

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 – Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



Support de cours pédagogique

Intitulé:

*Modélisation et simulation des systèmes  
électromécaniques*



**Dr. BENLALOU Idriss**

[idriss.benlaloui@univ-guelma.dz](mailto:idriss.benlaloui@univ-guelma.dz)

[idrissb88@yahoo.fr](mailto:idrissb88@yahoo.fr)

**Année universitaire : 2019-2020**

# AVANT PROPOS

Ce cours est destiné aux étudiants **de Master : Electromécanique, Commande des machines électriques, Automatique** au département de Génie Electrotechnique et Automatique à l'université 8 mai 1945 de Guelma.

Une classification des différents chapitres contient dans chacun, des **p**rérequis, des **o**bjectifs, une **i**ntroduction, une **c**onclusion, un **e**xercice d'**a**pplication et une **b**ibliographie, même si on a tendance à répéter certaines références, orientant la lecture des étudiants vers les points d'intérêt immédiat.

Le traité d'**é**lectronique, **g**énie **é**lectrique et **é**lectromécanique répond aux besoin de disposer d'un ensemble de connaissance, méthode et outils nécessaire à la maîtrise de la conception, la modélisation, circuits et systèmes utilisant l'électricité et l'électronique comme support.

Ce cours est conçu et organisé dans un souci de relier étroitement les fondements physiques et les méthodes théoriques au caractère industriel des discipline traitées.

Les **s**avoirs, **t**héories et **m**éthodes rassemblées dans chaque chapitre de ce cours intitulé **M**odélisation et **S**imulation des **S**ystèmes **E**lectromécanique permettront aux futurs diplômés d'électromécanique du département de Génie Electrotechnique et Automatique de développer la méthodologie d'établir les éléments d'un modèle physique pour divers systèmes électromécaniques, aussi bien les aspects fondamentaux qu'expérimentaux du domaine qu'il étudie.

Nous espérons contribuer à la formation de nos futurs diplômés, ce document a pour seule ambition d'apporter les contenus les mieux adaptés à leurs besoins.

**L'auteur.**

## SOMMAIRE

**Avant propos**

**Liste des Symboles et Abréviations**

**Introduction Générale**

**Contexte**

**Structure de cours**

### Chapitre 1

#### **Propriétés dynamiques de la machine à courant continu**

**Introduction**

<b>1.1. Modèles directs et inverses.....</b>	<b>4</b>
1.1.1. A propos de la modélisation.....	4
1.1.1.1. De l'observation à la connaissance.....	4
1.1.1.2. Du rôle de l'expertise.....	5
<b>1.2. Modèle causal de la machine à courant continu.....</b>	<b>7</b>
1.2.1. Les relations de transformation.....	7
1.2.2. Application à la machine à courant continu.....	8
1.2.2.1. Quantification des relations.....	8
1.2.2.2. Etablissement du modèle de la MCC.....	8
1.2.3. Simplification du modèle de la MCC.....	8
1.2.4. A propos de la commande d'un processus.....	10
1.2.4.1. Principe d'inversion.....	11
1.2.4.2. Définition du modèle de commande de la MCC.....	12
1.2.4.2.1. Elaboration de la commande.....	12
1.2.4.2.2. Construction du modèle.....	13
1.2.4.2.3. Utilisation du modèle.....	13
1.2.4.3. Réglage de la boucle de courant.....	13
1.2.4.4. Description par fonction de transfert.....	16
1.2.4.5. Résultats de simulation et Interprétation.....	17
<b>1.3. Conclusion.....</b>	<b>18</b>
<b>1.4. Exercice d'application.....</b>	<b>19</b>
<b>1.5. Annexe.....</b>	<b>19</b>
<b>1.6. Bibliographie.....</b>	<b>19</b>

### Chapitre 2

#### **Modèles dynamiques des machine synchrones**

**Introduction**

<b>2.1. Généralités sur les structures et les modèles.....</b>	<b>20</b>
2.1.1. Structure des machines et premières hypothèses de la modélisation.....	20

2.1.2. Hypothèses complémentaires. Modèle initial des machines triphasées sinusoïdales.....	22
<b>2.2. Transformation de Concordia et modèle diphasé équivalent.....</b>	<b>25</b>
2.2.1. Inductances statoriques.....	27
2.2.2. Mutuelles statoriques.....	28
2.2.3. Résistances.....	28
2.2.4. Equations du modèle diphasé.....	28
<b>2.3. Transformation de Park.....</b>	<b>29</b>
<b>2.4. Equations de Park des machines synchrones.....</b>	<b>31</b>
2.4.1. Machine lisse sans amortisseurs dans le repère de Park par la rotation $\alpha_s = \omega t + \alpha_0$ .....	31
2.4.2. Equations dans le repère de Park par la rotation $\alpha_s = \theta$ .....	32
2.4.2.1. Expression générale des tension en fonction des flux.....	32
2.4.2.2. Puissances externes et couple.....	33
2.4.2.3. Equations générales des tentions en fonction des courants.....	34
2.4.3. Equations du régime stationnaire.....	35
2.4.3.1. Paramètres.....	35
2.4.3.2. Définitions et Notations du régime stationnaire.....	36
2.4.3.3. Machine à pôles lisses en régime stationnaire.....	37
2.4.3.4. Machine à pôles saillants en régime stationnaire.....	37
<b>2.5. Analyse des modèles en régime stationnaire.....</b>	<b>38</b>
2.5.1. Performances sous tension imposée.....	38
2.5.2. Performances sous Force électromotrice imposée.....	38
2.5.3. Performances sous courant imposé.....	38
<b>2.6. Modèle en vue de la commande.....</b>	<b>39</b>
2.6.1. Modèle d'état des machines à aimants.....	39
2.6.2. Modèle d'état des machines à aimants avec amortisseurs.....	40
2.6.3. Modèle d'état des machines à aimants sans amortisseurs.....	40
2.6.4. Modèle opérationnel de la MSAP dans le repère de Park sur MATLAB.....	42
<b>2.7. Conclusion.....</b>	<b>42</b>
<b>2.8. Exercice d'application.....</b>	<b>43</b>
<b>2.9. Bibliographie.....</b>	<b>43</b>

### Chapitre 3

#### **Extension de la transformation de Park aux moteurs synchrones à distribution de champs non sinusoïdaux**

##### **Introduction**

<b>3.1 Application de la transformation de Park aux machines à distribution de flux non sinusoïdale.....</b>	<b>44</b>
--	-----------

<b>3.2</b>	<b>Extension de Park pour les machines à entrefer constant</b> .....	47
3.2.1	Propriété de la TP.....	47
3.2.2	Repère de Park étendu.....	47
3.2.3	Dénormalisation de la TP.....	49
<b>3.3</b>	<b>Analogies avec les techniques de linéarisation par retour d'état</b> .....	50
3.3.1	Cas des machines à entrefer constant.....	50
3.3.2	Cas des machines à entrefer variable.....	52
<b>3.4</b>	<b>Interprétation de la transformation de Park à partir des courbes isocouples</b> .....	53
3.4.1	Cas d'un entrefer constant.....	53
<b>3.5</b>	<b>Mise en œuvre de la commande vectorielle étendue</b> .....	54
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b> .....	56
<b>3.7</b>	<b>Exercice d'application</b> .....	56
<b>3.8</b>	<b>Bibliographie</b> .....	57

#### Chapitre 4

### **Modélisation de l'association convertisseurs-machines**

#### **Introduction**

<b>4.1</b>	<b>Rappels sur le fonctionnement d'un onduleur triphasé de tension</b> .....	58
4.1.1	Structure de l'onduleur et notations.....	58
4.1.2	Modèle idéalisé du fonctionnement.....	59
4.1.3	Valeurs accessibles des tensions.....	60
4.1.4	Schéma fonctionnel de l'onduleur.....	61
<b>4.2</b>	<b>Les différents types de commande MLI</b> .....	62
4.2.1	Commande avec calage à gauche.....	62
4.2.2	Commande avec calage à droite.....	62
4.2.3	Commande "Centrée".....	63
<b>4.3</b>	<b>Modélisation vectorielle de la commande MLI</b> .....	63
4.3.1	Principe de la MLI vectorielle.....	63
4.3.2	Représentation dans le plan de Concordia.....	63
<b>4.4</b>	<b>Commande vectorielle classique</b> .....	67
<b>4.5</b>	<b>Commande Sinus-triangle</b> .....	68
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b> .....	69
<b>4.7</b>	<b>Exercice d'application</b> .....	69
<b>4.8</b>	<b>Bibliographie</b> .....	70

## Chapitre 5

### **Modélisation dynamique des machines asynchrones**

#### **Introduction**

<b>5.1 Modélisation d'une machine asynchrone diphasée</b> .....	71
5.1.1 Mise en équation d'un stator diphasé.....	71
5.1.2 Stator et rotor diphasés.....	72
5.1.2.1 Mise en équations dans des systèmes d'axes liés aux armatures.....	72
5.1.2.2 Mise en équations dans un système d'axes.....	73
5.1.2.3 Expression du couple électromagnétique.....	75
5.1.2.4 Machine symétrique diphasée-diphasée en régime permanent sinusoïdal.....	75
<b>5.2 Modélisation d'une machine asynchrone triphasée</b> .....	77
5.2.1 Modélisation d'un stator triphasé.....	77
5.2.2 Machine triphasée- triphasée.....	79
5.2.3 Transformation machine triphasée- triphasée en machine diphasée.....	81
5.2.4 Equations de Park.....	84
5.2.5 Représentation complexe.....	90
<b>5.3 Propriétés dynamiques de la machine asynchrone</b> .....	91
5.3.1 Pôles et zéro des fonctions de transfert en alimentation en tension.....	91
5.3.1.1 Fonctionnement à vitesse constante.....	92
<b>5.4 Modèles dynamiques liés aux commandes</b> .....	95
5.4.1 Contrôle scalaire.....	96
5.4.2 Contrôle vectoriel à flux orienté.....	96
5.4.2.1 Principe de la méthode.....	96
5.4.2.2 Choix de référentiel.....	97
5.4.3 Contrôle direct du couple.....	100
5.4.3.1 Principe.....	100
5.4.3.2 Formulation mathématique.....	100
5.4.3.3 Avantages et inconvénients.....	102
<b>5.5 Conclusion</b> .....	103
<b>5.6 Exercice d'application</b> .....	103
<b>5.7 Bibliographie</b> .....	104

## Chapitre 6

### **Modélisation statique des machines asynchrones en vue de leurs commandes scalaires**

#### **Introduction**

<b>6.1 Modélisation en régime permanent sinusoïdal</b> .....	105
<b>6.2 Modèle aux fuites magnétiques totalisées au stator</b> .....	106

6.2.1	Expressions des grandeurs électriques en fonction du flux rotorique.....	106
6.2.2	Expressions du couple électromagnétique.....	108
6.2.3	Schéma électrique équivalent.....	109
<b>6.3</b>	<b>Modèle aux fuites magnétiques totalisées au rotor.....</b>	<b>112</b>
6.3.1	Expressions des grandeurs électriques en fonction du flux statorique.....	112
6.3.2	Expressions du couple électromagnétique.....	113
6.3.3	Schéma électrique équivalent.....	114
<b>6.4</b>	<b>Commande scalaire en couple.....</b>	<b>115</b>
6.4.1	Objectifs et principes des lois de commandes scalaires.....	116
6.4.2	Commande scalaire en tension " loi $V/f=$ constante".....	117
6.4.3	Commande scalaire en courant, flux utile rotorique.....	118
<b>6.5</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>119</b>
<b>6.6</b>	<b>Exercice d'application.....</b>	<b>119</b>
<b>6.7</b>	<b>Bibliographie.....</b>	<b>120</b>

### Chapitre 7

#### **Extension de la transformation de Park aux machines asynchrones en régime saturé**

##### **Introduction**

<b>7.1</b>	<b>Inductances en régime saturé.....</b>	<b>121</b>
7.1.1	Définition.....	121
7.1.2	Condition de calcul par éléments finis.....	122
<b>7.2</b>	<b>Influence de la saturation sur les inductances d'une MAS.....</b>	<b>123</b>
7.2.1	Analyse par la méthode des éléments finis.....	123
7.2.2	Analyse par l'approche analytique.....	124
<b>7.3</b>	<b>Modèle de Park étendu.....</b>	<b>127</b>
7.3.1	Simplification de l'expression des flux.....	127
7.3.2	Méthode de calcul des inductances.....	128
7.3.3	Modèle d'état en flux.....	128
<b>7.4</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>129</b>
<b>7.5</b>	<b>Bibliographie.....</b>	<b>129</b>

## Listes des Symboles et Abréviations

MCC	Machine à Courant Continu
GIC	Graph Informationnel Causal
TP	Transformation de Park
MAS	Machine asynchrone
MLI	Modélation de Largeur d'Implusion..
PI	Proportionnel Intégral
CVI	Commande Vectorielle Indirecte
$d, q$	Indices pour les composantes de Park directe et quadrature,
$ref$	Signe de valeur de référence
$\Omega$	Vitesse de rotation mécanique du rotor [rd/s]
$\omega$	Vitesse de rotation électrique du rotor ( $\omega = p\Omega$ ) [rd/s]
$s$	Opérateur de Laplace.
$L_d$	Inductance propre cyclique rotorique [H]
$L_q$	Inductance propre cyclique statorique [H]
$R_s$	Résistance statorique [ $\Omega$ ]
$C_e$	Couple électromagnétique [Nm]
$C_r$	Couple mécanique résistant (couple de charge) [Nm]
$f$	Coefficient de frottement visqueux [SI] où [Nm.s/rad]
$J$	Moment d'inertie de l'entraînement [kg.m <sup>2</sup> ]
$p$	Nombre de paire de pôles
$Y$	Vecteur d'observation
$\sigma$	Coefficient de dispersion Totale.
$T_r$	Constante de temps rotorique.
$L_m$	Inductance cyclique mutuelle stator-rotor.
$e_{sd}$	Le terme de couplage à compenser sur l'axe d.
$e_{sq}$	Le terme de couplage à compenser sur l'axe q.
❖	D'autres symboles et abréviations spécifiques peuvent être définis dans les chapitres, s'il y a lieu.

## **Introduction Générale**

**1.1 CONTEXTE**

**1.2 STRUCTURE DE COURS**

## Introduction Générale

### 1.1 Contexte ; [1], [2]:

Actuellement, les moteurs électriques sont utilisés dans de nombreux domaines, notamment : l'industrie (la part des moteurs représente 70% de la consommation en électricité), l'électroménager (machines à laver, climatiseur,...), les voitures (démarreur, alternateur, traction,...) et les avions (presque 200 moteurs/avion).

L'intérêt grandissant envers les moteurs électriques est justifié par le besoin des processus industriels à la vitesse variable. Cette solution permet, en effet, de contrôler un processus ou un système avec une dépense minimale d'énergie et de matière première.

Le succès des solutions électriques pour la variation de vitesse par rapport aux solutions mécaniques et hydrauliques vient des caractéristiques incomparables que leur confère l'électronique, tant sur le plan de la conversion d'énergie que celui de l'asservissement de vitesse. L'essor que connaît actuellement le développement des composants de l'électronique de puissance et les techniques de commande a accentué l'intérêt pour les variateurs par moteurs électriques.

### 1.2 Structure du cours

Le cours est organisée comme suit:

#### **Chapitre 1 : Propriétés dynamiques de la machine à courant continu**

Ce chapitre est consacré au contexte de l'étude et plus particulièrement aux modèles directs et inverses et le modèle causal de la machine à courant continu.

#### **Chapitre 2 : Modèles dynamiques des machines synchrones**

A travers ce chapitre, des généralités sur les structures et les modèles d'une MS ont été abordés. Par la suite on a présenté la Transformation de Concordia et le modèle diphasé équivalent, la Transformation de Park avec les équations de Park des machines synchrones. Par ailleurs, on s'est intéressé particulièrement à l'analyse des modèles en régime stationnaire. Enfin, des modèles en vue de la commande ont été établi.

### **Chapitre 3 : Extension de la transformation de Park aux moteurs synchrones à distribution de champs non sinusoïdaux**

Ce chapitre est dédié à l'application de la transformation de Park aux machines à distribution de flux non sinusoïdale. Ensuite, l'extension de Park pour les machines à entrefer constant. une étude a été menée pour démontrer l'analogies avec les techniques de linéarisation par retour d'état. Puis, une interprétation de la transformation de Park à partir des courbes isocouples a été présenté. On terminera par la mise en œuvre de la commande vectorielle étendue.

### **Chapitre 4 : Modélisation de l'association convertisseurs-machines**

Dans ce chapitre en premier lieu, des rappels sur le fonctionnement d'un onduleur triphasé de tension et les différents types de commande MLI sont donnés. En deuxième lieu, la modélisation vectorielle de la commande MLI est présentée. Enfin, la commande vectorielle classique et la commande sinus-triangle ont été exposées.

### **Chapitre 5 : Modélisation dynamique des machines asynchrones**

Le chapitre 5 est consacré à la modélisation d'une machine asynchrone diphasée et triphasé. Ensuite, on s'est intéressé également, au propriétés dynamiques de la machine asynchrone diagnostic des défauts des semi conducteurs dans l'onduleur de tension. La fin de ce chapitre est dédiée au modèles dynamiques liés aux commandes.

### **Chapitre 6 : Modélisation statique des machines asynchrones en vue de leurs commandes scalaires.**

Le chapitre 6 est consacré à la modélisation en régime permanent sinusoïdal. Ensuite, les deux modèles aux fuites magnétiques totalisées au stator et aux rotor ont été abordés. La fin de ce chapitre est dédiée à la commande scalaire en couple.

### **Chapitre 7 :Extension de la transformation de Park aux machines asynchrones en régime saturé.**

Le chapitre 7 est dédié à l'étude des inductances en régime saturé et l'influence de la saturation sur ces inductances. Enfin, on présente le modèle de Park étendu.

# Chapitre 1

---

## Propriétés dynamiques de la machine à courant continu

**Prérequis** : Connaissances préalable de la MCC

**Objectif** : A l'issu de ce chapitre l'étudiant sera capable de:

- ✓ Connaitre le modèle direct et inverse de la machine à courant continu
- ✓ Comprendre le comportement global de la machine à courant continu
- ✓ Savoir utiliser la représentation du modèle causal de la machine (GIC)

*" En toute chose, il n'y a qu'une manière de commencer, quand on veut discuter convenablement : il faut bien comprendre l'objet de la discussion "*

## Introduction:

Soyons plus précis : un "bon" modèle de commande sera une réécriture "adéquate" des modèles physiques et l'expertise du concepteur jouera un grand rôle" qui permettra de calculer les commande.

Dans cette démarche, l'actionneur à courant continu est l'actionneur de référence, c'est avec lui qu'on peut le mieux introduire les lecteurs aux concepts fondamentaux comme ***les relations causales et rigides***, qui peut formaliser systématiquement ***le graph informationnel causal (GIC)***.

cette approche permet d'annoncer un ***principe d'inversion***, qui débouche sur une définition systématique du ***modèle inverse*** qui contient tout à la fois des lois de commande par régulation et par compensation ou par anticipation.

### 1.1. Modèles directs et inverses [1],[2], [3]:

#### 1.1.1. A propos de la modélisation

##### 1.1.1.1. De l'observation à la connaissance:

Parmi les grands règles définissant l'esprit scientifique, on retiendra au premier abord l'observation, indispensable à l'analyse préalable, puis les lois universelles de la physiques. ces concepts appliqués à la machine à courant continu. d'après la figure 1.1, en imposant des tensions continues aux bornes d'alimentation de la machine, nous observons que le rotor tourne.

nous découvrons ainsi la causalité globale de ce processus, il apparait clairement que les tensions appliqués à l'inducteur et à l'induit sont porteuse d'une information à l'égard de la vitesse de l'arbre.

Ce discours primaire s'interprète par le graph informationnel causal (GIC), celui-ci exprime que la grandeurs de sortie (soit la vitesse  $\Omega$ ) se trouve influencée par deux grandeurs d'entrée influentes ( $\mathbf{U}_a$  ,  $\mathbf{U}_e$  : tension d'induit et tension d'inducteur).

Donc, si le rotor tourne, c'est qu'il est soumis à un couple d'entraînement, ce qui implique que un découpage du traitement informationnel est induit comme l'illustre la figure 1.2. Cette décomposition met en évidence que le couple  $C_{em}$  qui est l'effet résultant de la conjugaison des tensions appliqués à l'entrée de la machine, ainsi la connaissance des lois de la physique est une tâche à priori pour la phase de la modélisation.

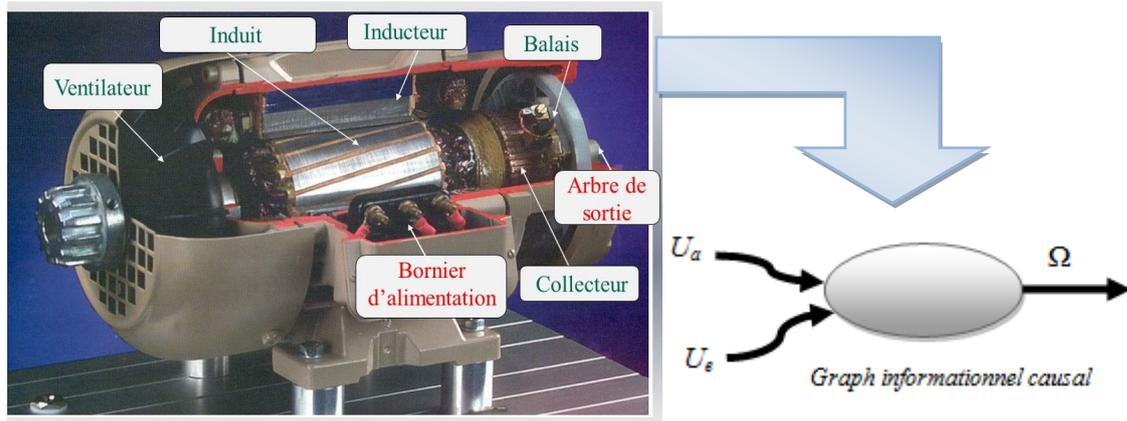


Figure 1.1. Causalité globale d'un fonctionnement en moteur

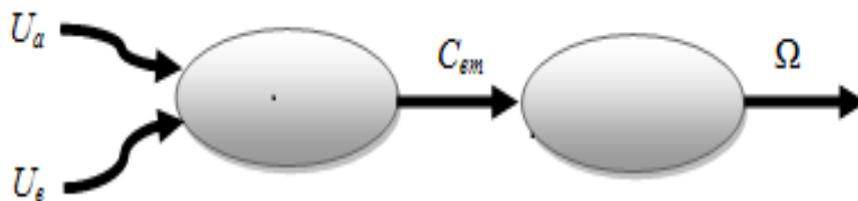


Figure 1.2. Séparation du traitement mécanique

**1.1.1.2. Du rôle de l'expertise :**

Une étape naissante dans la démarche d'analyse qui prend en compte le travail des forces d'ampère: le couple électromagnétique résulte de l'interaction entre le flux ( $\phi_e$ ) de l'inducteur et le courant ( $I_a$ ) circulant dans l'induit. ainsi que le GIC s'enrichit de nouveau, comme le montre la figure 1.3:

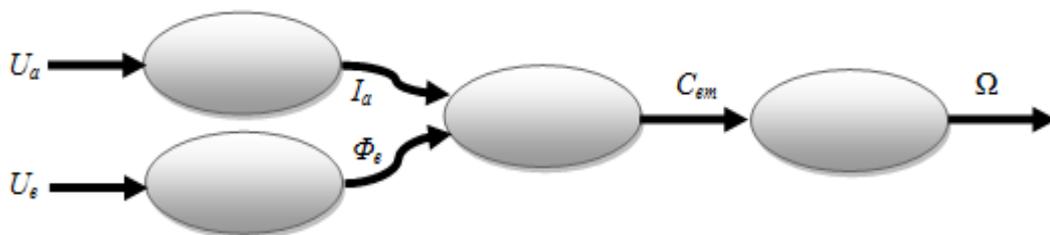


Figure 1.3. Enrichissement du GIC

Physiquement, il apparait que les conducteurs de l'induit tournant sont balayés par le flux fixe de l'inducteur.

- **Selon la loi de faraday**, ces conducteurs sont alors le siège d'une force électromotrice (f.é.m.) proportionnelle à la vitesse et au flux de l'inducteur.

➤ **Selon la loi de Lenz**, cette f.é.m. ( $E$ ) s'oppose à la cause qui lui donne naissance, comme la cause de la rotation est initialement la tension appliquée à l'induit, la loi des mailles impose donc que le courant ( $I_a$ ) est une fonction de la vitesse ( $\Omega$ ) et le flux ( $\phi_e$ ). Comme l'illustre la figure 1.4:

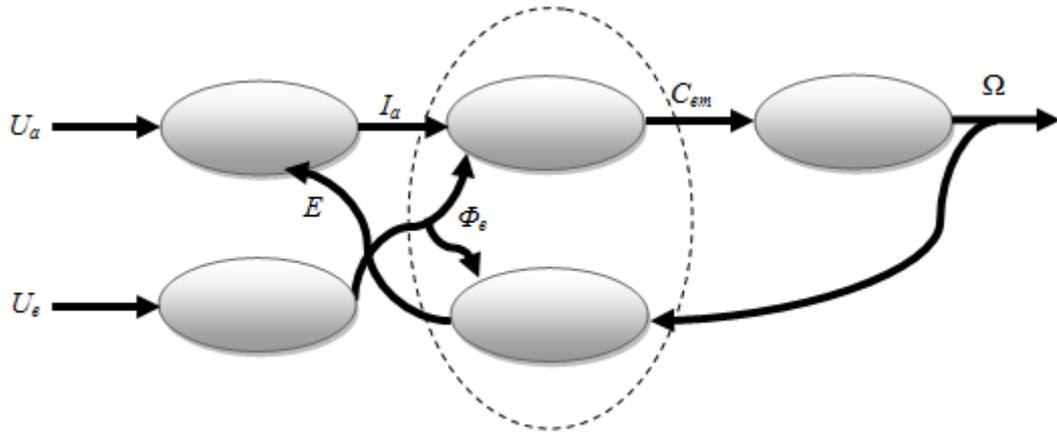


Figure 1.4. Apparition du couplage électromécanique.

Concernant la réversibilité énergétique naturelle de la machine, en pratique et à condition que l'inducteur soit alimenté, on constate que de tourner l'arbre du rotor, une tension au borne de l'induit apparaît: c'est le fonctionnement générateur. faire tourner le rotor exige un couple de charge ( $C_r$ ) dont résultera alors une vitesse. La figure 1.5 montre que la causalité pris séparément est inchangée.

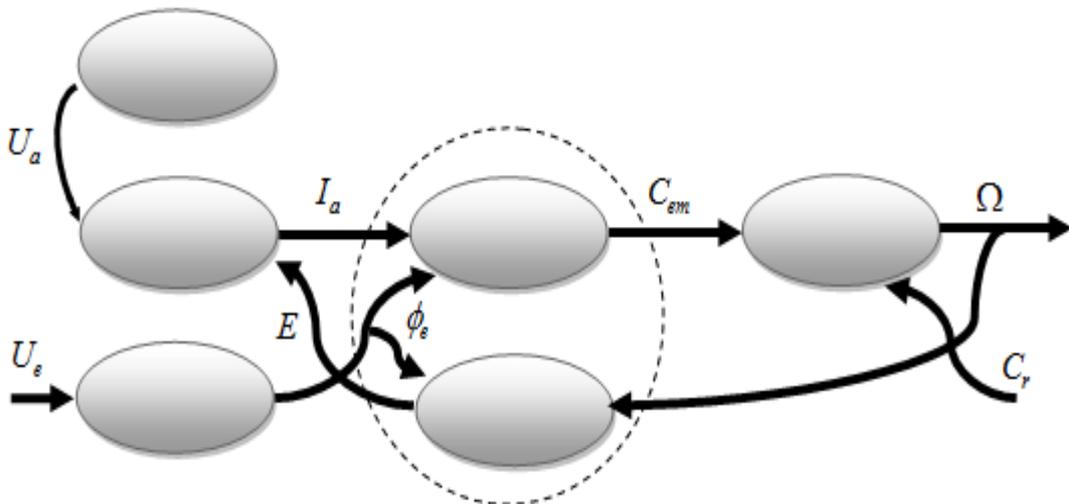


Figure 1.5. Le GIC sur le fonctionnement en générateur

## 1.2. Modèle causal de la machine à courant continu

### 1.2.1. Les relations de transformation:

Dans le cas générale pour simplifier la présentation, nous nous retiendrons que deux relations complémentaires à la causalité intégrale:

- Si **un objet accumule de l'information, la causalité est interne**: la sortie est nécessairement une fonction de l'état énergétique de l'objet, la relation alors orientée est **dite causale** (figure 1.6.a). le temps et l'état initial sont des entrées implicites non représentées (bobine, condensateur, ...etc.).
- Si **un objet n'accumule pas d'information, la causalité est externe**: la sortie est uniquement fonction instantanée de l'entrée, la relation alors n'est pas orientée est **dite rigide** (figure 1.6.b). le temps et l'état initial sont des entrées implicites non représentées (résistance, frottement,..).

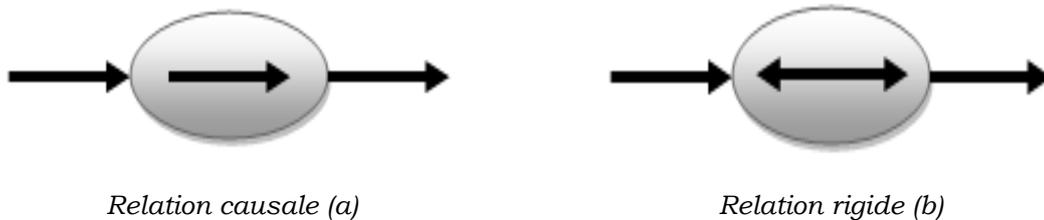


Figure 1.6. Symbolisme des GIC

Dans certains situations, on fait appel à des opérateurs mathématiques. ces derniers sont nécessairement des éléments neutres au sens énergétique. ainsi, **la somme et le produit algébrique sont des opérateurs neutres, rigides puisque la fonction est instantanée** (figure 1.7a).

Par contre, l'intégration est fonction à causalité interne: si l'on considérait la position angulaire  $\theta$  de l'arbre du rotor de la MCC, il ne correspondrait à aucune énergie accumulée (figure 1.7.b).

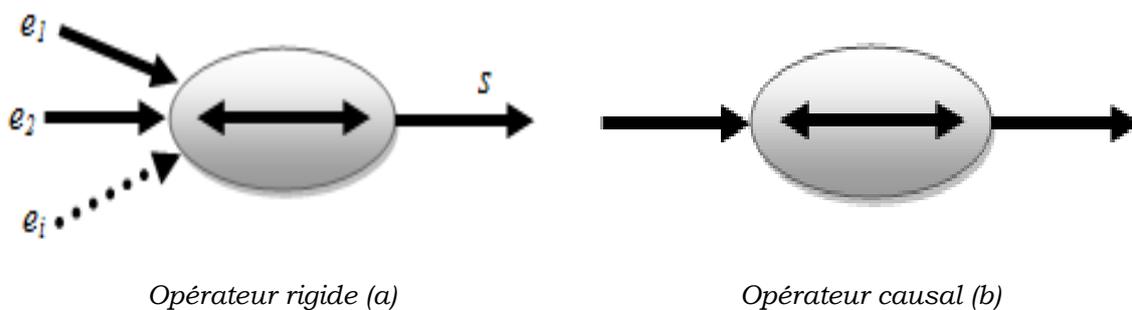


Figure 1.7. Constituants mathématiques

## 1.2.2. Application à la machine à courant continu

### 1.2.2.1. Quantification des relations:

Une étude sur le couple électromagnétique et la force électromotrice débouche sur la conversion électromagnétique de la puissance [4]. elle s'exprime par:

$$E \cdot I_a = C_{em} \cdot \Omega \text{ avec } E = k \cdot \Omega, C_{em} = k \cdot I_a \quad (1.1)$$

Le paramètre caractéristique  $k$  de la machine représente à la fois la constante de couple et de la f.é.m. il est proportionnel au flux de l'inducteur, c'est à dire au courant circulant dans son enroulement si celui-ci est bobiné.

Logiquement, le bobinage d'induit sera le siège d'une chute de tension Ohmique et des variations de flux propre, de telle sorte qu'il apparait comme un accumulateur d'énergie électromagnétique. On établit alors:

$$L_a \frac{dI_a}{dt} = U_{L_a} \text{ avec } U_{L_a} = U_a - U_{R_a} - E, U_{R_a} = R_a \cdot I_a \quad (1.2)$$

**Tel que :**

$L_a$  : Inductance de l'enroulement et  $R_a$  : Résistance de l'enroulement

De la même façon, l'arbre et le siège de frottements et de variation de moment cinétique, il vient:

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_a \text{ avec } C_a = C_{em} - C_r - C_f, C_f = f \cdot \Omega \quad (1.3)$$

**Sachant que:**

$f$  : Coefficient de frottement visqueux et  $J$  : Coefficient d'inertie.

### 1.2.2.2. Etablissement du modèle de la MCC:

La figure 1.8 illustre le modèle de la MCC sous la forme d'un GIC détaillé auquel est associé le tableau explicite des diverses relations du modèle.

Le tableau 1.1 donné ci-dessous donne la nature de chaque relation et son expression afin de faciliter la transcription directe en modèle de simulation.

### 1.2.2.3. Simplification du modèle de la MCC:

Les grandeurs influentes d'un processeur peuvent être des fonctions de sa propre sortie; par exemple la chute de couple ( $C_f$ ) dépend de la vitesse ( $\Omega$ ).

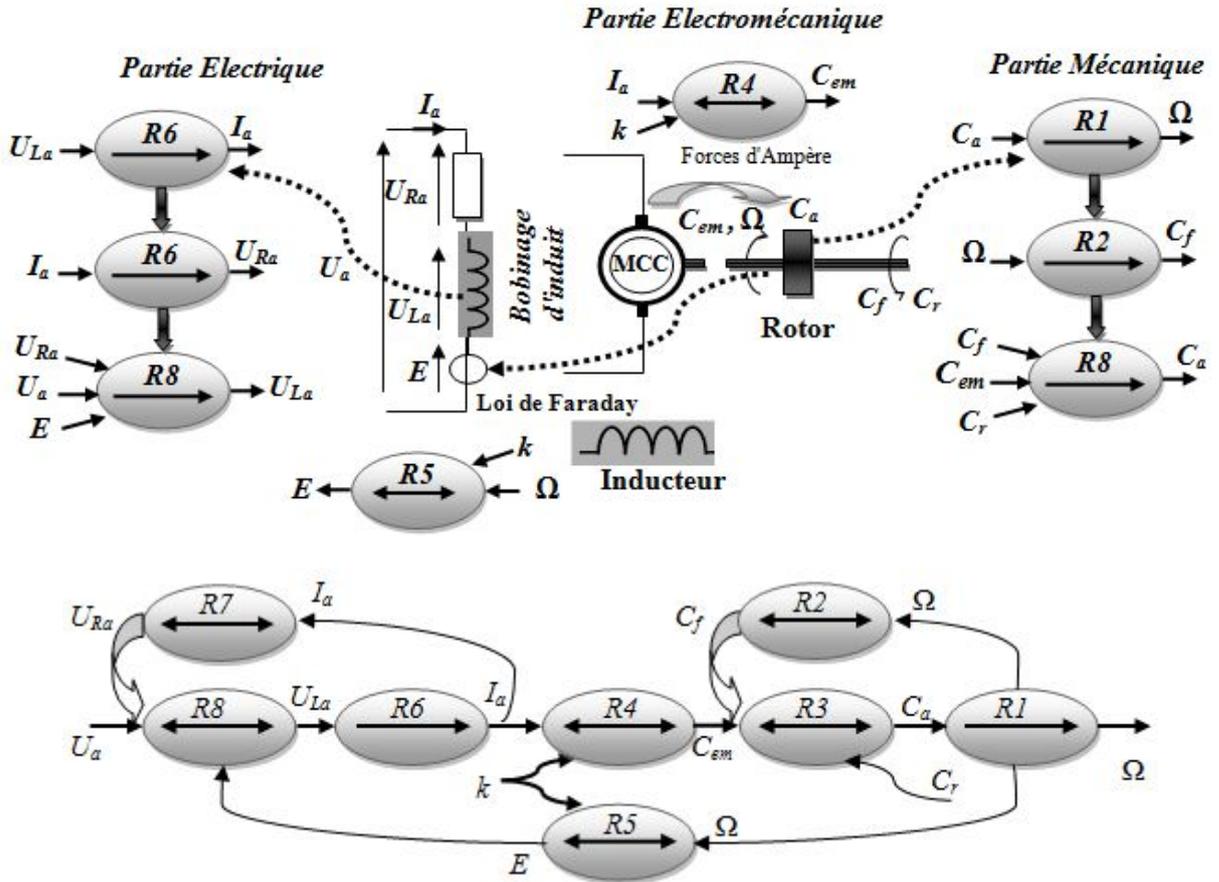


Figure 1.8. Construction du modèle GIC de la MCC

Tableau 1.1		
Nature de relation	Repère	Expression
Inertie	R1	$J \frac{d\Omega}{dt} = C_a$
Frottement	R2	$C_f = f \cdot \Omega$
Opérateur (neutre)	R3	$C_a = C_{em} - C_r - C_f$
Couplage (neutre)	R4 R5	$C_{em} = k \cdot I_a$ $E = k \cdot \Omega$
Bobine (accumulateur électromagnétique)	R6	$L_a \frac{dI_a}{dt} = U_{La}$
Résistance (dissipateur)	R7	$U_{Ra} = R_a \cdot I_a$
Opérateur (neutre)	R8	$U_{La} = U_a - U_{Ra} - E$

Dans l'expression (1.3), pour obtenir un processeur du premier ordre, il faut qu'on passe ( $C_f$ ) dans le premier membre:

$$R1 \rightarrow J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega = C_{af}, \quad R2 \rightarrow C_{af} = C_{em} - C_r \quad (1.4)$$

De manière analogue, l'expression (1.2) simplifié est:

$$R5 \rightarrow L_a \frac{dI_a}{dt} + R_a I_a = U_{RL,a}, \quad R6 \rightarrow U_{RL,a} = U_a - E \quad (1.5)$$

En notant:

$$R3 \rightarrow C_{em} = k \cdot I_a, \quad R4 \rightarrow E = k \cdot \Omega \quad (1.6)$$

Après ces simplification, le nouveau modèle GIC de la MCC est illustré sur la figure 1.9:

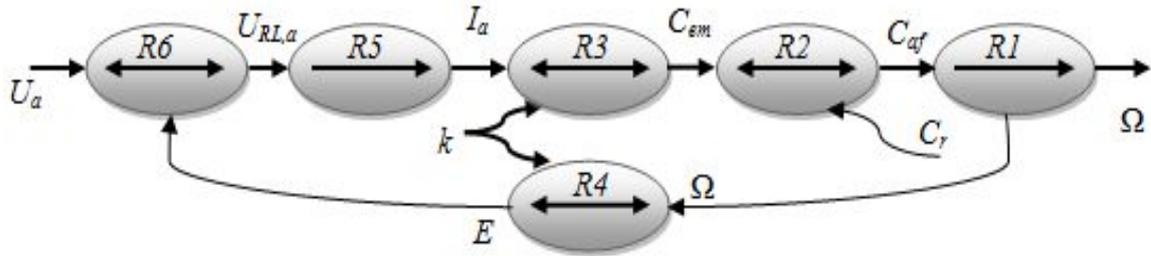


Figure 1.9. Construction du modèle GIC simplifié de la MCC

**1.2.3. A propos de la commande d'un processus [4],[5],[6]:**

Pour la conception de la commande d'un processus, on applique le principe d'inversion causale: "Commander un processus c'est lui imposer la trajectoire désirée. Cette trajectoire est l'effet d'une cause de sorte qu'il suffit alors de créer la bonne cause pour avoir le bon effet". celui-ci modélise la commande qu'il faut ensuite matérialiser. La figure 1.10 illustre la démarche globale montrant ainsi l'importance de la qualité de la modélisation.

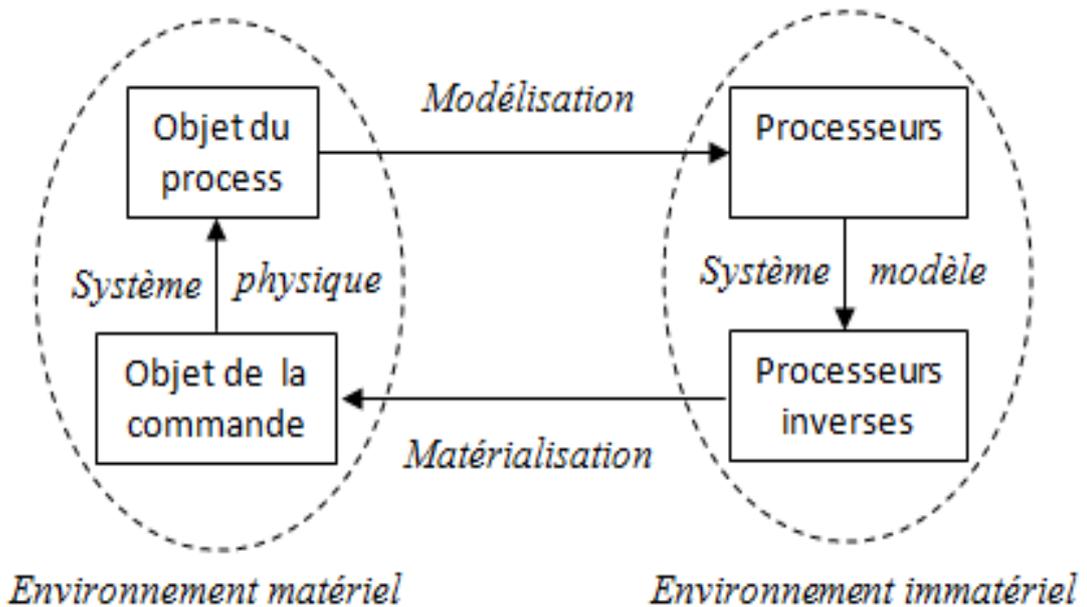


Figure 1.10. Méthodologie globale de définition de la commande.

**1.2.3.1. Principe d'inversion:**

L'inversion de la relation associée à un processeur détermine une relation de commande elle-même associée à un autre processeur. les modèles du processus étant formés de processeurs à relations causales et rigides, il en découle deux solutions d'inversions.

**a. Relation rigide:**

Une relation rigide bijective détermine une loi de commande par inversion directe. La figure 1.11a illustre ce premier principe qui conduit à déterminer la grandeur de réglage  $u_{REG}$  à partir de la trajectoire de référence  $y_{ref}$  souhaitée pour  $y$ . Il vient:

$$R \rightarrow y = f(u) : R_c \rightarrow u_{REG} = c(y_{ref}) \tag{1.7}$$

Si  $C = f^{-1}$  et  $u = u_{REG}$  alors  $y \rightarrow y_{ref}$

**b. Relation causale:**

Dans une relation causale, le temps intervient implicitement de sorte que l'effet d'accumulation induit systématiquement une valeur initiale. Dans ces conditions, la grandeur de réglage  $u_{REG}$  est élaborée en prenant en compte, à tout instant, la situation de  $y$  par rapport à sa référence  $y_{ref}$ . Ce second principe illustré à la figure 1.11b est celui de l'asservissement qui, visant à minimiser l'écart  $e = y_{ref} - y$ , détermine une loi de commande par inversion indirecte. Il vient :

$$R \rightarrow y = f(u, t) : R_c \rightarrow u_{REG} = c(y_{ref} - y) \tag{1.8}$$

Si  $C \rightarrow \infty$  et  $u = u_{REG}$  alors  $y \rightarrow y_{ref}$

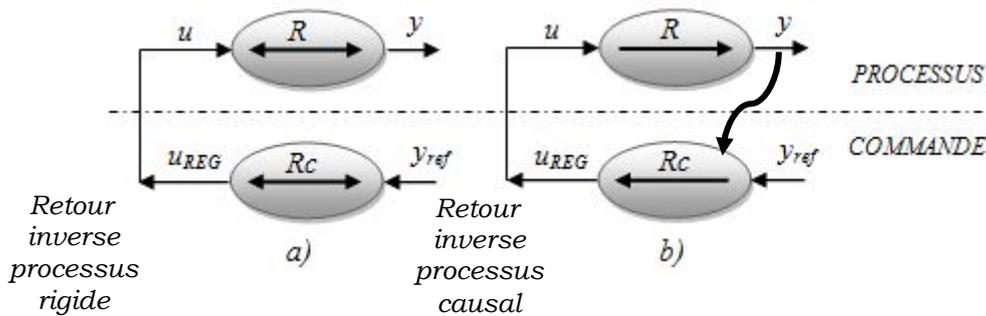


Figure 1.11 Modèle inverse pour un processus rigide ou causal

Pour illustrer cette démarche on suppose qu'on doit élaborer la commande du processus présenté à la Figure 1.12. Ce type de processus est très souvent rencontré dans le domaine de la commande des machines électriques (exemple: la partie électrique d'une machine à courant continu ou une charge mécanique avec réducteur).

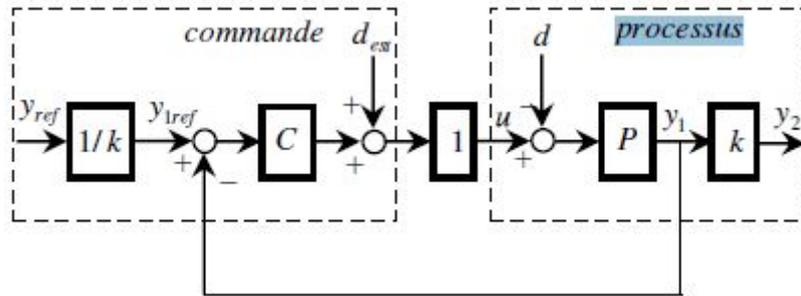


Figure 1.12 illustration du principe d'inversion

Pour respecter le principe d'inversion, toute perturbation ( $d$ ) doit être compensée soit par mesure directe, soit par une estimation ( $d_{est}$ ). Pour trouver la commande d'une action causale ( $P$ ) on se sert d'un asservissement, donc d'un correcteur  $C$ . Une action rigide, symbolisée par le gain ( $k$ ), a son inverse ( $1/k$ ) dans la partie commande.

On suppose un capteur idéal ainsi que le convertisseur de puissance de coefficient unitaire. Le graphe informationnel causal (GIC) est un formalisme très approprié pour illustrer cette approche. Pour cette raison on le présente en parallèle avec le schéma fonctionnel suivant (figure 1.13):

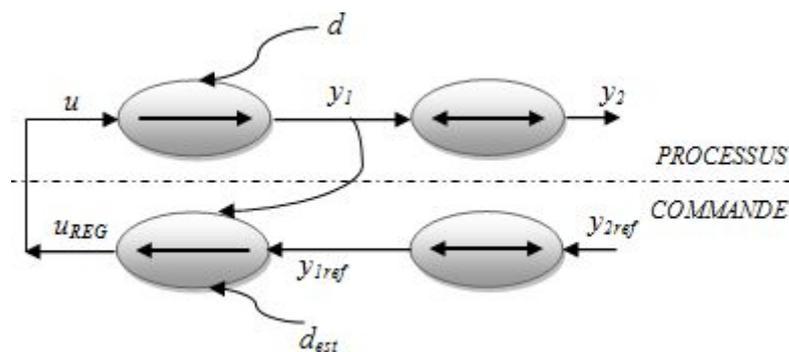


Figure 1.13. Exemple du principe d'inversion par le GIC

### 1.2.3.2. Définition du modèle de commande de la MCC

#### 1.2.3.2.1. Elaboration de la commande

Pour trouver la commande il suffit d'inverser la causalité: "de trouver la bonne cause pour produire le bon effet" (principe de l'inversion de la

causalité). Une relation rigide est directement inversée, et une relation causale est indirectement inversée au travers d'un asservissement.

### 1.2.3.2.2. Construction du modèle

Le modèle GIC de la commande s'explique, dans le cas générale, comme un algorithme non linéaire. la figure 1.14 en donne l'application à la MCC lorsque la grandeur asservie est la vitesse ( $\Omega$ ), et la grandeur de réglage est la tension ( $U_a$ ), appliqué à l'induit. donc on a:

**Rx $\Omega$  et Rxi:** Correspondent aux caractéristiques dynamiques des capteurs.

**Ram:** Interface entre commande et machine (convertisseur statique et sa commande).

**Rc1:** Relation d'asservissement déterminant le couple de réglage.

**Rc2:** Opérateur de compensation du couple de charge.

**Rc3:** Inversion directe définissant le courant de référence (Introduire une limitation du courant).

**Rc5:** Relation d'asservissement déterminant la tension de réglage.

**Rc6:** Opérateur de compensation de la f.é.m.

**Ro4:** Estimation de la f.é.m. qui apparaît comme une perturbation interne.

### 1.2.3.2.3. Utilisation du modèle

On y retrouve les deux boucles en cascade classiques; l'une pour le courant, l'autre pour la vitesse. les fonctions de correction peuvent être déterminées globalement (placement de pôles,...etc.) et séparément en commençant par la boucle interne de courant.

Le tableau 1.2 donné ci-dessous donne les relations de la commande déduites de celle du processus.

### 1.2.3.3. Réglage de la boucle de courant

Il faut prendre en compte les limitations technologiques de la MCC (voir figure 1.15a;

- Le point de fonctionnement de la puissance est limité par la courbe en traits gras du plan couple-vitesse. D'une façon similaire, le courant doit être limité à une valeur fonction de la vitesse dans le plan de la puissance électrique.

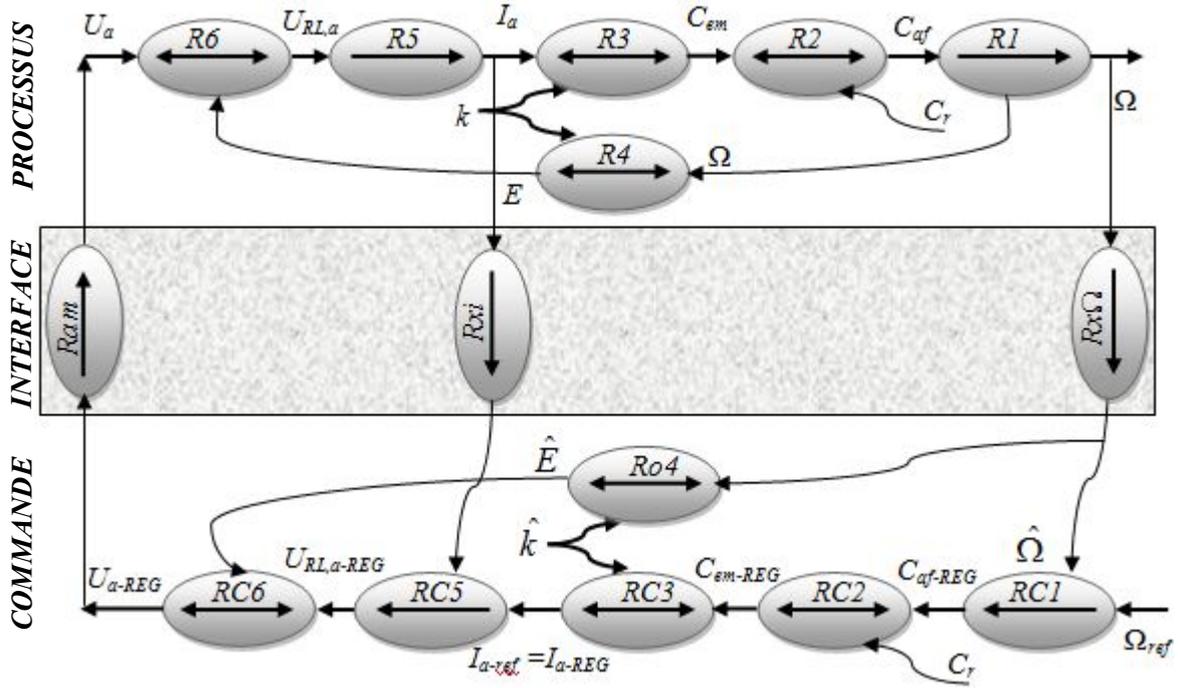


Figure 1.14. Modèle GIC de l'asservissement en vitesse de la machine à courant continu

Tableau 1.2	
Processus	Commande
$R1 \rightarrow J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega = C_{af}$	$RC1 \rightarrow C_{af-REG} = C_{\Omega} (\Omega_{ref} - \Omega)$
$R2 \rightarrow C_{af} = C_{em} - C_r$	$RC2 \rightarrow C_{em-REG} = C_{af-REG} + C_{rest}$
$R3 \rightarrow C_{em} = k \cdot I_a$	$RC3 \rightarrow I_{a-REG} = \frac{1}{k_{est}} \cdot C_{em-REG}$
$R4 \rightarrow E = k \cdot \Omega$	$RC4 \rightarrow E_{est} = k_{est} \cdot \Omega$
$R5 \rightarrow L_a \frac{dI_a}{dt} + R_a I_a = U_{RL,a}$	$RC5 \rightarrow U_{RL,a-REG} = C_i (I_{a-REG} - I_a)$ $I_{a-REG} = I_{a-ref}$
$R6 \rightarrow U_{RL,a} = U_a - E$	$RC6 \rightarrow U_{a-REG} = U_{RL,a-REG} - E_{est}$

Pour un courant maximale, on admet l'hypothèse que l'erreur entre les deux courants est nulle (Rc3 non linéaire figure 1.15b).

La figure 1.16 rappelle la partie relative à la boucle du courant du modèle GIC de la MCC, en plus la fonction ( $C_i$ ) doit être choisie en fonction de critère de performances dynamiques, l'objectif est que le courant réel est une recopie de sa référence.

Afin de prendre en compte les bruits et imperfections des capteurs, on pose:

$$\hat{\Omega} = \Omega + \Delta\Omega \text{ et } \hat{I}_a = I_a + \Delta I_a \quad (1.9)$$

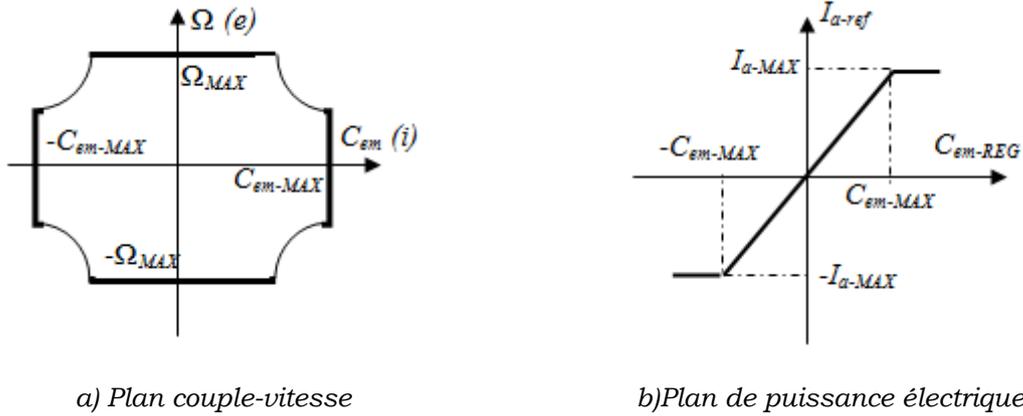


Figure 1.15 Limites de fonctionnement

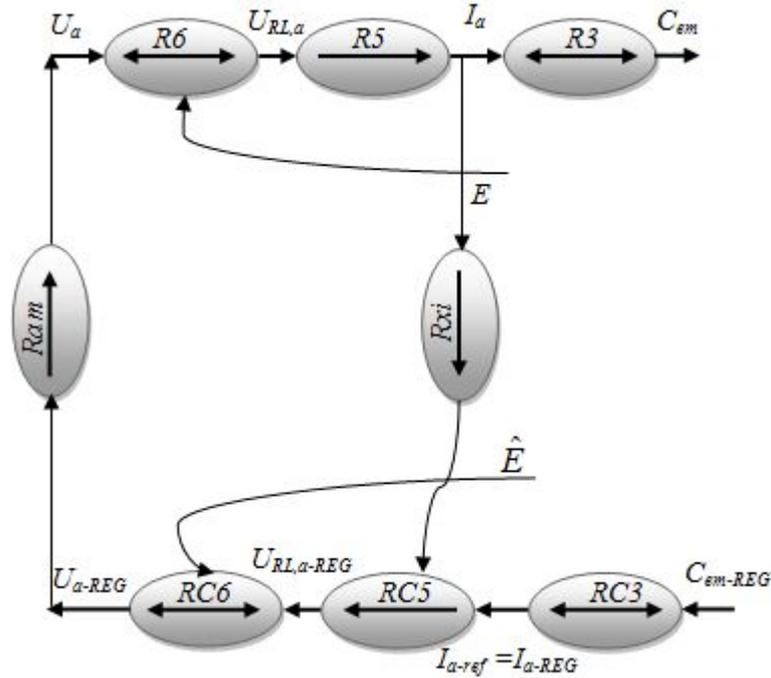


Figure 1.16. Boucle interne du courant

A partir des relations du tableau 1.2, en partant de R5 et en remplaçant  $U_a$  par  $U_{REG}$ , variable d'ajustement déterminée selon les expressions RC5 et RC6, on déduit:

$$L_a \frac{dI_a}{dt} + R_a I_a = C_i (I_{a-ref} - \hat{I}_a) + \hat{k} \hat{\Omega} - k \Omega \quad (1.10)$$

Afin de prendre en compte l'incertitude sur la connaissance du paramètre de couple, on pose:

$$\hat{k} = k + \Delta k \quad (1.11)$$

En introduisant (1.9) et (1.11) dans (1.10), il vient:

$$L_a \frac{dI_a}{dt} + R_a I_a = C_i (I_{aref} - I_a - \Delta I_a) + k \Delta \Omega + \Omega \Delta k + \Delta \Omega \Delta k \quad (1.12)$$

En considérant comme invariante l'incertitude ( $\Delta k$ ) et en négligeant le terme quadratique, on obtient sous forme d'expression opérationnelle:

$$(L_a p + R_a + C_i(p)) = C_i(p) I_{aref}(p) - C_i(p) \Delta I_a(p) + \Delta k \Omega(p) + k \Delta \Omega(p) \quad (1.12)$$

Tel que:  $\mathbf{p}$  représente l'opérateur de Laplace.

On détermine les deux fonctions de transfert en poursuite et en régulation suivantes:

$$F_{prsuit}(p) = \frac{C_i(p)}{C_i(p) + R_a + L_a p} \quad \text{et} \quad F_{reg}(p) = \frac{1}{C_i(p) + R_a + L_a p} \quad (1.13)$$

Egalement:

$$I_a(p) = F_{prsuit}(p)(I_{aref}(p) - \Delta I_a(p)) + F_{reg}(p)(\Delta k \Omega(p) + k \Delta \Omega(p)) \quad (1.14)$$

En l'absence de la f.é.m., on aurait eu:

$$I_a(p) = F_{prsuit}(p)(I_{aref}(p) - \Delta I_a(p)) + F_{reg}(p)\Omega(p) \quad (1.15)$$

### 1.2.3.4. Description par fonction de transfert

La figure 1.17 illustre une Machine à Courant Continu (MCC) commander **en vitesse et en courant à travers un convertisseur de puissance dont la fonction de transfert égale à 1**. ce sont deux exemples d'observation.

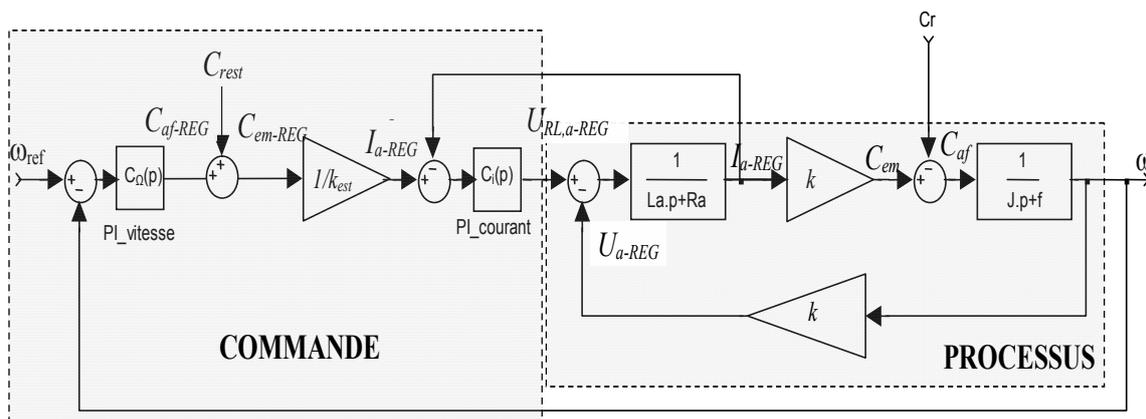


Figure 1.17. Modèle GIC de l'asservissement en vitesse de la machine à courant continu

La Figure 1.18 représente le modèle Simulink du principe d'inversion par le GIC appliquée à la machine à courant continu.

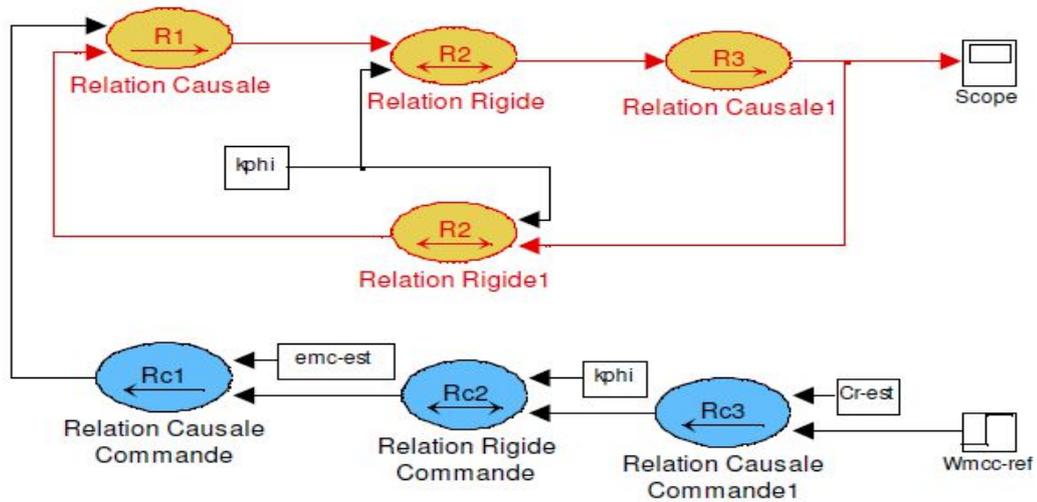


Figure 1.18 Modèle Simulink de la commande d'une machine à courant continu par le GIC

### 1.2.3.5. Résultats de simulation et Interprétation

La fonction de commande est un correcteur à action proportionnelle et intégrale, son réglage choisi selon un compromis par rapport aux bruits. la chute transitoire de vitesse a une amplitude sensiblement réduite grâce à une meilleure dynamique de réponse du courant d'induit. (**Figure 1.19**).

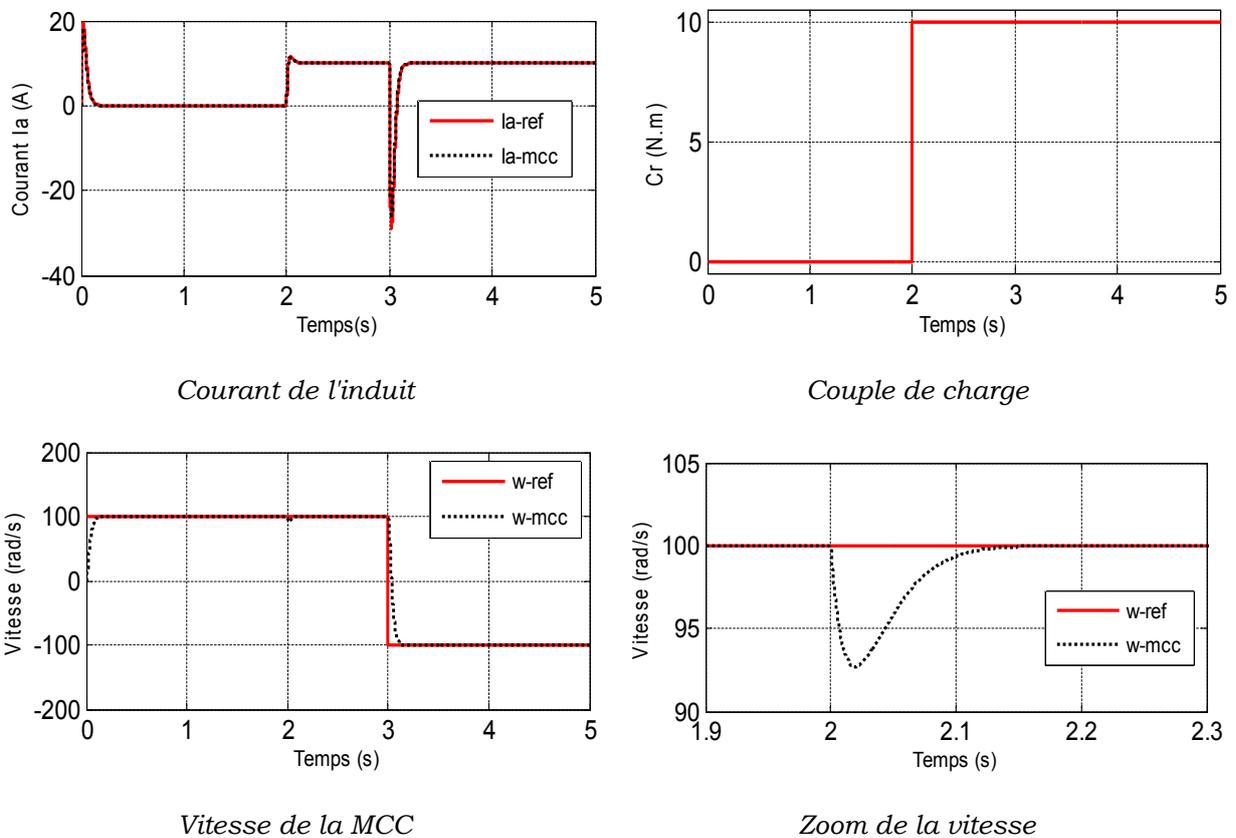
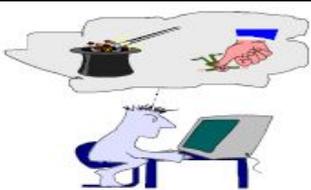


Figure 1.19 Effet de la compensation de charge par la commande

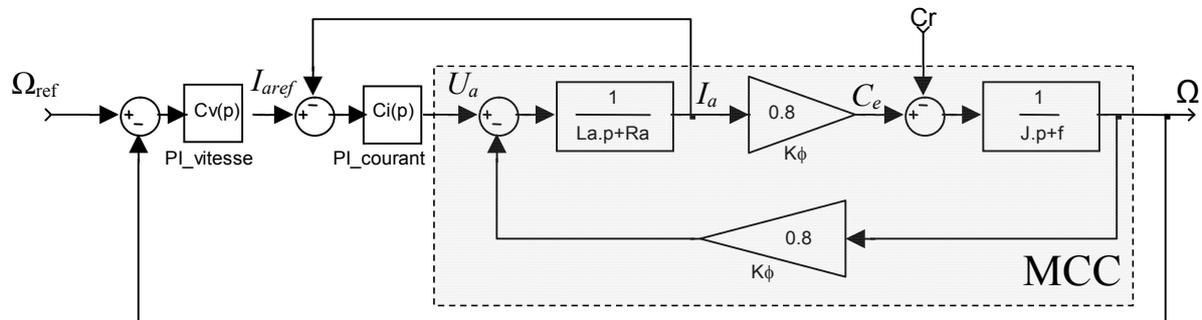
### 1.3. Conclusion

Les lois physiques fondamentales sont une aide incontournable pour la construction du modèle, car leur logique doit mettre en exigence les variables caractéristiques des énergies, de leur réglage, puis à se poser les bonnes questions sur les transformations de puissance qui peuvent successivement intervenir dans le processus considéré.

Pourquoi utiliser le GIC?	
UN PROBLEME BIEN POSE EST DEJA A MOITIE RESOLU UN PETIT DESSIN VAUT MIEUX QU'UN LONG DISCOURS	
Que faut il retenir?	
<div style="background-color: yellow; padding: 2px; font-weight: bold; margin-bottom: 5px;">Deux natures de relation</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  <p>Relation temporelle L'effet est lié à la cause par le temps (accumulation)</p> <p>CAUSE <math>\xrightarrow{\text{temps}}</math> EFFET</p> <p>0</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Relation instantanée L'effet est lié à la cause indépendamment du temps (dissipation)</p> <p>CAUSE EFFET</p> <p>0</p> </div> </div>	
<div style="background-color: yellow; padding: 2px; font-weight: bold; margin-bottom: 5px;">La dérivation n'est pas causale, car non naturelle</div> <p>☹ <del><math>entrée(t) = \frac{dsortie(t)}{dt}</math></del></p>	
Etablissement d'un GIC	
<b>ETAPE 1 :</b> Localiser les sources et les accumulateurs	Déterminer leurs grandeurs influentes et leurs grandeurs influencées
↓	
<b>ETAPE 2 :</b> Localiser les dissipateurs	Déterminer leurs grandeurs influentes à partir des grandeurs de sortie des sources et des accumulateurs
↓	
<b>ETAPE 3 :</b> Localiser les autres objets	Déterminer leurs grandeurs influentes à partir des grandeurs de sortie des sources et des accumulateurs
↓	
<b>ETAPE 4 :</b> Ordonnancer les lois de la physique	Déterminer les grandeurs imposées par les autres processeurs, en déduire la grandeur calculée par la loi
↓	
<b>ETAPE 5 :</b> Etablir le graphe	Réaliser l'interconnexion des entrées aux sorties en introduisant des opérateurs neutres si nécessaire

## 1.4. Exercice d'application

La commande du moteur en cascade de la MCC est donnée par la figure ci-dessous:



1. Ecrire le modèle de la MCC.
2. Mettre les équations précédentes sous forme d'état, avec  $[X] = [I_a, \omega]^T$ .
3. Calculer la fonction de transfert  $F_1(P) = I_a(P)/U_a(P)$  ( $Cr=0$ ) à partir de la présentation d'état. déterminer le temps de réponse.
4. Déduire la fonction de transfert  $F_2(P) = \Omega(P)/U_a(P)$  ( $Cr=0$ ) à partir de la présentation d'état. déterminer le temps de réponse.
5. Calculer le régulateur du courant pour une dynamique 25 fois plus rapide.
6. Calculer le régulateur de la vitesse pour  $\xi=1$  et une pulsation naturelle  $\omega_n = 20$ .
7. En utilisant les cinq étapes citées dans la conclusion, tracer le GIC de la MCC.

## 1.5. Annexe : paramètres de la machine à courant continu

$L_a=0.006\text{H}$ ;  $R_a=0.6\Omega$ ;  $K_\phi=1\text{Vs/rad}$  ;  $U_a=220\text{V}$  ;  $J=0.01\text{ SI}$  ;  $f=0.001\text{ SI}$ .

## 1.6. Bibliographie

- [1] P.J. BARRE , J.P. CARON, J.P. HAUTIER, M. LEGRAND, "Analyse et modèles, collection systèmes automatiques", vol 1, Edition Ellipses, Paris 1995.
- [2] J. Fauchier, M. Grandpierre, " Les graphes informationnels de causalité: application à la simulation des systèmes électrique" Journée électrotechniques du club EEA, Paris. 1992.
- [3] J.P. HAUTIER, J. Fauchier, " Le graph Informationnel Causal, outil de modélisation et de synthèse des commandes des processus électromécaniques", Bulletin de l'Union des physiciens, n°785. Cahier spécial de l'enseignement Supérieur p.167-189. 1996.
- [4] J.P. HAUTIER, J.P. CARON, " Convertisseurs statiques, méthodologie causale de modélisation et de commande, collections Méthodes et pratiques de l'ingénieur", Edition Technip, Paris 1992.
- [5] M. Pinard, " Commande électronique des moteurs électriques", Collection : Technique et ingénierie, Dunod, Paris 2004.
- [6] B. FRANCOIS, " Modélisation, Simulation et Commande des systèmes électriques", Note de cours. Univ-lille1.

# Chapitre 2

---

## Modèles dynamiques des machine synchrones

**Prérequis:** Connaissance des modèles des machines AC, Maitrise des comportement pour les différents régimes, connaissances préalables automatique asservissements et électronique de puissance.

**Objectif :** A l'issu de ce chapitre l'étudiant sera capable de:

- ✓ Etablir les modèles généraux des machines synchrones à FEM sinusoïdale
- ✓ Déduire les performances maximales de ces machines sous différentes contraintes
- ✓ Connaitre les différents modèles spécifiques (et en générale plus simples) en vue de leur commande

*La science n'est pas seulement une connaissance mais"  
elle est aussi une éducation"*

## **Introduction:**

Une machine commandée ou non, son fonctionnement constitué d'une succession de régimes transitoires et de régimes stationnaires, les uns et les autres de durée variable. Parmi les objectifs de la commande est de rétablir, le plus rapide possible, un régime stationnaire après une perturbation afin de limiter au mieux les effets indésirables, ce qui exige la connaissance d'un modèle dynamique. En plus, ce nouveau régime soit le plus efficace possible pour déterminer quelle performance on peut atteindre de la machine dans les conditions de l'étude.

Donc, la modélisation d'une machine au sein d'un système de conversion électromécanique est une tâche indispensable afin de le simuler ou bien le commander.

Dans la première partie nous établirons un modèle générale basé sur des hypothèses justifiées dans la majorité des machines, ensuite, nous donnerons les équations générales de Park, puis, nous étudierons les caractéristiques du fonctionnement en régime stationnaire. En dernière partie, nous établirons les modèles simplifiés e vue de leur commande.

### **2.1 Généralités sur les structures et les modèles,[1], [2], [3]:**

#### **2.1.1 Structure des machines et premières hypothèses de la modélisation**

Seulement les machines ont un stator lisse (entrefer constant) qui seront étudiées (machine à reluctance variable ne sera pas traiter).

le rotor peut être lisse ou saillant. la saillance se traduit par une modification importante des modèles et des équations, même aussi des performances.

Les machines synchrones sont munies d'une excitation rotorique, réglable dans les machines à rotor bobiné, et constant dans les machines à aimants.

Ces machines peuvent être munies ou non d'amortisseurs sous formes des barres en court-circuit disposées au rotor.

les amortisseurs seront modélisés sous forme d'un système à deux phases (l'une directe et l'autre en quadrature).

Les capacités de fuite (conducteur-conducteur ou conducteur-fer) ainsi que les courants induits dans les tôles statoriques sont négligeables (pertes par : courants de Foucault et hystérésis).

Ces hypothèses permettent de :

- négliger les dynamiques très rapides,
- réduire le nombre de variables d'états,
- établir un modèle général des machines synchrones.

Le modèle général comporte :

- Les équations électriques incluent des variables externes (courants, tension et les flux),
- Les équations mécaniques incluent des variables mécaniques (couple de charge, vitesse et position du rotor):

Sous forme matricielle on peut écrire :

$$[u] = [R][i] + \frac{d}{dt}[\phi] \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} C_{em} = j \frac{d\Omega}{dt} + C_r \\ \Omega = \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \quad (2.2)$$

Où;

$[u]$ ,  $[i]$  et  $[\phi]$ : les vecteurs tension, courant et flux respectivement.

$[R]$ : matrice diagonale correspondant aux résistances des circuits (réels du stator ou fictifs d'amortisseurs)

$C_{em}$ ,  $C_r$  et  $\Omega$ : le couple électromagnétique, couple de charge et la vitesse angulaire du rotor respectivement.

Avec les hypothèses admises:

- Les flux à travers les circuits  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ , ainsi que le couple électromagnétique sont fonction des courants  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  et de la position  $(\theta)$  du rotor.
- Les expressions du couple et du flux sont tirées d'une formulation analytique de la Co-énergie  $W_c$ , elle-même obtenue par des calculs du champ:

$$\begin{aligned} \phi_j &= \frac{\partial}{\partial i_j} W_c(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n, \theta) \\ C_{em} &= \frac{\partial}{\partial \theta} W_c(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n, \theta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

d'après les équations [2.1], [2.2] et [2.3] le modèle général relativement complexe a le mérite de représenter la plupart des variantes des machines synchrones

### 2.1.2 Hypothèses complémentaires. Modèle initial des machines triphasées sinusoïdales ,[4], [5]:

Nous nous limiterons maintenant aux machines triphasées et ferons les hypothèses suivantes:

- Une répartition spatiale sinusoïdale de conducteurs.
- Courants sinusoïdaux équilibrés implique que les harmoniques sont suffisamment faibles.
- La machine n'est pas saturée.

La figure 2.1 représente une machine à  $p$  paire de pôles excitée par une bobine excitatrice  $f$ :

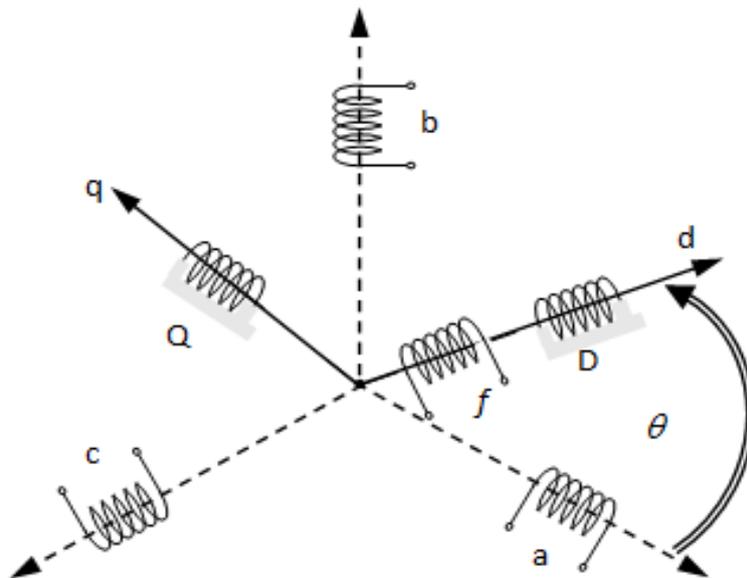


Figure 2.1. Représentation schématique d'une machine synchrone triphasée

les axes de symétrie des bobines statoriques a,b et c sont décalés les uns par rapport aux autres de  $120^\circ$  électriques.  $\theta$  est le décalage angulaire de l'axe rotorique direct par rapport de la bobine a. Les amortisseurs sont modélisés par deux bobines en court-circuit D et Q situées au rotor.

❖ **Les équations des tensions sont:**

$$[u_{s3r}] = [R_{s3r}][i_{s3r}] + \frac{d}{dt}[\phi_{s3r}] \quad (2.4)$$

Avec les équation suivantes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{s3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{s3} \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{s3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{s3} \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{i}_b \\ \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_f \\ \mathbf{i}_D \\ \mathbf{i}_Q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{\phi}_{s3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\phi}_{s3} \\ \mathbf{\phi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\phi}_a \\ \mathbf{\phi}_b \\ \mathbf{\phi}_c \\ \mathbf{\phi}_f \\ \mathbf{\phi}_D \\ \mathbf{\phi}_Q \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{s3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Où;

$[\mathbf{u}_a \ \mathbf{u}_b \ \mathbf{u}_c]^t$ ,  $[\mathbf{\phi}_a \ \mathbf{\phi}_b \ \mathbf{\phi}_c]^t$  et  $[\mathbf{i}_a \ \mathbf{i}_b \ \mathbf{i}_c]^t$  sont les tensions, flux et courants des phases statoriques.

$[\mathbf{u}_f \ 0 \ 0]^t$ ,  $[\mathbf{\phi}_f \ \mathbf{\phi}_D \ \mathbf{\phi}_Q]^t$  et  $[\mathbf{i}_f \ \mathbf{i}_D \ \mathbf{i}_Q]^t$  sont les tension, flux et les courants des bobines rotoriques (d'excitation et d'amortissements).

$R$ ,  $R_D$ ,  $R_Q$  et  $R_f$  sont respectivement les résistances des bobines statoriques, des circuits amortisseurs et de la bobine d'excitation.

❖ **Les équations des flux sont:**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\phi}_{s3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\phi}_{s3} \\ \mathbf{\phi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss3} & \mathbf{L}_{s3r} \\ \mathbf{L}_{s3r}^t & \mathbf{L}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{s3} \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

✚ **Dans les machines à pôles saillants:**

➤ **L'expression des inductances statoriques**, comporte des termes qui tiennent compte de la variation des inductance avec la position du rotor:

$$\begin{aligned}
 [L_{ss3}] &= \begin{bmatrix} L_0 + M_{s0} & \frac{-M_{s0}}{2} & \frac{-M_{s0}}{2} \\ \frac{-M_{s0}}{2} & L_0 + M_{s0} & \frac{-M_{s0}}{2} \\ \frac{-M_{s0}}{2} & \frac{-M_{s0}}{2} & L_0 + M_{s0} \end{bmatrix} + \\
 L_{s2} &\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \cos(2\theta - 2\pi/3) & \cos(2\theta + 2\pi/3) \\ \cos(2\theta - 2\pi/3) & \cos(2\theta + 2\pi/3) & \cos 2\theta \\ \cos(2\theta + 2\pi/3) & \cos 2\theta & \cos(2\theta - 2\pi/3) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ou;  $L_0$ ,  $L_0 + M_{s0}$  et  $\frac{-M_{s0}}{2}$  sont l'inductance de fuite, les valeurs moyennes des inductances propres et mutuelles des bobines statoriques.

$L_2$  est l'amplitude des variations des inductances en fonction de la position.

➤ **La matrice d'inductance rotorique** ne comporte que des éléments constants puisque les bobines rotorique sont fixe, donc:

$$[L_{rr}] = \begin{bmatrix} L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{fD} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & L_D \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Ou;

$L_f$ ,  $L_D$  et  $L_Q$  sont les inductances propre de la bobine d'excitation et les bobines des amortisseurs.

$M_{fD}$  est la mutuelle inductance entre l'excitation et l'amortisseurs direct.

➤ **La matrice de couplage stator-rotor**  $[L_{s3r}]$  est:

$$[L_{s3r}] = \begin{bmatrix} M_0 \cos \theta & M_{aD} \cos \theta & -M_{aQ} \sin \theta \\ M_0 \cos(\theta - 2\pi/3) & M_{aD} \cos(\theta - 2\pi/3) & -M_{aQ} \sin(\theta - 2\pi/3) \\ M_0 \cos(\theta + 2\pi/3) & M_{aD} \cos(\theta + 2\pi/3) & -M_{aQ} \sin(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

➤ **Les amortisseurs d'axes d et q :**

On a dans ce cas des valeurs différentes (dissymétriques):  $L_Q \neq L_D$ ,  $M_{aQ} \neq M_{aD}$  et  $R_Q \neq R_D$ .

✚ **Dans les machines à rotor lisse:**

➤ **L'inductance statorique est indépendante de  $\theta$  et s'écrit:**

$$[L_{ss3}] = \begin{bmatrix} L_0 + M_{s0} & \frac{-M_{s0}}{2} & \frac{-M_{s0}}{2} \\ \frac{-M_{s0}}{2} & L_0 + M_{s0} & \frac{-M_{s0}}{2} \\ \frac{-M_{s0}}{2} & \frac{-M_{s0}}{2} & L_0 + M_{s0} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

➤ **Les amortisseurs d'axes d et q** : Ont dans ce cas des valeurs identiques (symétriques):  $L_Q = L_D$ ,  $M_{aQ} = M_{aD}$  et  $R_Q = R_D$ .

**Remarque:** les relations (2.4) et (2.9) sont celles d'une machine triphasée dont les phases sont alimentées indépendamment par des tensions  $v_a, v_b$  et  $v_c$ . ces relations n'imposent aucune relation entre les courants statoriques.

## 2.2 Transformation de Concordia et modèle diphasé équivalent [1], [2], [3]:

A ce premier modèle général, on applique une première transformation:

- rien n'est changé aux systèmes réels du rotor (excitation et amortisseurs)
- On applique aux systèmes statoriques triphasés la transformation de Concordia, qui procure un modèle équivalent diphasé auquel est adjoint un système homopolaire.

Elle transforme le repère (Oabc) (figure 2.2a) en repère (Ooαβ)(figure 2.2b):

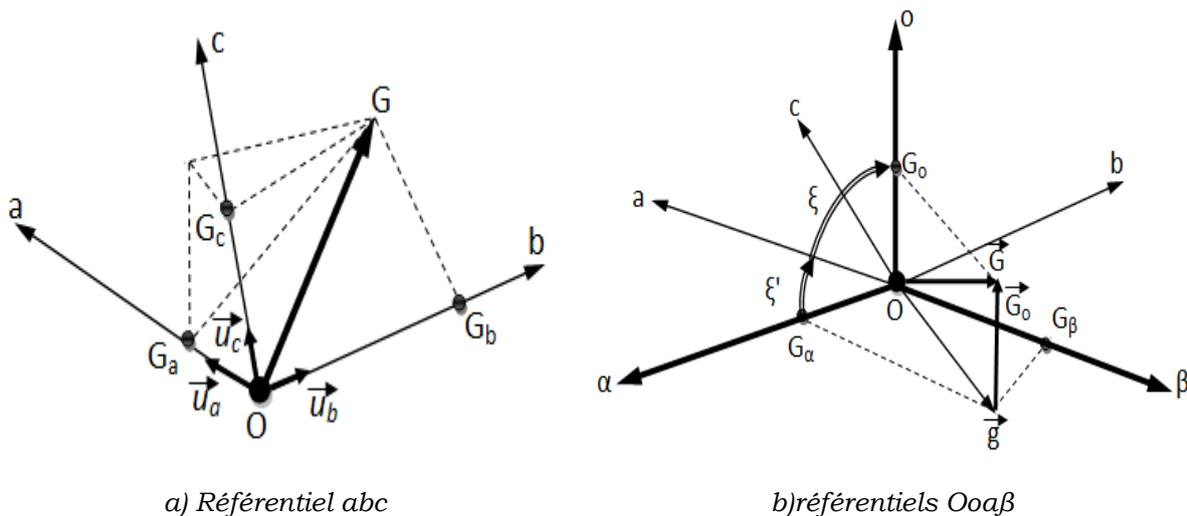


Figure 2.2 Représentation des référentiels abc et oαβ

L'axe homopolaire (Oo) forme avec les axes Oa, Ob et Oc un même angle ( $\zeta$ ) avec  $\cos \zeta = 1/\sqrt{3}$ . Ces axes forment avec le plan Oa $\beta$  l'angle ( $\zeta'$ ) avec  $\cos \zeta' = \sqrt{2/3}$

La matrice de transformation de Concordia est traduite par  $T_{33} = [T_{31} \ T_{32}]$ :

$$T_{31} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Soit un vecteur  $\vec{G}$  quelconque, on tire ces composantes par l'application de la transformation inverse de Concordia ( $T_{33}^t$ ) :

$$\begin{pmatrix} G_o \\ G_\alpha \\ G_\beta \end{pmatrix} = T_{33}^t \begin{pmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{31}^t \\ T_{32}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Comme vous remarquez sur la figure 2.2b, le vecteur  $\vec{G}$  se décompose en deux vecteurs  $\vec{G} = \vec{G}_o + \vec{g}$  tel que:  $\vec{G}_o$  et  $\vec{g}$ : l'un est parallèle à l'axe homopolaire et l'autre appartient au plan Oa $\beta$ .

En sens direct, l'application de la transformation triphasé-diphasé  $T_{32}^t$  permet de tirer les composantes  $\alpha\beta$  des composantes abc:

$$\begin{pmatrix} G_\alpha \\ G_\beta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{pmatrix} = T_{32}^t \cdot \begin{pmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

En sens inverse (diphasé-triphasé), on peut écrire:

$$\begin{pmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{pmatrix} = T_{32} \begin{pmatrix} G_\alpha \\ G_\beta \end{pmatrix} = T_{32} \cdot T_{32}^t \cdot \begin{pmatrix} G_a \\ G_b \\ G_c \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

**Remarque:** comme elle est normée, cette transformation conserve les grandeurs électriques composées par exemple: induction, densités de courant, puissance, couple, etc.

La figure 2.3 représente la machine diphasée équivalente dont les bobines sont décalées de  $90^\circ$  électriques:

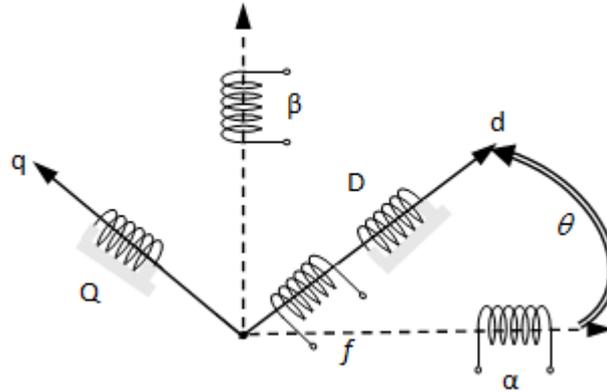


Figure 2.3. La machine diphasée équivalente

### 2.2.1 Inductances statoriques

La matrice d'inductances de la machine diphasé est:

$$[L_{ss2}] = \begin{bmatrix} L_\alpha & M_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} & L_\beta \end{bmatrix} = T_{32}^t \cdot [L_{ss3}] \cdot T_{32} \quad (2.14)$$

**Dans les machine à pôles lisses**, d'après l'équation (2.9) les inductance propres des bobines sont égales à:

$$L_3 = L_0 + M_{s0} = L_0 - 2 \cdot M \text{ avec } M = -\frac{M_{s0}}{2}$$

Les inductances diphasées sont égales aux inductances cycliques  $L_c$  :

$$L_\alpha = L_\beta = L_c = L_0 + \frac{3}{2} M_{s0} = L_3 - M \text{ avec } M = -\frac{M_{s0}}{2} \quad (2.15)$$

**Remarque:** si les mutuelles sont nulles: les enroulements  $\alpha$  et  $\beta$  sont découplés

**Dans les machines à rotor saillant**, d'après (2.6) et (2.11) la matrice d'inductances équivalentes est:

$$[L_{ss2}] = \begin{bmatrix} L_\alpha & M_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} & L_\beta \end{bmatrix} = L_{02} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + M_2 \cdot P(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P(-\theta) \quad (2.16)$$

avec :

➤ **P** est **la matrice de rotation**:

$$P(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

- L'expression de la valeur moyenne  $L_{02}$  des inductances propres équivalentes incluant les fuites) est:

$$L_{02} = L_0 + \frac{3}{2} M_{s0} \quad (2.18)$$

- le coefficient  $M_2$  dû à la saillance s'obtient de la partie variable  $L_{s2}$  de (2.6) :

$$M_2 = \frac{3}{2} L_{s2} \quad (2.19)$$

### 2.2.2 Mutuelles statoriques

Les coefficients de mutuelles  $M_{32}$  entre **phases de deux enroulements**, l'un triphase au stator et l'autre diphase (amortisseurs) ou monophasé (excitation) au rotor, donnent les coefficients diphasés  $M_{22}$  suivants:

$$M_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_{32} \quad (2.20)$$

D'après (2.8), les mutuelles inductances  $M_{\alpha f}(\theta)$  et  $M_{\alpha D}(\theta)$  sont:

$$M_{\alpha f} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_0 \cos \theta \quad \text{et} \quad M_{\alpha D} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_{aD} \cos \theta \quad (2.21)$$

**Remarque:** il n'y a pas de modification des coefficients de mutuelle entre excitation et amortisseurs, puisqu'on n'a pas effectué de transformation.

### 2.2.3 Résistances

les résistances diphasées sont égales aux résistances triphasées. Cette définition conserve les pertes joules et les équations électriques.

### 2.2.4 Equations du modèle diphasé

Après l'application de la transformation de Concordia la partie active du système est réduite à l'ordre deux.

les équations des tensions deviennent:

$$\begin{aligned} u_0 &= R \cdot i_0 + L_0 \frac{d}{dt} i_0 \\ [u_{s2r}] &= [R_{s2r}] [i_{s2r}] + \frac{d}{dt} [\phi_{s2r}] \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{u}_{s2r}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_{s2}] \\ [\mathbf{u}_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_\alpha] \\ [\mathbf{u}_\beta] \\ [\mathbf{u}_f] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{i}_{s2r}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_{s2}] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_\alpha] \\ [\mathbf{i}_\beta] \\ [\mathbf{i}_f] \\ [\mathbf{i}_D] \\ [\mathbf{i}_Q] \end{bmatrix} \\
 [\phi_{s2r}] &= \begin{bmatrix} [\phi_{s2}] \\ [\phi_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi_\alpha] \\ [\phi_\beta] \\ [\phi_f] \\ \phi_D \\ \phi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{ss2}] & [L_{s2r}] \\ [L_{s2r}]^t & [L_{rr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_{s2}] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix}, \quad [R_{s2r}] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Où :

- $[L_{ss2}]$ : est donnée pour les machines lisse ou saillant par (2.15) et (2.16) respectivement.
- $[L_{rr}]$ : reste inchangée (relation (2.7))
- $[L_{s2r}]$ : est donnée par (2.24), en prenant en compte les remarques du paragraphe 2.3.2:

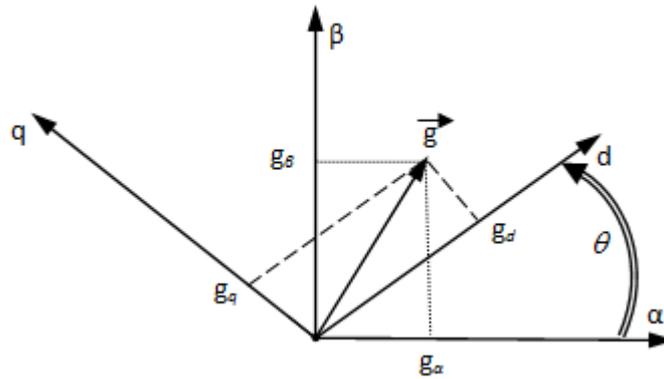
$$[L_{s2r}] = T_{32}^t \cdot [L_{s3r}] = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} M_0 \cos \theta & M_{aD} \cos \theta & -M_{aQ} \sin \theta \\ M_0 \sin \theta & M_{aD} \sin \theta & -M_{aQ} \cos \theta \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Les relations (2.22) à (2.24) sont toujours valables, même en présence d'un courant homopolaire.

**Remarque:** compte tenu des remarques précédentes nous nous limiterons dans la suite aux seuls composantes diphasées  $\alpha$  et  $\beta$

### 2.3 Transformation de Park [1],[2], [3]:

La transformation de Park le résultat de deux transformations : Concordia (ou Clark) suivie d'une rotation. Le repère  $\alpha\beta$  est toujours fixe par contre le repère  $dq$  est mobile. Ce dernier forme avec le repère fixe  $\alpha\beta$  un angle qui est appelé l'angle de Park. Dans ce qui suit, **la transformation de Park** qui est caractérisée par une matrice  $P(\alpha_s)$ , est appliqué au modèle diphasé de Concordia. La figure 2.4 représente les deux composantes de Park **directe** et **en quadrature** notées  $g_d$  et  $g_q$  :

Figure 2.4. Représentation des référentiels  $a\beta$  et  $dq$ 

tel que:

$$\begin{pmatrix} g_d \\ g_q \end{pmatrix} = P(-\theta) \begin{pmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

On applique cette transformation seulement aux deux composantes du stator  $\alpha$  et  $\beta$ , les grandeurs rotoriques n'ont pas à subir de rotation et reste inchangées.

Deux choix classiques de transformation sont possibles:

Le choix	*Lié à l'alimentation: une rotation d'un angle $\alpha_s = \omega t + \alpha_0$ ( $\alpha_0 = \text{cst}$ )	*Une rotation d'argument égal à la position électrique du rotor : $\alpha_s = \theta$
Inconvénients	*N'apporte aucune simplification aux machines saillantes. *Faire apparaître d'un argument variable dans les équations transitoires de rotation.	* La transformation de Park des tensions (ou des courants) de la source ne sont pas constantes en régime transitoire même si l'alimentation est sinusoïdale.

la représentation schématique des bobinages statoriques et rotoriques après transformation est illustrée sur la figure 2.5.

**Remarque:** Cela a deux conséquences importantes:

- Tous les coefficients d'inductances propres et mutuelles sont constants.
- Tous les coefficients de mutuelles propres entre un enroulement direct et un enroulement en quadrature sont nuls.

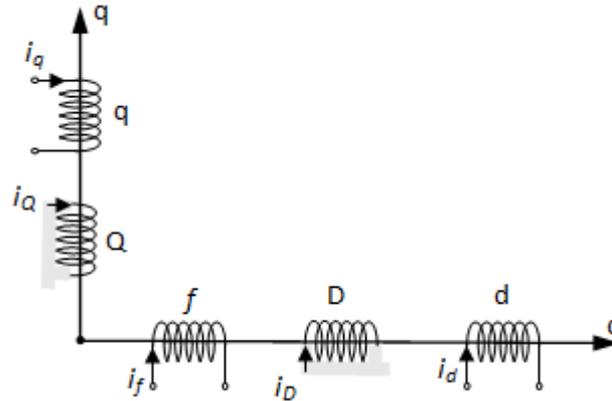


Figure 2.5. Représentation de la MS dans le repère de Park

Le modèle général maintenant est établi. La figure 2.6 en donne le schéma fonctionnel simplifié. les équations électriques et l'expression de couple font l'objet du paragraphe suivant.

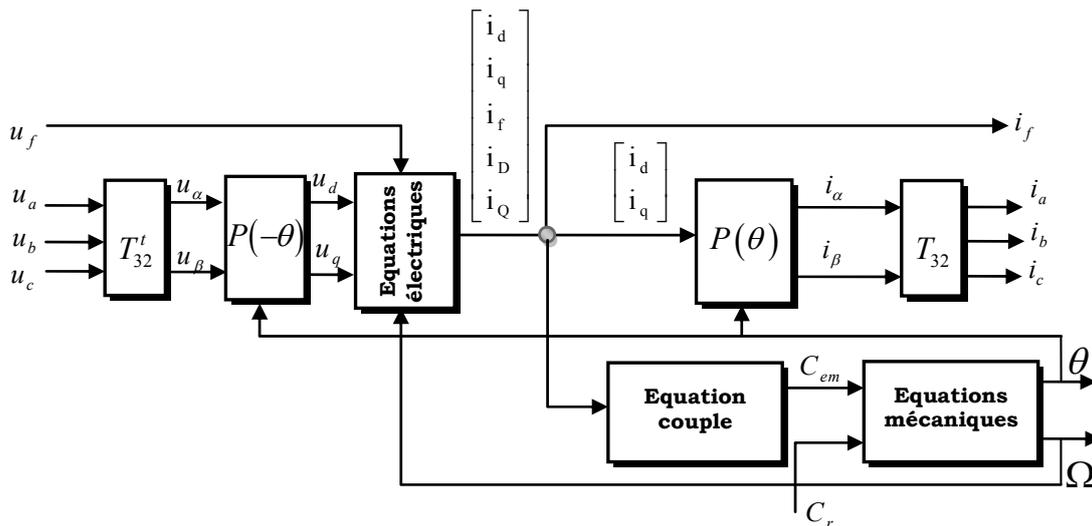


Figure 2.6. Schéma fonctionnel simplifié

## 2.4 Equations de Park des machines synchrones :

### ⚡ Régime transitoire:

#### 2.4.1 Machine lisse sans amortisseurs dans le repère de Park par la

**rotation:**  $\alpha_s = \omega t + \alpha_0$

Ces équations sont souvent utilisées dans les machines à pôles lisses sans amortisseurs, elles sont compliquées est ne sont données ici qu'à titre documentaire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}'_s = \begin{bmatrix} R & -L_s \omega \\ L_s \omega & R \end{bmatrix} \mathbf{i}'_s + L_s \frac{d\mathbf{i}'_s}{dt} + M_{fd} \cdot p(\theta - \omega t - \alpha_0) \left( \begin{bmatrix} 0 \\ p\Omega \mathbf{i}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{di_f}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ \mathbf{u}'_f = R_f \mathbf{i}_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \cdot [1 \quad 0] \cdot p(\theta - \omega t - \alpha_0) \left( (\omega - p\Omega) \begin{bmatrix} -i_q \\ i_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{di_d}{dt} \\ \frac{di_q}{dt} \end{bmatrix} \right) \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Où:

$$\mathbf{u}'_s = \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = P(-\alpha_s) \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{pmatrix}, \mathbf{i}'_s = \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = P(-\alpha_s) \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix}$$

### 2.4.2 Equations dans le repère de Park par la rotation : $\alpha_s = \theta$ :

#### 2.4.2.1 Expression générale des tension en fonction des flux:

On peut définir les flux direct et en quadrature par la transformation de Park  $P(\theta)$  des flux diphasés comme suit;

$$\begin{pmatrix} \phi_d \\ \phi_q \\ \phi_f \\ \phi_D \\ \phi_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(-\theta) \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} \\ \phi_f \\ \phi_D \\ \phi_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{fd} & M_{Dd} & 0 \\ 0 & 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{fd} & 0 \\ M_{Dd} & 0 \\ 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{fD} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Où:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_d = L_0 + \frac{3}{2} \cdot (M_{s0} + L_{s2}) \\ L_q = L_0 + \frac{3}{2} \cdot (M_{s0} - L_{s2}) \\ M_{fd} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_0, M_{Dd} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_{aD}, M_{Qq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot M_{aQ} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

On note que  $\phi_d$  ne dépend pas de  $i_q$  ni  $\phi_q$  de  $i_d$ .

Les tensions s'écrivent alors en fonction des flux:

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ u_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [R_{s2r}] \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_d \\ \phi_q \\ \phi_f \\ \phi_D \\ \phi_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p\Omega \cdot \begin{bmatrix} -\phi_q \\ \phi_d \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

### 2.4.2.2 Puissances externes et couple:

La puissance absorbée par la machine est définie comme suit:

$$p(t) = \begin{bmatrix} i_d & i_q & i_f & i_D & i_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_f \\ u_D = 0 \\ u_Q = 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ce qui s'écrit, compte tenu de (2.28):

$$p(t) = \left[ R(i_d^2 + i_q^2) + R_f i_f^2 + R_D i_D^2 + R_Q i_Q^2 \right] + \left[ i_d \frac{d\phi_d}{dt} + i_q \frac{d\phi_q}{dt} + i_f \frac{d\phi_f}{dt} + i_D \frac{d\phi_D}{dt} + i_Q \frac{d\phi_Q}{dt} \right] + p\Omega(\phi_d i_q - \phi_q i_d) \quad (2.30)$$

Où les trois termes de la relation (2.30) sont respectivement:

Les pertes Joules, la variation d'énergie magnétique et la puissance mécanique. De dernier terme se traduit l'expression du couple:

$$C_{em} = p(\phi_d i_q - \phi_q i_d) \quad (2.31)$$

Donc, d'après (2.27):

$$C_{em} = p(L_d - L_q)i_d i_q + pM_{fd}i_f i_q + p[M_{Dd}i_D i_q - M_{Qq}i_Q i_d] \quad (2.31)$$

Cette expression du couple englobe trois termes qui sont dû respectivement:

- à la saillance rotorique, ne dépend que des courants statoriques, (nul dans les machines à rotor lisse).
- à l'interaction des courants statoriques et du courant d'excitation.
- à l'interaction des courants statoriques et des courants d'amortisseurs (type asynchrone).

#### **Points importants [6]:**

##### ❖ **En régime stationnaire:**

- **Cas d'alimentation sinusoïdale à fréquence fixée** ce couple est nul.
- **Cas d'alimentation par onduleurs**, les harmoniques engendrés induisent des courants dans les amortisseurs, donc des couples qui ont une valeur moyenne nulle.

❖ **En régime transitoire (variation de charge, changement d'alimentation):**

- **La machine n'est pas commandée:** les amortisseurs sont nécessaires pour la stabilité
- **La machine est commandée (autopilotée):** amélioration de la réponse en courant et donc en couple et de la commutation des onduleurs de courant.

### 2.4.2.3 Equations générales des tensions en fonction des courants

- **Machine à pôles lisses:**

Les tensions statoriques et rotoriques s'écrivent:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -p\Omega L_s \\ p\Omega L_s & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + L_s \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{fd} & M_{Dd} & 0 \\ 0 & 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + p\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_{Qq} \\ M_{fd} & M_{Dd} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt} + M_{fd} \frac{di_D}{dt} \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_D & 0 \\ 0 & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_D & 0 \\ 0 & L_Q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + M_{Dd} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Dd} & 0 \\ 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Où:  $L_s$  est égale à l'inductance cyclique statorique (voir équation (2.15)).

**Remarque:** Dans les machines lisses, les circuits amortisseurs ont fréquemment une constitution différente:  $R_D \neq R_Q, L_D \neq L_Q, M_{Qq} \neq M_{Dd}$

pour la machine sans amortisseurs, on annule les termes correspondants:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -p\Omega L_s \\ p\Omega L_s & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + L_s \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + M_{fd} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ 0 \end{bmatrix} + p\Omega M_{fd} \begin{bmatrix} 0 \\ i_f \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt} \quad (2.36)$$

- **Machine à pôles saillants:**

Pour une machine a d'amortisseurs dissymétriques, les tensions s'écrivent:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -p\Omega L_q \\ p\Omega L_d & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{fd} & M_{Dd} & 0 \\ 0 & 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + p\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_{Qq} \\ M_{fd} & M_{Dd} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt} + M_{fD} \frac{di_D}{dt} \quad (2.38)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_D & 0 \\ 0 & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_D & 0 \\ 0 & L_Q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + M_{fD} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{Dd} & 0 \\ 0 & M_{Qq} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

En l'absence d'amortisseurs, ces équations deviennent:

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -p\Omega L_q \\ p\Omega L_d & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + M_{fd} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_f \\ 0 \end{bmatrix} + p\Omega M_{fd} \begin{bmatrix} 0 \\ i_f \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + M_{fd} \frac{di_d}{dt} \quad (2.41)$$

### 2.4.3 Equations du régime stationnaire:

Dans ce régime, *les grandeurs transformées de Park* demeurent notées **en minuscules** et *les grandeurs symboliques (efficaces)* sont **en majuscules**.

Les équations générales (2.37) à (2.39) font apparaître une solution stationnaire évidente dans laquelle:

- Le courants d'amortisseurs sont nuls:  $i_D = i_Q = 0$
- Tous les autres courants et les tensions statoriques sont constants.
- La tension d'excitation égale à la chute ohmique:  $u_f = R_f \cdot i_f$

#### 2.4.3.1 Paramètres

Le tableau 2.1 définit les grandeurs et les paramètres en régime établi:

<b>Tableau 2.1</b>		
Type machine Paramètres	à pôles lises	à pôles saillants
f.é.m.	$e = p\Omega \cdot M_{fd} \cdot i_f$	
Réactance synchrone	$X = L_s \cdot p\Omega$	$\begin{cases} X_d = L_d \cdot p\Omega \\ X_q = L_q \cdot p\Omega \end{cases}$
Impédance complexe	$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$	$\begin{cases} Z_d = R + jX_d = Z_d e^{j\zeta_d} \\ Z_q = R + jX_q = Z_q e^{j\zeta_q} \end{cases}$
Différence des réactances		$X_{dq} = X_d - X_q$

Tous ces paramètres dépendent de la vitesse mécanique: ceci est liée au choix de l'argument de la transformation de Park.

### 2.4.3.2 Définitions et Notations du régime stationnaire:

En régime stationnaire sinusoïdal, la charge est constante et l'alimentation, soit en courant, soit en tension est sinusoïdale et d'amplitude constante. On définit alors des couples de tensions et de courants sinusoïdaux diphasés:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} = U\sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \phi_v) \\ \sin(\omega t + \phi_v) \end{bmatrix} = U\sqrt{2}P(\omega t + \phi_v) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = I\sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \phi_i) \\ \sin(\omega t + \phi_i) \end{bmatrix} = I\sqrt{2}P(\omega t + \phi_i) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

avec:

U et I sont des valeurs efficaces des courants et des tensions équivalents

La figure 2.7 représente les grandeurs électriques dans un repère spatial au temps  $t=0$ , Où:

- $\theta_0$  et  $\theta'_0 = p\theta_0$ : sont respectivement la position du rotor à l'instant origine, mesurée par rapport à l'axe de la première phase et l'angle électrique correspondant
- $\theta_0 = \theta'_0 - \phi_i$ : angle entre l'axe du champ tournant et l'axe du rotor (angle de charge).
- $\phi = \phi_v - \phi_i$ : le déphasage courant-tension.
- $\delta = \frac{\pi}{2} + \theta_0 - \phi$ : le décalage interne.

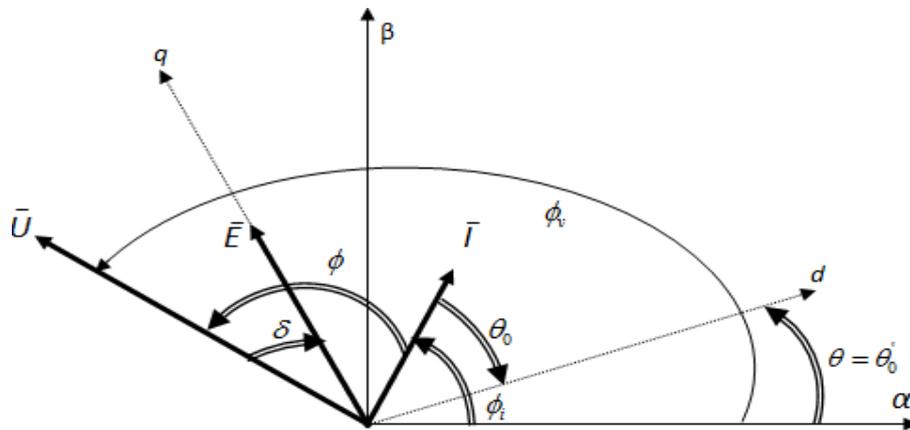


Figure 2.7. Angles et déphasage en régime permanent ( $t=0$ )

Les tensions du régime stationnaire s'écrivent avec les notations usuelles:

$$U'_2 = \frac{u'_2}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} U_d \\ U_q \end{bmatrix} = \frac{P(-\theta) \cdot u_2}{\sqrt{2}} = U \begin{bmatrix} \cos(\theta_0 - \phi) \\ -\sin(\theta_0 - \phi) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

et les courants:

$$I'_2 = \frac{I_2}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{P(-\theta) \cdot i_2}{\sqrt{2}} = I \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ -\sin \theta_0 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} \sin(\delta + \phi) \\ \cos(\delta + \phi) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

La f.é.m. est:

$$E = \frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{p\Omega \cdot M_{fd} \cdot i_f}{\sqrt{2}} \quad (2.46)$$

### 2.4.3.3 Machine à pôles lisses en régime stationnaire:

Le régime stationnaire se déduit de la relation (2.32) avec les notations précédentes:

$$U'_2 = \begin{bmatrix} U_d \\ U_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -X \\ X & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Cette équations s'inversent pour donner les courants:

$$I'_2 = \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{1}{Z^2} \begin{bmatrix} R & X \\ -X & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_d \\ U_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \left( U \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \cos \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \right)$$

D'ou:

$$I'_2 = \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{1}{Z^2} \begin{bmatrix} U(R \sin \delta + X \cos \delta) - E \cdot X \\ U(R \cos \delta - X \sin \delta) - E \cdot X \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} U \sin(\delta + \xi) - E \sin \delta \\ U \cos(\delta + \xi) - E \cos \delta \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

La f.é.m. est donnée par l'équation (2.46).

Le couple à une expression similaire à celle des machines à courant continu:

$$C_{em} = p \cdot M_{fd} \cdot i_f \cdot i_q = 2 \frac{E \cdot I_q}{\Omega} \quad (2.49)$$

### 2.4.3.4 Machine à pôles saillants en régime stationnaire:

Le régime stationnaire se déduit des équations (2.37)-(2.39) et (2.31):

$$U'_2 = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -p\Omega L_q \\ p\Omega L_d & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + p\Omega M_{fd} \begin{bmatrix} 0 \\ i_f \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$C_{em} = p(L_d - L_q) i_d i_q + p M_{fd} i_f i_q \quad (2.51)$$

Soit d'après la relation (2.45) :

$$C_{em} = -2p(L_d - L_q)I^2 \sin 2\theta_0 - pM_{fd}i_f I \sin \theta_0 \quad (2.52)$$

$$P = 2X_{dq} \cdot I_d \cdot I_q + 2E \cdot I_q \quad (2.53)$$

Avec les notations précédentes, les tensions de Park s'écrivent:

$$U_2' = \begin{bmatrix} U_d \\ U_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -X_q \\ X_d & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Cette équation s'inverse pour donner les courants:

$$I_2' = \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \frac{1}{Z^2} \begin{bmatrix} U(R \sin \delta + X_q \cos \delta) - E \cdot X_q \\ U(R \cos \delta - X_d \sin \delta) - E \cdot X_d \end{bmatrix} = \frac{1}{Z^2} \begin{bmatrix} Z_q [U \sin(\delta + \xi_q) - E \sin \delta_q] \\ Z_d [U \cos(\delta + \xi_d) - E \cos \delta_d] \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Où:

$$Z^2 = R^2 + X_d \cdot X_q \quad (2.55)$$

La f.é.m. résultante  $E'$ , toujours orientée suivant l'axe q est:

$$E' = E + (X_d - X_q) \cdot I_d \quad (2.56)$$

## 2.5 Analyse des modèles en régime stationnaire

Nous tenons ici certaines observations sur les performances lorsque l'on impose soit la tension, soit le f.é.m., soit le courant:

### 2.5.1 Performances sous tension imposée:

Lorsque la tension est fixée, par le convertisseur ou par le réseau, et lorsque la f.é.m. et le courant sont supposés variables sans limites:

- La puissance électrique théorique (en alternateur) est illimitée.
- La puissance mécanique théorique (en moteur) est limitée.

### 2.5.2 Performances sous Force électromotrice imposée:

Lorsque la f.é.m. est fixée, par l'opérateur ou par la structure, (comme les machines à aimants) et la tension variable :

- La puissance électrique théorique (en alternateur) est limitée.
- La puissance mécanique théorique (en moteur) est illimitée.

### 2.5.3 Performances sous courant imposé:

L'alimentation à courant fixe présente multiple avantages:

- Pertes Joules constantes: donc échauffement donné.
- Puissance interne et rendement maximaux au même point.
- Performances élevées, particulièrement en fonctionnement moteur.

Lorsque le courant est fixée, à tension ou f.é.m. libres:

- La puissance électrique théorique (en alternateur) et la puissance mécanique théorique (en moteur) sont les deux illimitées.

## 2.6 Modèle en vue de la commande ,[6], [7],[8], [9]:

Nous allons maintenant établir les équations et les modèles en vue de la commande, **particulièrement pour la machine synchrone à aimant permanent (MSAP)**, avec deux impératifs:

- Ces modèles doivent être les plus simples possibles pour les utiliser.
- Il ne doit y figurer que des paramètres mesurables.

### 2.6.1 Modèle d'état des machines à aimants

**Remarque:** Cette 'étude s'applique aussi aux machines à excitation bobinée alimentée à courant constant.

L'excitation par aimants peut être modélisée par une bobine excitatrice alimentée par une source de courant, donc il est constant et n'est plus une variable d'état et l'ordre de modèle général diminue.

Les flux des aimants à travers des circuits d'axe d (d et D) sont constantes  $\phi_d$  et  $\phi_D$  . Les expressions des flux totaux s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} \phi_d - \phi_{fd} \\ \phi_D - \phi_{fD} \\ \phi_q \\ \phi_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & M_{dD} & 0 & 0 \\ M_{Dd} & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_q & M_{qQ} \\ 0 & 0 & M_{qQ} & L_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{pmatrix} = [L] \begin{pmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Où: [L] est la matrice d'inductance de machines à aimants munie d'amortisseurs.

Les équations de tension et les équations mécaniques s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} u_d \\ 0 \\ u_q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot i_d - p\Omega(L_q i_q + M_{Qq} i_Q) \\ R_D \cdot i_D \\ R \cdot i_q + p\Omega(L_d i_d + M_{Dd} i_D + \phi_{fd}) \\ R_Q \cdot i_Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_d & M_{dD} & 0 & 0 \\ M_{Dd} & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_q & M_{Qq} \\ 0 & 0 & M_{qQ} & L_Q \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$\begin{cases} j \frac{d\Omega}{dt} = p \cdot \left[ (L_d i_d + M_{Dd} i_D + \phi_{fd}) i_q - (L_q i_q + M_{Qq} i_Q) i_d \right] - C_r(\Omega, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} = p \cdot \Omega \end{cases} \quad (2.59)$$

### 2.6.2 Modèle d'état des machines à aimants avec amortisseurs

Le modèle d'état avec amortisseur de la MSAP s'écrit comme suit:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{pmatrix} = [L]^{-1} \begin{pmatrix} -R & 0 & p\Omega L_q & p\Omega M_{Qq} \\ 0 & R_D & 0 & 0 \\ -p\Omega L_d & -p\Omega M_{Dd} & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{pmatrix} + [L]^{-1} \begin{pmatrix} u_d \\ 0 \\ u_q - p\Omega \phi_{fd} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_r(\Omega, \theta)}{j} \\ p\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{C_{em}}{j} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

le couple moteur s'écrit dans l'optique de la synthèse de la commande :

$$C_{em} = p \cdot \left[ (L_d - L_q) i_d + \phi_{fd} \right] i_q \quad (2.62)$$

### 2.6.3 Modèle d'état des machines à aimants sans amortisseurs

les machines synchrones sont souvent alimentées par des onduleurs de tension et commandées à l'aide d'un capteur de position (**autopilotées**). Dans ces conditions, les amortisseurs ne sont plus utiles au maintien du synchronisme, et comme ils engendrent des pertes supplémentaires, ils deviennent même nuisibles: la plupart des machines synchrones à aimants ne comportent donc pas d'amortisseurs.

Leurs modèles se déduisent facilement des relations (2.57) à (2.59) en annulant les courants d'amortisseurs:

$$\begin{pmatrix} \phi_d - \phi_{fd} \\ \phi_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = [L] \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot i_d - p\Omega \cdot L_q \cdot i_q \\ R \cdot i_q + p\Omega(L_d i_d + \phi_{fd}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$\begin{cases} j \frac{d\Omega}{dt} = p \cdot [(L_d - L_q)i_d + \phi_{fd}]i_q - C_r(\Omega, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} = p \cdot \Omega \end{cases} \quad (2.65)$$

Le modèle d'état se déduit des relations (2.64) et (2.65), pour simplifier, on y fait apparaître les constantes de temps  $\tau_d = \frac{L_d}{R}$  et  $\tau_q = \frac{L_q}{R}$ .

Les variables de sortie du modèle (2.66) sont ses variables d'état.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ \Omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_d} \cdot i_d + p\Omega \frac{L_q}{L_d} \cdot i_q \\ -\frac{1}{\tau_q} \cdot i_q - p\Omega \left( \frac{L_d}{L_q} i_d + \frac{\phi_{fd}}{L_q} \right) \\ \frac{p}{j} \cdot [(L_d - L_q)i_d + \phi_{fd}]i_q - \frac{C_r(\Omega, \theta)}{j} \\ p\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{u_d}{L_d} \\ \frac{u_q}{L_q} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Pour la synthèse de la commande des variables de sortie, en supposant encore la vitesse lentement variable, nous pouvons décomposer le système non linéaire (2.66) d'ordre quatre en deux sous systèmes électrique et mécanique d'ordre deux:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_d} & p\Omega \frac{L_q}{L_d} \\ -p\Omega \frac{L_d}{L_q} & -\frac{1}{\tau_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_q - p\Omega \phi_{fd} \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_r(\Omega, \theta)}{j} \\ p\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{C_{em}}{j} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Comme précédemment, le sous système électrique est linéaire ( $\Omega$  considérée constante) et le sous système mécanique non linéaire. leurs variables de sortie sont leurs variables d'états.

Pour les raisons indiquées plus haut, les courants atteignant rapidement leurs valeurs de référence, le couple moteur dans le sous système mécanique à pour valeur:

$$C_{em} = p \cdot [(L_d - L_q)i_{dref} + \phi_{fd}]i_{qref} \quad (2.62)$$

**Remarque:** pour une MSAP à rotor lisse, on pose  $L_d = L_q$  et l'équation de couple devient:  $C_{em} = p \cdot \phi_{fd} \cdot i_q$

### 2.6.4 Modèle opérationnel de la MSAP dans le repère de Park sur

#### MATLAB

La figure 2.6 illustre le schéma bloc de simulation sous Matlab /Simulink pour une MSAP :

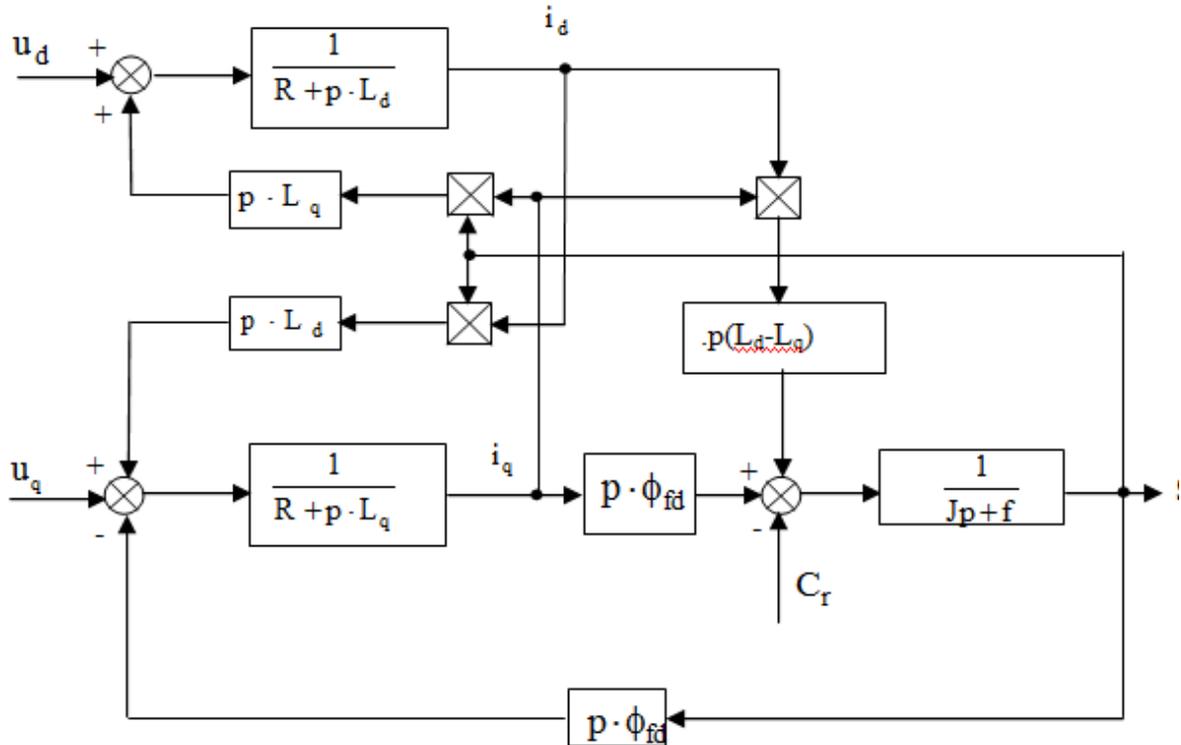


Figure 2.6. Le modèle de la machine dans le repère de Park

## 2.7 Conclusion

La modélisation des machines synchrones (MS) est un sujet très vaste. En effet, les progrès de l'électronique de puissance et des processeurs ont largement étendu les possibilités d'alimentation et de commande. Notre objectif se limitait , à l'étude des machines sinusoïdales non saturées, à rotor lisse ou saillant.

nous avons utilisé la transformation de Park, qui est l'outil de base de la modélisation des MS et permet aussi bien l'étude de fonctionnement, transitoire et stationnaire, que la mise en place des modèles de commande.

En trouvera dans ce chapitre le plus grand nombre possible d'équations, de caractéristiques et de modèles utilisables, c'est-à-dire un nombre suffisant d'éléments pour meilleur choix du régime stationnaire, d'alimentation et de conditions de fonctionnement.

## 2.8 Exercice d'application

On se limite dans cet exercice au cas d'une machine synchrone à aimants permanents (MSAP) :

1. Donner la représentation schématique de la machine synchrone à aimants permanents dans les repères triphasé ( $a, b, c$ ) et diphasés ( $d-q$ ).
2. Ecrire les équations régissant le fonctionnement du moteur (tensions, flux, couple électromagnétique, mécanique).
3. Déduire l'expression du couple pour la MSAP à rotor lisse.

Plusieurs façons sont possibles pour le choix du vecteur d'état. Cela dépendra de l'objectif tracé. Pour la MSAP alimentée en tension on choisit le vecteur d'état comme suit :

- Variables de commande: les tensions statoriques ( $u_d, u_q$ ) et le flux permanent ( $\Phi_{fd}$ ).
- Variables d'état: les courants ( $i_d, i_q$ ).

1. Ecrire les équations précédentes sous forme d'état dans le repère  $d-q$
2. Tracer le schéma bloc de simulation sous Matlab/Simulink.

## 2.9 Bibliographie

- [1] B. Adkins , "General Theory of Electrical Machines", Chapman and Hall, Londres, 1957.
- [2] P. BARRET , " Régimes transitoires des machines tournantes" Eyrolles, Paris. 1982.
- [3] I. BOLDEA, S.A. NASAR, " Vector control of AC Drive", CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [4] J. BONAL, G. SEGUIER, " Entraînements électriques à vitesse variable", 3 volumes, Tec et Doc, Librairie Lavoisier, Paris 1998. 1999, 2000.
- [5] J. CHATELAIN, " Machines électriques, Traité d'électricité", vol. 10, EPFL, Presses Polytechniques Romandes ou Dunod, Lausanne, 1983.
- [6] P.C. KRAUSE, " Analysis of electrical Machinery", McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
- [7] J. LESENNE, F. NOTELET, G. SEGUIER, " Introduction à l'électrotechnique approfondie, Tec et Doc, Librairie Lavoisier, Paris, 1981.
- [8] W. LEONHARD, " Control of electrical Machines", Springer-Verlag, New York, 1990.
- [9] A. TOUNZI, F.M. TABAR, F.M. SARGOS, " Commande vectorielle de la machine à reluctance variable à rotor lisse. Prise en compte de la saturation et l'amortissement", Journal de la physique III, avril 1997.

# Chapitre 3

---

## **Extension de la transformation de Park aux moteurs synchrones à distribution de champs non sinusoïdaux**

**Prérequis:** Transformation de Park, linéarisation d'un système couplé, maîtrise du comportement de la MAS pour différents régimes.

**Objectif :** A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de:

- ✓ Présenter les extensions de la Transformation de Park;
- ✓ Application de la méthode de linéarisation par retour d'état aux machines synchrones à entrefer variable;
- ✓ Etude des lieux des isocouples dans l'espace des courants statoriques.

*"Necessity is the mother of invention"*

## Introduction:

Les modèles en vue de la commande des machines synchrones utilisées en tant qu'actionneurs sont basés, le plus souvent, sur l'hypothèse d'une distribution spatiale sinusoïdale des champs dans l'entrefer. Les flux inducteurs induits par les aimants ou par les enroulements du rotor sont supposés varier sinusoïdalement avec la position de celui-ci.

Si la machine est à distribution de flux non sinusoïdale, la transformation de Park ne permet pas de ramener le problème de sa commande en couple à celui de l'asservissement d'une transformée de ses courants statoriques à une grandeur de référence constante.

En définissant un nouveau repère de travail, il est cependant possible de définir des extensions de la **Transformation de Park (TP)** qui permettent de retrouver cette propriété.

Dans la première partie nous présenterons d'abord ces extensions dans le cas des machines à entrefer constant, ensuite, nous rapprocherons la définition de ces extensions des techniques de linéarisation par retour d'état. Enfin, nous donnerons un exemple des commandes en couple.

### 3.1 Application de la transformation de Park aux machines à distribution de flux non sinusoïdale, [1]:

Nous envisagerons le cas d'une machine à entrefer constant (machine à aimants).

Dans ces conditions, la matrice  $[L_s]$  ne dépend pas de la position du rotor.

En négligeant les effets de la saturation magnétique.

En notant:  $[X_3] = [X_a \ X_b \ X_c]^t$ , un vecteur triphasé quelconque, et  $[u_3], [i_3]$  et  $[\phi_{3R}]$ : sont respectivement, les vecteurs tensions et courants statoriques, flux inducteurs créés au stator par l'excitation placée au rotor.

L'équation aux tensions de la machine s'écrit:

$$[u_3] = R_s [i_3] + L_{ss} \frac{d[i_3]}{dt} + p\Omega \frac{d[\phi_{3R}]}{d(p\theta)} \quad (3.1)$$

Où;  $R_s$ : la résistance des bobinages.

$p$ : nombre de paire de pôles.

$\theta$ : la position de l'axe polaire du rotor par rapport à l'axe magnétique de la phase a du stator.

La matrice  $[L_{ss}]$  est symétrique:

$$[L_{ss}] = \begin{bmatrix} L_s & M_s & M_s \\ M_s & L_s & M_s \\ M_s & M_s & L_s \end{bmatrix}$$

La TP classique résulte de la transformation de Concordia associée à une rotation. Ces deux transformations sont définies respectivement par:

$$T_{31} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, T_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{ et } P(p.\theta) = \begin{bmatrix} \cos(p.\theta) & -\sin(p.\theta) \\ \sin(p.\theta) & \cos(p.\theta) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

En notant respectivement  $i_0$  la composante homopolaire des courants et  $i_{\alpha\beta} = [i_\alpha \ i_\beta]^t$  et  $i_{dq} = [i_d \ i_q]^t$  les vecteurs courants correspondants aux transformées des courants statoriques dans les repères de Concordia et de Park, nous pouvons écrire:

$$(i_3) = T_{31} \cdot i_0 + T_{32} \cdot (i_{\alpha\beta}) \text{ et } (i_{\alpha\beta}) = P(p.\theta) \cdot (i_{dq}) \quad (3.3)$$

**Remarque:** De même, on peut définir les composantes homopolaires  $u_0, \phi_{0R}$  des tensions et flux inducteurs ainsi que les vecteurs  $(u_{ij}), (\phi_{ij})$  avec  $(ij= \alpha\beta \text{ ou } dq)$  correspondant respectivement à leurs transformées dans le repère de Concordia et de Park.

Détaillons les transformations inverses pour les flux induits par le rotor car il joueront un grand rôle par la suite:

$$\phi_{0R} = T_{31}^t \cdot (\phi_{3R}), \quad (\phi_{\alpha\beta R}) = T_{32}^t \cdot (\phi_{3R}), \quad (\phi_{dqR}) = P(-p \cdot \theta) \cdot (\phi_{\alpha\beta R}) \quad (3.4)$$

L'équation aux tensions (3.1) s'écrit, en fonction des variables homopolaires et diphasées:

$$u_0 = R_s \cdot i_0 + (L_s + 2M_s) \frac{di_0}{dt} + p \cdot \Omega \cdot \frac{d\phi_{0R}}{d(p\theta)} \quad (3.5)$$

$$u_{\alpha\beta} = R_s \cdot (i_{\alpha\beta}) + (L_s - M_s) \frac{d(i_{\alpha\beta})}{dt} + p \cdot \Omega \cdot \frac{d(i_{\alpha\beta R})}{d(p\theta)} \quad (3.6)$$

Si la composante homopolaire  $\phi_{0R}$  non nulle, on notera un couple moteur:

$$C_0 = p \cdot i_0 \cdot \frac{d\phi_{0R}}{d(p\theta)} \quad (3.7)$$

**Remarque:** Dans le cas des machines sinusoïdales, le passage dans le repère du rotor (par utilisation de la TP) fait apparaître une simplification supplémentaires des équations. En effet, les composantes du flux inducteur sont constants dans ce repère.

Compte tenu des choix opérés pour la définition de  $\theta$ , on a:

$$\phi_{dR} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \phi_R, \phi_{qR} = 0 \quad (3.8)$$

Où:  $\phi_R$  est l'amplitude maximale du flux inducteur.

Les équations de la machine se réduisent donc à:

$$u_d = R_s \cdot i_d + (L_s - M_s) \frac{di_d}{dt} - p \cdot \Omega \cdot (L_s - M_s) i_q \quad (3.9)$$

$$u_q = R_s \cdot i_q + (L_s - M_s) \frac{di_q}{dt} + p \cdot \Omega \cdot (L_s - M_s) i_d + p \cdot \Omega \cdot \phi_{dR} \quad (3.10)$$

Le couple s'écrit comme le produit scalaire du vecteur courant et du vecteur de la variation du flux inducteur:

$$C = p \cdot [i_d \ i_q]^t \cdot (\phi'_{dqR}) \text{ avec } (\phi'_{dqR}) = P(-p \cdot \theta) \cdot \frac{d\phi_{\alpha\beta R}}{d(p\theta)} \quad (3.11)$$

**Remarque:** le couple de détente est négligeable par inclinaison des encoches du stator.

Si la machine est à distribution de flux sinusoïdale, la composante 'd' de flux ( $\phi'_{dqR}$ ) est nulle et la composante de flux sur l'axe 'q' est constante, l'expression de couple s'écrit:

$$C = p \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \phi_R \cdot i_q = p \cdot \phi'_{qR} i_q = p \cdot \phi_{dR} \cdot i_q \quad (3.12)$$

Le vecteur des courants de référence à imposer pour obtenir un couple constant est constant:

$$(\mathbf{i}_{dq,ref}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_{réf}}{p \cdot \phi_{dR}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_{réf}}{p \cdot \phi_{qR}} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

## 3.2 Extension de Park pour les machines à entrefer constant

### 3.2.1 Propriété de la TP

Nous rappelons que la TP présente, pour les machines à distribution de champ sinusoïdale, quatre propriétés remarquables:

1. Le repère défini par la TP **est orthogonal**,
2. Le repère défini par la TP **est normé**,
3. Comme  $\phi'_{dR}(p \cdot \theta) = 0, \forall \theta$ , d'après (3.11) **le couple ne dépend que du courant (iq)** (voir (3.12)),
4. Le facteur de proportionnalité  $\phi'_{qR} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \phi_R$  entre le courant (iq) et le couple **est constant**.

### 3.2.2 Repère de Park étendu ,[2]:

Dans le cas **des machines à flux sinusoïdal**, **la propriété 3** ne résulte pas tant de l'alignement de l'axe d avec la direction de vecteur représentatif des flux inducteurs **mais bien d'avantage de l'alignement de l'axe q avec le vecteur représentatif de la dérivée de ces flux. **Ces deux propriétés ne sont pas certes** dans le cas d'une machine non sinusoïdale.**

Donc, il convient de rechercher un nouveau repère orthonormé dans le plan ( $\alpha\beta$ ), que nous appellerons **repère de Park étendu**.

Ce repère doit être tel que l'une des deux composantes  $\phi'_{deR}$  et  $\phi'_{qeR}$  du vecteur représentatif de la dérivée du flux inducteur **soit nulle**.

Dans un premier temps, nous choisirons de conserver les propriétés 1 et 2 (repère orthonormé) de façon à maintenir les expressions de conservation de puissance.

L'expression de couple (3.12) sera dans ce nouveau repère:

$$C = p \cdot \phi'_{qeR} \cdot (p \cdot \theta) \cdot i_{qe} \quad (3.14)$$

Nous noterons  $p \cdot \theta + \mu(\theta)$  l'angle de passage du repère ( $\alpha\beta$ ) au nouveau repère  $dq$ -étendu.

La matrice de passage du repère  $(\alpha\beta)$  au repère de Park étendu sera:

$$P_e(p \cdot \theta) = P(p \cdot \theta + \mu(\theta))$$

Pour vérifier la propriété 3, l'angle  $\mu$  doit vérifier:

$$\begin{bmatrix} \phi'_{deR} \\ \phi'_{qeR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi'_{qeR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(p \cdot \theta + \mu) & \sin(p \cdot \theta + \mu) \\ -\sin(p \cdot \theta + \mu) & \cos(p \cdot \theta + \mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_{\alpha R} \\ \phi'_{\beta R} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

On en déduit:

$$\sin(p \cdot \theta + \mu) = -\frac{\phi'_{\alpha R}}{\phi'_R}; \quad \cos(p \cdot \theta + \mu) = \frac{\phi'_{\beta R}}{\phi'_R} \quad \text{Avec } \phi'_R(\theta) = \sqrt{(\phi'_{\alpha R})^2 + (\phi'_{\beta R})^2} \quad (3.16)$$

La figure 3.1 représente l'orientation du repère de Park étendu:

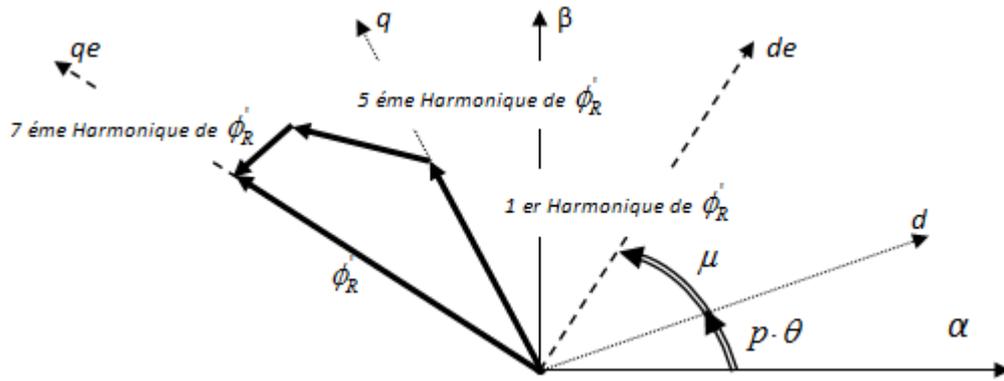


Figure 3.1. Orientation du repère de Park étendu

La Transformation de Park étendu (TPE) est alors définie par:

$$(x_{\alpha\beta}) = P_e(\theta) \cdot (x_{dq,e}) = P(p \cdot \theta + \mu(\theta)) \cdot (x_{dq,e}) = P(\mu(\theta)) \cdot (x_{dq}) \quad (3.17)$$

Où:

$\mu(\theta)$  : dépend a priori de la position du rotor et défini par (3.16).

Les équations aux tensions obtenues par la TPE sont:

$$u_{de} = R_s \cdot i_{de} + (L_s - M_s) \frac{di_{de}}{dt} - p \cdot \Omega \cdot (L_s - M_s) \cdot \left[ 1 + \frac{d\mu}{d(p \cdot \theta)} \right] i_{qe} \quad (3.18)$$

$$u_{qe} = R_s \cdot i_{qe} + (L_s - M_s) \frac{di_{qe}}{dt} + p \cdot \Omega \cdot (L_s - M_s) \cdot \left[ 1 + \frac{d\mu}{d(p \cdot \theta)} \right] i_{de} + p \cdot \Omega \cdot \phi'_R \quad (3.19)$$

On observe que la composante d'axe d étendu de la f.é.m. est nulle.

### 3.2.3 Dénormalisation de la TP [3]:

Pour pouvoir retrouver la propriété 4, il est nécessaire de renoncer à une autre propriété de la TP. Parmi les propriétés P1 à P3, P2 (conservation de la norme) est la moins utile du point de vue de la commande.

L'extension de TP dénormalisée qui, à un vecteur  $(x_{\alpha\beta})$  associe le vecteur  $(x_{dq,ed})$  par:

$$(x_{\alpha\beta}) = P_{ed}(p \cdot \theta) \cdot (x_{dq,ed}) = \begin{bmatrix} p_1(p \cdot \theta) & p_2(p \cdot \theta) \\ p_3(p \cdot \theta) & p_4(p \cdot \theta) \end{bmatrix} \cdot (x_{dq,ed}) \quad (3.20)$$

Devra dès lors vérifier:

- Propriété P1 (Orthogonalité):  $p_1 \cdot p_2 + p_3 \cdot p_4 = 0$
- Propriété P1' (inversibilité):  $p_1 \cdot p_4 - p_2 \cdot p_3 \neq 0$
- Propriété P3 (Orthogonalité):  $\phi'_{dedR}(p \cdot \theta) = 0, \forall \theta \Rightarrow p_4 \cdot \phi'_{\alpha R} - p_2 \cdot \phi'_{\beta R} = 0$
- Propriété 4 (facteur de proportionnalité):  $\frac{[-p_3 \cdot \phi'_{\alpha R} + p_1 \cdot \phi'_{\beta R}][p_2^2 + p_4^2]}{p_1 \cdot p_4 - p_2 \cdot p_3} = K = \text{cst}$

Ces conditions ne définissent pas la transformation  $P_{ed}(p \cdot \theta)$  de façon univoque. On observe que les transformation (3.21) possèdent toutes les propriétés. Si de plus le paramètre  $\lambda(p \cdot \theta)$  est proportionnel à  $\phi'_R(p \cdot \theta)$  la propriété 4 est respectée:

$$P_{ed}(p \cdot \theta) = \begin{bmatrix} \lambda \cos(p \cdot \theta + \mu) & -\frac{1}{\lambda} \sin(p \cdot \theta + \mu) \\ \lambda \sin(p \cdot \theta + \mu) & \frac{1}{\lambda} \cos(p \cdot \theta + \mu) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

L'expression de couple devient alors:

$$C = p \cdot K \cdot i_{qed} \quad (3.22)$$

Donc, la régulation de couple se réduit dès lors à asservir les deux composantes du courant statoriques.

Les équations aux tensions s'écrivent alors:

$$u_{de} = \left[ R_s + p \cdot \Omega \cdot (L_s - M_s) \frac{\phi_R''}{\phi_R'} \right] i_{ded} + (L_s - M_s) \frac{di_{ded}}{dt} - \frac{p \cdot \Omega \cdot (L_s - M_s)}{\lambda^2} \cdot \left[ 1 + \frac{d\mu}{d(p \cdot \theta)} \right] i_{qed} \quad (3.23)$$

$$u_{qe} = \left[ R_s - p \cdot \Omega \cdot (L_s - M_s) \frac{\phi_R''}{\phi_R'} \right] i_{qed} + (L_s - M_s) \frac{di_{qed}}{dt} - p \cdot \Omega \cdot \lambda^2 (L_s - M_s) \cdot \left[ 1 + \frac{d\mu}{d(p \cdot \theta)} \right] i_{ded} + p \cdot \Omega \cdot \lambda \cdot \phi_R' \quad (3.24)$$

### 3.3 Analogies avec les techniques de linéarisation par retour d'état

#### 3.3.1 Cas des machines à entrefer constant

La machine synchrone est un dispositif non linéaire puisque:

- **Les équation d'évolutions (3.1)** des variables d'état électriques (**les courants**) font intervenir le produit de la variable d'état "**vitesse**" et d'une fonction périodique (non linéaire) de la variable "**position**".
- **Les équations d'évolution des grandeurs mécaniques** feront nécessairement intervenir **le couple moteur qui est le produit** du vecteur **des courant** statoriques par **une fonction périodique de la position**.

L'auteur A. Isidori a proposé dans [4] une méthode systématique de linéarisation qui consiste à compenser toutes les non-linéarités existantes entre les entrées et les sorties du système.

Considérons le problème de la commande en couple du MS dans le repère de Concordia. Le sous-système diphasé possède deux entrées indépendantes. il est possible d'atteindre **deux objectifs** simultanément, un *couple désiré et des pertes Joules minimales*.

Le point de fonctionnement recherché est dès lors caractérisé par:

- Le couple est égale sa valeur de référence:

$$C = p \cdot \left[ \phi'_{\alpha R} \cdot i_{\alpha} + \phi'_{\beta R} \cdot i_{\beta} \right] = C_{ref} \quad (3.25)$$

- Les gradients des fonctions couple C et pertes Joules  $P_J$  sont colinéaires [5]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_J}{\partial i_\alpha} \\ \frac{\partial P_J}{\partial i_\beta} \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial i_\alpha} \\ \frac{\partial C}{\partial i_\beta} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial P_J}{\partial i_\alpha} \\ \frac{\partial P_J}{\partial i_\beta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial i_\alpha} \\ \frac{\partial C}{\partial i_\beta} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P_J}{\partial i_\alpha} \cdot \frac{\partial C}{\partial i_\beta} - \frac{\partial P_J}{\partial i_\beta} \cdot \frac{\partial C}{\partial i_\alpha} = 0 \quad (3.26)$$

Nommons  $D(P_J, C)$  la fonction des courants  $i_\alpha$ ,  $i_\beta$  et de la position  $\theta$ :

$$D(P_J, C) = \frac{\partial P_J}{\partial i_\alpha} \cdot \frac{\partial C}{\partial i_\beta} - \frac{\partial P_J}{\partial i_\beta} \cdot \frac{\partial C}{\partial i_\alpha} \quad (3.27)$$

Et choisissons comme sorties du système;  $D(P_J, C)$  et  $C$ , ou bien, des grandeurs proportionnelles à celles-ci;  $y_1 = \lambda_1 \cdot D(P_J, C)$ ,  $y_2 = \lambda_2 \cdot C$ .

✓ **Le Principe de la méthode de linéarisation entrée/sortie par retour d'état consiste à dériver les sorties du système pour qu'au moins une entrée apparaisse.**

Dans le cas considéré, une seule dérivation suffit. On écrit:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A(i_\alpha, i_\beta, \Omega, \theta) + B(i_\alpha, i_\beta, \Omega, \theta) \cdot \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

**Le système sera linéarisable** si la matrice est  $B(i_\alpha, i_\beta, \Omega, \theta)$  **est inversible.**

On définit de nouvelles entrées  $u_1$  et  $u_2$  liées aux entrées  $u_\alpha$  et  $u_\beta$  par:

$$\begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{bmatrix} = B^{-1}(i_\alpha, i_\beta, \Omega, \theta) \cdot \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - A(i_\alpha, i_\beta, \Omega, \theta) \right) \quad (3.29)$$

La relation entre ces nouvelles entrées et les sorties  $y_1$  et  $y_2$  est alors linéaire (double système canonique du premier ordre), tel que:

➤ Si on choisit :  $\lambda_1 = \frac{1}{2 \cdot p \cdot R_s \cdot \phi'_R}$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{p \cdot \phi'_R}$  :

✚ les sorties  $y_1$  et  $y_2$  deviennent homogènes à des courants.

✚ La matrice  $B$  ne dépend que de la position  $\theta$ , et égale à  $P_e(p \cdot \theta)$ .

✚ Le terme  $(B^{-1} \cdot A)$  correspond à la compensation des chutes ohmiques, couplages et de la f.é.m.

Le choix de  $\lambda_1 = \frac{K}{2 \cdot p \cdot R_s \cdot \phi'^2_R}$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{p \cdot K}$  : correspondrait à la TP dénormalisée.

On notera que cette méthode permet de prendre en compte un éventuel couple de détente. il suffit d'en intégrer l'expression dans l'équation (3.25) du couple.

### 3.3.2 Cas des machines à entrefer variable, [6]:

La méthode de linéarisation entrée/sortie peut s'appliquer aux machines à entrefer variable.

Les inductances propres et mutuelles des bobinages statoriques varient avec la position du rotor:

$$[L_{ss}] = \begin{bmatrix} L_{aa}(p.\theta) & M_{ab}(p.\theta) & M_{ac}(p.\theta) \\ M_{ab}(p.\theta) & L_{bb}(p.\theta) & M_{bc}(p.\theta) \\ M_{ac}(p.\theta) & M_{bc}(p.\theta) & L_{cc}(p.\theta) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Pour une machine sinusoïdale on a:

$$\begin{aligned} L_{aa} &= L_{s0} + L_{s2} \cos(2.p.\theta) & , & \quad M_{ab} = M_{s0} + L_{s0} \cos(2.p.\theta - 2\pi/3) \\ L_{bb} &= L_{s0} + L_{s2} \cos(2.p.\theta + 2\pi/3) & , & \quad M_{ac} = M_{s0} + L_{s0} \cos(2.p.\theta + 2\pi/3) \\ L_{cc} &= L_{s0} + L_{s2} \cos(2.p.\theta - 2\pi/3) & , & \quad M_{bc} = M_{s0} + L_{s0} \cos(2.p.\theta) \end{aligned}$$

Avec la conséquence au niveau des équations de tensions:

$$\begin{aligned} u_d &= R_s \cdot i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - p\Omega \cdot L_q \cdot i_q \\ u_q &= R_s \cdot i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + p\Omega \cdot L_d \cdot i_d + p\Omega \cdot \phi_{dR} \end{aligned} \quad (3.31)$$

**Remarque:** la constante de temps relative à la composante d des courants est différente de la constante du temps relative à la composante q.

Avec :

$$L_d = L_{s0} + M_{s0} + \frac{3}{2}L_{s2} \quad \text{et} \quad L_q = L_{s0} - M_{s0} - \frac{3}{2}L_{s2}$$

Un terme supplémentaire  $C_r$  correspondant à un couple réductant dû à la saillance du rotor (on peut aussi tenir en compte un couple de détente):

$$C = C_r + C_e = \frac{1}{2} \cdot p \cdot [i_3]^t \cdot \frac{dL}{d(p \cdot \theta)} [i_3] + p \cdot [i_3]^t \cdot [\phi'_{3R}] \quad (3.32)$$

Dans **le cas d'une machine synchrone à réluctance** variable (sans excitation) seul le couple réductant a une valeur non nulle. il s'exprime en fonction des transformations de Concordia des courants et des flux:

$$C_r = \frac{1}{2} \cdot p \cdot [i_{\alpha\beta}]^t \cdot \frac{dL_{\alpha\beta s}}{d(p \cdot \theta)} [i_{\alpha\beta}] \quad \text{Ou} \quad L_{\alpha\beta s} = \begin{bmatrix} L_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} & L_{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot T_{32}^t \cdot L_{ss} \cdot T_{32} \quad (3.33)$$

Dans **le cas sinusoïdale**, on constate dans le repère de Park, que **le couple réluctant ne dépend pas de la position du rotor** (par contre dans les moteurs synchrones à réluctances variables):

$$C_r = p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_d \cdot i_q \quad (3.34)$$

**Le but est d'atteindre un point de fonctionnement qui pour un niveau de tensions et de courants d'entrée donné, maximise la puissance mécanique fournie.**

On définit les sorties du système:

$$\begin{aligned} y_1 &= C \\ y_2 &= \frac{1}{2R_s} \left( \frac{\partial P_J}{\partial i_\alpha} \cdot \frac{\partial C}{\partial i_\beta} - \frac{\partial P_J}{\partial i_\beta} \cdot \frac{\partial C}{\partial i_\alpha} \right) \\ &= p \cdot (L'_{\alpha\alpha} - L'_{\beta\beta}) \cdot i_\alpha \cdot i_\beta + p \cdot M'_{\alpha\beta} \cdot (i_\beta^2 - i_\alpha^2) - p \cdot \phi'_{\beta R} \cdot i_\alpha + p \cdot \phi'_{\alpha R} \cdot i_\beta \end{aligned} \quad (3.35)$$

Important: La commande non linéaire par retour d'état des machines synchrones (sinusoïdales ou non) exploite le couple de saillance de la machine pour maximiser le rapport de conversion d'énergie de la machine [5].

### 3.4 Interprétation de la transformation de Park à partir des courbes isocouples

Ce point traite plusieurs cas tel que: Cas d'un entrefer constant et variable, cas sinusoïdale et le cas non sinusoïdale. Donc, on se limite dans ce cours au *cas d'un entrefer constant*.

#### 3.4.1 Cas d'un entrefer constant

On a le couple pour ce cas s'exprime comme le produit scalaire des vecteurs courants et dérivée du flux en fonction de la position:

$$C = p \cdot (i_{\alpha\beta})^t \cdot (\phi'_{\alpha\beta R}) = p \cdot (i_{\alpha\beta})^t \cdot \frac{d(\phi_{\alpha\beta R})}{d(p \cdot \theta)} \quad (3.36)$$

L'équation (3.36) correspond à une droite dans le plan ( $\alpha\beta$ ) pour une position  $\theta$  donnée. Comme illustre la figure 3.2:

- Le point de fonctionnement optimal (pertes joule minimale) correspond au point  $K(p \cdot \theta)$  ou la courbe isocouples est tangente au cercle des

pertes Joules constantes (au point où les gradients des couples et pertes Joules sont colinéaires).

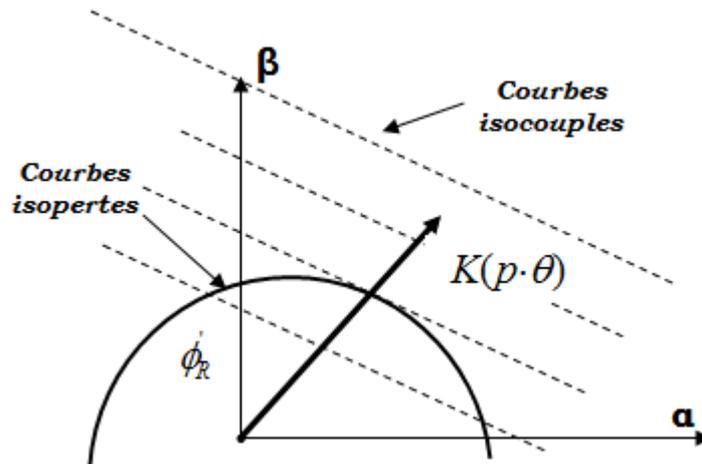


Figure 3.2. Courbes isocouples d'une MS à entrefer constant pour  $\theta$  donnée.

- La TP dans le cas sinusoïdale, ou ces extensions dans le cas non sinusoïdale consiste à construire des repères tels qu'un des deux axes du nouveau repère soit aligné avec la droite passant par l'origine et le point K.
- Le cas d'un entrefer constant consiste à aligner l'axe q avec le vecteur des variations du flux inducteur.
- Ou bien, il suffit d'aligner le vecteur des courants sur l'axe q et de régler son amplitude pour obtenir l'amplitude désirée du couple.

**Note :** Les cas suivants: **Cas d'un entrefer variable, cas sinusoïdale et le cas non sinusoïdale, sont** traités et interprétés dans les références suivantes [7], [8], [9].

### 3.5 Mise en œuvre de la commande vectorielle étendue

On conserve l'architecture classique de la commande vectorielle, tout en l'adoptant à la commande vectorielle étendue (figure 3.3). on a remplacé:

- La matrice de rotation classique  $P(p \cdot \theta)$  par la matrice de similitude  $S(\theta) = S(\gamma(p \cdot \theta) + \pi / 4)$ ,
- Les grandeurs de consignes  $i_d$  et  $i_q$  par les grandeurs de consignes  $k_g$  et  $k_f$ .

**Application:**

Parmi les stratégies de commande vectorielle appliquées à une machine synchrone à aimants permanents, il y'a celle qui consiste à imposer une référence du courant direct  $i_d$  à zéro. on a appliqué cette méthode à un ce moteur dont les caractéristiques nominales sont:  $V=380\text{ V}$  ;  $p=3$  ;  $R_s=1.4\Omega$  ;  $L_d= 0.0066\text{H}$  ;  $L_q=0.0058\text{H}$  ;  $f_m=0.00038\text{N.m.s}^2/\text{rad}$ ,  $J_m=0.0016\text{ N.m.s /rad}$  ;  $\Phi_f =0.1546\text{ Wb}$  ;  $T_n =10\text{ N.m}$ .

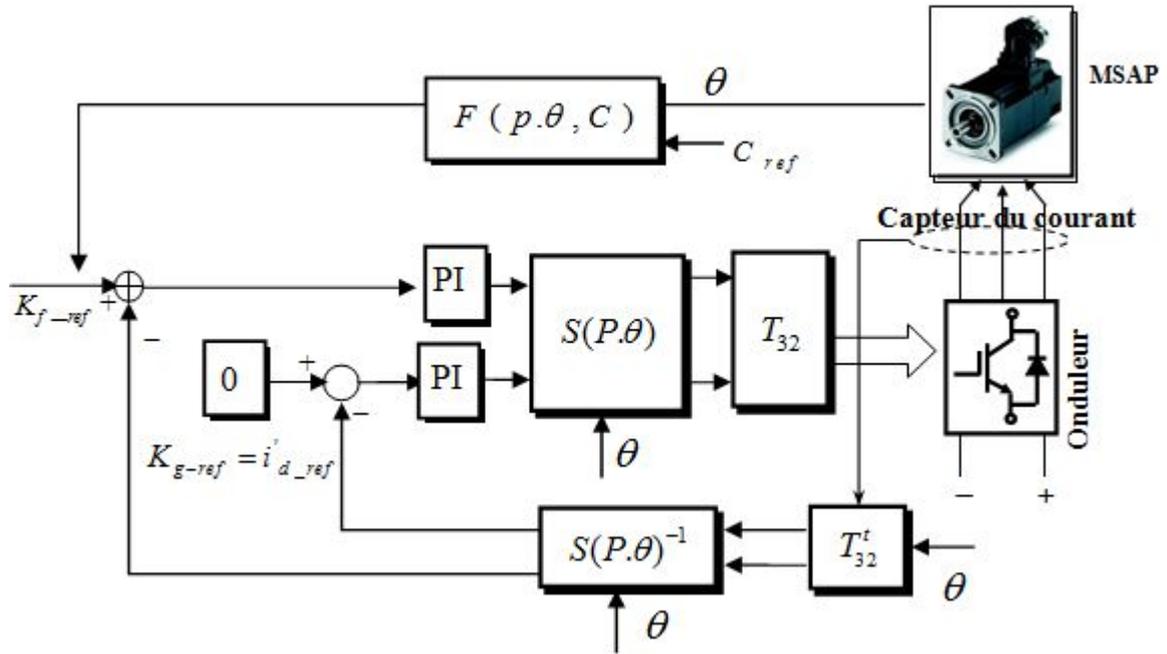


Figure 3.3. Schéma de contrôle vectoriel modifié réduit d'une TP étendue

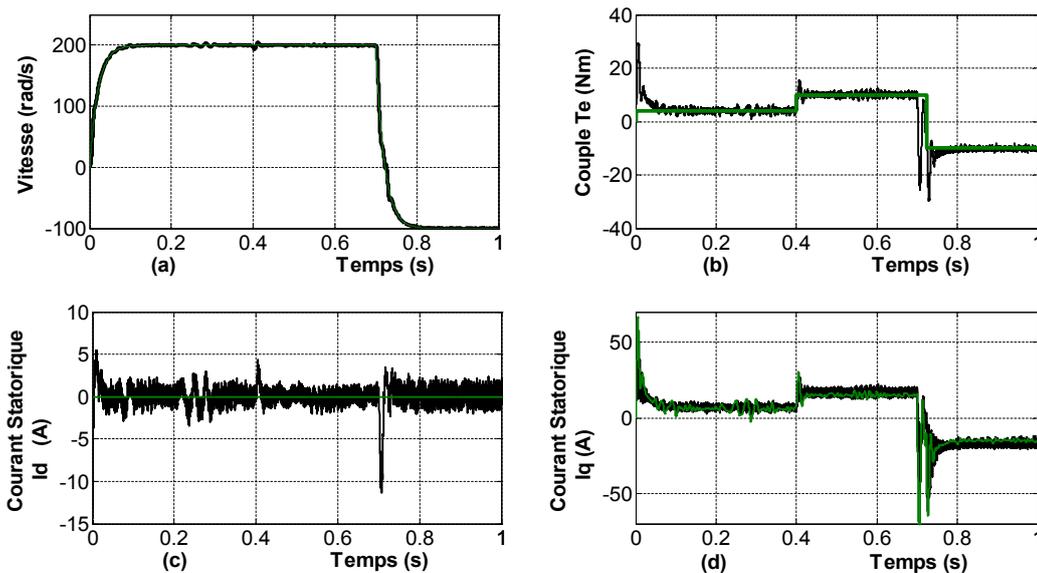


Figure 3.4. Schéma de contrôle vectoriel modifié réduit d'une TP étendue

La figure (3.4) illustre les résultats de simulation de la commande vectorielle. Elle montre que les performances de poursuite de la vitesse sous les contraintes de courant sont très satisfaisantes. Nous remarquons aussi que la composante directe du courant  $i_d$  est maintenue à zéro et le courant est bien maîtrisé en régime transitoire. La chute relative de la vitesse à un couple de charge nominale est de 3.1% et le temps d'établissement est de 20ms. La vitesse présente des oscillations autour de la vitesse de référence pendant toute la durée de simulation avec un temps de réponse à 95% de:  $t_{r_{95\%}} = 0.0374s$ .

### 3.6 Conclusion

On a présenté plusieurs approches en vue d'obtenir des extensions de la TP au cas des machines à distribution de flux non sinusoïdale.

Dans le cas des machines sinusoïdales, les transformations d'états calculées pour obtenir les propriétés de la TP sont les fruits d'une méthode simple et directe. Cependant, cette méthode est limitée au seul cas des machines à entrefer constant.

La méthode de linéarisation par retour d'état permet de traiter tous types de problèmes.

Dans le cas des commandes vectorielles des machines sinusoïdales, on a proposé de travailler autour de deux points de fonctionnement pertes Joule minimales et amplitude maximale du couple désiré.

### 3.7 Exercice d'application

Sachant que le principe de la commande vectorielle modifiée réduit d'une TP étendue appliquées à une machine synchrone à aimants permanents, consiste à imposer une référence du courant direct  $i_d$  à zéro:

1. Etablir le modèle mathématique (relations entre les flux et les courants) de la machine synchrone à aimants permanents surfaciques (rotor lisse) dans le repère  $(d,q)$ ;
2. Tracer un schéma technologique (à base de transistors, de thyristors et de diodes) d'une chaîne d'alimentation d'un moteur synchrone constituée d'une source de tension triphasée, un redresseur triphasé, un filtre LC et un onduleur de tension qui alimente le moteur synchrone;
3. Appliquer le principe de la commande vectorielle;
4. Tracer le schéma de contrôle vectoriel modifié réduit d'une TP étendue.

### 3.8 Bibliographie

- [1] D. GRENIER, F. LABRIQUE, H. BUYSE, E. MATAGNE, " Electromécanique, Convertisseurs d'énergie et Actionneurs", Dunod, Paris, 2001.
- [2] D. GRENIER, J.P. LOUIS, " Modeling for control of a non-Sinewive PMS Drive by an extension of Park's Transformation". Proc. 4th IMACS TCI, Montréal, 7-9 Juillet 1993.
- [3] D. GRENIER, S. YALLA, J.P. LOUIS, "Définition d'extensions de la transformation de Park pour la commande de moteurs synchrones à aimants montés en surface", Eur. Phys. J. AP A, pp. 233-246, 1998.
- [4] A. ISIDORI, " Nonlinear Control Systems, an Introduction, Springer Verlag, New-York, 1989.
- [5] S.YALLA, D. GRENIER, F. LABRIQUE, B. ROBYNS, " Using State feedback Linearization Techniques to Define New reference frame for vector control of PMSM", Proceeding of 2000 symposium on power Electronics, Electrical Drives, Automation & Motion. pp. 13-18, Italie, Juin 2000.
- [6] C. DELECLUSE, D. GRENIER, "A Measurement Method of the exact variations of the self and mutual inductances of a buried PMSM and its application to the reduction of torque ripples", 5th IEEE-International Workshop on advanced motion control, Portugal, pp.191-197, 1998.
- [7] D. FLIELLER, "Etude de systèmes électrotechniques non linéaires échantillonnées. Application a la modélisation et a la commande de machine a reluctance variable a double saillance". Thèse de doctorat, Université Pierre et Marrie Curie, 27 octobre 1995.
- [8] G. STURTZER, " Modèle inverse et réduction de l'ondulation de couple pour machines synchrones déduits des courbes isocouples. Extension de la transformation de Park pour moteur synchrones à pôles saillants non sinusoïdaux et saturés", Thèse de doctorat de l'ENS de Cachan, 28 novembre 2001.
- [9] D. DIALLO, G. CHAMPENOIS, H. DAFFIX, " On-line adjustment of the torque angle for the torque optimization and diagnosis purposes in anisotropic PSMS", IECON Hawai, pp. 887-890, 1993.

# Chapitre 4

---

## Modélisation de l'association convertisseurs-machines

**Prérequis:** Maîtrise du fonctionnement de l'onduleur

**Objectif :** A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de:

- ✓ Modéliser l'onduleur de tension à 2 niveaux;
- ✓ Apprendre les différents types de commande de "MLI";
- ✓ Utiliser la modélisation vectorielle de la commande

*" Les difficultés ont été créées par la nature, pour exalter au plus haut point le génie du chercheur"*

*Pierre Boule.*

## Introduction:

On ne peut parler de la commande d'une machine, sans qu'on parle du convertisseur qui lui est associé pour cette commande et de son alimentation, par exemple, la MAS est généralement commandée en agissant sur la fréquence de son alimentation, à travers un onduleur de tension.

On présentera dans ce chapitre; des rappels sur le fonctionnement d'un onduleur triphasé de tension, Les différents types de commande de MLI, Modélisation vectorielle de la commande MLI, Commande vectorielle classique et Commande sinus-triangle. on terminera par une conclusion.

### 4.1 Rappels sur le fonctionnement d'un onduleur triphasé de tension,[1]:

#### 4.1.1 Structure de l'onduleur et notations

Une machine est souvent alimentée par un convertisseur statique, comme illustrée sur la figure (4.1);

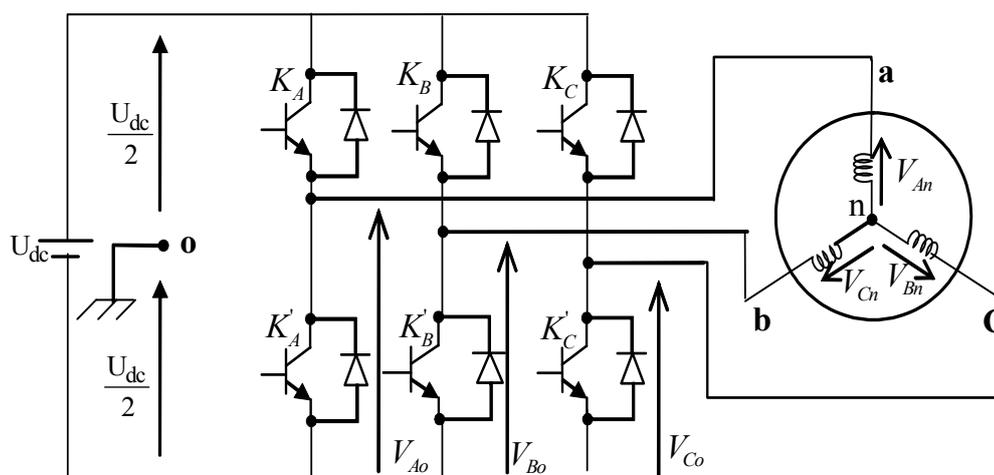


Figure 4.1. Représentation de l'ensemble onduleur-Machine

Pour évaluer les tensions par phase, prenons en compte les hypothèses suivantes :

- La source d'alimentation de tension  $U_{dc}$  est continue, de puissance illimitée ou suffisamment grande.
- Chaque bras est composé de deux interrupteurs parfaits aux états (bloqué ou passant) complémentaires.
- Les temps morts nécessaires pour éviter les courts-circuits sont négligés.

- La machine est couplée en étoile, et le neutre de la machine n'est pas connecté au point milieu. La somme des courants statoriques est donc nulle.
- La charge est supposée équilibrée.
- Les tensions de sortie  $V_{Ao}$ ,  $V_{Bo}$  et  $V_{Co}$  sont référencées par rapport à un point milieu fixe.

On note  $K_A, K_B, K_C$  les interrupteurs "haut" de chaque bras, et  $K'_A, K'_B, K'_C$  les interrupteurs "bas". (ces interrupteurs peuvent être réalisés avec des transistors MOS, IGBT ou GTO munis d'une diode en antiparallèle suivant la puissance à transmettre).

#### 4.1.2 Modèle idéalisé du fonctionnement

L'onduleur est commandé à partir des grandeurs logiques  $C_i$   $\{i = A, B, C\}$ .

- Si  $C_i = 1$ , alors  $K_i$  est fermée et  $K'_i$  est ouvert,
- Si  $C_i = 0$ , alors  $K_i$  est ouvert et  $K'_i$  est fermée.

Les tensions composées  $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$  sont obtenues à partir des sorties de l'onduleur comme suit :

$$\begin{cases} U_{AB} = V_{Ao} - V_{Bo} \\ U_{BC} = V_{Bo} - V_{Co} \\ U_{CA} = V_{Co} - V_{Ao} \end{cases} \quad (4.1)$$

Où :  $V_{Ao}, V_{Bo}, V_{Co}$  sont les tensions simples des phases.

Puisque Les tensions simples des phases de la machine ont une somme nulle, on peut obtenir les relations suivantes :

$$\begin{cases} V_{An} = 1/3 [U_{AB} - U_{CA}] \\ V_{Bn} = 1/3 [U_{BC} - U_{AB}] \\ V_{Cn} = 1/3 [U_{CA} - U_{BC}] \end{cases} \quad (4.2)$$

En introduisant la tension du neutre de la machine par rapport au point de référence (o), On aboutit à :

$$\begin{cases} V_{An} + V_{no} = V_{Ao} \\ V_{Bn} + V_{no} = V_{Bo} \\ V_{Cn} + V_{no} = V_{Co} \end{cases} \quad (4.3)$$

Donc, on peut déduire que :

$$V_{no} = \frac{1}{3}(V_{Ao} + V_{Bo} + V_{Co}) \quad (4.4)$$

Pour une commutation idéale on obtient :

$$V_{io} = C_i U_c - \frac{U_c}{2} \quad (4.5)$$

On obtient ;

$$\begin{cases} V_{Ao} = (C_A - 0.5) \cdot U_c \\ V_{Bo} = (C_B - 0.5) \cdot U_c \\ V_{Co} = (C_C - 0.5) \cdot U_c \end{cases} \quad (4.6)$$

En remplaçant (4.4) dans (4.3), on aboutit à :

$$\begin{cases} V_{An} = \frac{2}{3}V_{Ao} - \frac{1}{3}V_{Bo} - \frac{1}{3}V_{Co} \\ V_{Bn} = -\frac{1}{3}V_{Ao} + \frac{2}{3}V_{Bo} - \frac{1}{3}V_{Co} \\ V_{Cn} = -\frac{1}{3}V_{Ao} - \frac{1}{3}V_{Bo} + \frac{2}{3}V_{Co} \end{cases} \quad (4.7)$$

En remplaçant (4.6) dans (4.7), on déduit :

$$\begin{bmatrix} V_{An} \\ V_{Bn} \\ V_{Cn} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot U_c \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A \\ C_B \\ C_C \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Donc l'onduleur est modélisé par la matrice de transfert T donnée par :

$$T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

### 4.1.3 Valeurs accessibles des tensions

On note que:

$$\begin{aligned} v_{3o} &= \begin{pmatrix} V_{Ao} \\ V_{Bo} \\ V_{Co} \end{pmatrix}, & v_3 &= \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix}, & i_3 &= \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix}, \\ v_{2o} &= \begin{pmatrix} V_{\alpha o} \\ V_{\beta o} \end{pmatrix}, & v_2 &= \begin{pmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{pmatrix}, & i_2 &= \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

En utilisant les sous matrices de Concordia:

$$T_{31} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

On peut décomposer chacun des systèmes ( $v_{3o}$ ,  $v_3$  et  $i_3$ ) en un système diphasé ( $v_{2o}$ ,  $v_2$  et  $i_2$ ) et un système homopolaire ( $v_{ho}$ ,  $v_h$  et  $i_h$ ). Tel que:

$$\begin{aligned} v_{3o} &= T_{32} \cdot v_{2o} + T_{31} \cdot v_{ho} \leftrightarrow v_{2o} = T_{32}^t \cdot v_{3o}, v_{ho} = T_{31}^t \cdot v_{3o} \\ v_3 &= T_{32} \cdot v_2 + T_{31} \cdot v_h \leftrightarrow v_2 = T_{32}^t \cdot v_3, v_h = T_{31}^t \cdot v_3 \\ i_3 &= T_{32} \cdot i_2 + T_{31} \cdot i_h \leftrightarrow i_2 = T_{32}^t \cdot i_3, i_h = T_{31}^t \cdot i_3 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Le tableau 4.1 présente la relation entre les tensions ( $v_{3o}$ ,  $v_3$ ) et ( $v_\alpha$ ,  $v_\beta$ ):

N°	Commande			Tension Simples			Courant continu	Tensions diphasées	
	$C_A$	$C_B$	$C_C$	$V_A$	$V_B$	$V_C$	$i$	$V_\alpha / \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot U_c$	$V_\beta / \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot U_c$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	$2U_c/3$	$-U_c/3$	$-U_c/3$	$i_a$	1	0
2	1	1	0	$U_c/3$	$U_c/3$	$-2U_c/3$	$-i_c$	1/2	$\sqrt{3}/2$
3	0	1	0	$-U_c/3$	$2U_c/3$	$-U_c/3$	$i_b$	-1/2	$\sqrt{3}/2$
4	0	1	1	$-2U_c/3$	$U_c/3$	$U_c/3$	$-i_a$	-1	0
5	0	0	1	$-U_c/3$	$-U_c/3$	$2U_c/3$	$i_c$	-1/2	$-\sqrt{3}/2$
6	1	0	1	$U_c/3$	$-2U_c/3$	$U_c/3$	$-i_b$	1/2	$-\sqrt{3}/2$
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0

**Tableau 4.1. Relation entre les tensions ( $v_{3o}$ ,  $v_3$ ) et ( $v_\alpha$ ,  $v_\beta$ )**

#### 4.1.4 Schéma fonctionnel de l'onduleur

Le schéma synoptique de l'onduleur de tension sur **Matlab/Simulink** est illustré sur la figure 4.2, tel que le **subsystem** regroupe trois signaux sinusoïdaux décalés l'un par rapport à l'autre de  $120^\circ$  :

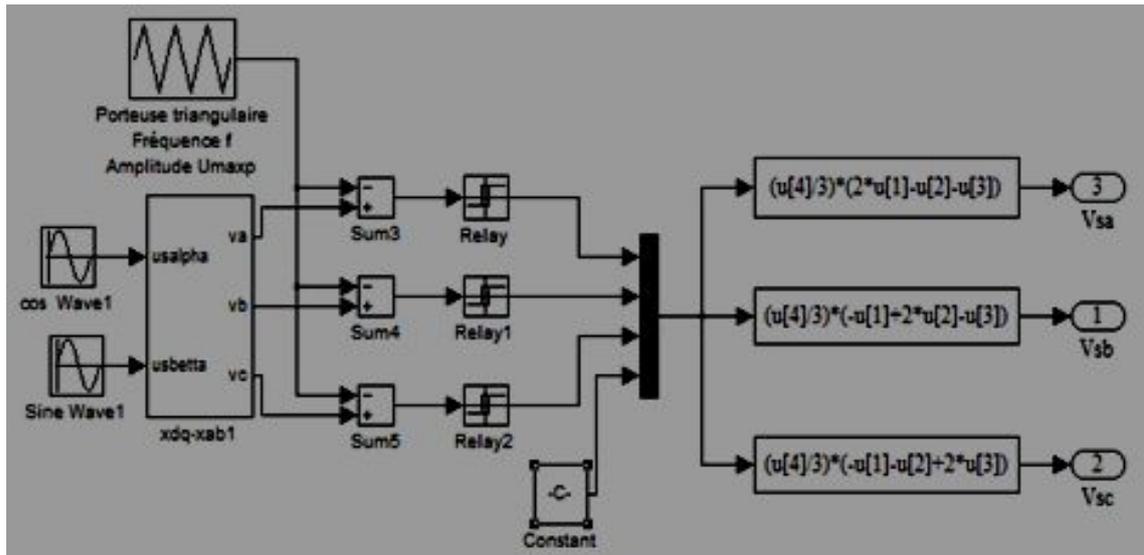


Figure 4.2. Représentation de l'onduleur de tension sur Matlab Simulink

## 4.2 Les différents types de commande MLI, [2],[3]

Il est nécessaire d'établir des stratégies de commande de l'onduleur telle que la tension générée soit proche de la forme sinusoïdale avec un faible taux d'harmoniques. Plusieurs types de modulation de largeur d'impulsion sont utilisées (MLI avec calage à gauche, MLI avec calage à droite, ...etc.).

### 4.2.1 Commande avec calage à gauche

#### ➤ Principe:

Cette commande consiste à mettre au début de chaque intervalle de "hachage" les signaux de commande  $C_A$ ,  $C_B$ ,  $C_C$  à 1 et à les ramener à zéro respectivement en  $\tau_{Ak}$ ,  $\tau_{Bk}$  et  $\tau_{Ck}$ , ( $0 < \tau_{Ak}, \tau_{Bk}, \tau_{Ck} < T; k \in [1, 2, \dots, etc]$ ). On obtient des tensions sous formes de créneaux calés à gauche (figure 4.3.a):

### 4.2.2 Commande avec calage à droite

#### ➤ Principe:

Cette commande est symétrique de la commande avec calage à gauche. elle consiste à mettre les signaux de commande  $C_A$ ,  $C_B$ ,  $C_C$  à zéro au début de chaque période et à les maintenir à zéro respectivement jusqu'en  $T - \tau_{Ak}$ ,  $T - \tau_{Bk}$  et  $T - \tau_{Ck}$ . On obtient les tensions illustrées sur la figure 4.3.b:

**Remarque:** On peut également réaliser les deux commandes avec calage à gauche ou à droite, tout en comparant à une porteuse en dents de scie croissante de période  $T$  trois signaux de référence.

#### 4.2.3 Commande "Centrée"

##### ➤ **Principe:**

On peut éliminer les commutations qui se produisent au début de chaque période de hachage et qui résultent;

- De la mise à 1 des variables  $C_A$ ,  $C_B$ ,  $C_C$  pour la commande avec calage à gauche;
- De mise à 0 des variables  $C_A$ ,  $C_B$ ,  $C_C$  pour la commande avec calage à droite;
- En changeant de calage d'une période de hachage à la suivante.

### 4.3 Modélisation vectorielle de la commande MLI,[2],[4],[5];

Parmi les techniques numériques on trouve la modulation vectorielle (ou Space Vector Modulation (**SVM**)) qui traite les signaux directement dans le plan diphasé de la transformée nommée de Concordia.

#### 4.3.1 Principe de la MLI vectorielle

Contrairement à d'autres méthodes, la MLI vectorielle ne s'appuie pas sur des calculs séparés des modulations pour chacun des bras de l'onduleur. Un vecteur tension de contrôle est calculé globalement et approximé, sur une période de modulation  $T$ , par un vecteur tension moyen.

#### 4.3.2 Représentation dans le plan de Concordia

Considérons l'onduleur de tension triphasé figure (4.1). Ses six interrupteurs sont commandés de manière complémentaire deux à deux, nous avons seulement trois degrés de liberté, ayant deux états chacun: Fermé ou Ouvert. Nous pouvons alors représenter les 8 vecteurs d'états possibles dans le plan ( $\alpha\beta$ ) figure (4.4a).

On peut ainsi reconstruire n'importe quelle tension  $\vec{V}_s$  en combinant ses deux vecteurs adjacents figure (4.4b). En supposant que  $\vec{V}_s$  se trouve dans le 1er secteur du plan ( $\alpha\beta$ ),  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont les temps d'application de ses vecteurs adjacents :  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  respectivement.

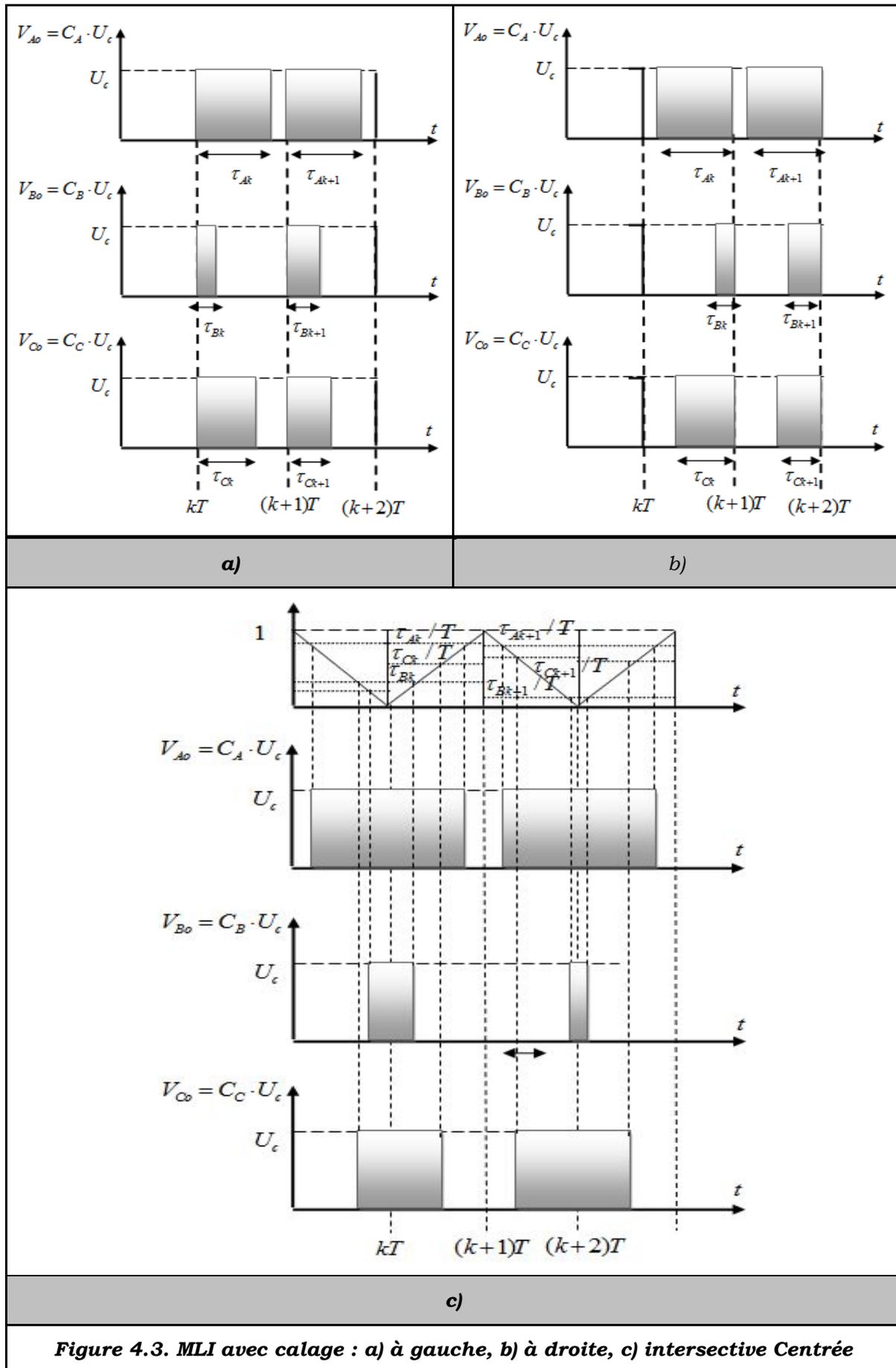
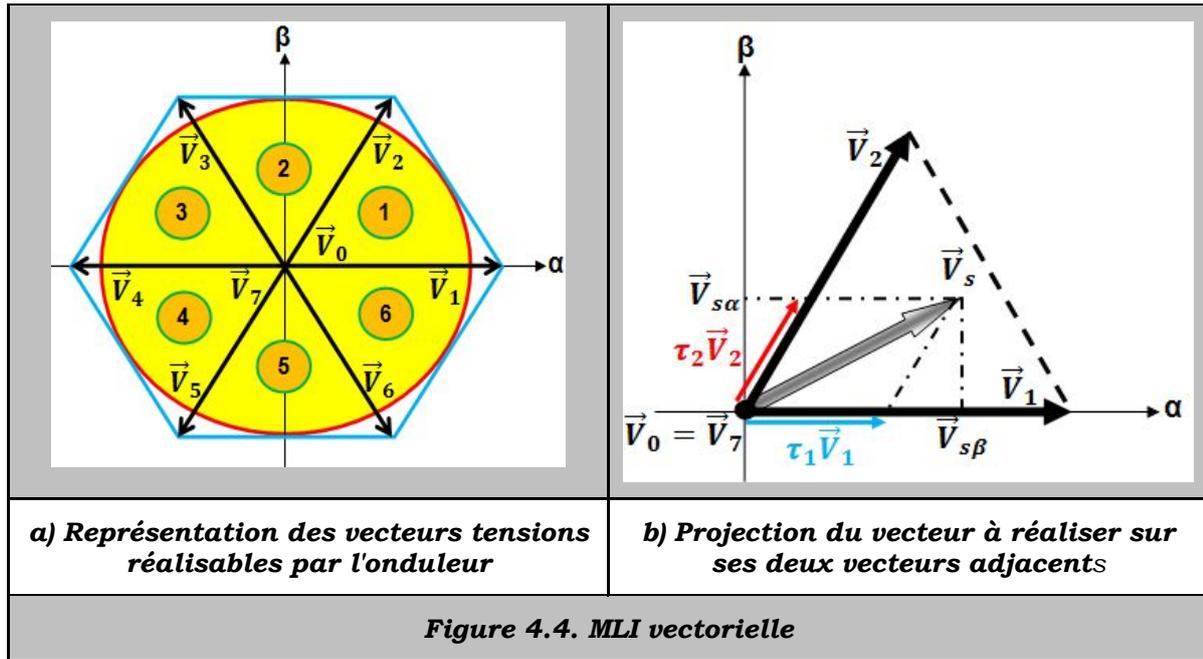


Figure 4.3. MLI avec calage : a) à gauche, b) à droite, c) intersective Centrée



La somme des deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  respectivement appliqués pendant les durées  $\tau_1$  et  $\tau_2$  donne donc le vecteur  $\vec{V}_s$  initial. En combinant ces deux vecteurs avec les vecteurs nuls ( $\vec{V}_0$  et  $\vec{V}_7$ ) et en codant par un 1 un interrupteur fermé et pour un zéro un interrupteur ouvert, nous pouvons reconstituer les signaux de commande à appliquer pour obtenir le vecteur  $\vec{V}_s$  souhaité, comme le montre l'exemple de la figure (4.5).

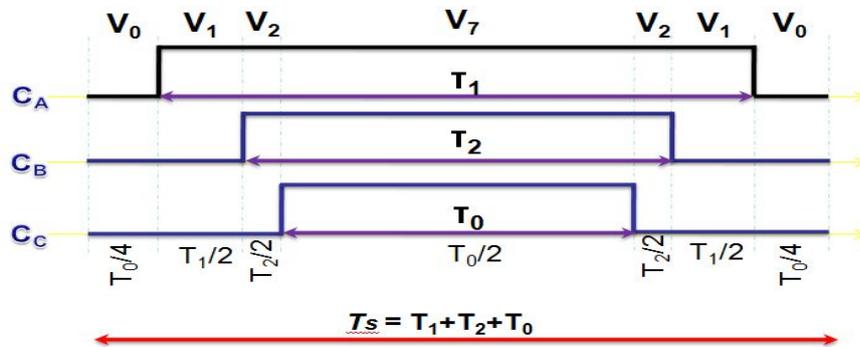


Figure 4.5. Reconstitution des signaux de commande

Comme on l'a déjà indiqué, chacune des variables de commande  $C_A$ ,  $C_B$ ,  $C_C$  ne peut prendre que la valeur 0 ou la valeur 1, et le vecteur  $C_3$  ne peut prendre que les huit valeurs distinctes au tableau 4.1, dans lesquelles nous introduisons les notations suivantes:

$$C_3 = \begin{pmatrix} C_A \\ C_B \\ C_C \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} \tau_A \\ \tau_B \\ \tau_C \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

- $C_3^1$  la valeur du vecteur  $C_3$  pour laquelle les trois composantes valent 1;
- $C_3^0$  la valeur du vecteur  $C_3$  pour laquelle les trois composantes valent 0;
- $i, j$  et  $k$  est une permutation de A, B et C.

**Exemple** : Si l'on  $[i,j,k]=[B,A,C]$ , c'est-à-dire pour  $\tau_B/T \succ \tau_A/T \succ \tau_C/T$  le vecteur correspond à  $\prec v_{2o} \succ$  correspond à une combinaison linéaire des vecteurs  $(\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3)$  et est situé dans le secteur 2:

Le tableau 4.2 indique le secteur du plan de Concordia auquel appartient le vecteur  $\prec v_{2o} \succ$  en fonction du classement de  $\tau_A/T, \tau_B/T, \tau_C/T$ .

Classement	Secteur	Valeur de $ijk$
$\tau_A/T \succ \tau_B/T \succ \tau_C/T$	<b>1</b>	<b>ABC</b>
$\tau_B/T \succ \tau_A/T \succ \tau_C/T$	<b>2</b>	<b>BAC</b>
$\tau_B/T \succ \tau_C/T \succ \tau_A/T$	<b>3</b>	<b>BCA</b>
$\tau_C/T \succ \tau_B/T \succ \tau_A/T$	<b>4</b>	<b>CBA</b>
$\tau_C/T \succ \tau_A/T \succ \tau_B/T$	<b>5</b>	<b>CAB</b>
$\tau_A/T \succ \tau_C/T \succ \tau_B/T$	<b>6</b>	<b>ACB</b>

**Tableau 4.2. Position du vecteur  $\prec v_{2o} \succ$  en fonction de classement  $\tau_A/T, \tau_B/T, \tau_C/T$**

**Remarque:**

Cette technique de modulation est beaucoup plus efficace que la précédente puisqu'elle permet d'obtenir des vecteurs tensions inscrits dans le polygone de la figure (4.4a), donc des tensions crêtes aux bornes de la charge de  $\pm U_c$  (à comparer avec la valeur de  $\frac{\sqrt{3}}{2}U_c$  obtenue avec la modulation intersective), [6].

**Important:** Pour plus de détails voir la référence, [7].

A titre d'exemple, nous allons considérer;

- **La modulation vectorielle classique** car elle permet de maximiser l'amplitude des tensions générées et de déboucher sur implantation numérique;
- **La modulation sinus-triangle** car elle conduit à une implantation analogique simple.

#### 4.4 Commande vectorielle classique, [8]:

Dans cette commande, nous choisissons de rendre égales les durées des vecteurs  $C_3^1$  et  $C_3^0$ . Ceci revient à imposer la relation suivante:

$$1 - \frac{\tau_i}{T} = \frac{\tau_k}{T} \quad (4.14)$$

Dans le cas du secteur 3, l'équation 4.14 s'écrit:

$$1 - \frac{\tau_B}{T} = \frac{\tau_A}{T} \quad (4.15)$$

En tenant compte de ce que l'on a on obtient:

$$\langle v_3 \rangle = \begin{pmatrix} V_{A,ref} \\ V_{B,ref} \\ V_{C,ref} \end{pmatrix} = T_{32} \begin{pmatrix} V_{\alpha o,ref} \\ V_{\beta o,ref} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} V_{\alpha o,ref} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} V_{\alpha o,ref} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\beta o,ref} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} V_{\alpha o,ref} - \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\beta o,ref} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Les expressions des durées du commutation par rapport à la période de hachage sont données par:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_A}{T} &= \frac{1}{2} + \frac{V_{A,ref}}{U_c} - \frac{V_{B,ref} + V_{A,ref}}{2U_c} \\ \frac{\tau_B}{T} &= \frac{1}{2} + \frac{V_{B,ref}}{U_c} - \frac{V_{B,ref} + V_{A,ref}}{2U_c} \\ \frac{\tau_C}{T} &= \frac{1}{2} + \frac{V_{C,ref}}{U_c} - \frac{V_{B,ref} + V_{A,ref}}{2U_c} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Compte tenu des valeurs de  $v_{\alpha,ref}$  et  $v_{\beta,ref}$ , on a dans  $v_{B,ref} \geq v_{C,ref} \geq v_{A,ref}$ .

D'une manière générale, si  $i, j, k$  est la permutation qui correspond au secteur dans lequel se trouve le vecteur  $\langle v_{2o} \rangle$ , on obtient les équations ci dessous (Eqs 4.18).

On vérifie aisément à partir de (4.16) qu'en fonction des valeurs que peuvent prendre  $v_{\alpha,ref}$  et  $v_{\beta,ref}$  dans le secteur concerné, on a  $v_{i,ref} \geq v_{j,ref} \geq v_{k,ref}$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau_i}{T} &= \frac{1}{2} + \frac{V_{i,ref}}{U_c} - \frac{V_{i,ref} + V_{k,ref}}{2U_c} \\
 \frac{\tau_j}{T} &= \frac{1}{2} + \frac{V_{j,ref}}{U_c} - \frac{V_{i,ref} + V_{k,ref}}{2U_c} \\
 \frac{\tau_k}{T} &= \frac{1}{2} + \frac{V_{k,ref}}{U_c} - \frac{V_{i,ref} + V_{k,ref}}{2U_c}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

#### 4.5 Commande Sinus-triangle

Cette commande consiste à imposer à la composante  $v_h$  homopolaire de  $v_{3o}$  d'être en valeur moyenne égale à  $\frac{\sqrt{3}}{2}U_c$ . On obtient ainsi entre :

$$v_{3,ref} = T_{32} \cdot v_{2o,ref} \quad \text{Et} \quad v_{3o,ref} = T_{32} \cdot v_{2o,ref} + T_{31} \cdot v_h$$

la relation suivante:

$$v_{3o,ref} = \begin{pmatrix} \frac{V_{Ao,ref}}{U_c} \\ \frac{V_{Bo,ref}}{U_c} \\ \frac{V_{Co,ref}}{U_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_{A,ref}}{U_c} + \frac{1}{2} \\ \frac{V_{B,ref}}{U_c} + \frac{1}{2} \\ \frac{V_{C,ref}}{U_c} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} V_{\alpha o,ref} + \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} V_{\alpha o,ref} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\beta o,ref} + \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} V_{\alpha o,ref} - \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\beta o,ref} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

Comme on a par ailleurs :

$$\frac{\tau_A}{T} = \frac{V_{Ao,ref}}{U_c}, \quad \frac{\tau_B}{T} = \frac{V_{Bo,ref}}{U_c}, \quad \frac{\tau_C}{T} = \frac{V_{Co,ref}}{U_c} \tag{4.19}$$

Il suffit pour obtenir les valeurs de  $\tau_A/T$ ,  $\tau_B/T$ ,  $\tau_C/T$ , d'ajouter 1/2 aux valeurs  $v_{A,ref}$ ,  $v_{B,ref}$  et  $v_{C,ref}$  rapportées à  $U_c$ .

Cette commande est basée dans une implantation analogique sur l'emploi de trois comparateurs, chacun d'eux fournissant le signal de commande d'un des bras en comparant, avec une porteuse triangulaire, des références  $\frac{v_{Ao,ref}}{U_c}$ ,  $\frac{v_{Bo,ref}}{U_c}$ ,  $\frac{v_{Co,ref}}{U_c}$  dont l'obtention à partir de  $\frac{v_{\alpha o,ref}}{U_c}$ ,  $\frac{v_{\beta o,ref}}{U_c}$  à l'aide d'amplificateurs sommateurs (équation 4.19). La figure 4.6 illustre le principe de cette commande:

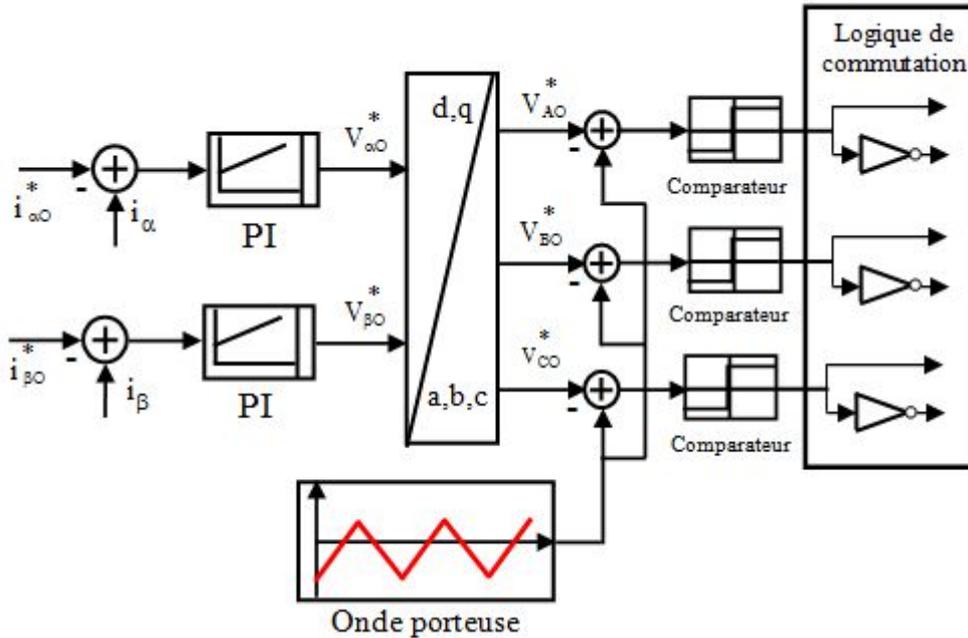


Figure 4.6. Principe MLI Sinus-triangle

## 4.6 Conclusion

Nous avons présenté un double objectif dans ce chapitre:

- ✚ La démonstration que l'emploi des transformations de variables permet de bien comprendre la synthèse des séquences de commande des interrupteurs dans les onduleurs triphasés de tension commandés en MLI.
- ✚ La démonstration que tant pour les deux modulations vectorielle et sinus triangle, la génération des signaux MLI peut se réaliser de manière simple.

## 4.7 Exercice d'application

1. Donner le modèle de l'onduleur qui permet de calculer les tensions triphasées  $U_{sa}$ ,  $U_{sb}$  et  $U_{sc}$  en fonction des signaux de commande  $S_a$ ,  $S_b$  et  $S_c$  et de la tension continue  $E$ .
2. Expliquer le principe de la commande MLI sinus-triangle d'un onduleur de tension triphasé.
3. Quels sont les avantages de la commande MLI par rapport à la commande pleine onde de l'onduleur de tension.

## 4.8 Bibliographie

- [1] I. BENLALOUI, "Commande, Observation et Diagnostic d'un Système Non-linéaire : Application à la Machine Asynchrone en Présence de Défauts", Thèse de doctorat UNIV-BATNA 2016.
- [2] A. Maakouf « Technique de commande avancée » Cours magistère, UNIV-BATNA 2007.
- [3] H. BUHLER « Convertisseurs statiques » Presses, Polytechniques et Universitaires Romandes 1991.
- [4] L. MOUSSAOUI « Etude de la commande de l'ensemble MAS-onduleur à source de courant » Thèse de doctorat UNIV-BATNA 2007.
- [5] J.P. LOUIS et C. BERGMANN « Machines Asynchrones "commande par contrôle scalaire" » Article D 3 622 Technique de l'ingénieur 2006.
- [6] M. Pinard « Commande électriques des moteurs électriques » Edition 1999.
- [7] J.M. RETIF, " Commande vectorielle des machines asynchrones et synchrones", Cours 5ème Année GE Option ISIP, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Edition, 2008.
- [8] J.P. LOUIS, " Modèle pour la commande des actionneurs électriques", Edition, Lavoisier, Paris. 2004.

# Chapitre 5

---

## Modélisation dynamique des machines asynchrones

**Prérequis:** modèle de la machine asynchrone triphasé et biphasé

**Objectif :** A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de:

- ✓ Modéliser la machine asynchrone (MAS) triphasée et diphasée;
- ✓ Établir le modèle dynamique de la MAS lié à sa commande.

*"Mistakes are the proof that you are trying"*

## Introduction:

La machine à induction de par ses caractéristiques traditionnelles, telles que la robustesse, le coût et son utilisation très répandue en industrie, fait de nos jours l'élément essentiel dans la plupart des motorisations industrielles à vitesse variable.

Pour pouvoir simuler le comportement interne de la machine asynchrone l'élaboration de modèles performant est une étape s'avère indispensable. En plus, plusieurs lois de commande ont été élaborées, en vue de concurrencer les variateurs à CC qui ont des performances dynamiques très élevées mais un assez grand nombre d'inconvénients, liées à leur structure. Ce sont eux qui font l'objet du présent chapitre .

### 5.1 Modélisation d'une machine asynchrone diphasée, [1][2]:

Nous considérons une MAS diphasée au stator et au rotor, et nous nous appuyons sur un certain nombre d'hypothèses dont [3], [4]:

- L'induction à répartition sinusoïdale dans l'entrefer;
- Parfaite symétrie du point de vue magnétique et électrique de chacune des deux armatures ;
- Linéaire au niveau magnétique.

#### 5.1.1 Mise en équation d'un stator diphasé

On considère un stator diphasé, constitué de deux enroulements identiques placées en quadrature selon les axes fixes  $S_\alpha$  et  $S_\beta$  (figure 5.1), et obéissent aux équations électriques suivantes:

$$V_{s\alpha\beta} = R_s \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{s\alpha} \\ \varphi_{s\beta} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

La tension, le courant et le flux instantané sous forme complexe, s'écrit:

$$i_{ss} = k_2 (i_{s\alpha} + j i_{s\beta}), \phi_{ss} = k_2 (\phi_{s\alpha} + j \phi_{s\beta}), V_{ss} = k_2 (V_{s\alpha} + j V_{s\beta}) \quad (5.2)$$

Pour l'amener le repère du stator  $S_{\alpha\beta}$  au repère  $S_{dq}$  (voir figure 5.2), on a :

$$i_{sdq} = i_{ss} \cdot e^{-j\alpha_s} = k_2 (i_{sd} + j i_{sq}) = k_2 (i_{s\alpha} + j i_{s\beta}) e^{-j\alpha_s} \quad (5.3)$$

A  $i_{ss}$ , on peut associé son conjugué :  $i_{ss}^* = k_2 (i_{s\alpha} - j i_{s\beta})$

$$\begin{bmatrix} i_{ss} \\ i_{ss}^* \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} = S_2^{-1} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

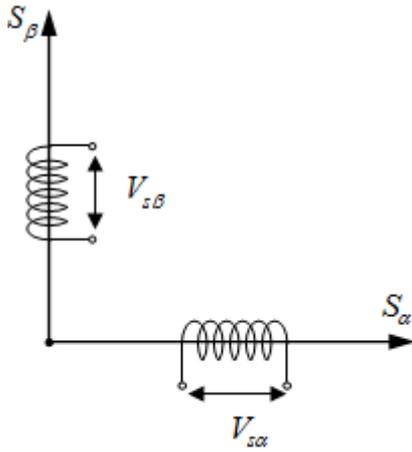


Figure 5.1. Représentation d'une armature diphasée

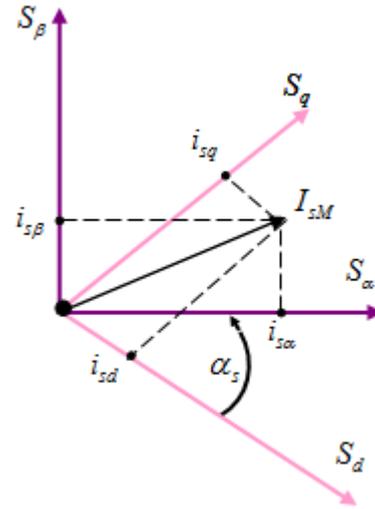


Figure 5.2. Changement du repère aB au repère dq

Dans ces deux repères, la puissance instantanée s'écrit:

$$P_s = V_{s\alpha} \cdot i_{s\alpha} + V_{s\beta} \cdot i_{s\beta} = i_{s\alpha\beta}^t \cdot V_{s\alpha\beta} \quad \text{Et} \quad V_{ss} \cdot i_{ss}^* + V_{ss}^* \cdot i_{ss} = i_s^{*t} \cdot V_s \quad (5.5)$$

Si l'on cherche à ce que cette puissance se conserve dans la transformation, on a :

$$P_s = i_s^{*t} \cdot S_2^{-1*t} \cdot S_2^{-1} \cdot V_s \quad \text{d'ou} \quad S_2^{-1*t} \cdot S_2^{-1} = 1 \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.6)$$

A partir des relations (5.1) et (5.2), l'équation complexe reliant la tension au courant et au flux est:

$$V_{ss} = R_s \cdot i_{ss} + \frac{d}{dt} \phi_{ss} \quad (5.7)$$

### 5.1.2 Stator et rotor diphasés

#### 5.1.2.1 Mise en équations dans des systèmes d'axes liés aux armatures

D'une manière analogue, on choisit les axes  $r_\alpha$  et  $r_\beta$  liés au rotor de la machine (figure 5.3), et on définira les grandeurs complexes par:

$$x_{rr} = k_2 (x_{r\alpha} + jx_{r\beta}) \quad \text{avec} \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si, on garde les mêmes axes  $S_\alpha, S_\beta$  et  $r_\alpha, r_\beta$  liés aux deux armatures, les équations rotoriques sont:

$$V_{rr} = R_s \cdot i_{rr} + \frac{d}{dt} \phi_{rr} \quad (5.8)$$

Mais dans les expressions des flux dépendant de la position du rotor par rapport au stator :

$$\phi_{ss} = L_s \cdot i_{ss} + M_{sr\theta} \cdot i_{rr} \quad \text{Et} \quad \phi_{rr} = L_r \cdot i_{rr} + M_{sr\theta} \cdot i_{ss} \quad \text{avec} \quad M_{sr\theta} = M_{sr} \cos \theta \quad (5.9)$$

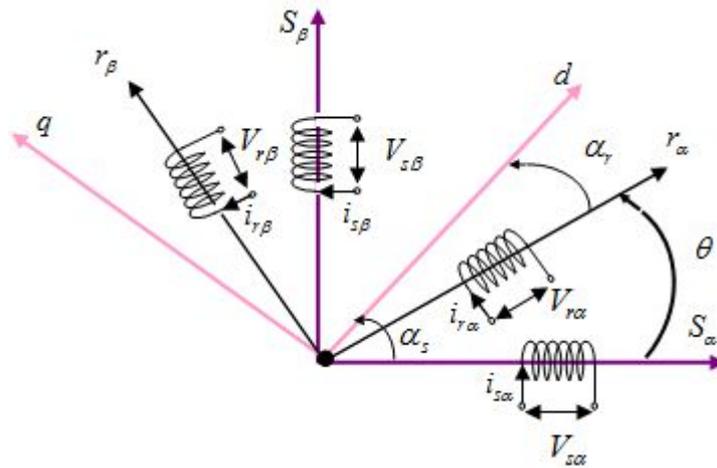


Figure 5.3. Représentation d'une machine diphasée-diphasée dans des repères liés aux armatures

Ainsi les dérivées des flux seront :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_{ss} &= L_s \cdot \frac{d}{dt} i_{ss} + M_{sr} \cos \theta \cdot \frac{d}{dt} i_{rr} - M_{sr} \cdot i_{rr} \sin \theta \frac{d}{dt} \theta \\ \frac{d}{dt} \phi_{rr} &= L_r \cdot \frac{d}{dt} i_{rr} + M_{sr} \cos \theta \cdot \frac{d}{dt} i_{ss} - M_{sr} \cdot i_{ss} \sin \theta \frac{d}{dt} \theta \end{aligned} \quad (5.10)$$

### 5.1.2.2 Mise en équations dans un système d'axes

Cette démarche consiste à projeter les enroulements sur les mêmes axes dq (voir figure 5.4).

D'après la figure on a :

$$\begin{aligned} x_{sdq} &= x_{ss} \cdot e^{-j\alpha_s} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_{sd} + jx_{sq}) \\ x_{rdq} &= x_{rr} \cdot e^{-j\alpha_r} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_{rd} + jx_{rq}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

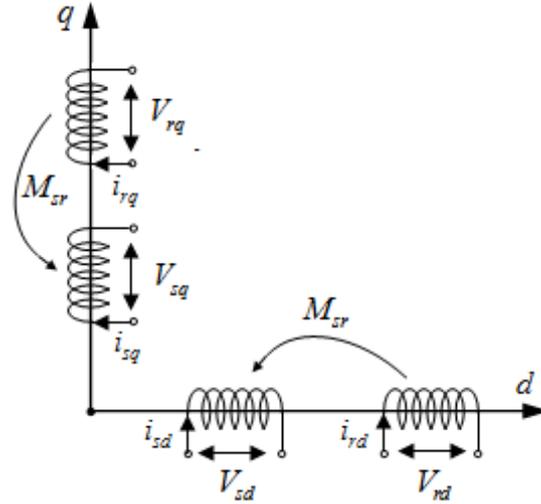


Figure 5.4. Représentation d'une machine diphasée-diphasée dans un repère unique dq

En tenant compte des transformations (5.11):

- Les équations des flux statoriques et rotoriques deviennent:

$$\begin{aligned}\phi_{sdq} &= L_s \cdot i_{sdq} + M_{sr} \cdot i_{rdq} \\ \phi_{rdq} &= L_r \cdot i_{rdq} + M_{sr} \cdot i_{sdq}\end{aligned}\quad (5.12)$$

- Les équations des tensions statoriques et rotoriques (5.7) et (5.8) seront:

$$\begin{aligned}V_{sdq} &= R_s \cdot i_{sdq} + \left(\frac{d}{dt} + j \frac{d}{dt} \alpha_s\right) \phi_{sdq} \\ V_{rdq} &= R_r \cdot i_{rdq} + \left(\frac{d}{dt} + j \frac{d}{dt} \alpha_r\right) \phi_{rdq}\end{aligned}\quad (5.13)$$

Où:

$\frac{d}{dt} \alpha_s$ : La vitesse relative des axes dq par rapport aux enroulements statoriques.

$\frac{d}{dt} \alpha_r$ : La vitesse relative des axes dq par rapport aux enroulements rotoriques.

- Les relations flux-courants sous forma matricielle s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \phi_{sd} \\ \phi_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M_{sr} & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M_{sr} \\ M_{sr} & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M_{sr} & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix}\quad (5.14)$$

### 5.1.2.3 Expression du couple électromagnétique

Dans la théorie du champs électromagnétique des machines électriques, le couple électromagnétique s'exprime par la dérivée partielle de stockage d'énergie électromagnétique par rapport à l'angle mécanique, dans les deux systèmes d'axes  $S_{\alpha\beta}$  et  $r_{\alpha\beta}$  :

$$C_{em} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \cdot i^t \cdot \frac{\partial L}{\partial \theta} \cdot i$$

$$\text{avec : } \begin{cases} i^t = [i_{s\alpha}, i_{s\beta}, i_{r\alpha}, i_{r\beta}] \\ L = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M_{sr} \cos \theta & -M_{sr} \sin \theta \\ 0 & L_s & M_{sr} \sin \theta & M_{sr} \cos \theta \\ M_{sr} \cos \theta & M_{sr} \sin \theta & L_r & 0 \\ -M_{sr} \sin \theta & M_{sr} \cos \theta & 0 & L_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{sr} & L_{rr} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.15)$$

D'ou:

$$C_{em} = i_{s\alpha\beta}^t \frac{\partial}{\partial t} L_{sr} \cdot i_{r\alpha\beta} \quad (5.16)$$

A l'aide des variables complexes, le couple s'écrit:

$$C_{em} = 2 M_{sr} \cdot \text{Im} [i_{ss} \cdot i_{rr}^* e^{-j\theta}] \quad (5.17)$$

Dans le cas ou les grandeurs statoriques et rotoriques sont projetées sur le même système d'axes dq, le couple devient:

$$C_{em} = 2 M_{sr} \cdot \text{Im} [i_{sdq} \cdot i_{rdq}^*] = M_{sr} (i_{rd} i_{sq} - i_{sd} i_{rq})$$

Et

$$i_{ss} = i_{sdq} e^{j\alpha_s}, i_{rr} = i_{rdq} e^{j\alpha_r}, \alpha_s - \alpha_r = \theta \quad (5.18)$$

### 5.1.2.4 Machine symétrique diphasée-diphasée en régime permanent sinusoïdal

Sachant que :

- les courants circulant dans le stator sont sinusoïdaux et données par:

$$i_{s\alpha} = I_{sM} \cos \omega_s t \text{ et } i_{s\beta} = I_{sM} \sin \omega_s t \Rightarrow i_{ss} = \frac{I_{sM}}{\sqrt{2}} e^{j\omega_s t} \quad (5.19)$$

- Ainsi que, le rotor tourne à la vitesse :

$$\omega \text{ et } \theta = \theta_0 + \omega t \quad (5.20)$$

- Les courants circulant dans le rotor sont déphasés, par rapport aux courants statoriques d'un angle  $\psi_r$  à l'instant  $t=0$ , et donnés par:

$$i_{r\alpha} = I_{rM} \cos(\omega_r t + \psi_r) \text{ et } i_{r\beta} = I_{rM} \sin(\omega_r t + \psi_r) \Rightarrow i_{rr} = \frac{I_{rM}}{\sqrt{2}} e^{j\omega_r t} e^{j\psi_r} \quad (5.21)$$

- Le théorème des pulsations est vérifié pour qu'il y ait échange d'énergie :

$$\omega = \omega_s + \omega_r \quad (5.22)$$

En régime permanent, toutes les grandeurs projetées sur les mêmes axes dq sont de même pulsation.

Si  $x$  la variable qui peut être une tension, un flux ou un courant, et à partir des relations (5.11), (5.19) et (5.21), on a :

$$x_{sdq} = \frac{X_{sM}}{\sqrt{2}} e^{j(\omega_s t - \alpha_s)} \text{ et } x_{rdq} = \frac{X_{rM}}{\sqrt{2}} e^{j(\omega_r t + \psi_r - \alpha_r)} \quad (5.23)$$

On remplace les deux relations (5.20) et  $\alpha_r = \alpha_s - \theta$  dans (5.21), on obtient:

$$x_{rdq} = \frac{X_{rM}}{\sqrt{2}} e^{j(\omega_s t + \psi_r - \alpha_s + \theta_0)} \quad (5.24)$$

Si les axes dq tournent à la vitesse  $\omega_{dq}$ , on a :

$$\alpha_s(t) = \alpha_{s0} + \omega_{dq} t \quad (5.25)$$

D'où :

$$x_{sdq} = \frac{X_{sM}}{\sqrt{2}} e^{j((\omega_s - \omega_{dq})t - \alpha_{s0})} \text{ et } x_{rdq} = \frac{X_{rM}}{\sqrt{2}} e^{j((\omega_s - \omega_{dq})t + \psi_r + \theta_0 - \alpha_{s0})} \quad (5.26)$$

À partir de la relation (5.26), et si l'on veut des grandeurs soient:

- **Continues**, il faut prendre  $\omega_{dq} = \omega_s$ , c'est à dire des axes tournant à la vitesse de synchronisme.
- **De pulsation**  $\omega_s$ , il faut choisir  $\omega_{dq} = 0$ , c'est à dire des axes fixes.

**Pour une MAS à cage**, les équations dans les axes communs dq sont celles données par (5.13) avec :  $V_{rdq} = 0$ .

● **Si les axes sont liés au rotor:**  $\omega_{dq} = \omega$  , on a :

$$\begin{cases} \alpha_r = 0 \text{ et } \alpha_s = \theta \\ \frac{dx}{dt} = j\omega_r \text{ et } \frac{d\alpha_s}{dt} = \omega \end{cases} \quad (5.27)$$

Donc, (5.13) devient:

$$\begin{aligned} V_{sdq} &= R_s \cdot i_{sdq} + j\omega_s \phi_{sdq} \\ 0 &= R_r \cdot i_{rdq} + j\omega_r \phi_{rdq} \end{aligned} \quad (5.28)$$

● **Si les axes sont liés au stator:**  $\omega_{dq} = 0$  , on a :

$$\begin{cases} \alpha_s = 0 \text{ et } \alpha_r = \theta \\ \frac{dx}{dt} = j\omega_s \text{ et } \frac{d\alpha_s}{dt} = -\omega \end{cases} \quad (5.29)$$

On obtient le même système d'équations (5.28).

● **Si les axes sont liés au champ tournant :**  $\omega_{dq} = \omega_s$  , on a :

Pour ce choix, on aurait ;

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = \omega_s, \quad \frac{d\alpha_r}{dt} = \omega_r \text{ et } \frac{dx}{dt} = 0 \quad (5.30)$$

**Remarque:** On a vérifié qu'en régime permanent, la forme des équations est inchangée.

## 5.2. Modélisation d'une machine asynchrone triphasée ,[1],[5]:

### 5.2.1 Modélisation d'un stator triphasé

#### ☛ Cas d'une armature triphasé

##### A. Equations :

Soit une armature fixe composée de trois enroulements identiques décalés dans l'espace de  $120^\circ$ .

Les courants et les tensions correspondants à ces trois enroulement produisent des systèmes triphasés équilibrés direct ou inverse.

Evidement, ce qui est établi pour un vecteur courant reste valable pour toutes grandeurs  $x$  pouvant être une tension ou un flux. Donc on peut associer une représentation vectorielle définie par la relation suivante :

$$i_{ss} = k_3 (i_{s1} + a i_{s2} + a^2 i_{s3}) \text{ avec } e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (5.31)$$

Les deux grandeurs homopolaires instantanées et conjuguées sont données par:

$$i_{s0} = k_3 (i_{s1} + i_{s2} + i_{s3}) \text{ avec } i_{ss}^* = k_3 (i_{s1} + a^2 i_{s2} + a i_{s3}) \quad (5.32)$$

Les deux relations (5.31) et (5.32) sous la forme matricielle s'écrivent:

$$\begin{bmatrix} i_{s0} \\ i_{ss} \\ i_{ss}^* \end{bmatrix} = k_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix} = S_3^{-1} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

D'ou:

$$\begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3k_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s0} \\ i_{ss} \\ i_{ss}^* \end{bmatrix} = S_3 \begin{bmatrix} i_{s0} \\ i_{ss} \\ i_{ss}^* \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

On doit avoir que  $S_3^{-1} = (S_3')^*$  pour que la puissance soit conservée, ce qui entraine que le coefficient :  $k_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Le flux à travers un enroulement du stator s'écrit:

$$\phi_{s1} = L_{3s} \cdot i_{s1} + M_{3s} \cdot i_{s2} + M_{3s} \cdot i_{s3} \quad (5.35)$$

Avec :

$L_{3s}$  : L'inductance propre d'un enroulement triphasé statorique.

$M_{3s}$  : L'inductance mutuelle entre deux enroulements du stator triphasé.

### **B. Inductances cycliques :**

➤ On considère que les fuites sont négligées, les inductances s'écrivent:

$$L_{3s} = \frac{n_3^2}{R} \text{ et } M_{3sM} \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} M_{3sM} = -\frac{1}{2} L_{3s} \quad (5.36)$$

Avec :

$n_3$  et  $R$  : sont respectivement, le nombre de spires de la bobine d'un enroulement et la reluctance.

$M_{3sM}$  : La valeur de la mutuelle si les enroulements étaient alignées selon le même axe.

Le flux au niveau homopolaire est donné par:

$$\phi_{s0} = (L_{3s} + 2M_{3s}) \cdot i_{s0} = 0 \quad (5.37)$$

➤ Si l'on considère les inductances de fuites  $l_{3s}$ , les inductances s'écrivent:

$$L_{3s} = l_{3s} + \frac{n_3^2}{R} \quad \text{et} \quad M_{3s} = -\frac{1}{2}L_{3s} = -\frac{1}{2}\frac{n_3^2}{R} \quad (5.38)$$

$$\phi_{s0} = (L_{3s} + 2M_{3s}) \cdot i_{s0} = L_{s0} \cdot i_{s0} = l_{3s} \cdot i_{s0}$$

**Remarque:** L'inductance cyclique homopolaire  $L_{s0}$  est égale à l'inductance de fuites.

En diphasé le flux est:

$$\phi_{ss} = L_{3s} \cdot i_{ss} + M_{3s} (i_{s2} + i_{s3} + ai_{s1} + ai_{s3} + a^2i_{s1} + a^2i_{s2}) / \sqrt{3}$$

$$\phi_{ss} = (L_{3s} - M_{3s}) \cdot i_{ss} = L_s \cdot i_{ss} \quad (5.39)$$

avec  $L_3 = l_{3s} + \frac{3}{2} \frac{n_3^2}{R}$

La relation flux-courant dans le repère, composé des composantes directe, inverse et homopolaire, est donnée par:

$$\begin{bmatrix} \phi_{s0} \\ \phi_{ss} \\ \phi_{ss}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{s0} & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s0} \\ i_{ss} \\ i_{ss}^* \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

### 5.2.2 Machine triphasée - triphasée

Soit deux armatures triphasées représentées schématiquement par la figure (5.5) et dont les phases sont repérées respectivement  $s_1, s_2, s_3$  et  $r_1, r_2, r_3$ .

L'angle électrique  $\theta$  variable en fonction du temps définit la position relative instantanée entre les axes magnétiques des phases  $s_1$  et  $r_1$  choisis comme axes de référence [6], [7].

Les expressions d'un flux du stator et d'un flux du rotor sont données par :

$$\phi_{s1} = L_{3s} \cdot i_{s1} + M_{3s} (i_{s2} + i_{s3}) + M_{3sr} (i_{r1} \cos \theta + i_{r2} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + i_{r3} \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})) \quad (5.41)$$

$$\phi_{r1} = L_{3r} \cdot i_{r1} + M_{3r} (i_{r2} + i_{r3}) + M_{3sr} (i_{s1} \cos \theta + i_{s2} \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) + i_{s3} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}))$$

$[L_{ss}]$ ,  $[L_{rr}]$  et  $[M_{sr}]$  représentent respectivement les matrices d'inductances statorique, rotorique et mutuelles stator-rotor (Eq 5.42). Avec :  $M_{3sr} = M_0$  : Inductance mutuelle maximale lorsque  $\theta = 0$ .

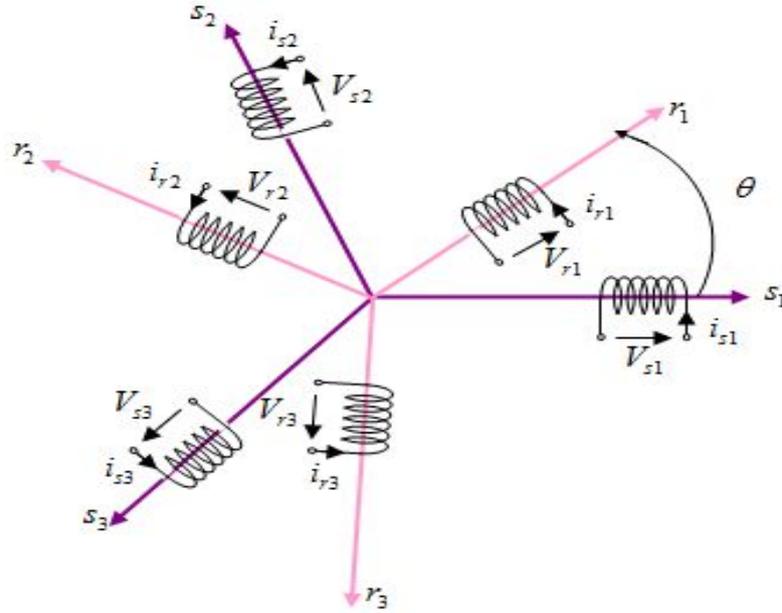


Figure 5.5. Représentation d'une machine triphasée-triphasée

$$\begin{aligned}
 [L_{ss}] &= \begin{bmatrix} L_{3s} & M_{3s} & M_{3s} \\ M_{3s} & L_{3s} & M_{3s} \\ M_{3s} & M_{3s} & L_{3s} \end{bmatrix}, \quad [L_{rr}] = \begin{bmatrix} L_{3r} & M_{3r} & M_{3r} \\ M_{3r} & L_{3r} & M_{3r} \\ M_{3r} & M_{3r} & L_{3r} \end{bmatrix}, \\
 L_{sr} &= \overbrace{M_{3sr}}^{=M_0} \cos\left(\theta - (f-1)\frac{2\pi}{3}\right) \quad f = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\text{On a : } [L_{sr}] = [L_{rs}]^t = M_{3sr} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

L'équation globale donnant les six tensions statoriques et rotoriques en fonction des courants et des flux :

$$[V] = R[i] + \underbrace{[L] \frac{d}{dt}[i]}_{\text{F.é.m de transformation}} + \underbrace{\frac{d\theta}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \theta} \right]}_{\text{F.é.m de rotation}} [i]$$

$$[V]^t = [V_{s1}, V_{s2}, V_{s3}, V_{r1}, V_{r2}, V_{r3}], \quad [i]^t = [i_{s1}, i_{s2}, i_{s3}, i_{r1}, i_{r2}, i_{r3}] \tag{5.43}$$

Avec:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} L_{ss} & 0 \\ 0 & L_{rr} \end{bmatrix}$$

Le couple électromagnétique est formulé comme suit :

$$C_{em} = [i_s]^t \cdot \left[ \frac{\partial L_{sr}}{\partial \theta} \right] \cdot [i_r] \quad (5.44)$$

### 5.2.3 Transformation machine triphasée- triphasée en machine diphasée

#### ✱ Changement de variable

Soit une armature triphasée et on définit l'armature diphasée équivalente.

Commencent aux relations des matrices inductances (5.42), on obtient:

$$\begin{bmatrix} \phi_{s1} \\ \phi_{s2} \\ \phi_{s3} \end{bmatrix} = [L_{ss}] \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix} \text{ Soit } [\phi_s] = [L_{ss}] [i_s] \quad (5.45)$$

Soit le changement de variable suivant :  $[x] = [A][x_n]$ , il faut que  $[A]^{-1}$  existe.

la formule (5.45) devient :

$$[\phi_{sn}] = [A]^{-1} [L_{ss}] [A] [i_{sn}] \text{ ou } [\phi_{sn}] = [L_{ssn}] [i_{sn}] \quad (5.46)$$

Pour que la matrice  $[L_{ssn}]$  soit diagonale il faut calculer les valeurs propres, solutions de:

$$\det \begin{bmatrix} L_{3s} - \lambda & M_{3s} & M_{3s} \\ M_{3s} & L_{3s} - \lambda & M_{3s} \\ M_{3s} & M_{3s} & L_{3s} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_s = L_{3s} - M_{3s} \\ V.\text{propre double} \\ L_{s0} = L_{3s} + 2M_{3s} \\ V.\text{propre simple} \end{cases} \quad (5.47)$$

On obtient la nouvelle matrice :

$$[L_{ssn}] = \begin{bmatrix} L_{s0} & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

En plus, la condition pour que la puissance soit conservée est :

$$[i_s]^t [V_s] = [i_{sn}]^t [V_{sn}] = [i_{sn}]^t [A]^t [A] [V_{sn}] \Rightarrow [A]^t = [A]^{-1} \quad (5.46)$$

Donc,  $[A]$  est une matrice orthogonale.

Soit l'induction B en tout point M de l'entrefer (figure 5.6), est donnée par:

$$\begin{aligned}
 B_{3M} &= kn_3 \left[ i_{s1} \cos \psi + i_{s2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \psi\right) + i_{s3} \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \psi\right) \right] \\
 B_{2M} &= kn_2 \left[ i_{s\alpha} \cos \psi + i_{s\beta} \sin \psi \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.47}$$

Tel que :

- $n_3$  et  $n_2$  sont le nombre de spires des enroulements triphasés et diphasés.
- $\psi$  la position angulaire de point M par rapport à l'axe  $s_1$  ou  $n_\alpha$ .

L'identité de  $B_{3M}$  et  $B_{2M}$  donne:

$$\begin{aligned}
 n_2 \cdot i_{s\alpha} &= n_3 \left( i_{s1} - \frac{1}{2}(i_{s2} + i_{s3}) \right) \\
 n_2 \cdot i_{s\beta} &= n_3 \frac{\sqrt{3}}{2} (i_{s2} - i_{s3})
 \end{aligned}
 \tag{5.48}$$

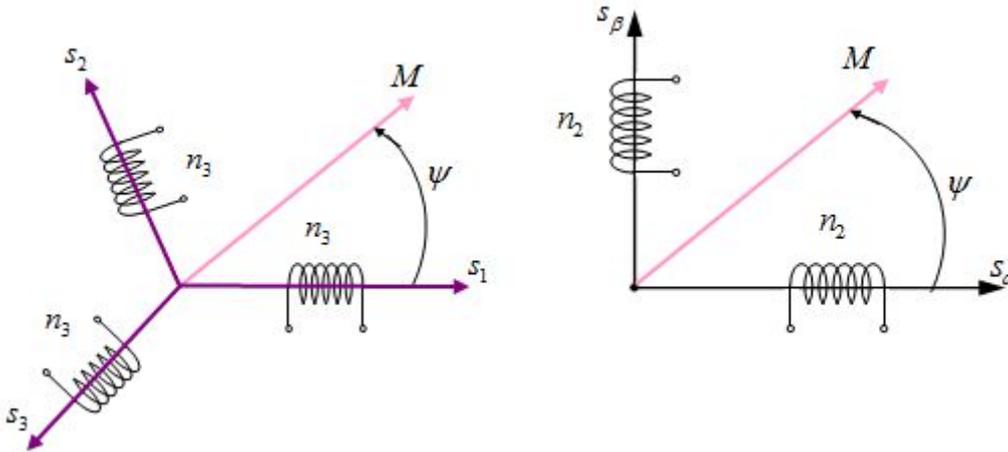


Figure 5.6. Transformation triphasée-diphasée d'une armature

La relation (5.48) se présente sous la forme :

$$\begin{bmatrix} - \\ i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix}
 \tag{5.49}$$

Par l'application de la condition d'orthogonalité, à partir de (5.48) et (5.49), la matrice [A] est déduite comme suit:

$$[A]^{-1} = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} b & b & b \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = [A]^t \quad \text{Et} \quad [A] = \frac{n_3}{n_2} \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ b & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}
 \tag{5.50}$$

Si l'on veut que la nouvelle base diphasée soit orthonormée, il faut que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{n_3}{n_2} \right)^2 \left[ (1)^2 + \left( -\frac{1}{2} \right)^2 + \left( -\frac{1}{2} \right)^2 \right] = 1 \\ \left( \frac{n_3}{n_2} \right)^2 \left[ \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right] = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Ces deux relations} \\ \text{sont vérifiées pour} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \frac{n_3}{n_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (5.51)$$

La troisième condition permet alors de déterminer l'inconnu b :

$$\frac{2}{3} (b^2 + b^2 + b^2) = 1 \quad \text{Soit } b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.52)$$

On obtient finalement la matrice de transformation [A]:

$$[A] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Si l'on ajoute la composante homopolaire à la relation (5.49), on obtient:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

### ✱ Equations magnétiques et du couple électromagnétique

Selon (5.42), on a la relation:

$$\begin{bmatrix} [\phi_s] \\ [\phi_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_{ss}] & [L_{sr}] \\ [L_{rs}] & [L_{rr}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_s] \\ [i_r] \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Soit :  $[\phi] = [L][i]$ , En multipliant les deux côtés par la matrice A :

$$[\phi_{sn}] = [A]^{-1} [\phi_s], \quad [i_{sn}] = [A]^{-1} [i_s], \quad [i_{rn}] = [A]^{-1} [i_r] \quad (5.56)$$

On obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\phi_n] = [L_n][i_n] \Rightarrow [L_n] = \begin{bmatrix} [L_{ssn}] & [L_{srn}] \\ [L_{rsn}] & [L_{rrn}] \end{bmatrix} \\ [L_{ssn}] = \begin{bmatrix} L_{s0} & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s \end{bmatrix} \quad [L_{rrn}] = \begin{bmatrix} L_{r0} & 0 & 0 \\ 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & L_r \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{cases} L_{s0} = L_{3s} + 2M_{3s} \\ L_{r0} = L_{3r} + 2M_{3r} \\ L_s = L_{3s} - M_{3s} \\ L_r = L_{3r} - M_{3r} \\ M_{sr} = \frac{3}{2}M_{3sr} \end{cases} \\ [L_{sr}] = [L_{rs}]^t = \frac{3}{2}M_{3sr} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.57)$$

L'équation de tension dans le système triphasé correspondante à celle dans le nouveau repère est :

$$[V] = [R][i] + \frac{d}{dt}[\phi] \Rightarrow [V_n] = [R_n][i_n] + \frac{d}{dt}[\phi_n] \quad (5.58)$$

Le couple électromagnétique, après les changements de variables devient:

$$C_{em} = [i_s]^t [A]^t \frac{\partial}{\partial \theta} [L_{sr}(\theta)] [A][i_r] = [i_{sn}]^t \frac{\partial}{\partial \theta} [L_{srn}(\theta)] [i_{rn}] \quad (5.59)$$

D'où l'expression du couple dans le repère biphasé est :

$$C_{em} = M_{sr} [i_{s\alpha} \ i_{s\beta}]^t \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

#### 5.2.4 Equations de Park

On a vu qu'une machine triphasée au stator et au rotor pouvait se transformer à une machine biphasée au stator et au rotor comme montre la figure (5.7).

En négligeant les composantes homopolaires, on a :

$$\begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \\ \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M_{sr} \cos \theta & -M_{sr} \sin \theta \\ 0 & L_s & M_{sr} \sin \theta & M_{sr} \cos \theta \\ M_{sr} \cos \theta & M_{sr} \sin \theta & L_r & 0 \\ -M_{sr} \sin \theta & M_{sr} \cos \theta & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

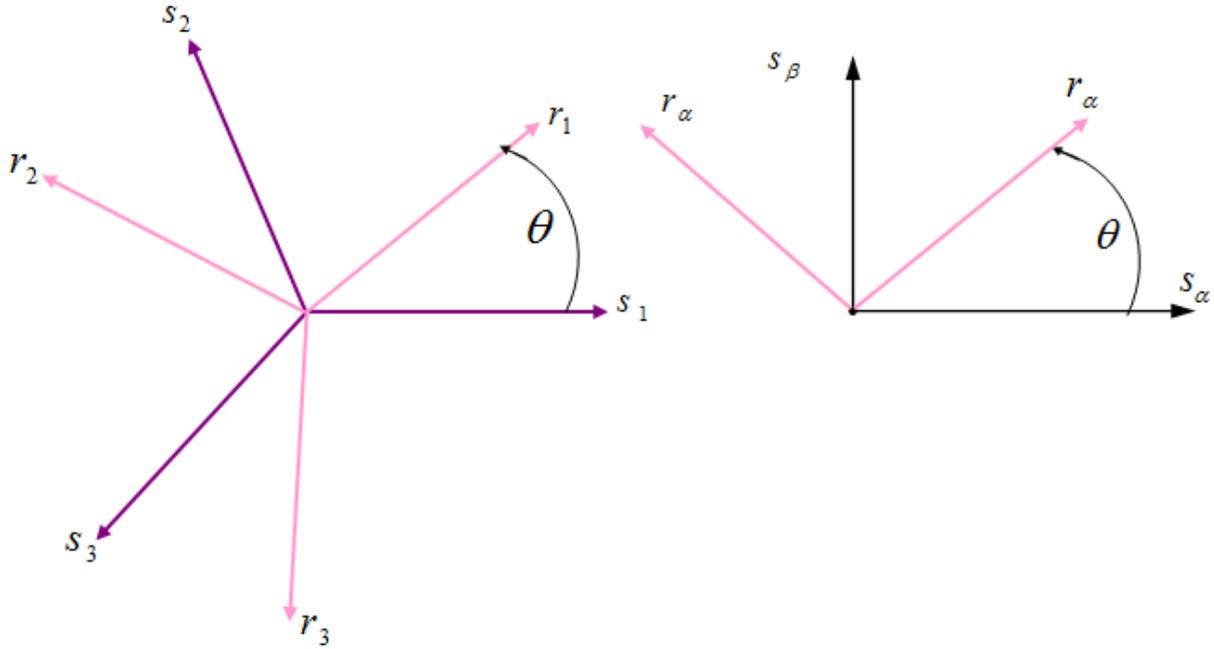


Figure 5.7. Transformation triphasée-diphasée pour les deux armatures

Si l'on considère que:

$$i_{rd} = i_{r\alpha} \cos \theta - i_{r\beta} \sin \theta \quad \text{et} \quad i_{rq} = i_{r\alpha} \sin \theta + i_{r\beta} \cos \theta \quad (5.62)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \phi_{s\alpha} &= L_s \cdot i_{s\alpha} + M_{sr} \cdot i_{rd} \\ \phi_{s\beta} &= L_s \cdot i_{s\beta} + M_{sr} \cdot i_{rq} \end{aligned} \quad (5.63)$$

Donc la matrice de transformation est une matrice de rotation :

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow [P]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Alors pour le rotor:

$$\begin{bmatrix} \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{bmatrix} = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + L_r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

En multipliant les deux côtés par la matrice de rotation [P], on obtient;

$$[P] \begin{bmatrix} \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{bmatrix} = M_{sr} [P][P]^{-1} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + L_r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [P][P]^{-1} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Les relations flux-courants ne dépendent plus de la position du rotor  $\theta$ , si l'on confond l'axe dq avec  $S_{\alpha\beta}$  :

$$\begin{bmatrix} \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \end{bmatrix} = M_{sr} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + L_r \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

En appelant ce repère commun dq, les relations deviennent:

$$\begin{bmatrix} \phi_{sd} \\ \phi_{sq} \\ \phi_{rd} \\ \phi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M_{sr} & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M_{sr} \\ M_{sr} & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M_{sr} & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

◆ Les expressions **des tensions statoriques** dans le repère fixe:

$$\begin{aligned} V_{s\alpha} &= R_s \cdot i_{s\alpha} + \frac{d}{dt} \phi_{s\alpha} \\ V_{s\beta} &= R_s \cdot i_{s\beta} + \frac{d}{dt} \phi_{s\beta} \end{aligned} \quad (5.69)$$

◆ Les expressions des tensions rotoriques dans le repère fixe:

$$\begin{aligned} V_{r\alpha\beta} &= R_r \cdot i_{r\alpha\beta} + \frac{d}{dt} \phi_{r\alpha\beta} \quad \xrightarrow{\text{Par transformation}} \quad V_{rdq} = R_r [P][P]^{-1} [i_{rdq}] + [P] \frac{d}{dt} [P]^{-1} [\phi_{rdq}] \\ \Rightarrow V_{rdq} &= R_r [i_{rdq}] + \frac{d}{dt} [\phi_{rdq}] + [P] \frac{\partial}{\partial \theta} [P]^{-1} [\phi_{rdq}] \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

Finalement, les deux équations du rotor liées à ce repère fixe sont:

$$\begin{aligned} V_{rd} &= R_r \cdot i_{rd} + \frac{d}{dt} \phi_{rd} + \phi_{rq} \frac{d\theta}{dt} \\ V_{rq} &= R_r \cdot i_{rq} + \frac{d}{dt} \phi_{rq} - \phi_{rd} \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (5.70)$$

◆ L' expression du couple électromagnétique:

$$C_{em} = [i_{s\alpha\beta}]^t \frac{\partial}{\partial \theta} [L_{sr\alpha\beta}(\theta)] [i_{r\alpha\beta}] = [i_{sdq}]^t \frac{\partial}{\partial \theta} M_{sr} [P][P]^{-1} [i_{rdq}]$$

En effet :

$$[L_{sr\alpha\beta}(\theta)] = M_{sr} [P] \quad \text{Et} \quad C_{em} = [i_{sdq}]^t M_{sr} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [i_{rdq}] = M_{sr} (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq}) \quad (5.71)$$

✳ **Généralisation à un repère dq quelconque:**

La figure (5.8) montre respectivement les angles du repère dq quelconque par rapport aux armatures statorique et rotorique.

D'après cette figure on a :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{obs} & \sin \theta_{obs} \\ -\sin \theta_{obs} & \cos \theta_{obs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{obs} - \theta) & \sin(\theta_{obs} - \theta) \\ -\sin(\theta_{obs} - \theta) & \cos(\theta_{obs} - \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_{sdq} = [P_s]^{-1} i_{s\alpha\beta} \\ i_{rdq} = [P_r]^{-1} i_{r\alpha\beta} \end{cases} \quad (5.72)$$

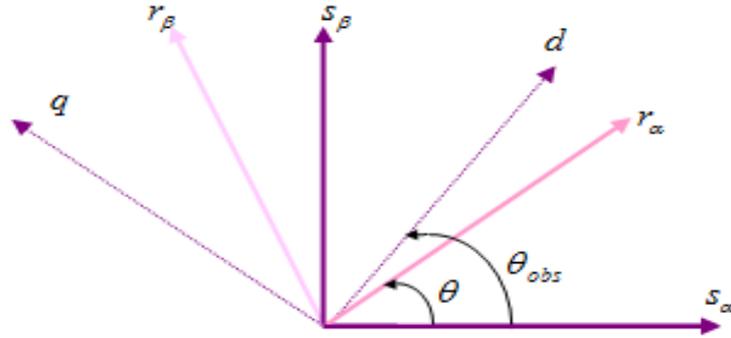


Figure 5.8. Différents repères statorique, rotorique et commun (dq)

Donc, les transformations sont des rotations :

$$\begin{aligned} [P_s]^{-1} &\text{ correspond à } e^{j\theta_{obs}} \\ [P_r]^{-1} &\text{ correspond à } e^{j(\theta_{obs} - \theta)} \\ [P]^{-1} &\text{ correspond à } e^{j\theta} \end{aligned} \quad (5.73)$$

◆ Les expressions **des flux statoriques et rotoriques** :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \end{bmatrix} = [L_s] \begin{bmatrix} i_{s\alpha\beta} \end{bmatrix} + [M_{sr}] [P] \begin{bmatrix} i_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} = [M_{sr}] [P]^{-1} \begin{bmatrix} i_{s\alpha\beta} \end{bmatrix} + [L_r] \begin{bmatrix} i_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.74)$$

Si on applique les transformations (5.73) sur (5,74), on obtient ;

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \phi_{sdq} \end{bmatrix} = [L_s] \begin{bmatrix} i_{sdq} \end{bmatrix} + [M_{sr}] \begin{bmatrix} i_{rdq} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phi_{rdq} \end{bmatrix} = [M_{sr}] \begin{bmatrix} i_{sdq} \end{bmatrix} + [L_r] \begin{bmatrix} i_{rdq} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.75)$$

◆ Les expressions **des tensions statoriques et rotoriques** :

On sait que ;

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} V_{s\alpha\beta} \end{bmatrix} = [R_s] \begin{bmatrix} i_{s\alpha\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha\beta} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} = [R_r] \begin{bmatrix} i_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi_{r\alpha\beta} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.76)$$

Si on a applique les transformations (5.73) sur (5,76), on obtient ;

$$\begin{cases} [P_s][V_{sdq}] = [R_s][P_s][i_{sdq}] + \frac{d}{dt}([P_s][\phi_{sdq}]) \\ [P_r][V_{rdq}] = [R_r][P_r][i_{rdq}] + \frac{d}{dt}([P_r][\phi_{rdq}]) \end{cases}$$

Finalement, on trouve que:

$$\begin{cases} [V_{sdq}] = [R_s][i_{sdq}] + \frac{d}{dt}[\phi_{sdq}] + \frac{d\theta_{obs}}{dt} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [\phi_{sdq}] \\ [V_{rdq}] = [R_r][i_{rdq}] + \frac{d}{dt}[\phi_{rdq}] + \frac{d(\theta_{obs} - \theta)}{dt} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [\phi_{rdq}] \end{cases} \quad (5.77)$$

Avec :  $\frac{d\theta_{obs}}{dt}$  et  $\frac{d(\theta_{obs} - \theta)}{dt}$  : représentent respectivement les vitesses angulaire du système d'axes dq par rapport au stator et au rotor.

On distingue **trois cas** particuliers:

● **Des axes tournant à la vitesse de synchronisme, (liés au champs tournant)**,  $\frac{d\theta_{obs}}{dt} = \omega_s$  et  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ , alors:

$$\begin{aligned} V_{sd} &= R_s \cdot i_{sd} + \frac{d}{dt}\phi_{sd} - \omega_s \phi_{sq} \\ V_{sq} &= R_s \cdot i_{sq} + \frac{d}{dt}\phi_{sq} + \omega_s \phi_{sd} \\ V_{rd} &= R_r \cdot i_{rd} + \frac{d}{dt}\phi_{rd} - (\omega_s - \omega)\phi_{rq} \\ V_{rq} &= R_r \cdot i_{rq} + \frac{d}{dt}\phi_{rq} + (\omega_s - \omega)\phi_{rd} \end{aligned} \quad (5.78)$$

❖ **Ce cas** est le seul qui n'introduit pas de simplification dans la formulation des équations. il est utilisé dans la commande de l'alimentation des moteurs asynchrones à fréquence variable.

● **Des axes fixes, (liés au stator)**,  $\frac{d\theta_{obs}}{dt} = \omega_s = 0$  et  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ , alors:

$$\begin{aligned} V_{sd} &= R_s \cdot i_{sd} + \frac{d}{dt}\phi_{sd} \\ V_{sq} &= R_s \cdot i_{sq} + \frac{d}{dt}\phi_{sq} \\ V_{rd} &= R_r \cdot i_{rd} + \frac{d}{dt}\phi_{rd} + \omega \phi_{rq} \\ V_{rq} &= R_r \cdot i_{rq} + \frac{d}{dt}\phi_{rq} - \omega \phi_{rd} \end{aligned} \quad (5.79)$$

- ❖ **Ce cas** est choisi en vue d'étudier des variations importantes de la vitesse de rotation, associées ou non avec des variations de la fréquence d'alimentation.

❖ **Des axes fixes, (liés au rotor)**,  $\frac{d\theta_{obs}}{dt} = \omega_s = \omega$  et  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ , alors:

$$\begin{aligned} V_{sd} &= R_s \cdot i_{sd} + \frac{d}{dt} \phi_{sd} - \omega \phi_{sq} \\ V_{sq} &= R_s \cdot i_{sq} + \frac{d}{dt} \phi_{sq} + \omega \phi_{sd} \\ V_{rd} &= R_r \cdot i_{rd} + \frac{d}{dt} \phi_{rd} \\ V_{rq} &= R_r \cdot i_{rq} + \frac{d}{dt} \phi_{rq} \end{aligned} \quad (5.80)$$

- ❖ **Ce cas** peut être intéressant dans les problèmes de régimes transitoires où la vitesse de rotation est considéré comme constante; exemple: l'étude des contraintes résultant d'un court-circuit.

❖ Expressions **de puissance, du couple et de mouvement**:

Selon Park, la puissance statorique instantanée de la machine s'écrit ;

$$\begin{aligned} p_e(t) &= V_{s1}(t) \cdot i_{s1}(t) + V_{s2}(t) \cdot i_{s2}(t) + V_{s3}(t) \cdot i_{s3}(t) \\ &= \frac{3}{2} (V_{sd}(t) \cdot i_{sd}(t) + V_{sq}(t) \cdot i_{sq}(t)) + 3V_{s0}(t) \cdot i_{s0}(t) \end{aligned}$$

Si on utilise le premier cas (**lié au champs tournant**), l'expression de la puissance devient, en remplaçant  $V_{sd}$  et  $V_{sq}$  par leurs expressions :

$$\begin{aligned} p_e(t) &= \underbrace{\frac{3}{2} (R_s \cdot i_{sd}^2(t) + R_s \cdot i_{sq}^2(t))}_{\text{Pertes par effet joules}} + \underbrace{\frac{3}{2} (i_{sd}(t) \frac{d\phi_{sd}(t)}{dt} + i_{sq}(t) \frac{d\phi_{sq}(t)}{dt})}_{\text{Variation de la puissance magnétique}} \\ &= \frac{3}{2} \underbrace{\omega_s (\phi_{sd}(t) \cdot i_{sq}(t) - \phi_{sq}(t) \cdot i_{sd}(t))}_{\text{Puissance transmise au rotor à travers l'entrefer}} \end{aligned} \quad (5.81)$$

Les expressions du couple électromagnétique et de mouvement , dans tous les cas, restent les mêmes, on a :

$$\begin{aligned}
C_{em}(t) &= \frac{p_e(t)}{\omega_s} = \frac{3}{2} (\phi_{sd}(t) \cdot i_{sq}(t) - \phi_{sq}(t) \cdot i_{sd}(t)) \\
&= \frac{3}{2} \underbrace{p(\phi_{sd}(t) \cdot i_{sq}(t) - \phi_{sq}(t) \cdot i_{sd}(t))}_{\text{Cas machine multipolaire}}
\end{aligned} \tag{5.82}$$

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} + f\Omega(t) = \frac{J}{p} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{f}{p} \omega(t) = C_{em}(t) - C_r(t)$$

**Note:** Les relations (5.78) et (5.82) représentent les équations principales caractérisant le comportement électrique et mécanique de la MAS.

- $J$  : Moment d'inertie des masses tournantes ;
- $\Omega$  : Vitesse mécanique ;
- $f$  : Coefficient de frottement visqueux ;
- $C_r$  : Couple résistant imposé à l'arbre de la machine ;

### 5.2.5 Représentation complexe

En remplaçant (5.75) dans (5.78), on obtient l'équation matricielle générale suivante:

$$\begin{bmatrix} V_{sd} \\ V_{sq} \\ V_{rd} \\ V_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s \frac{d}{dt} & -L_s \frac{d\theta_{obs}}{dt} & M_{sr} \frac{d}{dt} & -M_{sr} \frac{d\theta_{obs}}{dt} \\ L_s \frac{d\theta_{obs}}{dt} & R_s + L_s \frac{d}{dt} & M_{sr} \frac{d\theta_{obs}}{dt} & M_{sr} \frac{d}{dt} \\ M_{sr} \frac{d}{dt} & -M_{sr} \frac{d(\theta_{obs} - \theta)}{dt} & R_r + L_r \frac{d}{dt} & -L_r \frac{d(\theta_{obs} - \theta)}{dt} \\ M_{sr} \frac{d(\theta_{obs} - \theta)}{dt} & M_{sr} \frac{d}{dt} & L_r \frac{d(\theta_{obs} - \theta)}{dt} & R_r + L_r \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \tag{5.83}$$

Cette matrice est constituée de 4 sous matrices de la forme :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Si l'on veut diagonaliser cette matrice, on recherche les valeur propres  $\lambda$  solution de :

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ -b & a - \lambda \end{bmatrix} = 0 \text{ Soit } \lambda = (a \pm jb)$$

Modéliser la machine de manière complexe permet de ramener les équations matricielles exprimant les tensions à deux équations complexes.

En référence au relation (5.13), on a:

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{c} V_{sdq} \\ V_{rdq} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} R_s \\ R_r \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} i_{sdq} \\ i_{rdq} \end{array} \right] + \left( \frac{d}{dt} + j \frac{d\theta_{obs}}{dt} \right) \left[ \begin{array}{c} \phi_{sdq} \\ \phi_{rdq} \end{array} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + \frac{d\bar{\phi}_s}{dt} + j\omega_s \bar{\phi}_s \\ \bar{V}_r = R_r \bar{I}_r + \frac{d\bar{\phi}_r}{dt} + j\omega_r \bar{\phi}_r \\ \omega_r = \omega_s - \omega \end{cases} \quad (5.84)$$

De plus les composantes des flux statoriques et rotoriques sont exprimées par :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_s = L_s \bar{I}_s + M_{sr} \bar{I}_r \\ \bar{\phi}_r = L_r \bar{I}_r + M_{sr} \bar{I}_s \end{cases} \quad (5.85)$$

Et le couple électromagnétique s'écrit:

$$C_{em} = p M_{sr} \text{Im} \left[ \bar{I}_s \cdot \bar{I}_r^* \right] \quad (5.86)$$

### 5.3 Propriétés dynamiques de la machine asynchrone, [5]

A partir des modèles définis précédemment, nous allons caractériser les régimes transitoires de la MAS à l'aide de placement des pôles et des zéros dans le plan complexe. selon le mode d'alimentations et la loi de commande.

Le modèle de la MAS est non linéaire, le passage par les petites variations sera nécessaire.

*Nous supposons dans cette partie que Le stator de la machine est alimenté par des sources parfaites de tensions sinusoïdales d'amplitudes et fréquences variables.*

#### 5.3.1 Pôles et zéro des fonctions de transfert en alimentation en tension

On choisit un repère de synchronisme selon l'étude de la référence [5] tel que:

$$V_{sd} = \sqrt{3} V_s \quad \text{Et} \quad V_{sq} = 0$$

A partir du modèle défini par les relations (5.84) et (5.85), on déduit le modèle suivant :

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{d}{dt} + j\omega_s & -\frac{R_s M_{sr}}{\sigma L_s L_r} \\ -\frac{R_r M_{sr}}{\sigma L_s L_r} & \frac{R_r}{\sigma L_r} + \frac{d}{dt} + j\omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_s \\ \bar{\phi}_r \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

Si l'on considère un point de fonctionnement caractérisé par l'indice (o), et on annule les termes dérivés, la relation (5.87) devient :

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{s0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_s}{\sigma L_s} + j\omega_{s0} & -\frac{R_s M_{sr}}{\sigma L_s L_r} \\ -\frac{R_r M_{sr}}{\sigma L_s L_r} & \frac{R_r}{\sigma L_r} + j\omega_{r0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{s0} \\ \bar{\phi}_{r0} \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

De plus, la relation de mouvement s'écrit:

$$f \omega_0 + p C_{r0} = \frac{p^2 M_{sr}}{\sigma L_s L_r} \text{Im} [I_s \cdot I_r^*] \quad (5.89)$$

On effectue des petites variations autour de ce point de fonctionnement, représentées par  $\Delta x$  pour la variable  $x$ .

On arrive à l'équation matricielle suivante:

$$\begin{cases} \Delta \bar{\phi} = A^{-1} B \Delta U \text{ Avec} \\ \Delta \bar{\phi} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{\phi}_s \\ \Delta \bar{\phi}_r \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} s + \alpha + j\omega_{s0} & -k_2 \alpha \\ -k_1 \beta & s + \beta + j\omega_{r0} \end{bmatrix} \\ \Delta \bar{U} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{\phi}_s \\ \Delta \bar{\phi}_r \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -j\bar{\phi}_{s0} & 0 \\ 1 & 0 & -j\bar{\phi}_{r0} \end{bmatrix} \\ \alpha = \frac{R_s}{\sigma L_s}, \beta = \frac{R_r}{\sigma L_r}, k_1 = \frac{M_{sr}}{L_s}, k_2 = \frac{M_{sr}}{L_r}, \sigma = 1 - \underbrace{\frac{M_{sr}^2}{L_s L_r}}_{\text{Coefficient de dispersion de BLONDÉL}} \end{cases} \quad (5.90)$$

On va considérer maintenant, des fonctionnements à vitesse constante ou variable.

### 5.3.1.1 Fonctionnement à vitesse constante

Dans ce mode de fonctionnement, **les constantes de temps électriques sont faibles** par rapport **à la constante de temps mécanique**.

Alors dans les équations électriques, on peut poser :

$$\Delta\omega = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\omega_s = \Delta\omega_r$$

$$\Delta\bar{\phi} = A^{-1}B\Delta U \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} B = \begin{bmatrix} 1 & -j\bar{\phi}_{s0} \\ 1 & -j\bar{\phi}_{r0} \end{bmatrix} \\ \Delta\bar{U} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{V}_s \\ \Delta\omega_s \end{bmatrix} \end{cases}$$

On a deux cas :

- Soit  $\omega_0 < \omega_1$  avec  $\omega_1 = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\sigma\alpha\beta}$  et les pôles des fonctions transfert sont donnés par:

$$s_{1,2,3,4} = -\frac{(\alpha + \beta)}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{4}} \pm j \frac{(\omega_{s0} + \omega_{r0})}{2} \quad (5.91a)$$

- Soit  $\omega_0 > \omega_1$  et les pôles des fonctions transfert sont donnés par:

$$s_{1,2,3,4} = -\frac{(\alpha + \beta)}{2} \pm j \left[ \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{4}} \pm \frac{(\omega_{s0} + \omega_{r0})}{2} \right] \quad (5.91b)$$

Donc dans les deux cas les pôles sont complexes conjugués.

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  diminuent en général quand la puissance croit.

### Exemples:

<b>Machine 4kW</b>	$R_s = 1.2 \Omega$	$R_r = 1.8 \Omega$	$L_s = 0.1568H$	$L_r = 0.1568H$	$\sigma = 0.08$
<b>Machine 270kW</b>	$R_s = 0.61 \Omega$	$R_r = 0.46 \Omega$	$L_s = 0.165H$	$L_r = 0.131H$	$\sigma = 0.09$

➤ Pour une machine 4 kW:  $\alpha = 90$ ;  $\beta = 135$ ;  $\omega_1 = 216$  rd/s.

➤ Pour une machine 270 kW:  $\alpha = 39$ ;  $\beta = 41$ ;  $\omega_1 = 76,7$  rd/s.

Pour *beaucoup de machines*, les deux paramètres  **$\alpha$**  et  **$\beta$**  sont assez proches l'un de l'autre. Si, on **les considère égaux**, les relations (5.91) se simplifient:

$$s_{1,2,3,4} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2(1 - \sigma) - \frac{\omega_0^2}{4}} \pm j \frac{(\omega_{s0} + \omega_{r0})}{2} \quad (5.92a)$$

$$s_{1,2,3,4} = -\alpha \pm j \left( \sqrt{\alpha^2(1 - \sigma) - \frac{\omega_0^2}{4}} \pm \frac{(\omega_{s0} + \omega_{r0})}{2} \right) \quad (5.92b)$$

✓ **A vitesse nulle**, on a le premier cas ( $\omega_0 \prec \omega_1$ ), c'est à dire que:

$$\begin{cases} s_{1,2} = -\alpha (1 - \sqrt{1 - \sigma}) \pm j\omega_{s0} \\ s_{3,4} = -\alpha (1 + \sqrt{1 - \sigma}) \pm j\omega_{s0} \end{cases} \quad (5.92a)$$

Par application numérique on a :

➤ Pour une machine 4 kW:  $s_{1,2} = -3.9 \pm j\omega_{s0}; s_{3,4} = -176.5 \pm j\omega_{s0}$ .

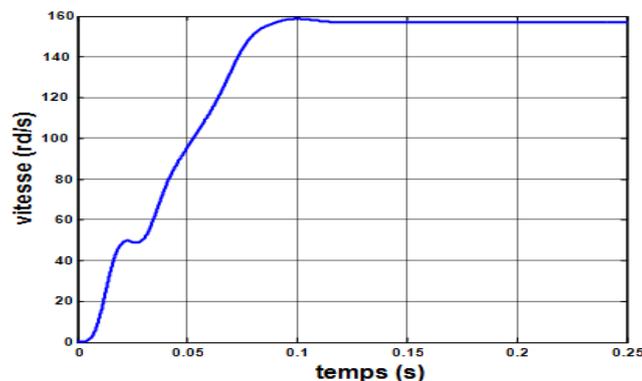
➤ Pour une machine 270 kW:  $s_{1,2} = -1.59 \pm j\omega_{s0}; s_{3,4} = -76 \pm j\omega_{s0}$ .

**Interprétation:** on remarque que  $s_{1,2}$  ont une partie réelle très petite par rapport à celle de  $s_{3,4}$ .

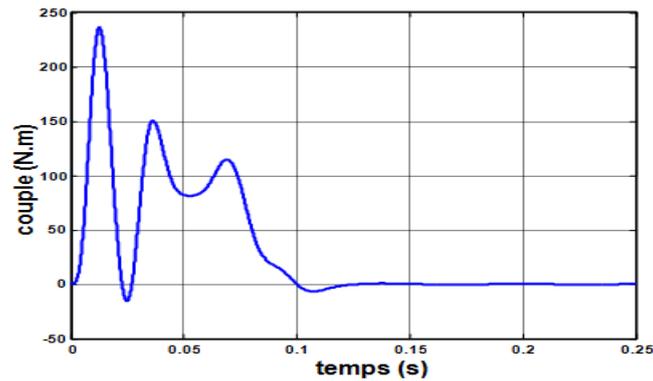
### **Conclusion :**

- Les variables électrique (courants, flux et couple) sont très mal amorties.
  - Les oscillations du couple et du courant sont d'amplitudes élevées, de pulsations  $\omega_{s0}$  et faiblement amortie car la partie réelle de  $s_{1,2}$  est très petite.
- ✓ **Lorsque la vitesse augmente**, Les réponses transitoires des courants, des flux et du couple sont mieux amortis.

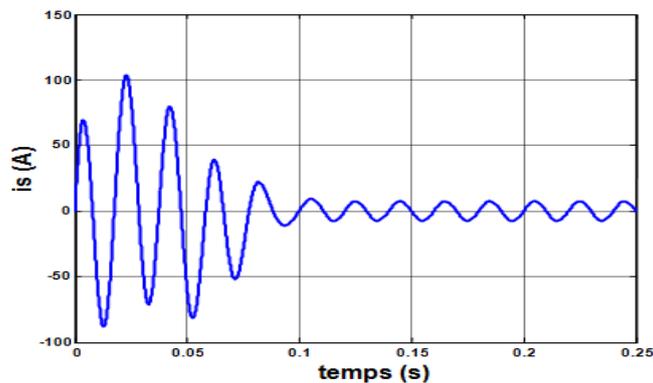
*Les résultats de simulation ci-dessous viennent confirmer les conclusions déduites des calculs. sachant que la simulation a été effectuée sous MATLAB SIMULINK.*



a. Evolution de la vitesse



b. Evolution du couple électromagnétique



c. Evolution du courant statorique

Figure 5.8. Résultats de simulation de comportement de la MAS

## 5.4 Modèles dynamiques liés aux commandes, [8]

Cette partie concernera la présentation des modèles liés aux commandes. parmi les principales commandes utilisées pour la variation de la vitesse et le contrôle de la position de la MAS, on cite:

- ❖ **La commande scalaire (CS)** : elle s'intéresse uniquement à l'amplitude et la fréquence d'un signal tension ou courant pour contrôler le couple et le flux, en générale dans un repère tournant à la vitesse de synchronisme lié à une des variables électriques. .
- ❖ **la commande vectorielle (FOC)**: correspond à un repère de référence lié au flux rotorique de la machine.
- ❖ **La commande directe de couple (DTC)**:se réalise dans un repère fixe et utilise le flux statorique.

### 5.4.1 Contrôle scalaire

Dans ce contrôle, on considère que tous les vecteurs tournant à la vitesse de champs tournant (synchronisme), même en régime transitoire.

Si ce la est valable pour les vecteurs tensions-courants statoriques dont la pulsation est imposée par le convertisseur "onduleur", il ne l'est pas pour les flux statorique et rotorique.

Cette considération simplifie beaucoup la commande, dans la mesure où aucune transformation de coordonnées n'est nécessaire (contrairement à la commande vectorielle).

Donc, les équations de la machine sont écrites dans un repère synchrone lié soit à : la tension ou le courant statorique, soit au flux statorique ou rotorique.

Dans ces conditions, le modèle utilisé est décrit par les relations (5.78) et (5.86) précédentes:

$$\begin{aligned} V_{sd} &= R_s \cdot i_{sd} + \frac{d}{dt} \phi_{sd} - \omega_s \phi_{sq} \\ V_{sq} &= R_s \cdot i_{sq} + \frac{d}{dt} \phi_{sq} + \omega_s \phi_{sd} \\ V_{rd} &= R_r \cdot i_{rd} + \frac{d}{dt} \phi_{rd} - (\omega_s - \omega) \phi_{rq} \\ V_{rq} &= R_r \cdot i_{rq} + \frac{d}{dt} \phi_{rq} + (\omega_s - \omega) \phi_{rd} \\ C_{em} &= p M_{sr} \operatorname{Im} [ I_s \cdot I_r^* ] \end{aligned}$$

### 5.4.2 Contrôle vectoriel à flux orienté

En résumé de nombreuses variantes de la commande vectorielle ont été présentées dans la littérature suivant leur évolution chronologique (figure 5.16).

#### 5.4.2.1 Principe de la méthode, [9] [10]:

Le principe de la commande vectorielle consiste à orienter une des composantes du flux statorique, rotorique ou de l'entrefer sur un axe du référentiel tournant à la vitesse  $\omega_s$ . Cette méthode est basée sur le choix d'un repère de référence, lié au flux rotorique  $\phi_r$ . Si on décompose le courant statorique en ses composantes  $i_{sd}$  suivant le flux rotorique et  $i_{sq}$  en quadrature avec ce flux, on met en évidence une commande découplée du flux et du couple. On obtient alors des fonctionnements comparables à ceux

d'une machine à courant continu à excitation séparée où le courant inducteur contrôle le flux et le courant induit contrôle le couple.

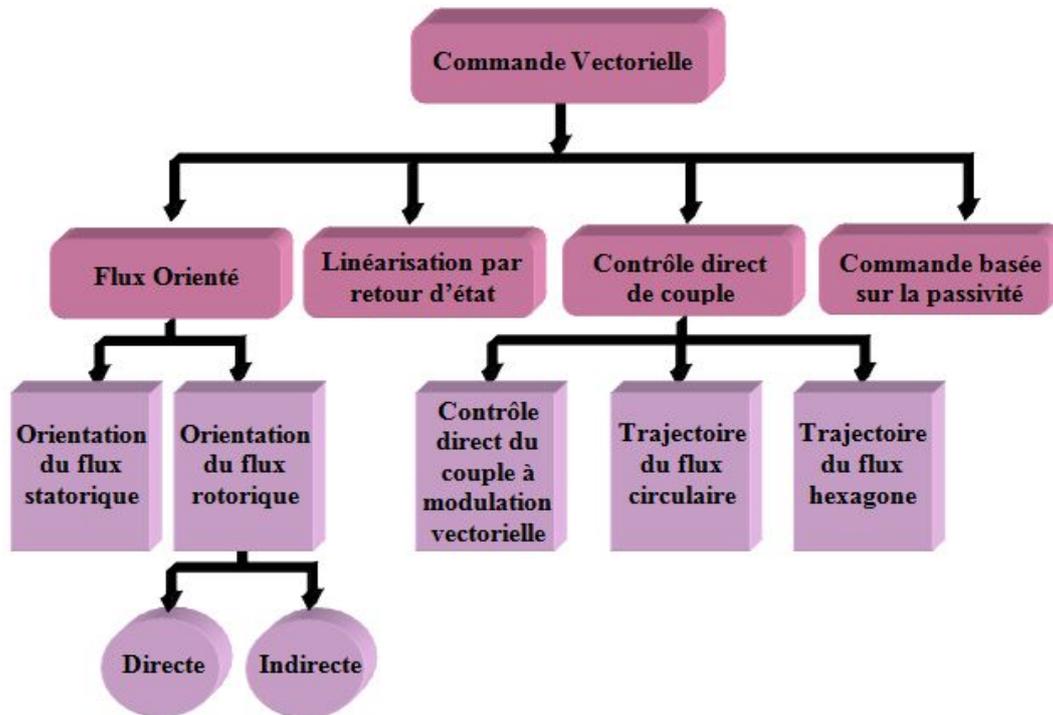


Figure 5.16 Les différentes classes de la commande vectorielle.

Pour présenter la méthode, on considère diverse méthodes du flux orienté directe et indirecte.

#### 5.4.2.2 Choix de référentiel

Sachant que le modèle en régime transitoire de la MAS dans un repère dq tournant à  $\omega_m$  par rapport au stator est:

$$V_{sd} = R_s \cdot i_{sd} + \frac{d}{dt} \phi_{sd} - \omega_m \phi_{sq}$$

$$V_{sq} = R_s \cdot i_{sq} + \frac{d}{dt} \phi_{sq} + \omega_m \phi_{sd}$$

$$V_{rd} = R_r \cdot i_{rd} + \frac{d}{dt} \phi_{rd} - (\omega_m - \omega) \phi_{rq}$$

$$V_{rq} = R_r \cdot i_{rq} + \frac{d}{dt} \phi_{rq} + (\omega_m - \omega) \phi_{rd}$$

$$C_e = p \frac{M_{sr}}{L_r} (\phi_{rd} \cdot i_{sq} - \phi_{rq} \cdot i_{sd}) = p (\phi_{sd} \cdot i_{sq} - \phi_{sq} \cdot i_{sd})$$

On peut à priori choisir les axes de référence selon un des flux de la MAS, à savoir **le flux statorique, le flux rotorique ou le flux d'entrefer** et vérifier le degré de découplage entre le flux et le couple selon ce choix.

### a. Référentiel lié au flux statorique

$\omega_{ms}$  est la vitesse de rotation du flux statorique (figure 5.17), et celle des axes de référence, l'axe d étant selon le flux statorique:

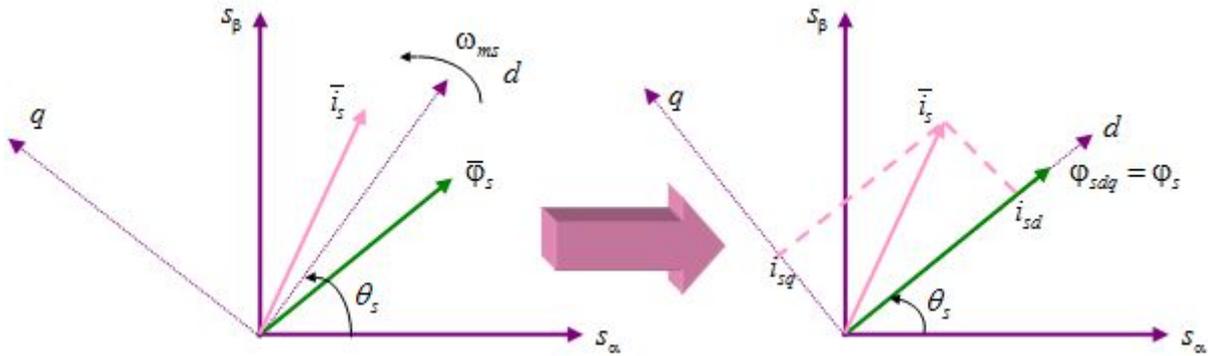


Figure 5.17 Repère lié au flux statorique.

Alors,  $\varphi_{sd} = \phi_s$  et  $\varphi_{sq} = 0$ , le couple a pour expression :

$$C_e = p \cdot \phi_{sd} \cdot i_{sq}$$

Le couple est le produit du flux par la composante du courant statorique en quadrature avec le flux.

En utilisant la première équation rotorique du modèle général en régime transitoire, on obtient:

$$\frac{1}{L_s} \left( 1 + T_r \frac{d}{dt} \right) \phi_{sd} = \left( 1 + \sigma T_s \frac{d}{dt} \right) i_{sd} - (\omega_{ms} - \omega) \sigma T_r i_{sq}$$

Le flux statorique **ne dépend pas seulement** de la composante du courant statorique dans l'axe "d" mais d'un terme contenant la composante dans l'axe "q".

✚ Alors, ce choix de référentiel ne permet pas un découplage naturel entre les deux axes.

### b. Référentiel lié au flux rotorique

$\omega_{mr}$  est la vitesse de rotation du flux statorique (figure 5.18), et du système de référence dq, l'axe d étant selon le flux statorique.

Alors,  $\varphi_{rd} = \phi_r$  et  $\varphi_{rq} = 0$ , le couple a pour expression :

$$C_e = p \cdot \frac{M_{sr}}{L_r} \phi_{rd} \cdot i_{sq}$$

Donc, Le couple est proportionnel au produit du flux par la composante du courant statorique en quadrature avec le flux.

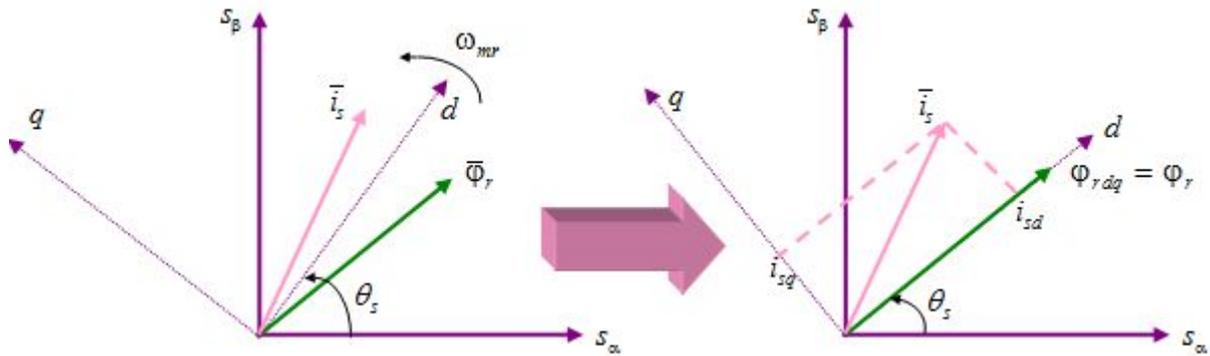


Figure 5.18 Repère lié au flux rotorique.

◆ En utilisant la première équation rotorique, on obtient:

$$\left(1 + T_r \frac{d}{dt}\right) \phi_{rd} = M_{sr} \cdot i_{sd} \Rightarrow \phi_{rd} = \frac{M_{sr}}{1 + T_r s} i_{sd}$$

Alors, le module du flux dépend uniquement de la composante  $i_{sd}$  moyennant une dynamique du 1<sup>er</sup> ordre avec une constante de temps  $T_r$ .

◆ La deuxième équation rotorique donne la position angulaire du flux rotorique par rapport à une phase du stator:

$$\omega_{mr} = \underbrace{\frac{\omega}{p \cdot \Omega}}_{\omega_g} + \frac{M_{sr}}{T_r \phi_r} i_{sq} \quad \text{Avec } \theta_s = \int \omega_{mr} dt \quad \text{et } i_{rq} = -\frac{M_{sr}}{L_r} i_{sq}$$

En régime permanent,  $\omega_{mr}$  se confond avec  $\omega_s$  et le dernier terme de la relation se confond avec la pulsation des courants dans le rotor  $\omega_g$ , on obtient alors l'équation d'autopilotage suivante :

$$\omega_s = \omega + \omega_g = p \Omega + \omega_g$$

### c. Référentiel aux flux dans l'entrefer:

$\omega_{mm}$  est la vitesse de rotation du flux commun (figure 5.19), dans l'entrefer de composantes:

$$\phi_{sdm} = M_{sr} (i_{sd} + i_{rd}) \quad \text{Et } \phi_{sqm} = M_{sr} (i_{sq} + i_{rq})$$

Le repère est choisi de manière que l'axe d soit confondu avec le flux de l'entrefer et par suite :

$$\phi_{sdm} = \phi_m, \quad \phi_{sqm} = 0, \quad i_{sq} = -i_{rq}$$

Le couple s'exprime par la relation:

$$C_e = p \cdot \phi_{sdm} \cdot i_{sq}$$

◆ En utilisant la première équation rotorique, on obtient:

$$\frac{1}{M_{sr}} \left( 1 + T_r \frac{d}{dt} \right) \phi_{sdm} = \left( 1 + \sigma T_r' \frac{d}{dt} \right) i_{sd} - (\omega_{ms} - \omega) \sigma T_r' i_{sq} \quad \text{Avec } T_r' = \frac{L_r - M_{sr}}{R_r}$$

On remarque que le flux dépend comme dans le premier cas (a), des deux composantes  $i_{sd}$  et  $i_{sq}$ .

- ✚ Alors ce choix ne permet pas un découplage naturel entre le flux et les variables selon l'axe  $q$ .
- ✚ **On peut conclure que** les résultats précédents expliquent le choix d'un repère lié au flux rotorique, ce qui nécessite un estimateur de flux, du couple et de la position.

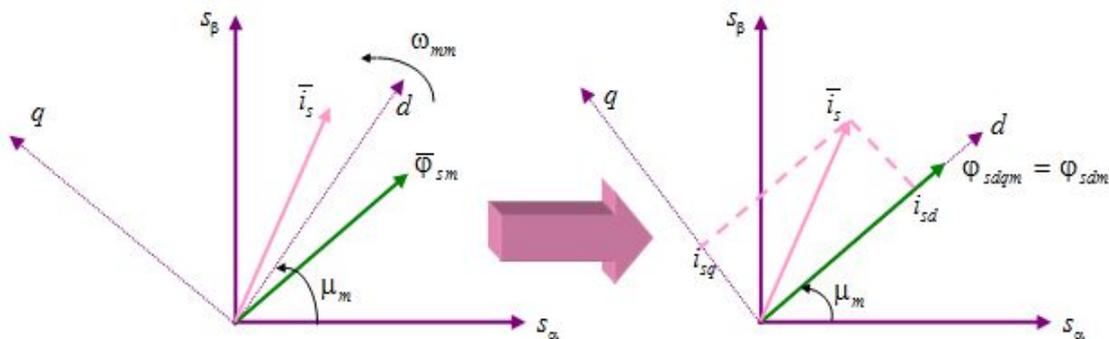


Figure 5.19 Repère lié au flux statorique.

### 5.4.3 Contrôle direct du couple (DTC)

#### 5.4.3.1 Principe

Cette technique est basée sur la détermination directe des séquences de commande (**catégorie des commandes en amplitude**) appliquée aux interrupteurs d'un onduleur de tension généralement à base des régulateurs à hystérésis.

#### 5.4.3.2 Formulation mathématique

Pour contrôler le flux il est d'usage tout d'abord de contrôler les flux (statoriques) simple à estimer.

Le modèle de la machine dans le repère lié au stator permet d'écrire l'expression du flux comme suit :

$$\dot{\bar{\phi}}_s = -R_s \bar{i}_s + \bar{V}_s \Rightarrow \bar{\phi}_s = \int_0^t (-R_s \bar{i}_s + \bar{V}_s) dt + \bar{\phi}_{s0}$$

Si on néglige la chute de tension due à la résistance  $R_s$ , on obtient:

$$R_s \bar{i}_s \ll \bar{V}_s \Rightarrow \bar{\phi}_s = \int_0^t \bar{V}_s dt + \bar{\phi}_{s0}$$

Pour une période d'échantillonnage de période  $T_e$  (figure 5.20), le vecteur tension reste constant d'où:

$$\bar{\phi}_s(k+1) = \bar{V}_s T_e + \bar{\phi}_s(k) \Rightarrow \Delta \bar{\phi}_s = \bar{V}_s T_e \Rightarrow \bar{V}_s = \frac{\Delta \bar{\phi}_s}{T_e}$$

Avec:  $\bar{\phi}_s(k)$ : Vecteur flux au pas d'échantillonnage actuel;  $\bar{\phi}_s(k+1)$ : Vecteur flux au pas d'échantillonnage suivant;  $T_e$ : période d'échantillonnage;  $\Delta \bar{\phi}_s$ : vecteur variation de flux.

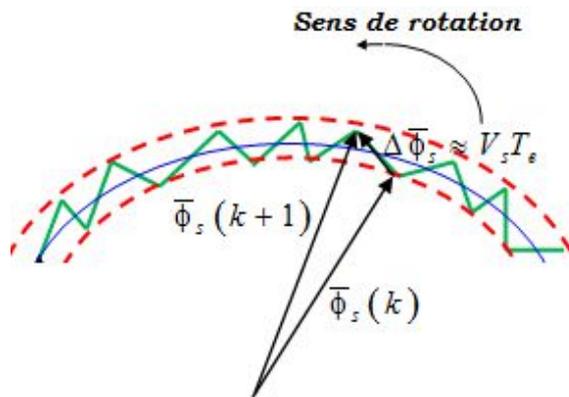


Figure 5.20 Evolution du vecteur flux stator dans le plan  $\alpha\beta$

La différence entre le flux  $\phi_s$  et le  $\phi'_r$  ramené donne le flux de fuite, ainsi, en régulant le flux  $\phi_s$  on règle indirectement le flux rotorique (figure 5.21).

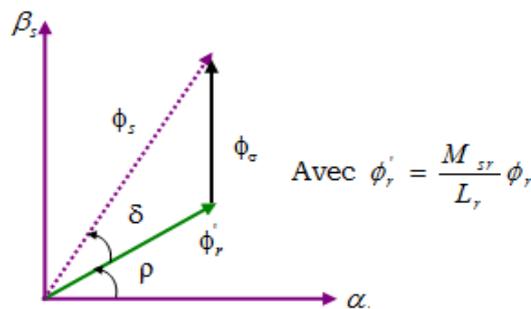


Figure 5.21 Vecteurs flux stator, rotor et fuites

Le couple électromagnétique est proportionnel au produit vectoriel entre les vecteurs flux stator et rotor:

$$C_e = k (\bar{\phi}_s \wedge \bar{\phi}_r') = k \|\bar{\phi}_s\| \cdot \|\bar{\phi}_r'\| \cdot \sin \delta$$

Donc, tout vecteur qui augmente  $\delta$  fait augmenter le couple et l'inverse.

Il s'agit de choisir d'une manière adéquate la séquence de commande pour faire suivre  $\phi_s$  une trajectoire presque circulaire. d'où la nécessité d'une table de commutation :

$C_e \uparrow \phi_s \uparrow$	$C_e \uparrow \phi_s \downarrow$	$C_e \downarrow \phi_s \uparrow$	$C_e \downarrow \phi_s \downarrow$
$V_{k+1}$	$V_{k+2}$	$V_{k-2}$	$V_{k-1}$
Tableau 5.1 Table de vérité dans un secteur $S_k$			

● **Estimation du flux :** se faite directement par la mesure des courants ou flux:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{sd} = -R_s i_{sd} + V_{sd} \\ \dot{\phi}_{sq} = -R_s i_{sq} + V_{sq} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_{sd} = \int (-R_s i_{sd} + V_{sd}) dt \\ \phi_{sq} = \int (-R_s i_{sq} + V_{sq}) dt \end{cases}$$

Les tensions sont obtentables par les séquences ( $C_A, C_B$  et  $C_C$ ) sur la mesure de  $U_c$  en appliquant la transformée de Clark:

$$\begin{cases} V_{sd} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ C_A - \frac{1}{2} (C_B - C_C) \right] \\ V_{sq} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} [C_B - C_C] \end{cases} \Rightarrow \theta_s = \arctg \left( \frac{\phi_{sd}}{\phi_{sq}} \right)$$

● **Estimation du couple :**

$$C_e = p \frac{M_{sr}}{L_r} (\phi_{sd} i_{sq} - \phi_{sq} i_{sd})$$

Les courants sont mesurés et le flux estimé comme cité précédemment.

### 5.4.3.3 Avantages et inconvénients

Le tableau 5.2 illustre les avantages et les inconvénients du contrôle direct de couple:

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Amélioration de temps de réponse; <ul style="list-style-type: none"> <li>• Large plage de variation couple-flux;</li> </ul> </li> <li>• Imposition directe des amplitudes d'ondulation;</li> <li>• Simple à implanter, ne nécessite pas de transformée de Park.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fréquences de commutation variables due à l'utilisation des régulateurs à hystérésis; <ul style="list-style-type: none"> <li>• Effet sonore; bruit</li> </ul> </li> <li>• Nécessite des fréquences d'échantillonnage très élevées;</li> <li>• Dégradation prématurée du matériel.</li> </ul>

## 5.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre:

- ✚ La modélisation des machines symétriques par les équations de Park dans différents systèmes d'axes de référence.
- ✚ La représentation complexe qui est en relation directe avec la représentation vectorielle des signaux.
- ✚ la dynamique de la machine (lieux des pôles et des zéros) qui a été caractérisée par une modélisation des petites variations autour d'un point.
- ✚ les particularités de la modélisation en lien avec les commandes de la machine, à savoir ; le repère le plus adéquat, les relations fondamentales associées à chaque type de commande.

## 5.6 Exercice d'application : *Fonctionnement à vitesse variable*

Sachant que les modes mécaniques sont plus lents que les modes électriques, ce qui permet de supposer que la vitesse variée lentement par rapport aux courants et flux :

*A partir des relations (5.87) à (5.71), définir la relation transfert liant la variation du couple aux variables d'entrées.*

1. *Selon que la machine est pilotée directement ou autopilotée, écrire les relations de transfert concernant le couple.*
2. *Tenant compte de l'équation mécanique, déduire la fonction de transfert de la variation de la vitesse ( $\Delta\omega$ ).*

## 5.7 Bibliographie

- [1] H. BENBOUZID, "Différentes Techniques de L'energy saving utilisées dans les Commandes Vectorielles de la Machine à Induction : Application aux Véhicules électriques", Mémoire de Magister, UNIV-BATNA, 2004.
- [2] R. ABDESSEMED, " Modélisation et simulation des machines électriques", Collection Techno-sup les filières technologiques des enseignements supérieurs Electrotechnique, Édition. Paris, Ellipses 2011.
- [3] S. KHELFA, « Commande vectorielle d'une machine à induction, Impacts de la Saturation de la machine et la modulation du convertisseur. », Mémoire de Magister, UNIV-BATNA, Juillet 2001.
- [4] G. Guy, C. Guy, « Actionneurs électrique, principes modèles commande. », Edition Eyrolles, 2000.
- [5] J.P. LOUIS, " Modèle pour la commande des actionneurs électriques", Edition, Lavoisier, Paris. 2004.
- [6] S. HAMDUCHE, « Contribution à l'amélioration des Structures de régulation des courants des machines à courant alternatif. », Mémoire de Magister, UNIV-BATNA, 2007.
- [7] M. S Nait Said, « Contribution à la commande vectorielle d'une machine Asynchrone à cage d'écureuil : Robustesse contre les dérives paramétriques, amélioration des performances énergétiques. », Thèse de doctorat, UNIV-BATNA, 1999.
- [8] M. HADEF, «Commande Electrique», Note de cours, Master 1, Electromécanique, Jijel 2015
- [9] G.S. Buja, M.P. Kazmierkowski, « Direct torque control of PWM inverter-fed AC motors – A survey. », IEEE Trans. Power Electronic, vol 51, pp.744-757, Aug 2004.
- [10] N. Goléa, « Commande des machines électriques. », Note de cours, Magister, Batna 2005.

# Chapitre 6

---

## Modélisation statique des machines asynchrones en vue de leurs commandes scalaires

**Prérequis:** Modélisation de la machine asynchrone

**Objectif :** A l'issu de ce chapitre l'étudiant sera capable de:

- ✓ Modéliser la machine asynchrone en régime permanent;
- ✓ Proposer des modèles inverses, à partir du modèle statique de la machine, en vue de leur commande.

*" Une science est un ensemble ordonné de paradoxes testables, et d'erreurs rectifiées.*

*Comte-Sponville*

## Introduction:

Le régime permanent du moteur asynchrone correspond à celui d'une alimentation statorique sinusoïdale triphasée équilibrée, lorsque la vitesse de rotation et donc le glissement sont devenus constants [1].

Les points qui font l'objet du présent chapitre sont;

- La modélisation en régime permanent de la MAS;
- Modèles équivalents de la MAS;
- Commande scalaire en couple.

### 6.1 Modélisation en régime permanent sinusoïdal, [2][3]:

Dans le chapitre 5, les équations des tensions avec les phaseurs sont;

$$\bar{V}_s = R_s \cdot \bar{i}_s + \frac{d\bar{\phi}_s}{dt} \quad \text{Et} \quad \bar{V}_r = R_r \cdot \bar{i}_r + \frac{d\bar{\phi}_r}{dt} \quad (6.1)$$

Dans le régime permanent et dans un repère lié au champ tournant, les grandeurs sont toutes constantes alors ( $\frac{d\bar{x}}{dt} = 0$ ). Les relations (6.1) peuvent être réécrites:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{i}_s + j\omega_s \bar{\phi}_s \\ \bar{V}_r = R_r \bar{i}_r + j\omega_r \bar{\phi}_r \end{cases} \quad (6.2)$$

On définit le glissement  $g$  par:

$$g = \frac{\omega_r}{\omega_s} = \frac{(\omega_s - p\Omega)}{\omega_s} \quad (6.3)$$

La réécriture de (6.1) avec les "amplitudes complexes" donne les équations aux tensions :

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega_s \bar{\phi}_s \\ \bar{V}_r = \frac{R_r}{g} \bar{I}_r + j\omega_s \bar{\phi}_r \end{cases} \quad (6.4)$$

Ainsi, les équations des flux s'écrivent:

$$\begin{cases} \bar{\phi}_s = L_s \bar{I}_s + M_{sr} \bar{I}_r \\ \bar{\phi}_r = L_r \bar{I}_r + M_{sr} \bar{I}_s \end{cases} \quad \text{Avec} \quad M_{sr} = \frac{3}{2} M_{3sr} \quad (6.5)$$

Dans le cas d'une machine à cage d'écureuil ( $V_r = 0$ ), si l'on met (6.5) dans (6.4), on obtient:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + jL_s \omega_s \bar{I}_s + jM_{sr} \omega_s \bar{I}_r \\ 0 = \frac{R_r}{g} \bar{I}_r + jL_r \omega_s \bar{I}_r + jM_{sr} \omega_s \bar{I}_s \end{cases} \quad (6.6)$$

Ce système d'équations est traduit par le schéma équivalent par phase (figure 6.1) dit "aux inductances couplées";

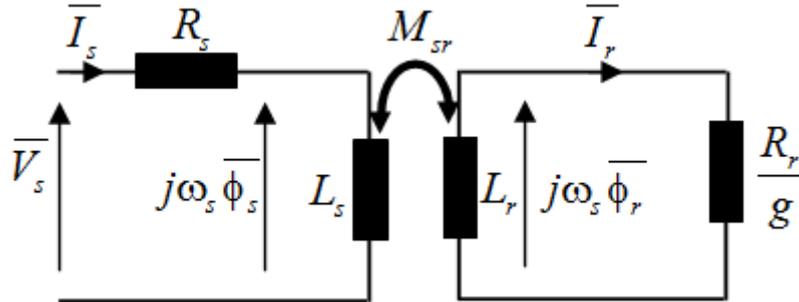


Figure 6.1 Schéma aux inductances couplées

En plus, l'expression de couple électromagnétique en fonction des amplitudes complexes des courants est donnée par:

$$C_{em} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot M_{sr} \cdot \text{Im} \left( \bar{I}_s \cdot \bar{I}_r^* \right) \quad (6.7)$$

## 6.2 Modèle aux fuites magnétiques totalisées au stator, [2][3]:

Dans ce cas, on considère que le flux utile qui sert à la magnétisation de la machine est égale au **flux rotorique** c'est-à-dire  $\phi_u = \phi_r$ , donc il faut exprimer toutes les grandeurs en fonction ( $\phi_r$  et  $\omega_r$ ) car cette dernière est l'image de l'état de charge de la machine :

### 6.2.1 Expressions des grandeurs électriques en fonction du flux rotorique

❖  $\bar{\phi}_s$  en fonction de  $\bar{\phi}_r$  et  $\omega_r$  :

De l'équation (6.6), on trouve:

$$\bar{I}_r = -j \frac{\omega_r}{R_r} \bar{\phi}_r \quad (6.8)$$

✚ L'expression (6.8) montre que le courant rotorique est déphasé de  $90^\circ$  par rapport au vecteur flux rotorique pour un fonctionnement moteur (avec  $\omega_r > 0$ ).

Aussi, à partir du système d'équations (6.5) on a :

$$\begin{cases} \bar{I}_s = \frac{1}{\sigma L_s L_r} (L_r \bar{\phi}_s - M_{sr} \bar{\phi}_r) \\ \bar{I}_r = \frac{1}{\sigma L_s L_r} (L_s \bar{\phi}_r - M_{sr} \bar{\phi}_s) \end{cases} \quad (6.9)$$

Avec:  $\sigma = 1 - \frac{M_{sr}^2}{L_s L_r}$   
*Coefficient de dispersion magnétique*

En remplaçant l'équation (6.8) du courant  $\bar{I}_r$  dans l'équation du flux du système (6.5), on trouve :

$$\bar{\phi}_s = \frac{L_s}{M_{sr}} (1 + j\sigma T_r \omega_r) \bar{\phi}_r \quad \text{avec} \quad T_r = \frac{L_r}{R_r} \quad (6.10)$$

*constante de temps rotorique*

✚ Donc, on a un 1<sup>er</sup> ordre entre le flux statorique et le flux rotorique. Le vecteur flux statorique est en avance par rapport au vecteur flux rotorique pour un fonctionnement moteur d'un angle  $\theta$  dépend uniquement de  $(\omega_r)$  tel que :

$$\theta = \arctg(\sigma T_r \omega_r) \quad (6.11)$$

❖  $\bar{I}_s$  en fonction de  $\bar{\phi}_r$  et  $\omega_r$  :

En remplaçant l'équation (6.8) du flux  $\bar{\phi}_s$  dans l'équation du courant  $\bar{I}_s$  du système (6.9), on trouve :

$$\bar{I}_s = \frac{1}{M_{sr}} (1 + jT_r \omega_r) \bar{\phi}_r \quad (6.12)$$

✚ Donc, pour un fonctionnement moteur le vecteur de courant statorique est en avance par rapport au vecteur de flux rotorique d'un angle  $\gamma$  dépend uniquement de  $(\omega_r)$  tel que:

$$\gamma = \arctg(T_r \omega_r) \quad (6.13)$$

❖  $\bar{V}_s$  en fonction de  $\bar{\phi}_r$  et  $\omega_r$  :

De (6.4),(6.10) et (6.12) on déduit la relation entre  $\bar{V}_s$  et  $\bar{\phi}_r$  :

$$\overline{V}_s = \frac{R_s}{M_{sr}} \left[ (1 - \sigma T_s T_r \omega_s \omega_r) + j (T_s \omega_s + T_r \omega_r) \right] \cdot \overline{\phi}_r \quad (6.14)$$

### 6.2.2 Expressions du couple électromagnétique

Une nouvelle écriture du couple électromagnétique en fonction des amplitudes complexes des flux s'obtient à partir de la relation du couple (6.7) à l'aide de (6.9):

$$C_{em} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \frac{M_{sr}}{\sigma L_s L_r} \cdot \text{Im} \left( \overline{\phi}_s \cdot \overline{\phi}_r^* \right) \quad (6.15)$$

(Rappelons que les modules de  $\phi_s$  et  $\phi_r$  sont des amplitudes crêtes). Or, d'après (6.10), il vient :

$$C_{em} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \frac{\phi_r^2}{\sigma L_r} \cdot \text{Im} (1 + j\sigma T_r \omega_r) \quad (6.16)$$

Alors:

$$C_{em} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \frac{\phi_r^2}{R_r} \cdot \omega_r \quad (6.17)$$

La relation (6.17) est très importante puisque:

- ✚ Si l'on considère que le flux rotorique est imposé, le couple est proportionnel au glissement quelque soit les conditions d'utilisation de la machine.
- ✚ Elle conduit aux caractéristiques statiques couples-vitesse (**figure 6.2**).

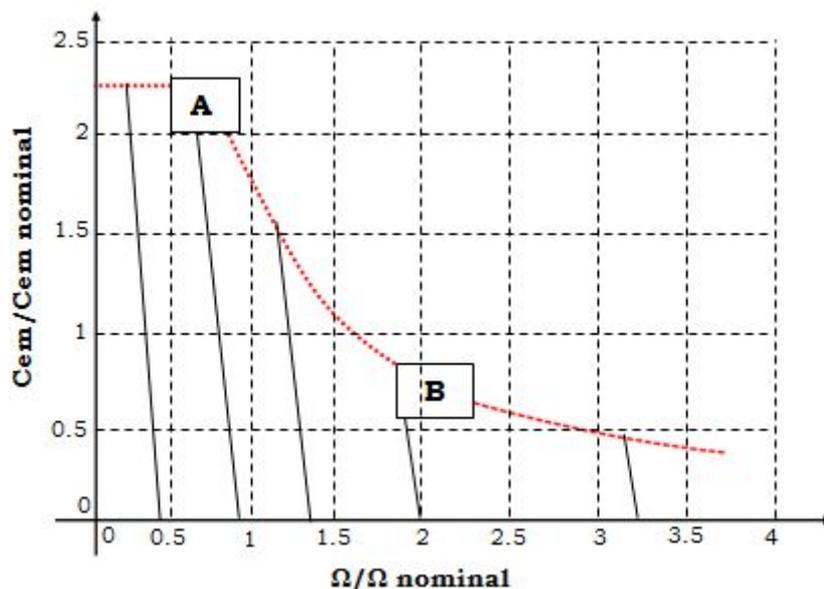


Figure 6.2 Caractéristiques statiques couple/vitesse à flux rotorique imposé

**Zone A:**

- $\bar{\phi}_r$  est maintenu à sa valeur nominale;
- La limitation de couple due aux pertes dans la machine causées par une augmentation du courant  $\bar{I}_s$  en fonction de glissement (relation (6.18)):

$$\bar{I}_s = \frac{1}{M_{sr}} (1 + jT_r \omega_r) \bar{\phi}_r \Rightarrow I_s = \frac{1}{M_{sr}} \sqrt{1 + (T_r \omega_r)^2} \phi_r \quad (6.18)$$

**Zone B: (zone de défluxage):**

- à partir d'une vitesse nominale on doit défluxer la machine de façon à ne plus augmenter la tension  $\bar{V}_s$ ;
- le flux imposé par la commande est donné par:

$$\begin{cases} \phi_r = \phi_{r\_nom} & \text{pour } \Omega < \Omega_n \text{ (zone A)} \\ \phi_r = \phi_{r\_nom} \cdot \left( \frac{\Omega_n}{\Omega} \right) & \text{pour } \Omega > \Omega_n \text{ (zone B)} \end{cases} \quad (6.19)$$

On peut calculer le flux  $\phi_r$  dans la région de défluxage, en calculant l'inverse en module de la relation (6.12), il vient:

$$\bar{\phi}_r = V_{s\_max} \cdot \frac{M_{sr}}{R_s} \frac{1}{\left[ (1 - \sigma T_s T_r \omega_s \omega_r)^2 + (T_s \omega_s + T_r \omega_r) \right]^2} \quad (6.20)$$

**Remarque:** La principale difficulté, pour contrôler le couple de cette façon, est le flux qui est une grandeur non mesurable et difficile à estimer.

**6.2.3 Schéma électrique équivalent****✳ Schéma équivalent du régime permanent de la MAS**

Si on pose :

$$L_s = l_{\sigma s} + M_{sr}; L_r = l_{\sigma r} + M_{sr} \quad (6.21)$$

En remplaçant (6.21) dans (6.6), on obtient:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j l_{\sigma s} \omega_s \bar{I}_s + j M_{sr} \omega_s (\bar{I}_s + \bar{I}_r) \\ 0 = \frac{R_r}{g} \bar{I}_r + j l_{\sigma r} \omega_s \bar{I}_r + j M_{sr} \omega_s (\bar{I}_s + \bar{I}_r) \end{cases} \Rightarrow \bar{I}_s + \bar{I}_r = \bar{I}_m \quad (6.22)$$

Pour tenir compte des pertes fer, une résistance équivalente qui représente ces pertes, est placée en parallèle avec la branche de magnétisation. Le schéma équivalent du régime permanent de la MAS est montré sur la figure 6.3.

Avec:  $l_{\sigma s}$ ;  $l_{\sigma r}$  sont les inductances des flux de fuites au stator et au rotor.

$I_m$  : Courant de magnétisation.

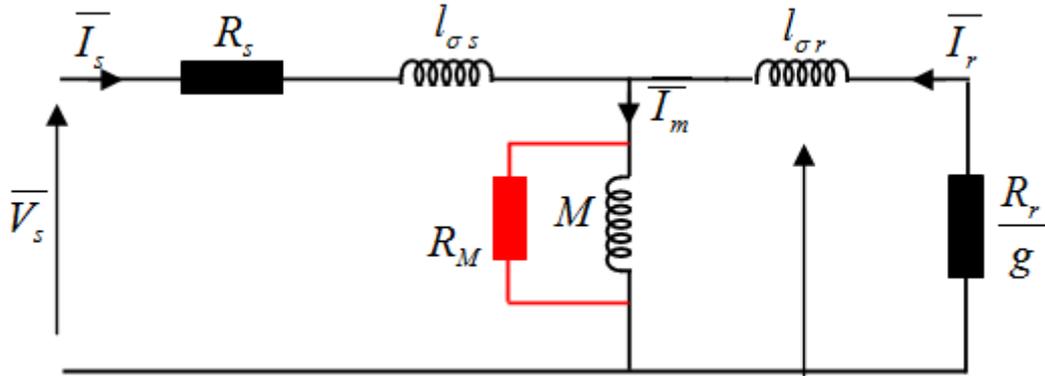


Figure 6.3 Schéma équivalent du régime permanent de la MAS

### ✳ Schéma équivalent avec changement de variable

En faisant le changement de variable suivant:

$$\bar{I}_r = a \cdot \bar{I}'_r \tag{6.23}$$

$a$  : est un nombre (arbitraire) fini et non nul.

En portant le changement de variable adopté dans le modèle (6.22), on trouve:

$$\begin{cases} \bar{V}_s = R_s \bar{I}_s + j l_{\sigma s} \omega_s \bar{I}_s + j M'_{sr} \omega_s \bar{I}'_m \\ 0 = \frac{R_r}{g} \bar{I}'_r + j l'_{\sigma r} \omega_s \bar{I}'_r + j M'_{sr} \omega_s \bar{I}'_m \end{cases} \tag{6.24}$$

Avec :

$$M'_{sr} = a \cdot M_{sr}; R_r' = a^2 \cdot R_r; L_r' = a^2 \cdot L_r \\ l_{\sigma s}' = L_s - M'_{sr}; l'_{\sigma r} = L_r' - M'_{sr}; \bar{I}'_m = \bar{I}_s + \bar{I}'_r$$

$l'_{\sigma r}$  : Inductance de flux de fuites rotorique ramenée.

Le système d'équations (6.24) permet d'établir le schéma équivalent de la MAS en régime permanent avec le changement de variable:

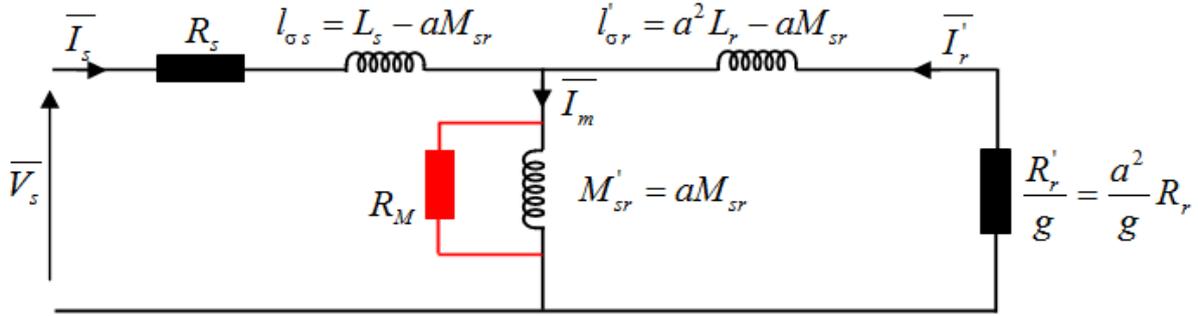


Figure 6.4 Schéma équivalent avec changement de variable

✳ **Schéma équivalent avec fuites totalisées au stator**

Pour ce cas, fuites totalisées au stator, la variable  $a$  est choisie telle que :

$$l'_{\sigma r} = 0 \Leftrightarrow L'_r - M'_{sr} = a^2 L_r - aM_{sr} = 0 \Rightarrow a = \frac{M_{sr}}{L_r} \tag{6.25}$$

Alors, l'inductance de fuites totalisées dans le stator  $l_{\sigma s}$ , la mutuelle  $M'_{sr}$  et la résistance rotorique  $R'_r$  ramenées s'expriment par :

$$\begin{aligned} l_{\sigma s} &= L_s - M'_{sr} = L_s - aM_{sr} = L_s - \frac{M_{sr}^2}{L_r} = \sigma L_s \\ M'_{sr} &= aM_{sr} = \frac{M_{sr}^2}{L_r} = (1 - \sigma)L_s \\ R'_r &= a^2 R_r = \left(\frac{M_{sr}}{L_r}\right)^2 R_r = \frac{(1 - \sigma)L_s}{T_r} \end{aligned} \tag{6.26}$$

Finalement, le schéma **équivalent avec fuites totalisées au stator** (en T) devient:

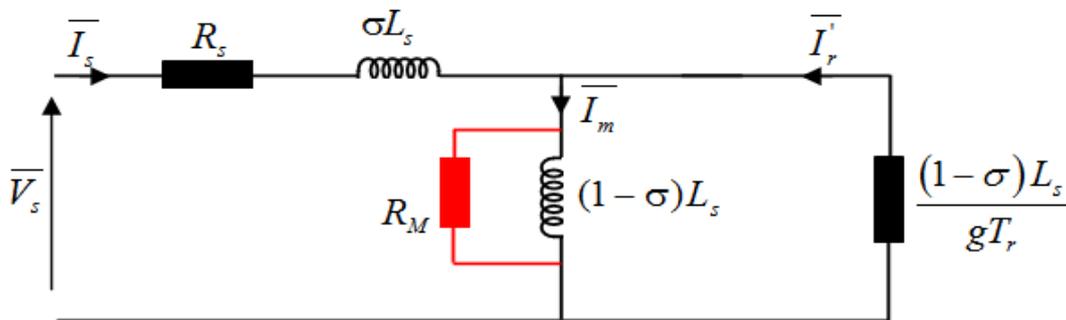


Figure 6.5 Schéma équivalent avec fuites totalisées au stator

✚ Cette configuration permet de réduire le nombre de paramètres:  $R_s, L_s, \sigma, R_M, T_r$ . Ce modèle est adapté à la détermination expérimentale des paramètres par les essais classiques à puissance utile nulle: l'essai à vide et l'essai à rotor bloqué.

### 6.3 Modèle aux fuites magnétiques totalisées au rotor, [2][3]:

Dans ce cas, on considère que le flux utile qui sert à la magnétisation de la machine est égale au **flux statorique** c'est-à-dire  $\phi_u = \phi_s$ , donc il faut exprimer toutes les grandeurs en fonction de ( $\phi_s$  et  $\omega_r$ ). Lorsque le flux utile est fixé, est une image fidèle de la charge de la machine :

#### 6.3.1 Expressions des grandeurs électriques en fonction du flux statorique

❖  $\bar{\phi}_r$  en fonction de  $\bar{\phi}_s$  et  $\omega_r$  :

En inversant la relation (6.10), on obtient le flux rotorique:

$$\bar{\phi}_r = \frac{M_{sr}}{L_s} \frac{1}{(1 + j\sigma T_r \omega_r)} \bar{\phi}_s \quad (6.24)$$

❖  $\bar{I}_s$  en fonction de  $\bar{\phi}_s$  et  $\omega_r$  :

À partir des relations (6.9) et (6.24), on déduit la relation liant le courant et le flux statorique:

$$\bar{I}_s = \frac{1}{L_s} \cdot \left( \frac{1 + jT_r \omega_r}{1 + j\sigma T_r \omega_r} \right) \bar{\phi}_s \quad (6.25)$$

✚ La relation (6.25) est plus complexe que ne l'est la relation (6.11) liant le même courant  $\bar{I}_s$  au  $\bar{\phi}_r$  et  $\omega_r$ . Nous verrons lors de la prochaine partie que ce type de propriété a des influences sur les structures de commande.

✚ Donc, le déphasage  $\beta$  entre les amplitudes complexes du courant  $\bar{I}_s$  et du flux  $\bar{\phi}_s$  est égale à:

$$\beta = \arctg(T_r \omega_r) - \arctg(\sigma T_r \omega_r) \quad (6.26)$$

Soit d'après les relations (6.11) et (6.13):

$$\beta = \gamma - \theta \quad (6.27)$$

**Remarque:** Cette dernière relation montre l'intérêt de référencer le vecteur courant  $\bar{I}_s$  au vecteur flux  $\bar{\phi}_r$  plutôt qu'au vecteur flux  $\bar{\phi}_s$ .

❖  $\bar{V}_s$  en fonction de  $\bar{\phi}_s$  et  $\omega_r$  :

De (6.4) et (6.25) , on déduit la relation entre  $\bar{V}_s$  et  $\bar{\phi}_s$  :

$$\bar{V}_s = \left[ \frac{1}{T_s} \cdot \frac{(1 + jT_r\omega_r)}{(1 + j\sigma T_r\omega_r)} + j\omega_s \right] \cdot \bar{\phi}_s \quad (6.28)$$

Cette relation peut être simplifiée, si la résistance  $R_s$  est négligeable (machine forte puissance), on peut écrire:

$$\bar{V}_s = j\omega_s \bar{\phi}_s \quad (6.29)$$

✚ Cette simplification sera exploitée par la commande scalaire en tension.

### 6.3.2 Expressions du couple électromagnétique

De l'expression (6.15) donnant le couple en fonction des flux et selon (6.24), on trouve :

$$C_{em} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \left( \frac{M_{sr}}{L_s} \right)^2 \phi_s^2 \cdot \frac{R_r \omega_r}{R_r^2 + (\sigma L_r \omega_r)^2} \quad (6.30)$$

Pour les faibles valeurs de  $\omega_r$  :  $R_r^2 \gg (\sigma L_r \omega_r)^2$ , donc, l'équation de couple peut s'écrire:

$$C_{em} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot \left( \frac{M_{sr}}{L_s} \right)^2 \phi_s^2 \cdot \frac{\omega_r}{R_r} \quad (6.31)$$

✚ Si l'on considère que le couplage est parfait alors:  $\frac{M_{sr}}{L_s} \phi_s \approx \phi_r$  ce qui conduit à l'égalité des deux relations (6.31) et (6.17). **[4]**

Les caractéristiques statiques couples-vitesse ont les formes données par la figure 6.6.

En effet, chacune d'elles pour la pulsation  $\omega_{r\_max}$  passe par un maximum égale à  $C_{e\_max}$  avec :

$$\begin{cases} \omega_{r\_max} = \frac{1}{\sigma T_r} \\ C_{e\_max} = \frac{3}{4} \cdot p \cdot \left( \frac{M_{sr}}{L_s} \right)^2 \cdot \frac{\phi_s^2}{\sigma L_r} \end{cases} \quad (6.32)$$

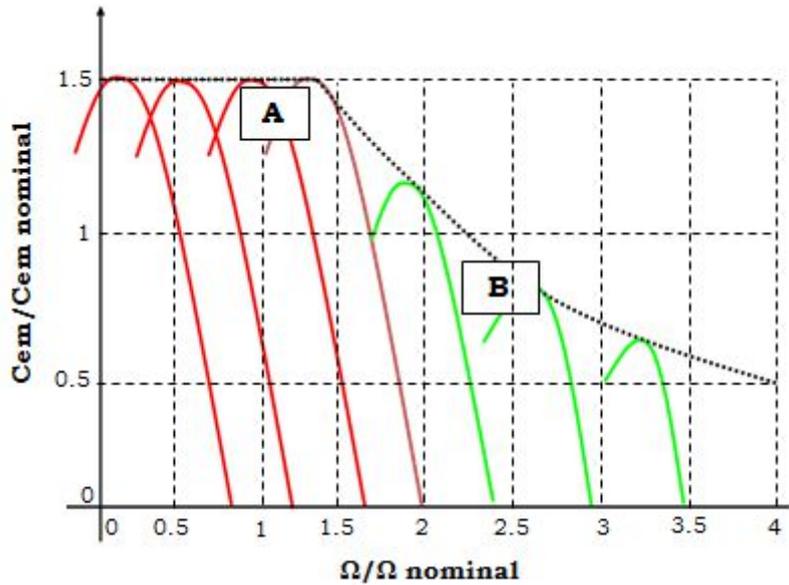


Figure 6.6 Schéma équivalent avec fuites totalisées au stator

Selon [5], la relation (6.11) montre que lorsque le couple est maximum alors l'angle  $\theta$  entre les deux vecteurs flux est égale à  $45^\circ$ . Au-delà de cette valeur, le couple décroche.

**Remarque:** Si l'on compare les deux figures (6.2) et (6.6), on constate que le maintien du flux utile à sa valeur nominale ne permet pas d'atteindre des niveaux de surcharge de couple aussi élevés que ceux atteints au moyen du flux rotorique.

### 6.3.3 Schéma électrique équivalent

#### ✪ Schéma équivalent avec fuites totalisées au rotor:

Pour ce cas, fuites totalisées au rotor, la variable  $a$  est choisie telle que :

$$l'_{\sigma s} = 0 \Leftrightarrow L_s - M'_{sr} = L_s - aM_{sr} = 0 \Rightarrow a = \frac{L_s}{M_{sr}} \quad (6.33)$$

Alors, l'inductance de fuites totalisées dans le rotor  $l'_{\sigma r}$ , la mutuelle  $M'_{sr}$  et la résistance rotorique  $R'_r$  ramenées s'expriment par :

$$\begin{aligned} l'_{\sigma r} &= L'_r - M'_{sr} = a^2 L_r - aM_{sr} = \frac{L_s^2}{M_{sr}^2} L_r - L_s = \frac{\sigma L_s}{1 - \sigma} \\ M'_{sr} &= aM_{sr} = \frac{L_s}{M_{sr}} M_{sr} = L_s \\ R'_r &= a^2 R_r = \left( \frac{L_s}{M_{sr}} \right)^2 R_r = \frac{L_s}{T_r (1 - \sigma)} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Finalement, le schéma **équivalent avec fuites totalisées au rotor** devient:

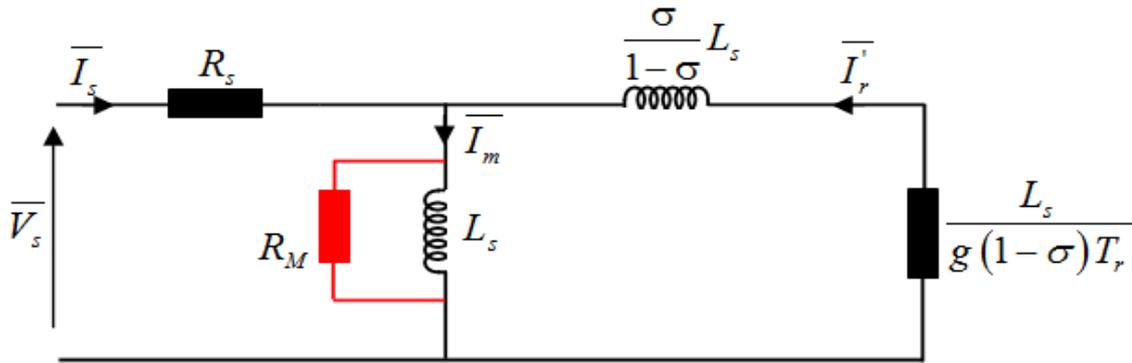


Figure 6.7 Schéma équivalent avec fuites totalisées au rotor

**Remarque importante:**

Si on veut trouver **le schéma équivalent avec fuites réparties**, la variable  $a$  est choisie telle que:

$$l_{\sigma s} = l'_{\sigma r} \Leftrightarrow L_s = L'_r = a^2 L_r \Rightarrow a = \frac{L_s}{L_r} \tag{6.35}$$

Alors, l'inductance de fuites statorique et rotorique  $l'_{\sigma r}$ , la mutuelle  $M'_{sr}$  et la résistance rotorique  $R'_r$  ramenées s'expriment par :

$$\begin{aligned} l_{\sigma s} = l'_{\sigma r} &= L_s - \sqrt{\frac{L_s}{L_r}} M_{sr} = L_s (1 - \sqrt{1 - \sigma}) \\ M'_{sr} &= a M_{sr} = \sqrt{\frac{L_s}{L_r}} M_{sr} = L_s \sqrt{1 - \sigma} \\ R'_r &= a^2 R_r = \left( \sqrt{\frac{L_s}{L_r}} \right)^2 R_r = \frac{L_s}{T_r} \end{aligned} \tag{6.36}$$

**6.4 Commande scalaire en couple, [2][3]:**

Sur la base des modèles statiques définis précédemment, on considère des lois de commandes dites "scalaires" car on règle que l'amplitude des vecteurs en régime permanent et leur vitesse de rotation.

On analysera successivement les points suivants:

- Objectifs et principes de ces lois de commandes scalaires suivant que le flux utile retenu est statorique ou rotorique.
- L'importance de contrôler le glissement par le biais de l'autopilotage.
- Exemples de commandes scalaires.

### 6.4.1 Objectifs et principes des lois de commandes scalaires

Plusieurs commandes scalaires existent, on se limite dans cette étude:

- Au cas moteur à la commande en couple (la boucle de régulation de la vitesse n'est donc pas présentée),
- Sur la structure la plus utilisée dans l'industrie: alimentation en tension de la machine via un onduleur de tension

Dans [6], le modèle statique de la MAS dans le cas d'une alimentation en tension est présenté sous forme de schéma bloc sur la figure 6.8. Toutes les commandes scalaires sont basées sur l'inversion du modèle qui caractérise le régime statique de la machine et en particulier l'équation du couple électromagnétique (figure 6.8). En effet, nous avons pu montrer que le couple peut être écrit en fonction du flux utile  $\phi_u$  ( $\phi_r$  Eq (6.17) ou  $\phi_s$  Eq (6.30)) et de la pulsation des grandeurs rotoriques  $\omega_r$ . En plus, la pulsation d'alimentation  $\omega_s$  est fournie par inversion de la fonction en cadre noir dans figure 6.8, cette inversion est appelée autopilotage fréquentiel ( $\omega_s = \omega + \omega_r^*$ ).

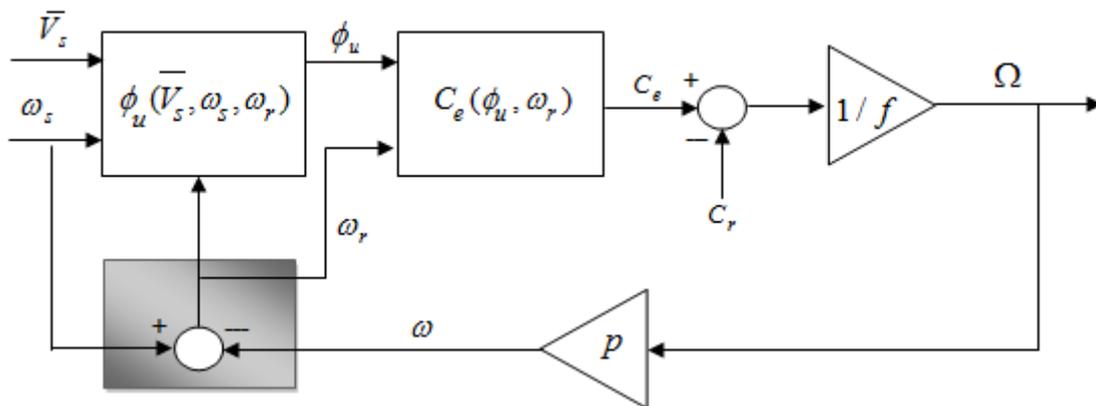


Figure 6.8 Schéma équivalent avec fuites totalisées au rotor

#### Remarque :

Il est difficile de régler directement le module du flux utile. Il est alors préférable de les estimer ou les observer à l'aide des estimateurs ou observateurs basés sur des mesures de courants ou de tensions statoriques.

Le tableau suivant montre les différentes commandes scalaires:

Flux utile choisi	Lois de commande scalaire
$\phi_s$	$V_s$ (Eqs: (6.28) et (6.29)) en module dite <b>V/f</b> constant c'est <b>la plus connue</b> .
	$I_s$ en <b>module (Eq (6.25))</b>
	$\phi_s$ en module ( <b>contrôle directe par hystérésis</b> )
$\phi_r$	$V_s$ en <b>module (Eq (6.14))</b>
	$I_s$ en module ( <b>Eq (6.12)</b> )
	$\phi_s$ ( <b>Eq (6.10)</b> ) en module (contrôle directe par hystérésis)
	$\phi_r$ en module (contrôle directe par hystérésis)

Tableau 6.1 Types de commandes scalaires [3]

**6.4.2 Commande scalaire en tension " loi V/f=constante".**

C'est l'archétype de la commande scalaire. son schéma de principe est illustré sur la figure 6.9 ci dessous.

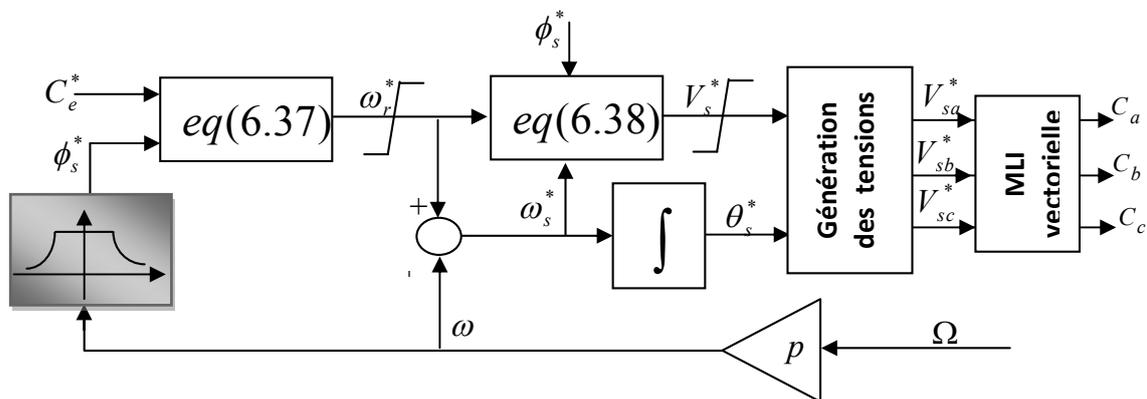


Figure 6.9 Schéma bloc de la loi V/f

Tel que:

- $C_a, C_b, C_c$  Ordres de commandes binaires de l'onduleur de tension triphasés;
- $\phi_s$  est le flux utile;

- $\omega_s$  est reconstitué par autopilotage fréquentiel:
- $\omega_r^*$  est déterminée par l'équation (6.37) ou en inversant (6.31):

$$\omega_r^* = \frac{2}{3p} \left( \frac{L_s}{M_{sr}} \right)^2 \frac{R_r C_e^*}{\phi_s^{*2}} \quad (6.37)$$

Selon [7], l'amplitude du vecteur de tension peut être calculée de plusieurs façons suivant le degré de complexité:

- la formule complète est:

$$V_s^* = \phi_s^* \omega_s^* \sqrt{\frac{\left( \frac{1}{T_s \omega_s^*} - \sigma T_r \omega_r^* \right)^2 + \left( 1 + \frac{T_r \omega_r^*}{T_s \omega_s^*} \right)^2}{1 + (\sigma T_r \omega_r^*)^2}} \quad (6.38a)$$

- Si le glissement est faible l'équation (6.38a) se simplifié et devient:

$$V_s^* = \phi_s^* \omega_s^* \sqrt{\left( \frac{1}{T_s \omega_s^*} \right)^2 + 1} \quad (6.38b)$$

- Si  $R_s$  est négligé (**forte puissance**) alors (6.38a) se simplifié et devient:

$$V_s^* = \phi_s^* \omega_s^* \quad (6.38c)$$

- Si  $\omega_s$  est faible et  $\omega_r$  est élevé [8] (pris en compte du le glissement), alors (6.38c) devient:

$$V_s^* = \phi_s^* \left( \omega_s^* + \frac{T_r}{T_s} \omega_r^* \right) \quad (6.38c)$$

### 6.4.3 Commande scalaire en courant, flux utile rotorique.

La figure 6.10 montre le principe de cette commande, sachant que, cette loi de commande correspond la version scalaire de la commande vectorielle, à savoir le contrôle à flux orienté. Tel que:

- $\omega_r^*$  est déterminée par l'équation (6.39) ou en inversant (6.17):

$$\omega_r^* = \frac{2}{3p} \cdot \frac{R_r}{\phi_r^{*2}} \cdot C_e^* \quad (6.39)$$

- $I_s^*$  est donné par l'équation (6.40) suivante :

$$I_s^* = \frac{1}{M_{sr}} \sqrt{1 + T_r^2 \omega_r^{*2}} \cdot \phi_r^{*2} \quad (6.40)$$

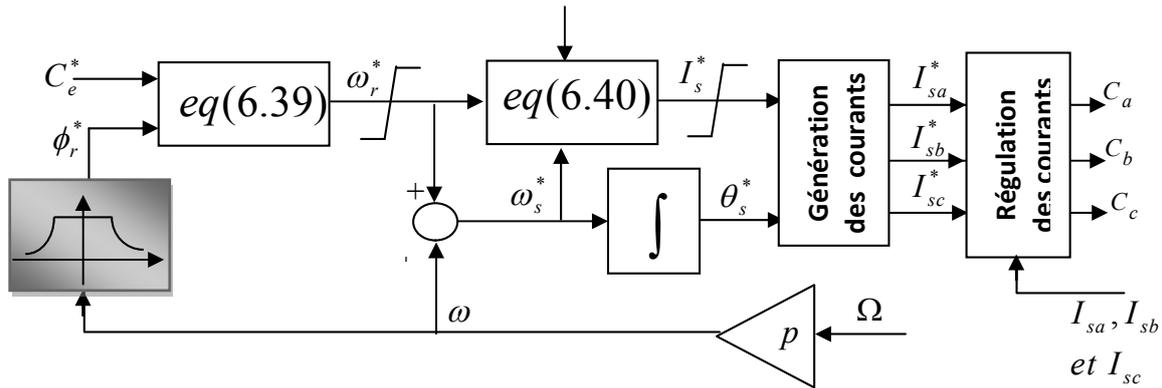


Figure 6.10 Schéma bloc de la commande scalaire du couple et flux utile rotorique contrôlés en courant

## 6.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la modélisation en régime permanent de la MAS, les modèles équivalents de la MAS, plusieurs structures de commande avec leurs principes et quelques résultats de simulation.

## 6.6 Exercice d'application

1. Si on choisit un repère de Park  $(\alpha\beta)$  lié au stator de la MAS, donner les équations électriques du stator et du rotor, les relations entre les flux et les courants, l'équation du couple électromagnétique et l'équation mécanique.
2. Si on considère la représentation complexe  $\bar{X} = x_\alpha + jx_\beta$  ( $\bar{X}$  peut être une tension, un courant ou un flux), déduire les deux équations électriques complexes (du stator et du rotor) du régime permanent.
3. Tracer le circuit électrique équivalent du régime permanent qui fait apparaître les inductances de fuites, le courant magnétisant, les pertes fer, les résistances du rotor et du stator et la puissance mécanique.
4. Donner l'équation d'autopilotage qui montre le lien entre la pulsation statorique  $\omega_s$ , la pulsation rotorique  $\omega_r$  et la vitesse mécanique du rotor  $\Omega$ .
5. Compléter le schéma de la commande scalaire ci-dessous (**figure 6.11**). Les relations simplifiées de la tension et du couple en fonction du flux stator, sont données par :

$$|U_s| = \omega_s |\Phi_{sn}^*| \text{ et } C_e = \frac{3}{2} p \left( \frac{M}{L_s} \right)^2 \Phi_s^2 \left( \frac{\omega_r}{R_r} \right)$$

Avec :  $M$  est la mutuelle,  $p$  est le nombre de paires de pôles,  $L_s$  et  $R_r$  sont l'inductance cyclique et la résistance du rotor.

6. Expliquer le principe de la commande MLI sinus-triangle d'un onduleur de tension triphasé.

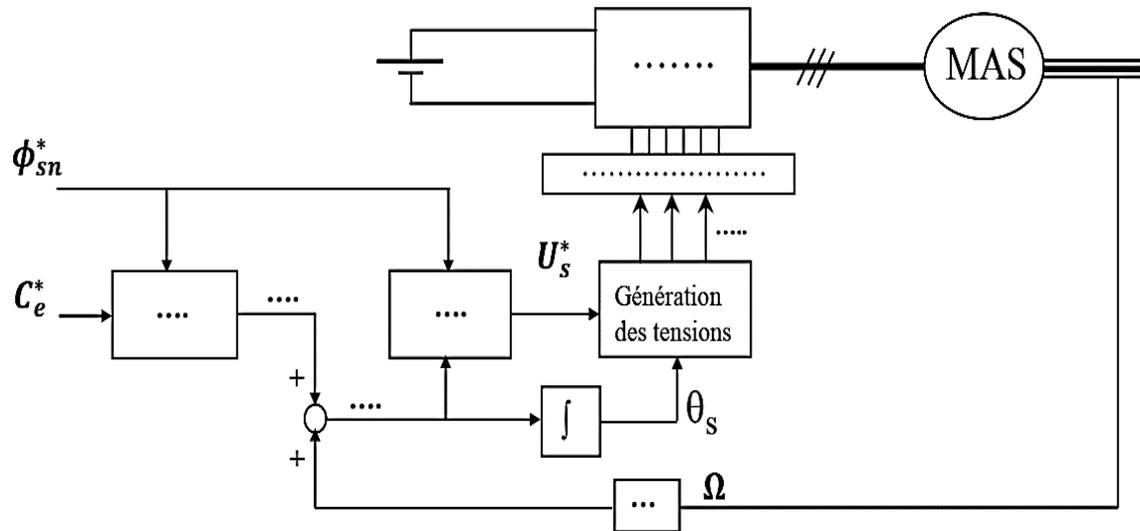


Fig.6.11 Schéma de la commande scalaire V/f

## 6.7 Bibliographie

- [1] M. PINARD, «Commande électronique des moteurs électriques», Dunod, Paris, 2004.
- [2] J.P. LOUIS, " Modèle pour la commande des actionneurs électriques", Edition, Lavoisier, Paris. 2004.
- [3] S. MENDACI, «Modélisation et simulation des systèmes électromécaniques», Note de cours, Master 2, Electromécanique, Guelma, 2018.
- [4] A. CUNIERE, G. FELD, «Machine asynchrone», Note de cours. ENS de Cachan.
- [5] A. NAASSANI, «Contrôle direct du couple et du flux de la Machine Asynchrone. Essai de synthèse au moyen de la théorie du mode de glissement», Thèse de doctorat de l'ENS Cachan, 2001.
- [6] J.P. LOUIS, «Commande numérique des machines asynchrones, cas des machines scalaires», notes de cours, ENS Cachan, Paris. 1997.
- [7] G. GRELLET, C. CLERC, « Actionneurs électrique, principes modèles commandes. », Edition Eyrolles, 2000.
- [8] J.C. HAPIOT, «Machine asynchrone d'induction alimentée en tension par un convertisseur statique à fréquence variable et autopilotée - Etude et mise en œuvre du dispositif - Comportement en régime transitoire», Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1975.

# Chapitre 7

---

## Extension de la transformation de Park aux machines asynchrones en régime saturé

**Prérequis:** Transformation de Park, Modélisation de la machine asynchrone.

**Objectif :** A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de:

- ✓ Analyser l'influence de la saturation magnétique sur le modèle analytique triphasé-diphasé d'une MAS à cage ;
- ✓ Comprendre le modèle de Park étendu.

*" La sagesse est fille de l'expérience "*

*Léonard de Vinci*

## Introduction:

Les modèles de machines à induction dynamique sont utilisés comme base pour la conception et la mise en œuvre d'algorithmes de contrôle. Des stratégies de contrôle avancées ouvrent la possibilité d'utiliser une machine à induction dans des applications exigeantes. Cependant, une performance de contrôle fiable et bonne nécessite des modèles de machine à induction plus détaillés. [1],[2].

Suivant notre but ciblé pour ce chapitre, l'hypothèse de la linéarité n'a plus de sens, l'étude de la saturation devient donc indispensable.

Alors, les inductances deviennent variables avec l'état magnétique de la machine car le flux magnétique n'est plus proportionnel au courant de magnétisation, ce qui rend le problème compliqué ! Pour cela il faut trouver un modèle permettant de décrire sa variation en fonction du courant.

Heureusement, le développement des techniques numériques, (**exemple: calcul par éléments finis...etc.**), [3] , a rendu possible de développer ce modèle et aussi son exploitation.

Les points qui font l'objet du présent chapitre sont;

- Inductances en régime saturé ;
- Influence de la saturation sur les inductances ;
- Modèle de Park étendu.

### 7.1 Inductances en régime saturé, [3][4]:

La linéarité de la relation flux-courant est généralement traduite par Les coefficients inductances et inductances-mutuelles qui apparaissent dans la description des dispositifs électromagnétiques.

Alors, parler d'inductances en régime saturé signifie l'extension de la définition de ces coefficients selon le point de fonctionnement.

#### 7.1.1 Définition

Il existe deux familles d'inductances qui peuvent être mentionnées dans la machine asynchrone:

- *Inductances principales*: influencées par le champs résultant
- *Inductances de fuites*: dépendent des courants instantanés au stator et au rotor.

On considère la seule influence du champ résultant, c'est à dire, les paramètres seront calculés en fonction des positions et amplitude du champ magnétique tournant dans la machine.

### **7.1.2 Condition de calcul par éléments finis, [4]:**

Le calcul numérique des inductances par la méthode des éléments finis a besoin de déterminer le flux du champs B à travers les bobinages supposés.

Lors d'une étude bidimensionnelle, le flux peut être écrit en fonction de la valeur moyenne du potentiel vecteur magnétique A sur la section des bobinages.

Le flux à travers une bobine logée dans deux encoches "aller" et "retour" se calcule par la formule suivante:

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \int \vec{A} \cdot \vec{dl} = l (\langle A_{aller} \rangle - \langle A_{retour} \rangle) \quad (7.1)$$

Tel que:

$\langle A \rangle$ : la valeur moyenne du potentiel  $\vec{A}$  sur la section S de l'encoche.

$l$ : longueur utile de dispositif.

La valeur de A est tirée par la résolution du problème en chaque nœud du maillage.

**Les deux étapes de calcul** par éléments finis pour définir les inductances propres et les mutuelles entre phases pour l'état magnétique imposé par la valeur instantanée sont:

#### **Première étape de calcul :**

Le courant magnétisant est imposé dans les phases statoriques. Par exemple, ainsi définissant une amplitude et une position pour le champ magnétique, sachant que ce champ peut être déterminé en tout point du maillage par une résolution du problème magnétostatique, prenant en compte la non linéarité du matériau.

#### **Deuxième étape de calcul :**

A l'issue de la première étape de calcul, la perméabilité en chaque élément du maillage est conservée. elle est réutilisée pour le calcul linéaire du flux dans une bobine, dû à l'existence d'un courant dans cette même bobine si l'on souhaite déterminer une inductance propre, ou à celle d'un courant dans une autre phase pour la détermination d'inductance mutuelle.

## 7.2 Influence de la saturation sur les inductances d'une MAS

La MAS est un dispositif électromagnétique polyphasé dans lequel intervient un grand nombre d'inductances et mutuelles. L'inaccessibilité du rotor a rendu la détermination expérimentale de ces paramètres plus délicate.

Pour analyser leur comportement face au phénomène de saturation, on utilise des méthodes numériques et analytiques.

### 7.2.1 Analyse par la méthode des éléments finis, [4]:

Le principe de calcul cité précédemment sera détaillé maintenant pour une MAS à cage d'écureuil.

#### ● *Etude de la machine diphasée équivalente*

En se limitant toujours au premier harmonique d'espace, une transformation triphasée-diphasée  $T_{3,2}$  doit être appliquée au stator, alors qu'une transformation n-phasée-diphasée  $T_{n,2}$  et une rotation doivent être appliquées au rotor.

les nouvelles matrices inductances qui caractérisent la machine sont:

$$[L_s] = \begin{pmatrix} L_{s\alpha\alpha} & L_{s\alpha\beta} \\ L_{s\beta\alpha} & L_{s\beta\beta} \end{pmatrix}, [L_r] = \begin{pmatrix} L_{r\alpha\alpha} & L_{r\alpha\beta} \\ L_{r\beta\alpha} & L_{r\beta\beta} \end{pmatrix}, [M_{sr}] = \begin{pmatrix} M_{sr\alpha\alpha} & M_{sr\alpha\beta} \\ M_{sr\beta\alpha} & M_{sr\beta\beta} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Lors de la deuxième étape, le calcul des nouveaux coefficients de ces matrices avoir besoin de l'utilisation des flux et courants relatifs à la machine diphasée équivalente. Ceux-ci s'écrivent en fonction des matrices de transformation et des grandeurs de la machine triphasée réelle, [5].

Les flux statoriques et rotoriques s'écrivent respectivement pour la machine diphasée équivalente :

$$\begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \end{bmatrix} = L_{ms} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} + M_{msr} \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} + P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(-\psi) \left[ \Delta L_{cs} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} + \Delta M_{csr} \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} \right] \quad (7.3)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{bmatrix} = L_{mr} \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} + M_{msr} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} + P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(-\psi) \left[ \Delta L_{cr} \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} + \Delta M_{csr} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} \right] \quad (7.4)$$

Tel que:  $L_{ms}, L_{mr}, M_{msr}$  : Les valeurs moyennes des différentes inductances,

$\Delta L_{cs}, \Delta L_{cr}, \Delta M_{csr}$  : La variation des différentes inductances.

### 7.2.2 Analyse par l'approche analytique, [4]:

Il est nécessaire de rappeler et d'étendre la définition de certaines grandeurs intervenant dans les modèles analytiques classiques:

#### • **Force magnétomotrice, courant magnétisant et rapport de transformation**

La force magnétomotrice créée par une bobine  $b$ , parcourue par un courant  $i_b$  est définie en tout point  $M$  de l'entrefer, par une fonction sinusoïdale de l'écart angulaire entre la position de ce point et l'axe de bobine:

$$F(\theta) = k_b \frac{2}{\pi} n_b \cdot i_b \sin(\theta) = N_b' \cdot i_b \sin(\theta) \quad (7.5)$$

A partir de la relation (7.5), l'expression de l'amplitude maximale, selon que la bobine appartient à l'armature statorique ou rotorique, est :

$$A_s = k_s \frac{2}{\pi} n_s \cdot i_s \quad \text{Et} \quad A_r = k_r \frac{2}{\pi} n_r \cdot i_r \quad (7.6)$$

Avec :  $k_s, k_r$  : sont les coefficients de bobinage au premier harmonique;

$n_s, n_r$  : nombre de spires par phase et par pôle;

Alors, l'expression de l'amplitude des f.m.m. de la machine diphasée équivalente peut s'écrire:

$$\varepsilon_{sm}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} A_s \cdot i_s(t) \quad \text{Et} \quad \varepsilon_{rm}(t) = \sqrt{\frac{n}{2p}} A_r \cdot i_r(t) \quad (7.7)$$

On déduit l'expression du coefficient de transformation stator/rotor à partir des deux relations (7.6) et (7.7) :

$$m = \frac{A_r}{A_s} \sqrt{\frac{n}{2p}} \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (7.8)$$

✚ **Définition:** Le courant magnétisant est défini comme un courant statorique qui créerait seul la f.m.m. totale que celles créées par les courants statoriques et rotoriques (figure 7.1). [2]

✚ Pour la machine diphasée équivalente, les deux composantes du courant magnétisant s'écrivent comme suit:

$$\begin{pmatrix} i_{u\alpha} \\ i_{u\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

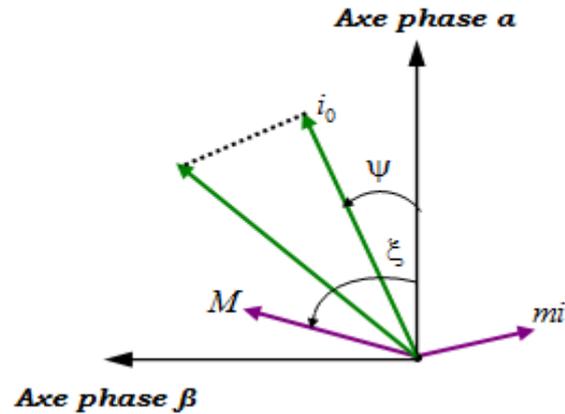


Figure 7.1 Définition du vecteur magnétisant

### ● Expression analytique des inductances saturées [4],[7]

Afin de prendre en considération l'effet de la saturation magnétique, nous allons introduire **une perméance saturée ( $P$ )**, dont la valeur dépend de la position et de l'amplitude du vecteur du courant magnétisant (figure 7.1).

L'expression de la Perméance en un point de l'entrefer repéré par sa position angulaire  $\xi$  sera limitée à l'harmonique de rang 2, [7] :

$$P = P_0(i_u) + P_2(i_u) \cos 2(p\xi - \psi) \quad (7.10)$$

Lorsque l'amplitude du courant magnétisant est faible ou que la machine est non saturée, le terme  $P_2 = 0$ , alors le terme  $P_0$  prend la valeur classique tel que :

$$P_0 = \frac{u_o}{e}$$

Avec :

$u_o, e$  : sont respectivement la perméabilité du vide et l'épaisseur de l'entrefer.

Si l'on considère deux bobine:

- notées  $\delta$  et  $\lambda$  Caractérisé par leur nombre de spires et le coefficient de bobinage au premier harmonique  $k_\delta, n_\delta$  et  $k_\lambda, n_\lambda$  ;
- $\delta$  et  $\lambda$  les positions des axes de chaque bobine relativement à celui de repère de référence.

Alors selon la relation (7.10), le flux capté  $\phi_\delta$  par la bobine du même nom, dû au courant  $i_\lambda$  circulant dans la bobine  $\lambda$  s'écrit :

$$\phi_\delta = \left[ L_{\delta\gamma 0} \cos p(\delta - \lambda) + L_{\delta\lambda 2} \cos(p\delta + p\lambda - 2\psi) \right] i_\lambda \quad (7.11)$$

Avec :

$$\begin{cases} L_{\delta\gamma 0} = \frac{LD}{\pi} (k_\delta n_\delta)(k_\lambda n_\lambda) 2P_0(i_u) \\ L_{\delta\gamma 2} = \frac{LD}{\pi} (k_\delta n_\delta)(k_\lambda n_\lambda) P_2(i_u) \end{cases} \quad (7.12)$$

$L$  : longueur utile de la machine

Avec  $D$  : Diamètre au niveau de l'entrefer

A partir des expressions générales (7.11) et (7.12), il est possible de déterminer **les matrices inductances et mutuelles** de la MAS triphasée au stator, n-phasée au rotor. Ces matrices possèdent des propriétés remarquables qui permettent de les factoriser afin d'introduire les équations de la machine diphasée-diphasée équivalente [4].

Les flux statoriques et rotoriques s'écrivent dans ces conditions :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_1 I_{2 \times 2} + \frac{3}{2} L_{s0} I_{2 \times 2} + \frac{3}{2} L_{s2} P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(-\psi) \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{n}{2p}} L_{sr0} I_{2 \times 2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{n}{2p}} L_{sr2} P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(-\psi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{n}{2p}} L_{sr0} I_{2 \times 2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{n}{2p}} L_{sr2} P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(-\psi) \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{n}{2p}} L_{sr0} I_{2 \times 2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{n}{2p}} L_{sr2} P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(-\psi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 I_{2 \times 2} + \frac{n}{2p} L_{r0} I_{2 \times 2} + \frac{n}{2p} L_{r2} P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(\psi) \\ \sqrt{\frac{n}{2p}} \sqrt{\frac{3}{2}} L_{sr0} I_{2 \times 2} + \sqrt{\frac{n}{2p}} \sqrt{\frac{3}{2}} L_{sr2} P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(\psi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{n}{2p}} \sqrt{\frac{3}{2}} L_{sr0} I_{2 \times 2} + \sqrt{\frac{n}{2p}} \sqrt{\frac{3}{2}} L_{sr2} P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(\psi) \\ \sqrt{\frac{n}{2p}} \sqrt{\frac{3}{2}} L_{sr0} I_{2 \times 2} + \sqrt{\frac{n}{2p}} \sqrt{\frac{3}{2}} L_{sr2} P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(\psi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Où :  $l_1, l_2$  : Inductance de fuites,

$L_{s0}, L_{sr0}, L_{r0}$  : Paramètres liés au terme  $P_0$ ,

$L_{s2}, L_{sr2}, L_{r2}$  : Paramètres liés au terme  $P_2$ ,

Les expressions analytiques (7.13) et (7.14) sont à rapprocher des résultats numériques trouvés en (7.3) et (7.4). Si les deux modèles

analytiques et numériques sont comparables, les coefficients qui y apparaissent doivent vérifier les relations suivantes :

$$L_{ms} = l_1 + \frac{3}{2}L_{s0} \text{ et } \Delta L_{cs} = \frac{3}{2}L_{s2} \quad (7.15)$$

$$L_{mr} = l_2 + \frac{n}{2p}L_{r0} \text{ et } \Delta L_{cr} = \frac{n}{2p}L_{r2} \quad (7.16)$$

$$M_{msr} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{n}{2p}}L_{sr0} \text{ et } \Delta M_{csr} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{n}{2p}}L_{sr2} \quad (7.17)$$

### ● Calcul du coefficient de transformation :

Les relations précédentes imposent une relation entre les paramètres en  $\Delta$  définis lors du calcul par élément finis. le coefficient de transformation ( $m$ ) doit vérifier cette relation :

$$\frac{\Delta L_{cs}}{\Delta M_{csr}} = \frac{\Delta M_{csr}}{\Delta L_{cr}} = \sqrt{\frac{\Delta L_{cs}}{\Delta L_{cr}}} = \frac{1}{m} \quad (7.18)$$

## 7.3 Modèle de Park étendu

### 7.3.1 Simplification de l'expression des flux, [4][6]:

En faisant intervenir le courant magnétisant  $i_u$ , relation (7.9), les expressions (7.13) et (7.14) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \end{bmatrix} = l_1 \begin{bmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{bmatrix} + \frac{3}{2}L_{s0} \begin{bmatrix} I_{u\alpha} \\ I_{u\beta} \end{bmatrix} + \frac{3}{2}L_{s2}P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(-\psi) \begin{bmatrix} I_{u\alpha} \\ I_{u\beta} \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{bmatrix} = l_2 \begin{bmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{n}{2p} \frac{L_{r0}}{m} \begin{bmatrix} I_{u\alpha} \\ I_{u\beta} \end{bmatrix} + \frac{n}{2p} \frac{L_{r2}}{m} P(\psi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P(-\psi) \begin{bmatrix} I_{u\alpha} \\ I_{u\beta} \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Les relations (7.19) et (7.20) peuvent être simplifiées, si l'on remarque que, par définition de l'angle ( $\psi$ ), on a :

$$\begin{pmatrix} i_{u\alpha} \\ i_{u\beta} \end{pmatrix} = i_u P(\psi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

En remplaçant la relation (7.21) dans (7.19) et (7.20), et en redécomposant ensuite selon les courants statoriques et rotoriques, on trouve finalement les relations des flux simplifiées suivantes :

$$\begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \end{bmatrix} = \left( l_1 + \frac{3}{2}L_{s0} + \frac{3}{2}L_{s2} \right) \begin{bmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{n}{2p}} (L_{sr0} + L_{sr2}) \begin{bmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{bmatrix} = \left( l_2 + \frac{n}{2p} L_{r0} + \frac{n}{2p} L_{r2} \right) \begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{n}{2p}} (L_{sr0} + L_{sr2}) \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

**Remarque** : Ces dernières équations des flux sont de forme similaire à celles en régime linéaire. Cependant, les inductances cycliques statoriques et rotorique ( $L_{cs}, L_{cr}$ ) et mutuelle cyclique stator-rotor ( $M_{sr}$ ), sont affectées par le phénomène de la saturation.

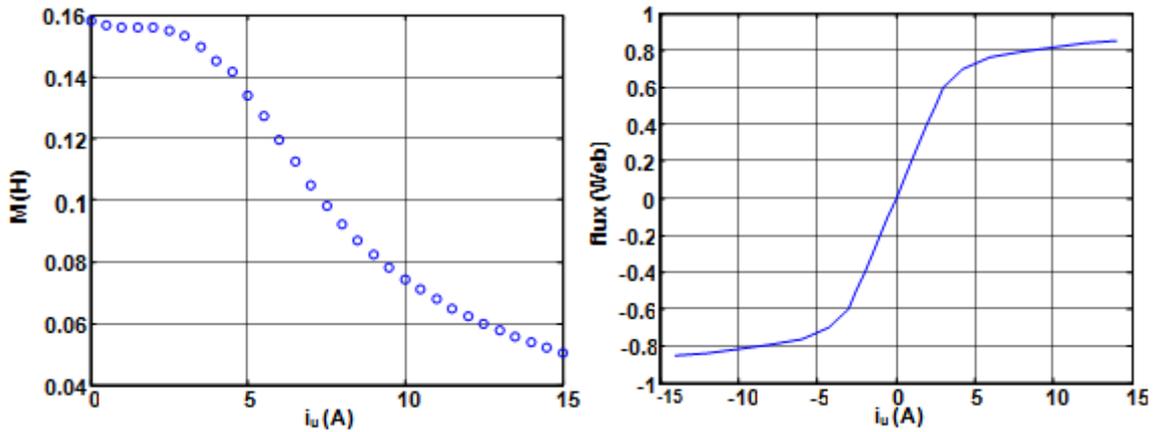


Figure 7.2 Caractéristique de magnétisation

### 7.3.2 Méthode de calcul des inductances, [4][7]:

Les valeurs des inductances cycliques et mutuelles ( $L_{cs}, L_{cr}, M_{sr}$ ) peuvent être calculés selon l'approche numérique décrite précédemment (§ 7.2.1).

La valeur des inductance de fuites ( $l_1, l_2$ ) peut être également calculée grâce au coefficient de transformation :

$$l_1 = L_{cs} - \frac{M_{sr}}{m}, \quad l_2 = L_{cr} - m M_{sr} \quad (7.24)$$

**Remarque**: On peut remarquer que ce calcul est sensibles aux incertitudes liées à la détermination des inductances cycliques.

### 7.3.3 Modèle d'état en flux, [7]

Selon le choix des grandeurs d'état, le modèle d'état de la machine asynchrone peut s'écrire différemment. Si on choisi comme variable d'état les flux, le modèle d'état d'ordre réduit s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{s\alpha} \\ \dot{\phi}_{s\beta} \\ \dot{\phi}_{r\alpha} \\ \dot{\phi}_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{\sigma L_{cs}} & 0 & \frac{R_s M_{sr}}{\sigma L_{cs} L_{cr}} & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{\sigma L_{cs}} & 0 & \frac{R_s M_{sr}}{\sigma L_{cs} L_{cr}} \\ \frac{R_r M_{sr}}{\sigma L_{cs} L_{cr}} & 0 & -\frac{R_r}{\sigma L_{cr}} & -p\Omega \\ 0 & \frac{R_r M_{sr}}{\sigma L_{cs} L_{cr}} & p\Omega & -\frac{R_r}{\sigma L_{cr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \\ \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{s\alpha} \\ V_{s\beta} \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

La résolution de cette équation pour une vitesse de rotation donnée doit être itérative puisque les valeurs des paramètres dépendent de celle de  $i_u$ , lui-même défini par :

$$\begin{pmatrix} i_{u\alpha} \\ i_{u\beta} \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{\sigma L_{cs}} - \frac{M_{sr}}{\sigma L_{cs} L_{cr}} \right) \begin{pmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \end{pmatrix} + \left( \frac{1}{\sigma L_{cr}} - \frac{M_{sr}}{\sigma L_{cs} L_{cr}} \right) \begin{pmatrix} \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

## 7.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre;

- ✚ Des extensions seront apportées au modèle de la MAS de manière à prendre en compte le phénomène de saturation du circuit magnétique;
- ✚ L'analyse de l'influence de la phase et du module du vecteur courant magnétisant;
- ✚ Une comparaison des modèles analytiques et numériques qui permet de déduire une méthode de calcul des inductances cycliques de la machine diphasée, des inductances de fuites et du rapport de transformation.

## 7.5 Bibliographie

- [1] S. KHELFA, « Commande vectorielle d'une machine à induction, Impacts de la Saturation de la machine et la modulation du convertisseur. », Thèse de Magister, Univ Batna, Juillet 2001.
- [2] M. RANTA, « Dynamic induction machine models including magnetic saturation and iron losses », Doctoral thesis, Aalto University. 2013.
- [3] H. BENBOUZID, "Différentes Techniques de L'énergie saving utilisées dans les Commandes Vectorielles de la Machine à Induction : Application aux Véhicules électriques", Mémoire de Magister, UNIV-BATNA, 2004.
- [4] J.P. LOUIS, " Modèle pour la commande des actionneurs électriques", Edition, Lavoisier, Paris. 2004.
- [5] B.L. SEMAIL, J.P. LOUIS, F. BOUILLAUT, «Computation of induction machine Inductances for extended analytical modeling accounting for saturation», Eur. Phys. J. AP 5, pp. 257-267. 2000.

- [6] H. OUADI, «Modelling, observation and control of saturated induction machines », Doctoral Thesis, University of Caen, 2004 (in French).
- [7] N.A. DEMERDASH, P. BALDASSARI, «A Combined finite element state space modelling Environment for induction motor in the ABC frame of reference», IEEE Trans. Energy Conv., 7, pp. 698-702. 1992.