sur la droite est un processus à temps continu et valeurs entières positives, on dit encore que c'est un processus de comptage que l'on note $\{N(t) : t \geq 0\}$. Il s'agit d'étudier le nombre aléatoire $N(t)$ de certains évènements qui se produisent dans un intervalle de temps $[0,t]$ donné sa grande popularité dans les applications vient notamment du fait que beaucoup de calculs le concernant explicites.

Ce processus de comptage vérifié plusieurs propriétés avec des conditions précisées et il a aussi plusieurs définitions.

Le processus de comptage $\{N(t) : t \geq 0\}$ est dit à accroissement stationnaires, si quel que soit k, quelle que soit la suite $(I_1, ..., I_k)$ et quelle que soit la translation, les lois ζ et ζ' coïncident.

Lorsque $k = 2$, on peut reprendre cet énoncé de la façon suivante : si le processus de comptage est accroissement stationnaire, alors la loi de probabilité du nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps donné ne dépend que de longueur de cet intervalle

On dit qu'un processus de comptage est accroissement indépendant, si le nombre de tops se produisant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.

En probabilité on dit qu'un processus de comptage est localement continu si pour $t \geq 0$, on a

$$\lim_{h \to 0} p\{N\{t+h\} - N(t) \geq 1\} = 0.$$

Les processus de Poisson sont des processus de comptage qui jouent un rôle prépondérant.

Définition 2.2.1. Un processus de comptage est appelé processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ de densité $\lambda > 0$ si

(i) $N(0) = 0$;

(ii) le processus est accroissements indépendants ;

(iii) le nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps de longueurs t≥0 suit la loi de poisson de paramètre λt , c'est-ā-dire, pour tous $s \geq 0$ et tout $t \geq 0$, on a :

$$P\{N(s+t) - N(t) = n\} = e^{-\lambda t \frac{(\lambda t)^n}{n!}} \;\; (n \geq \; 0).$$

Chapitre 3

Processus ponctuel et fiabilité

L'objectif de ce mémoire et plus précisément l'objectif de ce chapitre est d'exprimer comment traiter un problème de statistique sur des durée de vie avec une vision "processus ponctuel ", pour arriver avoir des résultats dans un cadre fort général.

Dans le cadre non paramétrique ou dans le cadre semi-paramétrique ci-dessus, cette approche a permis de construire des résultats jusqu'alors inconnus sur le comportement asymptotique des estimateurs.

Dans le cas paramétrique, les statisticiens n'ont pas prévu les potentiels des processus ponctuels pour écrire la possibilité d'un échantillon de données surveillées et de conclure l'estimateur du maximum de possibilité de paramètres [4]. L'avantage de la présentation à l'aide des processus ponctuels est de donner une vision conjonctive qui nous parait assez esthétique.

Enfin, dans certains cas les données ne se présentes pas sous la forme d'un échantillon surveillé classique, elles peuvent aussi être hétérogènes. Alors les processus ponctuels fournissent une modélisation bien commode. Il existe deux estimateurs pour étudier les processus ponctuels et fiabilité.

3.1 Généralités sur l'estimation

Dans ce paragraphe on rappelle en brèf la notion d'estimation [1].

Supposons que la loi de distribution de la population est indexée par θ appartenant à un espace Θ. Il s'agit d'estimer θ sur la base d'un échantillon prélevé de cette population.

Définition 3.1.1. Un estimateur est une statistique dont la valeur est une estimation du paramètre θ.

Exemple. Si la distribution de la population est normale $N(\mu, \sigma^2)$ et si μ et σ^2 ne sont pas connues alors

$$\theta = \left(\mu, \sigma^2\right) \text{ et } \Theta = (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty).$$

Définition 3.1.2. Un estimateur $T = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ est appelé sans biais si $E(T) = \theta$ où θ est le paramètre inconnu à estimer.

Le biais de l'estimateur est $b_T = (\theta - E(T))$.

3.2 Estimateur de Nelson-Aelen [4]

3.2.1 Psychologie de la découverte de la construction de cet estimateur

On observe un matériel de taux de défaillance $s \to \lambda(s)$ qui subit de petites réparations.

On a la fonction $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$ on veut l'estimer, on déduit un estimateur de la fiabilité $R(t) = \exp(-\Lambda(t))$.

On note $(T_i)_{i \geq 1}$ les instants successifs de défaillance observés, on note aussi $N(t)$ le nombre de défaillances observées jusqu'à l'instant t.

Dans le cas d'observations synchronisées de n matériels fonctionnant indépendamment et réparés selon les modalités ci-dessus, le nombre total $N(t)$ de défaillances observées avant l'instant t est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $n\Lambda(t)$, on conclut que $N(t)$ parmi les bons estimateurs de $n\Lambda(t)$, et encore un bon estimateur de $\Lambda(t)$ est :

$$\Lambda\prime(t) = \frac{N(t)}{n} = \sum_{\{i:T_i \leq t\}} \frac{1}{n},$$

où les T_i sont les instants successifs de défaillance de l'ensemble des matériels.

Si maintenant nous constatons n_1 matériels avant le temps t_1 et n_2 matériels entre les temps t_1 et t $(t_1 > t)$, nous proposons le résultat suivant :

$$\frac{N(t_1)}{n_1} = \sum_{i:T_i \leq t} \frac{1}{n_1},$$

comme estimateur de $\Lambda(t_1)$, et

$$\frac{N(t) - N(t_1)}{n_2} = \sum_{i:t_i < T_i \leq t} \frac{1}{n_2},$$

comme estimateur de $\int_{t_1}^{t} \lambda(s)\,ds$. Alors nous obtenons comme estimateur de $\Lambda(t)$:

$$\Lambda\prime(t) = \sum_{\{i:T_i \leq t_1\}} \frac{1}{n_1} + \sum_{\{i:t_1 < T_i \leq t\}} \frac{1}{n_2}.$$

Si on note $Y(s)$ le nombre de matériels observés à l'instant s d'une façon générale, les considérations précédentes rejoins-nous à attraper pour estimateur de $\Lambda(t)$:

$$\Lambda\prime = \sum_{\{i:T_i \leq t\}} \frac{1}{Y(T_i)}.$$

Dans les cas étudiés en haut, le nombre de matériels sous observations à l'instant s est déterministe, mai Nelson a suggéré le même estimateur dans un cadre plus général, peut être le nombre $Y(s)$ de matériels sous observation aléatoire, mai dans ce cas il ne doit dépendre que de "l'histoire des matériels "jusqu'à l'instant s. C'est le cas des plans d'essais de type 2 ou des plans mixtes. Cela inclut le cas où le matériels n'est pas réparé. Par contre dans le cas où le matériel est remis à neuf après chaque défaillance, on doit considérer qu'on a un nouveau matériel et que la date du début de l'essai est l'instant $t = 0$.

Dans le cas où $Y(s)$ est aléatoire, il convient de prendre la fonction $s \longrightarrow Y(s)$ continue à gauche, cette dernière condition enlève d'ailleurs les ambiguïtés de détermination de $Y(s)$ aux instants de saut. Si $Y(s)$ varie à un instant T_i, la valeur à prendre pour $Y(s)$ est le nombre de matériels observés juste avant la défaillance à l'instant T_i.

3.2.2 Quelques propriétés

Nous observons un processus ponctuel simple $(T_i)_{i\geq 1}$ de fonction de comptage N et nous supposons que l'intensité a du processus n est sous forme multiplicative, c'est - à-dire s'écrit $a(s) = Y(s)\lambda(s)$, les fonctions Y et λ étant positives. La fonction λ est déterministe et c'est elle que nous cherchons à estimer. La fonction Y est déterministe ou aléatoire mais dans ce dernier cas nous supposons qu'elle est adaptée à la filtration $\mathcal{F}$ et continue à gauche.

On suppose λ intégrable sur tout compact et on pose :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t)\, ds.$$

On suppose que le processus $s \rightarrow \frac{1}{Y(s)} 1_{\{Y(s)\neq 0\}}$ est borné sur tout compact, c'est en particulier le cas si Y est à valeur dans $\mathbb{N}$, ensuite pour tout t, $\int_0^t \frac{1}{Y(S)} 1_{\{Y(s)\neq 0\}} \lambda(s)\, ds$ est intégrable.

On définit l'estimateur de Nelson-Aalen $\hat{\Lambda}(t)$ de $\Lambda(t)$ par :

$$\hat{\Lambda}(t) = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{Y(T_i)} 1_{\{T_i \leq t\}}.$$

Proposition 3.2.2.1. On considère un modèle à intensité multiplicative et on pose :

$$M(t) = N(t) - \int_0^t Y(s)\lambda(s)\,ds.$$

Alors le processus $M\prime$ définit par

$$M\prime(t) = \int_0^t \frac{1}{Y(s)} 1_{(Y(s)\neq 0)} dM(s) = \Lambda\prime(t) - \int_0^t \lambda(s) 1_{\{Y(s)\neq 0\}} ds,$$

est une martingale de processus croissant $\tilde{A}$ donné par :

$$\tilde{A}(t) = \int_0^t \frac{1}{Y(s)} 1_{\{Y(s)\neq 0\}} \lambda(s)\,ds,$$

et $M\prime - \tilde{A}$ est une martingale.

Corollaire 3.2.2.1. L'estimateur de Nelson-Aalen $\Lambda\prime$ possède les propriétés suivantes

$$\dot{E}(\Lambda\prime(t)) - \Lambda(t) = -\int_0^t \lambda(s) P(Y(s) = 0)\,ds,$$

$$var\left(\Lambda\prime(t) - \int_0^t \lambda(s) 1_{\{Y(s)\neq 0\}} ds\right) = \dot{E}\left(\int_0^t \frac{1}{Y(s)} 1_{\{Y(s)\neq 0\}} \lambda(s)\,ds\right),$$

et

$$\sigma\prime^2(t) = \int_0^t \frac{1}{Y^2(s)} dN(s) = \sum_{i:T_i\leq t} \frac{1}{Y^2(T_i)},$$

est un estimateur sans biais de $var\left(\Lambda\prime(t) - \int_0^t \lambda(s) 1_{\{Y(s)\neq 0\}} ds\right)$.

Preuve. Par les notations de proposition 3.2.2.1. puisque le processus $M\prime$ est une martingale nulle en 0, nous obtenons

$$\dot{E}(\Lambda\prime(t)) = \dot{E}\left(\int_0^t \lambda(s) 1_{\{Y(s)\neq 0\}} ds\right),$$

d'où le premier résultat.

Puisque $M\prime$ et $M\prime^2 - \tilde{A}$ sont des martingales nulles en 0, nous avons :

$$var\left(\Lambda\prime(t)-\int_0^t\lambda(s)\,1_{\{Y(s)\neq0\}}ds\right)=\dot{E}\left(M\prime^2(t)\right)=\dot{E}\left(\tilde{A}(t)\right),$$

d'où le deuxième résultat.

Puisque la troisième confirmation, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}\dot{E}(\sigma\prime(t)) &= \dot{E}\left(\int_0^t\frac{1}{Y^2(s)}1_{\{Y(s)\neq0\}}dN(s)\right)\\ &= \dot{E}\left(\int_0^t\frac{1}{Y^2(t)}1_{\{Y(s)\neq0\}}Y(s)\,\lambda(s)\,ds\right)\\ &= \dot{E}\left(\int_0^t\frac{1}{Y(s)}1_{\{Y(s)\neq0\}}\lambda(s)\,ds\right).\end{aligned}$$

L'estimateur de Nelson-Aalen $\Lambda\prime(t)$ est un estimateur sans biais $\Lambda(t)$ de variance $\dot{E}\left(\int_0^t\frac{\lambda(s)}{Y(s)}ds\right)$, si Y non nul sur [0,t] ;dans le cas générale le biais est d'autant plus faible que $P(Y(s)=0)$ est faible (pour tout $s\leq t$).

Vu les formules précédentes, intuitivement la qualité de l'estimateur Nelson–Aalen du taux de hasard cumulé est d'autant meilleur que le nombre de matériels observé est grand, ce qui est bien naturel ! L'objet du paragraphe suivant est de préciser ceci en étudiant le comportement asymptotique de Λ lorsque Y tend vers l'infini en un certain sens.

Mais avant tous ça, nous allons donner une proposition qui autoriser d'avoir des intervalles de confiance (non asymptotique) pour $\Lambda(t)$, tout au moins lorsque Y s'anulle pas ou lorsqu'on est capable de contrôler les biais (qui égal à $\int_0^t\lambda(s)\,P(Y(s)=0)\,ds$).

Proposition 3.2.2.2. pour tout s on a a un réel strictement positif tel que $\frac{1}{Y(s)}1_{\{Y(s)\neq0\}}\leq\frac{1}{a}$, alors pour tout $c>0$:

$$P\left(\int_0^t\lambda(s)\,1_{\{Y(s)\neq0\}}ds\geq\frac{c}{a}-\frac{1}{a}\sum_{i:T_i\leq t}\log\left(1-\frac{a}{Y(T_i)}\right)\right)\leq e^{-c}.$$

en particulier si $Y>0$:

$$P\left(\Lambda\left(t\right)\geq\frac{c}{a}-\frac{1}{a}\sum_{i:T_i\leq t}\log\left(1-\frac{a}{Y\left(T_i\right)}\right)\right)\leq e^{-c}.$$

Preuve. Le processus X défini par

$$\begin{aligned}X\left(t\right) &= \exp\left(a\int_0^t\lambda\left(s\right)1_{\{Y(s)\neq0\}}ds-a\Lambda\prime\left(t\right)\right)\prod_{i:T_i\leq t}\left(1-\frac{a}{Y\left(T_i\right)}\right)e^{\frac{a}{Y(T_i)}}\\ &= \exp\left(a\int_0^t\lambda\left(s\right)1_{\{Y(s)\neq0\}}ds+\sum_{i:T_i\leq t}\log\left(1-\frac{a}{Y\left(T_i\right)}\right)\right),\end{aligned}$$

est une martingale locale positive et égale à 1 en 0 ,par suite $\dot{E}\left(X\left(t\right)\right)\leq1$ et

$$P\left(X\left(t\right)\geq e^c\right)\leq e^{-c}\dot{E}\left(X\left(t\right)\right)\leq e^{-c},$$

d'où le résultat.

3.2.3 Comportement asymptotique

Nous supposons que notre modèle dépend d'un paramètre n, le processus ponctuel simple observé a pour fonction de comptage N_n

$$N_n\left(t\right)=\sum_{i\geq1}1_{\left\{T_i^{(n)}\leq t\right\}},$$

et son intensité est $a_n\left(s\right)=Y\left(s\right)\lambda\left(s\right)$. Les conditions sur a_n et Y_n étant les mêmes que précédemment :

♦ $\int_0^t Y_n\left(s\right)\lambda\left(s\right)ds<+\infty$,

♦il existe une constante $K_{n,t}$ telle que :

$$\forall s\leq t,\quad \frac{1}{Y_n\left(s\right)}1_{\{Y_n(s)\neq0\}}\leq K_{n,t}$$

♦le processus Y_n est adapté et continu à gauche.

L'estimateur de Nelson–Aalen de Λ dépond donc du paramètre n, nous le notons $\Lambda\prime_n$. Nous allons étudier son comportement lorsque n tend vers l'infini.

Ce paramètre n est par exemple le nombre de matériels testés et $Y_n(s)$est, comme précédemment le nombre de matériels sous observation à l'instant s.

Consistance

D'abord nous présentons le résultat dont l'énoncé est le plus simple et qui correspond aux applications usuelles en fiabilité.

Théorème 3.2.2.1. On suppose Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, si :

$$\forall s \leq t \qquad Y(s) \overrightarrow{n \to +\infty}^{p} + \infty,$$

alors :

$$\sup_{s \leq t} |\Lambda\prime_n(s) - \Lambda(s)| \overrightarrow{n \to \infty}^{p} 0.$$

Maintenant on donne le théorème plus général.

Théorème 3.2.2.2. Si

$$\inf_{s \leq t} Y_n(s) \overrightarrow{n \to \infty}^{p} + \infty,$$

on plus généralement si :

$$\int_0^t \frac{1}{Y_n(s)} 1_{\{Y(s) \neq 0\}} \lambda(s)\, ds \overrightarrow{n \to \infty}^{p} 0, \qquad (1)$$

$$\int_0^t 1_{\{Y(s) = 0n\}} \lambda(s)\, ds \overrightarrow{n \to \infty}^{p} 0, \qquad (2)$$

alors

$$\sup |\Lambda\prime(s) - \Lambda(s)| \overrightarrow{n \to \infty}^{p} 0.$$

Preuve. On pose $\Lambda_n^*(t) = \int_0^t \lambda(s)\, 1_{\{Y(s)\neq 0\}} ds$ et $M\prime_n = \Lambda\prime_n - \Lambda_n^*$, par la proposition (1) appliqué à la martingale $M\prime_n$ donnent :

$$P\left(\sup\left|\Lambda\prime_n(s) - \Lambda_n^*(s)\right| > \eta\right) \leq \frac{\delta}{\eta^2} + P\left(\int_0^t \frac{1}{Y_n(s)} 1_{\{Y(s)\neq 0\}} \lambda(s)\, ds > \delta\right).$$

La condition (1) entraine alors que :

$$\sup_{s\leq t}\left|\Lambda\prime_n(s) - \Lambda_n^*(s)\right| \overrightarrow{n\to\infty}^{p} 0.$$

Voilà la fin de la démonstration :

$$\left|\Lambda_n^*(s) - \Lambda(s)\right| = \int_0^t 1_{\{Y(u)=0\}} \lambda(u)\, du \leq \int_0^t 1_{\{Y_n(u)=0\}} \lambda(u)\, du,$$

et en utilisant la condition (2).

Normalité asymptotique

Comme précédemment, nous commençons par donner l'énoncé le plus simple.

Théorème 3.2.2.3. On suppose qu'il existe une fonction φ définit sur $[0,t]$ et telle que :

1) $\inf_{s\leq t} \varphi(s) > 0$,
2) $\sup_{s\leq t}\left|\frac{1}{n} Y(s) - \varphi(s)\right| \overrightarrow{n\to\infty}^{p} 0$,
3) $\int_0^t \frac{\lambda(s)}{\varphi(s)} ds < +\infty$.

On pose, pour $s \leq t$:

$$c(s) = \int_0^t \frac{\lambda(u)}{\varphi(u)} du,$$

alors, pour tout $k \geq 1$ et $0 \leq s_1 < \cdots < s_k \leq t$, le vecteur aléatoire

$$\sqrt{n}\left(\Lambda\prime_n(s_1) - \Lambda(s_1), \cdots, \Lambda\prime_n(s_k) - \Lambda(s_k)\right),$$

converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers un vecteur gaussien centré de matrice de dispersion :

$$C = (c\left(s_i \wedge s_j\right))_{(ij)}.$$

De plus, si on pose :

$$C\prime_n(s) = n\int_0^s \frac{1}{Y_n^2(u)} dN_n(u) = n \sum_{i:T_i^{(n)} \leq s} \frac{1}{Y_n^2\left(T_i^{(n)}\right)},$$

alors :

$$\sup_{s \leq t} \left| C\prime_n(s) - C(s) \right| \overrightarrow{n \to \infty}^{p} 0.$$

Remarque 3.2.2.1. Grossièrement les hypothèses signifient que $Y_n(s)$ est de l'ordre de n, avec une certaine uniformité en s sous la notion d'ordre.

Remarque 3.2.2.2. L'estimateur $\frac{1}{n}C\prime_n(s)$ est le même estimateur $\sigma\prime^2(s)$ que nous avons pris pour l'estimation de la variance de $\Lambda\prime(s) - \int_0^s \lambda(u) 1_{\{Y_n(u) \neq 0\}} du$ dans le corolaire 3.2.2.1.

.

Lorsque nous considérons un vecteur $\varkappa$ de $\mathbb{R}^k$ et que nous écrivons des formules matricielles , le vecteur x est considéré comme un vecteur colonne.

D'autre part, si x est un vecteur ou une matrice, rappelons que $\varkappa^T$ désigne le transposé de $\varkappa$.

Corollaire 3.2.2.2. Sous les hypothèses du théorème 3.2.2.3

1) Soit $s \leq t$,si $c(s) \neq 0$, lorsque n tend vers l'infini, la variable aléatoire

$$\frac{\sqrt{n}}{c(s)} \left(\Lambda\prime_n(s) - \Lambda(s)\right),$$

converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance 1.

2) Plus généralement, soit $k \geq 1$ et $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k \leq t$. On pose

$$X_n = \left(\Lambda\prime_n\left(s_1\right) - \Lambda\left(s_1\right), \cdots, \Lambda\prime_n\left(s_k\right) - \Lambda\left(s_k\right)\right),$$

et on suppose aussi que la matrice C soit inversible alors la variable aléatoire

$$n\ X_n^T\ C^{-1} X_n = n \sum_{1 \leq i,j \leq k} C^{-1}\left(i,j\right)\left(\Lambda\prime_n\left(s_i\right) - \Lambda\left(s_i\right)\right)\left(\Lambda\prime_n\left(s_j\right) - \Lambda\left(s_j\right)\right),$$

converge en loi vers la loi du χ^2à k degré de liberté.

La première partie de ce corollaire est immédiate, la deuxième provient de lemme classique suivant :

Lemme 3.2.2.1. Soit X un vecteur aléatoire de dimension k, de loi gaussienne centrée de matrice de dispersion C inversible, alors la variable aléatoire $X^T\ C^{-1}X$ est de loi du χ^2à k degrés de liberté.

Le corollaire 3.2.2.2 n'autorise pas en pratique d'avoir des intervalles de confiance asymptotique car la matrice C est inconnue.

Nous pouvons remplacer la matrice C par son estimée si nous avons une convergence en probabilité de l'estimée vers C. Or le théorème 3.2.2.3 fournit une estimation consistance de C, nous définissons donc la matrice $C\prime_n$ par :

$$C\prime_n\left(i,j\right) = c\prime_n\left(s_i \wedge s_j\right),$$

et on pose :

$$\Gamma_n = \begin{cases} \left(C\prime_n\right)^{-1} \text{ si } C\prime_n \text{ est inversible} \\ \qquad\qquad M\ , \end{cases}$$

M est une matrice quelconque (on peut prendre n'importe quelle matrice, la matrice nulle ou bien la matrice identité)

étant donnés une suite une suite $\left(U_n\right)_{n\geq1}$ de vecteurs aléatoire et un vecteur non aléatoire $\varkappa$, il est facile de vérifier que si $U_n \overrightarrow{n \to \infty}^{p} \varkappa$ et si f est une fonction continue au voisinage de $\varkappa$, $f(U_n)\overrightarrow{n\to\infty}^{p} f(\varkappa)$.

Par suite la matrice C est inversible, d'après le théorème 3.2.2.3, $\Gamma_n \overrightarrow{n\to\infty}^{p} C^{-1}$.

On déduit le résultat suivant d'aprés le corollaire 3.2.2.2 ; utile en pratique.

Corollaire 3.2.2.3. D'après les hypothèses et les notions du théorème 3.2.2.3, la variable aléatoire

$$n\sum_{1\leq i,j\leq k}(\Gamma_n)^{-1}(i,j)\left(\Lambda\prime_n(s_i)-\Lambda(s_i)\right)\left(\Lambda\prime_n(s_j)-\Lambda(s_j)\right),$$

converge en loi vers la loi du χ^2 à k degré de liberté.

On donne la forme la plus générale qu'elle faite par le théorème 3.2.2.3 :

Théorème3.2.2.4. On suppose qu'il existe une fonction φ positive définit sur $[0,t]$ et telle que $\frac{\lambda}{\varphi}$soit intégrable sur $[0,t]$. Posons pour $s\leq t$:

$$c(s)=\int_0^s\frac{\lambda(u)}{\varphi(u)}du,$$

$$Z_n(s)=\frac{1}{Y_n(s)}1_{\{Y(s)\neq 0\}}.$$

On suppose également qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ telle que :

1) $\lim_n \alpha_n=+\infty$

2) $\forall\ s\leq t$, $\alpha_n^2\int_0^s Z_n(u)\lambda(u)\,du\overrightarrow{n\to\infty}^{p} c(s)$,

3) $\forall\ \varepsilon>0$ $\alpha_n^2\int_0^t Z_n(u)\,1_{\{|\alpha_n Z_n(u)|>\epsilon\}}\lambda(u)\,du\overrightarrow{n\to\infty}^{p} 0$

4) $\alpha_n\int_0^t 1_{\{Y_n(u)=0\}}\lambda(u)\,du\overrightarrow{n\to\infty}^{p} 0$.

Donc , pour tout $k\geq 1$ et $0\leq s_1<\cdots\leq s_k\leq t$. le vecteur aléatoire

$$\alpha_n\left(\Lambda\prime_n(s_1)-\Lambda(s_1),\cdots,\Lambda\prime_n(s_k)-\Lambda(s_k)\right)$$

converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers un vecteur gaussien centré de matrice de dispersion :

$$C = \left(c\left(s_i \wedge s_j\right)\right)_{(i,j)}.$$

De plus si on pose :

$$C\prime_n(s) = \alpha_n^2 \int_0^s \frac{1}{Y_n^2(u)} dN_n(u) = \alpha_n^2 \sum_{i:T_i^{(n)} \leq t} \frac{1}{Y_n^2\left(T_i^{(n)}\right)},$$

alors

$$\sup_{s \leq t} \left|C\prime_n(s) - c(s)\right| \overrightarrow{n \to \infty}^{p} 0.$$

3.2.4 Bibliographie courte sur le lissage

L'estimateur de Nelson-Aalen du taux de défaillance cumulé Λ est une fonction constante par morceaux dont les points de discontinuité sont les instants de défaillance T_i. La fonction Λ étant ,elle, continue, il est naturel de chercher à lisser l'estimateur. Un tel lissage peut en outre permettre d'estimer le taux de défaillance (instantané) λ.

Ce problème l'est du même type que celui qu'on rencontre dans l'estimation empirique de la fonction de répartition et de la densité d'une variable aléatoire. La technique du noyau ayant rencontré un vif succès dans ce cas, il était naturel de l'appliquer également au cas de l'estimation du taux de défaillance .

Une autre approche consiste à effectuer un lissage à l'aide de fonctions splines.

3.3 Estimateur de Kaplan-Meier [4]

3.3.1 Etude de quelques cas particuliers

Nous supposons toujours observer des matériels dont nous cherchons à estimer la fiabilité ,nous cherchons directement l'estimateur de la fiabilité $R(t)$à l'instant t, sans passer par l'intermediaire du taux de défaillance cumulé.

Cas de n matériels non réparés

Si nous observons n matériels non réparables ,nous observons un échantillon de taille n, T_1,...,T_n de la loi de fonction de répartition $1 - R$. L'estimateur le plus simple de $1 - R$ est la fonction de répartition empirique, c'est-à-dire que $1 - R(t)$ est estimé par $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{T_i \leq t\}}$, ce qui donne pour estimateur de $R(t)$:

$$R\prime(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\{T_i > t\} = \frac{n - \sum_{i=1}^{n} 1_{\{T_i \leq t\}}}{n}.$$

la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{T_i > t\}}$ est de loi binomial de parametre n et $p = R(t)$, or si S est de loi binomiale de paramètre n et p, $\frac{s}{p}$est l'estimateur "classique " du paramètre p (c'est l'estimateur de maximum de possibilité, il est sans biais et efficace).

Cas de n matériels non réparé avec consure de type 1

Nous observons toujours n matériels non réparables, mai le matériel i n'est observé que pendant la durée τ_i, la durée d'observation τ_i étant fixée a–priori et non aléatoire.

Pour que la démarche soit compréhensible ,nous supposons que $\tau_i = t_1$ pour $1 \leq i \leq n_1$ et que $\tau_i = t_2$ pour $n_1 + 1 \leq i \leq n$, avec $t_1 < t_2$.

Notons N la fonction de comptage de ce processus : $N(s) = \sum_{i \geq 1} 1_{\{T_i \leq s\}}$ est le nombre de pannes observées pendant l'intervalle de temps $[0,s]$ et T_i les instants de pannes observés par ordre croissant. Enfin notons $Y(s)$ le nombre de matériels sous observation à l'instant s, la fonction Y étant prise continue à gauche, ce qui la détermine parfaitement, y compris en ses instants de saut.

L'étude précédente nous conduit a prendre comme estimateur de $R(t)$:

$$R\prime(t) = \frac{n - N(t)}{n} \text{pour } t \leq t_1.$$

Or $R\prime(t)$ est de la forme :

$$\frac{n-r}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-r+1}\right),$$

on remarque que

$$n = Y(T_1), n-1 = Y(T_2), \cdots, n-r+1 = Y(T_r),$$

nous pouvons réécrire $R\prime$ sous la forme :

$$R\prime(t) = \prod_{i:T_i \leq t}\left(1-\frac{1}{Y(T_i)}\right) \text{ pour } \; t \leq t_1,$$

avec la convention habituelle $\prod_{\emptyset} = 1$.

Notons λ le taux de défaillance du matériel considéré.

A l'instant t_1+ (c'est à–dire "juste après l'instant t_1), il reste $m = Y(t_1+)$ matériels sous observation.

Si nous prenons l'instant t_1 comme origine des temps ,chacun de ces m matériels sous observation a pour taux de défaillance s$\longrightarrow$ $\lambda(t_1+s)$. si nous reprenons la démarche ci-dessus ,nous sommes conduits à estimer exp $\left(-\int_0^u \lambda(s+t_1)\,ds\right)$ par :

$$\frac{m-(N(u)-N(t_1))}{m} = \prod_{i:t_1<T_i\leq u}\left(1-\frac{1}{Y(T_i)}\right) \text{pour } t \leq u \leq t_2.$$

Par conséquent, nous estimons :

$$\exp\left(-\int_0^t \lambda(s)\,ds\right) = \exp\left(-\int_0^{t_1} \lambda(s)\,ds\right)\exp\left(-\int_0^{t-t_1} \lambda(s+t_1)\,ds\right),$$

par :

$$R\prime(t) = \left(\prod_{i:T_i\leq t}\left(1-\frac{1}{Y(T_i)}\right)\right)\left(\prod_{i:t_1<T_i\leq t}\left(1-\frac{1}{Y(T_i)}\right)\right) \text{pour } t_1 < t \leq t_2.$$

Pour tout $t \leq t_2$, nous avons donc la même forme pour l'estimateur de $R\,(t)$:

$$R\prime\,(t) = \prod_{i:T_i \leq t} \left(1 - \frac{1}{Y\,(T_i)}\right).$$

On peut facilement comprendre que l'heuristique fonctionne pareillement dans le cas général si les instants de censures τ_i n'ont que deux valeurs différentes.

Dans le cas où les τ_i sont des instants aléatoires sépares des instants de défaillance des matériels, notre argument vient de montrer que, si en prend l'instant τ_i comme nouvelle origine les matériels sous l'observation ont pour taux de défaillance $s \rightarrow \lambda\,(s + \tau_i)$ garde toujours sa pertinence, et nous prenons toujours la même forme pour l'estimateur de $R\,(t)$, celui de Kaplan–Meier car ces derniers l'ont donné de la valeur à partir 1958 (il semblerait que cet estimateur ait été proposé la première fois en 1912 par Böhmer.

Quand les observations sont censurées à droite ça veut dire que l'étude de la durée de vie d'individus le cadre classique de l'estimateur de Kaplen –Meier. C'est par l'utilisation du terme fiabilité et la traduction des notions utilisé généralement dans ce cadre (et qu'on a pas utilisé jusqu'à maintenant) qu'on peut traduire cette situation classique.

Considérons n matériels identiques qui fonctionnent indépendamment et dont nous voulons estimer la fiabilité $R\,(t)$ à l'instant t. Un matériel n'est pas réparé après défaillance. Notons X_k l'instant de défaillance du matériel numéro k, l'observation du matériel numéro k n'a lieu que jusqu'à un instant de censure C_k, l'observation n'est donc pas la variable aléatoire X_k ,mais le couple (Z_k,δ_k) où :

$$Z_k = X_k \wedge C_k \text{et } \delta_k = 1_{\{X_k \leq C_k\}}.$$

Les variables aléatoires C_k sont supposées indépendantes et de même loi et indépendantes de la famille $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$.

Notons $(X\prime_k)_{1 \leq k \leq n}$ les variables X_k $(1 \leq k \leq n)$ rangées par ordre croissant (c'est–à–dire la statist et $\delta\prime_k$ les indices "de non –censure " correspondants : $\delta\prime_k = 1$ si $X\prime_k$ est un instant de défaillance et $\delta\prime_k = 0$ sinon.

L'estimateur de Kaplan–Meier de $R(t)$ s'écrit dans ce cas :

$$R'(t) = \prod_{k:Z'_k \leq t} \left(\frac{n-k}{n-k+1} \right)^{\delta'_k}.$$

Bibliographie

[1] M. Benyakhlef, Probabilités et Statistique Mathématique Rabat-Maroc.

[2] J-L. Bon, Fiabilité des systèmes Mhéthodes mathématiques. Masson.

[3] S. Bouhadjar, Cours ; la théorie de la fiabilité 2014/2015 Université de Guelma.

[4] C. Cocozza-Thivent, Processus stochastiques et fiabilité des systèmes. Spinger.

[5] D. Foata ; A. Fuchs, Processus stochastiques, Processus de Poisson, Chaînes de Markov et Martingales. Donod.

Summary

In order to estimate the failure rate of a system, which is the purpose of this thesis, with a punctual process vision which allows us to obtain relevant results, we propose a suggestion which explains the successive instants of a hardware failure (or a system) of the failure rate $\lambda(t)$ is modeled with this process(by factor $\lambda(t)$) , by using different probability and statistic methods we will get an accurate estimate for the failure rate. To do so, we need some bacis knowledge about the reliability theory and some important properties regarding the punctual process, and this is what we are going to deal with in the first two chapters.

ملخص

من أجل تقدير معدل فشل النظام، وهو هدف هذه الأطروحة، و مع رؤية السيرورة النقطية التي تسمح لنا للحصول على النتائج، نعطي اقتراح يشرح اللحظات المتتالية لفشل جهاز (أو نظام) لمعدل الفشل $\lambda(t)$ منمذج بواسطة هذه السيرورة (بمعامل $\lambda(t)$)،

باستخدام عدة طرق احتمالية وإحصائية سوف نحصل على تقدير جيد لمعدل فشل النظام.

لتحقيق هذا الهدف، نحن بحاجة إلى مفاهيم أساسية لنظرية الموثوقية التي تشرح كيفية دراسة سلوك نظام خلال فترة معينة مع قوانين واجب اتباعها و بعض الخصائص الهامة المتعلقة بالسيرورة النقطية.
وهذا ما سنعالجه في الفصلين الأوليين من هذه الأطروحة.