

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des mathématiques et de l'informatique et des sciences de la matière
Département de mathématiques
Laboratoire des mathématiques appliquées et de modélisation

THÈSE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT EN 3^{ème} CYCLE

Domaine : Mathématiques et informatique. Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse non linéaire et modélisation

Présentée par

Bounaya Mohammed Charif.

Intitulée

**Étude analytique et numérique pour les équations integro-différentielles non
linéaires de Fredholm**

Soutenue le :

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom

Grade

Mr ELLAGGOUNE Fateh
Mr AISSAOUI Mohamed-Zine
Mr GUEBBAI Hamza
Mr BENRABIA Nouredine
Mr GHIAT Mourad

Prof Univ. de Guelma
Prof Univ. de Guelma
Prof Univ. de Guelma
M.C.A Univ. de Souk Ahras
M.C.B Univ. de Guelma

Président
Encadreur
Examineur
Examineur
Invité

Année Universitaire : 2019-2020

Étude analytique et numérique pour les équations
integro-différentielles non linéaires de Fredholm.

Mohammed Charif Bounaya.

Sous la direction de :

Pr Mohamed Zine Aissaoui et Dr Mourad Ghat.

Remerciement

Le plus grand merci revient à Dieu qui nous à toujours guidé dans le bon sens dans notre vie.

J'adresse un grand merci à mes parents pour leur encouragement et leur soutien inestimables . Je remercie, ainsi, toute ma famille, du proche au lointain et particulièrement mon oncle "Malik" qui ma toujours aidé, durant mes années d'études, dans l'impression et l'organisation des document utiles ainsi que durant la préparation de mes mémoires de Licence et de Master et enfin de cette présente thèse de Doctorat.

Je tiens à remercier d'une manière exceptionnelle mon encadreur Aissaoui Mohamed Zine, le docteur Guebbai Hamza et le docteur Ghiat Mourad ; dont j'avais l'honneur de suivre leurs précieux cours pendant les années de Master et durant la formation doctorale. Je voudrais leur adresser toutes mes gratitudes pour leurs conseils, critiques et remarques de grande valeur, ainsi que pour leur sage gérance et pour avoir installer de très bonnes conditions de travail au sein du laboratoire de mathématiques appliquées et de modélisation.

Je voudrais exprimer, aussi, mes remerciement à tous les membres de jury d'avoir accepter d'expertiser ce travail.

Enfin, je remercie vivement, tous les enseignents, mes amis et mes collègues, exceptionnellement Samir Lemita, Sami Touati et Khellaf Ammar, ainsi que tous les membres du laboratoire de mathématiques appliquées et de modélisation.

ملخص

هذه الأطروحة تخص دراسة تحليلية و عددية لمعادلات تفاضلية تكاملية غير خطية من نوع فريدهولم و فولتيرافريدهولم. الهدف هو دراسة مسألة وجود ووحداية الحل، بعد ذلك تشكيل تقريب عددي مناسب يتمحور أساسا حول طريقة نيشتروم، و في النهاية نقدم أمثلة تثبت فعالية التقريب بالترابط مع الدراسة التحليلية.

كلمات مفتاحية : معادلات تفاضلية تكاملية لفريدهولم، نقطة صامدة ، طريقة نيشتروم، التقريبات المتتالية.

Abstract.

This thesis concerns an analytical and numerical study for a nonlinear Fredholm and Volterra-Frdholm integro-differential equation, in this respect, we treat the conditions ensuring the existence and uniqueness of the solution for different varieties of kernels, thereafter, we construct a numerical approach based on the well known Nyström method. The numerical examples illustrate the efficiency of the proposed method in connection with the existence and uniqueness conditions.

Keywords : Fredholm integro-differential equation ; Fixed point ; Nyström method ; Successive approximations.

Résumé.

Cette thèse concerne une étude analytique et numérique pour des équations integro-différentielles non linéaires de Fredholm et de Volterra-Fredholm, dans ce contexte, on traite les conditions d'existence et d'unicité de la solutions pour des types différents de noyaux. Par la suite, on construit une approche numérique basée essentiellement sur la méthode de Nyström et on conclut par des exemples numériques exprimant l'efficacité de l'approche en concordance avec l'étude analytique.

Mots clés : Equation integro-différentielle de Fredholm ; Point fixe ; Méthode de Nyström ; Approximations successives.

Table des matières

Introduction	3
1 Notions fondamentales et position du problème.	6
1.1 Critères de compacité dans les espaces métriques complets.	6
1.2 Théorème d'Arzela-Ascoli.	8
1.3 Théorèmes de point fixe fondamentaux.	10
1.4 Équations intégrales et integro-différentielles.	12
1.4.1 Équations intégrales.	12
1.4.2 Exemples de problèmes qui se ramènent à des équations intégrales	
en dimension 1.	13
1.4.3 Fonction de Green en dimension 1.	15
1.4.4 Exemples de problèmes qui se ramènent à une équation intégrale en	
dimension supérieure à 1.	17
1.4.5 Équations integro-différentielles.	19
1.5 Position du problème.	20
2 Analyse d'une équation integro-différentielle non linéaire de type Fred-	
holm.	23
2.1 Étude théorique.	23
2.1.1 Compacité de l'opérateur intégral.	24
2.1.2 Existence et unicité de la solution.	26
2.2 Approche numérique.	29
2.2.1 Méthode de Nyström.	29
2.2.2 Existence et unicité de la solution du système de dimension finie.	30
2.2.3 Analyse de convergence.	31

2.2.4 Tests numériques.	35
3 Analyse d'une équation integro-différentielle non linéaire de type Volterra-	
Fredholm.	44
3.1 Étude théorique.	44
3.1.1 Existence et unicité de la solution.	45
3.1.2 Théorème alternatif d'existence et d'unicité de la solution.	48
3.2 Approche numérique.	52
3.2.1 Méthode de Nyström.	52
3.2.2 Existence et unicité de la solution du système de dimension finie.	54
3.2.3 Analyse de convergence.	56
3.2.4 Remarque sur l'application de la méthode de Nyström.	62
3.2.5 Tests numériques.	63
Conclusion et perspectives.	64
Bibliographie	71

Introduction.

Depuis l'apparition du calcul différentiel et intégral, essentiellement dans les travaux de Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716), les équations différentielles furent l'outil de base de la modélisation mathématique, ce qui a engendré un grand intérêt pour cette théorie. Suite au développement de la science dans les années qui suivent, la construction des modèles mathématiques devient de plus en plus complexe, rendant inévitable l'utilisation des équations intégrales.

Dans la communauté scientifique moderne, il est considéré comme traditionnel que les premières origines de la théorie des équations intégrales remontent aux travaux de Fourier (1768-1830) sur la formule d'inversion de ce qui est connue par " la transformée de Fourier " qui représente, en fait, l'opérateur inverse d'un opérateur intégral. Par la suite Abel [1] (1823), [2] (1826) a introduit une équation intégrale (connue par l'équation d'Abel) de type convolution provenant d'un problème mécanique qui consiste à trouver une courbe C dans un plan vertical (xOy) passant par l'origine et sur laquelle se glisse un point matériel P sans friction et sans vitesse initiale ($v_0 = 0$) jusqu'à atteindre l'origine O en un temps donné T .

Les équations de type Abel ont été objet de plusieurs analyses, parmi lesquelles de Liouville [32, 33] (1832) qui a aussi montré l'équivalence de certains problèmes à valeurs initiales à une équation intégrale [34] (1837) (qui serait connue, après un demi siècle, par l'équation de Volterra de deuxième espèce). En suite, vers la fin du 19^{ème} siècle, une nouvelle théorie, due à Volterra [46, 47, 48] (1896), a vu le jour suite à ses travaux sur l'électrostatique [49, 50] (1884) concernant la distribution des charges électriques sur un segment de la sphère. Ainsi, les contributions de Volterra à la théorie d'élasticité [51, 52] (1906) [53] (1907) [54, 55, 56] (1909) et à l'électrodynamique [57] (1909) ont conduit à

l'apparition de sa théorie sur les équations integro-différentielles (pour plus de détails sur la biographie de Volterra voir [59, 1959]). La théorie de Volterra sur les équations intégrales et integro-différentielles (regroupée dans [58, 1913], [59, 1959]) a contribué d'une manière cruciale au développement de l'analyse fonctionnelle, dont il est considéré comme l'un des fondateurs.

Cet époque a été marqué, aussi, par l'apparition de la théorie de Fredholm [18, (1900)][19, (1903)] concernant l'étude d'un type général d'équation, l'approche de Fredholm s'est basée sur l'extension, en dimension infinie, de l'étude du système de dimension finie $x + \lambda Ax = B$ donnant naissance à ce qui est connu par "le déterminant de Fredholm". Les idées novatrices de Fredholm étaient une source d'inspiration de plusieurs savants de cette époque, parmi lesquels : Banach (1892-1945), Hilbert (1862-1943), Riesz (1880-1956), Schmidt (1876-1959), Poincaré (1854-1912), Fréchet (1878-1973), et autres fondateurs de l'analyse fonctionnelle moderne qui ont ouvert un large champ d'investigations sur les mathématiques appliquées.

Dans la période récente, la théorie des équations intégrales et integro-différentielles a connue un considérable enrichissement et de nombreuses applications, par exemples : L'électromagnétisme [25, (2016)], modèles de tremblement de terre [41, (2019)], dynamique de population [11, (1977)], physique des plasma et la théorie cinétique des gazes [22, (2010)]. En raison de l'indispensabilité de l'étude de ce type d'équations, beaucoup de travaux ont été effectués dans ce contexte dont le but est d'étudier leurs propriétés analytiques et de développer, en parallèle, des méthodes de résolution numériques convenables. Parmi les références les plus courantes, citons [31, (1985)][5, (1997)][40, (2019)] où on trouve des théories générales et une collection des méthodes numériques les plus répandues. Ainsi, une foule de travaux a été publiée sur ce sujet, citons : [9, (1984)][37, (2008)][23, (2014)][36, (2015)] [30, (2018)] [42, (2019)] et autres qui développent des traitements analytiques et numériques de plusieurs variétés d'équations avec différentes approches comme la méthode de Nyström [23, (2014)][36, (2015)], les méthodes de projection (Galerkin, collocation, ondelettes ect..) [15, 16, 35, 12, 2019], méthodes de régularisation [13, (2016)][6, (2018)] et intégration produit [20, (2018)][44, 45, (2019)] pour les équations avec noyaux singuliers.

Cette thèse est dédiée à l'étude de certaines équations integro-différentielles non linéaires de type Fredholm et Volterra-Fredholm de 2^{ème} espèce ; à cet égard, nous présentons une discussion sur les questions d'existence et d'unicité de la solution avec différentes variétés de noyaux, ensuite, on donne une approche numérique basée sur la méthode de Nyström selon le traitement analytique. La thèse se compose d'une introduction générale, sur les bases de la théorie des équation intégrales et integro-différentielles, de trois chapitres et d'une conclusion.

Dans le premier chapitre, on présente des notions générales sur la compacité dans les espaces métriques avec les résultats fondamentaux : le théorème de Hausdorff et le théorème d'Arzela-Ascoli ; ainsi que les principes de point fixe classiques de Banach et de Schauder.

Le deuxième et le troisième chapitres représentent les résultats essentiels de cette thèse, où, tous les résultats sont originaux.

Le deuxième chapitre est consacré, alors, à l'étude analytique et numérique d'une équation integro-différentielle non linéaire de type Fredholm ; cette équation peut être vue comme une forme générale de l'équation traitée numériquement dans [35] (2019)], qui peut être considérée, aussi, comme la version Fredholm de l'équation de type Volterra traitée dans [23] (2014)] [42, 41, 2019]. Dans ce chapitre on discute des conditions assurant l'existence et l'unicité de la solution pour deux différents types de noyaux, ensuite, on donne une approche numérique basée sur la discrétisation par les règles de quadrature et la résolution, par la méthode itérative de Picard, du système obtenu de dimension finie. À la fin, on examine la performance de l'approche par des tests numériques .

Dans le troisième chapitre, on développe une analyse analogue à celle faite dans le précédent concernant une équation integro-différentielle de type Volterra-Fredholm qui représente l'équation dépendante de la dérivée des équations intégrales mixtes considérées dans [36] (2015)] [12, 2019] .

Chapitre 1

Notions fondamentales et position du problème.

Dans ce chapitre on introduit des notions de base sur la compacité dans les espaces métriques complets, ainsi que les théorèmes de point fixe fondamentaux de Banach et de Schauder. Par la suite, on discute la position du problème étudié dans cette thèse.

1.1 Critères de compacité dans les espaces métriques complets.

On donne, dans cette section, la caractérisation des parties relativement compactes dans les espaces métriques complets (théorème de Hausdorff) et particulièrement dans l'espace $C^n([a, b], \mathbb{R})$ ($n \geq 1$, $-\infty < a < b < +\infty$) des fonctions indéfiniment différentiables sur $[a, b]$ (théorème d'Arzela-Ascoli). Tout d'abord on va rappeler quelques notions fondamentales de compacité.

Définition 1.1.1. [27] *On appelle recouvrement d'un espace topologique X , tout ensemble P composé de parties de X tel que tout élément de X appartient au moins à l'une d'entre elles.*

Un sous-recouvrement d'un recouvrement P est un recouvrement composé de parties appartenant à P .

Un recouvrement est dit fini, s'il est composé d'un nombre fini de parties de X .

Un recouvrement est dit ouvert, s'il est composé de parties ouvertes de X .

Définition 1.1.2. [27]. *Un espace topologique X est dit compact, s'il est séparé (espace de Hausdorff) et si tout recouvrement ouvert de X contient un sous recouvrement fini.*

Notons que le fait d'être compact est une propriété de l'espace topologique lui-même (car le recouvrement est composé des ouverts de X). Alors, on dit qu'une partie $A \subset X$ est compacte, si A , en tant qu'un sous-espace topologique muni de la topologie induite, est compact.

Dans le cas d'un espace métrique, une conséquence directe découle de la définition 1.1.2 est que toute partie compacte (en tant qu'un sous-espace métrique) est nécessairement bornée ; en effet, considérons une partie quelconque d'un espace métrique et un recouvrement de cette dernière par des boules emboîtées de centres l'origine, si cette partie est compacte, alors, il existe une boule du recouvrement de rayon fini contenant cette partie, donc elle est nécessairement bornée.

Une caractérisation des espaces métriques compacts est donnée par le théorème suivant de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 1.1.1. (De Bolzano-Weierstrass)[27]. *Soit A une partie d'un espace métrique X . Pour que A soit un espace compact, il faut et il suffit que toute suite d'éléments de A contient une sous-suite qui converge vers un élément de X .*

Un conséquence directe de ce théorème est que tout espace compact est complet (découle du fait que toute suite de Cauchy, contenant une sous-suite convergente, est convergente).

Définition 1.1.3. [39]. *Soit M un ensemble quelconque d'un espace métrique (X, d) et soit $\epsilon > 0$. Un ensemble $E \subset X$ est dit ϵ - réseau de M , si pour tout élément $x \in M$, il existe au moins un élément $y_x \in E$ tel que $d(x, y_x) \leq \epsilon$.*

Définition 1.1.4. [27, 39]. *Une partie A d'un espace métrique X est dite relativement compacte, si sa fermeture \bar{A} est compacte (comme un sous espace métrique compact).*

Théorème 1.1.2. (De Hausdorff)[26, 39]. *Soit A une partie d'un espace métrique X . Pour que A soit relativement compacte, il est nécessaire, et suffisant lorsque X est complet, qu'il existe dans X un ϵ -réseau fini pour A pour tout $\epsilon > 0$.*

Le théorème suivant donne le critère de compacité dans les espaces métriques de dimension finie \mathbb{R}^n .

Théorème 1.1.3. (De Hein-Borel-Lebesgue)[27]. Les parties compactes de \mathbb{R}^n (en tant que sous-espaces), sont les parties fermées bornées.

1.2 Théorème d'Arzela-Ascoli.

L'un des critères de compacité fondamentaux, est le théorème d'Arzela-Ascoli qui donne la caractérisation des parties relativement compactes dans l'espace métrique complet $B^0 = (C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Théorème 1.2.1. [26, 39] Soit F une partie de B^0 , alors, F est relativement compacte, si et seulement si,

1. La famille F est uniformément bornée i.e, $\exists M > 0$ tel que,

$$\forall f \in F, \forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M.$$

2. La famille F est équicontinue i.e, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon)$ tel que $\forall f \in F$,

$$\forall x, x' \in [a, b], d(x, x') < \delta(\epsilon) \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Dans ce qui suit, on va exposer le prolongement du théorème d'Arzela-Ascoli [1.2.1] dans l'espace $B^n = C^n([a, b], \mathbb{R}^m)$ muni de la norme $\|f\|_{B^n} = \sum_{i=0}^n \|f^{(i)}\|_\infty$. Ainsi, on va donner une preuve originale basée sur le théorème d'Arzela-Ascoli classique dans B^0 .

Théorème 1.2.2. Soit F une partie de B^n . Notons $\forall i = 0, 1, \dots, n$,

$$F_i = \{f^{(i)} \text{ (dérivée d'ordre } i) / f \in F\} \subset C^0([a, b], \mathbb{R}) \text{ avec } f^{(0)} = f,$$

alors, F est relativement compacte, si et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Chaque famille F_i est uniformément bornée i.e, $\exists M_i > 0$ tel que,

$$\forall f \in F, \forall x \in [a, b], |f^{(i)}(x)| \leq M_i.$$

2. Chaque famille F_i est équicontinue i.e, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_i(\epsilon)$ tel que $\forall f \in F$,

$$\forall x, x' \in [a, b], d(x, x') < \delta_i(\epsilon) \implies |f^{(i)}(x) - f^{(i)}(x')| < \epsilon.$$

Preuve. Supposons que F est relativement compacte dans B^n , elle est, donc, bornée i.e.,

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall f \in F, \|f\|_{B^n} = \sum_{i=0}^n \|f^{(i)}\|_{\infty} \leq M,$$

d'où, les familles F_i , $i = 0, 1, \dots, n$, sont uniformément bornées.

D'autre part, d'après le théorème de Hausdorff, il existe pour F un $\frac{\epsilon}{3}$ -réseau fini $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ dans B^n i.e., $\forall f \in F, \exists j^* \in \{1, \dots, m\}$ tel que,

$$\|f - u_{j^*}\|_{B^n} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Comme $\forall i = 0, 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, u_j^{(i)}$ est uniformément continue sur le compact $[a, b]$, alors, $\exists \delta_{i,j}(\epsilon)$ tel que,

$$\forall x, x' \in [a, b], d(x, x') < \delta_{i,j} \implies |u_j^{(i)}(x) - u_j^{(i)}(x')| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Prenons $\delta_i = \min_j \{\delta_{i,j}\}$, on obtient, donc, $\forall f \in F$,

$$\begin{aligned} |f^{(i)}(x) - f^{(i)}(x')| &\leq |f^{(i)}(x) - u_{j^*}^{(i)}(x)| + |u_{j^*}^{(i)}(x) - u_{j^*}^{(i)}(x')| + |u_{j^*}^{(i)}(x') - f^{(i)}(x')| \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

$\forall x, x' \in [a, b]$ avec $d(x, x') < \delta_i$, d'où, les familles F_i sont équicontinues.

Inversement, supposons que les conditions 1-2 sont vérifiées et considérons $n = 1$ (le cas $n \geq 2$ se fait d'une manière similaire), alors, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli classique [26, 39], les familles $F_0, F_1 \subset B^0 = (C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ sont relativement compactes, donc, il existe, pour chaque famille, un $\frac{\epsilon}{4}$ -réseau fini, notés $\{v_0, v_1, \dots, v_l\}$, $\{w_0, w_1, \dots, w_m\}$ respectivement i.e.,

$$F_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^l B_0\left(v_i, \frac{\epsilon}{4}\right), \quad F_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_0\left(w_j, \frac{\epsilon}{4}\right),$$

où B_0 est la boule ouverte de B^0 .

Par conséquent,

$$F_0 \times F_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^l \bigcup_{j=1}^m B_0\left(v_i, \frac{\epsilon}{4}\right) \times B_0\left(w_j, \frac{\epsilon}{4}\right) \subset (B^0)^2.$$

Remarquons que $F \subset B^1 \cap (F_0 \times F_1)$, alors,

$$F = \bigcup_{i,j=1}^{l,m} \left[F \cap \left(B_0\left(v_i, \frac{\epsilon}{4}\right) \times B_0\left(w_j, \frac{\epsilon}{4}\right) \right) \right].$$

Comme F est non vide, alors, il existe $I \subseteq \{1, 2, \dots, l\}$ et $J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ tels que,

$$\forall r = (r_0, r_1) \in I \times J, \exists (h_r, h'_r) \in F \cap \left(B_0 \left(v_{r_0}, \frac{\epsilon}{4} \right) \times B_0 \left(w_{r_1}, \frac{\epsilon}{4} \right) \right).$$

On obtient, donc,
$$F \subset \bigcup_{r \in I \times J} B_0 \left(h_r, \frac{\epsilon}{2} \right) \times B_0 \left(h'_r, \frac{\epsilon}{2} \right),$$

ce qui implique que, pour toute $f \in F$, il existe $r(f) \in I \times J$ tel que,

$$\|f - h_{r(f)}\|_{B^1} = \|f - h_{r(f)}\|_{\infty} + \|f' - h'_{r(f)}\|_{\infty} < \epsilon,$$

ce qui confirme que, l'ensemble $\{h_r, r \in I \times J\}$ constitue un ϵ -réseau fini pour F dans B^1 , donc, d'après le théorème de Hausdorff, F est relativement compacte dans B^1 .

1.3 Théorèmes de point fixe fondamentaux.

Dans cette section, on rappelle les théorèmes classiques de point fixe : de Banach, de Brouwer et de Schauder.

Soit (X, d) un espace métrique complet et T une application définie de X dans lui-même.

Le but est d'étudier la résolubilité de l'équation non linéaire

$$x = Tx, x \in X. \tag{1.1}$$

Définition 1.3.1. Un point $x^* \in X$ est dit point fixe de l'application T , s'il vérifie : $x^* = Tx^*$ i.e, x^* est solution de (1.1).

L'application T est dite k -Lipschitzienne, s'il existe une constante k ($0 < k < \infty$) telle que : $\forall x, y \in X$ ($x \neq y$), $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$.

L'application T est dite k -contractante, si elle est k -Lipschitzienne avec $0 < k < 1$.

Le théorème suivant est la généralisation du théorème d'inversion de Banach pour les opérateurs linéaires bornés [26].

Théorème 1.3.1. (de point fixe de Banach) [26, 60] Si :

i) $M \subseteq X$ est un sous ensemble fermé non vide de l'espace métrique complet X tel que,

$$T : M \subseteq X \longrightarrow M \text{ i.e, } T \text{ applique } M \text{ dans lui-même ;}$$

ii) T est k -contractante ;

alors,

i) T admet un unique point fixe i.e, l'équation (1.1) admet une unique solution $x^* \in M$;

ii) La suite des approximations successives, $x_{n+1} = Tx_n$ ($n \in \mathbb{N}$) converge vers la solution x^* , pour un choix arbitraire du point initial $x_0 \in M$, de plus,

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Le théorème du point fixe de Banach se base sur des définitions métriques simples, par contre, les théorème de Brouwer nécessitent des résultats plus avancés concernant les structures topologiques des espaces de dimension finie.

Théorème 1.3.2. (de point fixe de Brouwer.)[\[26, 60\]](#) Soit M un ensemble non vide, fermé, borné et convexe de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) et $T : M \rightarrow M$ une application continue. Alors, T admet, au moins, un point fixe.

Beaucoup de résultats concernant les opérateurs continus dans \mathbb{R}^n restent valables pour les opérateurs compacts dans les espaces de Banach, comme exemple, le théorème de point fixe de Schauder qui est obtenu par l'extension du théorème de Brouwer via un processus basé sur l'approximation d'un opérateur compact par une suite d'opérateurs de rang fini (connu par le théorème d'approximation pour les opérateurs compacts).

Définition 1.3.2. Soient X, Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ est dit compact, si et seulement si,

i) T est continu ;

ii) T transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact.

Théorème 1.3.3. (de point fixe de Schauder.)[\[26, 60\]](#) Soit M un ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach X et soit $T : M \rightarrow M$ un opérateur continu. Alors T admet, au moins, un point fixe.

Théorème 1.3.4. (de point fixe de Schauder : version alternative.)[\[26, 60\]](#) Soit M un ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach X et soit $T : M \rightarrow M$ un opérateur compact. Alors T admet, au moins, un point fixe.

Cette deuxième version est fréquemment utilisée dans les applications où l'ensemble M est pris comme boule fermée.

1.4 Équations intégrales et integro-différentielles.

Cette section est consacrée à la discussion de la problématique traitée dans cette thèse ainsi que sa relations avec des travaux récents. Tout d'abord, on va exposer certaines notions générales sur les équations intégrales et integro-différentielles.

1.4.1 Équations intégrales.

Une équation intégrale est une équation contenant au moins une opération d'intégration sur la fonction inconnue.

Soit U un ensemble d'un espace euclidien $\mathbb{K}^n (= \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}^*)$. Une équation intégrale contenant une opération d'intégration est de la forme (dite de troisième espèce) :

$$g(x)u(x) = f(x) + \int_{x \in V} K(x, s, u(s)) ds, \quad x \in U, V \subseteq U, \quad (1.2)$$

où, $f, g : U \rightarrow \mathbb{K}, K : U \times U \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$.

2) Une équation intégrale est dite :

- Linéaire, si le noyau K est linéaire par rapport à la troisième variable i.e, $K(x, s, u(s)) = K_0(x, s)u(s)$, sinon, elle est dite non linéaire.
- De première (deuxième) espèce, si $\forall x \in U, g(x) = 0 (= \text{const})$.
- Homogène (non homogène), si $\forall x \in U, f(x) = 0 (\neq 0)$.
- De type Fredholm par rapport à $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, si l'ensemble V est borné dans la direction x_i .
- De type Volterra par rapport à x_i , si l'ensemble V dépend de la variable indépendante x dans la direction $x_i (V = V(x_i))$ et borné dans cette direction.
- Singulière par rapport à x_i , si, le noyau K ou l'ensemble V , sont non bornés dans la direction x_i .
- De Fredholm (de Volterra, singulière), si elle est de Fredholm (de Volterra, singulière) dans toutes les directions.

Notons que toute équation de type Volterra par rapport à, au moins, une direction quelconque x_i ,

$$g(x)u(x) = f(x) + \int_{x \in V(x_i)} K(x, s, u(s)) ds, \quad x \in U, V(x_i) \subseteq U,$$

est une équation de type Fredholm,

$$g(x)u(x) = f(x) + \int_{x \in U} \bar{K}(x, s, u(s)) ds, \quad x \in U,$$

$$\text{où, } \bar{K}(x, s, u(s)) = \begin{cases} K(x, s, u(s)), & s \in V(x_i), \\ 0, & s \in C_U V(x_i). \end{cases}$$

Exemples :

Transformée de Fourier et son inverse (représentent l'équation et sa solution et vis versa.)

$$t \in]-\infty, +\infty[, \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its} u(s) ds = f(t), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-its} f(s) ds = u(t). \end{cases}$$

Ce sont des équations linéaires de première espèce singulières.

Équations d'Abel,

$$\int_0^t \frac{K(t, s)u(s)}{(t^p - s^p)^\alpha} ds = f(t),$$

avec $p > 0$, $0 < \alpha < 1$ et K une fonction régulière. Cette équation est de type Volterra de première espèce et singulière.

Équations de Volterra linéaires,

$$t \in [a, b], \quad \begin{cases} \int_a^t K(t, s)u(s)ds = f(t), & \text{(de première espèce),} \\ u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s)u(s)ds, & \text{(de deuxième espèce).} \end{cases}$$

Équations de Fredholm linéaires,

$$t \in [a, b], \quad \begin{cases} \int_a^b K(t, s)u(s)ds = f(t), & \text{(de première espèce),} \\ u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)u(s)ds, & \text{(de deuxième espèce).} \end{cases}$$

Équation Wiener-Hopf, (linéaire, de deuxième espèce, non homogène, singulière),

$$\lambda u(t) = f(t) + \int_0^\infty K(t-s)u(s)ds, \quad t \in [0, \infty[.$$

1.4.2 Exemples de problèmes qui se ramènent à des équations intégrales en dimension 1.

Parmi les exemples instructifs on distingue ceux liés aux problèmes à valeurs initiales pour l'équation différentielle ordinaire,

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), & (t, y) \in \underset{\text{ouvert}}{U} \subseteq \mathbb{R}^2, \\ y(t_0) = y_0 & (t_0, y_0) \in U, \end{cases}$$

laquelle est équivalent à l'équation intégrale de Volterra,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Ainsi, les systèmes de la forme,

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + f(t, y(t)), & (t, y) \in U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \\ y(t_0) = y_0 & (t_0, y_0) \in U, \end{cases}$$

sont équivalents à l'équation intégrale,

$$y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))ds,$$

où, Φ est la matrice fondamentale de solutions du système $y'(t) = A(t)y$.

On montre aussi, par des intégrations successives, que les problèmes à valeurs initiales,

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) = f(t, y(t)), & (t, y, y') \in U \subseteq \mathbb{R}^3, \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, & (t_0, y_0, y_1) \in U, \end{cases}$$

sont équivalents à l'équation intégrale de Volterra,

$$y(t) = y_0 + (t - t_0)y_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s f(r, y(r)) dr ds \stackrel{p.part}{=} y_0 + (t - t_0)y_1 + \int_{t_0}^t (t - s)f(s, y(s)) ds.$$

Considérons, maintenant, le problème aux limites,

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t)), & t \in]a, b[, \\ y(a) = y_a, y(b) = y_b. \end{cases}$$

En Intégrant deux fois cette équation de a à t on obtient,

$$y(t) = y_a + (t - a)y'(a) + \int_a^t (t - s)f(s, y(s))ds, \quad t \in [a, b].$$

La différence entre cette équation et la précédente est que le terme $y'(a)$ est inconnu et qui peut être obtenu en imposant la condition $y(b) = y_b$, alors,

$$y'(a) = \frac{1}{b - a} \left(y_b - y_a - \int_a^b (b - s)f(s, y(s))ds \right),$$

d'où,

$$\begin{aligned} y(t) &= y_a + \left(\frac{t - a}{b - a} \right) \left(y_b - y_a - \int_a^b (b - s)f(s, y(s))ds \right) + \int_a^t (t - s)f(s, y(s))ds, \\ &= y_a + \left(\frac{t - a}{b - a} \right) (y_b - y_a) + \int_a^t \left[\left(\frac{t - a}{b - a} \right) (s - b) + (t - s) \right] f(s, y(s))ds + \\ &\quad + \int_t^b \left(\frac{t - a}{b - a} \right) (s - b)f(s, y(s))ds, \end{aligned}$$

ce qui implique,

$$y(t) = y_a + \left(\frac{t-a}{b-a} \right) (y_b - y_a) + \int_a^b G(t,s) f(s, y(s)) ds,$$

où,

$$G(t,s) = \begin{cases} \left(\frac{s-a}{b-a} \right) (t-b), & s \leq t, \\ \left(\frac{t-a}{b-a} \right) (s-b), & s \geq t, \end{cases}$$

est la fonction de Green (pour plus de détails sur la méthode de la fonction de Green en dimension 1 voir [3, 43]).

1.4.3 Fonction de Green en dimension 1.

Dans la pratique, plusieurs phénomènes, à une dimension de l'espace, peuvent être décrits par des problèmes aux limites sous la forme :

$$L(y)(x) = p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x) = f(x), \quad x \in]a, b[, \quad (1.3)$$

$$B_a[y] = a_0y(a) + a_1y'(a) = A, \quad (1.4)$$

$$B_b[y] = b_0y(b) + b_1y'(b) = B,$$

où, $p_0(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$. Notons que le problème (1.3) (1.4) est dit singulier si l'une des bornes a, b est infinie ou si la fonction p_0 s'annule, au moins, en un point.

Les conditions aux limites (1.4) représente le cas général qui contient les cas particuliers suivants :

1. Conditions de type Dirichlet : $y(a) = A_1, y(b) = A_2$.
2. Conditions de type Neumann : $y'(a) = A_1, y'(b) = A_2$.
3. Conditions mixtes : $y(a) = A_1, y'(b) = A_2$ ou $y'(a) = A_1, y(b) = A_2$.

Le problème homogène associé à (1.3) (1.4) est,

$$L(y)(x) = p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x) = 0, \quad x \in]a, b[, \quad (1.5)$$

$$B_a[y] = 0, \quad (1.6)$$

$$B_b[y] = 0,$$

Définition 1.4.1. La fonction de Green est le noyau intégral $G(x, t)$ qui permet de représenter la solution du problème (1.3) avec les conditions homogènes (1.6) sous la forme :

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt.$$

Pour obtenir la forme de la Définition [1.4.1](#), considérons la méthode classique de résolution des équations non homogènes de type [\(1.3\)](#) qui consiste à trouver la solution générale de l'équation homogène [\(1.5\)](#) et une solution particulière de [\(1.3\)](#) i.e, $y = y_{gh} + y_p$ avec $y_{gh} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ où y_1, y_2 sont deux solution fondamentales (indépendantes) de l'équation homogène [\(1.5\)](#) et y_p est la solution particulière de [\(1.3\)](#) à déterminée par la méthode de la variation de constantes.

Considérons, donc, $y_p = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$. Par substitution dans [\(1.3\)](#) on obtient le système,

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{p_0(x)}, \end{cases}$$

ce qui détermine les fonctions $C_1'(x), C_2'(x)$ d'une manière unique (car le Wronskian $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$). On a, donc,

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{-y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)p_0(x)}, \\ C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)p_0(x)}, \end{cases} \implies \begin{cases} C_1(x) = \int_a^x \frac{-y_2(s)f(s)}{W(y_1, y_2)(s)p_0(s)} ds, \\ C_2(x) = \int_a^x \frac{y_1(s)f(s)}{W(y_1, y_2)(s)p_0(s)} ds. \end{cases}$$

D'où,

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \int_a^x \frac{(y_1(s)y_2(x) - y_2(s)y_1(x))f(s)}{W(y_1, y_2)(s)p_0(s)} ds.$$

En imposant les conditions homogènes [\(1.6\)](#), on obtient le système,

$$\begin{cases} B_a[y_1]C_1 + B_a[y_2]C_2 = 0, \\ B_b[y_1]C_1 + B_b[y_2]C_2 = - \int_a^b \frac{(y_1(s)B_b[y_2] - y_2(s)B_b[y_1])f(s)}{W(y_1, y_2)(s)p_0(s)} ds. \end{cases}$$

Donc, si $\Delta = \begin{vmatrix} B_1[y_1] & B_1[y_2] \\ B_2[y_1] & B_2[y_2] \end{vmatrix} \neq 0$ (c-à-d que le problème homogène [\(1.5\)](#) [\(1.6\)](#) admet uniquement la solution triviale), alors la fonction y est déterminée d'une manière unique et on a,

$$\begin{cases} C_1 = \frac{B_a[y_2]}{\Delta} \int_a^b \frac{(y_1(s)B_b[y_2] - y_2(s)B_b[y_1])f(s)}{W(y_1, y_2)(s)p_0(s)} ds, \\ C_2 = \frac{-B_a[y_1]}{\Delta} \int_a^b \frac{(y_1(s)B_b[y_2] - y_2(s)B_b[y_1])f(s)}{W(y_1, y_2)(s)p_0(s)} ds. \end{cases}$$

Notons que pour que la condition ($\Delta \neq 0$) soit vérifiée, il suffit d'avoir y_1 et y_2 telles que $B_a[y_1] = 0$ et $B_b[y_2] = 0$, car, dans ce cas, $B_a[y_2]$ et $B_b[y_1]$ sont non nulles (cela vient du

fait que y_1 et y_2 sont indépendantes). Dans ce cas,

$$\begin{cases} C_1 = \int_a^b \frac{y_2(s)f(s)}{W(y_1, y_2)(s)p_0(s)} ds, \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

et la solution y du problème (1.3) (1.6) sera donnée par :

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) ds, \quad (1.7)$$

où,

$$G(x, s) = \frac{1}{W(y_1, y_2)(s)p_0(s)} \begin{cases} y_2(x)y_1(s) & s \leq x, \\ y_1(x)y_2(s) & s \geq x. \end{cases}$$

La solution \tilde{y} du problème (1.3) (1.4) sera, donc, obtenue sous la forme :

$$\tilde{y}(x) = y_0(x) + y(x) = y_0(x) + \int_a^b G(x, s)f(s) ds,$$

où y_0 est la solution du problème (1.5) (1.4) obtenue par combinaison linéaire convenable de y_1 et y_2 .

Si la fonction f dépend d'une manière non linéaire de la fonction inconnue y , alors, la méthode de la fonction de Green nous amène à une équation intégrale non linéaire de Fredholm.

1.4.4 Exemples de problèmes qui se ramènent à une équation intégrale en dimension supérieure à 1.

La transformation des problèmes aux limites en des équations intégrales ou integro-différentielles se fait par plusieurs techniques comme les transformations intégrales et la méthode de fonction de Green. Comme exemple, prenons le problème aux limites pour l'équation de Laplace [38],

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x, y > 0, & (a) \\ u(0, y) = 0, & y > 0, & (b) \\ u_y(x, 0) = 0, & x > 0, & (c) \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < 1, \text{ avec } f(0) = 0, & (d) \\ u \rightarrow 0 \text{ lorsque } x^2 + y^2 \rightarrow +\infty. & & (e) \end{cases} \quad (1.8)$$

Considérons la transformée de Fourier en sinus de u par rapport à x ,

$$U(\alpha, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x, y) \sin(\alpha x) dx, \quad \alpha > 0, \quad (1.9)$$

donc, la formule d'inversion nous donne,

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha, \quad (1.10)$$

de telle sorte que la condition (b) soit vérifiée. Alors, en substituant cette dernière relation dans (a), on obtient l'équation,

$$U_{yy} - \alpha^2 U = 0,$$

dont la solution est :

$$U(\alpha, y) = A(\alpha) e^{-\alpha y}. \quad (1.11)$$

Observons que $U \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow \infty$, ce qui est compatible avec (e) et (1.10) et que,

$$U_y(\alpha, 0) = -\alpha A(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_y(x, 0) \sin(\alpha x) dx,$$

donc,

$$U(\alpha, y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\alpha y}}{\alpha} \int_0^\infty u_y(x, 0) \sin(\alpha x) dx,$$

ce qui implique que,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \left(\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha y}}{\alpha} \int_0^\infty u_y(t, 0) \sin(\alpha t) dt \right) \sin(\alpha x) d\alpha = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty u_y(t, 0) \left(\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha y}}{\alpha} \sin(\alpha t) \sin(\alpha x) d\alpha \right) dt. \end{aligned}$$

L'évaluation de l'intégrale intérieure (par rapport à α) nous donne,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u_y(t, 0) \ln \left(\frac{(x-t)^2 + y^2}{(x+t)^2 + y^2} \right) dt.$$

Cette fonction vérifie bien l'équation de Laplace avec les conditions (b) (e). Ainsi, les conditions (c) (d) nous donnent,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 u_y(t, 0) \ln \left(\frac{(x-t)^2 + y^2}{(x+t)^2 + y^2} \right) dt, \quad (1.12)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 u_y(t, 0) \ln \left| \frac{x-t}{x+t} \right| dt, \quad 0 < x < 1. \quad (1.13)$$

Alors, la solution du problème aux limites (1.8) est donnée par (1.12) où la fonction $u_y(t, 0)$, ($0 \leq t \leq 1$) est à chercher depuis l'équation intégrale de Fredholm de première

espèce singulière (1.13).

Considérons, encore, le problème aux limites pour l'équation de Poisson :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{dans } U, \\ u &= g, & \text{dans } \partial U, \end{aligned} \tag{1.14}$$

où $U \in \mathbb{R}^n$, ($n \geq 2$) ouvert et borné avec une frontière ∂U de classe C^1 .

La méthode de la fonction de Green donne la formule de représentation générale de la solution de l'équation (1.14) sous la forme (voir [29, 43] pour le détail) :

$$u(x) = \int_U f(y)G(x, y)dy - \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y)dS(y), \tag{1.15}$$

où $\frac{\partial G}{\partial n_y}$ est la dérivée normale de G par rapport à y .

La fonction de Green représente un outil puissant de résolution des problèmes aux limites, à condition qu'on puisse construire cette fonction qui dépend de l'ouvert U ce qui semble difficile lorsque U a une géométrie complexe. Notons que dans le cas où f dépend d'une manière non linéaire de la fonction l'inconnu u ou de ses dérivées directionnelles, alors, la relations (1.15) représente une équation intégrale ou integro-différentielle non linéaire de Fredholm.

1.4.5 Équations integro-différentielles.

Une équation integro-différentielle est une équation contenant, au moins, une opération d'intégration et une opération de dérivation.

Une équation integro-différentielle contenant une opération d'intégration est de la forme :

$$F \left(x_1, \dots, x_n, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, D^\alpha u(x) \right) = f(x) + \int_V K \left(x, s, u(s), \frac{\partial u}{\partial x_1}(s), \dots, D^\beta u(s) \right) ds,$$

où, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ (et de même pour β) avec $|\alpha|$ et $|\beta|$ ne s'annulant pas simultanément.

L'ensemble V et les fonctions f et K se définissent comme dans l'équation (1.2).

Comme ce qu'on l'a vu précédemment, beaucoup de problèmes peuvent se ramener à des équations intégrales par plusieurs techniques ; par exemple, les problèmes en dimension 1 de la forme (1.3) (1.4) où la fonction f dépend d'une manière non linéaire de la

fonction inconnue y . Si, de plus, f dépend des dérivées de y i.e, $f = f(x, u, u^{(i)})$, $i = 1, 2$, le problème sera, donc, équivalent à une équation integro-différentielle non linéaire de Fredholm.

1.5 Position du problème.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude des équations integro-différentielles de type Fredholm et de type Volterra-Fredholm suivantes :

$$u(t) = f(t) + \int_a^b K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (1.16)$$

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K_V(t, s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^b K_F(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (1.17)$$

où $K, K_V, K_F : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 = U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des noyaux continus sur U ainsi que leurs dérivées par rapport à la première variable t avec $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$.

Dans la section précédente, nous avons vu que l'équation (1.17) est une équation de Fredholm non linéaire de la forme (1.16) avec,

$$K = \begin{cases} K_V + K_F, & s \leq t, \\ K_F, & s > t. \end{cases} \quad \text{et} \quad \partial_t K = \begin{cases} \partial_t K_V + \partial_t K_F, & s < t, \\ \partial_t K_V, & s = t, \\ \partial_t K_F & s > t, \end{cases}$$

où noyau K et sa dérivée par rapport à t sont discontinus au point $t = s$ (continus par morceaux).

L'équation (1.16) peut être vue comme une forme générale de l'équation résolue numériquement, par la méthode de Galerkin et de Galerkin itérée, dans [35] :

$$u(t) = f(t) + \int_0^1 G(t, s)K(s, u(s), u'(s)) ds,$$

où, G est le noyau de Green. Sauf que, dans ce cas $\partial_t G$ est discontinue au point $t = s$. Cette équation trouve son origine dans les problèmes aux limites (1.3) avec $f = f(t, u(t), u'(t))$.

L'équation (1.16) est, aussi, la version de type Fredholm l'équation :

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds. \quad (1.18)$$

traitée dans [23] analytiquement ; en étudiant les conditions assurant l'existence et l'unicité de la solution et, numériquement, par la méthode de Nyström, ainsi, dans [42], les auteurs

ont donnée une approche numérique, pour la même équation, en utilisant une technique basée sur le changement de variables $v = u'$; ce qui donne $u(t) = f(a) + \int_a^t v(s) ds$. Cette procédure a donnée des résultats meilleurs par rapport à la méthode de Nyström classique. Cette équation a trouvé, aussi, son application dans un modèle de tremblement de terre construit dans [41].

L'équation (1.17) est une forme analogue, dans le cas integro-différentiel, de l'équation intégrale :

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K_V(t, s, u(s)) ds + \int_a^b K_F(t, s, u(s)) ds, \quad (1.19)$$

résolue dans [12, 36] par la méthode de collocations à pas multiples et la méthode des itérations de Picard respectivement; cette dernière méthode consiste à utiliser les itérations, premièrement, dans l'équation continue, en suite, à procéder par discrétisation par la méthode de Nyström. Ces deux méthodes ont donné des résultats précis même avec un petit nombre de points de discrétisation.

On peut voir, aussi, dans [15], la résolution d'une version d'équations integro-différentielles de la forme,

$$\begin{cases} u'(t) = f(t) + \alpha \int_a^t K_V(t, s, u(s)) ds + \beta \int_a^b K_F(t, s, u(s)) ds, \\ u(a) = u_a, \end{cases} \quad (1.20)$$

par la transformation basée sur les ondelettes de Haar rationalisées, dans le cas où les fonctions u et f , ainsi que les noyaux intégrales, sont à valeurs complexes.

D'autres traitements, concernant des équations integro-différentielles avec noyaux faiblement singuliers, ont été effectués récemment, comme dans [20] pour l'équation de type Volterra :

$$\begin{aligned} u(t) &= f(t) + \int_a^t p(t-s)K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \\ (H) \quad &\left\| \begin{array}{l} K, \partial_t K \text{ continues dans } [a, b], \\ p \in W^{1,1}(0, b-a), \\ p(0) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^+} p'(\tau) = +\infty. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.21)$$

et dans [44, 45] pour l'équation de Fredholm et de Volterra-Fredholm suivantes :

$$u(t) = f(t) + \int_a^b p_0(|t-s|)K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (1.22)$$

$$u(t) = f(t) + \int_a^t p_1(t-s)V(t, s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^b p_2(|t-s|)F(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (1.23)$$

avec K, V, F, p_i ($i = 0, 1, 2$) vérifiant (H) .

Dans ces travaux, les auteurs ont établi une étude analytique sur les conditions d'existence et d'unicité de la solution, ainsi qu'une étude numérique basée sur la méthode de l'intégration produit. La différence est que, l'équation de type Volterra donne la possibilité d'avoir le résultat d'existence locale en considérant des conditions relativement faibles que pour l'équation de type Fredholm.

Notons, aussi, que l'équation (1.16) a été l'objet d'une étude théorique pure dans [37]. Notre étude va se positionner, donc, sur la discussion des conditions assurant l'existence et l'unicité de la solution des équations (1.16) (1.17) et la construction d'une approche numérique convenable et efficace en respectant les conditions du traitement analytique .

Chapitre 2

Analyse d'une équation integro-différentielle non linéaire de type Fredholm.

Le présent chapitre est consacré à la présentation de l'étude effectuée dans l'article [7], de l'équation suivante :

$$u(t) = f(t) + \int_a^b K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad -\infty < a \leq t \leq b < +\infty, \quad (2.1)$$

où, le noyau K et la fonction f satisfont les hypothèses préliminaires,

$$(H1) \quad \left\| \begin{array}{l} K, \frac{\partial K}{\partial t} \text{ sont dans } C^0([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ f \in C^1([a, b], \mathbb{R}). \end{array} \right.$$

Notons que si la fonction inconnue u existe dans $C^1([a, b], \mathbb{R})$, alors, sa dérivée est donnée par :

$$u'(t) = f'(t) + \int_a^b \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds. \quad (2.2)$$

2.1 Étude théorique.

Comme point de départ, on va étudier des conditions assurant l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.1). Premièrement, considérons l'espace $B^1 = C^1([a, b], \mathbb{R})$ constitué par les fonctions continument différentiables sur $[a, b]$ et équipé par la norme,

$$\|u\|_{B^1} = \max_{t \in [a, b]} \{u(t)\} + \max_{t \in [a, b]} \{u'(t)\} = \|u\|_{\infty} + \|u'\|_{\infty}.$$

ce qui rend B^1 un espace de Banach.

2.1.1 Compacité de l'opérateur intégral.

Soit $f \in B^1$ et $\sigma : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continument différentiable ($\sigma \in C^1([a, b])$).

Considérons l'opérateur :

$$\forall t \in [a, b], \quad T_{\sigma, f} : B^1 \longrightarrow B^1$$

$$u \longmapsto T_{\sigma, f}(u)(t) = f(t) + \int_a^{\sigma(t)} K(t, s, u(s), u'(s)) ds.$$

Proposition 2.1.1. *Pour toute $u \in B^1$, $t \in [a, b]$, la dérivée de $T_{\sigma, f}(u)$ est donnée par :*

$$T'_{\sigma, f}(u)(t) = f'(t) + \sigma'(t)K(\sigma(t), \sigma(t), u(\sigma(t)), u'(\sigma(t))) + \int_a^{\sigma(t)} \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds. \quad (2.3)$$

Démonstration. Prenons $h \in \mathbb{R}^*$ et $t \in [a, b]$, alors,

$$\frac{T_{\sigma, f}(u)(t+h) - T_{\sigma, f}(u)(t)}{h} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} + \frac{1}{h} \left(\int_a^{\sigma(t+h)} (K(t+h, s, u(s), u'(s)) - K(t, s, u(s), u'(s))) ds \right) + \omega(K, h), \quad (2.4)$$

avec,

$$\omega(K, h) = \frac{1}{h} \left(\int_a^{\sigma(t+h)} K(t, s, u(s), u'(s)) ds - \int_a^{\sigma(t)} K(t, s, u(s), u'(s)) ds \right).$$

Observons que, si $\sigma(t+h) > \sigma(t)$, alors,

$$\omega(K, h) = \frac{1}{h} \int_{\sigma(t)}^{\sigma(t+h)} K(t, s, u(s), u'(s)) ds.$$

Remarquons en plus qu'il existe $t_h \in (t, t+h)$ vérifiant $\sigma(t+h) - \sigma(t) = \sigma'(t_h)h$, donc,

$$\omega(K, h) = \frac{\sigma'(t_h)}{\sigma(t+h) - \sigma(t)} \int_{\sigma(t)}^{\sigma(t+h)} K(t, s, u(s), u'(s)) ds.$$

Par analogie, si $\sigma(t+h) < \sigma(t)$, alors, $\sigma(t) - \sigma(t+h) = -\sigma'(t_h)h$ avec $t_h \in (t, t+h)$ et

$$\omega(K, h) = \frac{\sigma'(t_h)}{\sigma(t) - \sigma(t+h)} \int_{\sigma(t+h)}^{\sigma(t)} K(t, s, u(s), u'(s)) ds.$$

Finalement, en appliquant le théorème des accroissements finis, on obtient,

$$\omega(K, h) = \sigma'(t_h)K(t, s_h, u(s_h), u'(s_h)), \quad s_h \in (\sigma(t+h), \sigma(t)).$$

La formule (2.3) s'obtient à partir (2.4) en passant à la limite lorsque h tend vers 0. \square

Théorème 2.1.1. *Sous les hypothèses (H1), $T_{\sigma,f}$ est un opérateur compact.*

Démonstration. Soit $u_0 \in B^1$, alors,

$$\begin{aligned} \|T_{\sigma,f}(u) - T_{\sigma,f}(u_0)\|_{B^1} &\leq \sup_{t \in [a,b]} \int_a^{\sigma(t)} |K(t, s, u(s), u'(s)) - K(t, s, u_0(s), u_0'(s))| ds + \\ &+ \sup_{t \in [a,b]} \{|\sigma'(t)| |K(\sigma(t), \sigma(t), u(\sigma(t)), u'(\sigma(t))) - K(\sigma(t), \sigma(t), u_0(\sigma(t)), u_0'(\sigma(t)))|\} + \\ &+ \sup_{t \in [a,b]} \int_a^{\sigma(t)} \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u_0(s), u_0'(s)) \right| ds. \end{aligned}$$

Donc, de la continuité de K et $\frac{\partial K}{\partial t}$, on déduit que,

$$\|T_{\sigma,f}(u) - T_{\sigma,f}(u_0)\|_{B^1} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \|u - u_0\|_{B^1} \longrightarrow 0.$$

Prenons, maintenant, l'ensemble borné $G \subset B^1$ c-à-d

$$\exists M > 0 \text{ telle que } , \forall u \in G, \|u\|_{B^1} \leq M.$$

Considérons l'ensemble :

$$T_{\sigma,f}(G) = \{g = T_f(u), u \in G\}.$$

Donc, on conclut que,

$$\forall g \in T_{\sigma,f}(G), \quad \|g\|_{B^1} \leq \|f\|_{B^1} + \max_{t \in [a,b]} \{|\sigma'(t)|\} L_0 + (b-a)(L_0 + L_1) = L, \quad (2.5)$$

où,

$$L_0 = \max_{\Omega} |K(t, s, u(s), u'(s))|, \quad L_1 = \max_{\Omega} \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) \right|,$$

avec, $\Omega = [a, b]^2 \times \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0_{\mathbb{R}^2}, M)$.

Cette preuve serait complète, si on montre que $T_{\sigma,f}(G)$ est relativement compacte dans B^1 .

Premièrement, notons par $B^0 = (C^0([a, b]), \|\cdot\|_{\infty})$ et considérons les deux familles, $F_0 = \{T_{\sigma,f}(u) \in B^0, u \in G\}$, $F_1 = \{T'_{\sigma,f}(u) \in B^0, u \in G\}$. Les familles F_0 et F_1 sont uniformément bornées dans B^0 (d'après (2.5)). D'autre part, $K, \partial_t K$ sont uniformément continues dans Ω , ainsi que f, f' dans $[a, b]$, par conséquent, F_0 et F_1 sont équicontinues. Donc, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli généralisé 1.2.2, $T_{\sigma,f}(G)$ est relativement compacte dans B^1 . □

2.1.2 Existence et unicité de la solution.

Dans ce qui suit, on va discuter les conditions d'existence et d'unicité de la solution pour deux types de noyaux. Tout d'abord, observons que l'équation (2.1) est de la forme,

$$u = T_{b,f}(u), \quad (\sigma \equiv b).$$

Théorème 2.1.2. *Supposons qu'il existe $M_0, M_1 > 0$, telles que $\forall (t, s, x, y) \in [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2$,*

$$|K(t, s, x, y)| \leq M_0, \quad |\partial_t K(t, s, x, y)| \leq M_1, \quad (2.6)$$

et considérons l'ensemble fermé, borné et convexe $Q = \overline{B}_{B^1}(0, \|f\|_{B^1} + (b-a)(M_0 + M_1))$, alors, sous les hypothèses (H1), $T_{b,f}$ admet un point fixe dans Q .

Démonstration. On a vu que $T_{b,f}$ est un opérateur compact de B^1 dans lui-même, de plus, $T_{\sigma,f}(Q) \subseteq Q$. Alors, le théorème de point fixe de Schauder 1.3.4 garantit l'existence du point fixe. □

L'unicité de la solution peut être obtenue sous les hypothèses,

$$(H2) \quad \left\| \begin{array}{l} \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} > 0, \text{ tels que } \forall t, s \in [a, b], \forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R} : \\ |K(t, s, u_1, v_1) - K(t, s, u_2, v_2)| \leq A|u_1 - u_2| + B|v_1 - v_2|, \\ \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u_1, v_1) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u_2, v_2) \right| \leq \bar{A}|u_1 - u_2| + \bar{B}|v_1 - v_2|, \end{array} \right.$$

comme dans 23 pour l'équation de type Volterra.

Théorème 2.1.3. *Notons par,*

$$\beta_1 = \max \left\{ \bar{B}, A + \frac{B\bar{A}(b-a)}{1 - \bar{B}(b-a)} \right\}, \quad \beta_2 = \max \left\{ A, \bar{B} + \frac{B\bar{A}(b-a)}{1 - A(b-a)} \right\}.$$

Sous les hypothèses (H2) et si

$$\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\} < \frac{1}{b-a}, \quad (2.7)$$

alors, la solution de (2.1) est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solutions u_1, u_2 ($u_1 \neq u_2$), alors, d'après (H2),

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq (b-a)(A\|u_1 - u_2\|_\infty + B\|u_1' - u_2'\|_\infty), \quad (2.8)$$

$$\|u_1' - u_2'\|_\infty \leq (b-a)(\bar{A}\|u_1 - u_2\|_\infty + \bar{B}\|u_1' - u_2'\|_\infty). \quad (2.9)$$

En supposons que $\beta = \beta_1$, l'inégalité (2.9), nous donne,

$$\|u'_1 - u'_2\|_\infty \leq \frac{(b-a)\bar{A}}{(1-(b-a)\bar{B})} \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

d'où, (2.8) nous amène à,

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq (b-a)\beta_1 \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

De même, lorsque $\beta = \beta_2$, l'inégalité (2.8) donne,

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \frac{(b-a)B}{(1-(b-a)A)} \|u'_1 - u'_2\|_\infty.$$

Par substitution dans (2.9), on obtient,

$$\|u'_1 - u'_2\|_\infty \leq (b-a)\beta_2 \|u'_1 - u'_2\|_\infty.$$

□

Remarque 2.1.1. *D'après les hypothèses (H2), l'opérateur $T_{b,f}$ vérifie,*

$$\|T_{b,f}u_1 - T_{b,f}u_2\|_{B^1} \leq (b-a)\alpha \|u_1 - u_2\|_{B^1}.$$

Donc, si

$$\max\{A + \bar{A}, B + \bar{B}\} = \alpha < \frac{1}{b-a}, \quad (2.10)$$

l'existence de l'unique solution est garantie par le théorème du point fixe de Banach.

La condition (2.7) est plus générale que (2.10). Effectivement, supposons que (2.10) est vérifiée, alors, $\max(A, \bar{B}) < \frac{1}{b-a}$, ce qui implique que

$$\bar{A} < \frac{1-(b-a)A}{b-a} \quad \text{et} \quad B < \frac{1-(b-a)\bar{B}}{b-a},$$

d'où,

$$\max\left(\frac{B(b-a)}{1-\bar{B}(b-a)}, \frac{\bar{A}(b-a)}{1-A(b-a)}\right) < 1,$$

donc, (2.7) est vérifiée.

Inversement, soit $b-a = 1$, $A = \frac{1}{3}$, $\bar{A} = 1$, $B = \frac{1}{4}$, $\bar{B} = \frac{1}{2}$, alors, $\alpha = \frac{4}{3}$ et $\beta_1 = \frac{5}{6}$, ce qui veut dire que, (2.7) $\not\Rightarrow$ (2.10).

En d'autres termes, si (2.6) est non vérifiée, alors, l'unique solution est obtenue par le

théorème du point fixe de Banach en utilisant (H2) et (2.10), comme dans le cas où K est de la forme,

$$K(t, s, x, y) = G(t, s)\sqrt{c + x^2 + y^2}, \quad (C > 0 : \text{constante}),$$

avec G et $\partial_t G$ sont uniformément bornés.

Dans le cas où K est linéaire i.e, $K(t, s, x, y) = G(t, s)(cx + dy)$, ($c, d \neq 0 : \text{constantes}$), alors, les hypothèses (H2) sont obtenues automatiquement avec $A = M_1c$, $B = M_1d$, $\bar{A} = M_2c$, $\bar{B} = M_2d$, où,

$$M_1 = \max_{t,s \in [a,b]} |G(t, s)|, \quad M_2 = \max_{t,s \in [a,b]} |\partial_t G(t, s)|,$$

donc, la condition (2.10) sera,

$$\max(c, d) < \frac{1}{(M_1 + M_2)(b - a)},$$

ce qui implique l'existence et l'unicité de la solution suivant le théorème du point fixe de Banach. Notons que cette condition est équivalente à $\|T_{b,f}\| < 1$, qui donne l'unique solutions suivant le théorème de Banach (connu aussi par le théorème de Neumann) pour les opérateurs linéaires bornées.

Indiquons, aussi, que les versions linéaires des équations (2.1) (2.2) sont de la forme $v = f + Tv$, où T est défini de l'espace de Banach $\tilde{B}^1 = \{v = (u, u'), u, u' \in B^0\}$ dans lui même, avec $B^0 = (C^0([a, b], \|\cdot\|_\infty))$ et $\forall t \in [a, b]$,

$$T(v)(t) = \begin{cases} \int_a^b K(t, s)(cu(s) + du'(s)) ds, \\ \int_a^b \partial_t K(t, s)(cu(s) + du'(s)) ds. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de la solution de cette équation peut être obtenue, aussi, par l'alternative de Fredholm [18] i.e, si T est un opérateur compact, alors, l'équation $(\lambda I - T)v = f$, ($\lambda \neq 0$) admet une solution unique (c-à-d, $(\lambda I - T)^{-1}$ existe et borné), si et seulement si, l'équation homogène $(\lambda I - T)v = 0$ admet, seulement, la solution triviale $v = 0$ (voir [5]).

2.2 Approche numérique.

L'approche numérique consiste, premièrement, à réduire les équations continues (2.1) et (2.2) en un problème de dimension finie en utilisant la méthode de Nyström, ensuite, résoudre le système algébrique par la méthode des approximations successives de Picard.

2.2.1 Méthode de Nyström.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et considérons la subdivision $\Delta_N = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\} \subset [a, b]$, alors pour tout $i = 0, 1, \dots, N$,

$$u(t_i) = f(t_i) + \int_a^b K(t_i, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (2.11)$$

$$u'(t_i) = f'(t_i) + \int_a^b \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds. \quad (2.12)$$

En utilisant la formule de quadrature, les équations (2.11) (2.12) deviennent,

$$u_i = f_i + \sum_{j=0}^N w_j K(t_i, t_j, u_j, u'_j) ds + R_1(N, i), \quad (2.13)$$

$$u'_i = f'_i + \sum_{j=0}^N w_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u_j, u'_j) ds + R_2(N, i), \quad (2.14)$$

où $u(t_i) = u_i$, $f(t_i) = f_i$ et w_j , $R_{1,2}(N, i)$ dépendent de la règle de quadrature. Notons que la règle de quadrature utilisée est dite consistante, si $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\max_{0 \leq i \leq N} |R_{1,2}(N, i)| \right) = 0$, dans ce cas, en négligeant l'erreur de consistance locale $R_{1,2}(N, i)$, on obtient le système algébrique suivant : $\forall i = \{0, 1, \dots, N\}$,

$$x_i = f_i + \sum_{j=0}^N w_j K(t_i, t_j, x_j, y_j), \quad (2.15)$$

$$y_i = f'_i + \sum_{j=0}^N w_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, x_j, y_j). \quad (2.16)$$

Pour l'instant, supposons que la règle de quadrature possèdent les caractéristiques suivantes :

1. Les poids de la quadrature sont positives,
2. La règle de quadrature est interpolatoire, c-à-d elle est exacte pour tout polynôme

$$P_N \text{ de degré } \leq N, \text{ dans ce cas, si } P_N \equiv 1, \text{ alors, } \int_a^b P_N(x) dx = \sum_{i=0}^N w_i = b - a,$$

ce qui correspond à une large variété de règles (formules de Newton-Cotes fermées, simple ou composées ; formules de Gauss ou de Chebychev ; formules d'intégration par splines).

2.2.2 Existence et unicité de la solution du système de dimension finie.

Notons par $\eta = (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_N, y_N)$ le vecteur inconnu dans \mathbb{R}^{2N+2} , alors, le système est de la forme $\eta = \Phi(\eta)$. L'existence de la solution de cette équation est montrée dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *En considérant les hypothèses (H1) et (2.6), le système (2.15) (2.16) admet, au moins une solution.*

Démonstration. La continuité de Φ est obtenue directement de (H1).

Notons par I_e, I_o , les ensembles d'indices paires et impaires respectivement, tels que $\{0, 1, \dots, 2N + 1\} = I_e \cup I_o$ et soit

$$d_0 = \|g\|_\infty + M_0(b - a) \quad \text{et} \quad d_1 = \|g'\|_\infty + M_1(b - a),$$

alors, $\forall i \in I_e, \eta_i \in [-d_0, d_0]$ et $\forall i \in I_o, \eta_i \in [-d_1, d_1]$, ce qui implique la compacité et la convexité de l'ensemble $E = ([-d_0, d_0] \times [-d_1, d_1])^{N+1} \subseteq \mathbb{R}^{2N+2}$, de plus, $\Phi(E) \subset E$, par conséquent, l'existence du point fixe est assurée par le théorème du point fixe de Brouwer (1.3.2). □

L'unicité de la solution est obtenue, aussi, comme dans le Théorème (2.1.3).

Proposition 2.2.2. *Sous les hypothèses (H2) et si les conditions, (2.10) ou (2.7), sont vérifiées, alors la solution de (2.15) (2.16) est unique.*

Démonstration. Considérons, dans \mathbb{R}^{2N+2} , la norme,

$$\|\eta\|_{\mathbb{R}^{2N+2}} = \max_{i \in I_e} \{|\eta_i|\} + \max_{i \in I_o} \{|\eta_i|\},$$

Soit η_1 et η_2 deux solutions différentes, alors,

$$\begin{aligned} \max_{i \in I_e} |\eta_{1,i} - \eta_{2,i}| &\leq \sum_{j \in I_e} |w_j| A |\eta_{1,j} - \eta_{2,j}| + \sum_{j \in I_o} |w_j| B |\eta_{1,j} - \eta_{2,j}|, \\ \max_{i \in I_o} |\eta_{1,i} - \eta_{2,i}| &\leq \sum_{j \in I_e} |w_j| \bar{A} |\eta_{1,j} - \eta_{2,j}| + \sum_{j \in I_o} |w_j| \bar{B} |\eta_{1,j} - \eta_{2,j}|. \end{aligned}$$

Comme la formule de quadrature est interpolatoire et les poids w_i sont positifs, on a,

$$\sum_{j \in I_e} |w_j| = \sum_{j \in I_o} |w_j| = \sum_{j=0}^N |w_j| = b - a,$$

alors, l'utilisation de (2.10) nous donne,

$$\|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathbb{R}^{2N+2}} \leq (b-a)\alpha \|\eta_1 - \eta_2\|_{\mathbb{R}^{2N+2}}.$$

Autrement, (2.17) implique que,

$$\max_{i \in I_o} |\eta_{1,i} - \eta_{2,i}| \leq \left(\frac{(b-a)\bar{A}}{1 - \bar{B}(b-a)} \right) \max_{j \in I_e} |\eta_{1,j} - \eta_{2,j}|,$$

par conséquent,

$$\max_{i \in I_e} |\eta_{1,i} - \eta_{2,i}| \leq (b-a)\beta_1 \max_{i \in I_e} |\eta_{1,i} - \eta_{2,i}|.$$

La preuve se fait d'une manière similaire pour β_2 comme dans le Théorème 2.1.3. □

2.2.3 Analyse de convergence.

Dans ce paragraphe, on va analyser la convergence de la solution discrète (x, y) , du système de dimension finie (2.15) (2.16), vers la solution exacte des équations (2.1) (2.2), lorsque N devient grand. Par la suite, on donnera le résultat de convergence de la solution approchée du système (2.15) (2.16), obtenue par le processus itératif du Picard, vers (x, y) . La proposition suivante donne l'estimation de l'erreur de discrétisation par la méthode de Nyström.

Proposition 2.2.3. *Considérons la notation,*

$$R(N) = \max_{i=0, \dots, N} |R_1(N, i)| + \max_{i=0, \dots, N} |R_2(N, i)|, \quad \|v\|_{\mathbb{R}^{N+1}} = \|v\|_{\infty} = \max_{i=0, \dots, N} |v_i|,$$

$$C_1 = \max \left(1, \frac{B(b-a)}{1 - \beta_1(b-a)} \right), \quad C_2 = \max \left(1, \frac{\bar{A}(b-a)}{1 - \beta_2(b-a)} \right),$$

alors, suivant les hypothèses $(H(1-2))$ et les conditions (2.10) et (2.7), on a les estimations d'erreurs suivantes :

$$\|u - x\|_{\infty} + \|u' - y\|_{\infty} \leq \frac{R(N)}{1 - \alpha(b-a)}, \tag{2.17}$$

$$\|u - x\|_{\infty} \leq \frac{C_1 R(N)}{1 - \beta_1(b-a)}, \tag{2.18}$$

$$\|u' - y\|_{\infty} \leq \left(\frac{\bar{A}(b-a)C_1 + 1 - \beta_1(b-a)}{[1 - \beta_1(b-a)]^2} \right) R(N), \tag{2.19}$$

$$\|u - x\|_{\infty} \leq \left(\frac{B(b-a)C_2 + 1 - \beta_2(b-a)}{[1 - \beta_2(b-a)]^2} \right) R(N), \tag{2.20}$$

$$\|u' - y\|_{\infty} \leq \frac{C_2 R(N)}{1 - \beta_2(b-a)}. \tag{2.21}$$

Démonstration. (H2) nous amènent à,

$$\|u - x\|_\infty \leq \sum_{j=0}^N |w_j| (A|u_j - x_j| + B|u'_j - y_j|) + \max_{i=0, \dots, N} |R_1(N, i)|, \quad (2.22)$$

$$\|u' - x\|_\infty \leq \sum_{j=0}^N |w_j| (\bar{A}|u_j - x_j| + \bar{B}|u'_j - y_j|) + \max_{i=0, \dots, N} |R_2(N, i)|. \quad (2.23)$$

La sommation de (2.22) et (2.23) nous donne,

$$\|u - x\|_\infty + \|u' - y\|_\infty \leq (\|u - x\|_\infty + \|u' - y\|_\infty) \alpha \sum_{j=0}^N |w_j| + R(h).$$

Comme $\sum_{j=0}^N |w_j| = b - a$, alors, l'inégalité (2.17) est satisfaite.

Autrement, de (2.23), on a,

$$\|u' - y\|_\infty \leq \frac{(b - a)\bar{A}}{1 - \bar{B}(b - a)} \|u - x\|_\infty + \frac{\max_{i=0, \dots, N} |R_2(N, i)|}{1 - \bar{B}(b - a)}. \quad (2.24)$$

Donc, par substitution de (2.24) dans (2.22), on obtient,

$$\|u - x\|_\infty \leq (b - a)\beta_1 \|u - x\|_\infty + C_1 R(N).$$

Par conséquent, (2.18) est obtenue.

Finalement, comme $1 - \beta(b - a) \leq 1 - \bar{B}(b - a)$, alors, la substitution (2.18) in (2.24) implique (2.19).

On procède de la même manière pour obtenir les estimations de (2.20) (2.21) lorsque $\beta = \beta_2$. □

Corollaire 2.2.1. $(\|u - x\|_\infty + \|u' - y\|_\infty) \longrightarrow 0$ lorsque $N \longrightarrow \infty$.

Obtenir la solution exacte (x, y) est, dans la majorité des cas, difficile ou impossible, pour cette raison, les méthode d'approximation (généralement les méthodes itératives) sont largement utilisées. Notre choix est la méthode itérative de Picard. Considérons, donc, la suite de vecteurs, $(x^{(k)}, y^{(k)})$, $(k \in \mathbb{N})$ définie par la relation,

$$x_i^{(k+1)} = f_i + \sum_{j=0}^N w_j K(t_i, t_j, x_j^{(k)}, y_j^{(k)}), \quad (2.25)$$

$$y_i^{(k+1)} = f'_i + \sum_{j=0}^N w_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, x_j^{(k)}, y_j^{(k)}), \quad (2.26)$$

avec un vecteur initial $(x^{(0)}, y^{(0)})$. Le but est d'examiner la convergence de la suite (2.25) (2.26) vers la solution exacte (x, y) dans les deux cas,

- Les hypothèses (2.6) et (H2) avec la condition (2.7).
- Les hypothèses (H2) avec la condition (2.10).

Théorème 2.2.1. *En tenant compte de (2.6) et (2.7), la suite (2.25) (2.26) converge vers (x, y) , pour tout vecteur initial $(x^{(0)}, y^{(0)})$ dans $\overline{B}_{\mathbb{R}^{2N+2}}(0, d_0 + d_1)$.*

Démonstration. Prenons $\min\{\beta_1, \beta_2\} = \beta_1$ et notons par,

$$\phi_k = \|x^{(k)} - x\|_\infty, \quad \text{et} \quad \psi_k = \|y^{(k)} - y\|_\infty,$$

$\forall k \in \mathbb{N}$. On a, donc,

$$\phi_{k+1} \leq (b - a)(A\phi_k + B\psi_k), \tag{2.27}$$

$$\psi_{k+1} \leq (b - a)(\overline{A}\phi_k + \overline{B}\psi_k). \tag{2.28}$$

Les suites ϕ_k et ψ_k sont positives et comme la suite $(x^{(k)}, y^{(k)})$ et la solution exacte (x, y) sont dans $\overline{B}_{\mathbb{R}^{2N+2}}(0, d_0 + d_1)$, alors,

$$0 \leq \phi_k, \psi_k \leq 2(d_0 + d_1),$$

i.e, ϕ_k, ψ_k sont bornées, donc, les limites supérieurs et inférieurs existent. Alors, notons par,

$$\overline{\phi}_k = \sup_{r \leq k} \phi_r, \quad \underline{\phi}_k = \inf_{r \leq k} \phi_r \quad \text{et} \quad \overline{\psi}_k = \sup_{r \leq k} \psi_r, \quad \underline{\psi}_k = \inf_{r \leq k} \psi_r.$$

Le but est de montrer que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = 0, \quad \text{ainsi que} \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0.$$

Dans ce cas, nous aurons,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0.$$

Alors, d'après les relations (2.27) (2.28), on obtient,

$$\underline{\phi}_{k+1} \leq (b - a)(A\underline{\phi}_k + B\underline{\psi}_k), \tag{2.29}$$

$$\underline{\psi}_{k+1} \leq (b - a)(\overline{A}\underline{\phi}_k + \overline{B}\underline{\psi}_k). \tag{2.30}$$

Remarquons que les suite $\underline{\phi}_k$ et $\underline{\psi}_k$ sont croissantes, alors $\underline{\psi}_k \leq \underline{\psi}_{k+1}$, donc, de l'inégalité (2.30), nous aurons,

$$\underline{\psi}_k \leq \frac{(b - a)\overline{A}}{1 - \overline{B}(b - a)} \underline{\phi}_k, \tag{2.31}$$

En remplaçant cette dernière inégalité dans (2.29), on obtient,

$$\underline{\phi}_k \leq (b - a)\beta_1 \underline{\phi}_k,$$

donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\underline{\phi}_k = 0$ i.e, la suite $(\underline{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constante (=0), d'où,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{\phi}_k = 0.$$

Ainsi, de l'inégalité (2.31), on déduit, également, que

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{\psi}_k = 0.$$

Maintenant, on doit montrer que $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0$. Pour cela, considérons les trois cas,

1- Les suite $\bar{\phi}_k$ et $\bar{\psi}_k$ sont constantes alors,

$$\bar{\phi}_k = \bar{\phi}_{k+1} \quad \text{et} \quad \bar{\psi}_k = \bar{\psi}_{k+1},$$

donc, en suivant la procédure précédente, on obtient,

$$\bar{\psi}_k \leq \frac{(b - a)\bar{A}}{1 - \bar{B}(b - a)} \bar{\phi}_k$$

et

$$\bar{\phi}_k \leq (b - a)\beta_1 \bar{\phi}_k,$$

par conséquent, $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0$.

2- La suite $\bar{\phi}_k$ n'est pas constante, tandis que, $\bar{\psi}_k$ est constante, dans ce cas la suite $\bar{\phi}_k$ est strictement décroissante et minorée par 0, donc $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = 0$. D'autre part, on a,

$$\bar{\psi}_k \leq \frac{(b - a)\bar{A}}{1 - \bar{B}(b - a)} \bar{\phi}_k \longrightarrow 0 \text{ lorsque } k \longrightarrow +\infty,$$

d'où, $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0$.

De la même manière, si la suite $\bar{\phi}_k$ est constante et $\bar{\psi}_k$ ne l'est pas, alors, on a,

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0.$$

Comme $A(b - a) < 1$ et

$$\bar{\phi}_k \leq \frac{(b - a)B}{1 - A(b - a)} \bar{\psi}_k,$$

alors, on déduit, également, que $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = 0$.

3- Finalement, si les suite $\bar{\phi}_k$ et $\bar{\psi}_k$ ne sont pas constantes, donc elles sont strictement décroissantes, de plus, elles sont minorées par 0, d'où,

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0.$$

La preuve se fait d'une manière analogue lorsque $\min\{\beta_1, \beta_2\} = \beta_2$. □

Théorème 2.2.2. *En considérant les hypothèses (H2) et la condition (2.10) et pour un vecteur initial quelconque $(\rho^{(0)}, \sigma^{(0)})$, la suite $(x^{(k)}, y^{(k)})$ converge vers (x, y) lorsque N devient grand.*

Démonstration. Les relations (2.15) (2.16) et (2.25) (2.26) implique que,

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty + \|y^{(k+1)} - y\|_\infty \leq (b - a)\alpha(\|x^{(k)} - x\|_\infty + \|y^{(k)} - y\|_\infty).$$

Donc, par récurrence en k ,

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty + \|y^{(k+1)} - y\|_\infty \leq ((b - a)\alpha)^{(k+1)}(\|x^{(0)} - x\|_\infty + \|y^{(0)} - y\|_\infty).$$

Comme $(b - a)\alpha < 1$, alors, $\|x^{(k+1)} - x\|_\infty + \|y^{(k+1)} - y\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. □

Finalement, selon le Corollaire 2.2.1 et les Théorèmes 2.2.2 2.2.1, on obtient,

Corollaire 2.2.2.

$$\begin{aligned} & (\|u - x^{(k+1)}\|_\infty + \|u' - y^{(k+1)}\|_\infty) \leq \\ & \leq \|u - x\|_\infty + \|x - x^{(k+1)}\|_\infty + \|u' - y\|_\infty + \|y - y^{(k+1)}\|_\infty \xrightarrow[k, N \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

2.2.4 Tests numériques.

Soit $(x^0, y^0) = (f_0, f'_0, \dots, f_N, f'_N)$ le vecteur initial et $(x^{(k)}, y^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}^*$, l'approximation d'ordre k de la solution, du système de dimension finie (2.15) (2.16), obtenue en utilisant la quadrature du trapèze sur la subdivision équidistante,

$$\Delta_N = \left\{ t_i = a + ih, i = 0, \dots, N, h = \frac{b - a}{N}, N \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

et la quadrature de Gauss-Legendre sur la subdivision,

$$\Delta_{N,l} = \left\{ t_i = \frac{b + a}{2} + \frac{b - a}{2}\tau_i, i = 0, \dots, N \right\},$$

où, $\tau_i \in]-1, 1[$ sont les racines du polynôme de Legendre d'ordre N ,

$$P_N(x) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{dx^N} [(x^2 - 1)^N].$$

Les poids de la quadrature de Gauss-Legendre sont tous positifs. En effet, comme le polynôme $L_i^2(x)$ est d'ordre $2N$, alors,

$$0 < \int_{-1}^1 L_i^2(s) ds = \sum_{j=0}^N w_j L_i^2(s_j) = w_i,$$

car les polynômes de Lagrange $\{L_i\}_{i=0}^N$ vérifient $L_i(s_j) = \delta_{i,j}$.

Premièrement, on donne une preuve simple de la consistance de la quadrature du trapèze utilisée pour approcher les intégrales dans (2.1) (2.2).

Soit g une fonction continue sur $[a, b]$, on définit la fonctionnelle w_τ par :

$$\forall \tau \in [a, b], \quad w_\tau(h, g) = \max_{s \in [a, b], |s - \tau| \leq h} |g(s) - g(\tau)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Remarquons qu'il existe $\tau_{j+\frac{1}{2}} \in (t_j, t_{j+1})$, tel que,

$$\begin{aligned} |R_1(h, i)| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (K(t_i, s, u(s), u'(s)) - K(t_i, \tau_{j+\frac{1}{2}}, u(\tau_{j+\frac{1}{2}}), u'(\tau_{j+\frac{1}{2}}))) ds \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |K(t_i, \tau_{j+\frac{1}{2}}, u(\tau_{j+\frac{1}{2}}), u'(\tau_{j+\frac{1}{2}})) - K(t_i, s, u(\tau_{j+\frac{1}{2}}), u'(\tau_{j+\frac{1}{2}}))| + \\ &\quad + |K(t_i, s, u(\tau_{j+\frac{1}{2}}), u'(\tau_{j+\frac{1}{2}})) - K(t_i, s, u(s), u'(s))| ds. \end{aligned}$$

Notons par,

$$\Theta_\tau(h, i) = w_\tau(h, F(t_i, \cdot, \varphi(\tau), \varphi'(\tau))), \quad \Psi_\tau(h, r) = w_\tau(h, F(\cdot, r, \varphi(r), \varphi'(r)))$$

$$\bar{\Theta}_\tau(h, i) = w_\tau \left(h, \frac{\partial F}{\partial t}(t_i, \cdot, \varphi(\tau), \varphi'(\tau)) \right), \quad \bar{\Psi}_\tau(h, r) = w_\tau \left(h, \frac{\partial F}{\partial t}(\cdot, r, \varphi(r), \varphi'(r)) \right).$$

En utilisant (2.1), (2.2) et (H(1-2)), on obtient,

$$\begin{aligned} |R_1(h, i)| &\leq (b-a) \max_{\tau \in [a, b]} \left(\Theta_\tau(h, i) + A \left[(w_\tau(h, f)) + \int_a^b \Psi_\tau(h, r) dr \right] + \right. \\ &\quad \left. + B \left[(w_\tau(h, f')) + \int_a^b \bar{\Psi}_\tau(h, r) dr \right] \right), \end{aligned}$$

d'une manière similaire, on obtient,

$$|R_2(h, i)| \leq (b-a) \max_{\tau \in [a, b]} \left(\bar{\Theta}_\tau(h, i) + \bar{A} \left[(w_\tau(h, f)) + \int_a^b \Psi_\tau(h, r) dr \right] + \right.$$

$$+\bar{B} \left[(w_\tau(h, f')) + \int_a^b \bar{\Psi}_\tau(h, r) dr \right].$$

Par conséquent,

$$R(h) = \max_{0 \leq i \leq N} (|R_1(i, h)| + |R_2(i, h)|) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Maintenant, selon le corollaire 2.2.2, définissons l'erreur d'approximation $E(N, k)$ par :

$$E(N, k) = \max_{0 \leq i \leq N} \{|u(i) - x^k(i)|\} + \max_{0 \leq i \leq N} \{|u'(i) - y^k(i)|\}. \quad (2.32)$$

Exemple 1.

Considérons l'équation,

$$\forall t \in [0, 1], \quad u(t) = f(t) + \int_0^1 \frac{1}{5} \sin[2(s + t + u(s)) + (1 - s)e^s - u'(s)] ds,$$

avec $f(t) = te^t - \frac{1}{5} [\sin^2(1 + t) - \sin^2(t)]$ et la solution exacte $u(t) = te^t$.

Les hypothèses $(H(1 - 2))$ et les conditions (2.6) (2.7) sont satisfaites, avec,

$$M_0 = M_1 = \frac{1}{5}, A = \frac{2}{5}, B = \frac{1}{5}, \bar{A} = \frac{4}{5}, \bar{B} = \frac{2}{5},$$

contrairement à (2.10), qui n'est pas vérifiée car $A + \bar{A} > 1$.

Le tableau 2.1 présente les erreurs de consistance, relatives au quadratures, ainsi que le CPUtime du calcul pour les exemples 1.

TABLE 2.1 – $R(N)$, CPUtime(sec) pour l'exemple 1.

N	Trapèze		N	Gauss-Legendre	
	$R(N)$	CPUtime \approx		$R(N)$	CPUtime \approx
5	8.5244E-2	2.0280E-1	2	1.5837E-3	9.3601E-2
10	4.2957E-2	3.4320E-1	3	1.3705E-5	1.2480E-1
50	8.6250E-3	1.6068E+0	4	6.1765E-8	1.5600E-1
100	4.3136E-3	7.2852E+0	5	1.7524E-10	1.8720E-1
500	8.6289E-4	3.6777E+2			

Les valeurs des erreurs d'approximation $E(N, k)$, suivant les valeurs croissantes de N et k et en considérant le critère d'arrêt,

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq 10^{-7}, \tag{2.33}$$

sont présentées dans les tableaux [2.2](#), [2.3](#).

TABLE 2.2 – $E(N, k)$ pour l'exemple 1 (Trapèze).

N	$E_{N,k}$				$E_N(10^{-7})$	k(10 ⁻⁷)
	k=5	k=10	k=15	k=20		
5	6.275E-3	5.556E-3	5.554E-3	5.554E-3	5.554E-3	14
10	2.226E-3	1.391E-3	1.389E-3	1.389E-3	1.389E-3	14
50	1.097E-3	5.748E-5	5.565E-5	5.565E-5	5.566E-5	14
100	1.069E-3	1.580E-5	1.392E-5	1.391E-5	1.393E-5	14
500	1.060E-3	2.885E-6	5.609E-7	5.567E-7	5.714E-7	14

TABLE 2.3 – $E(N, k)$ pour l'exemple 1 (Gauss-Legendre).

N	$E_{N,k}$				$E_N(10^{-7})$	k(10 ⁻⁷)
	k=5	k=10	k=15	k=20		
2	2.425E-3	1.670E-3	1.669E-3	1.669E-3	1.700E-3	14
3	1.037E-3	1.262E-5	1.478E-5	1.478E-5	1.477E-5	14
4	1.060E-3	2.484E-6	7.344E-8	6.943E-8	8.440E-8	14
5	1.057E-3	2.447E-6	5.945E-9	1.809E-10	2.001E-8	14

Ainsi, le profil logarithmique de ces erreurs, suivant le nombre d'itérations, est donné sur les figures [2.1](#), [2.2](#).

FIGURE 2.1 – Logarithme de $E(N, k)$ pour l'exemple 1 (Trapèze).

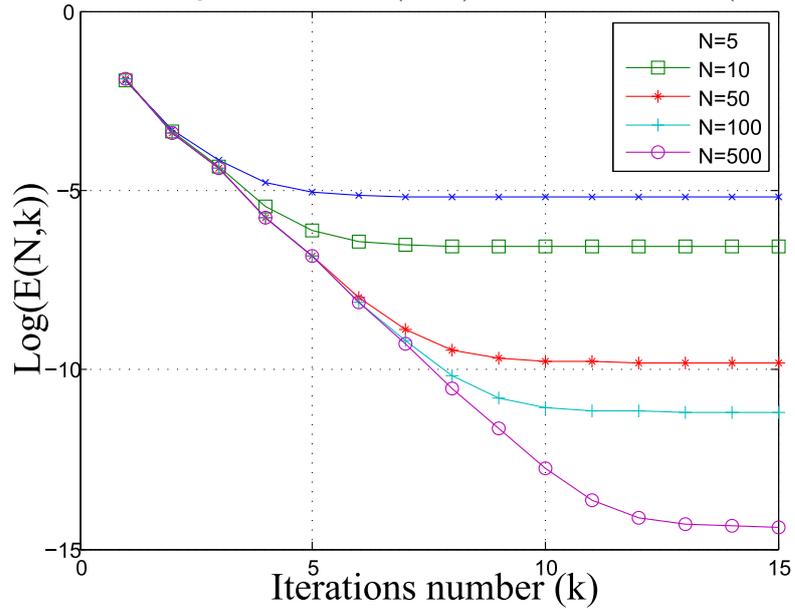
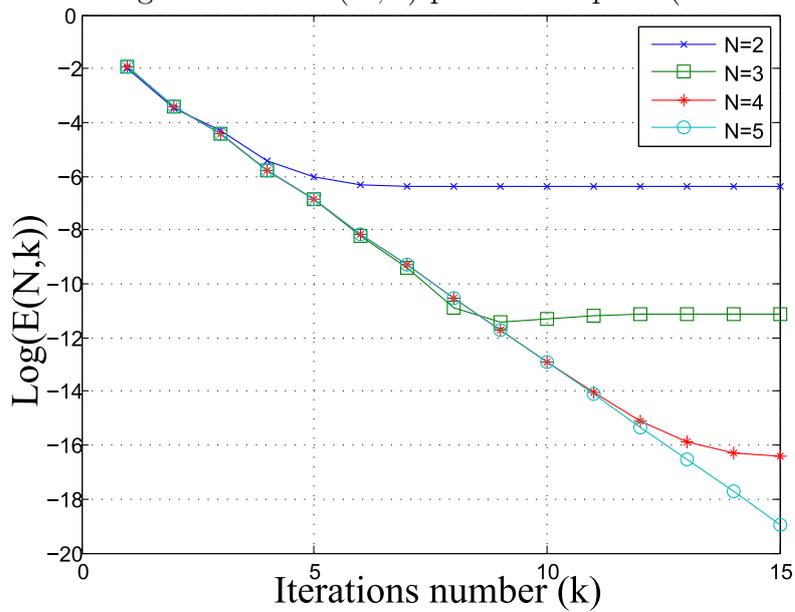


FIGURE 2.2 – Logarithme de $E(N, k)$ pour l'exemple 1 (Gauss-Legendre).



D'après les figures, on observe que pour chaque N choisi, les erreurs ne sont pas parfaitement décroissantes par rapport à k (notamment dans l'exemple 2). Les valeurs minimales des erreurs (notées $E(N, k^*)$) avec le CPUtime de calcul, sont montrées dans le tableau [2.4](#).

TABLE 2.4 – $E(N, k^*) = \min\{E(N, k), k = \overline{0, 15}\}, k^*, \text{CPUtime}(\text{sec})$ pour l'exemple 1.

N	Trapèze			N	Gauss-Legendre		
	$E(N, k^*)$	k^*	CPUtime \approx		$E(N, k^*)$	k^*	CPUtime \approx
5	5.5542E-3	15	0.0	2	1.6692E-3	15	3.9000E-1
10	1.3891E-3	15	3.1200E-2	3	1.1080E-5	9	4.0560E-1
50	5.5653E-5	15	2.6520E-1	4	7.3445E-8	15	4.2120E-1
100	1.3918E-5	15	9.2041E-1	5	5.9455E-9	15	4.3680E-1
500	5.6096E-7	15	2.2792E+1				

Exemple 2.

Prenons l'équation,

$$\forall t \in [0, 1], \quad u(t) = f(t) + \int_0^1 \frac{ts}{3} \sqrt{1 + u(s)^2 + u'(s)^2} ds,$$

avec $u(t) = t - \frac{t}{3}(\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2})$ et la solution exacte $u(t) = t$. Le noyau K est de la forme vue dans la Remarque [2.1.1](#), il remplit, donc, les hypothèses $H(1 - 2)$ et la condition [\(2.10\)](#), avec,

$$A = B = \bar{A} = \bar{B} = \frac{1}{3}.$$

De même, les erreurs de consistance, concernant l'exemple 2, sont données dans le tableau [2.5](#) comme suit :

TABLE 2.5 – $R(N), \text{CPUtime}(\text{sec})$ pour l'exemple 2.

N	Trapèze		N	Gauss-Legendre	
	$R(N)$	CPUtime \approx		$R(N)$	CPUtime \approx
5	1.9913E-3	2.1840E-1	2	2.2794E-4	1.5600E-1
10	4.9745E-4	3.5880E-1	3	3.1737E-6	2.1840E-1
50	1.9893E-5	1.5912E+0	4	3.5463E-8	3.2760E-1
100	4.9733E-6	3.3540E+0	5	1.0544E-10	4.0560E-1
500	1.9893E-7	4.1777E+1			

Les tableaux [2.6](#), [2.7](#) présentent les valeurs des erreurs d'approximation $E(N, k)$ suivant N et k , ainsi que celle qui correspond au critère d'arrêt ([2.33](#)).

TABLE 2.6 – $E(N, k)$ pour l'exemple 2 (Trapèze).

N	$E_{N,k}$				$E_N(10^{-7})$	$k(10^{-7})$
	k=5	k=10	k=15	k=20		
5	2.300E-3	2.400E-3	2.400E-3	2.400E-3	2.400E-3	10
10	5.430E-4	5.904E-4	5.904E-4	5.904E-4	5.904E-4	10
50	2.327E-5	2.360E-5	2.360E-5	2.360E-5	2.360E-5	10
100	4.095E-5	5.896E-6	5.901E-6	5.901E-6	5.896E-6	10
500	4.661E-5	2.315E-7	2.360E-7	2.360E-7	2.315E-7	10

TABLE 2.7 – $E(N, k)$ pour l'exemple 2 (Gauss-Legendre).

N	$E_{N,k}$				$E_N(10^{-7})$	$k(10^{-7})$
	k=5	k=10	k=15	k=20		
2	2.282E-4	2.705E-4	2.705E-4	2.705E-4	2.705E-4	9
3	4.796E-5	3.770E-6	3.765E-6	3.765E-6	3.792E-6	9
4	4.516E-5	3.774E-8	4.207E-8	4.207E-8	1.451E-8	9
5	4.575E-5	4.575E-9	1.255E-10	1.251E-10	2.802E-8	9

Comme les erreurs $E(N, k)$ ne présentent pas une décroissance stricte par rapport à k , alors, il existe une valeur minimale qui correspond à une certaine itération k^* qui n'est pas forcément grande. Ces erreurs minimales sont montrées dans le tableau [2.8](#) :

TABLE 2.8 – $E(N, k^*) = \min\{E(N, k), k = \overline{0, 15}\}$, k^* , CPUtime(sec) pour l'exemple 2.

N	Trapèze			N	Gauss-Legendre		
	$E(N, k^*)$	k^*	CPUtime \approx		$E(N, k^*)$	k^*	CPUtime \approx
5	4.0733E-4	3	6.2400E-2	2	1.8863E-6	4	4.2120E-1
10	2.8923E-4	4	1.4040E-1	3	3.7654E-6	15	4.8360E-1
50	1.6237E-5	6	2.4024E+0	4	1.4506E-8	9	5.1480E-1
100	1.4615E-6	6	9.1885E+0	5	1.2552E-10	15	5.4600E-1
500	5.4265E-8	8	2.2478E+2				

Les profils logarithmiques des erreurs calculées ci-dessus sont montrés sur les figures [2.3](#) [2.4](#) suivantes :

FIGURE 2.3 – Logarithme de $E(N, k)$ pour l'exemple 2 (Trapèze).

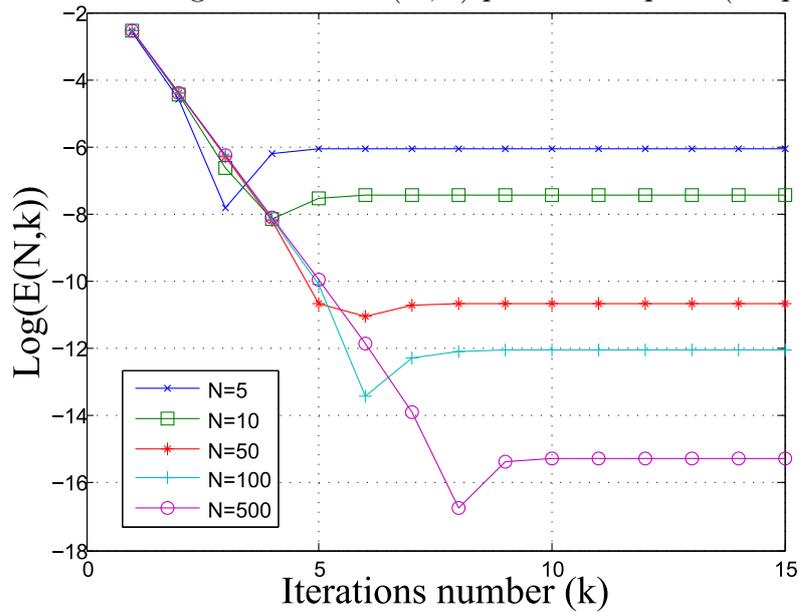
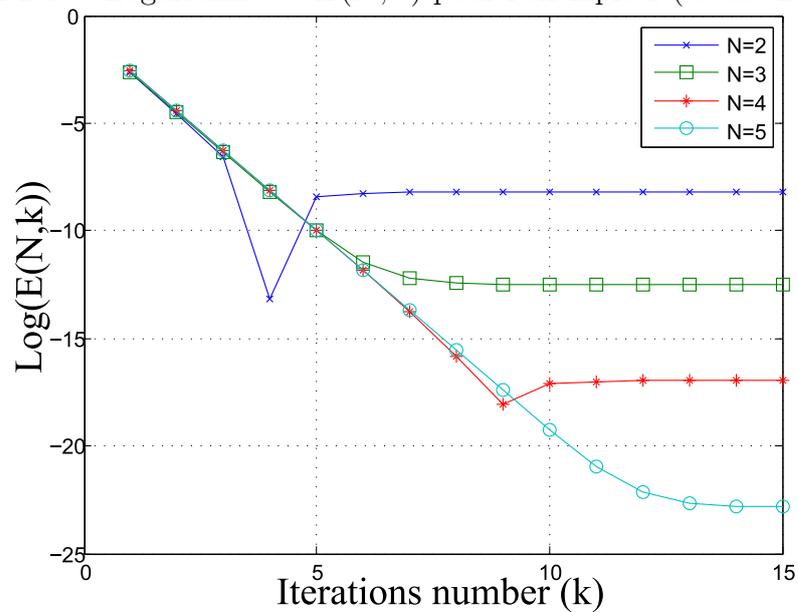


FIGURE 2.4 – Logarithme de $E(N, k)$ pour l'exemple 2 (Gauss-Légendre).



Discussion des résultats. Les résultats de calcul, montrent la rapidité et la précision de la quadrature de Gauss-Legendre en comparaison avec la quadrature de trapèze, cela vient du fait que, pour $N+1$ points, la quadrature de Gauss-Legendre est exacte pour tout polynôme de degré $\leq 2N$. Lorsque K est $\partial_t K$ sont $2(N+1)$ fois continument différentiables par rapport à la variable d'intégration s , alors, l'estimation de l'erreur de consistance est donnée par (voir [14]),

$$R(N) \leq \frac{(b-a)^{2N+1}(N!)^4}{[(2N)!]^3(2N+1)} \max_{i=0,1,\dots,N} \left(\left\| \frac{d^{2(N+1)}K}{ds^{2(N+1)}}(t_i, \cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \right\|_{\infty} + \right. \\ \left. + \left\| \frac{d^{2(N+1)}(\partial_t K)}{ds^{2(N+1)}}(t_i, \cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \right\|_{\infty} \right) \\ \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

Donc, la quadrature de Gausse-Legendre requiert un nombre minimal de points pour avoir la précision requise ce qui est préférable, notamment, pour les intégrales définies sur de larges domaines.

Notons encore que, dans les exemples considérés précédemment, la quadrature de Gauss-Legendre ne marche pas au delà de 5 points et cela revient au fait que les racines τ_i s'accablent aux frontières -1 et 1, ce qui rend (pour un certain nombre de points $N+1$) incalculable les poids de la quadrature $w_i = \int_{-1}^1 L_j(x) dx$, où $\{L_i, i = \overline{0, N}\}$ est la base de Lagrange.

Chapitre 3

Analyse d'une équation integro-différentielle non linéaire de type Volterra-Fredholm.

Ce chapitre représente le contenu intégral des deux articles [8] [4], dans lesquels on a étudié la résolubilité de l'équation,

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K_V(t, s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^b K_F(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad (3.1)$$

dans le cas où les noyaux des intégrales et la fonction f satisfont les hypothèses préliminaires :

$$(H1) \quad \left\| \begin{array}{l} K_V, K_F, \frac{\partial K_V}{\partial t}, \frac{\partial K_F}{\partial t} \text{ sont dans } C^0([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ f \in C^1([a, b], \mathbb{R}). \end{array} \right.$$

La fonction inconnue u est à chercher dans $C^1([a, b])$, alors, si cette dernière existe, sa dérivée est donnée implicitement par :

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t) + K_V(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \partial_t K_V(t, s, u(s), u'(s)) ds + \\ &+ \int_a^b \partial_t K_F(t, s, u(s), u'(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.1 Étude théorique.

Comme vu précédemment, l'étude théorique concerne la recherche des conditions qui assurent l'existence et l'unicité de la solution avec différents types de noyaux.

La procédure est la suivante :

Cas 1 : On construit un théorème d'existence basé sur le théorème de point fixe de Schauder dans le cas où les noyaux K_V , K_F sont uniformément bornés c-à-d : $\exists M_V, M_F, \overline{M}_V, \overline{M}_F > 0$ tels que,

$$(H2) \quad \left\| \begin{array}{l} \max_{\Omega} |K_V(t, s, x, y)| \leq M_V, \quad \max_{\Omega} |K_F(t, s, x, y)| \leq M_F, \\ \max_{\Omega} \left| \frac{\partial K_V}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \leq \overline{M}_V, \quad \max_{\Omega} \left| \frac{\partial K_F}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \leq \overline{M}_F, \end{array} \right.$$

avec $\Omega = [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2$.

Par la suite, on discute l'unicité dans le cas où les noyaux K_V , K_F remplissent les propriétés suivantes : $\exists A, B, \overline{A}, \overline{B}, C, D, \overline{C}, \overline{D} > 0$ tels que $\forall t, s \in [a, b], x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$:

$$(H3) \quad \left\| \begin{array}{l} |K_V(t, s, x_1, y_1) - K_V(t, s, x_2, y_2)| \leq A|x_1 - x_2| + B|y_1 - y_2|, \\ \left| \frac{\partial K_V}{\partial t}(t, s, x_1, y_1) - \frac{\partial K_V}{\partial t}(t, s, x_2, y_2) \right| \leq \overline{A}|x_1 - x_2| + \overline{B}|y_1 - y_2|, \\ |K_F(t, s, x_1, y_1) - K_F(t, s, x_2, y_2)| \leq C|x_1 - x_2| + D|y_1 - y_2|, \\ \left| \frac{\partial K_F}{\partial t}(t, s, x_1, y_1) - \frac{\partial K_F}{\partial t}(t, s, x_2, y_2) \right| \leq \overline{C}|x_1 - x_2| + \overline{D}|y_1 - y_2|. \end{array} \right.$$

Cas 2 : On établit un résultat d'existence et d'unicité, basé sur le théorème de point fixe de Banach, suivant les hypothèses (H3) avec des noyaux non nécessairement uniformément bornés ((H2) n'est pas vérifiée).

3.1.1 Existence et unicité de la solution.

Considérons, maintenant, les deux cas en détailles. L'équation (3.1) est de la forme,

$$u(t) = S_f(u)(t), \quad t \in [a, b],$$

où,

$$S_f(u)(t) = f(t) + \int_a^t K_V(t, s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^b K_F(t, s, u(s), u'(s)) ds.$$

Alors, d'après le résultat le Théorème 2.1.1, S_f est un opérateur compact (comme combinaison linéaire de deux opérateurs compacts) de B^1 dans lui même.

Théorème 3.1.1. *En considérant les hypothèses (H1), (H2), l'équation (3.1) a, au moins, une solution dans B^1 .*

Démonstration. Considérons l'ensemble fermé, borné et convexe,

$$Q = \overline{B}_{B^1}(0_{B^1}, \|f\|_{B^1} + M_V + (b - a)(M_V + M_F + \overline{M}_V + \overline{M}_F)).$$

On a,

$$\|S_f(u)\|_\infty \leq \|f\|_\infty + (b-a)(M_V + M_F).$$

D'autre part, la dérivée de $S_f(u)$, est donnée par,

$$\begin{aligned} S'_f(u)(t) = & f(t) + K_V(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \partial_t K_V(t, s, u(s), u'(s)) ds + \\ & + \int_a^b \partial_t K_F(t, s, u(s), u'(s)) ds. \end{aligned}$$

d'où,

$$\|S'_f(u)\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + M_V + (b-a)(\overline{M}_V + \overline{M}_F).$$

Par conséquent, $S_f(Q) \subseteq Q$, donc, d'après le théorème de point fixe de Schauder, l'existence de la solution est assurée. □

Le théorème suivant, établit le résultat d'unicité dans le cas où les hypothèses (H3) sont remplies.

Théorème 3.1.2. *Si les hypothèses (H3) et la condition,*

$$\min(\theta_1, \theta_2) < \frac{1}{b-a}, \tag{3.3}$$

avec,

$$\begin{aligned} \theta_1 = & \max \left(A + C + \frac{(B+D)(A+(b-a)(\overline{A}+\overline{C}))}{1-B-(b-a)(\overline{B}+\overline{D})}, \frac{B}{b-a} + \overline{B} + \overline{D} \right), \\ \theta_2 = & \max \left(\frac{(B+D)(A+(b-a)(\overline{A}+\overline{C}))}{1-(A+C)(b-a)} + \frac{B}{b-a} + \overline{B} + \overline{D}, A + C \right), \end{aligned}$$

sont satisfaites, alors la solution de (3.1) est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solutions différentes $u_1, u_2 \in B^1$, ($u_1 \neq u_2$).

Donc, par (H3), on obtient $\forall t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |u_1(t) - u_2(t)| \leq & A \int_a^t |u_1(s) - u_2(s)| ds + B \int_a^t |u'_1(s) - u'_2(s)| ds + \\ & + C \int_a^b |u_1(s) - u_2(s)| ds + D \int_a^b |u'_1(s) - u'_2(s)| ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |u'_1(t) - u'_2(t)| \leq & A|u_1(t) - u_2(t)| + B|u'_1(t) - u'_2(t)| + \\ & + \overline{A} \int_a^t |u_1(s) - u_2(s)| ds + \overline{B} \int_a^t |u'_1(s) - u'_2(s)| ds + \\ & + \overline{C} \int_a^b |u_1(s) - u_2(s)| ds + \overline{D} \int_a^b |u'_1(s) - u'_2(s)| ds, \end{aligned}$$

d'où,

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq (b - a)((A + C)\|u_1 - u_2\|_\infty + (B + D)\|u'_1 - u'_2\|_\infty), \quad (3.4)$$

et

$$\|u'_1 - u'_2\|_\infty \leq [A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C})] \|u_1 - u_2\|_\infty + [B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D})] \|u'_1 - u'_2\|_\infty. \quad (3.5)$$

De la relation (3.5), on obtient,

$$\|u'_1 - u'_2\|_\infty \leq \frac{A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C})}{1 - B - (b - a)(\bar{B} + \bar{D})} \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Par substitution dans (3.4), on aura,

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq (b - a)\theta_1 \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

De la même manière, (3.4) nous donne,

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq (b - a) \frac{B + D}{1 - (A + C)(b - a)} \|u'_1 - u'_2\|_\infty.$$

En substituant la dernière relation dans (3.5), on obtient,

$$\|u'_1 - u'_2\|_\infty \leq (b - a)\theta_2 \|u'_1 - u'_2\|_\infty.$$

Finalement, par (3.3) en déduit que $u_1 = u_2$ dans B^1 . □

Pour le deuxième cas, l'existence et l'unicité de la solution sont obtenues par application directe du théorème du point fixe de Banach.

Théorème 3.1.3. *Sous les hypothèses (H3) et la condition,*

$$\eta = \max \left(A \left(1 + \frac{1}{b - a} \right) + \bar{A} + C + \bar{C}, B \left(1 + \frac{1}{b - a} \right) + \bar{B} + D + \bar{D} \right) < \frac{1}{b - a}, \quad (3.6)$$

l'équation (3.1) admet une solution unique.

Démonstration. Prenons $u_1, u_2 \in B^1$, alors, on utilisant (H3), on obtient,

$$\|S_f(u_1) - S_f(u_2)\|_\infty \leq (b - a)((A + C)\|u_1 - u_2\|_\infty + (B + D)\|u'_1 - u'_2\|_\infty),$$

et

$$\|S'_f(u_1) - S'_f(u_2)\|_\infty \leq [A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C})] \|u_1 - u_2\|_\infty + [B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D})] \|u'_1 - u'_2\|_\infty,$$

ce qui implique que,

$$\|S_f(u_1) - S_f(u_2)\|_{B^1} \leq (b - a)\eta \|u_1 - u_2\|_{B^1}.$$

L'existence de l'unique solution est obtenue en appliquant le théorème de de point fixe de Banach. □

Remarque 3.1.1. 1- La condition (3.3) est plus générale que (3.6). En effet, si (3.6) est vérifiée, alors,

$$\max \left(\frac{B}{b-a} + \bar{B} + \bar{D}, A + C \right) < \eta,$$

de plus,

$$\frac{B + D}{1 - B - (b-a)(\bar{B} + \bar{D})} < \frac{1}{b-a}, \quad \text{et} \quad \frac{A + (b-a)(\bar{A} + \bar{C})}{1 - (A+C)(b-a)} < 1,$$

d'où, on déduit que $\theta_{1,2} < \eta$.

Inversement, si $b - a = 1$ et

$$A = \frac{1}{24}, \bar{A} = \frac{1}{12}, B = \frac{1}{16}, \bar{B} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{2}, \bar{C} = \frac{1}{8}, D = \frac{3}{4}, \bar{D} = \frac{3}{16},$$

alors,

$$\eta = \max \left(\frac{19}{24}, \frac{19}{16} \right) > 1.$$

D'autre part, on remarque que, $\theta_1 = \max \left(\frac{13}{24} + \frac{13}{40}, \frac{3}{8} \right) < 1$.

2- Les hypothèses (H3), avec la condition (3.6), restent générales dans le cas où (H2) ne sont pas satisfaites, par exemple pour le cas linéaire ou pour les noyaux de la forme,

$$K(t, s, x, y) = \bar{K}(t, s) \sqrt{c + x^2 + y^2}, \quad c > 0,$$

comme vu dans le chapitre précédent pour l'équation de Fredholm (2.1).

En résumé, l'existence de la solution de (3.1) est assurée lorsque (H1), (H2) sont satisfaites, de plus, si les noyaux satisfont encore (H3) avec (3.3), alors la solution est unique. Autrement, l'unique solution de (3.1), pour des noyaux non nécessairement uniformément bornés, est déduite de (H3) avec la condition relativement forte (3.6) par rapport à (3.3).

3.1.2 Théorème alternatif d'existence et d'unicité de la solution.

Dans cette partie de la section, on donne un autre résultat d'existence en considérant des hypothèses plus faibles que (H2) et (H3). Le résultat d'unicité sera établi, encore, sous les hypothèses (H3) mais avec une condition différente (alternative) à (3.6).

Commençons par définir l'espace $B_\lambda^1 = (C^1([a, b]), \|\cdot\|_\lambda)$ avec,

$$\|u\|_{B_\lambda^1} = \sup_{t \in [a, b]} \{(|u(t)| + |u'(t)|)e^{-\lambda t}\}, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Il est clair que B_λ^1 est un espace de Banach [37].

Indiquons que cette norme est équivalente à la norme de B^1 , ce qui implique la compacité de l'opérateur intégral.

Notre but est d'établir un résultat d'existence lorsque les noyaux K_V, K_F possèdent les propriétés suivantes :

$\exists \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \bar{\kappa}_0, \bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2 > 0$, telles que $\forall t, s, x, y \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$,

$$(H4) \quad \left\| \begin{array}{l} |K_V(t, s, x, y)| \leq \kappa_0 + \kappa_1|x| + \kappa_2|y|, \quad \left| \frac{\partial K_V}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \leq \bar{\kappa}_0 + \bar{\kappa}_1|x| + \bar{\kappa}_2|y|, \\ |K_F(t, s, x, y)| \leq \mu_0 + \mu_1|x| + \mu_2|y|, \quad \left| \frac{\partial K_F}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \leq \bar{\mu}_0 + \bar{\mu}_1|x| + \bar{\mu}_2|y|. \end{array} \right.$$

D'une première observation, les hypothèses (H4) sont plus générales que (H2).

Théorème 3.1.4. *Notons par :*

$$\alpha = \max(\kappa_1, \kappa_2), \quad \beta = \max(\kappa_1 + \bar{\kappa}_1, \kappa_2 + \bar{\kappa}_2), \quad \gamma = \max(\mu_1 + \bar{\mu}_1, \mu_2 + \bar{\mu}_2),$$

alors, sous les hypothèses (H2) et la condition,

$$\alpha < 1 \quad \text{et} \quad \gamma < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 + \beta}{1 - \alpha} < \ln \left(\gamma^{\frac{-1}{b-a}} \right), \quad (3.7)$$

l'équation (3.1) admet une solution dans B_λ^1 , avec,

$$\frac{1 + \beta}{1 - \alpha} < \lambda \leq \ln \left(\gamma^{\frac{-1}{b-a}} \right). \quad (3.8)$$

Démonstration. Soit,

$$p = \kappa_0 + (b - a)(\kappa_0 + \mu_0 + \bar{\kappa}_0) + \bar{\mu}_0, \quad q_\lambda = \alpha + \frac{\beta + \gamma e^{\lambda(b-a)}}{\lambda} < 1.$$

Soit $v \in B_\lambda^1$, alors $\forall t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |S_f(v)(t)| &\leq |f(t)| + (b - a)(\kappa_0 + \mu_0) + \int_a^t (\kappa_1|v(s)| + \kappa_2|v'(s)|) ds + \\ &\quad + \int_a^b (\mu_1|v(s)| + \mu_2|v'(s)|) ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |S'_f(v)(t)| \leq & |f'(t)| + \kappa_0 + \kappa_1|v(t)| + \kappa_2|v'(t)| + (b-a)(\bar{\kappa}_0 + \bar{\mu}_0) + \\ & + \int_a^t (\bar{\kappa}_1|v(t)| + \bar{\kappa}_2|v'(t)|) ds + \\ & + \int_a^b (\bar{\mu}_1|v(s)| + \bar{\mu}_2|v'(s)|) ds, \end{aligned}$$

ce qui implique que,

$$\begin{aligned} |S_f(v)(t)| + |S'_f(v)(t)| \leq & |f(t)| + |f'(t)| + p + \alpha(|v(t)| + |v'(t)|) + \\ & + \beta \int_a^t (|v(s)| + |v'(s)|) e^{-\lambda s} e^{\lambda s} ds + \\ & + \gamma \int_a^b (|v(s)| + |v'(s)|) e^{-\lambda s} e^{\lambda s} ds. \end{aligned}$$

Par sommation on obtient,

$$\begin{aligned} |S_f(v)(t)| + |S'_f(v)(t)| \leq \\ \leq |f(t)| + |f'(t)| + p + \left(\alpha e^{\lambda t} + \beta \int_a^t e^{\lambda s} ds + \gamma \int_a^b e^{\lambda s} ds \right) \|v\|_{B_\lambda^1}. \end{aligned}$$

Comme $\forall t \in [a, b]$, $e^{\lambda t} - e^{\lambda a} < e^{\lambda t}$, alors,

$$\|S_f(v)\|_{B_\lambda^1} \leq \|f\|_{B_\lambda^1} + p e^{-\lambda a} + q_\lambda \|v\|_{B_\lambda^1}.$$

donc, si on choisit, $R \geq \frac{\|f\|_{B_\lambda^1} + p e^{-\lambda a}}{1 - q_\lambda}$, on obtient,

$$S_f \left(\overline{B_{B_\lambda^1}}(0_{B_\lambda^1}, R) \right) \subseteq \overline{B_{B_\lambda^1}}(0_{B_\lambda^1}, R).$$

En utilisant le théorème de point fixe de Schauder, on déduit l'existence de la solution. \square

Remarque 3.1.2. *Les hypothèses (H4) sont plus générales que (H3). En effet, si (H3) sont remplies, alors, $\forall (t, s, x, y) \in [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2$,*

$$|K_V(t, s, x, y) - K_V(t, s, 0, 0)| \leq A|x| + B|y|,$$

et

$$\left| \frac{\partial K_V}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial K_V}{\partial t}(t, s, 0, 0) \right| \leq \bar{A}|x| + \bar{B}|y|.$$

Alors,

$$|K_V(t, s, x, y)| \leq \max_{t, s \in [a, b]} |K_V(t, s, 0, 0)| + A|x| + B|y|,$$

et

$$\left| \frac{\partial K_V}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \leq \max_{t, s \in [a, b]} \left| \frac{\partial K_V}{\partial t}(t, s, 0, 0) \right| + \bar{A}|x| + \bar{B}|y|,$$

d'une manière similaire, on obtient,

$$|K_F(t, s, x, y)| \leq \max_{t, s \in [a, b]} |K_F(t, s, 0, 0)| + C|x| + D|y|,$$

et

$$\left| \frac{\partial K_F}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \leq \max_{t, s \in [a, b]} \left| \frac{\partial K_F}{\partial t}(t, s, 0, 0) \right| + \bar{C}|x| + \bar{D}|y|.$$

Le théorème suivant donne un résultat d'existence et d'unicité en concordance avec (H3).

Théorème 3.1.5. *Si (H3) sont vérifiées, alors, en considérant la condition (3.7), l'équation (3.1) admet une unique solution.*

Démonstration. De la remarque (3.1.2), (H4) sont obtenues avec,

$$\alpha = \max(A, B), \quad \beta = \max(A + \bar{A}, B + \bar{B}), \quad \gamma = \max(C + \bar{C}, D + \bar{D}).$$

Soit $u_1, u_2 \in B_\lambda^1$, alors,

$$\begin{aligned} & |S_f(u_1)(t) - S_f(u_2)(t)| + |S'_f(u_1)(t) - S'_f(u_2)(t)| \leq \\ & \leq A|u_1(t) - u_2(t)| + B|u'_1(t) - u'_2(t)| + (A + \bar{A}) \int_a^t |u_1(s) - u_2(s)| ds + \\ & + (B + \bar{B}) \int_a^t |u'_1(s) - u'_2(s)| ds + (C + \bar{C}) \int_a^b |u_1(s) - u_2(s)| ds + \\ & + (D + \bar{D}) \int_a^b |u'_1(s) - u'_2(s)| ds, \\ & \leq \left(\alpha e^{\lambda t} + \beta \int_a^t e^{\lambda s} ds + \gamma \int_a^b e^{\lambda s} ds \right) \|u_1 - u_2\|_{B_\lambda^1}, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} & |S_f(u_1)(t) - S_f(u_2)(t)| + |S'_f(u_1)(t) - S'_f(u_2)(t)| \leq \\ & \leq \left(\alpha e^{\lambda t} + \frac{\beta e^{\lambda t} + \gamma e^{\lambda b}}{\lambda} \right) \|u_1 - u_2\|_{B_\lambda^1}, \end{aligned}$$

c-à-d,

$$\|S(u_1) - S(u_2)\|_{B_\lambda^1} \leq \left(\alpha + \frac{\beta + \gamma e^{\lambda(b-a)}}{\lambda} \right) \|u_1 - u_2\|_{B_\lambda^1}.$$

En considérant (3.7) et (3.8), on aura,

$$\alpha + \frac{\beta + \gamma e^{\lambda(b-a)}}{\lambda} < \alpha + \frac{\beta + 1}{\lambda} < 1,$$

donc, l'application du théorème de point fixe de Banach nous garantit l'existence et l'unicité de la solution. □

Remarque 3.1.3. Les conditions (3.7) et (3.6) sont différentes, car, si $b - a = 1$ et $A = B = \frac{1}{4}$, $\bar{A} = \bar{B} = \frac{7}{12}$, $C = \bar{C} = D = \bar{D} = \frac{1}{2e^3}$, alors,

$$\frac{1 + \beta}{1 - \alpha} = \frac{22}{9} < 3 = \ln(\gamma^{-1}),$$

en d'autres termes, (3.7) est vérifiée.

d'autre part, on a, $\eta = \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + \frac{1}{e^3} > 1$, c'est à dire que (3.6) n'est pas vérifiée.

Inversement, si $b - a = 1$ et $A = \bar{A} = B = \bar{B} = C = \bar{C} = D = \bar{D} = \frac{1}{6}$, alors,

$$\eta = \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad \frac{\beta + 1}{1 - \alpha} = \frac{8}{5} > \ln(3).$$

3.2 Approche numérique.

Dans cette section, on considère la méthode exposée dans le chapitre précédent qui consiste à discrétiser les intégrales par les règles de quadratures. Prenons, donc, la subdivision :

$$\Delta_N = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}, \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

Rappelons que la dérivée de la solution de l'équation (3.1) est donnée par,

$$\begin{aligned} u'(t) = & f(t) + K_V(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \partial_t K_V(t, s, u(s), u'(s)) ds + \\ & + \int_a^b \partial_t K_F(t, s, u(s), u'(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2.1 Méthode de Nyström.

La projection des équations (3.1) (3.2) sur Δ_N donne $\forall i = 0, 1, \dots, N$,

$$u_i = \int_a^{t_i} K_V(t_i, s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^b K_F(t_i, s, u(s), u'(s)) ds. \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} u'_i = & f'_i + K_V(t_i, t_i, u_i, u'_i) + \int_a^{t_i} \frac{\partial K_V}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds + \\ & + \int_a^b \frac{\partial K_F}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.11)$$

La procédure consiste, premièrement, à remplacer les intégrales contenant K_F et $\frac{\partial K_F}{\partial t}$ par les schémas d'intégration suivants : $\forall i = 0, 1, \dots, N$,

$$\int_a^b K_F(t_i, s, u(s), u'(s)) ds = \sum_{j=0}^N w_{j,N} K_F(t_i, t_j, u_j, u'_j) + O_F(N, i), \quad (3.12)$$

$$\int_a^b \frac{\partial K_F}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds = \sum_{j=0}^N w_{j,N} \frac{\partial K_F}{\partial t}(t_i, t_j, u_j, u'_j) + \bar{O}_F(N, i), \quad (3.13)$$

où $O_F(N, i)$, $\bar{O}_F(N, i)$ sont les erreurs de consistance locales.

Par la suite, dans le but d'approcher les intégrales contenant K_V et $\frac{\partial K_V}{\partial t}$, on utilise les schémas d'intégration qui conservent les même valeurs u_j sur Δ_N (par exemple la règle de trapèze composée ou généralement les règles basées sur l'interpolation par Splines [17]) c-à-d : $\forall i = 0, \dots, N$,

$$\int_a^{t_i} K_V(t_i, s, u(s), u'(s)) ds = \sum_{j=0}^i \sigma_{j,i} K_V(t_i, t_j, u_j, u'_j) + O_V(N, i), \quad (3.14)$$

$$\int_a^{t_i} \frac{\partial K_V}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds = \sum_{j=0}^i \sigma_{j,i} \frac{\partial K_V}{\partial t}(t_i, t_j, u_j, u'_j) + \bar{O}_V(N, i), \quad (3.15)$$

Supposons que les schémas décrits ci-dessus possèdent les propriétés considérées dans le précédent chapitre c-à-d,

1. Les poids $w_{j,N}$ $\sigma_{j,i}$ sont positifs.
2. Les schémas d'intégration sont interpolatoires.

Notons que les schémas d'intégration, utilisés dans (3.12) (3.13) (3.14) (3.15), sont dits consistants si :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\max_{i=0,1,\dots,N} (|O_V(N, i)| + |O_F(N, i)|) + \max_{i=0,1,\dots,N} (|\bar{O}_V(N, i)| + |\bar{O}_F(N, i)|) \right) = 0.$$

Si c'est le cas, les équations (3.10) (3.11) peuvent être approchées par le système de dimension finie suivant : $\forall i = 0, 1, \dots, N$,

$$x_i = f_i + \sum_{j=0}^i \sigma_{j,i} K_V(t_i, t_j, x_j, y_j) + \sum_{j=0}^N w_{j,N} K_F(t_i, t_j, x_j, y'_j), \quad (3.16)$$

$$y_i = f'_i + K_V(t_i, t_i, x_i, y_i) + \sum_{j=0}^i \sigma_{j,i} \frac{\partial K_V}{\partial t}(t_i, t_j, x_j, y_j) + \sum_{j=0}^N w_{j,N} \frac{\partial K_F}{\partial t}(t_i, t_j, x_j, y_j). \quad (3.17)$$

où $v = (x_0, \dots, x_N, y_0, \dots, y_N)$ est le vecteur inconnu dans \mathbb{R}^{2N+2} .

3.2.2 Existence et unicité de la solution du système de dimension finie.

Le système (3.16), (3.17) est de la forme :

$$v = \Psi(v) = \begin{cases} \Psi_1(v) = \left(f_i + \sum_{j=0}^i \sigma_{j,i} K_V(t_i, t_j, x_j, y_j) + \sum_{j=0}^N w_{j,N} K_F(t_i, t_j, x_j, y_j) \right)_{i=0, \dots, N}, \\ \Psi_2(v) = \left(\begin{aligned} f'_i + K_V(t_i, t_i, x_i, y_i) + \sum_{j=0}^i \sigma_{j,i} \frac{\partial K_V}{\partial t}(t_i, t_j, x_j, y_j) + \\ + \sum_{j=0}^N w_{j,N} \frac{\partial K_F}{\partial t}(t_i, t_j, x_j, y_j). \end{aligned} \right)_{i=0, \dots, N}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Le but est d'effectuer une investigation sur les conditions d'existence et d'unicité de la solution du précédent système en concordance avec l'étude théorique.

Commençons, donc, par le premier cas.

Proposition 3.2.1. *Suivant les hypothèses (H1), (H2), l'équation (3.18) admet, au moins une solution.*

Démonstration. La continuité de Ψ dans \mathbb{R}^{2N+2} est une conséquence directe de (H1).

Considérons la notation,

$$d_1 = \|f\|_\infty + (b - a)(M_V + M_F), \quad d_2 = \|f'\|_\infty + M_V + (b - a)(\overline{M}_V + \overline{M}_F).$$

Alors, on peut voir que $Z = [-d_1, d_1]^{N+1} \times [-d_2, d_2]^{N+1}$ est un ensemble compact et convexe de \mathbb{R}^{2N+2} , de plus $\Psi(Z) \subseteq Z$.

Par le théorème de point fixe de Brouwer, on déduit l'existence de la solution. □

La proposition suivante donne le résultat d'unicité analogue à celui obtenu dans le Théorème 3.1.2.

Proposition 3.2.2. *Si (H3), (3.3) sont remplies, alors la solution de (3.18) est unique.*

Démonstration. Définissons la norme :

$$\|v\|_{\mathbb{R}^{2N+2}} = \max_{i=0,1,\dots,N} |x_i| + \max_{i=0,1,\dots,N} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

et supposons que (3.18) admet deux solutions $v_1 \neq v_2$, alors, en utilisant (H3) et d'après la définition de la norme, on obtient

$$\|x_1 - x_2\|_\infty \leq (b - a) ((A + C)\|x_1 - x_2\|_\infty + (B + D)\|y_1 - y_2\|_\infty). \quad (3.19)$$

$$\|y_1 - y_2\|_\infty \leq (A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C}))\|x_1 - x_2\|_\infty + (B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D}))\|y_1 - y_2\|_\infty. \quad (3.20)$$

Comme dans le Théorème 3.1.2, l'unicité est obtenue par (3.3). \square

Pour le deuxième cas, l'existence et l'unicité de la solution de (3.18) est obtenue d'une manière analogue comme dans le Théorème 3.1.3. Considérons, maintenant, le cas où les hypothèses (H4) sont satisfaites, alors on a le résultat d'existence suivant,

Théorème 3.2.1. *Sous (H4), (3.7) et pour N suffisamment grand, l'équation (3.18) admet, au moins, une solution.*

Démonstration. Définissons la norme :

$$\|v\|_{\mathbb{R}^{2N+2}} = \|v\|_\lambda = \max_{i=0, \dots, N} \{(|x_i| + |y_i|)e^{-\lambda t_i}\}, \quad (3.21)$$

Comme dans le Théorème 3.1.4, les hypothèses (H4) nous donnent

$$\begin{aligned} |\Psi_{1,i}(v)| + |\Psi_{2,i}(v)| &\leq \|f\|_\lambda + p + \\ &+ \left(\alpha e^{\lambda t_i} + \beta \sum_{j=0}^i \sigma_{j,i} e^{\lambda t_j} + \gamma \sum_{j=0}^N w_{j,N} e^{\lambda t_j} \right) \|v\|_\lambda, \end{aligned}$$

ce qui implique que,

$$\begin{aligned} |\Psi_{1,i}(v)| + |\Psi_{2,i}(v)| &\leq \|f\|_\lambda + p + \\ &+ \left(\alpha e^{\lambda t_i} + \beta \left(\int_a^{t_i} e^{\lambda t} dt + |R_i(N)| \right) + \gamma \left(\int_a^b e^{\lambda t} dt + |R(N)| \right) \right) \|v\|_\lambda, \end{aligned}$$

avec $R_i(N), R(N)$ sont les erreurs d'intégration de la fonction $e^{\lambda t}$, alors, notons par,

$$\epsilon(N) = \max_{i=0, \dots, N} (e^{-\lambda t_i} (\beta |R_i(N)| + \gamma |R(N)|)),$$

d'où,

$$\|\Psi(v)\|_\lambda \leq \|f\|_\lambda + p e^{-\lambda a} + (q_\lambda + \epsilon(N)) \|v\|_\lambda,$$

Comme $\epsilon(N) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, il existe N_0 , tel que $\forall N \geq N_0, q_\lambda + \epsilon(N) < 1$, donc, en choisissant $R_0 \geq \frac{\|f\|_\lambda + p e^{-\lambda a}}{1 - (q_\lambda + \epsilon(N))}$, on obtient,

$$\Psi(\bar{B}(0_{\mathbb{R}^{2N+2}}, R_0)) \subseteq \bar{B}(0_{\mathbb{R}^{2N+2}}, R_0),$$

on conclut, donc, par le théorème de point fixe de Schauder. \square

Le résultat d'unicité analogue à [3.1.5](#) pour le cas discret, est donné dans la proposition suivante,

Proposition 3.2.3. *Si (H3) et [\(3.7\)](#) sont obtenues, pour tout $N \geq N_0$, la solution de [\(3.18\)](#) est unique.*

Démonstration. Soit v_1 et v_2 deux solutions différentes de [\(3.18\)](#), alors,

$$\|v_1 - v_2\|_\lambda \leq (q_\lambda + \epsilon(N))\|v_1 - v_2\|_\lambda,$$

□

3.2.3 Analyse de convergence.

Ce paragraphe est consacré au traitement de la convergence de la solution v , du système de dimension finie [\(3.18\)](#), vers la solution (u, u') des équations [\(3.1\)](#) [\(3.2\)](#) lorsque N devient grand.

On considère toujours les deux cas traités ci-dessus, ainsi que le troisième cas (alternatif).

Alors, pour le premier cas, on définit l'erreur d'approximation comme suit :

$$E(N) = \max_{i=0,\dots,N} |x_i - u_i| + \max_{i=0,\dots,N} |y_i - u'_i| = E_0(N) + E_1(N). \quad (3.22)$$

Proposition 3.2.4. *En envisageant la notation : $O(N) = O_0(N) + O_1(N)$, avec,*

$$O_0(N) = \max_{i=0,1,\dots,N} (|O_V(N, i)| + |O_F(N, i)|), \quad O_1(N) = \max_{i=0,1,\dots,N} (|\bar{O}_V(N, i)| + |\bar{O}_F(N, i)|),$$

alors, en partant de (H3) et [\(3.3\)](#), on arrive aux estimations suivantes :

1. Si $\min(\theta_1, \theta_2) = \theta_1$, alors,

$$E_0(N) \leq \frac{C_1 O(N)}{1 - (b - a)\theta_1}, \quad (3.23)$$

$$E_1(N) \leq \left(\frac{C_1 [A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C})] + 1 - (b - a)\theta_1}{(1 - (b - a)\theta_1)^2} \right) O(N), \quad (3.24)$$

$$\text{avec, } C_1 = \max \left(1, \frac{(b - a)(B + D)}{1 - \theta_1(b - a)} \right).$$

2. Si $\min(\theta_1, \theta_2) = \theta_2$, alors,

$$E_0(N) \leq \left(\frac{C_2(b - a)(B + D) + 1 - (b - a)\theta_2}{(1 - (b - a)\theta_2)^2} \right) O(N), \quad (3.25)$$

$$E_1(N) \leq \frac{C_2 O(N)}{1 - (b - a)\theta_2}, \quad (3.26)$$

$$\text{avec, } C_2 = \max \left(1, \frac{B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D})}{1 - \theta_2(b - a)} \right).$$

Démonstration. Prenons $\min(\theta_1, \theta_2) = \theta_1$, alors (3.10), (3.11) et (3.16), (3.17) impliquent,

$$E_0(N) \leq (b - a) ((A + C)E_0(N) + (B + D)E_1(N)) + O_0(N), \quad (3.27)$$

et

$$E_1(N) \leq (A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C}))E_0(N) + (B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D}))E_1(N) + O_1(N). \quad (3.28)$$

Donc, de (3.28), on obtient,

$$E_1(N) \leq \left(\frac{A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C})}{1 - (B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D}))} \right) E_0(N) + \frac{O_1(N)}{1 - (B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D}))}, \quad (3.29)$$

En remplaçant (3.29) dans (3.27), on obtient,

$$E_0(N) \leq (b - a)\theta_1 + C_1O(N), \quad (3.30)$$

par conséquent,

$$E_0(N) \leq \frac{C_1O(N)}{1 - (b - a)\theta_1}. \quad (3.31)$$

Donc, la substitution de (3.31) dans (3.29) nous amène à

$$E_1(N) \leq \left(\frac{A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C})}{1 - (B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D}))} \right) \frac{C_1O(N)}{1 - (b - a)\theta_1} + \frac{O(N)}{1 - (B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D}))} \quad (3.32)$$

Comme

$$1 - (b - a)\theta_1 \leq 1 - (B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D})),$$

on déduit, finalement, que,

$$E_1(N) \leq \left(\frac{C_1[A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C})] + 1 - (b - a)\theta_1}{(1 - (b - a)\theta_1)^2} \right) O(N).$$

Par la même procédure, si $\min(\theta_1, \theta_2) = \theta_2$, alors,

$$E_1(N) \leq \frac{C_2O(N)}{1 - (b - a)\theta_2},$$

et

$$E_0(N) \leq \left(\frac{C_2(b - a)(B + D) + 1 - (b - a)\theta_2}{(1 - (b - a)\theta_2)^2} \right) O(N).$$

□

Pour le deuxième cas, on a l'estimation suivante,

Proposition 3.2.5. *La considération de (H3) et (3.6) conduit à,*

$$E(N) \leq \frac{O(N)}{1 - \eta(b - a)}. \quad (3.33)$$

Démonstration. En sommant (3.27) (3.28), on déduit (3.33). □

Maintenant, pour le cas alternatif ((H3) avec (3.7)), considérons l'erreur :

$$E_\lambda(N) = \max_{i=0, \dots, N} \{(|x_i - u_i| + |y_i - u'_i|) e^{-\lambda t_i}\},$$

avec λ vérifiant (3.8). On définit, ainsi, l'erreur de consistance par :

$$O_\lambda(N) = \max_{i=0, \dots, N} \{O(i, N) e^{-\lambda t_i}\},$$

où,

$$O(i, N) = |O_V(N, i)| + |O_F(N, i)| + |\bar{O}_V(N, i)| + |\bar{O}_F(N, i)|.$$

Proposition 3.2.6. *En tenant compte de (H3) et (3.7), on obtient, $\forall N \geq N_0$,*

$$E_\lambda(N) \leq \frac{O_\lambda(N)}{1 - (q_\lambda + \epsilon(N))}. \quad (3.34)$$

Démonstration. En partant des relations (3.10) (3.11) et (3.16) (3.17), on arrive à

$$\begin{aligned} & \forall i = 0, \dots, N, \quad |x_i - u_i| + |y_i - u'_i| \leq \\ & \leq \left(\alpha e^{\lambda t_i} + \beta \left(\int_a^{t_i} e^{\lambda t} dt + |R_i(N)| \right) + \gamma \left(\int_a^b e^{\lambda t} dt + |R(N)| \right) \right) E_\lambda(N) + O(i, N). \end{aligned}$$

La multiplication de la dernière inégalité par $e^{-\lambda t_i} < 1$ nous amène, finalement, à (3.34). □

Nous avons vu dans ce dernier paragraphe, que, si les règles de quadratures sont consistantes avec les équations (3.1), (3.2) (c-à-d $O(N) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$), alors la solution exacte v du système de dimension finie (3.18), converge vers (u, u') . Mais, dans la pratique, la solution v est, généralement, obtenue par des méthodes approximatives. Notre choix est, encore, les approximations successives de Picard.

Dans ce contexte, prenons le vecteur initial $v^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)})$ et définissons la suite $v^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)})$, ($k \in \mathbb{N}$) comme suit, $\forall i = 0, 1, \dots, N$,

$$x_i^{(k+1)} = f_i + \sum_{j=0}^i \sigma_{j,i} K_V(t_i, t_j, x_j^{(k)}, y_j^{(k)}) + \sum_{i=0}^N w_{j,N} K_F(t_i, t_j, x_j^{(k)}, y_j^{(k)}), \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
 y_i^{(k+1)} = & f'_i + K_V(t_i, t_i, x_i^{(k)}, y_i^{(k)}) + \sum_{j=0}^i \sigma_{j,i} \frac{\partial K_V}{\partial t}(t_i, t_j, x_j^{(k)}, y_j^{(k)}) + \\
 & + \sum_{i=0}^N w_{j,N} \frac{\partial K_F}{\partial t}(t_i, t_j, x_j^{(k)}, y_j^{(k)}).
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dans ce qui suit, on va montrer la convergence de cette suite en considérant toujours le premier, le deuxième et le troisième cas alternatif.

Proposition 3.2.7. *Si (H3) et (3.3) sont satisfaites, alors, $v^{(k)}$ converge vers v lorsque $k \rightarrow +\infty$, pour tout vecteur initial v_0 dans $\overline{B}_{\mathbb{R}^{2N+2}}(0, d_1 + d_2)$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle vue dans le Théorème 2.2.1 pour l'équation de type Fredholm. Cette dernière découle de la bornitude de la suite $v^{(k)}$ et dont l'idée est de montrer que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - x\|_\infty = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - x\|_\infty = 0,$$

ainsi que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \|y^{(k)} - y\|_\infty = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|y^{(k)} - y\|_\infty = 0.$$

Supposons que $\min\{\theta_1, \theta_2\} = \theta_1$ et considérons, encore, la notation,

$$\phi_k = \|x^{(k)} - x\|_\infty, \quad \text{et} \quad \psi_k = \|y^{(k)} - y\|_\infty,$$

$\forall k \in \mathbb{N}$. D'après (H2) on a,

$$\phi_{k+1} \leq (b-a)((A+C)\phi_k + (B+D)\psi_k), \tag{3.37}$$

$$\psi_{k+1} \leq (b-a)[A + (b-a)(\overline{A} + \overline{C})]\phi_k + [B + (b-a)(\overline{B} + \overline{D})]\psi_k. \tag{3.38}$$

Alors, conservant la notation,

$$\overline{\phi}_k = \sup_{k \leq r} \phi_r, \quad \underline{\phi}_k = \inf_{k \leq r} \phi_r \quad \text{et} \quad \overline{\psi}_k = \sup_{k \leq r} \psi_r, \quad \underline{\psi}_k = \inf_{k \leq r} \psi_r.$$

Donc, d'après les relations (3.37) (3.38), on obtient,

$$\underline{\phi}_{k+1} \leq (b-a)((A+C)\underline{\phi}_k + (B+D)\underline{\psi}_k), \tag{3.39}$$

$$\underline{\psi}_{k+1} \leq (b-a)[A + (b-a)(\overline{A} + \overline{C})]\underline{\phi}_k + [B + (b-a)(\overline{B} + \overline{D})]\underline{\psi}_k. \tag{3.40}$$

Comme les suites $\underline{\phi}_k$ et $\underline{\psi}_k$ sont croissantes, alors, de (3.40), on obtient,

$$\underline{\psi}_k \leq \frac{A + (b-a)(\overline{A} + \overline{C})}{1 - B + (b-a)(\overline{B} + \overline{D})} \underline{\phi}_k, \tag{3.41}$$

En remplaçant cette dernière inégalité dans (3.39), on obtient,

$$\underline{\phi}_k \leq (b - a)\theta_1 \underline{\phi}_k,$$

donc,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{\phi}_k = 0.$$

Ainsi, de l'inégalité (3.41), on déduit, également, que

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{\psi}_k = 0.$$

Comme dans le Théorème 2.2.1, pour montrer que $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0$, considérons les trois cas,

1- Les suite $\bar{\phi}_k$ et $\bar{\psi}_k$ sont constantes alors, en suivant la même procédure ci-dessus, on obtient,

$$\bar{\psi}_k \leq \frac{A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C})}{1 - B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D})} \bar{\phi}_k,$$

et

$$\bar{\phi}_k \leq (b - a)\theta_1 \bar{\phi}_k.$$

Par conséquent, $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0$.

2- La suite $\bar{\phi}_k$ n'est pas constante, tandis que, $\bar{\psi}_k$ est constante, dans ce cas la suite $\bar{\phi}_k$ est strictement décroissante et minorée par 0, donc $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = 0$. D'autre part, on a,

$$\bar{\psi}_k \leq \frac{A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C})}{1 - B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D})} \bar{\phi}_k \rightarrow 0 \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty,$$

d'où, $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0$.

De la même manière, si la suite $\bar{\phi}_k$ est constante et $\bar{\psi}_k$ ne l'est pas, alors, on a,

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0.$$

D'ailleurs, on a $(A + C)(b - a) < 1$ et

$$\bar{\phi}_k \leq \frac{(b - a)(B + D)}{1 - (A + C)(b - a)} \bar{\psi}_k,$$

donc, $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = 0$.

3- Finalement, si les suite $\bar{\phi}_k$ et $\bar{\psi}_k$ ne sont pas constantes, donc elles sont strictement décroissantes, de plus, elles sont minorées par 0, d'où,

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \phi_k = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi_k = 0.$$

La preuve se fait d'une manière analogue lorsque $\min\{\theta_1, \theta_2\} = \theta_2$. □

Proposition 3.2.8. *Si (H3) et (3.6) sont satisfaites, alors, $v^{(k)}$ converge vers v lorsque $k \rightarrow +\infty$, pour tout vecteur initial v_0 .*

Démonstration. En utilisant (3.16) (3.17) et (3.35) (3.36), on obtient,

$$\|x - x^{(k+1)}\|_\infty \leq (b - a) \left((A + C)\|x - x^{(k)}\|_\infty + (B + D)\|y - y^{(k)}\|_\infty \right),$$

$$\|y - y^{(k+1)}\|_\infty \leq (A + (b - a)(\bar{A} + \bar{C}))\|x - x^{(k)}\|_\infty + (B + (b - a)(\bar{B} + \bar{D}))\|y - y^{(k)}\|_\infty,$$

d'où,

$$\|v - v^{(k+1)}\|_{\mathbb{R}^{2N+2}} \leq (b - a)\eta\|v - v^{(k)}\|_{\mathbb{R}^{2N+2}},$$

et par récurrence sur k , on obtient,

$$\|v - v^{(k+1)}\|_{\mathbb{R}^{2N+2}} \leq ((b - a)\eta)^{k+1}\|v - v^{(0)}\|_{\mathbb{R}^{2N+2}}.$$

Donc, de la condition (3.6), on déduit que $v^{(k)} \rightarrow v$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. □

De même pour le troisième cas, on a le résultat suivant,

Proposition 3.2.9. *En tenant compte de (H3) et (3.7), la suite $(v^{(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers v lorsque k devient grand, pour tout $N \geq N_0$ et pour un choix quelconque de $v^{(0)}$.*

Démonstration. Les équations (3.16) (3.17), (3.35) (3.36) nous donnent,

$$\begin{aligned} & |x - x^{(k+1)}| + |y - y^{(k+1)}| \leq \\ & \left(\alpha e^{\lambda t_i} + \beta \left(\int_a^{t_i} e^{\lambda t} dt + |R_i(N)| \right) + \gamma \left(\int_a^b e^{\lambda t} dt + |R(N)| \right) \right) \|v - v^{(k)}\|_\lambda, \end{aligned}$$

d'où,

$$\|v - v^{(k+1)}\|_\lambda \leq (q_\lambda + \epsilon(N))\|v - v^{(k)}\|_\lambda,$$

et par récurrence sur k , on obtient,

$$\|v - v^{(k+1)}\|_\lambda \leq (q_\lambda + \epsilon(N))^{k+1}\|v - v^{(0)}\|_\lambda.$$

Comme $q_\lambda + \epsilon(N) < 1$, alors $v^k \rightarrow v$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. □

Finalement, on conclut par le résultat de convergence de la solution approximative d'ordre k calculée par les approximations successives (3.35) (3.36).

Corollaire 3.2.1. *Définissons les erreurs d'approximation d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$:*

$$E_k(N) = \max_{i=0,\dots,N} |x_i^{(k)} - u_i| + \max_{i=0,\dots,N} |y_i^{(k)} - u'_i|, \quad (3.42)$$

$$E_{\lambda,k}(N) = \max_{i=0,\dots,N} \left\{ \left(|x_i^{(k)} - u_i| + |y_i^{(k)} - u'_i| \right) e^{-\lambda t_i} \right\}. \quad (3.43)$$

Donc, d'après les propositions (3.2.4) (3.2.5) (3.2.6) (3.2.7) (3.2.8) (3.2.9), on a,

$$E_k(N) \leq \|v^{(k)} - v\|_{\mathbb{R}^{2N+2}} + E(N) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } N, k \longrightarrow +\infty,$$

$$E_{\lambda,k}(N) \leq \|v^{(k)} - v\|_{\lambda} + E_{\lambda}(N) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } N, k \longrightarrow +\infty.$$

3.2.4 Remarque sur l'application de la méthode de Nyström.

Dans ce qui précède, nous avons vu, que pour l'équation de Fredholm, la quadrature de Gauss-Legendre donne des résultats précis avec un nombre minimal de points. On a vu, aussi, que cette méthode ne marche pas à partir d'un certain nombre de points N à cause de la précision réduite de la machine. Soit f une fonction $2N$ continument différentiable sur un intervalle $[a, b]$ et notons par R_{gl} et R_{tr} les erreurs de consistance pour la quadrature de Gauss-Legendre et de trapèze composée respectivement, alors (voir [14]),

$$R_{gl}(N, f) = \frac{(b-a)^{2N+1} (N!)^4}{[(2N)!]^3 (2N+1)} f^{2N}(\xi_1), \quad R_{tr}(N, f) = \frac{(b-a)^3}{12N^2} f^N(\xi_2),$$

en calculant le rapport entre ces deux quantités, on obtient,

$$R_{gl}(N, f) < \sigma(N) R_{tr}(N, f), \quad \text{avec } \sigma(N) = \frac{12(b-a)^{2(N-1)}}{(2N+1)[(N-1)!]^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est à dire, la quadrature de Gauss est plus précise, de rapport $\leq \sigma(N)$, que la quadrature de trapèze composée.

Maintenant, en ce qui concerne l'équation de type Volterra-Fredholm, l'utilisation de la quadrature de Gauss-Legendre, pour approximer l'opérateur de Fredholm, n'est pas recommandée, car, elle n'est pas compatible avec la méthode décrite ci-dessus qui nous oblige à utiliser la méthode de trapèze ou de splines pour l'opérateur de Volterra, qui ne fournissent pas la précision requise pour un petit nombre de points.

D'une autre vision, l'équation de type Volterra-Fredholm (3.1) est une équation de Fredholm (2.1) avec le noyau continu par morceaux (ainsi que sa dérivée par rapport à t),

$$K = \begin{cases} K_V + K_F, & s \leq t, \\ K_F, & s > t. \end{cases} \quad (3.44)$$

ce qui donne la possibilité d'appliquer les règles de quadratures. Mais, cette formulation engendre une perte de précision à cause de discontinuité du noyau, car, dans ce cas, l'erreur de consistance est maximale ; par exemple, pour la méthode de trapèze composée, si le noyau est continu, l'erreur est au plus d'ordre h , par contre si ce noyau est deux fois continument différentiable par rapport à la variable d'intégration, alors l'erreur est d'ordre h^2 . Donc, Pour que cette considération soit efficace, elle doit être accompagnée par d'autres techniques comme la régularisation ou d'autres méthode comme, celles de projection.

3.2.5 Tests numériques.

L'objectif, dans cette partie, est d'examiner l'efficacité de la méthode proposée précédemment en concordance avec les conditions de l'étude analytique. Considérons, donc, comme exemples, le premier et le troisième cas alternatif.

Pour calculer la solution approchée $v^{(k)}$ du système (3.16) (3.17), on utilise dans (3.12) (3.13) et (3.14) (3.15) la quadrature de trapèze composée sur la subdivision équidistante :

$$\Delta_N = \left\{ t_i = a + ih, i = 0, \dots, N, h = \frac{b-a}{N}, N \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Les poids de la quadrature sont :

$$\begin{cases} \sigma_{0,i} = w_{0,N} = \frac{h}{2}, \\ \sigma_{j,i} = w_{j,N} = h, & j = 1, \dots, i-1, \\ \sigma_{i,i} = \frac{h}{2}, \\ w_{j,N} = h, & j = i, \dots, N-1, \\ w_{N,N} = \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Maintenant, on doit prouver que $\epsilon(N) \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$ pour la quadrature

utilisée. alors, pour tout $i = 1, \dots, N$, nous avons,

$$\begin{aligned} |R_i(N)| &= \left| \int_a^{t_i} e^{\lambda t} dt - \sum_{j=0}^i \sigma_{j,i} e^{\lambda t_j} \right| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{\lambda t} dt - \frac{h}{2}(e^{\lambda t_j} + e^{\lambda t_{j+1}}) \right| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{\lambda t} - \frac{1}{2}(e^{\lambda t_j} + e^{\lambda t_{j+1}}) dt \right|. \end{aligned}$$

Comme $\frac{e^{\lambda t_j} + e^{\lambda t_{j+1}}}{2}$ est la moyenne arithmétique de la fonction $e^{\lambda t}$ sur $[t_j, t_{j+1}]$, alors, il existe $t_{j+\frac{1}{2}} \in (t_j, t_{j+1})$ tel que, $\frac{e^{\lambda t_j} + e^{\lambda t_{j+1}}}{2} = e^{\lambda t_{j+\frac{1}{2}}}$ et par le théorème des accroissements finis, on obtient,

$$\int_{t_i}^{t_{j+1}} e^{\lambda t} - e^{\lambda t_{j+\frac{1}{2}}} dt \leq h^2 \lambda e^{\lambda t_{j+1}} \leq h^2 \lambda e^{\lambda b},$$

d'où,

$$|R_i(N)| \leq h\lambda(b-a)e^{\lambda b} \rightarrow 0 \text{ lorsque } N \rightarrow 0.$$

Exemple 1.

Étant donnée l'équation : $\forall t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$,

$$u(t) = f(t) + \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{(t - \frac{1}{2})^2}{48} (\cos^2(u(s)) + \sin^2(su'(s))) ds + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{4\sqrt{2} e^{\frac{1}{4}(t - \frac{3}{2})}}{3\sqrt{6}(1 + u^2(s) + s^2 u'^2(s))} ds,$$

avec,

$$f(t) = t - \frac{1}{48} \left(t - \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{4}{3\sqrt{6}} e^{\frac{1}{4}(t - \frac{3}{2})} \left(\arctan \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right),$$

et la solution exacte $u(t) = t$.

Remarquons que (H1), (H2) sont satisfaits, avec,

$$M_V = \frac{1}{24}, \overline{M}_V = \frac{1}{12}, M_F = \frac{4}{3\sqrt{3}}, \overline{M}_F = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Cette équation correspond au cas considéré dans la Remarque [3.1.1](#), alors, les noyaux satisfont (H3) et [\(3.3\)](#) à l'exception de [\(3.6\)](#). Les constantes dans (H3) sont obtenues par le théorème des accroissements finis.

Le tableau [3.1](#) présente les erreurs de consistance pour l'exemple 1.

TABLE 3.1 – Erreurs de consistance pour l'exemple 1.

N	$O_0(N)$	$O_1(N)$
5	1.1781E-3	4.4520E-4
10	4.4355E-4	1.1089E-4
50	1.7720E-5	4.4301E-6
100	4.4299E-6	1.1075E-6
500	1.7719E-7	4.4298E-8

Le tableau [3.2](#) donne les valeurs des erreurs d'approximation $E_k(N)$ suivant les valeurs croissantes de N et k pour l'exemple 1.

TABLE 3.2 – Erreurs d'approximation $E_k(N)$ pour l'exemple 1.

N	$E_k(N)$				
	$k=2$	$k=4$	$k=6$	$k=8$	$k=10$
5	1.5817E-2	1.1135E-3	1.7839E-3	1.8134E-3	1.8147E-3
10	1.7195E-2	2.9128E-4	4.2075E-4	4.5051E-4	4.5175E-4
50	1.7634E-2	7.2605E-4	1.3083E-5	1.6746E-5	1.7993E-5
100	1.7648E-2	7.3962E-4	2.6621E-5	3.2548E-6	4.4573E-6
500	1.7651E-2	7.4396E-4	3.0953E-5	1.1217E-6	1.2805E-7

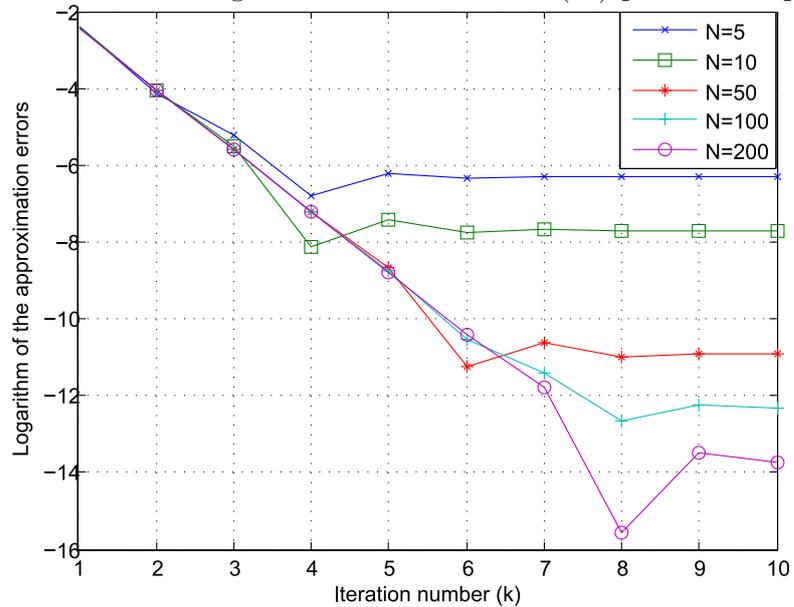
D'après les profils des erreurs, on observe que les erreurs d'approximation ne présentent pas une décroissance parfaite (notamment dans l'exemple 1). Les valeurs minimales de ces erreurs (notées $E_{\hat{k}}(N)$), ainsi que les erreurs qui correspondent au critère d'arrêt $\|x^{(\bar{k})} - x^{(\bar{k}-1)}\| \leq 10^{-7}$ (notées $E_{\bar{k}}(N)$) pour l'exemple 1, sont présentées dans le tableau [3.3](#).

TABLE 3.3 – Erreurs d'approximation $E_{\hat{k}}(N)$ et $E_{\bar{k}}(N)$ pour l'exemple 1.

N	$E_{\hat{k}}(N)$	\hat{k}	$E_{\bar{k}}(N)$	\bar{k}
5	1.1135E-3	4	1.8147E-3	11
10	2.9128E-4	4	4.5182E-4	11
50	1.3083E-5	6	1.8059E-5	11
100	3.2548E-6	8	4.5229E-6	11
500	1.2805E-7	10	1.9161E-7	11

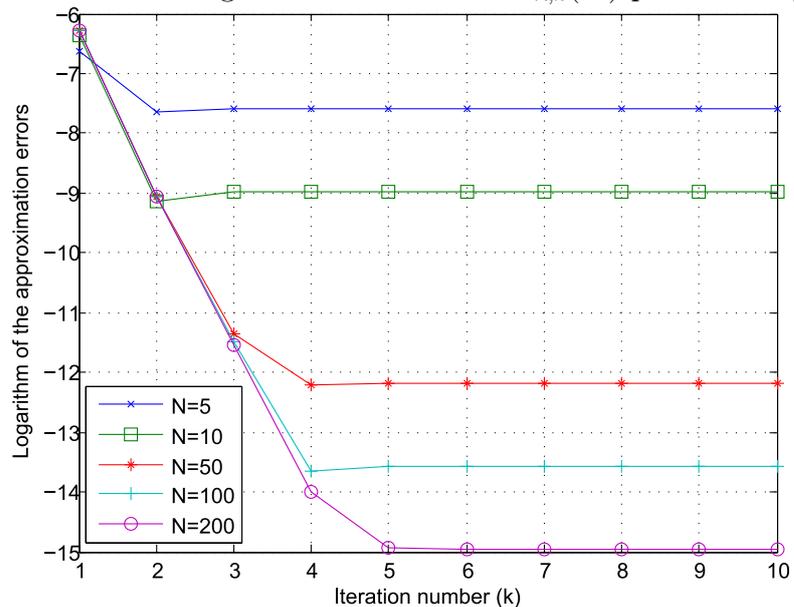
La figure 3.1 exprime le profil logarithmique des erreurs $E_k(N)$ suivant le nombre d'itérations $k = \overline{1, 10}$ et pour chaque nombre de subdivisions N .

FIGURE 3.1 – Le logarithme des erreurs $E_k(N)$ pour l'exemple 1.



Ainsi, le profil logarithmique des erreurs $E_{\lambda,k}(N)$ est présenté sur la figure 3.2 suivante :

FIGURE 3.2 – Le logarithme des erreurs $E_{\lambda,k}(N)$ pour l'exemple 2.



Exemple 2.

Considérons l'équation suivante, qui correspond au cas pris dans Remarque [3.1.3](#) où (H3) et [\(3.7\)](#) sont vérifiées : $\forall t \in [0, 1]$,

$$u(t) = f(t) + \int_0^t \frac{\sin\left(\frac{7t}{3}\right)}{4} \ln\left(e^{u(s)-su'(s)} + s^2\right) ds + \int_0^1 \frac{e^{t-1}}{2e^3} \sqrt{1 + (u(s))^2 + (su'(s))^2} ds,$$

avec,

$$f(t) = t - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{7t}{3}\right) (2(\arctan(t) - t) + t \ln(t^2 + 1)) - \frac{e^{t-1}}{2e^3} \left(\frac{\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

et la solution exacte $u(t) = t$.

Concernant l'exemple 2, les erreurs de consistance sont données dans le tableaux suivant [3.4](#) :

TABLE 3.4 – Erreurs de consistance $O_\lambda(N)$ pour l'exemple 2.

N	$O_\lambda(N)$
5	5.3349E-4
10	1.3713E-4
50	5.5421E-6
100	1.3855E-6
200	3.4641E-7

Le tableau [3.5](#) montre les erreurs d'approximation $E_{\lambda,k}(N)$ pour l'exemple 2.

TABLE 3.5 – Erreurs d'approximation $E_{\lambda,k}(N)$ pour l'exemple 2.

N	$E_{\lambda,k}(N)$				
	$k=2$	$k=4$	$k=6$	$k=8$	$k=10$
5	4.8015E-4	5.0278E-4	5.0286E-4	5.0286E-4	5.0286E-4
10	1.0625E-4	1.2557E-4	1.2566E-4	1.2566E-4	1.2566E-4
50	1.1614E-4	5.0483E-6	5.1431E-6	5.1433E-6	5.1433E-6
100	1.1759E-4	1.1917E-6	1.2866E-6	1.2868E-6	1.2868E-6
200	1.1795E-4	8.3000E-7	3.2145E-7	3.2170E-7	3.2170E-7

Le tableau [3.6](#) exprime les valeurs minimales des erreurs $E_{\lambda,k}(N)$ (notées $E_{\lambda,\hat{k}}(N)$) et celles qui correspondent au critère d'arrêt $\|x^{(\bar{k})} - x^{(\bar{k}-1)}\| \leq 10^{-7}$ (notées $E_{\lambda,\bar{k}}(N)$) pour l'exemple 2.

TABLE 3.6 – Erreurs d'approximation $E_{\lambda,\hat{k}}(N)$ et $E_{\lambda,\bar{k}}(N)$ pour l'exemple 2.

N	$E_{\lambda,\hat{k}}(N)$	\hat{k}	$E_{\lambda,\bar{k}}(N)$	\bar{k}
5	4.8015E-4	2	5.0286E-4	6
10	1.0625E-4	2	1.2566E-4	6
50	5.0483E-6	4	5.1430E-6	6
100	1.1917E-6	4	1.2866E-6	6
200	3.2145E-07	6	3.2145E-7	6

Conclusion et perspectives.

Ce travail concerne une étude analytique et numérique d'un cas particulier des équations integro-différentielles de type Fredholm :

- L'équation de type Fredholm (2.1) avec un noyau régulier.
- L'équation de type Volterra-Fredholm (3.1) qui est de type Fredholm avec un noyau continu par morceaux, ainsi que sa dérivée par rapport à la première variable.

Nous avons effectué, alors, une investigation sur des conditions pratiques (dans le sens qu'elles soient respectées dans l'approche numérique) qui assurent l'existence et l'unicité des solutions de ces équations, avec différentes variétés de noyaux, en utilisant les théorèmes de point fixe classique de Banach et de Schauder. Par la suite, dans le but d'approcher les solutions de ces équations, une approche numérique simple et efficace a été mise en oeuvre en concordance avec le traitement analytique ; cette méthode consiste en deux procédures : approximer les intégrales par les règles de quadratures, en suite, résoudre le système obtenu de dimension fine par les itérations de Picard. Les résultats de calcul montrent l'efficacité de l'approche, notamment pour la première équation en utilisant la quadrature de Gauss-Legendre qui a donnée des résultat favorables en temps et en précision.

L'étude des équations integro-différentielles de Fredholm dans un cadre fonctionnel élargi, ce qui correspond à une large classe de problèmes aux limites, représente une perspective rigoureuse. Alors, l'objectif futur, est d'envisager (2.1) avec des noyaux appartenant aux espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega, L^q(\tilde{U}, \mathbb{R}))$ ($\tilde{U} = \Omega \times \mathbb{R}^2$, $\Omega \underset{\text{ouvert}}{\subset} \mathbb{R}^2$, $1 \leq p, q \leq +\infty$), ce qui demande beaucoup d'outils d'analyse fonctionnelle comme le théorème de compacité de Fréchet-Kolmogorov dans les espaces L^p ($1 \leq p < \infty$), la notion d'opérateur de Nemytskii, conditions de Caratheodory ...etc [39]. Ainsi, étudier les questions de stabilité, notamment au sens de Hyers-Ulam et de développer des méthodes numériques convenables. Une technique, jugée favorable, a été présenté dans [21, 28], où les auteurs

ont montrée, sous certaines conditions, que la méthode basée sur la linéarisation ensuite discrétisation converge vers la solution exacte, tandis que, la procédure classique de discrétisation suivie par la linéarisation du système de dimension finie, converge vers une solution discrète. Le schéma de linéarisation utilisé dans ces travaux est la méthode de Newton, ainsi, comme schéma de discrétisation, il ont utilisé la projection de Kantorovich qui remplit les conditions imposées, contrairement aux méthodes classiques de Galerkin, Petrov-Galerkin et de collocation.

Bibliographie

- [1] Abel N. H. : Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. Mag. Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 2, Christiania, (1823) (oeuvres Complètes, T. 1, B.2 Christiania, 1881 ,11-27)
- [2] Abel N. H. : Auflosung einer mechanischen Aufgabe. Crelles J. , 153-7. (1826).
- [3] Agarwal R. P., O'Regan D. : Ordinary and Partial Differential Equations, With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems. Springer Science+Business Media, LLC (2009) .
- [4] Aissaoui M. Z., Bounaya M. C., Guebbai H. : Analysis of a nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equation. Quaestiones Mathematicae. <https://doi.org/10.2989/16073606.2020.1858991> (2021).
- [5] Atkinson K. E. : The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. Cambridge University Press (1997).
- [6] Benrabia N., Guebbai H. : On the regularization method for Fredholm integral equations with odd weakly singular kernel. Comp. Appl. Math., vol. 37, pp. 5162-5174 (2018).
- [7] Bounaya M. C., Lemita S., Ghiat M., Aissaoui M. Z. : On a nonlinear integro-differential equation of Fredholm type. Int. J. Computing Science and Mathematics Vol. x, No. x, 202X. (Accepted).
- [8] Bounaya M. C., Lemita S., Touati S., Aissaoui M. Z. : Analytical and numerical approach for a nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equation. Bol. Soc. Paran. Mat. doi :10.5269/bspm.52191 (2021).
- [9] Brunner H. : The numerical solution of integral equations with weakly singular kernels, Numerical Analysis. Lecture Notes in Math. 1066, 50-71 (1984).

- [10] Corduneanu C. : *Integral Equations and Applications*. Cambridge University Press (1991).
- [11] Cushing J. M. : *Integro-differential Equations and Delay Models in Population Dynamics*, Lecture Notes in Biomathematics, No. 20, Springer-Verlag, Berlin, (1977).
- [12] Darania p., Pishbin S. : On the Numerical Solutions for Nonlinear Volterra-Fredholm Integral Equations. *Bol. Soc. Parana. Mat* (2018). <https://doi.org/10.5269/bspm.42815>.
- [13] Debbar R., Guebbai H., Zereg Z. : Improving the convergence order of the regularization method for Fredholm integral equations of the second kind. *Appl. Math. Comput.* 289, 204-213 (2016).
- [14] Démidovich B., Maron I. : *Éléments de Calcul Numérique* (Traduit du russe). Deuxième édition (1979).
- [15] Erfanian M., Mansoori A. : Solving the nonlinear integro-differential equation in complex plane with rationalized Haar wavelet. *Math. Comput. Simulation* (2019). <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2019.03.006>.
- [16] Erfanian M., Zeidabadi H. : Approximate solution of linear Volterra integro-differential equation by using cubic B-spline finite element method in the complex plane. *Adv. Difference Equ.*, vol. 62, no. 1 (2019).
- [17] Fortin A. : *Analyse numérique pour ingénieurs*. Quatrième édition. Presses internationales Polytechnique (2011).
- [18] Fredholm I. : Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. *Kong. Vetensk. Akd. Froh. Stockholm*, 39-46 (1900).
- [19] Fredholm I. : Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Math.* 27, 365-90 (1903).
- [20] Ghiat M., Guebbai H. : Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation with weakly singular kernel. *Comp Appl Math.* 232, 1-14 (2018).
- [21] Grammant L., Ahues M., D'Almeida F.D. : For nonlinear infinite dimensional equations which to begin with : linearization or discretization. *J. Integral Equations Appl.* 26, 413-436 (2014).
- [22] Grigoriev Y.N., Ibragimov N.H., Kovalev V.F., Meleshko S.V. : *Symmetries of Integro-Differential Equations : With Applications in Mechanics and Plasma Physics*.

- Lect. Notes Phys, 806 (Springer, Dordrecht) (2010). <https://doi.org/10.1007/978-90-481-3797-8>.
- [23] Guebbai H., Aissaoui M.Z., Debbar I., Khalla B. : Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation. *Appl. Math. Comput.* 229, 367-373 (2014).
- [24] Hackbusch W. : *Integral Equations : Theory and Numerical Treatment*. Birkhäuser Verlag (1995).
- [25] Jangveladze T. : *Numerical Solutions of Three Classes of Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equations*. Academic Press (2016).
- [26] Kantorovich L.V., Akilov G.P. : *Functional Analysis*. PERGAMON PRESS. Second edition (1982).
- [27] Khelifa Z. : *Calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables. Traité de Mathématiques, livre 8*. Office des Publications Universitaires. 12 (2013).
- [28] Khellaf A., Merchela W., Benarab S. : New numerical process solving nonlinear infinite dimensional equations. *Comput. Appl. Math* (2020). <https://doi.org/10.1007/s40314-020-1116-x> .
- [29] Lawrence C. E. : *Partial Differential Equations. Volume 19*. American Mathematical Society (1997).
- [30] Lemita S. : *Traitement numérique des équations intégrales de Fredholm : Généralisation des méthodes itératives*. Thèse de doctorat en Mathématiques université Guelma (2018).
- [31] Linz P. : *Analytical and Numerical Methods For Volterra Equations*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia (1985).
- [32] Liouville J. : Sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions, *J. École Polyt.* 13, 1-69 (1832).
- [33] Liouville J. : Sur le calcul des différentielles à indices quelconques, *J. École Polyt.* 13, 71-162 (1832).
- [34] Liouville J. : Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable. *J. Math. Pures. Appl.* 2, 16-35 (1837).

- [35] Mandal M., Kant K. and Nelakanti G. : Convergence analysis for derivative dependent Fredholm-Hammerstein integral equations with Green's kernel. *J. Comput. Appl. Math.*, (2019), DOI : doi.org/10.1016/j.cam.2019.112599.
- [36] Micula S. : An iterative numerical method for Fredholm-Volterra integral equations of the second kind. *Appl. Math. Comput.* 270, 935-942 (2015).
- [37] Pachpatte A. G. : On Fredholm type integro-differential equation. *Tamkang J. Math.* 39, 85-94 (2008).
- [38] Porter D., Stirling D. S. G. : *Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications.* Cambridge University Press. Cambridge (1990).
- [39] Precup R. : *Methods in Nonlinear Integral Equations.* Springer-Science+Business Media, B.Y. (2002).
- [40] Saha Ray S., Sahu P. K. : *Novel Methods for Solving Linear and Nonlinear Integral Equations.* CRC Press, Taylor & Francis Group (2019).
- [41] Salah S., Guebbai H., Lemita S., Aissaoui M.Z. : Solution of an Integro-differential Nonlinear Equation of Volterra Arising on Earthquake Model. *Bol. Soc. Parana. Mat* (2019). <https://doi.org/10.5269/bspm.48018>.
- [42] Segni S. : Amélioration des conditions d'existence et d'unicité pour les équations intégrales-différentielles de Volterra. Thèse de doctorat en Mathématiques université Guelma (2019).
- [43] Sobolev S. L. : *Partial Differential Equations of Mathematical Physics.* PERGAMON PRESS (1964).
- [44] Touati S., Aissaoui M. Z., Lemita S., Guebbai, H. : Investigation approach for a nonlinear singular Fredholm integro-differential equation, *Bol. Soc. Paran. Mat.* doi :10.5269/bspm. 46898, (2020).
- [45] Touati S., Lemita S., Ghiat M., Aissaoui M. Z. : Solving a nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equation with weakly singular kernels. *Fasciculi Mathematici* 62 (2019).
- [46] Volterra V. : Sulla inversione degli integrali definiti. *R. C Accad. Lincei* (5), 5, 177-185 (1896).
- [47] Volterra V. : Sulla inversione degli integrali multipli, *R. C Accad. Lincei* (5), 5, 289-300 (1896).

- [48] Volterra V. : Sull' inversione degli integrali definiti. *Atti Accad, Torino*, 31, 311-323, 400-408, 537-567 and 693-708 (1896).
- [49] Volterra V. : Sopra un problema di elettrostatica. *Nuovo Cim.*, 16, 49-57 (1884).
- [50] Volterra V. : Sopra un problema di elettrostatica. *R. C. Accad. Lincei* (3), 8, 315-318 (1884).
- [51] Volterra V. : Sull' equilibrio dei corpi elastici più volte connessi. *Nuovo Cim.* (5), 10, 361-385 (1905); (5), 11, 5-20, 144-161, 205- 221 and 338-347 (1906).
- [52] Volterra V. : Nuovi studii sulle distorsioni dei solidi elastici. *R. C. Accad. Lincei* (5), 15, 519-525 (1906).
- [53] Volterra V. : Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Ann. Ecole norm.* (3), 24, 401-517 (1907).
- [54] Volterra V. : Sulle equazioni integro-differenziali. *R. C, Accad. Lincei* (5), 18, 167-174 (1909).
- [55] Volterra V. : Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell' elasticità. *R. C Accad. Lincei* (5), 18, 296-301 (1909).
- [56] Volterra V. : Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia. *R. C Accad. Lincei* (5), 18, 577-586 (1909).
- [57] Volterra V. : Sulle equazioni della elettrodinamica. *R. C. Accad. Lincei* (5), 18, 203-211 (1909).
- [58] Volterra V. : Leçons sur les équations intégrales et les équations integro-différentielles, professées a la Faculté des sciences de Rome en 1910, publiées par M. Tomassetti et F. S. Zarlatti. *Collection Borel*, pp. 164 (1913).
- [59] Volterra V. : *Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential equations.* DOVER PUBLICATIONS, INC. NEW YORK. (1959).
- [60] Zeidler E. : *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, I : Fixed-Point Theorems.* Springer-Verlag (1986).