République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université du 08 Mai 45 - Guelma
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

ـة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
زارة التعليـــم العـــالي والبحث العلمي
ـامعة 08 مـــاي 45 - قالمـــة
ـيـة الـعـلـوم و الهـنـدسـة

Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département de Mathématiques

Année : 200

M1510

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

Calcul stochastique par rapport au processus de Rosenblatt

جامعة قالمة
قسم العلوم الدقيقة
كلية العلوم وعلوم الهندسة

Option
Probabilités & Statistique

Par
Mr. SERRAR Mohamed Eddine

DIRECTEUR DE MEMOIRE : H. BOUTABIA Prof U.B.M. Annaba

devant le jury

PRESIDENT :	A.K. DEHICI	M.C	U. GUELMA
EXAMINATEURS :	M.R. REMITA	M.C	U.B.M. Annaba
	M.Z. AISSAOUI	M.C	U. GUELMA

Table des matières

Dédicace

Pour ma chère Mère Hafsia et cher Père Bachir ....

Pour ma précieuse famille Sœurs et Frères ...

Pour mon meilleur ami MEHIRA Rabie....

Pour tous mes Ami ...

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur Monsieur H. Boutabia, Professeur à l'Université d'Annaba pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire c'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont également au Monsieur A.K. Dehici, Maître de Conférences à l'Université de Guelma , pour avoir bien me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

De même je remercie vivement Monsieur M.R.. Remita, Maître de Conférences à l'Université d'Annaba et Monsieur M.Z. Aissaoui, Maître de Conférences à l'Université de Guelma, pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.

Enfin, je n'oublie pas de remercier Mes parents et touts les personnes qui m'ont aidé pour finir ce mémoire, surtout la famille SEGNI Ibrahim pour leurs hospitalité.

Abstract

We analyse the Rosenblatt process which is non-Gaussian, a selfsimilar process with stationary increments and which appears as limit in the so-called Non Central Limit Theorem (Taqqu (1979)).

We give its representation as a Wiener-Itô multiple integral with respect to the Brownian motion on a finite interval and we develop a stochastic calculus with respect to it by using both pathwise type calculus and Malliavin calculus.

ملخص

في هذه المذكرة , نحلل المتغير العشوائي الاحتمالي (Rosenblat) و الذي هو متغير عشوائي احتمالي غير غوصي (non- gaussian) ذوا تشابه ذاتي , و ذو تزايدات متوقفة بدلالة الزمن و المعرف كنهاية حسب نظرية النهاية المركزية .

و نعطي تمثيلية كتعامل متعدد لـــ:(wiener-ito) بالنسبة لحركة براونية على فترة ، و توجد حساب الاحتمالي لهذه المتغيرات العشوائية الاحتمالية باستخدام نوعين من الحساب ، الحساب الاتجاهي (Pathwise) و الحساب (Malliavin).

Résumé

Dans ce mémoire on analyse le processus de Rosenblatt qui est un processus non gaussien, autosimilaire à accroissements stationnaires, défini comme étant une limité au sens du théorème de la Limite Non Centrée (Taqqu (1979)).

On donne sa représentation comme une intégrale multiple de Wiener-Itô par rapport au mouvement Brownien sur un intervalle fini et on développe un calcul stochastique par rapport à ce processus, en tenant compte des deux types de calcul : le calcul trajectoriel (ou de pathwise) et le calcul de Malliavin.

Introduction

Les processus autosimilaires ont un intérêt très important dans la pratique, puisque les caractères d'autosimilarité apparaissent dans de nombreux phénomènes comme les télécommunications, les sciences économiques, l'hydrologie et les turbulences, etc.....

De nombreux travaux sur ces phénomènes ont été réalisés, dont les plus importants sont : Taqqu [17] comme guide sur les intérêts de l'autosimilarité dans beaucoup d'applications; Samorodnitsky et Taqqu [10] sur les monographies et Embrechts et Maejima [21] sur l'étude complète sur les processus autosimilaires.

Dans ce mémoire, on ce propose de faire une analyse d'une classe spéciale des processus autosimilaires qui sont définis comme une limite au sens du théorème de la limite non centrée (voir Taqqu [18]).

Rappelons brièvement le contexte général :

Considérons $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables Gaussiennes stationnaires d'espérances nulles, de variances égales à 1 et de fonction de corrélation

$$r(n) := \mathbb{E}[\xi_0 \xi_n] = n^{\frac{2H-2}{k}} L(n) \tag{0.1}$$

où $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et $L(n)$ est une fonction à variation lente à l'infini (voir [21]).On note par $H_m(x)$ Le polynôme d'Hermite du degré m donné par

$$H_m(x) = \frac{(-1)^m}{m\,!} e^{x^2/2} \frac{d^{\,m} e^{-x^2/2}}{dx^m}.$$

Soit g une fonction telle que $\mathbb{E}[g(\xi_0)] = 0$ et $\mathbb{E}\left[g(\xi_0)^2\right] < \infty$. On suppose que le rang d'Hermite est égal à k; au sens que si g admet une suite de développements par les polynômes d'Hermite

$$g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l H_l(x), \qquad c_k = \frac{1}{k!}\mathbb{E}\left[g(\xi_0) H_k(\xi_0)\right]$$

alors :

$$k \overset{\min}{=} \{l \quad / \quad c_l \neq 0\}$$

Notons que $k \geq 1$ à cause du fait que $\mathbb{E}\left[g(\xi_0)\right] = 0$. Il résulte du théorème de la limite non centrée (voir [18]) que :

$$\frac{1}{n^H} \sum_{j=1}^{[nt]} g(\xi_i)$$

converge vers le processus

$$Z_H^k(t) = c(H,k) \int_{\mathbb{R}^K} \int_0^t \left(\prod_{j=1}^{\alpha} (s - y_i)_+^{-\left(1/2 + \frac{1-H}{k}\right)} ds \right) dB_{y_1} dB_{y_2} ......dB_{y_k} \tag{0.2}$$

au sens des distributions finies-dimensionnelles quand $n \to \infty$; Où $x_+ = \max(x, 0)$ et l'intégrale ci-dessus est une intégrale stochastique multiple de Wiener- Itô par rapport au mouvement brownien $(B_y)_{y\in\mathbb{R}}$. La constante de normalisation $c(H,k)$ est positive et est telle que $\mathbb{E}\left[Z_H^k(1)^2\right] = 1$. Le processus $Z_H^k(t)$ est appelé le processus d'Hermite. C'est un processus H-autosimilaire dans le sens où pour tout $c > 0$, $\left(Z_H^k(ct)\right) \overset{d}{=} \left(c^H Z_H^k(t)\right)$, où "$\overset{d}{=}$ " signifie l'équivalence de toutes les distributions finies-dimensionnelles. Notons qu'il est aussi à accroissements stationnaires.

Lorsque $k = 1$, le processus donné par (0.2) n'est rien d'autre que le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Il est clair que si $k \geq 1$, le processus n'est pas Gaussien. Lorsque $k = 2$, alors le processus donné par (0.2) est appelé, selon M.Taqqu [16], le processus de *Rosenblatt.*

Pour se familiariser avec la théorie des processus de *Rosenblatt*, le lecteur pourra consulter les ouvrages suivant : Dans [13] et [14] J.M. Albin a étudié des propriétés extrémales de la distribution du processus de *Resenblatt.* Le théorème de la limite non centrée a été donné, par Leonenko et Ahn dans [19]. Pipiras [26] et Pipiras et Abry [27] ont étudié l'expansion du type-ondelette du processus de *Resenblatt.*

Dans ce mémoire notre objectif est de développer un calcul stochastique par rapport au processus de *Rosenblatt.* Bien que la communauté scientifique porte un intérêt notamment au mouvement brownien fractionnaire, puisque c'est le processus le plus étudié dans la classe des processus d'Hermite à cause de son importance significative dans les problèmes de modélisation, le processus de *Rosenblatt* est aussi important de part ces applications pratiques en raison de son autosimilarité, la stationnarité de ces accroissements et sa dépendance à mémoire longue.

Notre travail se compose essentiellement de quatre Chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit les notions de base sur les processus à temps continu tels que les processus autosimilaires, le mouvement brownien fractionnaire, l'intégrale multiple de Wiener-Itô, les processus d'Hermite et le théorème de la limite non centrée.

Dans le deuxième chapitre, on définit les processus de *Rosenblatt* et on démontre particulièrement une représentation du processus de *Rosenblatt* sous forme d'intégrale stochastique sur un intervalle, qu'on utilisera pour introduire un calcul stochastique par rapport à ce processus. Pour finir ce chapitre on introduit les intégrales de Wiener par rapport au processus de *Rosenblatt.*

Dans le troisième chapitre, on définit le processus de *Rosenblatt* à valeur dans les espaces de Hilbert et on étudie l'équation d'évolution stochastique par rapport à ce processus.

Le quatrième chapitre est consacré au calcul stochastique par rapport au processus de *Rosenblatt.* On décrit les applications du calcul stochastique trajectoriel introduite par F.Russo et P. Vallois [9] du processus de *Rosenblatt* et on définit l'intégrale au sens de Skorohod, on termine ce chapitre par la mise en évidence du lien entre l'intégrale de Skorohod et l'intégrale trajectorielle, et par la formule d'Itô au sens de Skorohod.

Chapitre 1

Introduction sur les processus à temps continu

1.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 1.1 *Un processus aléatoire à temps continu est un famille de variables aléatoires* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *définies sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *On peut également le voir comme une fonction aléatoire*

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & \Omega \longrightarrow \{\textit{fonction de } \mathbb{R}_+ \textit{ dans } \mathbb{R}\} \\ w \quad \longrightarrow \quad & X_.(w) \end{aligned}$$

Définition 1.2 - *Une filtration est une famille* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *tel que :* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq s \geq 0$

Définition 1.3 - *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable* $\forall t \geq 0$

- *La filtration naturelle d'un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est donné par* $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$; *où* $\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s; 0 \leq s \leq t\right)$.

1.1.1 Processus à accroissements indépendants et stationnaires

Définition 1.4 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est à accroissements Indépendants si*

$$(X_t - X_s) \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_t^X; \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{1.1}$$

Définition 1.5 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est à accroissements stationnaires si la variable aléatoire* $X_{t+h} - X_t$ *est à même loi que* $X_{t\geq 0}$.

$$(i.e \qquad X_{t+h} - X_h \backsim X_t - X_0 \qquad \forall h > 0). \tag{1.2}$$

Définition 1.6 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est appelé processus à trajectoires continues (ou simplement continu) si*

$$\mathbb{P}\left(\{w \in \Omega,\ t \longrightarrow X_t(w) \quad \text{est continue }\}\right) = 1.$$

1.1.2 Mouvements browniens

Définition 1.7 *Un mouvement brownien standard (m.b.s) est un processus aléatoire à temps continu* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *tel que*

i) $B_0 = 0$ *presque sûrement (p.s).*

ii) $(B_t)_{t\geq 0}$ *est à accroissements indépendants stationnaires.*

iii) $B_t \backsim N(0,t) \quad \forall t > 0$.

iv) $(B_t)_{t\geq 0}$ *est à trajectoires continues.*

Remarque 1.1 *D'après cette définition, on a :*

$$\forall t \geq s \geq 0 \quad B_t - B_s \backsim N(0, t-s).$$

On notera que dans ce cas

$$\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0, \qquad \mathbb{E}(B_t - B_s)^2 = t - s.$$

Proposition 1.1 *Un mouvement Brownien standard* $(B_t)_{t \geq 0}$ *est un processus à trajectoires continues, gaussien avec* $m(t) = 0$ *et* $cov(X_t, X_s) = \min\{t, s\} = t \wedge s$.

Preuve. Il faudrait vérifier que $C_1 B_{t_1} + ... + C_n B_{t_n}$ et une variable aléatoire gaussienne. Remarquons que : $B_t + B_s = (B_t - B_s) + 2B_s$ est gaussien comme étant une somme de deux variables aléatoires gaussiennes. Soit maintenant $t \geq s \geq 0$

$$\begin{aligned}
m(t) &= \mathbb{E}(B_t) = 0 \\
R(t, s) &= cov(B_t, B_s) = \mathbb{E}(B_t B_s) \\
&= \mathbb{E}(B_t - B_s)\,\mathbb{E}(B_s) + (\mathbb{E}(B_s))^2 \\
&= 0 + s
\end{aligned}$$

d'où $R(t, s) = t \wedge s$. ■

1.1.3 Martingales à temps continu

Définition 1.8 *Un processus* $(M_t)_{t \geq 0}$ *adapté à* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *tel que*

i) $\mathbb{E}(|M_t|^2) < \infty, \qquad \forall t \geq 0$

ii) $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s$ *(resp* $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s$*) p.s* $\quad \forall t > s \geq 0.$

est appelé sousmartingale (resp. surmartingale).

Lorsque $(M_t)_{t \geq 0}$ *est à la fois une sousmartingale et surmartingale, on dira que* $(M_t)_{t \geq 0}$ *est une martingale.*

Proposition 1.2 *(cf.* [20]*) Le mouvement Brownien standard* $(B_t)_{t \geq 0}$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$.

Théorème 1.1 *(cf. [20]) (Théorème de lévy) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus à trajectoires continus, adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et tel que*

i) $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

ii) $X_t^2 - t$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Alors (X_t) est un mouvement brownien standard.

1.2 Processus autosimilaires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace des probabilités. Dans tout ce qui suit, on utilisera la notation suivantes : $X_t \stackrel{d}{=} Y_t \; \forall t \geq 0$, lorsque le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ ont une même distribution pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.9 *i) On dira que $(X_t)_{t\geq 0}$ est continu stochastiquement à t, si pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\underset{h \longrightarrow 0}{Lim} \mathbb{P}\{|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon\} = 0.$$

ii) On dira aussi que $(X_t)_{t\geq 0}$ est trivial, si (X_t) est constant presque sûrement pour tout $t > 0$.

Définition 1.10 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit autosimilaire de paramètre d'autosimilarité $H > 0$, si pour tout $a > 0$*

$$X_{at} \stackrel{d}{=} a^H X_t. \tag{1.4}$$

Théorème 1.2 *Le mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$est $\frac{1}{2}-$autosimilaire.*

Preuve. Il suffit de montrer que pour tout $a > 0$, $\left(a^{-\frac{1}{2}} B_{at}\right)$ est aussi un mouvement Brownien ; les conditions i),ii) et iv) découlent des propriétés de (B_t). Pour iii) on a : comme (B_{at}) est un processus gaussien d'espérance nulle alors $\left(a^{-\frac{1}{2}} B_{at}\right)$ l'est aussi. De plus, on a $\mathbb{E}\left(a^{-\frac{1}{2}} B_{at}\right)^2 = t$, d'où $\left(a^{-\frac{1}{2}} B_{at}\right)$ est un mouvement brownien standard. ■

Proposition 1.3 *(cf. [20]) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus autosimilaire de paramètre d'autosimilarité H. Le comportement limite de $(X_t)_{t\geq 0}$ quand t tend vers l'infini est donné par* $X_t \stackrel{d}{=} t^H X_1$

. *Si* $H < 0$, *alors* $X_t \stackrel{en\ loi}{\longrightarrow} 0$

. *Si* $H = 0$, *alors* $X_t \stackrel{en\ loi}{\longrightarrow} X_1$

. *Si* $H > 0$; *et* $X_t \neq 0$, *alors* $|X_t| \stackrel{en\ loi}{\longrightarrow} \infty$.

Théorème 1.3 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus non-trivial, H-autosimilaire et à accroissements stationnaires. Supposons que $\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right] < \infty$. Alors on a :*

$$\mathbb{E}\left[X_t X_s\right] = \frac{1}{2}\left\{t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right\}\mathbb{E}\left|X_1\right|^2. \tag{1.5}$$

Preuve. D'après l'autosimilarité et la stationnarité des accroissements de $(X_t)_{t\geq 0}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t X_s\right] &= \frac{1}{2}\left\{\mathbb{E}\left[X_t^2\right] + \mathbb{E}\left[X_s^2\right] - \mathbb{E}\left[X_t - X_s\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\mathbb{E}\left[X_t^2\right] + \mathbb{E}\left[X_s^2\right] - \mathbb{E}\left[X_{(|t-s|)}^2\right]\right\} \qquad (\textit{proposition } (1.3)) \\
&= \frac{1}{2}\left\{t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right\}\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right].
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.4 *Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est H−autosimilaire et $H > 0$,alors $X_0 = 0$ p.s.*

Preuve. D'après la définition 1.10, $X_0 \sim a^H X_0$, donc on a $X_0 = 0$ p.s. ■

Remarque 1.2 *La proposition 1.4 n'est pas valide quand $H = 0$.*

Exemple 1.1 *Soient $(Y_s)_{s\in\mathbb{R}}$ un processus strictement stationnaire, ξ une variable aléatoire indépendante de (Y_s). On définit $(X_t)_{t\geq 0}$ par :*

$$X_t = \begin{cases} Y_{\log t}, & t > 0, \\ \xi, & t = 0. \end{cases}$$

Pour $t > 0$,

$$X_{at} = Y_{\log at} = Y_{\log a + \log t} \stackrel{d}{=} Y_{\log t} = X_t$$

donc on a

$$\left\{ (X_{at})_{t>0}, \xi \right\} \stackrel{d}{=} \left\{ (X_t)_{t>0}, \xi \right\}$$

qui entraîne que $(X_t)_{t \geq 0}$ *est* 0*-autosimilaire, pourtant* $X_0 \neq 0$.

Théorème 1.4 *(cf. [21]) On suppose que* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est* $H-$*autosimilaire, à accroissements stationnaires et tel que* $H > 0$ *et* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est non-trivial* $\forall t > 0$.*Alors on a :*

i) Si $\mathbb{E} \left| X_1{}^{\gamma} \right| < \infty$ *pour* $0 < \gamma < 1$, *alors* $H < 1/\gamma$.

ii) Si $\mathbb{E} \left| X_1 \right| < \infty$, *alors* $H \leq 1$.

iii) Si $\mathbb{E} \left| X_1 \right| < \infty$ *et* $0 < H < 1$, *alors* $\mathbb{E} \left[\left| X_t \right| \right] = 0 \quad \forall t \geq 0$.

iv) Si $\mathbb{E} \left| X_1 \right| < \infty$ *et* $H = 1$, *alors* $X_t = tX_1 \quad p.s.$

Théorème 1.5 *Soit* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est* $H-$*autosimilaire, à accroissements stationnaires avec* $H > 1$. *Alors on a* $\mathbb{E} \left[(X_1)^{1/H} \right] = \infty$.

Preuve. Supposons $\mathbb{E} \left[X_1^{1/H} \right] < \infty$. Comme $\gamma = 1/H < 1$, alors on a d'après le théorème (1.4) ; i) $H < 1/\gamma = H$, ce qui est absurde. ■

1.3 Dépendance à mémoire longue

On considère maintenant le cas où $0 < H < 1$ et $\mathbb{E} \left[\left| X_1 \right|^2 \right] < \infty$, on pose :

$$\begin{aligned} \xi_n &= X_{n+1} - X_n, & n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, \\ r(n) &= \mathbb{E} \left[\xi_0 \xi_n \right], & n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, \end{aligned}$$

où ξ_n est une suite de variables aléatoires gaussiennes stationnaires et $r(n)$ la fonction de corrélation alors on a :

$$\begin{cases} r(n) \sim H(2H-1)\, n^{2H-2}\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right], & \text{quand } n \longrightarrow \infty, \ si\ H \neq \frac{1}{2} \\ r(n) = 0, & \text{quand } n \geq 1, \ si\ H = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En effet, d'après la proposition (1.4) on a $X_0 = 0 \quad p.s$ et d'après le théorème (1.3), on a :

$$\begin{aligned} r(n) &= \mathbb{E}[\xi_0\xi_n] = \mathbb{E}[X_1(X_{n+1} - X_n)] \\ &= \mathbb{E}[X_1X_{n+1}] - \mathbb{E}[X_1X_n] \\ &= \frac{1}{2}\left\{(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}\right\}\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right] \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$, d'où le résultat..

Corollaire 1.1 *Soit $r(n)$ la fonction de corrélation d'un processus $H-$autosimilaire et à accroissements stationnaires, avec $0 < H < 1$ et $\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right] < \infty$. Alors on a :*

1) $0 < H < \frac{1}{2} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |r(n)| < \infty$,

2) $H = \frac{1}{2}$, $(\xi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont non corrélées,

3) $\frac{1}{2} < H < 1 \Longrightarrow$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} |r(n)| = \infty$.

Définition 1.11 - *Si $0 < H < \frac{1}{2}$, $r(n) < 0$ pour tout $n \geq 1$, on dira qu'on a une corrélation négative.*

- *Si $\frac{1}{2} < H < 1$, $r(n) > 0$ pour tout $n \geq 1$, on dira qu'on a une corrélation positive.*
- *Si $\sum_{n=0}^{\infty} |r(n)| = \infty$, on dira que le processus est à dépendance à mémoire longue.*

1.4 L'intégrale multiple de Wiener-Itô

On considère l'espace de Hilbert séparable $L^2(T, \beta, \mu)$, où (T, β) est un espace mesurable et μ est une mesure $\sigma-$finie. Dans ce cas les processus Gaussien W sont caractérisés par la famille de variables aléatoires $\{W(A), A \in \beta, \mu(A) < \infty\}$, où $W(A) = W(\mathbf{1}_A)$, ici $W(A)$ est une mesure à valeur dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.4.1 Construction de l'intégrale stochastique multiple.

Soient $\beta_0 = \{A \in \beta : \mu(A) < \infty\}$ et $\mathcal{E}_m$ ($m \geq 1$ fixé) ; l'ensemble de fonctions élémentaires de la forme

$$f(t_1, ..., t_m) = \sum_{i_1,...,i_m=1}^{n} a_{i_1.....i_m} \mathbf{1}_{A_{i_1} \times .... \times A_{i_m}} (t_1, ..., t_m), \tag{1.6}$$

où $A_1, A_2, ..., A_n \in \beta_0$, disjoints deux à deux et les coefficients $a_{i_1.....i_m} = 0$ si $i_j = i_k$ $\forall j, k \in \{1, ..., m\}$.

Définition 1.12 *Soient $f \in \mathcal{E}_m$ $\{A \in \beta : \mu(A) < \infty\}$ et $m \geq 1$; On définit l'intégrale stochastique $I_m(f)$ de la fonction $f \in L^2(T^m, \beta^m, \mu^m)$ par :*

$$I_m(f) = \sum_{i_1,...,i_m=1}^{n} a_{i_1.....i_m} W(A_{i_1}) ......W(A_{i_m}). \tag{1.7}$$

D'après cette définition on a les propriétés suivantes :

Proposition 1.5 *(cf. [6]) Soit $I_m(f)$ l'intégrale définit par (1.7), alors on a*

(i) I_m est linéaire

(ii) $I_m(f) = I_m\left(\tilde{f}\right)$ ou $\tilde{f}$ dénote la fonction symétrique de f.

$$\left(i.e \quad \tilde{f}(t_1, ..., t_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \Sigma} f\left(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(m)}\right)\right)$$

La somme Σ représente l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, ..., m\}$,

(iii) $\mathbb{E}(I_m(f) I_q(g)) = \begin{cases} 0 & si\ m \neq q \\ m! \left\langle \widetilde{f}, \widetilde{g} \right\rangle_{L^2(T^m)} & si\ m = q \end{cases}$

Définition 1.13 *Soient $f \in L^2(T^p)$, $g \in L^2(T^q)$ des fonctions symétrique. Pour tout $1 \leq r \leq \min(p,q)$ la contraction de r du f et g est noté par $f \otimes_r g$, elle est définit par*

$$f \otimes_r g(t_1, \ldots\ldots, t_{p+q-2r}) = \int_{T^r} f(t_1, \ldots., t_{p-r}, s)\, g(t_{p+1}, \ldots\ldots, t_{p+q-r}, s)\, \mu^r(ds).$$

On note que $f \otimes_r g \in L^2(T^{p+q-2r})$.

Proposition 1.6 *(cf. [6]) Soit $f \in L^2(T^p)$ une fonction symétrique $\left(i.e\ f = \widetilde{f}\right)$ et soit $g \in L^2(T)$. Alors on a :*

$$I_p(f)\, I_1(g) = I_{p+1}(f \otimes g) + pI_{p-1}(f \otimes_1 g). \tag{1.8}$$

Proposition 1.7 *(cf. [6]) Soient $f \in L^2(T^p)$ et $g \in L^2(T^q)$ deux fonctions symétrique. Alors on a :*

$$I_p(f)\, I_q(g) = \sum_{r=0}^{p\wedge q} r! \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} I_{p+q-2r}(f \otimes_r g). \tag{1.9}$$

Proposition 1.8 *(cf. [6]) Soient $H_m(x)$ "le polynôme d'Hermite" d'ordre m et $h \in H = L^2(T)$ un élément de norme égale à 1. Alors on a :*

$$m! H_m(W(h)) = \int_{T^m} h(t_1) \ldots h(t_m)\, W(dt_1) \ldots W(dt_m). \tag{1.10}$$

1.5 Mouvement brownien fractionnaire

Définition 1.14 *Un processus gaussien centré $\left(B_t^H\right)_{t \geq 0}$ est dit mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (0,1)$, s'il admet comme fonction de covariance la fonction :*

$$R_H(t,s) = \mathbb{E}\left(B_t^H B_s^H\right) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} + |t-s|^{2H}\right). \tag{1.11}$$

Proposition 1.9 *(cf. [6]) Le mouvement brownien fractionnaire $\left(B_t^H\right)_{t \geq 0}$ est le seul processus qui vérifie :*

(i) La $H-$autosimilarité.

(ii) La stationnarité des accroissements. En particulier :

$$\mathbb{E}\left(\left|B_t^H - B_s^H\right|\right) = |t-s|^{2H} \qquad \forall t, s \geq 0.$$

(iii) $B_t^H \sim N(0,t)$ *et admet comme fonction de covariance*

$$R_H(t,s) = \mathbb{E}\left(B_t^H B_s^H\right) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Remarque 1.3 *i) Si $H = \frac{1}{2}$, B_t^H est le mouvement Brownien standard,*

ii) Si $H \neq \frac{1}{2}$, B_t^H n'est ni une semimartingale ni un processus de Markov (voir [6]*)*

Définition 1.15 *Soient $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $0 \leq \gamma < 1$. Alors φ est dite höldérienne continue d'indice γ s'il existe une constante c tel que :*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c\,|x-y|^{\gamma} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Lemme 1.1 *(cf.* [21]*) (**Version Générale du Critère de Kolmogorov**) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique satisfaisant :*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^{\delta}\right] \leq C\,|t-s|^{1+\varepsilon} \qquad \forall t, s \geq 0. \tag{1.14}$$

Pour $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ et $C > 0$. Alors $(X_t)_{t\geq 0}$ admet une modification à trajectoires höldériennes continues d'indice $\gamma \in [0, \varepsilon/\delta]$

Théorème 1.6 *Le mouvement brownien fractionnaire $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ de paramètre de Hurst $H \in (0,1)$ admet une modification à trajectoires höldériennes continues d'indice $\gamma \in [0, H]$.*

Preuve. Choisissons $0 < \beta < H$. Alors on a d'après l'autosimilarité et la stationnarité des accroissements de $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|B_t^H - B_s^H\right|^{1/\beta}\right] &= \mathbb{E}\left[\left|B_{|t-s|}^H\right|^{1/\beta}\right] \\ &= |t-s|^{H/\beta}\,\mathbb{E}\left[\left|B_1^H\right|^{1/\beta}\right] \end{aligned}$$

Il résulte du critère de Kolmogorov qu'il existe une modification d'indice $\gamma < (H/\beta - 1)\,\beta = H - \beta$ et comme β est très petit $(\beta \longrightarrow 0)$, donc $\gamma < H$. ■

1.5.1 Représentation du mouvement brownien fractionnaire dans un intervalle

Soit $\left(B_t^H\right)_{t\in[0,T]}$ (T est fixé), un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (0,1)$, on note par $\mathcal{E}$ l'ensemble de fonctions étagées définies sur $\mathbb{R}_+$. Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert défini comme étant l'adhérence de $\mathcal{E}$ par rapport au produit scalaire

$$\left\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]} \right\rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t,s)\,.$$

La fonction $\mathbf{1}_{[0,t]} \longrightarrow B_t$ peut se prolonger en une isométrie entre $\mathcal{H}$ et l'espace gaussien $\mathcal{H}_1$associé avec $\left(B_t^H\right)_{t\in[0,T]}$, on note cette isométrie par $\varphi \longrightarrow B(\varphi)$. Alors $\{B(\varphi), \varphi \in \mathcal{H}\}$ est un processus gaussien isonormale (au sens de définition 1.16) associé avec l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Définition 1.16 *On dira que le processus $W = \{W(h), h \in \mathcal{H}\}$ défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un processus gaussien isonormale (ou un processus gaussien dans $\mathcal{H}$) si W est une famille de variables aléatoires centrées tel que*

$$\mathbb{E}\left(W(h)\,W(g)\right) = \langle h, g\rangle_{\mathcal{H}} \qquad \forall h, g \in \mathcal{H}.$$

Dans cette partie on veut établir une représentation du mouvement brownien fractionnaire comme étant un processus de Volterra. Pour cela on ne considère que le cas où $H > \frac{1}{2}$.

Il est simple de voir qu'en peut écrire la covariance de mouvement brownien fractionnaire comme suit :

$$R_H(t,s) = \alpha(H) \int_0^t \int_0^s |r-u|^{2H-2} dudr. \tag{1.17}$$

où $\alpha(H) = H(2H-1)$. Cette formule implique que

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \alpha(H) \int_0^T \int_0^T |r-u|^{2H-2} \varphi_r \psi_u dudr;. \tag{1.18}$$

pour chaque paire de fonction φ et ψ de $\mathcal{E}$. On peut écrire alors

$$\begin{aligned} |r-u|^{2H-2} &= \frac{(ru)^{H-\frac{1}{2}}}{\beta\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right)} \\ &\quad \times \int_0^{r\wedge u} v^{1-2H} (r-v)^{H-\frac{3}{2}} (u-v)^{H-\frac{3}{2}} dv, \end{aligned} \tag{1.19}$$

où β la fonction Beta. En effet, on suppose que $r > u$ et par un changement de variables $z = \frac{r-v}{u-v}$et $x = \frac{r}{uz}$, on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^u v^{1-2H} (r-v)^{H-\frac{3}{2}} (u-v)^{H-\frac{3}{2}} dv \\ &= (r-u)^{2H-2} \int_{\frac{r}{u}}^{\infty} (zu-r)^{1-2H} z^{H-\frac{3}{2}} dz \\ &= (ru)^{\frac{1}{2}-H} (r-u)^{2H-2} \int_0^1 (1-x)^{1-2H} x^{H-\frac{3}{2}} dx \end{aligned}$$

on a $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad \forall\ p,q > 0$, donc $\int_0^1 (1-x)^{1-2H} x^{H-\frac{3}{2}} dx = \beta\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right)$,

alors,

$$\int_0^u v^{1-2H}(r-v)^{H-\frac{3}{2}}(u-v)^{H-\frac{3}{2}}dv = \beta\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right)(ru)^{\frac{1}{2}-H}(r-u)^{2H-2}.$$

Considérons le noyau de carré intégrable

$$K_H(t,s) = c(H)\, s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}}du, \tag{1.20}$$

où $c(H) = \left[\frac{H(2H-1)}{\beta\left(2-2H,H-\frac{1}{2}\right)}\right]^{1/2}$ et $t > s$.

On déduit des formules (1.17) et (1.19) que le noyau K_H est vérifie

$$\begin{aligned}
\int_0^{t\wedge s} K_H(t,u)\, K_H(s,u)\, du &= c(H)^2\int_0^{t\wedge s}\left(\int_u^t (y-u)^{H-\frac{3}{2}} y^{H-\frac{1}{2}}dy\right)\\
&\quad\times\left(\int_u^s (z-u)^{H-\frac{3}{2}} z^{H-\frac{1}{2}}dz\right)u^{1-2H}du\\
&= c(H)^2\beta\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right)\int_0^t\int_0^s |y-z|^{2H-2}dzdy\\
&= R_H(t,s). \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

la formule (1.21) implique que le noyau R_H est bien défini.

D'après (1.20), on obtient

$$\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s) = c(H)\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}}(t-s)^{H-\frac{3}{2}}. \tag{1.22}$$

Considérons $K_H^*\varphi$ l'opérateur linéaire de $\mathcal{E}$ dans $L^2([0,T])$ définie par

$$(K_H^*\varphi)(s) = \int_0^T \varphi(t)\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s)\,dt. \tag{1.23}$$

noter que

$$\left(K_H^*1_{[0,t]}\right)(s) = K_H(t,s)\,1_{[0,t]}(s). \tag{1.24}$$

L'opérateur K_H^* est donne une isométrie entre $\mathcal{E}$ et $L^2([0,T])$ qui se prolonge à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. En effet, pour tout $s,t \in [0,T]$ on a d'après les formules (1.24) et (1.21)

$$\begin{aligned}
\left\langle K_H^*\mathbf{1}_{[0,t]}, K_H^*\mathbf{1}_{[0,s]}\right\rangle_{L^2([0,T])} &= \left\langle K_H(t,.)\,\mathbf{1}_{[0,t]}, K_H(s,.)\,\mathbf{1}_{[0,s]}\right\rangle_{L^2([0,T])} \\
&= \int_0^{t\wedge s} K_H(t,u)\,K_H(s,u)\,du \\
&= R_H(t,s) = \left\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]}\right\rangle_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

D'après les formules (1.22), (1.23) et $(A.1)$, l'opérateur K_H^* peut s'exprimer en terme d'intégrales fractionnaires :

$$(K_H^*\varphi)(s) = c(H)\,\Gamma\left(H-\frac{1}{2}\right)s^{\frac{1}{2}-H}\left(I_{T-}^{H-\frac{1}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}\varphi(u)\right)(s). \tag{1.25}$$

pour chaque $a \in [0,T]$, on a :

$$(K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,a]}\right) = \frac{1}{c(H)\,\Gamma\left(H-\frac{1}{2}\right)}s^{\frac{1}{2}-H}\left(D_{a-}^{H-\frac{1}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}\right)(s)\,\mathbf{1}_{[0,a]}(s). \tag{1.26}$$

Proposition 1.10 *Soit $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$, processus défini par*

$$W_t = B\left((K_H^*)^{-1}\left(1_{[0,t]}\right)\right).$$

Alors W est un processus de Wiener et le processus $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ admet comme représentation intégrale

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)\,dW_s.$$

de plus, pour chaque $\varphi \in H$ on a :

$$B(\varphi) = \int_0^T K_H(\varphi)\,dW_t.$$

Preuve. En effet, pour tout $s, t \in [0, T]$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_t W_s) &= \mathbb{E}\left(B\left((K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right)\right) B\left((K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,s]}\right)\right)\right) \\
&= \left\langle (K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right), (K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,s]}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]}\right\rangle_{L^2([0,T])} = s \wedge t.
\end{aligned}$$

■

1.6 Le processus d'Hermite

On donne dans cette partie quelques propriétés du processus d'Hermite

Définition 1.17 *Le processus d'Hermite $Z_H^k = \left(Z_H^k(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$ d'ordre $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ de paramètre de Hurst $H \in (1/2, 1)$ est un processus stochastique défini par l'intégrale multiple de Wiener-Itô d'ordre k par rapport au mouvement brownien standard $(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$, est de la forme*

$$Z_H^k(t) = c(H,k) \int_{\mathbb{R}^k} \int_0^t \left(\prod_{j=1}^{\alpha} (s - y_i)_+^{-\left(1/2 + \frac{1-H}{k}\right)} ds \right) dB_{y_1} dB_{y_2} ......dB_{y_k} \tag{1.27}$$

où $x_+ = \max(0, x)$

Remarque 1.4 *On suppose que $H \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.*

i) Si $k = 1$, Z_H^k est le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in [0, 1]$.

ii) Si $k \geq 2$, le processus Z_H^k est non gaussien (voir [15])

iii) Si $k = 2$, le processus Z_H^k est appelé le "processus de Rosenblatt".

Proposition 1.11 *La fonction de covariance du processus de Hermite est défini par*

$$R(t,s) = \mathbb{E}\left[Z_H^k(t) Z_H^k(s)\right] = c(H,k)^2 \frac{\beta\left(\frac{1}{2} - \frac{1-H}{k}, \frac{2H-2}{k}\right)^k}{H(2H-1)} \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right). \tag{1.28}$$

où β est la fonction Beta et

$$c\left(H,k\right)^{2}=\left(\frac{\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{1-H}{k},\frac{2H-2}{k}\right)^{k}}{H\left(2H-1\right)}\right)^{-1}. \tag{1.29}$$

Preuve. D'après le théorème de Fubini et l'isométrie de l'intégrale multiple de Wiener-Itô. on a :

$$\begin{aligned}
R\left(t,s\right) &= c\left(H,k\right)^{2}\int_{\mathbb{R}^{K}}\left(\int_{0}^{t}\int_{0}^{s}\prod_{j=1}^{k}\left(u-y_{i}\right)_{+}^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k}\right)}\left(v-y_{i}\right)_{+}^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k}\right)}dvdu\right)dy_{1}.......dy_{k}\\
&= c\left(H,k\right)^{2}\int_{0}^{t}\int_{0}^{s}\int_{\mathbb{R}^{K}}\left[\prod_{j=1}^{k}\left(u-y_{i}\right)_{+}^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k}\right)}\left(v-y_{i}\right)_{+}^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k}\right)}dy_{1}.......dy_{k}\right]dvdu\\
&= c\left(H,k\right)^{2}\int_{0}^{t}\int_{0}^{s}\left[\int_{\mathbb{R}}\left(u-y\right)_{+}^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k}\right)}\left(v-y\right)_{+}^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k}\right)}dy\right]^{k}dvdu
\end{aligned}$$

Soit $\beta\left(p,q\right)=\int_{0}^{1}z^{p-1}\left(1-z\right)^{q-1}dz;\ \forall\ p,q>0$, la fonction Beta, de l'identité

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(u-y\right)_{+}^{a-1}\left(v-y\right)_{+}^{a-1}dy=\beta\left(a,2a-1\right)\left|u-v\right|^{2a-1}$$

on a :

$$\begin{aligned}
R\left(t,s\right) &= c\left(H,k\right)^{2}\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{1-H}{k},\frac{2H-2}{k}\right)^{k}\int_{0}^{t}\int_{0}^{s}\left(\left|u-v\right|^{\frac{2H-2}{k}}\right)^{k}dvdu\\
&= c\left(H,k\right)^{2}\frac{\beta\left(\frac{1}{2}\quad\frac{1-H}{K},\frac{2H-2}{K}\right)^{K}}{H\left(2H-1\right)}\frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-\left|t-s\right|^{2H}\right).
\end{aligned}$$

on choisit $c\left(H,k\right)$de sorte que $\mathbb{E}\left(Z_{H}^{k}\left(1\right)\right)=1$, d'où

$$c\left(H,k\right)^{2}=\left(\frac{\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{1-H}{k},\frac{2H-2}{k}\right)^{k}}{H\left(2H-1\right)}\right)^{-1}.$$

et on a :

$$R\left(t,s\right)=\frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-\left|t-s\right|^{2H}\right).$$

■

Remarque 1.5 *De l'H-autosimilarité et de la stationnarité des accroissements du processus* $\left(Z_H^k(t)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, *on a pour tout* $p \geq 1$:

$$\mathbb{E}\left[\left|Z_H^k(t) - Z_H^k(s)\right|^p\right] = c(p, H, k)\,|t-s|^{p+1}$$

d'où il résulte que les trajectoires du processus d'Hermite sont presque sûrement höldériennes d'indice δ *tel que* $\delta < H$, *et que tout les moments sont finis.*

1.7 Théorème de la limite non centrée

Rappelons que (cf. [21]) : Si $X_1, X_2, \ldots..$une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. Alors on a :

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{[nt]} X_j \text{ converge en loi vers } B_t. \tag{1.30}$$

où B_t est un mouvement Brownien standard. Si on fixe $t > 0$ on obtient le théorème classique de la limite centrale (TCL)

Théorème 1.7 *(cf. [21]) Supposons* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est continu stochastiquement. S'il existe un processus stochastique* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *et un nombre réel* $\{a(\lambda), \lambda > 0\}$ *avec* $a(\lambda) > 0$, $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow\infty} a(\lambda) = \infty$ *tel que*

$$\frac{1}{a(\lambda)}Y_{\lambda t} \overset{en\ loi}{\Longrightarrow} X_t; \qquad \textit{quand } \lambda \longrightarrow \infty \tag{1.31}$$

Alors pour quelque $H > 0$, $(X_t)_{t\geq 0}$ *est* $H-$*autosimilaire, d'ailleurs ;* $a(\lambda)$ *est de la forme*

$$a(\lambda) = \lambda^H L(\lambda)$$

où L *est fonction à variation lente*

Définition 1.18 *$L(\lambda)$ est dite à variation lente si*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} L(c\lambda)/L(\lambda) = 1 \qquad \forall c > 0.$$

Théorème 1.8 *(cf. [21]) Soit $\{\xi_n\}$ une série gaussienne stationnaire telle que : $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$, $\mathbb{E}[\xi_1^2] = 1$ et $\mathbb{E}[\xi_1 \xi_{n+1}] \backsim n^{H-1} L(n)$ quand $n \longrightarrow \infty$. $\forall H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et pour tout fonction à variation lente L, on définie une autre série stationnaire $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ par*

$$X_j = \xi_j^2 - 1. \tag{1.32}$$

alors ;

$$\frac{1}{n^H} \sum_{j=1}^{n} X_j \overset{en\ loi}{\longrightarrow} Z; \tag{1.33}$$

où Z est une variable aléatoire non gaussienne et sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\mathbb{E}\left[e^{i\,\theta Z}\right] = \exp\left\{ \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(2i\,\theta)}{2p} \int_{\substack{x \in [0,1]^p \\ \theta \in \mathbb{R}}} |x_1 - x_p|^{2(H-1)} \prod_{j=2}^{p} |x_j - x_{j-1}|^{2(H-1)}\, dx \right\} \tag{1.34}$$

D'après ce théorème Taqqu [16] a considéré une version du processus (1.32) et il a obtenu un processus de limite de $n^{-H} \sum_{j=1}^{n} X_j$. Ce processus de limite est $H-$autosimilaire d'après le théorème (1.9) et est le premier exemple de processus autosimilaire non gaussien, de plus il est référé par un processus de *Rosenblatt.*

On introduit maintenant le théorème de la limite non centrée, on considère une série stationnaire de variables aléatoires gaussienne $(\xi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ avec $\mathbb{E}\left(\xi_j^2\right) = 1$ et sa fonction de corrélation

$$r(n) := \mathbb{E}[\xi_0 \xi_n] = n^{\frac{2H-2}{k}} L(n).$$

Soit g une fonction dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l H_l(x)$$

tel que

$$\mathbb{E}[g(\xi_0)] = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[g(\xi_0)^2\right] < \infty.$$

où $H_l(x)$ est le polynôme d'Hermite

et

$$c_l = \frac{1}{l\,!}\mathbb{E}[g(\xi_0) H_l(\xi_0)].$$

Comme $\mathbb{E}[g(\xi_0)] = 0$, on a $k \geq 1$, où k est définie le rang d'Hermite de la fonction g. On introduit aussi une série des processus donné par :

$$Z_H^{k,n}(t) = \frac{1}{n^H}\sum_{j=1}^{[nt]} g(\xi_j) \qquad (t \geq 0) \;\text{ et }\; Z_H^{k,n}(t) = \frac{1}{n^H}\sum_{j\,=\,-[nu]-1}^{0} g(\xi_j) \qquad (u < 0), \tag{1.36}$$

d'après [18] (voir aussi le théorème 3.4.1 dans [21]), on a :

$$Z_H^{k,n} \overset{en\ loi}{\longrightarrow} c_k Z_H^k \qquad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty.$$

on utilise aussi la notation suivante; si f une fonction dans $\mathbb{R}$; tel que :

$$f_n(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{j}{n}\right) \mathbf{1}_{\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]}(x), \tag{1.37}$$

$$f_{n,T}^{+}(x) = \sum_{j\,=\,0}^{T} f\left(\frac{j}{n}\right) \mathbf{1}_{\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]}(x), \qquad f_{n,T}^{-}(x) = \sum_{j\,=\,-T}^{-1} f\left(\frac{j}{n}\right) \mathbf{1}_{\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]}(x).$$

aussi

$$f_n^{+} = f_{n,\infty}^{+}, f_n^{-} = f_{n,\infty}^{-}.$$

Théorème 1.9 *(cf. [15]) Soit $f \in |\mathcal{H}|$ tel que $f_n^{\pm} \in |\mathcal{H}|$ pour tout $n \geq 1$ et supposons* *que*

$$|f_n - f|_{|\mathcal{H}|} \longrightarrow 0 \qquad \textit{quand} \qquad T \longrightarrow \infty.$$

Alors, quand $n \longrightarrow \infty$,

$$\frac{1}{n^H} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{j}{n}\right) g\left(\xi_j\right) \overset{\textit{en loi}}{\longrightarrow} c_k \int_{\mathbb{R}} f\left(x\right) dZ_H^k\left(t\right). \tag{1.38}$$

où g *est une fonction de la forme* $\sum_{l=k}^{\infty} c_l H_l\left(x\right)$. *avec un rang de Hermite égale à* K.

Chapitre 2

L'intégrale de Wiener par rapport au processus de Rosenblatt

2.1 Le processus de Rosenblatt

Dans cette section on analyse quelques propriétés de base du processus de *Rosenblatt*, en particulier sa représentation comme une intégrale stochastique sur un intervalle fini.

On a d'après la formule (0.2) avec $k = 2$:

$$Z_H^2(t) := Z_t = a(H) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t (s - y_1)_+^{-\frac{2-H}{2}} (s - y_2)_+^{-\frac{2-H}{2}} ds \right) dB_{y_1} dB_{y_2} \tag{2.1}$$

où $(B_y)_{y \in \mathbb{R}}$ est un mouvement Brownien standard réel. La constante $a(H)$ est positive et est telle que $E(Z_1^2) = 1$. La formule (1.29) avec $k = 2$ donne :

$$a(H)^2 = \left(\frac{\beta\left(\frac{H}{2}, H - 1\right)^2}{H(2H - 1)} \right)^{-1}$$

Rappelons que le processus $(Z_t)_{t \in [0,T]}$ est $H-$autosimilaire, à accroissements stationnaires et admet une modification à trajectoires höldériennes presque sûrement continues d'ordre $\delta < H$. De plus d'après le corollaire 1.1 le processus $(Z_t)_{t \in [0,T]}$ est à dépendance à mémoire longue lorsque $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

La représentation (2.1) n'est pas très commode pour construire un calcul stochastique par rapport au processus $(Z_t)_{t\in[0,T]}$; d'où la nécessite de représenter $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ comme un intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien dans un intervalle de temps $[0, T]$.

Rappelons que le mouvement brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t\geq 0}$de paramètre de Hurst $H > 0$ admet la représentation suivante :

$$B_t^H = \int_0^t K^H(t,s)\, dW_s$$

où $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Wiener standard,

$$K^H(t,s) = c(H)\, s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du \qquad (t > s) \tag{2.3}$$

et

$$c(H) = \left(\frac{H(2H-1)}{\beta\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Proposition 2.1 *Soient K le noyau défini par (2.3), $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ le processus de Rosenblatt de paramètre de Hurst H. Alors on a :*

$$Z_t \overset{(d)}{=} d(H) \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}(u, y_2)\, du\right] dB_{y_1} dB_{y_2} \tag{2.5}$$

où $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien standard,

$$\grave{H} = \frac{H+1}{2} \tag{2.6}$$

et

$$d(H) = \frac{1}{H+1}\left(\frac{H}{4(2H-1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.7}$$

Lemme 2.1 *i) La constante $d(H)$ est une constante de normalisation, elle est choisie* *de sorte que,*

$$\mathbb{E}\left(Z_t Z_s\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

ii) On peut montrer avec difficulté que le processus

$$\acute{Z}_t := d\left(H\right) \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_2\right) du\right] dB_{y_1} dB_{y_2}$$

Défini un processus H-autosimilaire à accroissement stationnaires.

Preuve. i) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Z_t Z_s\right) &= d\left(H\right)^2 \int_0^{t\wedge s} \int_0^{t\wedge s} dy_1 dy_2 \\
&\quad \times \left(\int_{y_1 \vee y_2}^t \int_{y_1 \vee y_2}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_2\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}\left(v, y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}\left(v, y_2\right) dudv\right) \\
&= d\left(H\right)^2 \int_0^t \int_0^s dvdu \left(\int_0^{u\wedge v} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_2\right) dy_1\right)^2 \\
&= d\left(H\right)^2 \left(\grave{H}\left(2\grave{H} - 1\right)\right)^2 \int_0^t \int_0^s |u-v|^{2H-2} dvdu = R(s,t).
\end{aligned}$$

ii) Pour tout $c > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\acute{Z}_{ct} &= \int_0^{ct} \int_0^{ct} \left[\int_{y_1 \vee y_2}^{ct} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_2\right) du\right] dB_{y_1} dB_{y_2} \\
&= \int_0^{ct} \int_0^{ct} \left[\int_{\frac{y_1}{c} \vee \frac{y_2}{c}}^{t} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(cu, y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(cu, y_2\right) dcu\right] dB_{y_1} dB_{y_2} \\
&= \int_0^{t} \int_0^{t} \left[\int_{y_1 \vee y_2}^{t} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(cu, cy_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(cu, cy_2\right) dcu\right] dB_{cy_1} dB_{cy_2}
\end{aligned}$$

et comme $B_{cy} =^{(d)} c^{\frac{1}{2}} B_y$ et $\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(cu, cy_i\right) = c^{H'-\frac{3}{2}} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_i\right)$ on obtient

$$\acute{Z}_{ct} \stackrel{d}{=} c^H \acute{Z}_t.$$

La relation

$$K^{H'}(t+h,s)-K^{H'}(t,s)=K^{H'}(t-s,h) \qquad \forall s,t\in[0,T]\,,\ s<t \text{ et } h>0$$

donne la stationnarité des accroissements du Z. ∎

Preuve. (De la proposition 1) : Soit $\acute{Z}_t$ le processus de Rosenblatt comme défini dans (2.5). Montrons d'abord que les variables aléatoires

$$\sum_{l=1}^{n} b_l Z_{t_l} \text{ et } \sum_{l=1}^{n} b_l \acute{Z}_{t_l}$$

ont même loi, pour tout $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ et $t_1, ..., t_n \in [0,T]$

On emploie le critère de Fox et Taqqu (voir [22]) stipule que si $f \in L^2\left([0,T]^2\right)$ est une fonction symétrique, alors la loi de l'intégrale multiple de Wiener-Itô $I_2(f)$ est déterminée d'une manière unique par ses coefficients.

$$c_m(f)=\frac{(m-1)!}{2}2^m\int_{\mathbb{R}^m} f(x_1,x_2)\,f(x_2,x_3)\,.....f(x_{m-1},x_m)\,f(x_m,x_1)\,dx_1....dx_m. \tag{2.8}$$

autrement dit, si deux fonctions symétriques $f,g\in L^2\left([0,T]^2\right)$ ont les mêmes coefficients, alors les intégrales multiple de Wiener-Itô $I_2(f)$ et $I_2(g)$ d'ordre deux ont même loi.

Il suffit donc de montrer que pour tout $t,s\in[0,T]$; les variables aléatoires Z_t+Z_s et $\acute{Z}_t+\acute{Z}_s$ ont la même loi.

Notons que

$$\acute{Z}_t+\acute{Z}_s=I_2(f_{t,s})$$

où

$$\begin{aligned} f_{t,s}(y_1,y_2) &= 1_{[0,t]}(y_1)\,1_{[0,t]}(y_2)\int_{y_1\vee y_2}^{t}\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\,\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2)\,du \\ &\quad +1_{[0,s]}(y_1)\,1_{[0,s]}(y_2)\int_{y_1\vee y_2}^{s}\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\,\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2)\,du \end{aligned} \tag{2.9}$$

Posons $a(m) := \frac{(m-1)!}{2} 2^m d(H)^m$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
& c_m(f_{s,t}) \\
= \; & a(m) \int_{\mathbb{R}^m} f_{t,s}(y_1, y_2) \ldots . f_{t,s}(y_m, y_1)\, dy_1 \ldots . dy_m \\
= \; & a(m) \int_{\mathbb{R}^m} dy_1 \ldots . dy_m \\
& \times \left(\int_{y_1 \vee y_2}^{t} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_1, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_1, y_2)\, du_1 + \int_{y_1 \vee y_2}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_1, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_1, y_2)\, du_1 \right) \\
& \times \left(\int_{y_2 \vee y_3}^{t} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_2, y_2) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_2, y_3)\, du_2 + \int_{y_2 \vee y_3}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_2, y_2) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_2, y_3)\, du_2 \right) \\
& \times \ldots . \\
& \times \left(\int_{y_m \vee y_1}^{t} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_m, y_m) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_m, y_1)\, du_m + \int_{ym \vee y_1}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_m, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u_m, y_m)\, du_m \right.
\end{aligned}$$

et d'après le théorème classique de Fubini on a :

$$\begin{aligned}
& c_m(f_{s,t}) \\
= \; & a(m) \sum_{t_j \in \{t,s\}} \int_0^{t_1} \ldots \ldots \int_0^{t_m} du_1 \ldots .. du_m \\
& \times \left(\int_0^{u_1 \wedge u_m} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u_1}(u_1, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u_m}(u_m, y_1)\, dy_1 \right) \\
& \times \left(\int_0^{u_1 \wedge u_2} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u_1}(u_1, y_2) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u_m}(u_2, y_2)\, dy_2 \right) \\
& \ldots \ldots \\
& \times \int_0^{u_{m-1} \wedge u_m} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u_{m-1}}(u_{m-1}, y_m) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u_m}(u_m, y_m)\, dy_m \\
= \; & \acute{a}(m) \sum_{t_j \in \{t,s\}} \int_0^{t_1} \ldots \ldots \int_0^{t_m} du_1 \ldots .. du_m \\
& |u_1 - u_2|^{2H'-2} |u_2 - u_3|^{2H'-2} \ldots . |u_m - u_1|^{2H'-2} \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

avec $\acute{a}(m) = a(m)\left(H'\left(2H'-1\right)\right)^m$.

Un calcul similaire donne :

$$Z_t + Z_s = I_2\left(g_{s,t}\right) \qquad s,t \in [0,T]$$

où

$$g_{s,t} = a(H)\left(\int_0^t (u-y_1)_+^{\frac{H-2}{2}}(u-y_2)_+^{\frac{H-2}{2}}du + \int_0^s (u-y_1)_+^{\frac{H-2}{2}}(u-y_2)_+^{\frac{H-2}{2}}du\right).$$

Posons $b(m) = \frac{(m-1)!}{2}2^m\, a(H)^m$ et le $m^{\acute{e}m\acute{e}}$ coefficient du noyau $g_{s,t}$ est donné par :

$$\begin{aligned}
c_m\left(g_{s,t}\right) &= b(m)\int_{\mathbb{R}} dy_1....dy_2 \\
&\quad \left(\int_0^t (u_1-y_1)_+^{\frac{H-2}{2}}(u_1-y_2)_+^{\frac{H-2}{2}}du_1 + \int_0^s (u_1-y_1)_+^{\frac{H-2}{2}}(u_1-y_2)_+^{\frac{H-2}{2}}du_1\right) \\
&\quad \left(\int_0^t (u_2-y_2)_+^{\frac{H-2}{2}}(u_2-y_3)_+^{\frac{H-2}{2}}du_2 + \int_0^s (u_2-y_2)_+^{\frac{H-2}{2}}(u_2-y_3)_+^{\frac{H-2}{2}}du_2\right) \\
&\quad .... \\
&\quad \left(\int_0^t (u_m-y_m)_+^{\frac{H-2}{2}}(u_m-y_1)_+^{\frac{H-2}{2}}du_m + \int_0^s (u_m-y_m)_+^{\frac{H-2}{2}}(u_m-y_1)_+^{\frac{H-2}{2}}du_m\right) \\
&= b(m)\sum_{t_j\in\{t,s\}}\int_0^{t_1}...\int_0^{t_m} du_1....du_m \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} (u_1-y_1)_+^{\frac{H-2}{2}}(u_m-y_1)_+^{\frac{H-2}{2}}dy_1 \int_{\mathbb{R}} (u_1-y_2)_+^{\frac{H-2}{2}}(u_2-y_2)_+^{\frac{H-2}{2}}dy_2 \\
&\quad .... \int_{\mathbb{R}} (u_{m-1}-y_m)_+^{\frac{H-2}{2}}(u_m-y_m)_+^{\frac{H-2}{2}}dy_m.
\end{aligned}$$

Et comme pour tout $a > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} (u-y)_+^{a-1}(v-y)_+^{a-1}dy = \beta(a, 2a-1)\left|u-v\right|^{2a-1},$$

alors

$$
\begin{aligned}
c_m\left(g_{s,t}\right) &= b\left(m\right)\beta\left(\frac{H}{2}, H-1\right)^m \sum_{t_j\in\{t,s\}} \int_0^{t_1} .... \int_0^{t_m} du_1...du_m \\
& \quad \left|u_1-u_2\right|^{2H'-2}\left|u_2-u_3\right|^{2H'-2} .... \left|u_m-u_1\right|^{2H'-2} \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Les deux formules (2.10) et (2.11) résultent du fait que $a'\left(m\right) = b'\left(m\right)$. ■

Dans la suite, on considère la représentation

$$
Z_t =^{(d)} d\left(H\right) \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_2\right) du\right] dB_{y_1} dB_{y_2}.
$$

On termine cette section en montrant que le processus de *Rosenblatt*, peut être approché par une suite de semimartingales.

Il apparait que, si on échange "formellement" l'intégrale stochastique et l'intégrale de Lebesgue dans (2.5), alors

$$
Z_t^{"} =^{"} d\left(H\right) \int_0^t \left(\int_0^u \int_0^u \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}\left(u, y_2\right) dB_{y_1} dB_{y_2}\right) du
$$

Notons que cette expression n'a pas de sens. En effet ; parce que le noyau $\frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}\left(u, y_1\right) \frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}\left(u, y\right.$ n'appartient pas à $L^2\left(\left[0, T\right]^2\right)$ puisque la dérivé partielle de $\frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}\left(u, y_1\right)$ se comporte sur la diagonale comme $\left(u - y_1\right)^{\frac{H-2}{2}}$.

Pour cela, on procède de la manière suivante : on pose pout tout $\varepsilon > 0$:

$$
\begin{aligned}
Z_t^{\varepsilon} &= d\left(H\right) \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}\left(u+\varepsilon, y_1\right) \frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}\left(u+\varepsilon, y_2\right) du\right] dB_{y_1} dB_{y_2} \\
&= d\left(H\right) \int_0^t \left(\int_0^u \int_0^u \frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}\left(u+\varepsilon, y_1\right) \frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}\left(u+\varepsilon, y_2\right) dB_{y_1} dB_{y_2}\right) du \\
: &= d\left(H\right) \int_0^t A_{\varepsilon}\left(u\right) du,
\end{aligned}
$$

où

$$A_{\varepsilon}(u) = \int_0^u \int_0^u \frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}(u+\varepsilon, y_1) \frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}(u+\varepsilon, y_2)\, dB_{y_1} dB_{y_2}.$$

Comme $A_{\varepsilon}(t) \in L^2\left([0,T]^2 \times \Omega\right)$ pour chaque $\varepsilon > 0$ et comme le processus $(A_{\varepsilon}(t))$ est adapté, alors Z_t^{ε} est une semimartingale.

Proposition 2.2 *Pour chaque* $t \in [0,T]$, *on a :*

$$Z_t^{\varepsilon} \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} Z_t.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} Z_t^{\varepsilon} - Z_t &= d(H) \int_0^t \int_0^t dB_{y_1} dB_{y_2} \\ & \left(\int_{y_1 \vee y_2}^t \left(\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\varepsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\varepsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) \right) du \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|Z_t^{\varepsilon} - Z_t\right|^2\right] &= d(H)^2 \int_0^t \int_0^t dy_1 dy_2 \int_{y_1 \vee y_2}^t \int_{y_1 \vee y_2}^t dv du \\ & \left(\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\varepsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\varepsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) \right) \\ & \left(\frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v+\varepsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v+\varepsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) \right) \end{aligned}$$

Il apparait clairement que la quantité

$$\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\varepsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\varepsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2)$$

converge vers zéro quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ pour touts u, y_1, y_2 et d'après le théorème de convergence dominée on a le résultat. ■

2.2 L'intégrale de Wiener

La structure de covariance du processus de *Rosenblatt* permet de construire des intégrales de Wiener par rapport à ce processus ; on se réfère à la définition de l'intégrale de Wiener par rapport au processus d'Hermite général (Majima et Tudor [15]) et dans un contexte plus général (Kruk, Russo et Tudor [11]).

Rappelons les points principaux de ce contexte.

On note par

$$Z_t = \int_0^T \int_0^T I\left(1_{[0,t]}\right)(y_1, y_2)\, dB_{y_1} dB_{y_2}$$

où l'opérateur I est défini sur l'ensemble de fonctions $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans l'ensemble de fonctions $g : [0,T]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et est donné par :

$$I(f)(y_1, y_2) = d(H) \int_{y_1 \vee y_2}^T f(u) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2)\, du. \tag{2.12}$$

Définition 2.1 *Soit f un élément de l'ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions étagées sur $[0,T]$ de la forme*

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}, \qquad t_i \in [0,T].$$

On définit l'intégrale de Wiener par rapport à (Z_t)par :

$$\int_0^T f(u)\, dZ_u := \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\right).$$

Notons que

$$\int_0^T f(u)\, dZ_u = \int_0^T \int_0^T I(f)(y_1, y_2)\, dB_{y_1} dB_{y_2}. \tag{2.13}$$

Pour la proposition suivante, on pose

$$\mathcal{H} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \int_0^T \int_0^T I(f)(y_1, y_2)\, dB_{y_1} dB_{y_2} < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$||f||_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^T \int_0^T I(f)(y_1, y_2)^2 \, dy_1 dy_2$$

Proposition 2.3 *On a pour tout $f \in \mathcal{H}$*

$$||f||_{\mathcal{H}}^2 = H(2H-1) \int_0^T \int_0^T f(u) f(v) |u-v|^{2H-2} \, dv du.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
||f||_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^T \int_0^T I(f)(y_1, y_2)^2 \, dy_1 dy_2 \\
&= d(H)^2 \int_0^T \int_0^T \left(\int_{y_1 \vee y_2}^T f(u) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) \, du \right)^2 dy_1 dy_2 \\
&= d(H)^2 \int_0^T \int_0^T dy_2 dy_2 \int_{y_1 \vee y_2}^T \int_{y_1 \vee y_2}^T dv du \\
&\quad f(u) f(v) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) \\
&= d(H)^2 \int_0^T \int_0^T f(u) f(v) \left(\int_0^{u \wedge v} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_1) \right)^2 dv du \\
&= H(2H-1) \int_0^T \int_0^T f(u) f(v) |u-v|^{2H-2} \, dv du.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.4 *Soit $f \in \mathcal{E}$ l'application*

$$f \longrightarrow \int_0^T f(u) \, dZ_u$$

définie une isométrie entre $\mathcal{E}$ et $L^2(\Omega)$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(I\left(f\right)^2\right) &= \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i a_j \mathbb{E}\left(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\right)\left(Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j}\right) \\
&= \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i a_j \left(R\left(t_{i+1}, t_{j+1}\right) - R\left(t_{i+1}, t_i\right) - R\left(t_i, t_{j+1}\right) R\left(t_i, t_j\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i a_j H\left(2H-1\right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|u-v\right|^{2H-2} dudv \\
&= \sum_{i,j=0}^{n-1} a_i a_j \left\langle \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}, \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}]} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left|\left|f\right|\right|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.1 *i) Comme l'ensemble de fonctions étagée $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{H}$ (voir* [25]*) ; alors on a l'application $f \longrightarrow \int_0^T f\left(u\right) dZ_u$ se prolonge par continuité à une isométrie entre $\mathcal{H}$ et $L^2\left(\Omega\right)$; on appelle cette prolongation l'intégrale de Wiener de $f \in \mathcal{H}$ par rapport à Z*

ii) D'après Pipiras et Taqqu (voir [25]*) :*

- L'espace $\mathcal{H}$ ne contient pas seulement des fonctions mais ses éléments pourraient être également des distributions. Par conséquent il convient de savoir que les sous-espaces de $\mathcal{H}$ sont des espaces des fonctions. L'un des sous-espaces est $\left|\mathcal{H}\right|$ où

$$\left|\mathcal{H}\right| = \left\{f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; \int_0^T \int_0^T \left|f\left(u\right)\right| \left|f\left(v\right)\right| \left|u-v\right|^{2H-2} dudv < \infty\right\}. \quad (2.14)$$

- L'espace $\left|\mathcal{H}\right|$ (et aussi $\mathcal{H}$) muni de la norme $\left|\left|.\right|\right|_{\mathcal{H}}$ n'est pas un espace complet mais c'est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\left|\left|f\right|\right|_{\left|\mathcal{H}\right|}^2 = H\left(2H-1\right) \int_0^T \int_0^T f\left(u\right) f\left(v\right) \left|u-v\right|^{2H-2} dvdu. \quad (2.15)$$

Lemme 2.2 *Soient $H > \frac{1}{2}$ et $\varphi \in L^{\frac{1}{H}}([0,T])$. Alors*

$$\exists b_H > 0 \quad \textit{tel que} \quad \|\varphi\|_{|\mathcal{H}|} \le b_H \|\varphi\|_{L^{\frac{1}{H}}[0,T]}.$$

Il résulte alors que

$$L^2([0,T]) \subset L^{\frac{1}{H}}([0,T]) \subset |\mathcal{H}| \subset \mathcal{H}$$

Preuve. 1) D'après l'inégalité de Hölder avec $q = \frac{1}{H}$ et d'après la formule (2.15), on a :

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_{|\mathcal{H}|} &\le H(2H-1)\left(\left(\int_0^T \varphi(u)\,du\right)^{\frac{1}{H}}\right)^H \left(\int_0^T \left(\int_0^T \varphi(v)\,|u-v|^{2H-2}\right)^{\frac{1}{1-H}} dv\right)^{1-H} \\
&\le H(2H-1)\left(\left(\int_0^T \varphi(u)\,du\right)^{\frac{1}{H}}\right)^H \left(\int_0^T \left(\boldsymbol{I}^{2H-1}_{0+}\varphi(u)\right)^{\frac{1}{1-H}} du\right)^{1-H}.
\end{aligned}$$

il suffit d'appliquer l'inégalité de Hardy-Littlewood (cf. [6])

$$\left\|\boldsymbol{I}^{\alpha}_{0+} f\right\|_{L^q(0,\infty)} \le c_{\alpha,q} \|f\|_{L^p(0,\infty)}.$$

avec $\alpha = 2H-1, q = \frac{1}{1-H}$ et $p = \frac{1}{H}$, d'où le résultat.

2) Notons que l'inclusion $L^2([0,T]) \subset |\mathcal{H}|$ s'obtient directement. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^T f(u) f(v) |u-v|^{2H-2}\,dvdu &\le \int_0^T \int_0^T f(u)^2 |u-v|^{2H-2}\,dvdu \\
&\le \frac{T^{2H-1}}{H-\frac{1}{2}} \int_0^T f(u)^2\,du.
\end{aligned}$$

■

Les intégrales de Wiener $\int_0^T f(u)\,dZ_u$ et $\int_0^T g(u)\,dZ_u$ ne sont pas nécessairement indépendantes lorsque les fonctions f et g sont orthogonales dans $\mathcal{H}$. La caractérisation de leur indépendance est donnée par le résultat suivant.

Proposition 2.5 *Soit $f, g \in \mathcal{H}$. Alors $\int_0^T f(u)\,dZ_u$ et $\int_0^T g(u)\,dZ_u$ sont indépendantes* *si et seulement si*

$$\left\langle f(.)\frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}(.,y_1), g(.)\frac{\partial K^{\grave{H}}}{\partial u}(.,y_2)\right\rangle_{\grave{\mathcal{H}}} = 0 \qquad \textit{presque partout (p.p)}\ \forall (y_1,y_2) \in [0,T]^2 \tag{2.16}$$

où $\grave{\mathcal{H}}$ *est l'espace dual de* $\mathcal{H}$ *correspondant au paramètre de Hurst* $\grave{H}$ *.*

Preuve. Soient deux intégrales multiple de Wiener-Itô par rapport au processus de Wiener standard $I_n(f)$ et $I_m(g)$ où f, g sont symétriques. Alors on a d'après le résultat de Üstunel-Zakai [1], $f \in L^2[0,T]^n$ et $g \in L^2[0,T]^m$ sont indépendantes si et seulement si $f \otimes_1 g = 0$ $p.p$ dans $[0,T]^{m+n-2}$,

où

$$(f \otimes_1 g)(t_1, ..., t_{n-1}, s_1, ..., s_{m-1}) = \int_0^T f(t_1, ..., t_{n-1}, t)\, g(s_1, ..., s_{n-1}, t)\, dt.$$

Il suffit d'appliquer ce résultat [1] aux fonctions F et G :

$$\boldsymbol{F}(y_1,y_2) = 1_{[0,t]^2}(y_1,y_2)\int_{y_1\vee y_2}^T f(u)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2)\,du.$$

et

$$\boldsymbol{G}(y_1,y_2) = 1_{[0,t]^2}(y_1,y_2)\int_{y_1\vee y_2}^T g(u)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2)\,du.$$

puisque

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\otimes_1\boldsymbol{G}(y_1,y_2) &= \int_0^T ds \\
&\quad \times \int_{y_1\vee s}^T f(u)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,s)\,du \\
&\quad \times \int_{y_1\vee s}^T g(v)\frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,y_2)\frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,s)\,dv \\
&= c(H)\int_0^T\int_0^T f(u)\,g(v)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,y_2)\,|u-v|^{2H'-2}\,dudv
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.1 *Si $f \otimes g = 0$ p.p dans $[0,T]^2$ alors les variables aléatoires $\int_0^T f(u)\,dZ_u$ et $\int_0^T g(u)\,dZ_u$ sont indépendantes.*

2.3 Processus standard de Rosenblatt-Ornstein-Uhlenbe

La construction de l'intégrale de Wiener par rapport au processus de *Rosenblatt* permet de considérer des processus d'Ornstein-Uhlenbeck associés. Pour cela on considère l'équation stochastique de type de Langevin dans le cas de mouvement brownien fractionnaire, à s'avoir :

$$X_t = \xi - \lambda \int_0^t X_s ds + \sigma B_t^H, \qquad t \geq 0. \tag{2.17}$$

où $\sigma, \lambda > 0$, la condition initiale ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$−mesurable et $\left(B_t^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Proposition 2.6 *Soient $\left(B_t^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$ le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ et ξ est $\mathcal{F}_0$−mesurable. Soit $-\infty \leq a \leq +\infty$, $\lambda, \sigma > 0$. Alors pour presque tout $w \in \Omega$, on a :*

i) Pout tout $t > a$,

$$\int_a^t e^{\lambda u} dB_u^H(w)$$

au sens de Riemann-Stieltjes et est égale a :

$$e^{\lambda t} B_t^H(w) - e^{\lambda a} B_a^H(w) - \lambda \int_a^t B_u^H(w)\, e^{\lambda u} du.$$

ii) La fonction

$$\int_a^t e^{\lambda u} dB_u^H(w) \qquad (t > a)$$

est continue.

iii) L'unique solution y de l'équation

$$y(t) = \xi(w) - \lambda \int_0^t y(s)\,ds + \sigma B_t^H(w), \qquad t \geq 0 \tag{2.18}$$

est donnée par

$$y(t) = e^{-\lambda t}\left(\xi(w) + \sigma \int_0^t e^{\lambda u} dB_u^H(w)\right), \qquad t \geq 0. \tag{2.19}$$

En particulier si $\xi = \sigma \int_{-\infty}^0 e^{\lambda u} dB_u^H(w)$, alors

$$y(t) = \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} dB_u^H(w).$$

Preuve. i) Il est facile de vérifier que,

$$\tilde{B}_s^H := \mathbf{1}_{\{s<0\}}(-s)^{2H} B_{\frac{1}{s}}^H + \mathbf{1}_{\{s>0\}}(s)^{2H} B_{\frac{1}{s}}^H, \qquad s \in \mathbb{R},$$

est aussi un mouvement brownien fractionnaire. En effet ; d´après le théorème de Kolmogorov-Čentsov (voir par exemple théorème 2.2.8 de Karatazas et Shreve [12]) on voit qu'il existe un ensemble de mesure nulle $N \subset \Omega$, tel que pour tout $w \in \Omega \setminus N$, $B_s^H(w)$ et $B_s^H(w)$ sont continues et pour tout $\beta < H$,

$$\lim_{s\to 0} \frac{\tilde{B}_s^H(w)}{|s|^\beta} = 0.$$

ce qui implique que pour tout $\gamma > H$, on a :

$$\lim_{|s|\to 0} \frac{B_s^H(w)}{|s|^\gamma} = 0.$$

et pour tout $t > a$,

$$\int_a^t B_u^H(w)\, e^{\lambda u} du.$$

existe au sens de Riemann, et d´après le théorème 2.21 de Wheeden et Zygmund dans [23], on a l´intégrale de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^t e^{\lambda u} dB_u^H(w).$$

existe également et est égale à

$$e^{\lambda t} B_t^H(w) - e^{\lambda a} B_a^H(w) - \lambda \int_a^t B_u^H(w)\, e^{\lambda u} du.$$

ce qui prouve i).

ii) D´après i) et la continuité de la fonction

$$e^{\lambda t} B_t^H(w) - \lambda \int_a^t B_u^H(w)\, e^{\lambda u} du, \qquad t > a,$$

on a ii).

iii) Notons que f est une solution de (2.18) si et seulement si la fonction

$$z(t) = \int_0^t y(s)\, ds, \quad t \geq 0,$$

résout l´équation différentielle suivante :

$$\acute{z}(t) = -\lambda z(t) + \xi(w) + \sigma B_t^H(w), \qquad z(0) = 0. \tag{2.20}$$

L'unique solution de l´équation (2.20) est :

$$z(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda u} \left(\xi(w) + \sigma B_u^H(w)\right) du, \qquad t \geq 0,$$

qui signifie que l'unique solution de (2.18) est donnée par :

$$-\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda u}\left(\xi\left(w\right)+\sigma B_u^H\left(w\right)\right)du+\xi\left(w\right)+\sigma B_t^H\left(w\right),\quad t\geq 0.$$

et on conclut en utilisant i). ■

Corollaire 2.2 *Partant de la proposition* 2.6 *on a l'équation :*

$$X_t=\xi-\lambda\int_0^t X_s ds+\sigma Z_t,\qquad t\geq 0. \tag{2.21}$$

où $\sigma,\lambda>0$ *et la condition initiale* ξ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0-$*mesurable, admet une solution unique*

$$X_t^{\xi}=e^{-\lambda t}\left(\xi+\sigma\int_0^t e^{\lambda u}dZ_u\right),\quad t\geq 0.$$

où l'intégrale stochastique ci-dessus est prise au sens de Wiener. Si de plus $\xi=\sigma\int_{-\infty}^0 e^{\lambda u}dZ_u$, *la solution de* (2.21) *est donnée par :*

$$X\left(t\right)=\sigma\int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-u)}dZ_u \tag{2.18}$$

On appelle cette solution ***processus standard de Rosenblatt-Ornstein-Uhlenbeck.***

Chapitre 3

Processus de Rosenblatt infini-dimensionnel et équation d'évolution stochastique

Dans ce chapitre on définit les processus de Rosenblatt à valeurs dans un espace de Hilbert et on considère des équations stochastiques d'évolution par rapport à ces processus.

3.1 Processus de Rosenblatt à infini-dimensionnel

On considère U un espace de Hilbert réel et séparable ; et Q un opérateur nucléaire autoadjoint positif dans U. Il existe alors une suite $0 < \lambda_n \searrow 0$ des valeurs propres de Q tels que $\sum_{n\geq 1} \lambda_n < 0$. D'ailleurs les vecteurs propres correspondants forment une base orthonormée dans U.

Définition 3.1 *Un processus $\left(B_t^H\right)_{0\leq t\leq T}$ à valeur dans U est un mouvement brownien fractionnaire infini-dimensionnel de covariance Q (on écrit $Q-$mbf) si $\left(B_t^H\right)_{0\leq t\leq T}$ est un* *processus gaussien centré de covariance*

$$C_{B_t^H}(t,s) = R(t,s)\,Q.$$

Proposition 3.1 $\left(B_t^H\right)_{0\leq t\leq T}$ *est $Q-$mbf si et seulement s'il existe une suite* $\left(\beta_j^H\right)_{j\geq 1}$ *de mouvements browniens fractionnaires réel, indépendants tels que :*

$$B_t^H = \sum_{j\geq 1} \sqrt{\lambda_j}\beta_j^H(t)\,e_j,$$

où cette série converge dans $L^2(\Omega, U)$.

Preuve. Voir [30] pour la démonstration de $\sum_{j\geq 1}\sqrt{\lambda_j}\beta_j^H(t)\,e_j$ est un mouvement brownien fractionnaire dans le sens de définition 3.1. Réciproquement, soit $\left(B_t^H\right)$ un processus gaussien centré dans U, de covariance $R(t,s)\,Q$.

On pose $\beta_j^H = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\left\langle B_t^H, e_j\right\rangle_U$, alors $\left(\beta_j^H\right)$est un processus gaussien centré puisque

$$\sum_{l=1}^{n}\alpha_l\beta_j^H(t_l) = \sum_{l=1}^{n}\left\langle B_{t_l}^H, \frac{\alpha_l}{\sqrt{\lambda_j}}e_j\right\rangle$$

pour tout $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ et $t_1,....,t_n\in T$.

De plus, pour tout $i,j\geq 1, s,t\in T$ on a

$$\mathbb{E}\left(\beta_i^H(s)\,\beta_j^H(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\mathbb{E}\left(\left\langle B_s^H, e_i\right\rangle_U\left\langle B_t^H, e_j\right\rangle_U\right) = R(t,s)\,\delta_{ij}$$

ce qui implique que

$$\begin{cases}\mathbb{E}\left(\beta_i^H(s)\,\beta_i^H(t)\right) = R(t,s) & \text{pour } i=j\\ \beta_i^H(s) \text{ et } \beta_j^H(t) \text{ sont non corrélés et indépendants} & \text{pour } i\neq j\end{cases}$$

Finalement on constate que la série $\sum_{j\geq 1}\sqrt{\lambda_j}\beta_j^H(t)\,e_j$ converge dans $L^2(\Omega;U)$. ■

Définition 3.2 *Le processus de Rosenblatt infini-dimensionnel dans U (ou $Q-$processus* *de Rosenblatt) est définit par*

$$Z_t = \sum_{v \geq 0} \sqrt{\lambda_n} e_n z_j(t)\,; \tag{3.1}$$

où $(z_j)_{j\geq 0}$ *est une famille des processus de Rosenblatt réels et indépendants.*

Remarque 3.1 *i) Noter que la série* (3.1) *converge dans* $L^2(\Omega)$ *pour chaque* $t \in [0,T]$. *En effet,*

$$\mathbb{E}\,|Z_t|^2 = \sum_{j\geq 1} \lambda_j \mathbf{E}\left(z_j^2\right) = t^{2H} \sum_{j\geq 1} \lambda_j < \infty.$$

ii) (voir [4]*) Noter aussi que* (Z_t) *admet comme fonction de covariance* $R(t,s)$ *au sens que pour tout* $u, v \in U$ *et pour tout* $s, t \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}\,\langle Z_t, u\rangle_{\boldsymbol{U}} \langle Z_s, v\rangle_{\boldsymbol{U}} = R(t,s)\,\langle \boldsymbol{Q}u, v\rangle_{\boldsymbol{U}}.$$

Remarque 3.2 *Dans certaines situations, il n'est pas commode de présenter* Q *en tant qu'un opérateur nucléaire. En effet si on considère l'opérateur identité* $Q = Id$ *(i.e* $\lambda_n = 1$ *pour tout* n*). Ainsi si* $\sum_n \lambda_n = \infty$ *on considère un autre espace de Hilbert réel séparable* $U_1 \supset U$ *tel que l'inclusion* $U \subset U_1$ *est nucléaire. Alors le processus de Rosenblatt cylindrique*

$$Z_t = \sum_j z_j(t)\, e_j \tag{3.2}$$

est un processus stochastique bien définit dans U_1.

3.1.1 Intégrale de Wiener

Selon le cas unidimensionnel, on peut présenter des intégrales de Wiener par rapport au processus (Z_t) à valeur dans un espace de Hilbert. Soient V un autre espace de Hilbert et $(\Phi_s)_{s\in[0,T]}$ un processus stochastique à valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires $\mathcal{L}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$. On pose pour chaque $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \Phi_s dZ_s = \sum_{j\geq 1} \int_0^t \Phi_s e_j dz_j(s);$$

où $\int_0^t \Phi_s e_j dZ_j(s)$ est une variable aléatoire à valeurs dans V. On note que cette intégrale existe dans $L^2(\Omega, \boldsymbol{V})$ si :

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t \Phi_s dZ_s\right|_{\boldsymbol{V}}^2 = \sum_j \left|||\Phi e_j||_{\mathcal{H}}\right|_{\boldsymbol{V}}^2 < \infty.$$

Remarque 3.3 *Si la fonction Φ ne dépend pas du temps, alors on a*

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t \Phi dZ_s\right|_{\boldsymbol{V}}^2 = \sum_j |\Phi e_n|_{\boldsymbol{V}}^2 \,\mathbb{E}\left|\int_0^t dz_j(s)\right|^2 = t^{2H}\sum_j |\Phi e_n|_{\boldsymbol{V}}^2$$

et que l'intégrale $\int_0^t \Phi dZ_s$ existe si et seulement si la fonction Φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

3.2 Equation d'évolution stochastique

L'objet de cette partie est d'aborder les équations stochastiques d'évolution gouvernées par le processus de *Rosenblatt* infini-dimensionnel. Soit $A : Dom(\boldsymbol{A}) \subset V \longrightarrow V$ le générateur infinitésimal du semigroupe fortement continu $\left(e^{t\boldsymbol{A}}\right)_{t\in[0,T]}$ (C_0 − semigroupe). on étudie l'équation

$$dX_t = \boldsymbol{A}X_t dt + \Phi dZ_t$$

où $X_0 = x \in V$ et $\Phi \in L(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$. On considère que l'équation (23) admet une solution (quand elle existe) au sens mild définit par :

$$X_t = e^{\,t\boldsymbol{A}}x + \int_0^t e^{\,(t-s)\boldsymbol{A}}\Phi dZ_s. \tag{3.3}$$

Il n'est pas obligatoire de supposer que Φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (bien que l'intégrale $\int \Phi dZ$ existe si et seulement si Φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt) ; cette supposition est inutile, parce que sous des hypothèses appropriées sur A, l'intégrale $\int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\Phi dZ_t$ existera même lorsque Φ n'est pas un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution de (3.3) au sens mild.

Théorème 3.1 *(cf. [4]) Soit (Z_t) le processus de Rosenblatt cylindrique donné par* (3.2) *avec $H \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. Considérer $\Phi \in L(\mathbf{U}; \mathbf{V})$ et $A : Dom(\mathbf{A}) \subset V \longrightarrow V$ un opérateur autoadjoint sur l'espace de Hilbert V. On suppose que A est négatif; tel que le spectre de $A, \sigma(\mathbf{A}) \subset -]\infty, -l]$ avec $l > 0$, Alors il existe une solution au sens mild X de l'équation* (3.3) *si et seulement si l'opérateur $\Phi^* G_H(-\mathbf{A})\Phi$ est un opérateur à trace, où*

$$G_H(\lambda) = (\max(\lambda, 1))^{-2H}.$$

3.2.1 Exemple fondamental : le Laplacien sur le cercle

On suppose que $U = V = L^2(\mathbb{S}^1)$, où $\mathbb{S}^1$ dénote le cercle d'unité et $A = \Delta$ est le Laplacien Sur $\mathbb{S}^1$. Cela signifie que l'ensemble $(e_n, f_n)_{n\geq 1}$est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{S}^1, dx)$, où $e_n(x) = (2\pi)^{-1}\cos nx$ et $f_n(x) = (2\pi)^{-1}\sin nx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, dx étant la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi[$.

Corollaire 3.1 *Soit $A = \Delta$ et soit (Z_t) le Processus de Rosenblatt a infini-dimensionnel dans $L^2(\mathbb{S}^1)$ défini par :*

$$Z_t = \sum_n \sqrt{q_n} e_n z_n(t) + \sum_n \sqrt{q_n} f_n \tilde{z}_n(t)$$

où $\left(z_j, \widetilde{z}_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille des processus Réels et indépendants de Rosenblatt, et $(q_n)_n$ une série bornée des nombres réels non négatifs. Alors (3.3) *a une unique solution au* *sens mild telle que $X_t \in L^2(\Omega, \mathbf{V})$ si et seulement si*

$$\sum_n q_n n^{-4H} < \infty.$$

Chapitre 4

Calcul stochastique par rapport au processus de Rosenblatt

Dans ce chapitre on commence par développer une théorie d'intégration stochastique par rapport au processus de *Rosenblatt*. En général on ne peut pas appliquer la théorie d'Itô sur les processus qui ne sont pas des semimartingales, pour cela on a besoin des méthodes généralisées d'intégration stochastique par rapport à de tels processus. Essentiellement il y a deux types des méthodes généralisées : Le premier type est le calcul stochastique trajectoriel [9] (ou pathwise) ; le deuxième est le calcul de Malliavin et la théorie d'intégration de Skorohod [6].

4.1 Calcul Stochastique trajectoriel

Le calcul stochastique trajectoriel a été introduit par Russo et Vallois [9] , il est lié à la régularité des trajectoires et la structure de covariance de processus stochastique. Comme le processus de *Rosenblatt* est à variation quadratique nulle quand $H > \frac{1}{2}$, à trajectoires höldérienne continues d'indice $H - \varepsilon$, alors on peut appliquer ce calcul par rapport au processus de *Rosenblatt*.

On va maintenant introduire quelques définitions et notions de base du calcul stochastique trajectoriel.

Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu et $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus à trajectoires dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$,

$$\text{(i.e pour tout } a>0,\ \int_0^a |Y_t|\,dt<\infty \text{ p.s.)}$$

Soit $I^-(\varepsilon,Y,dX)$ (resp. $I^+(\varepsilon,Y,dX)$, $I^0(\varepsilon,Y,dX)$ et $\boldsymbol{C}_\varepsilon(X,Y)$) le $\varepsilon-$intégrale forward (resp. $\varepsilon-$intégrale backward, $\varepsilon-$intégrale symétrique et $\varepsilon-$covariation) définies par :

$$I^-(\varepsilon,Y,dX)=\int_0^t Y_s\frac{X_{s+\varepsilon}-X_s}{\varepsilon}ds,\qquad I^+(\varepsilon,Y,dX)=\int_0^t Y_s\frac{X_s-X_{(s-\varepsilon)_+}}{\varepsilon}ds,$$

$$I^0(\varepsilon,Y,dX)=\int_0^t Y_s\frac{X_{s+\varepsilon}-X_{(s-\varepsilon)_+}}{2\varepsilon}ds$$

et

$$\boldsymbol{C}_\varepsilon(X,Y)(t)=\int_0^t\frac{\left(X_{s+\varepsilon}-X_{(s-\varepsilon)_+}\right)\left(Y_{s+\varepsilon}-Y_{(s-\varepsilon)_+}\right)}{\varepsilon}ds.$$

Il est remarquable que ces quatre intégrales sont continues.

Notation : La convergence uniformément en probabilité, sur un compact, sera notée ucp

Définition 4.1 *i) Une famille de processus* $\left(X_t^{(\epsilon)}\right)_{t\in[0,T]}$ *est dite convergente vers* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *au sens ucp, si*

$$\lim_{\epsilon\to 0}P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{(\epsilon)}-X_t\right|\right)=0.$$

ii) Si les limites correspondantes existent dans le sens ucp, on définit les intégrales farward et backward et les covariations par les formules suivantes :

a) ***Intégrale Forward :*** $\int_0^t Y d^-X=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+} I^-(\varepsilon,Y,dX)$.

b) ***Intégrale backward :*** $\int_0^t Y d^+X=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+} I^+(\varepsilon,Y,dX)$.

*c) **Intégrale symmétrique :*** $\int_0^t Y d^0 X = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} I^0(\varepsilon, Y, dX)$.

*d) **covariation :*** $[X,Y]_t = ucp - \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \boldsymbol{C}_\varepsilon(X,Y)_t$, *lorsque* $X = Y$ *on pose* $[X] = [X,X]$.

Définition 4.2 *i) Si* $[X]$ *existe,* X *est dit processus à variation quadratique finie, et* $[X]$ *est appelé la variation quadratique de* X.

ii) Si $[X] = 0$, X *est appelé processus à variation quadratique nulle.*

iii) Un vecteur $(X^1, ..., X^n)$ *de processus continus est dit a covariations mutuelles si* $[X^i, X^j]$ *existe pour tout* $1 \leq i \leq j \leq n$.

Remarque 4.1 *Si* $(X^1, ..., X^n)$ *a covariations mutuelles, alors*

$$\left[X^i + X^j, X^i + X^j\right] = \left[X^i, X^i\right] + 2\left[X^i, X^j\right] + \left[X^j, X^j\right]$$

Proposition 4.1 *(cf. [9].) Soit* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *un processus continu et* $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ *un processus à trajectoires dans* $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. *Alors*

1) $[X,Y]_t = \int_0^t Y d^+ X - \int_0^t Y d^- X$.

2) $\int_0^t Y d^0 X = \frac{1}{2}\left(\int_0^t Y d^+ X + \int_0^t Y d^- X\right)$.

*3) **Intégration par partie :** Si* Y *est continu, alors*

$$\begin{aligned} X_t Y_t &= X_0 Y_0 + \int_0^t X d^- Y + \int_0^t Y d^+ X \\ &= X_0 Y_0 + \int_0^t X d^- Y + \int_0^t Y d^- X + [X,Y]_t. \end{aligned}$$

*4) **inégalité de Kunita-Watanabe** : Si* X *et* Y *sont des processus à variation quadratique finie, alors ;*

$$|[X,Y]| \leq \{[X].[Y]\}^{\frac{1}{2}}.$$

5) Si X *est un processus à variation quadratique finie et* Y *est un processus à variation quadratique nulle alors* (X,Y) *a covariations mutuelles et* $[X,Y] = 0$.

6) Soit X un processus à variation bornée et Y un processus à trajectoires bornées localement, alors ;

a) $\int_0^t Yd^+X = \int_0^t Yd^-X = \int_0^t YdX$, *où* $\int_0^t YdX$ *est l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes.*

b) $[X, Y] = 0.$

En particulier si X un processus à variation borné et continu, alors X est un processus à variation quadratique nulle.

7) Soit X un processus absolument continu et Y un processus à trajectoires bornées localement. Alors on a :

$$\int_0^t Yd^+X = \int_0^t Yd^-X = \int_0^t Y\dot{X}ds.$$

Proposition 4.2 *Tout processus de Rosenblatt est à variation quadratique nulle*

Preuve. soit $Z = (Z_t)_{t\in[0,t]}$ un tel processus. Alors on a :

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{C}_{\varepsilon}(Z, Z)_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{1}{\varepsilon}(Z_{s+\varepsilon} - Z_s)^2 ds\right] = t\varepsilon^{2H-1} \longrightarrow_{\varepsilon\longrightarrow 0} 0.$$

qui signifie que $(Z_t)_{t\in[0,t]}$ est à variation quadratique nulle. ∎

4.1.1 La formule d'Itô pour les processus à variation quadratique finie

Proposition 4.3 *(cf.* [9] *.) Soit (X^1, X^2) un vecteur de processus stochastique et $f, g \in \boldsymbol{C}^1(\mathbb{R})$. Alors $[f(X^1), g(X^2)]$ existe et il est donné par :*

$$[f(X^1), g(X^2)]_t = \int_0^t \acute{f}(X_s^1)\, g(X_s^2)\, d\left[X^1, X^2\right]_s$$

Proposition 4.4 *On suppose que $[X, X]$ existe. Soit $f \in \boldsymbol{C}^2(\mathbb{R})$, alors on a*

$$\int_0^{\cdot} f'(X)\, d^-X \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\cdot} f'(X)\, d^+X \tag{4.1}$$

existent. De plus on a :

a) $f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X)\, d^{\mp}X \pm \int_0^t f''(X_s)\, d\,[X,X]_s$,

b) $f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X)\, d^{\mp}X \pm \frac{1}{2}\left[f'(X), X\right]_t$,

c) $f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X)\, d^0X.$

Preuve. c) Provient de a) et une combinaisons des intégrales forward et backward.

b) D'après a), la proposition 4.3 implique que

$$\left[f'(X), X\right]_t = \int_0^t f''(X)\, d[X,X].$$

si on remplace f par f' et $g = Id$.

La démonstration de a) ce conduit comme celle de la proposition 4.1, à ceci prés on utilise le développement de Taylor d'ordre deux au lieu de l'ordre 1. ■

Corollaire 4.1 *i) Comme le processus de Rosenblatt* $Z = (Z_t)_{t\in[0,t]}$ *est un processus à variation quadratique nulle, alors d'après la proposition* 4.3 *on a :*

Pour chaque $f \in C^2(\mathbb{R})$, *les intégrales*

$$\int_0^{\cdot} f'(Z)\, d^-Z\ , \quad \int_0^{\cdot} f'(Z)\, d^+Z, \quad \int_0^{\cdot} f'(Z)\, d^+Z.$$

existent, et sont égales.

ii) La formule d'Itô par rapport au processus de Rosenblatt est donnée par

$$f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z)\, d^0Z. \tag{4.2}$$

4.2 Intégrale de Skorohod par rapport au processus de Rosenblatt

Dans cette partie on définit l'intégrale de Skorohod (ou l'intégrale de divergence) par rapport à $(Z_t)_{t\in[0,T]}$. Pour cela on a besoin du calcul de Mallivian par rapport au processus de Wiener $(W_t)_{t\in[0,T]}$. Rappelons le cadre général et les principaux outils.

On considère $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un processus de Wiener standard sur l'espace de Wiener canonique $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions régulières de W de la forme

$$F = f\left(W_{t_1}, ..., W_{t_n}\right), \qquad t_1, ..., t_n \in [0,T] \tag{4.4}$$

où $f \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Si F est de la forme (4.4), sa dérivée au sens de Malliavin est donnée par

$$D_t F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(W_{t_1}, ..., W_{t_n}\right) 1_{[0,t_i]}(t), \qquad t \in [0,T].$$

L'opérateur D est un opérateur fermé non borné qui s'étend à l'adhérence de S (notée $\mathbb{D}^{k,p}$, $k \geq 1$ entier, $p \geq 2$) par rapport à la norme

$$||F||_{k,p}^{p} = \mathbb{E}\,|F|^p + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}\,\left|\left|D^{(j)}F\right|\right|_{\boldsymbol{L}^2([0,T]^j)}^{p}, \qquad F \in \mathcal{S}, k \geq 1, p \geq 2$$

où la $j^{ém\acute{e}}$ dérivée $D^{(j)}$ étant définie itérativement.

La dérivée de Malliavin D admet comme adjoint, l'intégrale de Skorohod δ. Plus précisément, l'opérateur δ est défini sur le domaine

$$Dom(\delta) = \left\{u \in \boldsymbol{L}^2([0,T] \times \Omega) \,/\, \left|\mathbb{E}\int_0^t u_s D_s F ds\right| \leq C\,||F||_2\right\}$$

D et δ à vérifier la relation de dualité

$$\mathbb{E}\left(F\delta(u)\right) = \mathbb{E}\int_0^t D_s F u_s ds, \qquad F \in \mathcal{S}, u \in Dom(\delta). \tag{4.5}$$

On pose $\mathbb{L}^{k,p} = L^p\left([0,T]\,;\mathbb{D}^{k,p}\right)$. Notons que $\mathbb{L}^{k,p} \subset Dom(\delta)$ et $\delta(u) = \int_0^t u_s \delta W_s$.

On a besoin de la formule d'intégration par partie à savoir :

$$F\delta(u) = \delta(Fu) + \int_0^T D_s F u_s \tag{4.6}$$

si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et $u \in L^{1,2}$.

On mentionne aussi que l'intégrale de Skorohod par rapport au mouvement brownien fractionnaire $\left(B_t^H\right)$ de paramètre de Hurst $H > \frac{1}{2}$ est définit par un opérateur de transfert

$$\int_0^T g_s dB_s^H = \int_0^T \int_s^T g_r \frac{\partial K^H}{\partial r}(r,s)\, dr dW_s \tag{4.7}$$

où le coté droite de l'intégrale ci-dessus est une intégrale de Skorohod par rapport à W. de plus g est une intégrale de Skorohod par rapport à $\left(B_t^H\right)$ si la quantité $\int_s^T g_r \frac{\partial K^H}{\partial r}(r,s)\, dr$ est une intégrale de Skorohod par rapport à W.

Définition 4.3 *Soit $(g_n)_{n\in[0,T]}$ un processus stochastique à carré intégrable ; d'après* (2.14) *et* (4.7)*on définit l'intégrale de Skorohod de (g_n) par rapport à (Z_t) par :*

$$\begin{aligned} & \int_0^T g_s dZ_s \\ = & \int_0^T \int_0^T I(g)(y_1,y_2)\, dB_{y_1} dB_{y_2} \\ = & \int_0^T \int_0^T \left(\int_{y_1\vee y_2}^T g(u) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2)\, du \right) dB_{y_1} dB_{y_2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

On dit que le processus g est intégrable au sens de Skorohod par rapport à (Z_t) si le processus $I_g \in Dom\ \delta^{(2)}$, où $\delta^{(2)}$ est l'intégrale double de Skorohod par rapport au mouvement brownien $\left(B_t^H\right)$. (Voir [5] *pour l'étude des intégrales de skorohod double et multiple).*

Le lemme suivant donne la condition qui assure l'intégrabilité au sens de Skorohod.

Lemme 4.1 *Soit $g \in L^2(\Omega;\mathcal{H})$ tel que $g \in \mathbb{L}^{2,2}$ et*

$$\mathbb{E}\int_0^T \int_0^T \|D_{x_1,x_2} g\|_{\mathcal{H}}^2\, dx_1 dx_2 < \infty. \tag{4.9}$$

Alors g est intégrable au sens de Skorohod par rapport à (Z_t)

et

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T g_s\delta Z_s\right|^2 \leq cst.\left[\mathbb{E}\left|\left|g\right|\right|_{\mathcal{H}}^2 + \mathbb{E}\int_0^T\int_0^T \left|\left|D_{x_1,x_2}g\right|\right|_{\mathcal{H}}^2 dx_1dx_2\right] \tag{4.10}$$

Preuve. On emploie l'inégalité de Meyer pour l'intégrale double de Skorohod (voir [5], page. 320) et on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\int_0^T g_s\delta Z(s)\right| &\leq cst.\left[\mathbb{E}\int_0^T\int_0^T I(g)(y_1,y_2)^2 dy_1dy_2\right.\\
&\quad\left.+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T \left(D_{x_1,x_2}I(g)(y_1,y_2)\right)^2 dx_1dx_2dy_1dy_2\right]\\
&= cst.\left[\mathbb{E}H(2H-1)\int_0^T\int_0^T g(u)g(v)\left|u-v\right|^{2H-2}dudv\right.\\
&\quad\left.+\int_0^T\int_0^T dx_1dx_2\left(\int_0^T\int_0^T D_{x_1,x_2}g(u)D_{x_1,x_2}g(v)\left|u-v\right|^{2H-2}dudv\right)\right]\\
&= cst.\left[\mathbb{E}\left|\left|g\right|\right|_{\mathcal{H}}^2+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^T\left|\left|D_{x_1,x_2}g\right|\right|_{\mathcal{H}}^2dx_1dx_2\right].
\end{aligned}$$

■

Corollaire 4.2 *Si* $g \in L^2(\Omega; |\mathcal{H}|) \cap \mathbb{L}^{2,2}$

et

$$\mathbb{E}\int_0^T\int_0^T \left|\left|D_{x_1,x_2}g\right|\right|_{|\mathcal{H}|}^2 dx_1dx_2 < \infty. \tag{4.11}$$

Alors, g est intégrable au sens de Skorohod par rapport à Z

et

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T g_s\delta Z_s\right|^2 \leq cst.\left|\left|g\right|\right|^2 \tag{4.12}$$

où

$$\left|\left|g\right|\right|^2 = \left[\mathbb{E}\left|\left|g\right|\right|_{|\mathcal{H}|}^2 + \mathbb{E}\int_0^T\int_0^T \left|\left|D_{x_1,x_2}g\right|\right|_{|\mathcal{H}|}^2 dx_1dx_2\right].$$

Exemple 4.1 *Le processus de Rosenblatt (Z_t) est intégrable au sens de Skorohod par rapport à Z_t et on a :*

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T Z_s\delta Z_s\right|^2 \leq cst.\int_0^T\int_0^T R(u,v)\left|u-v\right|^{2H-2}dudv.$$

Preuve. Sachant que

$$\mathbb{E}\left|\left|Z\right|\right|_{\mathcal{H}}^{2}=cst.\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}R\left(u,v\right)\left|u-v\right|^{2H-2}dudv,$$

pour tout $x_1, x_2 \in [0,T]$, on a

$$D_{x_1,x_2}Z_u=2d\left(H\right)1_{[0,u]^2}\left(x_1,x_2\right)\int_{x_1\vee x_2}^{u}\frac{\partial K^{H'}}{\partial u'}\left(u',x_1\right)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u'}\left(u',x_2\right)du'$$

et comme la dérivée $\frac{\partial K^{H'}}{\partial t}(t,x_2)$ est positive, alors on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}\left|\left|D_{x_1,x_2}Z_u\right|\right|_{|\mathcal{H}|}^{2}dx_1dx_2\\
=&\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}dx_1dx_2\int_{x_1\vee x_2}^{T}\int_{x_1\vee x_2}^{T}\left|u-v\right|^{2H-2}dudv\\
&\left|\int_{x_1\vee x_2}^{u}\frac{\partial K^{H'}}{\partial u'}\left(u',x_1\right)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u'}\left(u',x_2\right)du'\int_{x_1\vee x_2}^{u}\frac{\partial K^{H'}}{\partial v'}\left(v',x_1\right)\frac{\partial K^{H'}}{\partial v'}\left(v',x_2\right)dv'\right|\\
=&\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}\left|u-v\right|^{2H-2}dudv\int_{0}^{u}\int_{0}^{v}\left(\int_{0}^{u'\wedge v'}\frac{\partial K^{H'}}{\partial u'}\left(u',x_1\right)\frac{\partial K^{H'}}{\partial v'}\left(v',x_1\right)dx_1\right)^{2}\\
=&\ cst.\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}R\left(u,v\right)\left|u-v\right|^{2H-2}dudv.
\end{aligned}$$

■

On termine cette section par un résultat sur la continuité du processus intégrale indéfinie de Skorohod. Ceci prouve que cette intégrale garde le même ordre de régularité de Hölder pour le processus de Rosenblatt.

Proposition 4.5 *Soit $g \in \mathbb{L}^{2,p}$ tel que*

$$\sup_{r}\left|\left|g_r\right|\right|_{2,p}\leq\infty.$$

Alors le processus intégrale indéfinie de Skorohod de la forme $(X_t=\int_0^T g_s\delta Z_s, t\in[0,T])$ admet une version continue höldérienne d'ordre $\delta<H$.

Preuve. On peut écrire

$$\begin{aligned}
X_t - X_s &= \int_s^t \int_s^t \left(\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2)\, du \right) dB_{y_1} dB_{y_2} \\
&\quad + 2 \int_0^s \int_s^t \left(\int_{y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2)\, du \right) dB_{y_1} dB_{y_2} \\
&\quad + \int_0^s \int_0^s \left(\int_s^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2)\, du \right) dB_{y_1} dB_{y_2} \\
&= J_1 + 2J_2 + J_3
\end{aligned}$$

Alors,

$$\mathbb{E}\,|X_t - X_s|^p \leq c(p)\, \mathbb{E}\left(J_1^p + J_2^P + J_3^P\right).$$

Partant de l'inégalité de Meyer ([5], page. 320)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|J_1|^p &\leq c(p) \left| \int_s^t \int_s^t \mathbb{E} \left(\int_{y_1 \vee y_2}^t g_u \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2)\, du \right)^2 dy_1 dy_2 \right|^{\frac{p}{2}} \\
&\quad + c(p)\, \mathbb{E} \left| \int_s^t \int_s^t \int_0^t \int_0^t \left[D_{x_1,x_2} \int_{y_1 \vee y_2}^t g_u \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2)\, du \right]^2 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \right. \\
&= c(p, H) \left| \mathbb{E} \int_s^t \int_s^t |g(u)\, g(v)|\, |u - v|^{2H-2} \right|^{\frac{p}{2}} \\
&\quad + c(p, H)\, \mathbb{E} \left| \int_0^t \int_0^t dx_1 dx_2 \int_s^t \int_s^t |D_{x_1,x_2} g_u D_{x_1,x_2} g_v|\, |u - v|^{2H-2}\, du dv \right|^{\frac{p}{2}} \\
&\leq c(p, H) \sup_r ||g_r||_{2,p}^p \left| \int_s^t \int_s^t |u - v|^{2H-2}\, du dv \right|^{\frac{p}{2}} \\
&= c(p, H) \sup_r ||g_r||_{2,p}^p\, (t - s)^{pH}
\end{aligned}$$

D'une manière semblable, on peut trouver la même borne pour les termes J_2 et J_3 (voir aussi [8], preuve de la proposition 1). La conclusion découle d'après le critère de continuité de kolmogorov. ■

4.3 Relation entre le calcul trajectoriel et l'intégrale de Skorohod

Soit g un processus stochastique. Rappelons que son intégrale Forward par rapport à Z_t est une limite ucp de

$$I^{-}(\varepsilon, g, dZ) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T g_s\left(Z(s+\varepsilon) - Z(s)\right) ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T g_s \delta^{(2)}\left(f_{s+\varepsilon}(.,*) - f_s(.,*)\right) ds \tag{4.13}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$;

où le noyau f_s est donné par :

$$f_s(x,y) = d(H)\, 1_{[0,s]^2}(x,y) \int_{x\vee y}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,x) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y)\, du. \tag{4.14}$$

D'après [5] on a la proposition suivante : Si $F \in \mathbb{D}^{2,2}$, $u \in L^2\left([0,T]^2 \times \Omega\right)$ tel que pour touts $s, u(.,s) \in Dom(\delta)$, alors $Fu \in Dom(\delta)$

et

$$F\delta^{(2)}(u) = \delta^{(2)}(Fu) + 2\int_0^T D_\alpha F \delta(u(.,\alpha))\, d\alpha - \int_0^T \int_0^T D^{(2)}_{\alpha,\beta} F u(\alpha,\beta)\, d\alpha d\beta. \tag{4.15}$$

Donc on obtient d'après (4.15) et (4.13)

$$\begin{aligned} I^{-}(\varepsilon, g, dZ) \;=\; & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \delta^{(2)}\left(g_s\left(f_{s+\varepsilon}(.,*) - f_s(.,*)\right)\right) ds \\ & + \frac{2}{\varepsilon}\int_0^T \int_0^T D_\alpha g_s \delta\left(f_{s+\varepsilon}(.,\alpha) - f_s(.,\alpha)\right) d\alpha ds \\ & - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \int_0^T \int_0^T D^{(2)}_{\alpha,\beta} g_s\left(f_{s+\varepsilon}(\alpha,\beta) - f_s(\alpha,\beta)\right) d\beta d\alpha ds. \end{aligned} \tag{4.16}$$

On remarque que l'intégrale Forward $I^{-}\left(\varepsilon, g, dB^H\right)$ de processus de *Rosenblatt* se compose par une intégrale de skorohode et deux termes de trace.

Définition 4.4 *On dit qu'un processus stochastique $g \in \mathbb{L}^{1,2}$ admet un terme de trace d'ordre 1 si*

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\int_0^T D_\alpha g_s \delta\left(f_{s+\varepsilon}(.,\alpha) - f_s(.,\alpha)\right) d\alpha ds \tag{4.17}$$

Converge en probabilité quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. La limite sera notée $Tr^{(1)}\left(D^{(1)}g\right)$.

On dit qu'un processus stochastique $g \in L^{2,2}$ admet un terme de trace d'ordre 2 si

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\int_0^T\int_0^T D^{(2)}_{\alpha,\beta} g_s \left(f_{s+\varepsilon}(\alpha,\beta) - f_s(\alpha,\beta)\right) d\beta d\alpha ds \tag{4.18}$$

Converge en probabilité quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. La limite sera notée $Tr^{(2)}\left(D^{(2)}g\right)$.

Le théorème suivant donne la relation entre l'intégrale de Skorohod et l'intégrale trajéctoriel.

Théorème 4.1 *Soit $g \in \mathbb{L}^{2,2}$ tel que*

$$\mathbb{E}\left|\left|g\right|\right|^2_{|\mathcal{H}|} + \mathbb{E}\int_0^T\int_0^T \left|\left|D_{x_1,x_2}g\right|\right|^2_{|\mathcal{H}|} dx_1 dx_2 < \infty.$$

On suppose que g admet des termes de trace d'ordre 1 et 2. ou alors l'intégrale forward de g par rapport à Z existe,

de plus

$$\int_0^T g_s d^- Z_s = \int_0^T g_s \delta Z_s + 2T_r^{(1)}\left(D^{(1)}g\right) - Tr^{(2)}\left(D^{(2)}g\right). \tag{4.19}$$

Preuve. D'après la formule (4.16) et la définition 4.4, il suffit de montrer que le terme

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \delta^{(2)}\left(g_s\left(f_{s+\varepsilon}(.,*) - f_s(.,*)\right)\right) ds$$

Converge Dans $L^2(\Omega)$ vers

$$\int_0^T g_s \delta Z_s \qquad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

D'après Fubini, on peut écrire ;

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T ds \int_0^T\int_0^T g_s\left(f_{s+\varepsilon}(y_1,y_2)-f_s(y_1,y_2)\right)dB_{y_1}dB_{y_2} \\ &= \int_0^T\int_0^T dB_{y_1}dB_{y_2}\int_{y_1\vee y_2}^T g^\varepsilon(u)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2)\,du \\ &= \int_0^T\int_0^T I(g^\varepsilon)(y_1,y_2)\,dB_{y_1}dB_{y_2} = \int_0^T g_s^\varepsilon \delta Z_s \end{aligned}$$

où ;

$$g^\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{u-\varepsilon}^u g_s ds. \tag{4.20}$$

D'après (4.12), il est suffisant de vérifier que,

$$g^\varepsilon \longrightarrow g$$

Dans $L^2(\Omega;\mathcal{H})$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$,

et

$$\int_0^T\int_0^T \mathbb{E}\left\|D_{x_1,x_2}(g^\varepsilon - g)\right\|_{\mathcal{H}}^2 dx_1dx_2 \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

On montrera que

$$\|g^\varepsilon\|_{|\mathcal{H}|} \le c(\boldsymbol{H})\,\|g\|_{|\mathcal{H}|} \tag{4.21}$$

et

$$\int_0^T\int_0^T \left\|D_{x_1,x_2}g^\varepsilon\right\|_{|\mathcal{H}|}^2 dx_1dx_2 \le c(\boldsymbol{H})\int_0^T\int_0^T \left\|D_{x_1,x_2}g\right\|_{|\mathcal{H}|}^2 dx_1dx_2. \tag{4.22}$$

L'inégalité (4.21) a été prouvée dans [7], preuve de proposition 3, étape 1.

Tandis que pour l'inégalité (4.22), on peut l'écrire

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^T ||D_{x_1,x_2} g||^2_{|\mathcal{H}|} dx_1 dx_2 \\
= \;& c(\boldsymbol{H}) \int_0^T \int_0^T dx_1 dx_2 \int_0^T \int_0^T |D_{x_1,x_2} g^\varepsilon_u| \, |D_{x_1,x_2} g^\varepsilon_v| \, |u-v|^{2H-2} dudv \\
\leq \;& c(\boldsymbol{H}) \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_0^T dx_1 dx_2 \int_0^T \int_0^T dudv \, |u-v|^{2H-2} \int_{v-\varepsilon}^{v} \int_{u-\varepsilon}^{u} dsds' \, |D_{x_1,x_2} g_s D_{x_1,x_2} g_{s'}| \\
\leq \;& c(\boldsymbol{H}) \int_0^T \int_0^T dx_1 dx_2 \int_0^T \int_0^T dsds' \, |D_{x_1,x_2} g_s D_{x_1,x_2} g_{s'}| \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^{s+\varepsilon} \int_{\acute{s}}^{\acute{s}+\varepsilon} |u-v|^{2H-2} dudv \right).
\end{aligned}$$

D'après [7], preuve de proposition 3, étape 1, on a

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^{s+\varepsilon} \int_{s'}^{\acute{s}+\varepsilon} |u-v|^{2H-2} dudv \leq c(\boldsymbol{H}) \left| s - s' \right|^{2H-2}.$$

donc, l'inégalité (4.22) sera vérifiée.

Maintenant d'après la preuve de la proposition 3, étape 3. dans [7] on peut compléter notre preuve. On considère une suite g^n des processus simples de la forme $g^n = \sum_{i=0}^{n-1} F_i 1_{]t_i,t_{i+1}]}$ avec $F_i \in S$ et $t_i \in [0,T]$ tel que $||g_n - g|| \longrightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \longrightarrow \infty$ (l'existence de cette suite s'ensuit de la densité de $\mathcal{E}$ dans H). Alors d'après la formule (4.12) on a :

$$\int_0^T g^n_s \delta Z_s \longrightarrow \int_0^T g_s \delta Z_s$$

quand $n \longrightarrow \infty$.

Noter par $g^{n,\varepsilon}$ le processus d'approximation de la forme (4.20) associée à g^n ; et pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left| \int_0^T g^\varepsilon_s \delta Z_s - \int_0^T g_s \delta Z_s \right|^2 \;\leq\; 3 \Bigg(& \mathbb{E}\left| \int_0^T g^\varepsilon_s \delta Z_s - \int_0^T g^{n,\varepsilon}_s \delta Z_s \right|^2 \\
& + \mathbb{E}\left| \textstyle\int_0^T g^{n,\varepsilon}_s \delta Z_s - \int_0^T g^n_s \delta Z_s \right|^2 \\
& + \mathbb{E}\left| \textstyle\int_0^T g^n_s \delta Z_s - \int_0^T g_s \delta Z_s \right|^2 \Bigg).
\end{aligned}$$

Pour n assez grand et pour chaque $\delta > 0$ dans les formules (4.21) et (4.22) on a :

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T g_s^{\varepsilon}\delta Z_s - \int_0^T g_s\delta Z_s\right|^2 \leq 3\left(\mathbb{E}\left|\int_0^T g_s^{n,\varepsilon}\delta Z_s - \int_0^T g_s^{n}\delta Z_s\right|^2 + \delta\right)$$

Donc le résultat découle quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. ■

4.4 Formule d'Itô au sens de Skorohod

Dans cette section on étudie la formule d'Itô pour le processus de Rosenblatt au le sens de Skorohod. Comme on a mentionné avant, que la nature gaussienne du processus intégrateur est essentielle dans le cadre du calcul de divergence – Skorohod - et on peut entièrement observer ce fait dans cette partie. On va prouver la formule de Skorohod-Itô seulement dans deux cas particuliers.

En partant de la formule d'Itô pour déduire la formule de Skorohod-Itô.

Rappelons que pour n'importe quelle fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(Z_t) &= f(0) + \int_0^t f'(Z_s)\, d^- Z_s \\ &= f(0) + \int_0^t f'(Z_s)\,\delta Z_s + 2Tr^{(1)}\left(D^{(1)} f'(Z_s)\right) - Tr^{(2)}\left(D^{(2)} f''(Z_s)\right) \end{aligned}$$

à condition que les termes ci-dessus existent.

4.4.1 La trace d'ordre 1

Rappelons que

$$Tr^{(1)}\left(D^{(1)} f'(Z_s)\right) = ucp - \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} B_\varepsilon$$

où

$$\begin{aligned}
B_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t ds \int_0^t d\alpha D_\alpha f'(Z_s)\,\delta\left(f_{s+\varepsilon}(.,\alpha) - s_s(.,\alpha)\right)\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t ds \int_0^t d\alpha f''(Z_s)\, D_\alpha Z_s \delta\left(f_{s+\varepsilon}(.,\alpha) - f_s(.,\alpha)\right).
\end{aligned}$$

La dérivée de Malliavin de Z_s est donné par

$$D_\alpha Z_s = 2d(H)\,1_{[0,s]}(\alpha)\left(\int_0^s\left(\int_{\alpha\vee y_1}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\,du\right)dB_{y_1}\right) \tag{4.23}$$

Alors;

$$\begin{aligned}
B_\varepsilon = {} & \frac{2}{\varepsilon}d(H)\int_0^T dsf''(Z(s))\int_0^s \delta\left(f_{s+\varepsilon}(.,\alpha) - f_s(.,\alpha)\right)d\alpha\\
& \int_0^s\left(\int_{\alpha\vee y_1}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\,du\right)dB_{y_1}
\end{aligned}$$

où f_s est donné par la formule (4.14). On applique la formule d'intégration par partie dans B_ε;

$$\begin{aligned}
B_\varepsilon = {} & \frac{2}{\varepsilon}d(H)\int_0^T dsf''(Z_s)\int_0^s d\alpha\\
& \int_0^s\left[\delta\left(f_{s+\varepsilon}(.,\alpha) - f_s(.,\alpha)\right)\int_{\alpha\vee y_1}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\,du\right]dB_{y_1}\\
& +\frac{2}{\varepsilon}d(H)\int_0^T dsf''(Z_s)\int_0^s d\alpha\\
& \int_0^s\left[\int_{\alpha\vee y_1}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\,du\left(f_{s+\varepsilon}(y_1,\alpha) - f_s(y_1,\alpha)\right)\right]dy_1\\
: & = B_\varepsilon^1 + B_\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

On étudie d'abord le terme B_ε^2 puisqu'on peut le traiter pour n'importe quelle fonction f.

Dont :

$$
\begin{aligned}
B_\varepsilon^2 &= \frac{2}{\varepsilon} d(H)^2 \int_0^T ds f''(Z_s) \int_0^s d\alpha \\
&\int_0^s dy_1 \int_{\alpha\vee y_1}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\, du \\
&\left[1_{[0,s+\varepsilon]^2}(y_1,\alpha) \int_{\alpha\vee y_1}^{s+\varepsilon} \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,\alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,y_1)\, dv \right. \\
&\left. -1_{[0,s]^2}(y_1,\alpha) \int_{\alpha\vee y_1}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,\alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,y_1)\, dv \right] \\
&= \frac{2}{\varepsilon} d(H)^2 \int_0^T ds f''(Z_s) \int_0^s du \int_s^{s+\varepsilon} dv \left(\int_0^{u\wedge v} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,\alpha)\, d\alpha \right)^2 \\
&= 2A(H)^2 \int_0^t dv \int_0^v du\, |u-v|^{2H-2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{(v-\varepsilon)}^v f''(Z_s)\, ds \right)
\end{aligned}
$$

Avec $A(H) = H'\left(2H'-1\right) d(H)$, alors

$$
\begin{aligned}
B_\varepsilon^2 &= 2A(H)^2 \int_0^t dv \int_0^v du\, |u-v|^{2H-2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{(v-\varepsilon)}^v f''(Z_s)\, ds \right) \\
&+ 2A(H)^2 \int_0^t dv \int_{v-\varepsilon}^v du\, |u-v|^{2H-2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_u^v f''(Z_s)\, ds \right).
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

Donc on a :

$$
B_\varepsilon^2 \longrightarrow 2A(H)^2 \int_0^T \int_0^u f''(Z_v)\, |u-v|^{2H-2}\, dv du = \frac{2A(H)^2}{2H-1} \int_0^T \int_0^T f''(Z_u)\, u^{2H-1} du \tag{4.25}
$$

converge dans $L^1(\Omega)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$,

puisque le deuxième terme de l'équation (4.24) converge vers le zéro d'après le théorème de convergence dominée.

L'étude du terme B_ε^1 dans le cadre général est un peu difficile. Pour cela on limite l'étude à des cas particuliers.

Le cas de $f(x) = x^2$:

On a

$$
\begin{aligned}
B_\varepsilon^1 &= \frac{4}{\varepsilon} d(H) \int_0^t ds \int_0^s d\alpha \int_0^t \int_0^t dB_{y_1} dB_{y_2} \\
& \int_{\alpha \vee y_1}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\, du \left(f_{s+\varepsilon}(y_2,\alpha) - f_s(y_2,\alpha)\right)
\end{aligned}
$$

et d'après Fubini on obtient,

$$
\begin{aligned}
B_\varepsilon^1 &= \frac{4}{\varepsilon} d(H)^2 \int_0^t \int_0^t dB_{y_1} dB_{y_2} \int_{y_2}^t dv \int_{y_2}^v du \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2) \\
& \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{(v-\varepsilon)\vee u}^v ds\right) \left(\int_0^{u \wedge v} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,\alpha)\, d\alpha\right) \\
&= \frac{4}{\varepsilon} d(H)^2 H' \left(2H' - 1\right) \int_0^t \int_0^t dB_{y_1} dB_{y_2} \\
& \int_{y_2}^t dv \int_{y_1}^v du \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2) |u-v|^{2H'-2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{(v-\varepsilon)\vee u}^v ds\right)
\end{aligned}
$$

alors on a :

$$
\begin{aligned}
B_\varepsilon^1 &\longrightarrow 4d(H)^2 H' \left(2H' - 1\right) \int_0^t \int_0^t dB_{y_1} dB_{y_2} \\
& \int_{y_2}^t dv \int_{y_1}^v du \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2) |u-v|^{2H'-2} \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Le cas de $f(x) = x^3$:

Tout d'abord en calculant l'intégrale

$$\begin{aligned} B_\varepsilon^1 &= \frac{12}{\varepsilon} d(H)^2 H' \left(2H' - 1\right) \int_0^t Z(s)\, ds \\ &\left[\int_0^s \int_0^{s+\varepsilon} dB_{y_1} dB_{y_2} \int_{y_1}^s du \int_{y_2}^{s+\varepsilon} dv \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) |u-v|^{2H'-2} \right. \\ &\left. - \int_0^s \int_0^s dB_{y_1} dB_{y_2} \int_{y_1}^s du \int_{y_2}^s dv \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) |u-v|^{2H'-2} \right] \end{aligned}$$

et selon la formule d'intégration par partie de l'intégrale double de Skorohod on a :

$$B_\varepsilon^1 = B_\varepsilon^{1,1} + B_\varepsilon^{1,2} + B_\varepsilon^{1,3}$$

où

$$\begin{aligned} B_\varepsilon^{1,1} &= \frac{12}{\varepsilon} d(H)^2 H' \left(2H' - 1\right) \int_0^t ds \\ &\left[\int_0^s \int_0^{s+\varepsilon} dB_{y_1} dB_{y_2} Z_s \int_{y_1}^s du \int_{y_2}^{s+\varepsilon} dv \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) |u-v|^{2H'-2} \right. \\ &\left. - \int_0^s \int_0^s dB_{y_1} dB_{y_2} Z_s \int_{y_1}^s du \int_{y_2}^s dv \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) |u-v|^{2H'-2} \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_\varepsilon^{1,2} &= -\frac{48}{\varepsilon} d(H)^3 H' \left(2H' - 1\right) \int_0^t ds \int_0^s d\alpha \\ &\int_0^s \left(\int_{\alpha \vee y_1}^s du' \frac{\partial K^{H'}}{\partial u'}\left(u', \alpha\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u'}\left(u', y_2\right) \right) dB_{y_1} \\ &\left[\int_0^{s+\varepsilon} dB_{y_2} \int_\alpha^s du \int_{y_2}^{s+\varepsilon} dv \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, \alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) |u-v|^{2H'-2} \right. \\ &\left. - \int_0^s dB_{y_2} \int_\alpha^s du \int_{y_2}^s dv \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, \alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) |u-v|^{2H'-2} \right] \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
B_{\varepsilon}^{1,3} &= \frac{24}{\varepsilon} d(H)^3 H' \left(2H' - 1\right) \int_0^t ds \\
&\left[\int_0^s \int_0^{s+\varepsilon} dy_1 dy_2 \int_{y_1 \vee y_2}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u'} \left(u', y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u'} \left(u', y_2\right) du' \right. \\
&\int_{y_1}^s du \int_{y_2}^{s+\varepsilon} dv \frac{\partial K^{H'}}{\partial u} (u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v} (v, y_2) |u-v|^{2H'-2} \\
&- \int_0^s \int_0^s dy_1 dy_2 \int_{y_1 \vee y_2}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u'} \left(u', y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u'} \left(u', y_2\right) du' \\
&\int_{y_1}^s du \int_{y_2}^s dv \frac{\partial K^{H'}}{\partial u} (u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v} (v, y_2) |u-v|^{2H'-2}
\end{aligned}
$$

Maintenant,

$$
\begin{aligned}
B_{\varepsilon}^{1,1} &= 12d(H)^2 H' \left(2H' - 1\right) \int_0^t \int_0^t dB_{y_1} dB_{y_2} \\
&\int_{y_2}^s dv \int_{y1}^s du \frac{\partial K^{H'}}{\partial u} (u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v} (v, y_2) |u-v|^{2H'-2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{(v-\varepsilon)\vee u}^v Z_s ds \right)
\end{aligned}
$$

si on pose :

$$
Z_v^{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{(v-\varepsilon)\vee u}^v Z_s ds
$$

et en tenant compte la preuve du théorème 4.2

$$
Z_v^{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} Z_v \quad \text{dans } L^2(\Omega)
$$

on a :

$$
\begin{aligned}
B_{\varepsilon}^{1,1} &\longrightarrow 12d(H)^2 H' \left(2H' - 1\right) \int_0^t \int_0^t dB_{y_1} dB_{y_2} \\
&\int_{y_2}^t dv \int_{y_1}^v du Z_v \frac{\partial K^{H'}}{\partial u} (u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v} (v, y_2) |u-v|^{2H'-2}. \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

D'après la formule d'intégration par parties (4.6) et le terme $B_\varepsilon^{1,2}$ on a :

$$\begin{aligned} B_\varepsilon^{1,2} \quad \longrightarrow \quad & -48d\,(H)^3 \left(H' \left(2H' - 1\right)\right)^2 \int_0^t \int_0^t dB_{y_1} dB_{y_2} \\ & \int_{y_2}^t dv \int_{y_1}^v du' \int_{y_2}^v du \left|u - u'\right|^{2H'-2} |u - v|^{2H'-2} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u'} \left(u', y_1\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v} (v, y_2) \\ & -48d\,(H)^3 \left(H' \left(2H' - 1\right)\right)^3 \int_0^t dv \int_0^v \int_0^v du' du\, |u - v|^{2H'-2} \left|u' - v\right|^{2H'-2} \left|u - u'\right|^2 \end{aligned}$$

De même on a

$$B_\varepsilon^{1,3} \longrightarrow 24d\,(H)^3 \left(H' \left(2H' - 1\right)\right)^3 \int_0^t dv \int_0^v \int_0^v du' du\, |u - v|^{2H'-2} \left|u' - v\right|^{2H'-2} \left|u - u'\right|^{2H'-2} \qquad (4.28)$$

4.4.2 La trace de l'ordre 2

Rappelons que,

$$Tr^{(2)} \left(D^{(2)} f' (Z (s))\right) = ucp - \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} C_\varepsilon$$

où

$$\begin{aligned} C_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t ds \int_0^t \int_0^t D_{\alpha,\beta} f' (Z (s)) \left(f_{s+\varepsilon} (\alpha, \beta) - f_s (\alpha, \beta)\right) d\alpha d\beta \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t ds \int_0^t \int_0^t \left(f_{s+\varepsilon} (\alpha, \beta) - f_s (\alpha, \beta)\right) d\alpha d\beta \\ & \quad \left[f'' (Z (s)) D_{\alpha,\beta} Z (s) + f''' (Z (s)) D_\alpha Z (s) D_\beta Z (s)\right] \\ &= C_\varepsilon^1 + C_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

alors, on écrit

$$\begin{aligned}
C_\varepsilon &= \frac{2}{\varepsilon} d(H)^2 \int_0^t f''(Z_s)\, sd \int_0^s du \int_s^{s+\varepsilon} dv \left(\int_0^{u\wedge v} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u'}\left(u', \alpha\right) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,\alpha)\, d\alpha \right)^2 \\
&= \frac{2}{\varepsilon} d(H)^2 \left(H'\left(2H'-1\right)\right)^2 \int_0^t f''(Z_s)\, ds \int_0^s du \int_s^{s+\varepsilon} dv\, |u-v|^{2H-2} \\
&= 2d(H)^2 \left(H'\left(2H'-1\right)\right)^2 \int_0^t dv \int_0^v du\, |u-v|^{2H-2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{(v-\varepsilon)\vee u}^v f''(Z_s)\, ds \right)
\end{aligned}$$

on voit clairement que

$$C_\varepsilon^1 \longrightarrow \frac{d(H)^2 \left(H'\left(2H'-1\right)\right)^2}{2H-1} \int_0^t f''(Z_v)\, v^{2H-1} dv. \tag{4.29}$$

Dans $L^1(\Omega)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Tandis que pour le terme C_ε^2 il peut être traiter de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
C_\varepsilon^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t ds f'''(Z_s) \int_0^t \int_0^t D_\alpha Z_s D_\beta Z_s \left(f_{s+\varepsilon}(\alpha,\beta) - f_s(\alpha,\beta)\right) d\alpha d\beta \\
&= \frac{4}{\varepsilon} d(H)^2 \int_0^t ds f'''(Z_s) \int_0^s \int_0^s d\alpha d\beta \left(f_{s+\varepsilon}(\alpha,\beta) - f_s(\alpha,\beta)\right) \\
&\quad \left(\int_0^t dB_{y_1} \int_{\alpha\vee y_1}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\, du \right) \\
&\quad \times \left(\int_0^t dB_{y_2} \int_{\beta\vee y_2}^s \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,\beta) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,y_2)\, dv \right).
\end{aligned}$$

Le Cas de $f(x) = x^3$.

Dans ce cas on a

$$
\begin{aligned}
C_{\varepsilon}^{2} &= \frac{24}{\varepsilon} d(H)^{2} \int_{0}^{t} ds \int_{0}^{s}\int_{0}^{s} d\alpha d\beta \left(f_{s+\varepsilon}(\alpha,\beta) - f_{s}(\alpha,\beta)\right) \\
&\int_{0}^{t}\int_{0}^{t} dB_{y_1} dB_{y_2} \int_{\alpha\vee y_1}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\, du \\
&\times \int_{\beta\vee y_2}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,\beta) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,y_2)\, dv + \frac{24}{\varepsilon}\int_{0}^{t} ds \int_{0}^{s}\int_{0}^{s} d\alpha d\beta \left(f_{s+\varepsilon}(\alpha,\beta) - f_{s}(\alpha,\beta)\right) \\
&\int_{0}^{s} dy_1 \int_{\alpha\vee y_1}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,\alpha) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\, du \int_{\beta\vee y_2}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,\beta) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,y_2)\, dv
\end{aligned}
$$

Et d'une manière semblable utilisée auparavant, on peut aboutir à :

$$
\begin{aligned}
C_{\varepsilon}^{2} &\longrightarrow 24d(H)^{3}\left(H'\left(2H'-1\right)\right)^{2} \int_{0}^{t}\int_{0}^{t} dB_{y_1} dB_{y_2} \int_{y_1}^{t} du' \int_{y_1}^{u'} du \int_{y_2}^{u'} dv \\
&\left|u-u'\right|^{2H'-2} \left|v-u'\right|^{2H'-2} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v,y_2) \\
&+24d(H)^{3}\left(H'\left(2H'-1\right)\right)^{3} \int_{0}^{t} du' \int_{0}^{u'}\int_{0}^{u'} du dv \\
&\left|u-u'\right|^{2H'-2} \left|v-u'\right|^{2H'-2} \left|u-v\right|^{2H'-2}. \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Appendice

A.1 Espérance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à une sous-tribu

Théorème 0.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité ;* X *une variable aléatoire* $\mathcal{F}$*-mesurable telle que* $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ *et* $\mathcal{G}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$*. Il existe une variable aléatoire* Z *telle que* $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$ *et*

i) Z *est une variable aléatoire* $\mathcal{G}$*-mesurable*

ii) $\mathbb{E}(XU) = \mathbb{E}(ZU)$, $\forall v.a$ U $\mathcal{G}$*-mesurable et bornée.*

Z *est notée* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ *et est appelée l'espérance conditionnelle de* X *par rapport à* $\mathcal{G}$*. De plus, si* Z_1 *et* Z_2 *vérifient i) et ii), alors* $Z_1 = Z_2$ *p.s*

A.1.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soient X, Y deux variable aléatoire intégrables.

- Linéarité : $\mathbb{E}(cX + Y \mid \mathcal{G}) = c\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ p.s.
- Positivité-monotonie : $X \geq Y$ p.s $\Longrightarrow \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ p.s.
- $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.
- Si $X \perp \mathcal{G}$ alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ p.s.
- Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$ p.s.
- Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable et bornée, alors $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\, Y$ p.s.
- Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\, \mathcal{H})$ p.s.

A.2 Polynômes d'Hermite

Rappelons d'abord qu'une variable aléatoire normale standard, $X \backsim N(0,1)$, admet la densité $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Définition 0.1 (***Polynôme de Hermite***) *soit $K \geq 0$,entier, on pose*

$$H_k(x) = \frac{(-1)^k}{\varphi(x)} \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k}$$

Alors H_k est un polynôme de degré K, appelé polynôme d'Hermite.

Lemme 0.1 *on a :*

$$f(\lambda) = e^{\lambda x - \lambda^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n H_n(x)$$

où

$$H_n = \frac{(-1)^n}{n\,!} e^{x^2/2} \frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n}. \tag{1.35}$$

Corollaire 0.1 *soit H_n polynôme d'Hermite ; alors*

1) $H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x,$

2) $H_n^{'} = H_{n-1},$

3) $H_{n+1} = xH_n - H_{n-1},$

4) $H_n^{''} - xH_n^{'} = -nH_n.$

Remarque 0.1 *Les polynômes d'Hermite H_k forment un système de polynôme orthogonaux pour la mesure gaussienne car, après k intégration par partie, nous avons*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H_K(N) H_L(N)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(x) H_l(x) \varphi(x)\, dx \\
&= (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} H_l(x)\, dx \\
&= (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^k H_l(x)}{dx^k} \varphi(x)\, dx
\end{aligned}$$

ainsi cette expression s'annule lorsque $k \succ 1$,si $k = l$ nous obtenons :

$$\frac{d^k H_l(x)}{dx^k} = k! \quad donc \quad \mathbb{E}\left(H_k^2\right) = k!$$

de plus ce système est de total 3, donc si une fonction mesurable g vérifier la relation

$\mathbb{E}\left|g\left(N\right)\right|^2 < \infty$ *on obtient la représentation suivante dans* L^2

$$g\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k\left(x\right), \qquad\qquad c_k = \frac{1}{k!}\mathbb{E}\left[g\left(N\right)H_k\left(N\right)\right]$$

Définition 0.2 *On appelle rang d'Hermite de la fonction g la plus petit indice $l \geq 0$ tel que $c_l \neq 0$*

$$i.e \qquad k \overset{\min}{=} \{l \quad / \quad c_l \neq 0\}.$$

A.3 Intégrales fractionnaires et dérivatives

On rappel les définitions et les propriétés de base de calcul fractionnaires.

Soit $a \in \mathbb{R}, a < b$.Soit $f \in L^1\left(a,b\right)$ et $\alpha > 0$. Le coté gauche et droite de l'intégrale fractionnaires de f d'ordre α sont définit pour presque tout $x \in (a,b)$ par

$$I_{a+}^{\alpha} f\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^x \left(x-y\right)^{\alpha-1} f\left(y\right)dy.$$

et

$$I_{b-}^{\alpha} f\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_x^b \left(y-x\right)^{\alpha-1} f\left(y\right)dy. \tag{A.1}$$

respectivement. Soit $I_{a+}^{\alpha}\left(L^p\right)$ (resp. $I_{b-}^{\alpha}\left(L^p\right)$) l'image de $L^p\left(a,b\right)$ par l'opérateur I_{a+}^{α}(resp. I_{b-}^{α}).

Si $f \in I_{a+}^{\alpha}\left(L^p\right)$ (resp. $f \in I_{b-}^{\alpha}\left(L^p\right)$) et $0 < \alpha < 1$ alors le coté gauche et droite la dérivatives fractionnaires sont définie par

$$D_{a+}^{\alpha} f\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(\frac{f\left(x\right)}{\left(x-a\right)^{\alpha}} + \alpha\int_a^x \frac{f\left(x\right)-f\left(y\right)}{\left(x-y\right)^{\alpha+1}}dy\right),$$

et

$$D_{b-}^{\alpha} f\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(\frac{f\left(x\right)}{\left(b-x\right)^{\alpha}} + \alpha\int_x^b \frac{f\left(x\right)-f\left(y\right)}{\left(y-x\right)^{\alpha+1}}dy\right)$$

pour presque tout $x \in (a,b)$.

On rappel dans le suivant quelques propriétés de ces opérateurs :

i) Si $\alpha < \frac{1}{p}$ et $q = \frac{p}{1-\alpha p}$ alors

$$I_{a+}^{\alpha}\left(L^{p}\right) = I_{b-}^{\alpha}\left(L^{p}\right) \subset L^{q}\left(a,b\right).$$

ii) Si $\alpha > \frac{1}{p}$ alors

$$I_{a+}^{\alpha}\left(L^{p}\right) \cup I_{b-}^{\alpha}\left(L^{p}\right) \subset C^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(a,b\right).$$

où $C^{\alpha-\frac{1}{p}}\left(a,b\right)$ est l'espace de fonctions Höldériennes continues d'ordre $\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)$ dans un intervalle $\left[a,b\right]$.

iii)

$$I_{a+}^{\alpha}\left(D_{a+}^{\alpha}f\right) = f \quad \left(\text{resp. } I_{b-}^{\alpha}\left(D_{b-}^{\alpha}f\right) = f\right)$$

pour toute $f \in I_{a+}^{\alpha}\left(L^{p}\right)$ $\left(\text{resp. } f \in I_{b-}^{\alpha}\left(L^{p}\right)\right)$, et

$$D_{a+}^{\alpha}\left(I_{a+}^{\alpha}f\right) = f \quad \left(\text{resp. } D_{b-}^{\alpha}\left(I_{b-}^{\alpha}f\right) = f\right)$$

pour toute $f \in L^{1}\left(a,b\right)$. (resp. $f \in L^{1}\left(a,b\right)$).

vi) La formule d'intégration par partie est :

$$\int_{a}^{b}\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(s)\,g(s)\,ds = \int_{a}^{b} f(s)\left(D_{b-}^{\alpha}g\right)(s)\,ds.$$

pour tout $f \in I_{a+}^{\alpha}\left(L^{p}\right), g \in I_{b-}^{\alpha}\left(L^{p}\right), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

A.4 Notions sur les opérateurs

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition 0.3 *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte. On désigne par $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.*

Théorème 0.2 *(cf. [29]) L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$ (pour la norme $\|\|_{\mathcal{L}(E,F)}$).*

A.4.1 Spectre d'un opérateur compact

Définition 0.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$.*

L'ensemble résolvant est

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T - \lambda I) \text{ est bejectif de } E \text{ sur } E\}.$$

Le spectre $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant, $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.

On dit que λ est valeur propre - et on note $\lambda \in VP(T)$ - si

$$N(T - \lambda I) \neq 0;$$

$N(T - \lambda I)$ est l'espace propre associé à λ.

Définition 0.5 *Il est important de retenir que si $\lambda \in \rho(T)$ alors $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ (cf. [30] corollaire II.6).*

Proposition 0.1 *(cf. [29]) Le spectre $\sigma(T)$ est un ensemble compact et*

$$\sigma(T) \in [-\|T\|, +\|T\|].$$

Théorème 0.3 *(cf. [29]) Soit $T \in \mathcal{K}(E)$ avec $\dim E = \infty$.*

Alors on a

i) $0 \in \sigma(T)$,

ii) $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$,

iii) l'un des situations suivantes :

- ou bien $\sigma(T) = \{0\}$,

- ou bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est fini,

- ou bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

A.4.2 Décomposition spectrale des opérateur autoadjoints compacts

On suppose dans la suite que $E = H$ est un espace de Hilbert et que $T \in \mathcal{L}(H)$. Identifiant $\acute{H}$ et H on peut considérer que $T^* \in \mathcal{L}(H)$.

Définition 0.6 *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est autoadjoint si $T^* = T$, c'est-à-dire*

$$(Tu, v) = (u, Tv) \qquad \forall u, v \in H.$$

Proposition 0.2 *(cf. [29]) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint. On pose*

$$m = \inf_{u \in H,\ |u|=1} (Tu, u) \qquad et \qquad M = \sup_{u \in H,\ |u|=1} (Tu, u).$$

Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ et $M \in \sigma(T)$.

Corollaire 0.2 *(cf. [29]) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. alors $T = 0$.*

Théorème 0.4 *(cf. [29]) On suppose que H est séparable. Soit T un opérateur autoadjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteur propres de T.*

A.4.3 Opérateur Fredholm

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition 0.7 *On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est de Fredholm (on dit aussi que A est un opérateur à indice). - on note $A \in Fred(E, F)$ - si*

i) $N(A)$ est de dimension finie.

ii)$R(A)$ est fermé et de co-dimension finie.

On dit que $R(A)$ est de co-dimension finie si $R(A)$ admet un supplémentaire algébrique de dimension finie.

L'indice de A est défini par

$$Ind(A) = \dim N(A) - codim\ R(A).$$

A.4.4 Opérateur de Hilbert-Schmidt

Définition 0.8 *Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base (e_n) de H telle que $||T||_{HS}^2 = \sum |Te_n| < \infty$.*

On vérifiera que la définition est indépendante du choix de la base et définit une norme ; de plus T est compact. Les opérateur de Hilbert-Schmidt constituent un sous-espace important de $\mathcal{K}(H)$, en particulier à cause du

Théorème 0.5 *(cf. [29]) Soient $H = L^2(\Omega)$ et $K(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Alors l'opérateur*

$$u \to (Ku)(x) = \int_\Omega K(x, y)\, u(y)\, dy$$

est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Réciproquement tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega)$ se représente de manière unique à l'aide d'une fonction $K(x, y) = L^2(\Omega \times \Omega)$.

A.4.5 Semigroupe continu

Définition 0.9 *Soit E un espace de Banach ; on dit que la famille d'opérateurs linéaires $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semigroupe fortement continu si :*

1) $\forall t \geq 0,\ S(t) \in \mathcal{L}(E)$

2) $S(0) = Id$

3) $\forall t, s \geq 0 \quad S(t+s) = S(t) \circ S(s)$

4) $\forall t \geq 0 \quad \lim\limits_{t \to 0^+} S(t)\, x = x$

La condition (4) est équivalente à ce que $\forall x \in E, t \to S(t)\, x \in C^0(\mathbb{R}^+, E)$. *Si on remplace (4) par :* $\lim\limits_{t \to 0^+} ||S(t)\, Id - Id||_{\mathcal{L}(E)} = 0$ *on dit que* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément continu*

Définition 0.10 *On définit le générateur infinitésimal* $(A, D(A))$ *de* C_0- *semigroupe* $(S(t))$ *comme l'opérateur non bornée* $A : D(A) \subset E \to E$ *où*

$$D(A) = \left\{ x \in E, \qquad \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (S(t)\, x - x) \ \textit{existe} \right\}$$

$$\forall x \in D(A) \qquad Ax = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (S(t)\, x - x)$$

quand la limite existe. L'ensemble $(S(t))_{t\geq 0}$ *peut aussi notée par* $S(t) = e^{tA}$.

Bibliographie

[1] **A.S. Üstunel and M.Zakai (1989)** : *On independence and Conditioning on Wiener space.* Ann. Probab. 17, no. 4, 1441-1453.

[2] **Bilingsley, P (1986)** : *Convergence of probability measures*, Wiley, New york.

[3] **C.A. Tudor (2006)** : *Analysis of the Rosenblatt process.*

[4] **C.A. Tudor (2005)** : *Itô's formula for infinite-dimensional Brownian motion.* J. of Math. Kyoto University, 45(3), pag. 531-546.

[5] **D. Nualart and M.Zakai (1987)** : *Generalized multiple stochastic integrals and the representation of Wiener Functionals.* Stochastics, 23, pag. 311-330.

[6] **D. Nualart (1995)** : *Malliavin Calculus and Related Topics.* Springer.

[7] **E. Alos and D. Nualart (2001)** : *Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion.*

[8] **E. Alos, O Mazet and D. Nualart (2001)** : *Stochastic calculus with respect to Gaissian processes.* Annals of Probability, 29, pag. 766-801.

[9] **F. Russo and P. Vallois (2006)** : *Elements of stochastic calculus via regularization.* Preprint, to appears in Séminaire de Probabilités.

[10] **G.Samorodnisky and M. Taqqu (1994)** : *Stable Non-Gaussian random variables.* Chapman and Hall, London.

[11] **I. Kruk, F. Russo and C.A. Tudor (2006)** : *Wiener integral, Malliavin calculus and covariance structure measure.* Preprint.

[12] **I. Karatzas and S.E. Shreve** : *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer

[13] **J.M.P. Albin (1998)** : *A note on the Rosenblatt distributions.* Statistic and Probability Letters, 40(1), pag. 83-91.

[14] **J.M.P. Albin (1998)** : *On extremal theory for self similar processes.* Annals of Probability, 26(2), pag. 743-793.

[15] **M. Maejima and C.A. Tudor (2006)** : *Wiener integrals an a Non-Central limit theorem for Hermite processes.* Preprint.

[16] **M.Taqqu (1975)** : *Weak convergence to fractional Brownian motion and the Rosenblatt process*, Z. Wahrsch. verw. Geb. 31, 287-302.

[17] **M.Taqqu (1979)** : *A bibliographical guide to selfsimilar processes and long-range dependence.* Dependence in Probebility and Statistics, Birkhauser, Boston, pag. 137-162.

[18] **M. Taqqu (1979)** : *Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 50, pag. 53-83.

[19] **N.N. Leonenko and V.V. Ahn (2001)** : *Rate of convergence to the Rosenblatt distribution for additive functionals of stochastic processes with long-range dependence.* Journal of Applied mathematics and stochastic Analysis, 14(1), pag. 27-46.

[20] **O.lévêque (2005)** : *cours de probabilité et calcul stochastique.*

[21] **P. Embrechts and M. Maejima (2002)** : *Selfsimilar Processes.* Princeton Series in Applied Mathematics

[22]

[23] **R.L. Wheeden and A. Zygmund** : *Measure and integral : An introduction to real analyse.*

[24] **S. Tindel, C.A. Tudor, F. Viens (2003)** : *Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion*, Prob. Th. Rel. Fields, 127, 186-204.

[25] **V. Pipiras and M. Taqqu (2001)** : *Integration questions related to the fractional Brownian motion.* Probability Theory and Related fields, 118,2, pag. 251-281.

[26] **V. Pipiras and P. Abry (2005)** : *Wavelet-based synthesis of teh Rosenblatt process.* To appear in Singal Processing.

[27] **V. Pipiras (2004)** : *Wavelet type expansion of the rosenblatt process.* The Journal of Furier Analysis and Applications, 10(6), pag. 599-634.

[28] **V. Pipiras and M. Taqqu (2000)** : *Convergence of weighted sums of random variable with long range dependence.* Stochastic proceses and their applications, 90, 157-174

[29] **H.Brézis (1999)** : *Analyse fonctionnelle : Théorie et application*

[30] **T.E. Duncan and B.Maslowski and B. Pasik-Duncan (2002)** : Fractional Brownian motion and stochastic equations in hilbert spacces, Stochastics and dynamics 2(2), 225-250.

جامعة قالمة
قسم العلوم
الدقيقة
كلية العلوم وعلوم الهندسة