République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{elle}.

Zeghdoudi Hadjer

Intitulé

Sources et risques des modèles

Dirigé par :

Dr : A. Ezzebsa

Devant le jury

PRESIDENT	Dr: A. Benchaabane	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr : A. Ezzebsa	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr : S. Sakrani	MCA	Univ-Guelma

Session Septembre 2020

Table des matières

Remerciements

Remerciez Dieu de m' avoir donné la force et le courage d'achever ce travail. Je ne remercierai jamais assez mes parents pour ce qu'il m'ont donné tout au long de ma vie et pour tout ce qu'ils ont fait pour moi afin que je puisse travailler dans des bonnes conditions possibles ainsi que tous les membres de ma famille que Dieu les protège toujours et me fasse couronner sur ma tête. Je remercie vivement Dr Abdelali Ezzebsa ,pour le grand plaisir de travailler avec lui ,pour me proposer ce sujet , dirigé ce travail .sans ses conseils sa disponibilité et ses nombreuses suggestions , ce travail n'aurait jamais abouti. A travers les nombreuses discussions enrichissante que j'ai eues avec lui ,j'ai également pu apprécier ses qualités scientifiques et humaines. Je remercie les membres de jury : A.Benchaabane,S.Sekrani de nous avoir fait l'honneur de participer au jury de ma mémoire. Nous tenons à remercier tous les membres de département, enseignantes, étudiants, mes camarades et amis de près comme de loin.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :Aux deux êtres humains qui sont les plus chères dans ma vie À Ma lumière, celle qui m'a donnée la vie, l'amour, la tendresse et le courage, toi chère maman Djamila. Celui qui m'a soutenu et guidé afin que je puisse arriver à cette étape de ma vie, toi chère père Khemissi. Mes soeurs et la joie de vivre Ahlem , Ines Mes frères dont je tire ma force Walid , Aymen Mon fiancé et mon compagnon Nourddine Mes amis :Ahlem, Amira , Hakima , yousra , Rayanne ,selma.

Résumé

Le but de ce mémoire est d'introduire les outils et concepts permettant quantifiés et classés les risques et d'apprécier leurs dangerosités.

Le mémoire est composé de deux chapitre, dans le chapitre 1, on a introduire la notion de risque en utilisant quelques distributions de probabilités utiles pour quantifié cette variable, pour le chapitre 2, les notions traitées telles que, queue de distribution, nature et propriétés des queues sont important pour géré les différents portefeuille qui existent dans les littératures financières et actuarielles, en donnat les deux types de modèles d'assurance tel que Le modèle collectif et le modèle individuel de risque et leurs critère de choix, et en termine par la donnée de la notion de la probabilité dela ruine et la notion de chagement de sécurité qui ont la base de la théorie de ruine, On a basé sur les documents mentionnés dans la bibliographie tels que [1] , [2] , [3] , [4] , [5] , pour inspiré et rédigé ce mémoire.

Abstract

The goal of this thesis is to introduce the tools and concepts allowing quantified and classified risks and to appreciate their dangers.

The thesis is composed of two chapters, in chapter 1, we introduce the notion of risk by using some useful probability distributions to quantify this variable, for chapter 2, the concepts treated such as, tail of distribution, nature and properties queues are important for managing the different portfolios that exist in financial and actuarial literature, and ends with the two types of insurance models such as the collective model and the individual risk model and their selection criteria.

Introduction

Divers événements (**risque**) se produisent fréquemment depuis longtemps, car l'image de ces événements se reflète dans des catastrophes naturelles ou des accidents liés au facteur humain, ce qui nécessite d'observer et d'anticiper la survenance de ces phénomènes et de déterminer leur quantité afin de limiter et de minimiser leurs effets négatifs sur l'humanité, l'environnement et l'économie.pour cette raison les institutions financières (banques et compagnies d'assurance) s'efforcent d'élaborer de nouvelles règles et lois pour géreret évaluer leurs risques et leurs capacités [4] , [5].

Dans ce mémoire, nous discuterons les mécanismes et techniques pour quantifier les différents risques, et puisque la nature du risque est celle de l'incertitude, quantifier le risque revient alors à estimer cette incertitude [2], comme un intervalle de confiance auteur de la situation normale.le risque est alors perçu comme une variance ou une volatilité. Voici les modèles que l'on va introdure.

Premièrement en assurance on retrouve le modèle agrégé qui est représenté comme suit : on note N_t le nombre de réclamations par sinistres dans l'intervalle de temps $[0, t]$ [1] , [2], X_i le montant de la $i^{\text{ème}}$ réclamation et S_t le montant total des réclamations sur l'intervalle de temps $[0, t]$. On a alors

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

On retrouve aussi en assurane les mesure de risque représentée par le calcul de la probabilité de la ruine d'une compagnie d'assurance et les mesures de risque la plus usuelles, telle que la **Value-at-Risk** et la **Tail-Value-at-Risk** [5] dont l'utilisation en assurance va être pérennisée par le futur systeme de solvabilité des marchés en particullier européen puisqu'elles seront vraisemblablement à la base de la détermination du niveau prudentiel des provisions techniques et du besoin en fonds propres ‹‹capital cible››. Deuxièmement en finance, on trouve les mesues du risque et les modèles pour les actifs financiers ce sont des contrats où les parties s'échangent des flux d'argent, on peut dire que le mouvement Brownien est une base car ce mouvement peut être vu comme limite de marches aléatoires sur des périodes du temps infinitésimales , donc elle a une utlité pour la constriction de la plupart des modèles d'actifs financiers (**Ex**. Modèles avec sautes c'est à dire, les modèles dont les trajectoires peuvent avoir des discontinuités, le modéle de Black & Scholes le modèle le plus utilisé en pratique [3].)

Chapitre 1

Risque

1.1 Familles des lois continue

À travers l'étude du risque [**1**], par exemple si quelqu'un parie tout son argent sur un simple pile ou face, le risque de ruine est de **50 %,**.nous trouvons de nombreuses lois principales qui abordent ce problème,qui seront discutées dans ce qui suit :

Exponentielle qui permet de modéliser des temps d'attente avec absence de mémoire de densité : soit $\lambda > 0$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x \geq 0}$$

Généralisation : exponentielle inverse.

Pareto qui permet de modéliser les trés gros sinistres (facile à repérer car le log de la fonction de survie est linéaire en fonction du log des coût) de densité : Soit $\theta; \alpha > 0$,

$$f(x) = \alpha \frac{\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}} 1_{x \geq 0}.$$

Généralisation : Pareto généralisée, Pareto Inverse.

Burr souvent utilisée pour étudier les revenus des ménages ,de densité :soit $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \alpha\beta \frac{x^{\beta-1}}{(1+x^{\beta})^{\alpha+1}} 1_{x\geq 0}$$

Généralisation : Burr Inverse.

Log-logistique pour modéliser des durée de vie dont l'intensité peut croître ou décroître,de densité : soit $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{\beta(x/\alpha)^{\beta-1}}{\alpha(1+(x/\alpha)^{\beta})^2} 1_{x\geq 0}$$

Gamma souvent utilisée en crédibilité et en tarification ,de densité :soit $\alpha, \beta > 0$

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} 1_{x\geq 0}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}, \Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$.

Généralisation : Log-Gamma ;Gamma Inverse.

Gumbel, qui permet de modéliser un maximum, de densité : soit $\mu \in \mathbb{R}$ (paramètre de position), et $\lambda > 0$ (paramètre d'échelle)

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-'x-\mu)/\lambda} \exp(-e^{-(x-\mu)/\lambda})$$

Weibull qui permet aussi de modéliser la loi d'un maximum, de densité : soit $\theta > 0$ (paramètre d'échelle), $\tau > 0$ (paramètre de forme)

$$f(x) = \frac{\tau}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{\tau-1} e^{-(\frac{x}{\theta})^{\tau}} 1_{x\geq 0}$$

Généralisation : Weibull Inverse.

Normale, loi centrale en statistique ,de densité : soit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

Généralisation : LogNormale, Inverse Gaussienne. Ce sont les lois les plus importantes auxquelles nous sommes confrontés pour étudier le risque, mais ce ne sont pas les seules, où sur la base de ces lois on peut générée de nouvelles lois soit par transformation, soit en faisant des mélanges de lois.

1.2 Les sources du risque de modèle

Le risque de modèle est un concept similaire au concept de risque [2], où l'on peut clairement identifier la source du risque et être en mesure d'estimer la perte potentielle qui y est liée, la littérature actuelle ne définit pas les risques du modèle de manière précise et formelle, les premiérs à augmenter ce risque dans le cadrede l'appréciation du capital ont été les acteurs du monde bancaire et financier pour remettre en cause l'importance des modèles financiers. le risque de modèle est un type de risque qui se produit lorsque le modèle financier utilisé pour mesurer le risque de marché où la valeur transactionnelle d'une entreprise ne remplit pas ses fonctions ou ne reflète pas correctement les risques pour lesquels il a été conçu.

Les risque des modèles sont multiples et dépendent principalement de la nature des modèles et des données utilisées [3], pour concevoir les risques ces modèles sont classés en trois catégories :

-le premier groupe concerne des modèles purement statistiques basés sur des observations historiques et des hypothéses mathématiques .

-le deuxième groupe est constitué de modéles basés sur des hypothéses d'experts ou ce qu'on appelle le jugement d'experts .

-le troisième et dernier groupe est un mélange entre les modèles de premier et deuxième groupes.

1.3 Classes de risques

Plusieurs sources de risques se trouvent dans les littératures, économique et financière tels que [**3**]

1.Risque de spécification

Il existe un risque que le modèle choisi par l'actuaire pour évaluer les risques d'assurance ou financiers soit inapproprié, et le modèle peut être considéré comme inapproprié dans deux cas :

-Si le modèle ne convient pas au type de risque que nous voulons étudier.

-Si le modèle est basé sur des hypotheses non vérifiées.

2. Risque d'implémentation

Il ya deux types :

-Le risque de choisir le mauvais algorithme pour imlémenter des concepts spécifiques au concept.

-Le risques de contenir un algorithme approprié mais contient les risques de chiffrement .

3. Risque de traitement des données

Elle résulte d'une mauvaise compréhension et de l'utilisation des données disponibles par les actuaires,car elle conduit à divers biais ;soit dans la sélection des modéles soit dans l'estimation de leur taille. par conséquent, les archivees de donnéés doivent être choisies de maniére précise et appropriée ,car certaines périodes historiques ne représentent plus notre venir,en plus du retraitement des données qui consiste à supprimer les exceptionnelles et corriger les erreurs de saisie.

4. Risque d'estimation

Ce risque survient lors l'étalonnage des modèles et de fait en ajustant les caractéristiques du modèles aux données disponibles ou à certaines restrictions pré-imposées, l'estimation des paramétres du modèle dépond alors de ces données initiales et des méthodes statistiques utilisées.

5. Risque d'application

Basés sur des travaux de recherche qui nécessitent parfois des connaissances techniques et théoriques pour comprendre cette complexité, notamment des hypothéses de modèle.

1.4 Etude des queues (ailes)

1.4.1 Définition de la distribution lourde à queue

La distribution d'une variable aléatoire X avec la fonction de distribution F est dit avoir une lourde **[1]** (à droite) la queue si la fonction de génération de moment de F, $MF(t\ )$, est infini pour tout $t > 0$.Cela signifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\, dF(x) = \infty \text{ pour tout } t > 0$$

Ceci donne

$$\lim_{x\to\infty} \exp(tx)\, P(X > x) = \infty \text{ pour tout } t$$

En termes de la fonction de distribution de queue

$$\overline{F}(x) \equiv P(X > x)$$

comme

$$\lim_{x\to\infty} \exp(\lambda x)\, \overline{F}(x) = \infty \text{ pour tout } \lambda > 0$$

1.4.2 Définition de la distribution à longue queue

La distribution d'une variable aléatoire X avec la fonction de distribution F est dit avoir une longue queue droite si pour tout $t > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} P(X > x + t\, |X > x\,) = 1$$

ou équivalent

$$\overline{F}(x+t) \sim \overline{F}(x) \text{ si } x \to \infty$$

Toutes les distributions à longue queue sont lourds à queue, mais l'inverse est faux, et il est possible de construire des distributions à queue lourde qui ne sont pas à longue queue. En fin, la queue d'une distibution (plus exactement, la queue droite) est la partie de la distribution correspondant aux grandes valeur de la variable aléatoire .Il est important de comprendre les grandes valeurs de pertes possibles, car elles ont le plus grand impact sur le total des pertes.

En théorie des probabilités, les distributions à queue lourde sont des distributions de probabilité dont les queues ne sont pas de façon exponentielle limitée : à savoir, ils ont des queues plus lourdes que la distribution exponentielle [4]. Dans de nombreuses applications, il est la queue droite de la distribution qui est d'intérêt, mais une distribution peut avoir une lourde queue gauche, ou les deux queues peut être lourd.

Il est important surtout en assurance de connaître le type de queue d'une distribution. En général on n'aime pas avoir des queues épaisses qui signifient que les événements de grande amplitude ont une probabilité assez forte d'arriver. une grande catastrophe, même si elle arrive rarement, est très lourde de conséquence pour les compagnies d'assurance et pour les cotes boursières.

Definition 1 *Soit X une variable de loi de densité f et de fonction de répartition F .Son hasard rate est*

$$h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = P(X = x + dx | X > x)$$

Si h est décroissante, on dit alors que les queues (ailes) de la loi X sont épaisses et si h est croissante alors les queues de x sont légères.

On remerque que

$$S(x) = 1 - F(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt}$$

Definition 2 *The mean excess loss (aussi appelé mean residual life) de la variable X est définie par*

$$e(d) = E[X - d|X > d] = \frac{1}{1 - F_X(d)}(E[X] - lev(d))$$

où F est la fonction de répartition de X.

La fonction e caractérise la loi de X et surtout contient les informations sur les queues. On dit qu'une distribution a des queues épaisses si e est une fonction croissante et qu'elle a des queues légères si **MEL** est une fonction décroissante.

Remark 1 *Lien entre hasard rate et Mean excess Loss on remerque que*

$$e(d) = \frac{\int_d^\infty S(x)dx}{S(d)} = \int_d^\infty e^{-\int_d^x h(t)dt}dx$$

par la règle de l'hôpital ,quand $d \to \infty$,

$$\lim_{d\to\infty} e(d) \to \frac{-S(d)}{-fd} = \lim_{d\to\infty} \frac{1}{h(d)}$$

cette relation permet de co,prendre pourquoi les propiétés de queues épaisses et queues légères sont inversées pour h et e .

Le souci est que le **MEL** est en génerel difficile à calculer et on prend parfois cette caractérisation : une distribution a des queues épaisses si $d \to \infty$ si $d \to \infty$ (ailes sous -exponentielles) et sinon elle a des queues légères (ailes sur-exponentielles).

Équivalent du mean excess life quand $d \to \infty$ pour quelques lois connues telles que

Pareto

$$\frac{\theta + d}{\alpha - 1}, \alpha > 1$$

Burr

$$\frac{d}{\alpha\beta - 1}, \alpha\beta > 1$$

Loggamma

$$\frac{d}{\alpha - 1}, \alpha > 1$$

Weibul

$$\frac{d^{1-r}}{cr}$$

Gamma

$$\beta^{-1}(1 + \frac{\alpha - 1}{\beta d})$$

Exponentielle

$$\lambda^{-1}$$

par conséquent

$$\left.\begin{cases} Exponentielle \\ Gamma \\ Weibull \;\; \text{avec } \tau \;\; \geq 1 \end{cases}\right\} \text{queues légères}$$

$$\left.\begin{cases} Log\text{-Normale} \\ pareto \\ Weibull \text{ avec } \tau < 1 \\ Burr \\ Log\text{-Gamma} \end{cases}\right\} \text{queues épaisses}$$

1.5 Modèles de fréquence et de sévérité

On tire de l'expérience d'une compagnie des bases de données [**1**],avec lesquelles on construit des modèles de fréquence et /ou de sévérité. Le but est en général de choisir un modèle statistique pour décrire les observations et pouvoir faire des prévisions .

Les points important dans l'analyse exploratoire de données pour faire la sélection de modèle :

Moyenne μ ,écart -type σ ,médiane et les modes

Dissymétrie (**skewness**)

$$\beta = E\left[(\frac{X-\mu}{\sigma})^3\right]$$

Si $\beta > 0$,la distribution est décalée à gauche de la moyenne et donc une queue de distribution étalée vers la droite.

Si $\beta < 0$,la distibution est décalée à droite de la moyenne et donc une queue de distibution étalée vers la gauche.

Si $\beta = 0$, la distibution est symétrique par rapport à sa moyenne.

Aplatissement (kurtosis)

$$k = E\left[(\frac{X-\mu}{\sigma})^4\right]$$

Si $k = 3$, les queues sont gaussiennes .

Si $k > 3$, les queues sont plus épaisses que les queues gaussiennnes (valeurs extrêmes assez fréquentes)

Si $k < 3$, les queues sont sous-gaussienne , plus plates que les queues gaussiennes (valeur extrêmes rares).

Limited expected value

$$Lev(u) = E\left[X \wedge u\right], \quad où\ x \wedge y = min(x, y).$$

Mean excess loss ou Mean residual life

$$e_X(d) = E\left[X - d \backslash X > d\right] = \frac{1}{1 - F_X(d)}(E(X) - Lev(d)),$$

où F est la fonction de répartition de X .

Histogramme et /ou Log-histogramme

Pour construire un histogramme, on définit des intervelles$(0; c_1]$, $(c_1, c_2]$,...,$(c_{m-1}, c_m]$. L'histogramme est alors défini de la façon suivante : pour $x \in (c_{i-1}, c_i]$, $i = 1, ..., m$

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{n_i}{n(c_i - c_{i-1})}$$

où n_i est le nombre d'observations dans $(c_{i-1}, c_i]$ et n les nombre total d'observations. Si on veut tracer un Log-histogramme ,il suffit alors de considérer

$$\tilde{f}'_n(x) = \ln(\tilde{f}_n(x)), \text{ pour } x \in (c_{i-1}, c_i]$$

Analyse sur les données log-transformées

on peut aussi grâce à ces données faire de la sélection du modèle :

-Estimation des paramétre par la méthode des moments , la méthode du maximumde vraisemblence ,les methodes de minimalisation des distances ou les méthodes robustes .

-Estimation par intervalle de confiance en utilisant le maximum de vraisemblence.

-Testes d'évaluation des modèle : test de Kolmogorov-Smirnov, test du Khi-deux , test de Anderson-Darling,...

1.6 Les modèles agrégés des pertes

Donnons deux types de modèles **[1],** [2]

1.6.1 Le modèle collectif

On considère une compagnie d'assurance où les pertes sont enregistrées au fur à mesure qu'elles arrivent .

On note X_i le montant de la i ^{éme} perte et N le nombre de pertes . N peut par exemple être le nombre de pertes sur une année pour la compagnie. Le montant global est

$$S_N = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

On suppose

*les X_i indépendantes et de même loi

* N est indépendante des X_i.

On parle de modèle collectif car on associe la même loi à chaque perte.

1.6.2 Le modèle individuel de risque

On modélise les pertes, totales de chaque contrat et on regarde le montant global pour la compagnie d"assurance [3]

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

Où

* n est le nombre de contrats dont s'occupe la compagnie d'assurance (valeur connue, ce n'est pas une variable aléatoire).

* X_i est le montant total des réclamations du i^{éme} contrat. Les X_i sont supposées indépendants, mais pas forcément de même loi .En général ,la distibution de chaque X_i a une a une masse en 0 qui correspond à la probabilité de ne pas voir de perte pour chaque contrat. Ce modèle est souvent utilisé en assurance santé l'orsqu'on considère un groupe de n employés d'une entreprise où il est difficile de modéliser les pertes par variables de même loi. En effet, chaque employé a une couverture différente (car fonction de leur salaire) et un comportement différent (les dépences dépendent notamment de l'âge des employés).

On parle de modèle individuel car on regarde les caractéristiques de chaque individu .

Le modèle individuel avec des X_i de même loi est un cas particulier du modèle collectif quand N est une constante ($P(N = n) = 1$).

Remark 2 *Il est assez naturel de vouloir relâcher l'hypothèse d'indépendance entre les X_i. Le modèle individuel est plus facile à étudier que le collectif dans le cas où les X_i ne sont pas indépendantes .*

Example 1 *On sait que les pertes suivent la loi* F_X*. L'assureur paye* 80% *des pertes individuelles en axcès de* $1000DZD$ *avec un paiement maximal de* $100000DZD$*.*

Tous les paiements en excès de $50000DZD$ *sont réassurés. On va décrire des modèles pour*

***1-**les pertes totales pour l'assuré avant l'assurance : On note* N *le nombre de perte (a priori aléatoire), on a alors*

$$S_N^a = X_1 + ... + X_N$$

avec $X_i \sim F_X$*.*

***2-**les pertes totales pour la compagnie d'assurance avant la réassurance :*

On note Y_i *le* $i^{éme}$ *paiement fait par l'assureur avant réassurance .Si* $X_i \leq 1000$*, alors* $Y_i = 0$ *.Si* $X_i > 1000$*, alors le paiement est* $Y_i \ = 0.8(X_i - 1000)$*.Par ailleurs cette valeur ne peut pas excéder* $1000000DZD$*, ce qui correspond à une valeur de* $1000 + 100000/0.8 = 126000DZD$*. Par conséquent, Par conséquent, les pertes totales pour le réassureur sont*

$$S_N^c = Y_1 + ... + Y_N$$

avec

$$Y_i = \min(0.8(X_i - 1000), 100000)1_{X_i} \geq 1000$$

***3-**les pertes totales pour le réassureur :*

Le réassureur paye tous les paiements en excès de $50000DZD$ *un paiement de* $50000DZD$ *correspond à une perte de* $1000 + 50000/0.8 = 63500DZD$*, par ailleurs, le montant maximal versé par la compagnie est de* $100000DZD$ *et donc le montant maximal versé par le réassureur est* $50000DZD$*. Par conséquent, les pertes totales pour le réassureur sont*

$$S_N^r = Z_1 + ... + Z_N$$

avec

$$Z_i = \min(0.8(X_i - 63500), 50000)1_{X_i \geq 63500}$$

4-*les pertes totales pour la compagnie d'assurance après réassurance*

$$\begin{aligned}P_N^c &= S_N^c - S_N^r = \sum_{i=1}^{N}[0.8(X_i - 1000)1_{1000\leq X_i<63500} + 500001_{X_i\geq 63\ 500}] \\ &= \sum_{i=1}^{N}\min(0.8(X_i - 1000), 50000)1_{1000\leq X_i}.\end{aligned}$$

5-*les pertes totales pour l'assuré après assurance*

$$P_N^a = S_N^a - S_N^c = \sum_{i=1}^{N}[X_i 1_{X_i<1\ 000} + (800 + 0.2X_i)1_{1\ 000\leq X_i\leq 12600} + (X_i - 100000)1_{X_i>126\ 000}]$$

Chapitre 2

Choix de modèles

Certaines caractéristique sont recherchées dans un modèle pour la fréquence et / ou sévérité [**1**].

2.1 Pour la sévérité

Pour la sévérité on aime avoir une loi avec un paramètre d'échelle, du fait de la notion d'unité. En effet , le choix de la devise ne doit pas affecter la loi : la conversion en dollars, en Euros, en Yen,.ne doit pas modifier le modèle . De plus, lorsqu'on considère une loi avec un paramètre d'échelle, il est assez simple de prendre en considération l'inflation

Definition 3 *Une loi F_X est dite à échelle si pour tout $c > 0$, $P(cX \leq x)$ appartient à la même famille que F_X.*

Example 2 *Loi* ***Exponentielle*** $\varepsilon(\lambda)$ *: Soit $c > 0$*

$$P(cX \leq x) = P(X \leq x/c) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{c}x}$$

On reste dans la famille des lois exponentielle car $cX \sim \varepsilon(\lambda/c)$.

Definition 4 *Un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$ est dit d'échelle pour une v.a.$X \sim F_X^{\theta}$ si pour tout $c > 0$ la loi de cX est $F_X^{c\theta}$, les autres paramètres restant inchangés.*

Example 3 *Loi **Gamma** (α, θ) de densité*

$$f(x;\alpha;\theta) = \frac{1}{\theta\Gamma(\alpha)}(\frac{x}{\theta})^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}}1_{x\geq 0}$$

et de fonction de répartition pour $x \geq 0$

$$F_X(x;\alpha;\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{x}{\theta}} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

Par conséquent, pour $c > 0$

$$P(cX \leq x) = P(X \leq x/c) = F_X(x;\alpha;c\theta)$$

2.2 Pour la fréquence

Pour la fréquence, on aime avoir des lois qui sont préservées par la somme. Comme par exemple, la somme de deux lois de Poisson indépendantes est une loi de Poisson, cette propriété permet l'ajout de nouvelles données de façon assez simple.

Pour la fréquence N on choisit souvent des lois dépendant d'un paramètre λ telle qu'il existe une variable $\bar{N}$ tel que N peut s'écrire comme la somme de λ variables $\bar{N}$ indépendantes. Ceci se traduit sur la fonction génératrice des moments de la façon suivante

$$M_N(z;\alpha) := E[e^{zN}] = (M_{\bar{N}}(z))^{\lambda}$$

Ce type de loi est appelée loi infiniment divisible.

Example 4 *Si* $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, *alors*

$$M_N(z;\lambda) = e^{\lambda(e^z-1)} = (e^{e^z-1})^\lambda = (M_{\bar{N}}(z))^\lambda$$

avec $\bar{N} \sim \mathcal{P}(1)$

2.3 Pour les pertes agrégées

On note

$$S = X_1 + ... + X_N$$

la perte totale d'une compagnie d'assurance. Pour étudier la loi du modèle S, on doit choisir un modèle pour la fréquence N et un modèle pour la sévérités X_i.

2.4 Le modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge total générée par les sinistres individu par individu. La charge totale pour un porteffeuille comprenant n contrats est définié par :

$$S^{Ind} = \sum_{i=1}^{n} I_i U_i$$

Avec,

* $I_i \overset{i.i.d}{\sim} B(p)$ indiquant si l'assuré i a subit un sinistre sur la période donnée.

*U_i $v.a$ positive indépendante de I_i, montant de l'ensemble des sinistres subit par l'assuré i sur l'exercice. Les calculs sont difficiles a effectuer lorsque le nombre de contrats augmente .

2.5 Le modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale subit par un porteffeuille vue, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistre tout assuré confondu, la charge totale est définie par :

$$S^{Col} = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

avec,

*N v.a discrète à valeur entière .

*U_i v.a positive i.i.d indépendante de N .

Lorsque le nombre de contrats est important et que le porteffeuille est homogène on peut approximer le modèle individuel par un modèle collectif.

$$S^{Ind} = S^{Cod}$$

NB : Le modèle individuel peut s'écrire comme un modèle collectif.

2.6 Probabilité de Ruine

La théorie de la ruine liée étroitement aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées à l'assurance. Il s'agit de l'étude mathématique de modèles aléatoires et dynamiques adaptés aux réserves financières allouées à un portefeuille de contrats d'assurance de type non-vie d'une compagnie d'assurance. Assurance de type **IARD** (**Incendie**, **Accidents** et **Risques Divers** [1] , [2] , [3]). L'objectif est de définir un cadre permettant la bonne gestion d'un portefeuille de contrat. On imagine une compagnie d'assurance qui se lance sur un nouveau marché, la business line doit être

– Viable, la compagnie doit être solvable a tout instant (la réserve ne doit pas tomber en dessous de 0). Elle doit être en mesure de faire face aux engagements qu'elle a pris vis à vis des assurés par voie contractuelle

– Rentable, la tarification doit permettre à l'assureur d'engranger des bénéfices pour rémunérer les actionnaires et les employés. L'entreprise prend des primes d'assurance avant de payer des prestations. Elle doit mettre de l'argent de côté, et cela s'appelle de l'épargne. Cela nécessite d'évaluer les risques dans un monde aléatoire, d'où l'intervention des statisticiens et probabiliste. Cela nécessite la définition de deux paramètres :

–Un niveau de capital initial

–Une tarification

La base de la théorie de la ruine est exploité les modèles cités tels que : modèle collectif et modèle individuel

2.7 La base de la théorie de ruine

2.7.1 Processus de réserve et de surplus

Soit $\{R_t : t \geq 0\}$ le processus de réserve, et $u = R(0)$ la réserve initiale [**2**]. On fait les hypothèses suivantes :

*$(T_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suite de v.a.positives **i.i.d** égales aux temps **inter-arrivée** des sinistres

*$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ **instant d'occurence** du i^{éme} sinistre .

*$N_t = \max\{n \in N;\ \sigma_n \leq t\} = \max\{n \in N\,;\ \sigma_{n+1} \geq t\}$ processus de comptage égale au nombre de sinistres jusqu'au temps t .

*$(U_i)\ _{i\mathbb{N}^*}$ suite de $v.a$ positive **i.i.d** égales aux montants des sinistres.

*p flux de prime générée par le porteffeuille par unité de temps. Ce qui donne

$$R_t = u + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i$$

On définit également le processus de surplus $\{S(t) : t \geq 0\}$ comme suit

$$S_t = u - R_t$$

2.7.2 Probabilité de ruine

On définit la probabilité de ruine à horizon infini **[2]**, notée ψ, par

$$\psi(u) = P(\inf_{t\geq 0} R_t < 0 : R_0 = u)$$

1. La probabilité complémentaire ou probabilité de non ruine, noté ϕ, est définie par

$$\phi(u) = 1 - \psi(u), \qquad \phi(u,T) = 1 - \psi(u,T)$$

2. L'instant de ruine, noté τ_u, associé à une réserve initiale u, est défini par

$$\tau_u = \inf\{t \geq 0 : R(t) < \ 0\} = \inf\{t \geq 0; S(t) > u\}$$

3. Les maxima du processus de surplus en temps fini et infini, respectivement notés M_T et M, sont définis par

$$\begin{aligned} M &= \sup_{t\geq 0} S(t), \\ M_T &= \sup_{t\in[0,T]} S(t) \end{aligned}$$

La donnée de ces deux quantités permettent des définitions alternatives de la probabilité de ruine

$$\psi(u) = P(\tau(u) < \infty) = \psi(M > u),\ \psi(u,T) = P(\tau(u) < T) = \psi(M_T > u)$$

2.7.3 Le chargement de sécurité

La notion de chargement de sécurité est étroitement liée à celle de tarification : un principe de prime contient un chargement de sécurité s'il conduit a exiger une prime supérieure à celle qu'est exigée si la mutualisation des risques est parfaite **[2]**.

Definition 5 *Une mesure de risque r contient un chargement de sécurité si pour tout* *risque X, on a*

$$r(X) - E(X) \geq 0.$$

Remark 3 *La mesure de risque **Tail-at-Risk(TvaR)** [3], lorsque elle exite, contient un chargement de sécurité ce qui n'est pas le cas d'une **Value-at-Risk(VaR)**.*

Selon l'habitude, dans les modèles de ruine , l'existence d'une quantité tel que

$$\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N_t} U_k \underset{t\to\infty}{\rightarrow} \rho$$

est supposée .ρ correspond pratiquement a la charge moyenne par unité de temps .

Definition 6 *Le chargement de sécuurité, noté η, est defini par*

$$p = (1+\eta)\rho$$

Il est exprimé en pourcentage et exprime en quel proportion la prime excéde la charge moyenne générée par unité de temps.

Proposition 1 *En supposant que(*) est vérifié alors :*

-Si $\eta > 0$ alors $M = \infty$ ce qui implique $\psi(u) = 1$ presque surement $\forall u$.

-Si $\eta > 0$ alors $M < \infty$ ce qui implique $\psi(u) < 1$ presque surement pour u suffisamment grand .

Conclusion

A l'aide de la théorie de probabilité et vue le caractère aléatoire de risques, on peut quantifié et classé les risques selon leurs dongerosité, et mettre a point les mesures et barières contre la survenance des événements indésirables.

Bibliographie

[1] Hélène Guérin . Cours."ACT3251 THÉORIE DU RISQUE".Université de Montréal. (2012) .

[2] Pierre-Olivier GOFFARD . Introduction à la théorie de la ruine .

[3] T. LALLEMENT, E.NISIPASU, M.TOPUZU & L.ELBAHTOURI . Le risque de modèle .(2014).

[4] Michel Denuit et Arthur Charpentier. Tome 1, 2004. Mathématiques de l'assurance non-vie

[5] Michel Denuit et Arthur Charpentier. Tome 2, 2004. Mathématiques de l'assurance non-vie