République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

<u>Mémoire</u>

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par : Kouadria Amira

Intitulé

Contrôlabilité relative d'un système fractionnaire avec retard

Dirigé par : Dr. Berhail Amel

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. …………………**		**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. BERHAIL Amel**	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATRICE	**Dr. …………………**		**Univ-Guelma**

Session Juin 2020

Résumé

Dans ce mémoire, nous allons étudier la contrôlabilité relative des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. Tout d'abord, nous résolvons un système dynamique fractionnaire, puis étudions la contrôlabilité relative de ce système.

Abstract

In this thesis, we study the relative controllability of linear differential equations of fractional order; first, we solve a fractional dynamic system, and then study the relative controllability of this system.

الملخص

في هذه المذكرة ندرس قابلية التحكم النسبي للمعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتبة الكسرية نبحث اولا عن حل لنظام ديناميكي كسري ثم ندرس امكانية التحكم النسبي فيه.

Table des matières

0.1 Introduction 1

1 Notions Préliminaires **2**

1.1 Calcul fractionnaire 2

1.1.1 Fonction Gamma 2

1.1.2 Fonction Mittag-Leffler 4

1.1.3 Dérivée fractionnaire 5

1.2 Transformation de Laplace 6

1.3 Rappels d'algèbre linéaire 8

2 Contrôlabilité d'un système dynamique **10**

2.1 Système contrôlé 10

2.2 Contrôlabilité 11

2.2.1 Critère de Contrôlabilité de Kalman 12

2.2.2 Caractérisation de la Contrôlabilité 13

2.2.3 Gramien de contrôlabilité 14

2.3 Observabilité 14

2.3.1 Observabilité d'un système linéaire 15

2.3.2 Critère d'observabilité de Kalman 15

2.3.3 Dualité (Contrôlabilité, Observabilité) 16

2.4 Contrôle Optimal 17

3 Contrôlabilité relative d'un système fractionnaire **18**

3.1 Position du problème 18

3.2 Equation Intégral du problème 19
3.3 Contrôlabilité relative 22
3.3.1 Définitions 23
3.3.2 Matrice de Contrôlabilité relative 23
3.3.3 Ensemble Accesible et ses propriétées 28
3.3.4 Caractérisation de la contrôlabilité relative 32
3.4 Exemple 36

Bibliographie **39**

0.1 Introduction

Le développement des mathématiques en général a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problèmes de plus en plus complexes posés par la physique et les sciences de l'ingénieur. L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connait actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie est celle du Calcul Fractionnaire qui étend la dérivation et l'intégration aux ordres fractionnaires.
L'objectif de la théorie du contrôle des systèmes fractionnaires est d'améliorer le fonctionnement des systèmes fractionnaire de commande, c'est-à-dire d'obtenir des systèmes plus fiables, plus économiques et plus rapides.
Ce mémoire qui a donc pour but d'étudier la contrôlabilité relative pour une classe d'équation différentielles fractionnaires linéaire, est organisé comme suit :
Dans le premier chapitre, nous allons présenter quelques notion préliminaires concernant le calcul fractionnaire (la fonction Gamma, la fonction Mittag-Leffler, les dérivées et les intégrales fractionnaires de Caputo et de Rimmann-Liouville).
Dans le deuxième chapitre, nous donnons un rappel sur quelques définitions et propriétés du système contrôlable qui soit la base de la théorie des contrôle classique : les notions de contrôlabilité, observabilité et contrôle optimal.
Le dernier chapitre est basé sur l'étude de la contrôlabilité relative pour les équations diffèrentielles linéaires d'ordre fractionnaire ; nous commencerons par l'existence de la solution d'un problème fractionnaire linéaire pour étudier ensuite la contrôlabilité relative.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

L'objectif de ce chapitre, dans un premier temps, est de mettre en évidence les bases théoriques des dérivés d'ordre fractionnaire et les principales propriétés de l'opérateur de dérivation fractionnaire. Un apercu sur la transformée de Laplace et ses propriétés sera bénéfique pour les chapitres qui vont suivre.

1.1 Calcul fractionnaire

1.1.1 Fonction Gamma

Une des fonctions de base pour le calcul fractionnaire est la fonction Gamma. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.1 [6] La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivant :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Cette intégrale impropre converge absolument sur le demi-plan complexe $(z \in \mathbb{C})$ où la partie réelle est strictement positive.

On peut définir la fonction Gamma par la limite :

$$\Gamma(z) = lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^z}{z.(z+1)...(z+n)}.$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma

1- $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z < 1$.
2- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall z > 0$.
3- $\Gamma(0^+) = +\infty$ et $\Gamma(1) = 1$.
4- La fonction gamma vérifie la formule de réflexion d'Euler, ou formule des compléments

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)},$$

car la fonction $\Gamma(1-z)\Gamma(z)$ est 2π-périodique et a les mêmes pôles et résidus que la fonction $\dfrac{\pi}{sin(\pi z)}$.

Remarque 1.1 : De $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et $\Gamma(1) = 1$, on déduit :

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1!,$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3!,$$

$$......................,$$

$$\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n) = n!.$$

Valeurs particulières

La valeur de $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ permet, par récurrence, de déterminer les autres valeurs de la fonction gamma pour les demi-entiers positifs :

$$\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \Gamma(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, ...,\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$$

Même chose pour les valeurs négatives, par exemple :

$$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}.$$

1.1.2 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler (notée $E_{\alpha,\beta}$ qui tient son nom du mathématicien suédois Gosta Mittag-Leffler (1903)) est une fonction spéciale, c'est-à-dire qui ne peut être calculée à partir d'équations rationnelles, qui s'applique dans le plan complexe et dépend de deux paramètres α et β.
Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, et elle joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

Définition 1.2 [8] La fonction de Mittag-Leffler est définie comme suit :

$$\mathbb{E}_{\alpha}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(i\alpha + 1)},$$

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(i\alpha + \beta)},$$

oú $z \in \mathbb{C}$ et α, β sont des nombres réels positifs.

Exemple 1.1 Nous donnons quelques cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler

$$\mathbb{E}_0(z) = \frac{1}{1-z}, \; |z| < 1 \qquad , \; \mathbb{E}_1(z) = e^z,$$

$$\mathbb{E}_2(z) = \cosh(\sqrt{z}), \; z \in \mathbb{C}, \qquad \mathbb{E}_2(-z^2) = \cos(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\mathbb{E}_{1,2}(z) = \frac{e^{z-1}}{z}, \qquad \mathbb{E}_{2,2}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}.$$

Lemme 1.1 *[2] Soit $\alpha > 0, \; \beta \in \mathbb{R},$ on a*

$$\frac{d}{dz}\mathbb{E}_{\alpha}(z) = \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(z).$$

$$\frac{d}{dz}[z^{\beta-1}\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z^{\alpha})] = z^{\beta-2}\mathbb{E}_{\alpha,\beta-1}(z^{\alpha}).$$

Lemme 1.2 *[4] Soient $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ et $|a\lambda^{-\alpha}| < 1,$ alors*

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^{\beta-1} \mathbb{E}_{\alpha,\beta}(\pm a x^{\alpha}) dx = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^{\alpha} \mp a}.$$

1.1.3 Dérivée fractionnaire

Cette section sera consacrée aux définitions élémentaires sur les intégrales et les dérivées fractionnelles de Caputo.

Définition 1.3 [8] Soit $\Omega = [a, b)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et f une fonction intégrable sur Ω. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par RL) d'ordre α de la fonction f est définie par :

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

Définition 1.4 [8] La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction $f \in C^n$ est définie par

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n}(I_a^{n-\alpha} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \end{aligned}$$

avec $n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 1.2 :
La définition de la différentiation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires ainsi que pour son application dans les mathématiques pures (solution des équations différentielles,...).
Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville a des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure.
Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales. Une certaine solution pour ce problème a été proposèe par M. Caputo.

Définition 1.5 [8] Soit f une fonction de classe $\mathbb{C}^n([a, b])$. La dérivée de Caputo d'ordre α (notée ${}_a^cD^{\alpha}$) de la fonction f est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :

$$ {}_a^cD_t^\alpha f(t) = {}_a^{RL} D_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right]. $$

Définition 1.6 [8] La dérivée fractionnaire de caputo d'ordre α d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$ {}_0^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds. $$

Remarque 1.3 :
Une différence entre la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo est que la dérivée de Caputo d'une constante est nulle, par contre, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante C est

$$ {}^cD_t^\alpha C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

1.2 Transformation de Laplace

Comme dans le cas entier, la transformée de Laplace est utilisée pour la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaires. C'est une outil qui permet de convertir une équation différentielle en une équation linéaire où disparaissent les formes dérivées.

Définition 1.7 [11] La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ d'un variable réel positif $t \in (0, +\infty)$ est la fonction $F(s)$ définie par

$$ F(s) = (\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}. $$

Remarque 1.4 Pour l'existence de l'intégrale précédent, la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel α, ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que

$$ e^{-\alpha t}|f(t)| \leq M \quad \textit{pour tout } t > T. $$

En d'autres termes, la fonction $f(t)$ ne doit "croitre ou décroitre" plus vite qu'une certaine fonction exponentielle quand $t \to \infty$.

Propriétés de la transformation de Laplace :
On cite ci-dessous quelques propriétés de la transformée de Laplace.
1- La transformation de Laplace est une application linéaire c-à-d pour toutes fonctions f et g admettant des transformées de Laplace et pour tous réels $\alpha,\ \beta$:

$$\mathcal{L}\{\alpha f+\beta g\}=\alpha\mathcal{L}\{f\}+\beta\mathcal{L}\{g\}.$$

2-Soient $F(s)$ et $G(s)$ les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$ respectivement alors le produit de convolution $(f*g)$ est donné par :

$$f*g=F(s).G(s)=\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(t-z)g(z)dz\Big\}.$$

Définition 1.8 [4] L'inverse de la transformation de Laplace de la fonction $g(t)$ est donnée par la formule :

$$(\mathcal{L}^{-1}g)(x)=\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{sx}g(s)ds,$$

où γ est choisi de telle facon que l'intégrale converge.

Définition 1.9 [4]
1- La formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est

$$\mathcal{L}\big\{D_t^{\alpha}f(t);s\big\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}D^{(k-(n-\alpha))}f(0),\quad (n-1<\alpha\leq n).$$

2- La formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est :

$$\mathcal{L}\big\{{}^{c}D_t^{\alpha}f(t);s\big\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}\big\{{}^{c}D_t^{\alpha}f(t)\big\},$$

avec

$$\mathcal{L}\big\{{}^{c}D_t^{\alpha}f(t);s\big\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0),\quad (n-1<\alpha\leq n).$$

Quelques transformées de Laplace :

$Y(t)$	$y(t) = \mathcal{L}\big(Y(t)\big)$
t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}},\ a > -1$
$\int_0^x f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+a)}$	$\mathbb{E}_\alpha(-at^\alpha)$

1.3 Rappels d'algèbre linéaire

Définition 1.10 :
1- Le noyau d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (noté $Ker(A)$) est le noyau de l'application linéaire canonique associée à A et on a

$$kerA = \{x \in \mathbb{R}^m,\ Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

2- L'image d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (noté $Im(A)$) est le noyau de l'application linéaire canonique associée à A et on a

$$ImA = \{y \in \mathbb{R}^n,\ \exists x \in \mathbb{R}^m, y = Ax\}.$$

3- Le rang de A est la dimension de l'image de A : C'est le nombre maximal de colonnes de A formant une famille libre de $\mathbb{R}^n$:

$$rang(A) = dim[Im(A)].$$

Corollaire 1.1 *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*
1 - A inversible,
2 - $Ker(A) = 0_{\mathbb{R}^n}$,
3 - $rang(A) = n$.

Définition 1.11 Deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si et seulement si $< x, y >= 0$. On note $x \perp y$.

Définition 1.12 Soit K une partie de $\mathbb{R}^n$. L'orthogonal à K est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, noté $K^\perp$; formé de tous les vecteurs orthogonaux aux vecteurs de K.

Proposition 1.1 *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, on a*

$$ker(A^{\perp}) = [ImA]^{\perp},$$

$$Im(A^{\perp}) = [kerA]^{\perp}.$$

Théorème 1.1 *(Cayley-Hamilton) :*
Soit A *une matrice carrée de dimension* n *et*

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \gamma_1\lambda^1 + \gamma_{0,}$$

le polynôme caractéristique alors,

$$P_A(A) = 0.$$

Chapitre 2

Contrôlabilité d'un système dynamique

La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

2.1 Système contrôlé

Du point de vue mathématique, un système du contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle, habituellement soumis à des contraintes. Un système contrôlé est un système différentiel de la forme :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t)). \tag{2.1}$$

En général, le vecteur des états $y(t)$ appartient à $\mathbb{R}^n$, et les contrôles u appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles $U_{ad} \subset U$, qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On suppose le champ de vecteur f suffisament régulier, de sorte que pour toute condition initiale y_0 et tout contrôle admissible $u \in U_{ad}$ le système (2.1) admet une unique solution $y(t)$ telle que $y(0) = y_0$, et que cette solution soit définie sur $[0, +\infty[$. On notera cette solution par $y_f(t, y_0, u(\cdot))$. Le système (2.1) est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant

$$u(input) \rightarrow \boxed{\dot{y} = f(y, u)} \rightarrow y(output)$$

Parmi les objectifs principaux de la théorie du contrôle qui seront abordés dans ce travail, les notions de la contôlabilité et l'observabilité.

Soit $T > 0$, considérons un système différentiel linéaire défini sur [0, T]

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où A est une matrice carré $(n \times n)$ appelée matrice d'état et B une matrice $(n \times m)$ appelée matrice de commande ou du contrôle, $y(t)$ est l'état du système et y_0 la condition initiale. La solution de (2.2) est donnée par :

$$y(t, y_0, u(t)) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds. \tag{2.3}$$

2.2 Contrôlabilité

La contrôlabilité est la notion de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. Il s'agit d'imposer à un système un comportement souhaité, c'est-à-dire d'amener (en temps fini) un système d'un état initial arbitraire à un état désiré au moyen d'un contrôle.

Définition 2.1 On dira que le contrôle u transfère un état a à un état b au temps $T > 0$ si

$$y(T, a, u) = b.$$

On dit aussi que l'état b est atteignable à partir de a au temps T.

Définition 2.2 On dit que le système (2.1) (resp.(2.2)) est contrôlable si pour tous les états y_0, y_1 dans l'espace d'état, il existe un temps fini T et un contrôle admissible u tel que

$$y_1 = y(\mathrm{T}, y_0, u).$$

On dit aussi que le système est exactement contrôlable.

Remarque :
1- Cette définition est traduit que le contrôle u conduit le système de l'état y_0 vers y_1 à l'instant T.
2- Dans le cas où $y_1 = 0$, on dit que le système est " nulle-contrôlable" ou on a une contrôlabilité à zéro.

Exemple 2.1 Le fait de tourner le volant ou non d'une automobile ne va pas affecter la vitesse (la vitesse n'est pas contrôlable par le volant), alors que le fait décélérer ne va pas influencer la direction de la voiture.

2.2.1 Critère de Contrôlabilité de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Définition 2.3 : **Matrice de Contrôlabilité**
La matrice
$$M = (B, AB, \cdots, A^{n-1}B),$$
dite matrice de contrôlabilité de Kalman.

Théorème 2.1 ([10]) *Le système linéaire (2.2) est contrôlable si et seulement si :*
$$rang M = n.$$
On dit aussi que la paire (A, B) est contrôlable.

Remarque :
La matrice M est appelée " Matrice de Kalman " et la condition est appelée " Condition de Kalman". Cette condition ne dépend ni de temps ni de la donnée initiale.
Exemple :
On considère un système dynamique décrit par :
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

tel que les matrices A et B sont données comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , B = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système est contrôlable car la Matrice de contrôlabilité est de rang maximale. En effet,

$$detM = 1 \Longrightarrow rangM = 2.$$

On donne ci-aprés deux résultats (général) permettant de donner une caractérisation de la contrôlabilité.

2.2.2 Caractérisation de la Contrôlabilité

La solution (2.3) peut s'écrire pour tout $t \in [0, T]$ sous la forme :

$$y(t, y_0, u) = Y_0 + H_t u,$$

où $H_t u$ est l'opérateur linéaire borné défini par :

$$H_t : \begin{cases} L^2(0, T, U_{ad}) \to \mathbb{R}^n \\ u \to \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds, \end{cases}$$

et

$$Y_0 = e^{tA} y_0.$$

Pour simplifier les calculs, prenons $Y_0 = 0$

Proposition 2.1 *Le système (2.2) est contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si l'opérateur H_T est surjectif i.e*

$$\forall y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in U_{ad},\ y(y_0, u)(T) = y_1.$$

Preuve. Soit $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$ deux états quelconques. L'équation en u :

$$y(T, y_0, u) = y_1,$$

a une solution dans $L^2(0, T, U)$ si et seulement si l'équation

$$H_T u = y_1 - e^{TA} y_0,$$

a une solution dans $L^2(0, T, U)$. L'équivalence des deux équations entraine la proposition. ■

2.2.3 Gramien de contrôlabilité

Avec la définition de l'opérateur H_t on considère l'adjoint

$$H_t^* : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to L^2(0, T, U) \\ z \to H_t^*(z) = B^* e^{(T-t)} z \end{cases}$$

tel que

$$(H_t^*(z), u) = (z, H_t u), \forall u \in L^2(0, T; U), \forall z \in R^n.$$

On introduit la matrice de contrôlabilité dit "Gramien de contrôlabilité ".

$$\mathcal{W}_{\mathrm{T}} = H_t H_t^* = \int_0^{\mathrm{T}} e^{sA} B B^t e^{sA^t} ds$$

tel que A^t et B^t désignent les matrices transposées des matrices A et$B$. On a la caractérisation suivante :

Corollaire 2.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *La paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$.*
2. *L'opérateur H_t est surjectif.*
3. *L'opérateur H_t^* est injectif.*
4. *La matrice $\mathcal{W}_{\mathrm{T}}$ est inversible*

Remarque 2.1 La matrice de contrôlabilité $\mathcal{W}$ est positive

$$\langle \mathcal{W}_{\mathrm{T}} x, x \rangle = \int_0^{\mathrm{T}} |B^t e^{sA^t} x|^2 ds = \|H_T^* x\|^2 \geq 0.$$

2.3 Observabilité

Un système commandé-observé est un système difféerentiel de la forme :

$$\dot{y} = f(y, u), x = h(y), \tag{2.5}$$

où le vecteur y est le vecteur des états du système, le vecteur u celui des contrôles (entrées) et le vecteur x celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant

$$u \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \dot{y} = f(y,u) \\ x = h(y) \end{array}} \longrightarrow y$$

Ce système sera dit observable si la sortie $x(t)$ permet de retrouver l'état $y(t)$.

2.3.1 Observabilité d'un système linéaire

On considère un système linéaire donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bu, \\ \\ \quad x = Cy \end{cases} \tag{2.6}$$

où A est une matrice carré $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande ou du contrôle , C est une matrice carré $n \times n$ appelée matrice d'oservation. $y(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système et $u \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle.

Définition 2.4 On dit que le système linéaire (2.6) est observable si pour tout état $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible u tel que la connaissance de $y(t)$ pour $t \in [0, T]$ permet de déterminer y_0.

2.3.2 Critère d'observabilité de Kalman

Dans cette section, on va donner une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire

Théorème 2.2 ([10]) *Le système linéaire (2.6) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman*

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n. On dit alors que la paire (A, C) est observable.

Corollaire 2.2 *[10] Le paire (A, C) est observable si et seulement s'il existe* $\mathrm{T} > 0$ *tel que la matrice :*

$$\mathcal{O}_{\mathrm{T}} = \int_0^{\mathrm{T}} e^{sA^t} C^t C e^{sA} ds$$

soit inversible.

2.3.3 Dualité (Contrôlabilité, Observabilité)

Soit le systèmes (S) :

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bu, \\ \\ x = Cy \end{cases} \tag{2.7}$$

et le système adjoint (S*) :

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -A^*\varphi, \\ \\ \varphi(T) = \varphi_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

On a le résultat suivant :
Le système (S) est observable si et seulement si le système adjoint (S*) est contrôlable c'est la dualité (contrôlabilité /observabilité).

Remarque 2.2 On aurait pu prouver cette équivalence directement en utilisant l'application entré-sortie et en remarquant qu'une application linéaire est surjective si et seulement si l'application adjointe est injective.
Dans le cas général, on écrit

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bu, \quad y(0) = y_0, \\ \dot{\varphi} = -A^*\varphi, \ \varphi(T) = \varphi_0, \\ u = B^*\varphi. \end{cases} \tag{2.9}$$

Remarque 2.3 L'opérateur H_t^* est injectif si

$$|\varphi^0|^2 \leq c \int_0^T |B^*\varphi(t)|^2 dt, \tag{2.10}$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^N$ tel que B^* est l'adjoint de l'opérateur du contrôle B.
En d'autres termes, le problème de la controlabilitè revient a répondre a la

question suivante :
Pour $T > 0$ donnée, exist-il un constant $c > 0$ tel que la solution du système adjoint (S^*) vérifié l'inégalité ci-dessus pour tous $\varphi^0 \in \mathbb{R}^N$ Cette inégalité s'appelle inégalité d'observabilité.

2.4 Contrôle Optimal

Dans le cas où la paire (A,B) est contrôlable, il existe une infinité de contrôles. Il est intéressant de pouvoir en construire un qui "consomme le moins d'énergie".
La fonctionnelle d'énergie que l'on choisit ici est

$$J(u) = \int_0^T \|u(s)\|^2 \, ds.$$

On notera

$$U_{ad}(y_0, y_1) = \{u \in U, y(T, y_0, u) = y_1\}.$$

Le théorème suivant définit l'unique contrôle u qui minimise la fonctionnelle J sur l'ensemble $U_{ad}(y_0, y_1)$.

Théorème 2.3 *[10] Le contrôle $u(\cdot)$ qui transfère y_0 en $y_1 = y(T; y_0; u(.))$ est donné par :*

$$u(s) = B^t e^{(\mathrm{T}-s)A^t} \mathcal{W}_{\mathrm{T}}^{-1} (y_1 - e^{\mathrm{T}A} y_0).$$

Pour la preuve, en utilisant la formule (2.3).

Chapitre 3

Contrôlabilité relative d'un système fractionnaire

Dans ce chapitre, nous intéressons à l'étude de la contrôlabilité relative des systèmes dynamiques fractionnaire.

3.1 Position du problème

On considère le système fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}_0^cD_t^\alpha\, x(t) - A{}_0^cD_t^\beta\, x(t) = Bu(t) + Cu(t-\tau), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1, \\ u(t) = \psi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $0 < \beta \leq 1 < \alpha \leq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de contrôle. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B,\ C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sont trois matrices, $\tau > 0$ est le retard de commande ; et $\psi(t)$ est la fonction de contrôle initiale (en retard). ${}_0^cD_t^\alpha$, ${}_0^cD_t^\beta$ sont des dérivées fractionnaire de Caputo d'ordre α et β respectivement.

Notre objectif est de répondre a la question suivante :
étant donnée un état initial imposé et un état final désiré, existe-il au moins un contrôle qui améne le système (3.1) d'un état vers l'autre ?

Pour répondre à la question, on va donner l'équation intégral du système (3.1) puis la caractérisation de la contrôlabilité relative.

3.2 Equation Intégral du problème

Lemme 3.1 *On considère le système fractionnaire suivant*

$$\begin{cases} {}_0^cD_t^\alpha\ x(t) - A{}_0^cD_t^\beta\ x(t) = f(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $0 < \beta \leq 1 < \alpha \leq 2$*, La solution est donnée par :*

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 + t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})f(s)ds. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Preuve. En appliquant la transformation de Laplace sur la première équation du système (3.2), on obtient

$$\mathcal{L}\{{}_0^cD_t^\alpha x(t) - A{}_0^cD_t^\beta x(t); s\} = \mathcal{L}\{f(t); s\},$$

$$\mathcal{L}\{{}_0^cD_t^\alpha x(t); s\} - \mathcal{L}\{A{}_0^cD_t^\alpha x(t); s\} = \mathcal{L}\{f(t); s\},$$

avec

$$s^\alpha\mathcal{L}\{x(t); s\} - \sum_{k=0}^{1} s^{\alpha-k-1}x^{(k)}(0) - As^\beta\mathcal{L}\{x(t); s\} + \sum_{k=0}^{1} s^{\beta-k-1}x^{(k)}(0) = \mathcal{L}\{f(t); s\};$$

Donc

$$s^\alpha\mathcal{L}\{x(t); s\} - s^{\alpha-1}x_0 - s^{\alpha-2}x_1 - As^\beta\mathcal{L}\{x(t); s\} + As^{\beta-1}x_0 + As^{\beta-2}x_1 = \mathcal{L}\{f(t); s\}$$

Après des calculs simples, on a

$$(s^\alpha - As^\beta)\mathcal{L}\{x(t); s\} = \mathcal{L}\{f(t); s\} + s^{\alpha-1}x_0 - As^{\beta-1}x_0 + (s^{\alpha-2} - As^{\beta-2})x_1,$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t);s\} &= \frac{1}{(s^{\alpha}-As^{\beta})}\mathcal{L}\{f(t);s\}+\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-As^{\beta})}x_0\\ &- \frac{As^{\beta-1}}{(s^{\alpha}-As^{\beta})}x_0+\frac{s^{\alpha-2}-AS^{\beta-2}}{(s^{\alpha}-As^{\beta})}x_1\\ &= \mathcal{L}\{(t^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(At^{\alpha-\beta}));s\}\mathcal{L}\{f(t);s\}+\mathcal{L}\{\mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0;s\}\\ &- \mathcal{L}\{At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0;s\}+\mathcal{L}\{t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1;s\}.\end{aligned}$$

Utilisant la transformation de Laplace du produit de convolution de deux fonction, on obtient :

$$\mathcal{L}\{(t^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(At^{\alpha-\beta}));s\}\mathcal{L}\{f(t);s\}=\mathcal{L}\{\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})f(s)ds;s\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t);s\} &= \mathcal{L}\{\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})f(s)ds;s\}\\ &+ \mathcal{L}\{\mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0;s\}\\ &- \mathcal{L}\{At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0;s\}+\mathcal{L}\{t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1;s\},\end{aligned}$$

appliquant la transformation de Laplace inverse, on arrive a :

$$\begin{aligned}x(t) = \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0+t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1\\ +\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})f(s)ds.\end{aligned}$$

La preuve est complète. ■

Du lemme (3.1) on obtient le résultat suivant :

Lemme 3.2 *Pour tout $t \in (0,\tau]$, la solution générale du système (3.1)* *s'écrit sous la forme :*

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 + t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 \\
&+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds \\
&+ \int_{-\tau}^{t-\tau} (t-s-\tau)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s-\tau)^{\alpha-\beta})C\psi(s)ds.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Pour $t > \tau$, la solution générale du système (3.1) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 + t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 \\
&+ \int_0^{t-\tau} [(((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))B \\
&+ (t-s-\tau)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s-\tau)^{\alpha-\beta})C)u(s)]ds \\
&+ \int_{t-\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds \\
&+ \int_{-\tau}^{0} (t-s-\tau)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s-\tau)^{\alpha-\beta})C\psi(s)ds.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Preuve. D'aprés l'équation (3.3), on a

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 + t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 \\
&\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})(Bu(s) + Cu(s-\tau))ds.
\end{aligned}
$$

Pour $t \in (0, \tau]$, on pose $t = t - \tau$, on obtient

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 + t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 \\
&\qquad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds \\
&\quad + \int_{-\tau}^{t-\tau} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})Cu(s)ds,
\end{aligned}
$$

et comme $u(s) = \psi(s)$ si $-\tau \leq t \leq 0$, Donc

$$x(t) = \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 + t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds + \int_{-\tau}^{t-\tau} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C\psi(s)ds.$$

Pour $t > \tau$, on a

$$x(t) = \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 + t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 + \int_0^{t-\tau} [(((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))B + (t-s-\tau)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s-\tau)^{\alpha-\beta})C)u(s)]ds + \int_{t-\tau}^{t} [(((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))B + (t-s-\tau)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s-\tau)^{\alpha-\beta})C)u(s)]ds.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 + t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 \\ &+ \int_0^{t-\tau} [(((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))B \\ &+ (t-s-\tau)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s-\tau)^{\alpha-\beta})C)u(s)]ds \\ &+ \int_{t-\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))Bu(s)ds \\ &+ \int_{-\tau}^{0} (t-s-\tau)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s-\tau)^{\alpha-\beta})C\psi(s)ds. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

3.3 Contrôlabilité relative

Dans cette section, on va étudier la contrôlabilité relative du système fractionnaire (3.1).

3.3.1 Définitions

Définition 3.1 Le système (3.1) est dit contrôlable sur $J = [0, T]$ si pour chaque $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u \in L^1(-\tau, T)$ tel que la solution du système (3.1) satisfait $x(T) = x_2$. Le temps T est considéré comme le temps d'arrivée.

Définition 3.2 L'ensemble $y(t) = \{x(t), x'(t), u_t\}$ est l'état complet du système (3.1) au temps t.

Définition 3.3 Le système (3.1) est dit globalement relativement contrôlable sur J si pour tout état complet $y(0)$ et pour tout vecteur $x_2 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u(t)$ defini sur J tel que la trajectoire correspondante du système (3.1) vérifie $x(T) = x_2$.

3.3.2 Matrice de Contrôlabilité relative

Lemme 3.3 *Soient $\gamma > -1$ et $\phi(T_2, s)$ une fonction continue non négative pour tout $s \in [T_1, T_2]$, vérifie :*

$$\int_{T_1}^{T_2} (T_2 - s)^\gamma \phi(T_2, s) ds = 0. \tag{3.6}$$

Alors $\phi(T_2, s) \equiv 0$ pour tout $s \in [T_1, T_2]$.

Preuve. En utilisant la démonstration par l'absurde.
On a $\phi(T_2, s) \geq 0$, il existe $s_0 \in [T_1, T_2]$ tels que $\phi(T_2, s_0) > 0$, par la continuité de $\phi(T_2, s)$ il existe $0 < \delta < (T_2 - T_1)/2$ et $m > 0$ tel que

$$\phi(T_2, s) \geq m > 0 \ sur \ [max\{T_1, s_0 - \delta\}, min\{T_2, s_0 + \delta\}].$$

Alors

$$\int_{T_1}^{T_2} (T_2 - s)^\gamma \phi(T_2, s) ds \geq m \int_{max\{T_1, s_0 - \delta\}}^{min\{T_2, s_0 + \delta\}} (T_2 - s)^\gamma ds > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse (3.6), ceci termine la preuve. ■

Remarque 3.1 Ce lemme joue un rôle important dans le reste du travail.

Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B,\ C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ trois matrices, notée par

$$\langle A|B,C\rangle = \theta + A\theta + A^2\theta + ... + A^{n-1}\theta + \vartheta + A\vartheta + A^2\vartheta + ...A^{n-1}\vartheta, \quad (3.7)$$

où

$$\theta = ImageB,\ \vartheta = ImageC.$$

Il est évident que $\langle A|B,C\rangle$ est en fait recouvert par les colonnes de la matrice

$$[B, AB, A^2B...A^{n-1}B, C, AC, A^2C...A^{n-1}C].$$

Lemme 3.4 *Soit $z \in \mathbb{R}^n$.*
1- Pour tout $t \in (0,\tau]$, définissez $W(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par :

$$\begin{aligned}W(t)z = &\int_0^t ((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})BB^T((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})^T))zds\\ &+\int_{-\tau}^{t-\tau}[(t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})CC^T)\\ &\times((t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta}))^T)z]ds.\end{aligned} \quad (3.8)$$

2- Pour $t > \tau$, on définit $W(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par :

$$\begin{aligned}W(t)z = &\int_0^{t-\tau}[(((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B\\ &+(t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C)((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B\\ &+(t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C)^T)z]ds\\ &+\int_{t-\tau}^{t}((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})BB^T((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))^T)zds.\end{aligned} \quad (3.9)$$

Alors $ImW(t) = \langle A|B,C\rangle$ pour tout $t > 0$.

Preuve. On va étudier que le cas $t > \tau$ (la preuve est similaire pour le cas $t \in (0,\tau]$). On remarque que $ImW(t) = \langle A|B,C\rangle$ est équivaut à :

$$kerW(t) = \bigcap_{i=0}^{n-1} kerB^T(A^T)^i \bigcap_{j=0}^{n-1} kerC^T(A^T)^j. \quad (3.10)$$

il suffit de démontrer que (3.10) est vrai c'est-à-dire

$$kerW(t) \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} kerB^T(A^T)^i \bigcap_{j=0}^{n-1} kerC^T(A^T)^j. \tag{3.11}$$

En effet, si $x \in kerW(t)$ et $x \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned}
0 &= x^T W(t)x \\
&= \int_0^{t-\tau} \|((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B \\
&+ (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C)^T x)\|^2 ds \\
&+ \int_{t-\tau}^{t} \|B^T(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))^T x\|^2 ds,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ce qui signifie que

$$\int_0^{t-\tau} \|((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B \tag{3.13}$$

$$+(t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C)^T x)\|^2 ds = 0,$$

et

$$\int_{t-\tau}^{t} \|B^T(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))^T x\|^2 ds = 0, \tag{3.14}$$

utilisant le lemme (3.3) et l'équation (3.14), nous avons

$$\begin{aligned}
0 &= B^T\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))^T x \\
&= B^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^T)^k (t-s)^{k(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)} x, \forall s \in [t-\tau, t].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

On pose $s = t$ dans (3.15), on obtient $B^T x = 0$. De plus, il résulte de (3.14) que

$$B^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^T)^k (t-s)^{k(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)} x = B^T \frac{(A^T)^0 (t-s)^0}{\Gamma(\alpha)} x + B^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A^T)^k (t-s)^{k(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)} x = 0.$$

Alors
$$B^T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(A^T)^k(t-s)^{k(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)}x=0,$$
multipliant cette équation par $(t-s)^{\alpha-\beta-(\alpha-\beta)}$, on trouve
$$B^T(t-s)^{\alpha-\beta-(\alpha-\beta)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(A^T)^k(t-s)^{k(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)}x=0,$$
$$\Rightarrow B^T(t-s)^{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(A^T)^k(t-s)^{k(\alpha-\beta)}(t-s)^{-(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)}x=0,$$
$$\Rightarrow B^T(t-s)^{\alpha-\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(A^T)^k(t-s)^{(k-1)(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)}x=0,$$
donc
$$\int_{t-\tau}^{t}(t-s)^{\alpha-1+\alpha-\beta}\|B^T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(A^T)^k(t-s)^{(k-1)(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)}x\|^2ds=0.$$
Utilisant le lemme (3.3), on trouve
$$0=B^T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(A^T)^k(t-s)^{(k-1)(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)}x,\quad \textit{pour tout } s\in[t-\tau,t]. \tag{3.16}$$
On pose $s=t$ dans (3.16), on obtient
$$B^TA^Tx=0.$$
Avec induction mathématique on peut obtenir
$$0=\frac{B^TA^T(t-s)^{(1-1)(\alpha-\beta)}}{\Gamma((\alpha-\beta)+\alpha)}x+B^T\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(A^T)^k(t-s)^{(k-1)(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)}x,$$
C'est-à-dire
$$0=B^T\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(A^T)^k(t-s)^{(k-1)(\alpha-\beta)}}{\Gamma(k(\alpha-\beta)+\alpha)}x,$$
Posant $t=s$, on obtient
$$B^T(A^T)^kx=0,\quad \textit{pour tout } k=2,3... \tag{3.17}$$

d'après le théorème de Cayley Hamilton, il existe des fonctions

$$\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), ..., \gamma_{n-1}(t)$$

définie sur $[0, \infty)$ tel que :

$$\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(At^{\alpha-\beta}) = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i(t) A^i, \tag{3.18}$$

il résulte de (3.17) et (3.18) que :

$$(\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(At^{\alpha-\beta})B)^T x \equiv 0, \quad pour\ tout\ t \geq 0,$$

utilisant (3.13)) on arrive a

$$\int_0^{t-\tau} \|(t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C)^T x\|^2 ds = 0. \tag{3.19}$$

Similaire à (3.15),(3.16) et (3.17), nous avons

$$C^T(A^T)^k x = 0, \quad pour\ tout\ k = 0, 1, 2..., n-1 \tag{3.20}$$

de (3.17) et(3.20), on conclut que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n-1} kerB^T(A^T)^i \bigcap_{j=0}^{n-1} kerC^T(A^T)^j,$$

c'est-à-dire

$$kerW(t) \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} kerB^T(A^T)^i \bigcap_{j=0}^{n-1} kerC^T(A^T)^j. \tag{3.21}$$

Inversement, soit

$$x \in \bigcap_{i=0}^{n-1} kerB^T(A^T)^i \bigcap_{j=0}^{n-1} kerC^T(A^T)^j.$$

Alors (3.17) et(3.20) sont vrais pour tout $-\tau < s \leqslant t$, avec

$$B^T((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))^T x = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(t)(t-s)^{\alpha-1} B^T(A^T)^i x = 0, \tag{3.22}$$

et pour $0 \leqslant s \leqslant t-\tau$, on a

$$
\begin{aligned}
&((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B+(t-\tau-s)\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C)^{T}x \\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(t-s)(t-s)^{\alpha-1}B^{T}(A^{T})^{i}x+\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(t-\tau-s)(t-\tau-s)^{\alpha-1}C^{T}(A^{T})^{i}x \\
&=0,
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

donc, $x \in kerW(t)$, c'est-à-dire

$$
kerW(t) \supset \bigcap_{i=0}^{n-1} kerB^{T}(A^{T})^{i}\bigcap_{j=0}^{n-1} kerC^{T}(A^{T})^{j}, \tag{3.24}
$$

de (3.21) et (3.24), on conclut que (3.10) est vrai et la preuve du lemme (3.4) est terminée. ■

3.3.3 Ensemble Accesible et ses propriétées

Définition 3.4 :

1- **Première classe accessible** : L'ensemble $R(x_0,x_1)$=$\{\nu|$ pour une valeur initiale donnée $x(0)=x_0, x'(0)=x_1$ et pour un temps T donné dans $(0,\tau]$, il existe une fonction de contrôle initiale $\psi \in L^1(-\tau,0)$ et contrôle $u \in L^1(0,T)$ tels que la solution $x(t)$ du système (3.1) satisfait $x(T)=\nu\}$ est dit la première classe accessible.

2- **Deuxième classe accessible** : L'ensemble $R(x_0,x_1,\psi)$=$\{\nu|$ pour une valeur initial donnée $x(0)=x_0, x'(0)=x_1, T>\tau$, et la fonction de contrôle initiale $\psi \in L^1(-\tau,0)$ il existe un contrôle $u \in L^1(0,T)$ telle que la solution de (3.1) vérifier $x(T)=\nu\}$ est dite l'ensemble accessible de deuxième classe.

L'ensemble accessible pour les deux classes possède les propriétés suivantes :

Lemme 3.5 *Soit $R(0,0)$ la première classe accessible où les données initiales sont nulles, alors*

$$R(0,0)=\langle A|B,C\rangle.$$

Preuve. On montre que $R(0,0) \subset \langle A|B,C\rangle$.
Soit $x \in R(0,0)$, il résulte du lemme (3.2) et l'équation (3.18) que

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds \\ &+ \int_{-\tau}^{t-\tau} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C\psi(s)ds \\ &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(t-s)A^iBu(s)ds \\ &+ \int_{-\tau}^{t-\tau} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{n-1}\gamma_j(t-\tau-s)A^jC\psi(s)ds \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}A^iB\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma_i(t-s)u(s)ds \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1}A^jC\int_{-\tau}^{t-\tau} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\gamma_j(t-\tau-s)\psi(s)ds. \end{aligned} \tag{3.25}$$

ce qui implique que $x \in \langle A|B,C\rangle$ donc $R(0,0) \subset \langle A|B,C\rangle$.

En suite, on montre que $\langle A|B,C\rangle \subset R(0,0)$.

Soit $x(t)$ la solution du système (3.1), utilisant le lemme (3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds \\ &+ \int_{-\tau}^{t-\tau} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C\psi(s)ds. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Pour tout $\hat{x} \in \langle A|B,C\rangle$, du lemme (3.4) il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $W(t)z = \hat{x}$, on pose

$$u(s) = \begin{cases} C^T((t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta}))^Tz, & -\tau \leqslant s < t-\tau \\ 0, & t-\tau \leqslant s \leqslant 0 \\ B^T((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))^Tz, & 0 \leqslant s \leqslant t, \end{cases}$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}
. \quad & \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds \qquad (3.27)\\
+ \quad & \int_{-\tau}^{t-\tau} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C\psi(s)ds \\
= \quad & \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})BB^T(t-s)^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))^T zds \\
+ \quad & \int_{-\tau}^{t-\tau} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C \\
\times \quad & C^T((t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta}))^T zds = W(t)z = \quad \hat{x},
\end{aligned}$$

ce qui implique x̂∈ $R(0,0)$, donc $\langle A|B,C\rangle \subset R(0,0)$, d'où le résultat. ■

Lemme 3.6 *Soit* $R(0,0,0)$ *la deuxième classe accessible où les données initiales sont nulles, alors*

$$R(0,0,0) = \langle A|B,C\rangle.$$

Preuve. On montre que $R(0,0,0) \subset \langle A|B,C\rangle$.

Soit $x \in R(0,0,0)$, il résulte du lemme (3.2) et l'équation (3.18) que

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^{t-\tau}[(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B \qquad (3.28)\\
&+ (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C]u(s)ds\\
&+ \int_{t-\tau}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds\\
&= \int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds\\
&+ \int_0^{t-\tau}(t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})Cu(s)ds\\
&= \int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_i(t-s)A^iBu(s)ds\\
&+ \int_0^{t-\tau}(t-\tau-s)^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{n-1}\gamma_j(t-\tau-s)A^jCu(s)ds\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}A^iB\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\gamma_i(t-s)u(s)ds\\
&+ \sum_{j=0}^{n-1}A^jC\int_0^{t-\tau}(t-\tau-s)^{\alpha-1}\gamma_j(t-\tau-s)u(s)ds.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique $x \in \langle A|B,C\rangle$, donc $R(0,0,0) \subset \langle A|B,C\rangle$.

Maintenant, on montre que $\langle A|B,C\rangle \subset R(0,0,0)$.
Soit $x(t)$ une solution du système (3.1), utilisant le lemme (3.2), nous avons

$$
\begin{aligned}
x(t) = &\int_0^{t-\tau}((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B\\
&+ (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C)u(s)ds \qquad (3.29)\\
&+ \int_{t-\tau}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds.
\end{aligned}
$$

Pour tout $\hat{x} \in \langle A|B,C\rangle$, du lemme (3.4), il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $W(t)z = \hat{x}$ avec

$$u(s) = \begin{cases} [(t-s)^{\alpha-1}B^T\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})^T \\ \\ +(t-\tau-s)^{\alpha-1}C^T(\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta}))^T]z, & 0 \leqslant s < t-\tau \\ \\ B^T((t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta}))^T z, & t-\tau \leqslant s \leqslant t \\ 0, & -\tau \leqslant s \leqslant 0, \end{cases}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} . \quad & \int_0^{t-\tau} [(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B \\ + \quad & (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C]u(s)ds \\ + \quad & \int_{t-\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds \\ = \quad & \int_0^{t-\tau} [[(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B + (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C] \\ \times \quad & [(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B + (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C]^T]zds \\ + \quad & \int_{t-\tau}^{t} [(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})BB^T[(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})]^T]zds \\ = \quad & W(t)z = \quad \hat{x}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Ce qui implique $\hat{\mathrm{x}} \in R(0,0,0)$ donc $\langle A|B,C\rangle \subset R(0,0,0)$ par conséquent

$$R(0,0,0) = \langle A|B,C\rangle.$$

La preuve est terminée. ■

3.3.4 Caractérisation de la contrôlabilité relative

Théorème 3.1 *Le système fractionnaire (3.1) avec retard en contrôle est relativement contrôlable si et seulement si :*

$$rang[B, AB, A^2B...A^{n-1}B, C, AC, A^2C...A^{n-1}C] = n. \tag{3.31}$$

c'est à dire $\langle A|B,C\rangle = \mathbb{R}^n$.

Preuve. Nous montrons d'abord la condition nécessaire, il y a deux cas :

Cas 1 : Le contrôle est attient au temps $T > \tau$.
Supposons que le système (3.1) est relativement contrôlable, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et les états initiauxs $x_0 = 0, x_1 = 0$ et d'un contrôle initial $\psi = 0$, il résulte de la définition (3.4) qu'il existe un contrôle $u(s)$ tel que

$$\begin{aligned} x(t) = &\int_0^{t-\tau} [(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B \\ &+ (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C]u(s)ds \\ &+ \int_{t-\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds, \end{aligned} \tag{3.32}$$

et avec (3.18), on arrive à $x \in \langle A|B, C\rangle$ donc $\mathbb{R}^n \subset \langle A|B, C\rangle$.

Cas 2 : Le contrôle est atteint au temps $T \in (0, \tau]$.
La preuve est similaire.

En suite, nous montrons la condition suffisante, il y a deux cas :

Cas 1 : Le contrôle est atteint au temps $T > \tau$.
Supposons que l'équation (3.31) est vrai, alors $\mathbb{R}^n \subset \langle A|B, C\rangle$, pour tout $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout état initial (x_0, x_1) et le contrôle initial ψ, on a

$$\begin{aligned} k = &\overline{x} - \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 + At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 - t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 \\ &- \int_0^{t-\tau} [(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B \\ &+ (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C]ds\psi(0) \\ &- \int_{t-\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bds\psi(0) \\ &- \int_{-\tau}^{0} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C\psi(s)ds. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Pour

$$k \in \mathbb{R}^n = \langle A|B, C\rangle = R(0, 0, 0);$$

D'après le lemme (3.6), il existe un contrôle $u^* \in L^1(0,T)$ tel que

$$\begin{aligned} k = &\int_0^{t-\tau} [(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B \\ &+ (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C]u^*(s)ds \\ &+ \int_{t-\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu^*(s)ds. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Soit $u(s) = u^*(s) + \psi(0)$, alors

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 \\ &+ t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 + \int_0^{t-\tau} [(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B \\ &+ (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C](\psi(0)+u^*(s))ds \\ &+ \int_{t-\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B(\psi(0)+u^*(s))ds \\ &+ \int_{-\tau}^{0} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C\psi(s)ds. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \overline{x} = &\mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 + t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 \\ &+ \int_0^{t-\tau} [(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})B \\ &+ (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C]u(s)ds \\ &+ \int_{t-\tau}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu(s)ds \\ &+ \int_{-\tau}^{0} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C\psi(s)ds. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ce qui signifie que le système fracionnaire (3.1) est relativement contrôlabe pour $t > \tau$.

Cas 2 : Le contrôle est atteint au temps $t \in (0, \tau]$.

Supposons que la condition (3.31) est vérifiée c'est-à-dire $\mathbb{R} \subset \langle A|B, C\rangle$ donc, pour tout $\overline{x} \in \mathbb{R}$ et tout état initial $(x_0, x_1,)$ on a

$$\begin{aligned} k &= \overline{x} - \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 + At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 \\ &\quad - t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Utilisant l'équation $k \in \mathbb{R} = \langle A|B, C\rangle$ et le lemme (3.5) nous avons $k \in R(0,0)$, il existe donc un contrôle $u^*(s) \in L^1(0,T)$ et un contrôle initial $\psi^* \in L^1(-\tau, 0)$ tels que :

$$\begin{aligned} k &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu^*(s)ds \\ &\quad + \int_{-\tau}^{t-\tau} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C\psi^*(s)ds. \end{aligned} \tag{3.37}$$

En suite, nous avons

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \mathbb{E}_{\alpha-\beta}(At^{\alpha-\beta})x_0 - At^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(At^{\alpha-\beta})x_0 + t\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(At^{\alpha-\beta})x_1 \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-s)^{\alpha-\beta})Bu^*(s)ds \\ &\quad + \int_{-\tau}^{t-\tau} (t-\tau-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(t-\tau-s)^{\alpha-\beta})C\psi^*(s)ds. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ce qui signifie que le système fractionnaire (3.1) est relativement contrôlable pour $T \in (0, \tau]$. La suffisance est montrée et la preuve est terminée. ■

Corollaire 3.1 *Le système (3.1) est relativement contrôlable si et seulement si la matrice Gramien de contrôlabilité $W(t)$ est définie positive.*

Preuve. Ce corollaire vient du lemme (3.4) et du théorème (3.1). ■

Remarque 3.2 :
L'inversibilité de la matrice $W(t)$ est équivalent a

$$rang[B, AB, A^2B...A^{n-1}B, C, AC, A^2C...A^{n-1}C] = n. \tag{3.39}$$

Le contrôle $u(t)$ s'écrit comme suit :

$$u(s) = \begin{cases} 0, & -\tau \leqslant t \leqslant 0 \\ [(T-t)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(T-t)^{\alpha-\beta})B & \\ +(T-\tau-t)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(T-\tau-t)^{\alpha-\beta})C]^T W^{-1}y_1, & 0 \leqslant t \leqslant T-\tau \\ & \\ .[(T-t)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(T-t)^{\alpha-\beta})B]^T W^{-1}y_1, & T-\tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{3.40}$$

où

$$y_1 = x_2 - \mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(AT^{\alpha-\beta})x_0 + AT^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(AT^{\alpha-\beta})x_0 - T\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(AT^{\alpha-\beta})x_1.$$

Si le temps d'arrivée $T \in (0,\tau]$, alors le contrôle $u(t)$ peut être donné comme suit

$$u(s) = \begin{cases} [(T-\tau-t)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(T-\tau-t)^{\alpha-\beta})C]^T W^{-1}y_2, & -\tau \leqslant t \leqslant T-\tau \\ 0, & T-\tau \leqslant t \leqslant 0 \\ [(T-t)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(A(T-t)^{\alpha-\beta})B]^T W^{-1}y_1, & 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{3.41}$$

où

$$y_2 = x_2 - \mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha}(AT^{\alpha-\beta})x_0 + AT^{\alpha-\beta}\mathbb{E}_{\alpha-\beta,\alpha-\beta+1}(AT^{\alpha-\beta})x_0 - T\mathbb{E}_{\alpha-\beta,2}(AT^{\alpha-\beta})x_1$$

sous le contrôle (3.40) ou le contrôle (3.41), la solution du système (3.1) satisfait $x(0) = x_0, x'(0) = x_1$ et $x(T) = x_2$.

Remarque 3.3 Lorsque $T > \tau$, le contrôle n'est pas unique, mais il est peut-être unique lorsque $T \in (0,\tau]$ ce que est vu à partir d'un exemple dans la section suivante. De plus, l'unicité du contrôle dépend non seulement de temps d'arrivée mais aussi des matrice A, B et C.

3.4 Exemple

Considérons le système dynamique fractionnaire avec retard suivant :

$${}_0^cD_t^{1.5}x(t) - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} {}_0^cD_t^{0.5}x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u(t-1) \tag{3.42}$$

où $x \in \mathbb{R}^2$, avec des calcules simple, on trouve que

$$(B\ AB\ C\ AC) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

et

$$rang(B\ AB\ C\ AC) = 2. \tag{3.44}$$

A partir du théorème (3.1), le système (3.42) est relativement contrôlable pour tout $T > 0$.

Lorsque $t \in (0, 1]$, le contrôle est unique. En effet, pour tout x_0, x_1 et x_2 donnée, supposons qu'il existe $\psi_1(s) \in L^1(-\tau, 0)$, $u_1 \in L^1(0, T)$ et $\psi_2(s) \in L^1(-\tau, 0), u_2 \in L^1(0, T)$ tels que

$$\begin{aligned} x_2 = x(T) &= \mathbb{E}_1(AT)x_0 - AT\mathbb{E}_{1,2}(AT)x_0 + T\mathbb{E}_{1,2}(AT)x_1 \\ &+ \int_0^T (T-s)^{0.5}\mathbb{E}_{1,1.5}(A(T-s))Bu_i(s)ds \\ &+ \int_{-1}^{T-1} (T-1-s)^{0.5}\mathbb{E}_{1,1.5}(A(T-1-s))C\psi_i(s)ds. \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{3.45}$$

puis

$$\begin{aligned} &\int_0^T (T-s)^{0.5}\mathbb{E}_{1,1.5}(A(T-s))Bu_1(s)ds \\ &+ \int_{-1}^{T-1} (T-1-s)^{0.5}\mathbb{E}_{1,1.5}(A(T-1-s))C\psi_1(s)ds \\ &= \int_0^T (T-s)^{0.5}\mathbb{E}_{1,1.5}(A(T-s))Bu_2(s)ds \\ &+ \int_{-1}^{T-1} (T-1-s)^{0.5}\mathbb{E}_{1,1.5}(A(T-1-s))C\psi_2(s)ds \end{aligned} \tag{3.46}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} &\int_0^T (T-s)^{0.5}\mathbb{E}_{1,1.5}(A(T-s))B(u_1(s) - u_2(s))ds = \\ &\int_{-1}^{T-1} (T-1-s)^{0.5}\mathbb{E}_{1,1.5}(A(T-1-s))C(\psi_2(s) - \psi_1(s))ds. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Utilisant (3.18),(3.43) et (3.47), on obtient

$$u_1(s) = u_2(s) \ et \ \psi_2(s) = \psi_1(s),$$

c'est-à-dire que la solution est unique.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons établi des résultats de contrôlabilité relative pour des systèmes fractionnaires avec retards en contrôle .
Des conditions suffisantes pour la contrôlabilité relative d'une classe de systèmes de contrôle dynamiques décrits par des équations différentielles fractionnaires sont considérées. En utilisant les calculs fractionnaires, et quelques méthodes adoptées directement à partir des problèmes de contrôlabilité clasique.

Bibliographie

[1] Balachandran, K., Zhoub, Yong., Kokila,J. : Relative controllability of fractional dynamical systems with distributed delays in control, Computers and Mathematics with Applications 64, 3201-3209, 2012.

[2] Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F., Rogosin, S.V. : Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer, New York, 2014.

[3] Gorenflo, R., Loutchko, J., Luchko, Y. : Computation of the Mittag-Leffler function $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z)$ and its derivative. Fract. Calc. Appl. Anal. 2002.

[4] Haubold, H.J., Mathai, A.M., Saxena, R.K. : Mittag-Leffler functions and their applications. J. Appl. Math. 2011.

[5] Hea B.B, Cheng Zhoub B, HaiKouc C : The controllability of fractional damped dynamical systems with control delay, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 32, 190-198, 2016.

[6] Podlubny, I. : Fractional Differential Equations, Mathematics In Science And Engineering, 1999.

[7] Lobry, C., Sari,T. : Introduction à la théorie du contrôle, école du CIMPA Tlemsen, 2003.

[8] Kilbas, A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. : Theory and Applications of Fractional Differential Equation. Elsevier, Amsterdam, 2006.

[9] Marir, S. :Problèmes de contrôlabilité des systèmes différentiels fractionnaires, Mémoire magistère, 2012.

[10] Trelat,E. : Contrôle optimal : Théorie et applications, Note de Cours, Université de Paris-sud, 2000.

[11] Bekaddour K. : Transformée de la Laplace et Applications aux Équations Différentielles Fractionnaires, mémoire master, 2017.