الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE 8 MAI 1945 -GUELMA-

جامعة 8 ماي 1945 - قالمة -

Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département des Sciences Exactes

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
MAGISTER EN MATHEMATIQUES

ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES NON LINEAIRES INTERVENANT EN THEORIE DU TRANSPORT

Option : Probabilités et Statistiques

Par
RABAH DEBBAR

Sous la Direction de
Dr : ABDELKADER DEHICI

Devant le jury

Président :	**L. MEZRAG**	Prof	**Université de M'sila**
Examinateur :	**N. BENHAMIDOUCHE**	Prof	**Université de M'sila**
Examinateur :	**S. BADRAOUI**	MC	**Université de Guelma**
Rapporteur :	**A. DEHICI**	MC	**Université de Guelma**

Soutenu le 20/02/2008

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie deux problèmes non linéaires entrant dans le cadre de la théorie du transport. Dans le premier chapitre, on va considérer une classe d'opérateurs de transport neutroniques non-linéaires intervenant dans la formulation stochastique des équations de transport et faisant intervenir des non-linéarités polynômiales.

On présente une analyse mathématique de ces équations qui est liée strictement à la théorie spectrale. Dans le deuxième, on établit quelques résultats d'existence de la solution dans L_1 d'un problème aux bords non-linéaires proposé par J.L. Lebowitz et S.I. Rubinow [1974] qui modélise l'age structuré de la prolifération d'une population cellulaire. Notre approche est basée essentiellement sur les propriétés des ensembles faiblement compacts dans L_1

Abstract

In this thesis, we study two nonlinear problems incoming within the framework of the transport theory. In the first chapter, we will consider a class of nonlinear neutron transport operators intervening in the stochastic formulation of the transport equations and using polynomial nonlinearities. We give a mathematical analysis of these equations wich is related strictly to the spectral theory. In the second chapter, we establish some results of the existence of the solution in L_1 spaces of a nonlinear boundary problem proposed by J.L. Lebowitz et S.I. Rubinow [1974] which models the structured age of the proliferation of a cellular population. Our approach is based essentially on the properties of the weakly compact sets in L_1.

ملخص

في هذه المذكرة، ندرس مسألتين لاخطيتين تدخلان في إطار نظرية الانتقال.

في الفصل الأول، ندرس من صنف مؤثرات الانتقال النترونية الغير خطية التي تجد مكانها في الصياغة العشوائية لمعادلات الانتقال ذات اللاخطية من صنف كثيرات الحدود.نعرض تحليلا رياضيا لهذه المعادلات ذات الصلة بالنظرية الطيفية.

في الفصل الثاني نعرض بعض الشروط التي من شأنها ضمان الحل في الفضاء L_1 لمسالة حدية غير خطية مقترحة من طرف J.L. Lebowitz و S.I. Rubinow [1974] التي تنمذج العمر البيولوجي لتكاثر كيان خلوي.

أسلوبنا المتبع يعتمد أساسا على الخصائص الطبولوجية للمجموعات الضعيفة التراص في الفضاء L_1 .

Remerciements

Je souhaite exprimer mes remerciements à :

Monsieur Abdelkader Dehici, Directeur de memoire, pour son aide et sa patience ;

Monsieur L. Mezrag, Président du jury, pour sa participation à l'élaboration de ce memoire ;

Monsieur N. Benhamidouche ;

Monsieur S. Badraoui ;

Mon père, décédé le 16 Août 1989, pour avoir suscité ma vocation et permis d'achever mes études ;

Ma mère, pour sa persévérance ;

Ma famille et plus particulièrement mes sœurs pour leur intérêt envers mon travail ;

Mes beaux parents, pour leur aide ;

Ma femme, pour son soutien moral, informatique et son amour ;

Table des matières

Introduction Générale

Dans ce mémoire, on étudie deux problèmes non linéaires entrant dans le cadre de la théorie du transport. Dans le premier, on va considérer une classe d'opérateurs de transport neutroniques non-linéaires intervenant dans la formulation stochastique des équations de transport et faisant intervenir des non-linéarités polynômiales. On présente une analyse mathématique de ces équations qui est liée strictement à la théorie spectrale. Dans le deuxième, on établit quelques résultats d'existence de la solution dans L_1 d'un problème aux bords non-linéaire proposé par J.L. Lebowitz et S.I. Rubinow [24] qui modélise l'age structuré de la prolifération d'une population cellulaire. Notre approche est basée essentiellement sur les propriétés des ensembles faiblement compacts dans L_1.

CHAPITRE 2
Formulation stochastique
en transport neutronique

Ce chapitre, traite une classe de problèmes de transport non linéaires intervenant dans l'approche probabiliste des chaînes de fission neutroniques. La théorie du transport neutronique traite naturellement les valeurs prévues des populations neutroniques. Afin de décrire les fluctuations des valeures moyennes des distributions neutroniques, des formulations stochastiques pour les fissions de chaînes neutroniques ont été introduites ces dernières années, par L. PàL [31], G.I. Bell [5], M. Otsuka et K. Saito [30]. Deux problèmes fondamentaux sont liés à de tels formulations ont été considérés ici.
Premièrement : on étudie le problème stationnaire

$$
\begin{aligned}
& v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma(x,\ v)\,\varphi(x,\ v) \\
= \ & -\sigma(x,\ v) \times \left[1 - c_0(x,\ v) - \sum_{k=1}^{m} \int_{V^k} c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k') \right. \\
& \left. \times \left(1 - \varphi\left(x,\ v_1'\right) ... \left(1 - \varphi\left(x,\ v_k'\right) dv_1' ... dv_k'\right)\right) \right]
\end{aligned} \tag{0.1}
$$

avec les conditions aux bords

$$
\varphi_{|\Gamma_-} = 0,\ 0 \leq \varphi \leq 1 \tag{0.2}
$$

Où $m \geq 2$ (m entier), $(x,\ v) \in \Omega \times V$ et

$$
\Gamma_- = \{(x,\ v) \in \partial\Omega \times V;\ v \cdot \eta(x) < 0\}.
$$

On va utiliser la notation $V^k = V \times ... \times V$ (k fois) et on suppose que l'espace des vitesses V est la boule unité de R_v^n. Ensuite, on va traiter le problème d'évolution

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial \varphi}{\partial t} - v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma(x,\ v)\,\varphi(t,\ x,\ v) \\
= \ & \sigma(x,\ v) \times \left[1 - c_0(x,\ v) - \sum_{k=1}^{m} \int_{V^k} c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k') \right. \\
& \left. \times \left(1 - \varphi\left(t,\ x,\ v_1'\right) ... \left(1 - \varphi\left(t,\ x,\ v_k'\right) dv_1' ... dv_k'\right)\right) \right]
\end{aligned} \tag{0.3}
$$

avec les conditions

$$
\varphi(0,\ x,\ v) = \varphi_0(x,\ v),\ \varphi(t,\ .,\ .)_{|\Gamma_-} = 0,\ 0 \leq \varphi \leq 1 \tag{0.4}
$$

De plus, on va étudier le comportement asymptotique des solutions. Pour la bonne interprétation des phénomènes physiques modélisés par ces équations, on renvoie au livre de G.I. Bell [5] pour les détails. Dans un milieu multiplicatif occupant une région $\Omega \subset R_x^n$, un neutron agissant sur le noyau du matériel du centre serveur, peut être absorbé, dispersé dans des directions aléatoires ou peut produire (instantanément), par le processus de fission plus d'un neutron. La probabilité qu'un neutron ayant la position $x \in \Omega$, et la vitesse v, produit par le processus de fission, i neutrons $(1 \leq i \leq m)$ ayant des vitesses $v_1', ..., v_i'$ est notée par $c_i(x, v, v_1', ..., v_i')$. $1 \leq i \leq m$ et

$$c_0(x,\ v) + \sum_{k=1}^{m} \int_{V^k} c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k')dv_1'...dv_k' = 1 \tag{0.5}$$

où $c_0(x,\ v)$ est la probabilité d'être absorbé.

Cette étude est faite sous la forme des étapes suivantes :

1−Formulation du problème stationnaire à un problème du point fixe d'un opérateur non linéaire bien choisi.

2−Par des arguments de monotonicité, on montre l'existence d'une solution maximale.

3−On montre que la solution maximale du problème dans le cas critique et sous-critique est réduite à la solution triviale.

4−Dans le cas supercritique, on montre l'existence d'une solution non-triviale qui représente une solution minimale non-triviale.

5−On étudie l'unicité des solutions non-triviales moyennant des arguments de concavité.

6−Cette étape est consacrée à l'existence des solutions globales du problème d'évolution.

7−On montre que les solutions du problème d'évolution convergent $(t \to \infty)$ vers la solution maximale du problème stationnaire sous la condition que la donnée initiale est minorée par une constante strictement positive.

CHAPITRE 3

Etude de l'existence de solutions

d'un problème non-linéaire intervenant en dynamique des populations

Notre objectif dans ce chapitre est l'étude de quelques résultats d'existence des solutions de l'équation non-linéaire intégro-différentielle suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi}{\partial a}(a,\ l) + \lambda \psi(a,\ l) + \sigma(a,\ l,\ \psi(a,\ l)) \\ &= \int_{l_1}^{l_2} \nu(a,\ l,\ l') f(a,\ l',\ \psi(a,\ l'))\, \chi_\Delta(a,\ l')\, dl' \end{aligned} \tag{0.6}$$

où χ_Δ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\Delta := \{(a,\ l);\ 0 < a < l,\ l_1 < l < l_2\} \textit{ avec } 0 < l_1 < l_2 < +\infty.$$

Cette équation modélise l'age structuré de la prolifération d'une population cellulaire ayant des propriétés héritées introduite par Lebowitz et Rubinow [24]. La variable l désigne la longueur du cycle des cellules, qui est le temps entre la naissance des cellules et leur divisions. C'est une caractéristique inhérente aux cellules individuelles et elle est supposée être déterminée à la naissance. La variable a est l'âge de la cellule individuelle. Il est définie de sorte que les cellules naîssent au temps $a = 0$ (cellules filles) et se divisent au temps $a = l$ (cellules mères). Les constantes l_1 et l_2 représentent, respectivement, la longueur minimale du cycle et la longueur maximale. L'inconnue $\psi(a, l)$ désigne la densité de la population cellulaire ayant l'âge a et la longueur de cycle l. A la mitose, les cellules filles et les cellules mères sont reliées par une règle non-linéaire décrivant les conditions aux bords. Elle s'écrit sous la forme

$$\psi(0,\ l) = R\psi(l,\ l) \tag{0.7}$$

où R est un opérateur non-linéaire qui modélise la transition de la longueur de cycle mères à la longueur du cycle filles, couvrant en particulier, les situations biologiques usuelles. Pour les significations biologiques, on renvoie à [19, 24, 39, 40, 23]

Ici, on présente quelques résultats d'existence dans L_1 du problème aux bords (0.6) - (0.7). Notre approche est basée sur des méthodes topologiques utilisant les propriétés des ensembles faiblement compacts dans L_1.

Le planning du travail de ce chapitre est donné comme suit :

1−Transformation du problème (0.6) en un problème du point fixe faisant intervenir un opérateur non linéaire faiblement compact.

2−Afin de compenser l'handicap de la compacité dans l'espace $L_1(\Delta;\ dadl)$, on cherche les solutions dans l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble bien choisi.

3−Ensuite, on obtient des résultats d'existence en utilisant un critère de Dunford-Pettis faible dans L_1.

Chapitre 1

Résultats préliminaires

l'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce mémoire.

1.1 Théorie spectrale des opérateurs

Soit X un espace de Banach complexe et

$$T : D(T) \subset X \to X$$

un opérateur non borné que l'on suppose fermé et à domaine dense. On appelle ensemble résolvant de T, l'ensemble

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda - T : D(T) \to X \ \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le spectre de T et sera noté $\sigma(T)$. On notera que si $\lambda \in \rho(T)$, l'inverse

$$R(\lambda,\ T) := (\lambda - T)^{-1}$$

existe et est borné, c'est à dire

$$R(\lambda,\ T) \in \mathcal{L}(X).$$

L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est un ouvert du plan complexe et l'application

$$\rho(T) \ni \lambda \to R(\lambda,\ T)$$

est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(T)$.
Le spectre de T, $\sigma(T)$ est un fermé de $\mathbb{C}$, et si de plus l'opérateur T est borné, alors $\sigma(T)$ est un compact non vide. On appelle alors rayon spectral de T, le nombre que l'on note

$$r_\sigma(T) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Lorsque T n'est pas borné, un paramètre utile pour localiser son spectre est donné par l'abscisse sepectrale

$$s(T) := \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

On examine à présent la structure du spectre. Le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ est défini par :

$$\sigma_p(T) := \{\lambda;\ \lambda - T : D(T) \to X \ \text{ n'est pas injectif}\}.$$

un élément de $\sigma_p(T)$ est dit valeur propre de T, il lui correspond un x non nul dans $D(T)$ tel que $(\lambda - T)x = 0$ que l'on appelle vecteur propre correspondant à λ.
On définit le spectre approché de T par

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda;\ \lambda - T : D(T) \to X \ \text{ n'est pas injectif ou à image non fermée}\},$$

(L'image d'un opérateur non borné A est définie par $\{Ax : x \in D(A)\}$). Le spectre résiduel est

$$\sigma_R(T) := \{\lambda;\ \lambda - T : D(T) \to X \text{ à image non dense}\}.$$

On a toujours

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_R(T) \text{ et } \sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T).$$

1.2 Théorie spectrale des semigroupes

Commençons par rappeler la définition d'un C_0-semigroupe (ou un semi-groupe fortement continu).

Définition 1.2.1 *Soit $(U(t))_{t\geq 0}$une famille d'opérateurs linéaires bornés sur X. On dit que $(U(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semigroupe si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $U(0) = I_X$ (l'opérateur identité),
- $U(t+s) = U(t)U(s)$ pour $t,\ s \geq 0$ (propriété de semigroupe),
- $0 \leq t \longmapsto U(t)x$ est continue pour tout $x \in X$ (continuité forte).

A ce C_0-semigroupe on peut associer un générateur T défini par

$$Tx = \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t}$$

de domaine

$$D(T) := \left\{x \in X : \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x - x}{t} \text{ existe}\right\}.$$

Le célèbre théorème de Hille-Yosida établit une correspondance biunivoque entre les C_0-semigroupes et les générateurs [16, 32, 15].

Théorème 1.2.1 *Soit T un opérateur fermé à domaine dense sur X. Alors T est générateur d'un C_0-semigroupe de X si et seulement s'il existe deux réels $M \geq 0$ et ω tels que* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(T)$ *et*

$$\|R(\lambda,\ T)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega, \quad n \geq 0.$$

La résolvante $R(\lambda,\ T)$ peut s'écrire comme transformée de Laplace du semigroupe :

$$R(\lambda,\ T) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} U(t)\, ds \ \forall \ \operatorname{Re}\lambda > \omega_0(T)$$

où

$$\omega_0(U(.)) := \inf\left\{\omega \in \mathbb{R} : \text{il existe } M_\omega \geq 1 \text{ tel que } \|U(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}\ \forall t \geq 0\right\}$$

est le type de $(U(t))_{t \geq 0}$.

Dans toute la suite on considèrera T générateur d'un C_0-semigroupe de X noté $(U(t))_{t \geq 0}$ (parfois, on utilisera la notation $\left(e^{tT}\right)_{t \geq 0}$ pour le semigroupe). Dans ce cas, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Tu(t) \quad t > 0 \\ \\ \qquad u(0) = u_0 \in X, \end{cases}$$

admet une solution unique donnée par

$$u(t) = U(t)u_0 \quad t \geq 0.$$

La détermination du spectre de semigroupe constitue un important outil pour accèder au comportement asymptotique (quand t→ ∞) de la solution $u(.)$.
On note que le type $\omega_0(T)$ est relié au spectre de $(U(t))_{t\geq 0}$ par l'identité

$$r_\sigma(U(t)) = e^{t\omega_0(T)} \quad (t \geq 0).$$

Malheureusement, en toute généralité on n'a qu'une inclusion concernant le théorème de l'application spectral $e^{t\sigma(T)} \subset \sigma(U(t))$ (voir [15, p. 253]) pour des situations où linclusion précédente est stricte.

1.3 Cadre fonctionnel (Cas neutronique)

Les équations de la neutronique décrivent l'évolution temporelle des distributions des neutrons dans un milieu fissil ou pas. Ces équations s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,\ v,\ t) + v\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\ v,\ t) + \sigma(x,\ v)\varphi(x,\ v,\ t) = K\varphi(x,\ v,\ t) \tag{1.1}$$

avec généralement un flux rentrant nul

$$\varphi|_{\Gamma_-} = 0 \tag{1.2}$$

et une distribution initiale

$$\varphi(x,\ v,\ 0) = \varphi_0(x,\ v), \tag{1.3}$$

où $(x,\ v) \in \Omega \times V$, Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, $V \subset \mathbb{R}^N$ est l'ensemble des vitesses admissibles et

$$\Gamma_- = \{(x,\ v) \in \partial\Omega \times V : v \text{ est rentrant en } x \in \partial\Omega\}.$$

Les conditions aux bords (1.2) sont dites absorbantes. La fonction $\sigma(.,\ .)$ représente la fréquence de collision (appelée aussi section efficace d'absorption). L'opérateur K est un opérateur linéare dit opérateur de collision, il interprète l'interaction entre les particules et le milieu du centre serveur. Classiquement cet opérateur est donné par

$$K\varphi(x,\ v)=\int_V k(x,\ v,\ v')\,\varphi(x,\ v')\,d\mu(v'),\tag{1.4}$$

où $k(.,\ .,\ .)$ est appelé noyau de collision et V est le support d'une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n$ non nécessairement finie notée μ. Dans le modèle continu, V représente une couronne fermée $\{v\in\mathbb{R}^n : a\leq|v|\leq b\}$ $(0\leq a<b\leq\infty)$ munie de la mesure de Lebesgue volumique et dans le modèle multigroupe, V est une réunion finie de sphères centrées en zéro, muni d'une mesure μ combinaison de mesures de Lebesgue surfaciques correspondant à ces sphères. Pour les détails sur les considérations physiques de ces équations on pourra consulter par exemple [6, 13, 41] [12, chapitre XXI, §1].

L'équation du transport linéaire est modélisée traditionellement par le problème d'évolution représentant un problème de Cauchy abstrait dans $L^p(\Omega\times V)$ $(1\leq p<+\infty)$ suivant :

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}(t)=(T+K)\,\varphi(t) & (t>0)\\[2ex] \varphi(0)=\varphi_0\end{cases}\tag{1.5}$$

où T désigne l'opérateur d'absorpation :

$$T\varphi=-v.\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\sigma(x,\ v)\,\varphi(x,\ v)$$

de domaine

$$D(T)=\left\{\varphi\in L^p(\Omega\times V): v.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\in L^p(\Omega\times V),\ \varphi|_{\Gamma_-}=0\right\}$$

(pour le sens précis de la définition de $D(T)$ et la théorie des traces voir [3, 4, 8, 9, 38]) et K est l'opérateur de collision. Lopérateur T engendre un C_0-semigroupe explicite dit semigroupe d'absorption

$$U(t) : L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \longmapsto e^{-\int_0^t \sigma(x-sv,\, v)ds} \varphi(x - tv,\ v)\, \chi_{\{t<r(x,\, v)\}} \in L^p(\Omega \times V),$$

où $r(x,\ v) = \inf\{s > 0 : (x - sv) \notin \Omega\}$. Physiquement, $r(x,\ v)$ est le temps mis par un neutron, initialement en $x \in \Omega$ animé de la vitesse $-v$, pour atteindre (por la premiére fois) le bord $\partial\Omega$. Comme dans la plupart des modèles physiques l'opérateur de collision K est borné [7, 29], l'opérateur de transport T+K engendre un C_0 semigroupe $(V(t))_{t\geq 0}$, dit semigroupe de transport, qui résout le problème d'évolution (1.1)-(1.3). Ce semigroupe est donné par une série dite de Dyson-Phillips

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t), \tag{1.6}$$

où

$$U_0(t) = U(t) \text{ et } U_{j+1}(t) = \int_0^t U_0(t-s)\, KU_j(s)\, ds,\ j \geq 0,\ t \geq 0.$$

Définition 1.3.1 *un opérateur de collision $K : L^p(\Omega \times V) \longmapsto L^p(\Omega \times V)$ est dit régulier si sa restriction sur $L^p(V)$ (en fixant la position x) est un opérateur compact de $L^p(V)$ dans $L^p(V)$ ($\forall x \in \Omega$).*

Théorème 1.3.1 *soit un opérateur de collision régulier, alors*

1) Si $1 < p < +\infty$, alors $(\lambda - T)^{-1} K$ et $K(\lambda - T)^{-1}$ sont des opérateurs compacts
2) Si $p = 1$ alors $K(\lambda - T)^{-1} K$ est un opérateur faiblement compact mais en général $K(\lambda - T)^{-1}$ n'est pas faiblement compact .

On note que la compacité d'une itérée $\left[(\lambda - T)^{-1} K\right]^n$ permet de constater que $\sigma(T+K)$ (le spectre de l'opérateur T+K) se compose du demi-plan (le spectre de T) $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \leq -\lambda^*\}$ ($-\lambda^*$est l'absisse spectrale de T c'est à dire $-\lambda^* = \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda,\ \lambda \in \sigma(T)\}$ et, au plus, de valeurs propres isolées $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, ($\mathrm{Re}\,\lambda \geq -\lambda^*$), de multiplicité algébrique finie, où $\{\lambda_i : \mathrm{Re}\,\lambda_i \geq \alpha\}$ est au plus fini pour tout $\alpha > -\lambda^*$.

1.4 Cadre fonctionnel (Dynamique des populations)

Dans cette partie, on va introduire quelques résultats et définitions préliminaires dont on aura besoin au chapitre 3. Soit

$$X := L_1(\Delta;\ dadl)$$

où $\Delta := \{(a,l);\ 0 < a < l,\ l_1 < l < l_2\}$ avec $0 < l_1 < l_2 < +\infty$ et notons parX_i, $i = 1, 2$, les espaces frontières $X_i := L_1(\Gamma_i;\ dl)$, où $\Gamma_1 := \{(0,\ l)\,;\ l \in]l_1,\ l_2[\}$ et $\Gamma_2 := \{(l,\ l)\,;\ l \in]l_1,\ l_2[\}$. Soit W l'espace de Sobolev partiel défini par

$$W = \{\psi \in X;\ \frac{\partial\psi}{\partial a} \in X \text{ et } \psi_{|\Gamma_1} \in X_1\}.$$

Rappelons que si

$$\overline{W} = \{\psi \in X;\ \frac{\partial\psi}{\partial a} \in X \text{ et } \psi_{|\Gamma_2} \in X_2\}$$

alors $W = \overline{W}$. En d'autres termes, chaque fonction $\psi \in W$ admet des traces $\psi_{|\Gamma_1}$ et $\psi_{|\Gamma_2}$ sur les espaces frontières (aux bords) X_1 et X_2, respectivement.

On suppose que l'opérateur aux bords de transition R défini de X_2 dans X_1 satisfait la condition suivante :

(H1) *il existe* $b > 0$ *tel que* $|Ru_1 - Ru_2| \leq b|u_1 - u_2|$, $\forall u_1,\ u_2 \in X_2$.

Il s'ensuit donc que

$$|Ru_1| \leq b|u_1 - u_2| + |Ru_2|, \ \forall u_1,\ u_2 \in X_2$$

posons $u_2 = 0$, il vient

$$|Ru| \leq b|u| + |R(0)|, \ \forall u \in X_2.$$

et par passage à la norme, on obtient :

$$\|Ru\| \leq b\|u\| + \|R(0)\|, \ \forall u \in X_2 \tag{1.7}$$

Comme conséquence de (H1) et (1.7), l'opérateur R est continu et envoie les parties bornées de X_2 en parties bornées deX_1.
Soit A_R l'opérateur défini par

$$\begin{cases} A_R : D\left(A_R\right) \subset X \to X \\ \psi \to A_R\psi\left(a,\ l\right) := -\dfrac{\partial\psi}{\partial a}\left(a,\ l\right) - \mu\left(a,\ l\right)\psi\left(a,\ l\right) \\ D\left(A_R\right) = \{\psi \in W;\ R(\psi_{|\Gamma_2}) = \psi_{|\Gamma_1}\}. \end{cases}$$

Où $\mu\left(.,\ .\right) \in L_\infty\left(\Delta\right)$ et soit $\underline{\mu}$ le réel défini par :

$$\underline{\mu} = \inf -ess\left\{\mu\left(.,\ .\right);\ \left(a,\ l\right) \in \Delta\right\}.$$

Pour permettre d'établir une formulation abstraite de la résolvante de l'opérateur A_R, on introduit les opérateurs suivants

$$\Theta_\lambda : X_1 \to X_2,\ u \to (\Theta_\lambda u)(l,\ l) := u(0,\ l)\, e^{-\int_0^l (\lambda+\mu(s,\ l))ds};$$

$$\Lambda_\lambda : X_1 \to X,\ u \to (\Lambda_\lambda u)(a,\ l) := u(0,\ l)\, e^{-\int_0^a (\lambda+\mu(s,\ l))ds};$$

$$\Xi_\lambda : X \to X_2,\ u \to (\Xi_\lambda u)(l,\ l) := \int_0^l e^{-\int_s^l (\lambda+\mu(\tau,\ l))d\tau} u(s,\ l)\, ds;$$

$$\Pi_\lambda : X \to X,\ u \to (\Pi_\lambda u)(a,\ l) := \int_0^a e^{-\int_s^a (\lambda+\mu(\tau,\ l))d\tau} u(s,\ l)\, ds.$$

Dans [23], les auteurs ont montré que pour λ satisfaisant $\operatorname{Re}\lambda > -\underline{\mu}$, alors tous les opérateurs précédents sont bornés, positifs (dans le cas $\lambda \in \mathbb{R}$) et leurs normes vérifient :

$$\|\Theta_\lambda\| \leq e^{-l_1\left(\operatorname{Re}\lambda+\underline{\mu}\right)},\ \|\Lambda_\lambda\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda+\underline{\mu})},\ \|\Xi_\lambda\| \leq 1,\ \|\Pi_\lambda\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}\lambda+\underline{\mu})}$$

Soit Maintenant $f \in X_2$, on définit l'opérateur $\mathcal{A}_{(\lambda,\ f)}$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{(\lambda,\ f)} : X_2 \to X_2 \\ u \longmapsto \mathcal{A}_{(\lambda,\ f)} u := \Theta_\lambda R u + f. \end{cases}$$

pour $\operatorname{Re}\lambda > -\underline{\mu}$, on a :

$$\|\mathcal{A}_{(\lambda,\ f)}\varphi_1 - \mathcal{A}_{(\lambda,\ f)}\varphi_2\| \leq b e^{-l_1\left(\operatorname{Re}\lambda+\underline{\mu}\right)} \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in X_2$ car :

$$\|\mathcal{A}_{(\lambda,\, f)}\varphi_1 - \mathcal{A}_{(\lambda,\, f)}\varphi_2\| = \|(\Theta_\lambda R\varphi_1 + f) - (\Theta_\lambda R\varphi_2 + f)\|$$

$$= \|(\Theta_\lambda(R\varphi_1 - R\varphi_2)\|$$

$$\leq e^{-l_1\left(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\mu}\right)} b\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

Donc, si $\operatorname{Re}\lambda > \max(\ -\underline{\mu},\ -\underline{\mu} + \frac{1}{l_1}\ln(b))$, l'opérateur $\mathcal{A}_{(\lambda,\, f)}$ est une contraction et par suite d'aprés le théorème du point fixe de Banach, le problème $u = \Theta_\lambda Ru + f$ posséde une solution unique $u = u(\lambda,\ f) \in X_2$.

Soit $\mathcal{J}_\lambda$ l'operateur qui envoie chaque élément f de X_2 à la solution u de l'équation $u = \Theta_\lambda Ru + f$ noté $\mathcal{J}_\lambda f = u$

Il est clair que :

$$\mathcal{J}_\lambda f = \Theta_\lambda R(\mathcal{J}_\lambda f) + f,$$

et donc

$$\|\mathcal{J}_\lambda f_1 - \mathcal{J}_\lambda f_2\| \leq b e^{-l_1\left(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\mu}\right)}\|\mathcal{J}_\lambda f_1 - \mathcal{J}_\lambda f_2\| + \|f_1 - f_2\|$$

pour tous $f_1,\ f_2 \in X_2$, ce qui entraîne que :

$$\|\mathcal{J}_\lambda f_1 - \mathcal{J}_\lambda f_2\| - b e^{-l_1\left(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\mu}\right)}\|\mathcal{J}_\lambda f - \mathcal{J}_\lambda f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|,$$

il vient que :

$$\|\mathcal{J}_\lambda f_1 - \mathcal{J}_\lambda f_2\| \leq (1 - be^{-l_1(\mathrm{Re}\,\lambda + \underline{\mu})})^{-1}\|f_1 - f_2\|$$

ce qui montre la contiunité de $\mathcal{J}_\lambda$. Maintenant, en prenant $f_2 = 0$ dans la dernière équation, on obtient :

$$\|\mathcal{J}_\lambda f_1\| \leq (1 - be^{-l_1(\mathrm{Re}\,\lambda + \underline{\mu})})^{-1}\|f_1\| + \|\mathcal{J}_\lambda(0)\| \tag{1.8}$$

Lemme 1.4.1 *On suppose que l'hypothèse (H_1) est satisfaite et soit λ tel que* $\mathrm{Re}\,\lambda > \max($ $-\underline{\mu}, -\underline{\mu} + \frac{1}{l_1}\ln(b))$. *Alors :*
(1) $\mathcal{J}_\lambda$ est continue et envoie les parties bornées en parties bornées
(2) $(\lambda - A_R)$est inversible et $(\lambda - A_R)^{-1}$est donné par :

$$(\lambda - A_R)^{-1} = \Lambda_\lambda R \mathcal{J}_\lambda \Xi_\lambda + \Pi_\lambda. \tag{1.9}$$

De plus, $(\lambda - A_R)^{-1}$est continue et envoie les parties bornées en parties bornées.

Preuve. L'assertion (1) est facile à vérifier d'aprés les inégalités précédentes. Pour prouver (2), soit $\varphi \in X$ on considére le probléme

$$(\lambda - A_R)\psi = \varphi, \tag{1.10}$$

où $\psi \in D(A_R)$. La solution de l'équation (1.10) est donnée formellement par :

$$\psi(a, l) = \psi(0, l)\, e^{-\int_0^a (\lambda + \mu(s, l))ds} + \int_0^a e^{-\int_s^a (\lambda + \mu(\tau, l))d\tau} \varphi(s, l)\, ds \tag{1.11}$$

En particulier, pour $a = l$, on a :

$$\psi(l,\ l) = \psi(0,\ l)\, e^{-\int_0^l (\lambda+\mu(s,\ l))ds} + \int_0^l e^{-\int_s^l (\lambda+\mu(\tau,\ l))d\tau} \varphi(s,\ l)\, ds \tag{1.12}$$

En utilisant le fait que ψ satisfait les conditions aux bords, l'équation (1.12) peut être écrite sous la forme

$$\psi_{|\Gamma_2} = \Theta_\lambda R \psi_{|\Gamma_2} + \Xi_\lambda \varphi \tag{1.13}$$

Par la définition de $\mathcal{J}_\lambda$, la solution de l'équation (1.13) est donnée par $\psi_{|\Gamma_2} = \mathcal{J}_\lambda \Xi_\lambda \varphi$. D'autre part, l'équation (1.11) peut être écrite sous la forme $\psi = \Lambda_\lambda R \psi_{|\Gamma_2} + \Pi_\lambda \varphi$. En substituant $\psi_{|\Gamma_2}$dans l'expression de ψ, on obtient $\psi = \Lambda_\lambda R \mathcal{J}_\lambda \Xi_\lambda \varphi + \Pi_\lambda \varphi$. Ceci montre que $(\lambda - A_R)$ est inversible et $(\lambda - A_R)^{-1}$est donnée par (1.9).

La dernière partie de la seconde assertion découle du fait que les opérateurs Λ_λ, Ξ_λ, Π_λ sont bornés et les propriétés des opérateurs R et $\mathcal{J}_\lambda$.■

Soit Maintenant l'opérateur K défini par :

$$\begin{aligned} K \quad &: \quad X \to X, \\ \psi \quad &\to \quad (K\psi)(a,\ l) := \int_{l_1}^{l_2} \nu(a,\ l,\ l')\, \psi(a,\ l')\, \chi_\Delta(a,\ l')\, dl' \end{aligned} \tag{1.14}$$

où $\nu(.,\ .,\ .)$ est une fonction mesurable sur $\Delta \times [l_1,\ l_2]$. Ensuite, on introduit l'extension $\widetilde{K}$ de K à $L_1([0,\ l_2] \times [l_1,\ l_2];\ dadl)$ donnée par :

$$\begin{cases} \widetilde{K} : L_1([0,\ l_2] \times [l_1,\ l_2];\ dadl) \to L_1([0,\ l_2] \times [l_1,\ l_2];\ dadl) \\ \qquad\qquad \varphi \to \int_{l_1}^{l_2} \widetilde{\nu}(a,\ l,\ l')\, \varphi(a,\ l')\, dl', \end{cases}$$

où $\widetilde{\nu}$ est une fonction mesurable sur $[0,\ l_2] \times [l_1,\ l_2] \times [l_1,\ l_2]$ telle que $\widetilde{\nu}|_{\Delta\times[l_1,\ l_2]} = \nu$.

On observe que $\widetilde{K}$ agit seulement sur l'. Donc, on peut considérer $\widetilde{K}$ comme fonction $\widetilde{K}(.)$: $a \in [0,\ l_2] \to \widetilde{K}(a) \in Z$ où $Z := \mathcal{L}(L_1([l_1,\ l_2];\ dl))$.

Dans la suite du chapitre 3, l'opérateur $\widetilde{K}$ supposé régulier dans le sens suivant :

(H2) $\widetilde{K}(.)$ est strictement mesurable, il existe un sous-ensemble compact $C \subseteq Z$ tel que $\widetilde{K}(a) \in C$ presque partout et $\widetilde{K}(a) \in \mathcal{K}(L_1([l_1,\ l_2];\ dl))$ presque partout,

où $\mathcal{K}(L_1([l_1,\ l_2];\ dl))$ désigne l'ensemble des opérateurs compacts sur $L_1([l_1,\ l_2];\ dl)$.

Les opérateurs K sous la forme (1.14) ayant une extension $\widetilde{K}$ et satisfont (H2) possèdent la propriété d'approximation suivante :

Lemme 1.4.2 *On suppose que l'hypothèse (H2) est satisfaite. Alors K peut être approché, au sens de la topologie uniforme, par une suite $(K_n)_n$ d'opérateurs linéaires définie par*

$$(K_n\psi)(a,\ l) = \int_{l_1}^{l_2} \left(\sum_{i\in I} \eta_i(a)\,\theta_i(l)\,\beta_i(l')\right) \psi(a,\ l')\,\chi_\Delta(a,\ l')\,dl',$$

où $\eta_i \in L_\infty([0,\ l_2];\ da)$, $\theta_i \in L_1([l_1,\ l_2];\ dl)$, $\beta_i \in L_\infty([l_1,\ l_2];\ dl)$ et I est fini. Notons que ce lemme est un cas particulier du lemme 3.3.1 mentionné dans l'Appendice couvrant situation $p = 1$ et $p \in]1,\ +\infty[$.

On a aussi le lemme suivant qui va joure un rôle important dans la suite de cette analyse.

Lemme 1.4.3 *On suppose que (H1), (H2) sont satisfaites. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que* $\mathrm{Re}\,\lambda > \max(-\underline{\mu},\ -\underline{\mu} + \frac{1}{l_1}\ln(b))$, *l'opérateur $(\lambda - A_R)^{-1}K$ est faiblement compact dans X.*

Preuve. Soit λ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda > \max(\ -\underline{\mu},\ -\underline{\mu} + \frac{1}{l_1}\ln(b))$. Suivant le Lemme (1.4.1)(2), il suffit de prouver la faiblement compacts des opérateurs $\Lambda_\lambda R \mathcal{J}_\lambda \Xi_\lambda K$ et $\Pi_\lambda K$. Notre première démarche est de vérifier que $\Xi_\lambda K$ et $\Pi_\lambda K$ sont faiblement compacts sur X.

En effet, suivant le Lemme (1.4.2) et la linéarité de K, il suffit d'établir la faiblement compacité des opérateurs $\Xi_\lambda K$ et $\Pi_\lambda K$ où K est un opérateur défini sur X par :

$$(K\psi)(a,\ l) = \int_a^{l_2} (\eta(a)\,\theta(l)\,\beta(l'))\,\psi(a,\ l')\,\chi_\Delta(a,\ l')\,dl',$$

où $\eta \in L_\infty([0,\ l_2];\ da)$, $\theta \in L_1([l_1,\ l_2];\ dl)$, $\beta \in L_\infty([l_1,\ l_2];\ dl)$. Notons que $\Xi_\lambda K$ peut être écrit sous la forme $\Sigma_\lambda P_\beta$ où P_β et Σ_λ sont donnés par :

$$P_\beta : X \to L_1([0,\ l_2];\ da),\ \varphi \to (P_\beta\varphi)(a) := \int_a^{l_2} \beta(l)\,\varphi(a,\ l)\,dl$$

et

$$\Sigma_\lambda : L_1([0,\ l_2];\ da) \to X_2,\ \varphi \to \int_0^l e^{-\int_s^l(\lambda+\mu(\tau,\ l))d\tau}\eta(s)\,\theta(l)\,\varphi(s)\,ds.$$

Il suffit donc d'établir que Σ_λ est faiblement compact. Pour le faira, Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble borné de $L_1([0,\ l_2];\ da)$ et soit $\varphi \in \mathcal{O}$ on a :

$$\int_E |(\Sigma_\lambda\varphi)(l)|\,dl \leq \ \|\eta\|_\infty \|\varphi\| \int_E |\theta(l)|\,dl,$$

pour tout sous-ensemble mesurable de $[l_1,\ l_2]$. Puisque $\lim\limits_{\gamma(E)} \int_E |\theta(l)|\,dl = 0$, où $\gamma(E)$ est la mesure de Lebesgue de E, appliquant le corollaire 11 dans [14, p. 294], on déduit que $\Sigma_\lambda(\mathcal{O})$ est un ensemble faiblement compact.

Par les mêmes arguments, on déduit la faiblement compact de $\Pi_\lambda K$. Il reste à montrer que $R\mathcal{J}_\lambda\Xi_\lambda K$ est faiblement compact. En effet, soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble borné de X. En utilisant (1.7) et (1.8) il vient :

$$\int_E |(R\mathcal{J}_\lambda)\,f(l)|\,dl \leq \int_E (|(R(0)(l))| + b\,|\mathcal{J}_\lambda(0)(l)|)\,dl + b\left(1 - be^{-l_1(\mathrm{Re}\,\lambda+\underline{\mu})}\right)^{-1} \int_E |f(l)|\,dl,$$

pou tout sous-ensemble mesurable E de $[l_1,\ l_2]$ et $f \in (\Xi_\lambda K)(\mathcal{O})$. Appliquant une dexième fois le corollaire 11 dans [14, p. 294] et en utilisant le fait que $(\Xi_\lambda K)(\mathcal{O})$ est faiblement compact, on déduit la faible compacité de $R\mathcal{J}_\lambda\Xi_\lambda K$ ce qui termine la preuve.■

Chapitre 2

Formulation stochastique en transport neutronique. Problèmes non linéaires

2.1 Résultats Préparatoires

On va supposer le long de ce chapitre que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné et convexe de $\mathbb{R}^n$. De plus, on va supposer que les fonctions $c_i(.) \quad (1 \leq i \leq m)$ sont positives et bornées. Et que

$$\sigma(x,\ v) = \sigma(v)\,,\ \ \inf \sigma(.) = \lambda^* > 0. \tag{2.1}$$

On va formuler (0.1)(0.2) à un problème du point fixe pour un opérateur convenable et on va établir quelques propriétés élémentaires. Tout d'abord, on va définir l'opérateur suivant :

$$T\psi = v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \sigma(x,\ v)\,\psi(x,\ v)\,;\ \ \psi \in D(T)$$

de domaine

$$D(T) = \left\{ \psi \in L^\infty(\Omega \times V)\,;\ v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \in L^\infty(\Omega \times V)\,,\ \psi_{|\Gamma_-} = 0 \right\}.$$

En tenant compte de (2.1), $(0 - T)^{-1}$existe et

$$\left\| (0 - T)^{-1} \right\|_{L(L^\infty(\Omega \times V))} \leq \frac{1}{\lambda^*}.$$

Notons qu'á partir de (0.5), le terme de droite dans (0.1) est égal à

$$-\sigma(v)\sum_{k=1}^{m}\int_{V^k} c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k')\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right] \tag{2.2}$$

Donc, on peut écrire (0.1) sous la forme

$$-T\psi=\sigma(v)\sum_{k=1}^{m}\int_{V^k} c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k')\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right]dv_1'...dv_k'$$

avec la condition $0\leq\psi\leq 1$. Introduisons l'ensemble

$$B=\{\psi\in L^\infty(\Omega\times V)\,;\ 0\leq\psi\leq 1\}$$

et l'opérateur non linéaire dans $L^\infty(\Omega\times V)$

$$N:\psi\to\sigma(v)\sum_{k=1}^{m}\int_{V^k} c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k')\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right]dv_1'...dv_k'.$$

Ce qui nous permet de formuler (0.1) et (0.2) sous la forme

$$\varphi=(0-T)^{-1}N\varphi;\ \varphi\in B$$

or

$$\varphi=\tilde{N}\varphi;\ \varphi\in B \tag{2.3}$$

où

$$\tilde{N} = (0 - T)^{-1} N.$$

Cette section est consacrée à quelques résultats de base sur $\tilde{N}$ et à d'autres auquels sont liés.

Lemme 2.1.1 *L'opérateur $\tilde{N}$ laisse invariant la boule unité, de plus, il est croissant.*

Preuve. Soit $\psi \in B$, c'est à dire $0 \leq \psi(x,\ v) \leq 1$. Donc, pour tout $1 \leq k \leq m$,

$$0 \leq 1 - \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \psi\left(x,\ v_j'\right)\right) \leq 1 \text{ sur } \Omega \times V^k$$

Donc

$$0 \leq N\psi \leq \sigma(v) \sum_{k=1}^{m} \int_{V^k} c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k') dv_1' ... dv_k' \leq \sigma(v). \tag{2.4}$$

D'autre part,

$$(0 - T)^{-1} \varphi(x,\ v) = \int_0^{s(x,\ v)} e^{-\sigma(v)s} \varphi(x - sv,\ v)\, ds$$

où

$$s(x,\ v) = \inf\{s > 0;\ x - sv \notin \Omega\}$$

Donc

$$(0 - T)^{-1} \sigma = \sigma(v) \int_0^{s(x,\ v)} e^{-\sigma(v)s} \leq 1$$

et en utilisant (2.4),

$$\tilde{N}\psi = (0 - T)^{-1} N\psi \leq 1$$

ce qui montre la première assertion. Considérons la fonction

$$F_k : (z_1, \ ..., \ z_k) \in [0, \ 1]^k \to 1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - z_j). \tag{2.5}$$

Il est clair que cette fonction est croissant sur $[0, \ 1]^k$. Ceci montre que N et $\tilde{N}$ sont croissant dans B.■

Introduisons à présent les opérateurs K et L suivants sur $L^{\infty}(\Omega \times V)$

$$K\varphi = \sigma(v) \sum_{k=1}^{m} \int_{V^k} c_k(x, \ v, \ v_1', \ ..., \ v_k') \left[\sum_{j=1}^{k} \varphi\left(x, \ v_j'\right) \right] dv_1'..dv_k' \tag{2.6}$$

et L est l'opérateur non-linéaire défini par :

$$L\varphi = \sigma(v) \sum_{k=1}^{m} \int_{V^k} c_k(x, \ v, \ v_1', \ ..., \ v_k') \left[\prod_{j=1}^{k} \left(1 - \varphi\left(x, \ v_j'\right)\right) - 1 + \sum_{j=1}^{k} \varphi\left(x, \ v_j'\right) \right].$$

Notons que

$$N = K - L. \tag{2.7}$$

Lemme 2.1.2 *L'opérateur L est positif.*

Preuve. Considérons la fonction

$$\overline{F}_k : (z_1, \ ..., \ z_k) \in [0, \ 1]^k \to \prod_{j=1}^{k} (1 - z_j) - 1 + \sum_{j=1}^{k} z_j. \tag{2.8}$$

On note que

$$\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial z_i}(z) = 1 - \prod_{j=1,\ j\neq i}^{k} (1 - z_j)$$

et que

$$\frac{\partial \overline{F}_k}{\partial z_i}(z) = 0 \iff z_j = 0 \ \ \forall j \neq i. \tag{2.9}$$

Donc $\overline{F}_k$ n'atteint pas son minimum dans $]0,\ 1[^k$. Pour montrer que $\overline{F}_k$ est positive, il suffit de montrer qu'elle est positive sur le bord de $[0,\ 1]^k$. Montrons ceci par récurrence. On note que $\overline{F}_1(z) = 0$. Supposons que $\overline{F}_{k-1}(z) \geq 0$ et choisissons $z \in \partial [0,\ 1]^k$, cést à dire

$$\exists 1 \leq i \leq k;\ z_i = 0 \text{ ou } \ z_i = 1.$$

Si $z_i = 1$, alors

$$\overline{F}_k\ (z) = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{k} z_j \geq 0$$

Si $z_i = 0$, donc

$$\overline{F}_k\ (z) = \prod_{j=1,\ j\neq i}^{k} (1 - z_j) - 1 + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{k} z_j = \overline{F}_{k-1}(\overline{z})$$

où $\overline{z} = (z_1,\ ...,\ z_{i-1},\ z_{i+1},\ ...,\ z_k)$. Donc $\overline{F}_k(z) \geq 0$ d'aprés l'hypothèse de récurrence. Donc, pour tout $\varphi \in B$, c'est à dire $0 \leq \varphi(x,\ v) \leq 1$,

$$\prod_{j=1}^{k} \left(1 - \varphi\left(x,\ v_j^{'}\right)\right) - 1 + \sum_{j=1}^{k} \varphi\left(x,\ v_j^{'}\right) \geq 0 \text{ sur } \Omega \times V^k,\ \ (1 \leq k \leq m)$$

ce qui prouve le résultat.■

Donnons maintenant le résultat de compacité

Lemme 2.1.3 *L'opérateur* $\left[(0-T)^{-1}K\right]^2$ *est compact sur* $L^\infty(\Omega\times V)$.

Preuve. On définit, pour $1\leq j\leq k$, l'opérateur

$$C_k^j:\varphi\in\ L^\infty(\Omega\times V)\to\sigma(v)\int_V c_k^j(x,\ v,\ v')\,\varphi(x,\ v')\,dv'$$

où $c_1^1(x,\ v,\ v')=c_1(x,\ v,\ v')$ et, pour $k\geq 2$,

$$c_k^j(x,\ v,\ v')=\int_{V^{k-1}}c_k(x,\ v,\ v_1',\ \ldots,\ v_{j-1}',\ v',\ v_{j+1}',\ldots,v_k')dv_1'\ldots dv_{j-1}'dv_{j+1}'\ldots dv_k'$$

Donc (2.6) amène à

$$K=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}C_k^j$$

et par suite

$$(0-T)^{-1}K=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}(0-T)^{-1}C_k^j$$

On note que $\left[(0-T)^{-1}K\right]^2$fait intervenir un opérateur sous la forme

$$(0-T)^{-1}C_k^j\,(0-T)^{-1}C_{k'}^{j'}$$

et $C_k^j\,(0-T)^{-1}C_{k'}^{j'}$ sont compacts dans $L^\infty(\Omega\times V)$, par dualité dans L^1, le résultat de compacité se déduit.■

On termine cette section par le résultat de régularité suivant pour un opérateur non-linéaire. On décompose l'opérateur polynômial N sous la forme

$$N = \sum_{k=1}^{m} N_k$$

où $N_1 = K$ est la partie linéaire, N_2 est la partie quadratique sous la forme

$$N_2\varphi = \int_{V^2} p_2(x,\ v,\ v_1,\ v_2)\,\varphi(x,\ v_1)\,\varphi(x,\ v_2)\,dv_1dv_2$$

et plus générallement,

$$N_k\varphi = \int_{V^k} p_k(x,\ v,\ v_1,\ ...,\ v_k)\,\varphi(x,\ v_1)\,...\varphi(x,\ v_k)\,dv_1...dv_k$$

où

$$p_k \in L^\infty\left(\Omega \times V^{k+1}\right);\ 1 \leq k \leq m.$$

Lemme 2.1.4 *Soit $r > nm$. Alors l'opérateur non-linéaire*

$$N(0-T)^{-1}N : L^\infty(\Omega \times V) \to L^\infty(\Omega \times V)$$

se prolonge à un opérateur continu de $L^r(\Omega \times V)$ dans $L^\infty(\Omega \times V)$.

Preuve. Notons que

$$N(0-T)^{-1}N = \sum_{i=1}^{m} N_i(0-T)^{-1}N$$

et que N_i est un monôme de degré i. Soit $\varphi \in L^\infty(\Omega \times V)$ et

$$\psi_j = (0 - T)^{-1} N_j \varphi.$$

Donc $N_i (0 - T)^{-1} N \varphi (x,\ v)$ est égal à

$$\sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_i=1}^{m} \int_{V^i} p_i (x,\ v,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_i) \psi_{j_1} (x,\ \omega_1) \ldots \psi_{j_i} (x,\ \omega_k).$$

Il suffit de restreindre notre travail à l'un des termes.

Pour simplifier les calculs, on va prendre le cas $j_1 = \ldots j_i = j$. Donc, on va traiter le cas de l'opérateur

$$\int_{V^i} p_i (x,\ \omega,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_i) (0 - T)^{-1} N_j \varphi (x,\ \omega_1) \times \ldots$$

$$\times (0 - T)^{-1} N_j \varphi (x,\ \omega_i) d\omega_1 \ldots d\omega_i. \tag{2.10}$$

Actuellement, ce terme n'est antre que $N_i (0 - T)^{-1} N_j \varphi$. On note que $(0 - T)^{-1} N_j \varphi (x,\ \omega)$ est égal à

$$\int_0^{s(x,\ \omega)} e^{-\sigma(\omega)s} ds \int_{V^j} p_j (x - s\omega,\ \omega,\ v_1,\ \ldots,\ v_j) \varphi (x - s\omega,\ v_1) \ldots$$

$$\times \varphi (x - s\omega,\ v_j) \chi_\Omega (x - s\omega) dv_1 \ldots dv_j.$$

Donc (2.10) est égal à

$$\int_{V^i} p_i (x,\ \omega,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_i) \prod_{e=1}^{i} \int_0^{s(x,\ \omega_e)} e^{-\sigma(\omega_e)s} ds \int_{V^j} p_j (x - s\omega_e,\ \omega_e,\ v_1,\ \ldots,\ v_j)$$

$$\times \varphi (x - s\omega_e,\ v_1) \ldots \varphi (x - s\omega_e,\ v_j) \chi_\Omega (x - s\omega_e) dv_1 \ldots dv_j d\omega_1 \ldots d\omega_i.$$

En utilisant le changement de variables $x'_e = x - s\omega_e$ ($1 \leq e \leq i$) $\quad dx'_e = (-1)^n s^n d\omega_e$, la valeur absolue de l'intégral est dominée par

$$\int_{\Omega^i} dx'_1 ... dx'_i \prod_{e=1}^{i} \left[\int_{|x-x'_e|}^{\infty} e^{-\lambda^* s} \frac{ds}{s^n} \right] [\widetilde{\varphi}(x'_e)]^j . \tag{2.11}$$

où

$$\widetilde{\varphi}(x'_e) = \int_V |\varphi(x'_e \, , \, v)| \, dv.$$

Aussi (2.11) est dominé par la constante

$$\prod_{e=1}^{i} \int_{\Omega} \frac{[\widetilde{\varphi}(x'_e)]^j}{|x - x'_e|^{n-1}} dx'_e = \left[\int_{\Omega} \frac{[\widetilde{\varphi}(y)]^j}{|x - y|^{n-1}} dy \right]^i .$$

par un simple argument de convolution, on peut voir que, pour $p > n$,

$$\left\| \int_{\Omega} \frac{[\widetilde{\varphi}(y)]^j}{|x - y|^{n-1}} dy \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \left\| \widetilde{\varphi}^j \right\|_{L^p(\Omega)} = c \left\| \widetilde{\varphi} \right\|^j_{L^{pj}(\Omega)} .$$

Donc, pour $r > nm$,

$$\left\| N_i (0 - T)^{-1} N_j \varphi \right\|_{L^\infty(\Omega \times V)} \leq c_r \left\| \widetilde{\varphi} \right\|^{ij}_{L^r(\Omega)} \leq \widetilde{c}_r \left\| \varphi \right\|^{ij}_{L^r(\Omega \times V)}.$$

Le résultat résulte du fait que $L^\infty(\Omega \times V)$ est dense dans $L^r(\Omega \times V)$.■

2.2 La solution maximale du problème stationnaire

On va étudier maintenant le problème du point fixe (2.3). Tout d'abord, on montre l'existence de la solution maximale.

Théorème 2.2.1 *Le problème (2.3) a une solution maximale.*

Preuve. On définit par récurrence la suite $\{\psi_k\}$

$$\psi_0 = 1, \ \psi_{k+1} = \ \tilde{N}\psi_k \quad (k \geq 0)$$

En tenant compte du Lemme 2.1.1, on aura,

$$0 \leq \psi_1 = \ \tilde{N}\psi_0 \leq 1 = \psi_0.$$

En utilisant une dexième fois le Lemme 2.1.1, il s'ensuit par récurrence, que

$$0 \leq \psi_{k+1} = \tilde{N}\psi_k \leq \tilde{N}\psi_{k-1} = \psi_k \leq 1. \tag{2.12}$$

Donc $\{\psi_k\} \subset B$ est décroissante. Ceci montre l'existence de $\overline{\varphi} \in B$ tel que

$$\psi_k \rightarrow \ \overline{\varphi} \text{ ponctuellement et en monotonie}$$

En particulier, $\psi_k \rightarrow \overline{\varphi}$ dans $L^r\left(\Omega \times V\right)$ pour tout r fini. Montrons à présent que

$$\psi_k \rightarrow \overline{\varphi} \text{ dans } L^\infty\left(\Omega \times V\right). \tag{2.13}$$

Comme

$$\psi_{k+1} = \left(0 - T\right)^{-1} N\psi_k,$$

il suffit de montrer que la suite $\{N\psi_k\}$ converge dans $L^\infty\left(\Omega \times V\right)$. Mais

$$N\psi_{k+1} = N\left(0 - T\right)^{-1} N\psi_k$$

Donc (2.13) se déduit du Lemme 2.1.4. Et par suite

$$\overline{\varphi} = \tilde{N}\overline{\varphi},\ \overline{\varphi} \in B. \tag{2.14}$$

On note que (2.13) va jouer un rôle dans la section 2.5. Soit $\varphi \in B$ un autre point fixe de $\tilde{N}$. De la relation, de $\varphi = \tilde{N}\varphi \leq 1 = \psi_0$, on peut voir par récurrence, que.

$$\varphi \leq \psi_k \quad \forall k$$

ce qui donne $\varphi \leq \overline{\varphi}$ et montre que $\overline{\varphi}$ est une solution maximale.■

On remarque à ce stade, que ceci neguarantit pas que $\overline{\varphi}$ une solution non triviale. L'existence d'une solution non-triviale est liée aux propriétés spectrales du problème linéaire. Pour finir, donnons quelques définitions. On dit que le problème (2.3) est sous-critique (resp. critique, resp. supercritique) si le rayon spectral

$$s(T) := \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda;\ \lambda \in \sigma(T+K)\}$$

est négatif (resp. égal à zéro, resp. positif). Il est facile de voir que ceci ramène à $r_\sigma\left[(0-T)^{-1}K\right] < 1$ (resp. $r_\sigma\left[(0-T)^{-1}K\right] = 1$, resp. $r_\sigma\left[(0-T)^{-1}K\right] > 1$). Tout d'abord on va donner des résultats de non-existence. Commençons par le plus simple.

2.2.1 Le cas sous-critique

Théorème 2.2.2 *Si $r_\sigma\left[(0-T)^{-1}K\right] < 1$ alors (2.3) n'admet pas une solution non-triviale*

Preuve. Soit

$$\varphi = \tilde{N}\varphi;\ \varphi \in B,\ \varphi \neq 0,$$

c'est à dire,

$$(0-T)^{-1} N\varphi = \varphi;\ \varphi \neq 0.$$

En utilisant la décomposition $N = K - L$ et le fait que L est positif,

$$(0-T)^{-1} K\varphi \geq \varphi;\ \varphi \geq 0,\ \varphi \neq 0$$

ce qui implique que $r_\sigma\left[(0-T)^{-1} K\right] \geq 1$ (contradiction).■

2.2.2 Le cas critique

On donne ici un autre résultat de nonexistence. Pour le faire, on a besoin de l'hypothèse

$$\exists 2 \leq k_0 \leq m;\ c_{k_0}(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_{k_0}') > 0 \text{ sur } \Omega \times V^{k_0+1}. \tag{2.15}$$

Théorème 2.2.3 *Soit* $r_\sigma\left[(0-T)^{-1} K\right] = 1$. *Si (2.15) est satisfaite, alors (2.3) n'a pas une solution non-triviale.*

Preuve. Supposons qu'il existe une solution non-triviale ψ

$$\psi \geq 0,\ \psi \neq 0 \text{ sur } \Omega \times V.$$

On note que

$$\prod_{j=1}^{k_0}\left(1-\psi\left(x,\ v_j'\right)\right) - 1 + \sum_{j=1}^{k_0}\psi\left(x,\ v_j'\right) \geq 0 \text{ sur } \Omega \times V^k$$

et $\overline{F}_{k_0}(z)$ définie par (2.8), s'annule seulement si $z_i = 0$ pour tout $i \in [1,\ 2,\ ...,\ k_0]$. Il s'ensuit, de (2.15), que

$$\int_{V^{k_0}} c_{k_0}(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_{k_0}')\left[\prod_{j=1}^{k_0}\left(1-\psi\left(x,\ v_j'\right)\right) - 1 + \sum_{j=1}^{k_0}\psi\left(x,\ v_j'\right)\right] dv_1'...dv_{k_0}'$$

est strictement positive et par suite $L\psi > 0$ p.p sur $\Omega \times V$. Donc

$$N\psi < K\psi \text{ p.p sur } \Omega \times V. \tag{2.16}$$

Soit T_0 et K_0 les opérateurs dans $L^1(\Omega \times V)$ tels que $T_0^* = T$ et $K_0^* = K$. Puisque $K_0(0 - T_0)^{-1}$ est à puissance compacte dans $L^1(\Omega \times V)$, il est irréducible car $\left[K_0(0 - T_0)^{-1}\right]^2$ est positif, en tenant compte de (2.15), donc, il existe $\psi_0 \in L^1(\Omega \times V)$ strictement positif tel que

$$K_0(0 - T_0)^{-1}\psi_0 = r_\sigma\left[K_0(0 - T_0)^{-1}\right]\psi_0 = \psi_0$$

Car

$$r_\sigma\left[K_0(0 - T_0)^{-1}\right] = r_\sigma\left[(0 - T_0)^{-1}K\right].$$

Donc, en utilisant (2.16),

$$\langle\psi_0, \psi\rangle = \left\langle\psi_0, \tilde{N}\psi\right\rangle < \left\langle\psi_0, (0 - T_0)^{-1}K\psi\right\rangle = \left\langle K_0(0 - T_0)^{-1}\psi_0, \psi\right\rangle = \langle\psi_0, \psi\rangle$$

Où $\langle ., .\rangle$ est le crochet de dualité entre $L^1(\Omega \times V)$ et $L^\infty(\Omega \times V)$. Ce qui termine la preuve.■

2.2.3 Le cas supercritique

On commence par le résultat d'existence

Théorème 2.2.4 *Si $r_\sigma\left[(0 - T)^{-1}K\right] > 1$ alors (2.3) a au moins une solution non-triviale.*

Preuve. Soit

$$F_k : (z_1, \ldots, z_k) \in [0, 1]^k \to 1 - \prod_{j=1}^{k}(1 - z_j)$$

Notons que

$$F_k(0) = 0, \ \frac{\partial F_k}{\partial z_i}(0) = 1 \ \ (1 \leq i \leq k). \tag{2.17}$$

Donc il existe $\xi \in [0, \ 1]^k$, $0 \leq \xi_i \leq z_i$ tel que

$$F_k(z) = \sum_{i=1}^{k} z_i \frac{\partial F_k}{\partial z_i}(\xi). \tag{2.18}$$

D'autre part, pour tout $0 < \mu < 1$, il existe $\varepsilon_0 > 1$ tel que

$$\left| \frac{\partial F_k}{\partial z_i}(z) - \frac{\partial F_k}{\partial z_i}(0) \right| \leq \mu, \text{ pour } \ 0 \leq z_i \leq \varepsilon_0 \ (1 \leq i \leq k)$$

En tenant compte de (2.17), on aura

$$\frac{\partial F_k}{\partial z_i}(z) \geq (1-\mu) \frac{\partial F_k}{\partial z_i}(0)$$

et, de (2.17) et (2.18), il vient

$$F_k(z) \geq (1-\mu) \sum_{i=1}^{k} z_i \frac{\partial F_k}{\partial z_i}(0) = (1-\mu) \sum_{i=1}^{k} z_i \text{ pour } 0 \leq z_i \leq \varepsilon_0 \ (1 \leq i \leq k),$$

C'est à dire

$$1 - \prod_{j=1}^{k} (1 - z_j) \geq (1-\mu) \sum_{i=1}^{k} z_i \text{ pour } 0 \leq z_i \leq \varepsilon_0 \ (1 \leq i \leq k). \tag{2.19}$$

Soit ψ^*une fonction propre positive de $(0-T)^{-1} K$ correspondante à son rayon spectral et telle que

$$\|\psi^*\|_{L^\infty(\Omega\times V)} = 1.$$

On définit

$$\varphi = \varepsilon\psi^* \text{ avec } \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{2.20}$$

Il s'ensuit, de (2.19), que

$$1 - \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \varphi\left(x,\ v_j'\right)\right) \geq (1-\mu)\sum_{j=1}^{k}\varphi\left(x,\ v_j'\right),\ (1 \leq i \leq k)$$

et par suite

$$\begin{aligned}
&\int_{V^k} c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k')[1 - \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \varphi\left(x,\ v_j'\right)\right)]dv_1'...dv_k' \\
\geq\ &(1-\mu)\int_{V^k} c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k')\sum_{j=1}^{k}\varphi\left(x,\ v_j'\right)dv_1'...dv_k'.
\end{aligned}$$

Donc

$$N\varphi \geq (1-\mu)\,K\varphi$$

et

$$\tilde{N}\varphi \geq (1-\mu)\,(0-T)^{-1}\,K\varphi = (1-\mu)\,r_\sigma\left[(0-T)^{-1}\,K\right]\varphi. \tag{2.21}$$

On choisit μ tel que

$$(1-\mu)\, r_\sigma \left[(0-T)^{-1} K\right] > 1. \tag{2.22}$$

Ce qui implique $\tilde{N}\varphi \geq \varphi$, c'est à dire φ est une sous-solution. On définit par récurrence une suite $\{\varphi_k\}$ par $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_{k+1} = \tilde{N}\varphi_k$. En raisonnant comme dans la preuve du Théorème 2.2.1, on vérifie que $\{\varphi_k\} \subset B$ est croissante et converge dans $L^\infty(\Omega \times V)$ vers ψ, qui est un point fixe nontrivial de $\tilde{N}$.■

Pour prouver que cette solution est la solution minimale, on a besoin du résultat technique.

Lemme 2.2.1 *La solution donnée par le théorème 2.2.4 est indépendante de ε.*

Preuve. Soit $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$ et soit ψ_1, ψ_2 les solutions correspondantes.
On pose

$$\varphi_1 = \varepsilon_1 \psi^*, \ \varphi_2 = \varepsilon_2 \psi^*.$$

De la relation $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et suivant la construction des solutions, il vient que $\psi_1 \leq \psi_2$. Supposons momentanément que

$$\varepsilon_2 \psi^* = \varphi_2 \leq \psi_1, \tag{2.23}$$

Donc ψ_1 est une borne supèrieure de la suite récurrente, ce qui donne la solution ψ_2 et par suite $\psi_2 \leq \psi_1$ et ceci implique l'égalité des solutions.

Alors, il suffit de prouver (2.23). On définit les ensembles

$$E = \{\varepsilon;\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2,\ \varepsilon\psi^* \leq \psi_1\ \}.$$

On note que E est un intervalle fermé non vide $(\varepsilon_1 \in E)$. Soit ε^* la plus petite des bornes inférieures de E. Supposons que $\varepsilon^* < \varepsilon_2$. En utilisant (2.21), on obtient

$$\begin{aligned}(1-\mu)\, r_\sigma\left[(0-T)^{-1} K\right] \times (\varepsilon^* \psi^*) &= (1-\mu)(0-T)^{-1} K (\varepsilon^* \psi^*) \\ &\leq \tilde{N}(\varepsilon^* \psi^*) \leq \tilde{N}(\psi_1) = \psi_1.\end{aligned}$$

Donc

$$\varepsilon^* (1-\mu)\, r_\sigma\left[(0-T)^{-1} K\right] \psi^* \leq \psi_1$$

Ce qui contredit la définition de ε^* en tenant compte de (2.22). Donc $\varepsilon^* = \varepsilon_2$ et donc on obtient (2.23).■

Prouvons maintenant le théorème suivant :

Théorème 2.2.5 *On suppose que* $r_\sigma\left[(0-T)^{-1} K\right] > 1$ *tel que :*

$$\begin{cases} \overline{c}_1(v) := \inf_{(x,\, v')\in\Omega\times V} c_1(x,\ v,\ v') > 0 \text{ sur } V \\ \overline{\overline{c}}(v') := \inf_{(x,\, v)\in\Omega\times V} c_1(x,\ v,\ v') > 0 \text{ sur } V \end{cases} \tag{2.24}$$

Donc (2.3) a une solution minimale non triviale.

Preuve. Montrons que la solution nontriviale ψ donnée par le Théorème 2.2.4 est la solution minimale. Soit φ une autre solution nontriviale. Pour montrer que $\psi \leq \varphi$ il suffit, en tenant compte de lemme 2.2.1 , de prouver que

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \varepsilon\psi^* \leq \varphi \tag{2.25}$$

Puisque φ doit être la borne supérieure de la suite récurrente qui commence par $\varepsilon\psi^*$ et tendant vers ψ. On pose

$$\alpha := r_\sigma \left[(0 - T)^{-1} K \right].$$

Puisque

$$\varepsilon\psi^* = (0 - T)^{-1} K \left(\varepsilon\alpha^{-1}\psi^* \right)$$

et

$$\varphi = \tilde{N}\varphi = (0 - T)^{-1} [N\varphi], \tag{2.26}$$

Il suffit de prouver que

$$\exists\varepsilon > 0; \; \tilde{N}\varphi \geq (0 - T)^{-1} K \left(\varepsilon\alpha^{-1}\psi^* \right)$$

qui n'est autre que

$$(0 - T)^{-1} [N\varphi] \geq (0 - T)^{-1} K \left(\varepsilon\alpha^{-1}\psi^* \right).$$

En tenant compte de la positivité de l'opérateur $(0 - T)^{-1}$, il suffit que

$$N\varphi \geq \varepsilon K \left(\alpha^{-1}\psi^* \right).$$

Finallement, ceci est vrai pour ε suffisamment petit s'il existe $c > 0$ tel que

$$N\varphi \geq c. \tag{2.27}$$

On note que

$$N\varphi = \sigma(v) \sum_{k=1}^{m} \int_{V^k} c_k(x,\ v,\ v_1',\ \dots,\ v_k') \left[1 - \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \varphi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right] dv_1' \dots dv_k'.$$

Donc

$$N\varphi \geq \sigma(v) \int_V c_1\left(x,\ v,\ v_1'\right) \varphi\left(x,\ v_1'\right) dv_1' = C_1^1 \varphi$$

et, en tenant compte de (2.26)

$$\varphi \geq (0-T)^{-1} C_1^1 \varphi$$

Ce qui donne

$$N\varphi \geq C_1^1 (0-T)^{-1} C_1^1 \varphi. \tag{2.28}$$

D'autre part,

$$C_1^1 (0-T)^{-1} C_1^1 \varphi = \int_{\Omega \times V} H(x,\ x',\ v,\ v') \varphi(x',\ v') dx' dv'$$

Où $H(x,\ x',\ v,\ v')$ est égal à

$$\int_0^\infty e^{-\sigma\left(\frac{x-x'}{s}\right)s} \sigma(v) c_1\left(x,\ v,\ \frac{x-x'}{s}\right) \sigma\left(\frac{x-x'}{s}\right) c_1\left(x',\ \frac{x-x'}{s},\ v'\right) \frac{ds}{s^n}$$

et $c_1(.,\ .,\ .)$ est prolongeable par zéro en dehors de V. Il s'ensuit que

$$H(x,\ x',\ v,\ v') \geq \lambda^{*2} \int_0^\infty e^{-\sigma\left(\frac{x-x'}{s}\right)s} h\left(\frac{x-x'}{s}\right) \frac{ds}{s^n} = G(x-x') > 0$$

Où $h(v) = \overline{c}_1(v) \overline{\overline{c}}(v)$. Donc

$$C_1^1\,(0-T)^{-1}\,C_1^1\varphi \geq \int_{\Omega} G\,(x-x')\,\widetilde{\varphi}\,(x')\,dx' := \overline{\varphi}\,(x)$$

Où $\widetilde{\varphi}\,(x') = \int_V \varphi\,(x',\ v')\,dv'$. On note que $\widetilde{\varphi} \neq 0$ car $\varphi \neq 0$, et que $\overline{\varphi}\,(x) > 0$. Finallement, un simple argument de convolution montre que $\overline{\varphi}\,(.)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ pour vu que $\overline{\varphi}\,(.)$ est bornée inférieurement par zéro sur Ω et donc (2.27) est satisfaite, en tenant compte de (2.28).■

2.3 L'unicité

Dans cette section, on va étudier l'unicité des solutions non-triviales, elle tourne autour des propriétés géométriques de quelques opérateurs liés à $\widetilde{N}$. On commence par la définition suivante :

Définition 2.3.1 *Un opérateur non linéaire positif A défini sur $B \subset L^{\infty}\,(\Omega \times V)$ est dit 1-concave si, pour tout $\psi \in B$, $\psi \neq 0$ et $0 < t < 1$, ils existent $\alpha,\ \beta,\ \mu > 0$ tels que :*

$$\begin{cases} A\,(t\psi) \geq (1+\mu)\,tA\,(\psi) \\ \alpha \leq A\,(\psi) \leq \beta. \end{cases}$$

Introduisons les opérateurs nonlinéaires C_k $(1 \leq k \leq m)$ sur $L^{\infty}\,(\Omega \times V)$

$$C_k\psi = \int_{V^k} \sigma\,(v)\,c_k(x,\ v,\ v_1',\ \ldots,\ v_k')\left[1 - \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right] dv_1' \ldots dv_k'$$

Donnons à présent le résultat d'unicité préliminaire suivant :

Théorème 2.3.1 *Si les opérateurs $C_k\widetilde{N}$ $(1 \leq k \leq m)$ sont 1-concaves, donc (2.3) a au plus une solution nontriviale.*

Preuve. Soit ψ_1 et ψ_2 deux solutions non triviales de (2.3). Soit $\left(\alpha_k^i,\ \beta_k^i,\ \mu_k^i\right)$ $(i = 1,\ 2)$ les paramètres correspondants à la 1-concavité des opérateurs $C_k\widetilde{N}$ et ψ_i $(i = 1,\ 2)$. On a

$$C_k\psi_1 = C_k\widetilde{N}\psi_1 \geq \alpha_k^1 = \frac{\alpha_k^1}{\beta_k^2}\beta_k^2 \geq \frac{\alpha_k^1}{\beta_k^2}C_k\widetilde{N}\psi_2 = \frac{\alpha_k^1}{\beta_k^2}C_k\psi_2$$

Ce qui montre que l'ensemble

$$\{\ t > 0;\ C_k\psi_1 \geq tC_k\psi_2\}$$

est non vide. Soit

$$t_k := \sup\{\ t > 0;\ C_k\psi_1 \geq tC_k\psi_2\} > 0.$$

Tout d'abord, on va prouver que

$$t_k \geq 1;\ 1 \leq k \leq m. \tag{2.29}$$

On suppose l'inverse, c'est à dire qu'il existe un entier k tel que

$$t_k = \inf\{t_j\ ;\ 1 \leq j \leq m\} < 1.$$

Il est clair que

$$C_j\psi_1 \geq t_kC_j\psi_2;\ \ 1 \leq j \leq m.$$

On note que

$$N = \sum_{j=1}^{m} C_j$$

et

$$\begin{aligned}\psi_1 &= (0-T)^{-1}\sum_{j=1}^{m} C_j\psi_1 \geq t_k\,(0-T)^{-1}\sum_{j=1}^{m} C_j\psi_2 \\ &= t_k\widetilde{N}\psi_2 = t_k\psi_2.\end{aligned}$$

Donc

$$\widetilde{N}\psi_1 \geq \widetilde{N}\,(t_k\psi_2)$$

et

$$\begin{aligned}C_k\psi_1 &= C_k\widetilde{N}\psi_1 \geq C_k\widetilde{N}\,(t_k\psi_2) \\ &\geq \left(1+\mu_k^2\right) t_k C_k\widetilde{N}\,(\psi_2) \\ &= \left(1+\mu_k^2\right) t_k C_k\psi_2.\end{aligned}$$

Ceci contredit la définition de t_k. Alors, (2.29) s'établit et par conséquent

$$\begin{aligned}C_k\psi_1 &\geq C_k\psi_2, 1 \leq k \leq m. \\ \psi_1 &= (0-T)^{-1}\sum_{k=1}^{m} C_k\psi_1 \\ &\geq (0-T)^{-1}\sum_{k=1}^{m} C_k\psi_2 = \psi_2.\end{aligned}$$

En changeant les rôles de ψ_1 et ψ_2, on obtient l'inégalité $\psi_2 \geq \psi_1$.■

Pour prouver que $C_k\widetilde{N} \quad (1 \leq k \leq m)$ sont -concaves, on a besoin du résultat technique.

Lemme 2.3.1 *Soit* $\psi \in B$, $\psi \neq 0$. *Donc, pour tout* $0 < t < 1$,

$$\left[1 - \prod_{j=1}^{k} \left(1 - t\psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right] - t\left[1 - \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right] \geq 0$$

et elle n'est pas identiquement nulle. De plus, si $\psi > 0$ p.p sur $\Omega \times V$ donc, sur $\Omega \times V^k$, on obtient

$$\left[1 - \prod_{j=1}^{k} \left(1 - t\psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right] - t\left[1 - \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right] > 0.$$

Preuve. Soit $F_k(z)$ définie par (2.5). On note qu'elle s'annule au point $z = 0$ et que

$$\frac{\partial F_k}{\partial z_i}(z) = \prod_{j=1,\ j\neq i}^{k} (1 - z_j).$$

Soit $z \in [0,\ 1]^k$ fixé. On pose

$$h(t) := F_k(tz)\ ;\ t \in [0,\ 1]$$

et notons que

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{k} z_i \frac{\partial F_k}{\partial z_i}(tz)$$

est décroissante si $z > 0 \quad (z_i > 0,\ \forall i)$. En utilisant $h(0) = 0$

$$\left(\frac{h(t)}{t}\right)' = \frac{th'(t) - h(t)}{t^2}$$

$$= \frac{th'(t) - (h(t) - h(0))}{t^2}$$

$$= \frac{th'(t) - th'(\theta t)}{t^2} \ (0 < \theta < 1).$$

Donc $\left(\frac{h(t)}{t}\right)' \leq 0$ et, si $z > 0$ $(z_i > 0, \ \forall i)$, $\left(\frac{h(t)}{t}\right)' < 0$ sur $]0, 1[$. Donc, en général,

$$\frac{F_k(tz)}{t} \geq F_k(z); \ t \in]0.\ 1[. \tag{2.30}$$

et, si $z > 0$,

$$\frac{F_k(tz)}{t} > F_k(z); \ t \in]0.\ 1[. \tag{2.31}$$

Ceci termine la preuve en choisissant $z_i = \psi(x,\ v_i')$ $(1 \leq i \leq k)$.■

On complète le résultat d'unicité précédent par.

Théorème 2.3.2 *On suppose que (2.24) est satisfaite et il existe* $\lambda_k > 0$ $(2 \leq k \leq m)$ *tel que :*

$$c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k') \geq \lambda_k \ \text{ sur } \ \Omega \times V^{k+1},$$

donc $C_k\widetilde{N}$ $(1 \leq k \leq m)$ est 1-concave.

Preuve. On commence par $C_1\widetilde{N}$. Soit $\psi \in B$, $\psi \neq 0$ et $0 < t < 1$. On va établir l'existence des nombres α_1, β_1, $\mu_1 > 0$ tels que

$$
\begin{aligned}
C_1\tilde{N}(t\psi) &\geq (1+\mu)\,tC_1\tilde{N}(\psi) \\
\alpha_1 &\leq C_1\tilde{N}(\psi) \leq \beta_1.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

L'existence de β_1 est claire. On a :

$$\tilde{N}(\psi) = (0-T)^{-1}\sum_{k=1}^{m} C_k\psi$$

Donc

$$C_1\tilde{N}(\psi) \geq C_1(0-T)^{-1}C_1\psi.$$

Les argumants utilisés dans la preuve du Théorème 2.2.5 montre que $C_1(0-T)^{-1}C_1\psi$ a une borne inférieur positive α_1. La première partie de (2.32) amène à

$$C_1\tilde{N}(t\psi) - tC_1\tilde{N}(\psi) \geq \mu_1 tC_1\tilde{N}(\psi).$$

Donc, il suffit de preuver l'existence de $d_1 > 0$ tel que

$$C_1\tilde{N}(t\psi) - tC_1\tilde{N}(\psi) \geq d_1 \tag{2.33}$$

et choisir μ_1 suffisamment petit. Par la linéarité de C_1,

$$C_1\tilde{N}(t\psi) - tC_1\tilde{N}(\psi) = \sum_{k=2}^{m}\left[C_1(0-T)^{-1}C_k(t\psi) - tC_1(0-T)^{-1}C_k(\psi)\right].$$

De plus, $C_1(0-T)^{-1}C_k(t\psi) - tC_1(0-T)^{-1}C_k(\psi)$ est égal à

$$C_1\,(0-T)^{-1}\,[C_k\,(t\psi)-tC_k\,(\psi)]$$

et $C_k\,(t\psi)-tC_k\,(\psi)$ est égal à

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{V^k}\sigma\,(v)\,c_k(x,\ v,\ v_1',..,\ v_k')\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-t\psi\,(x,\ v_j')\right)\right] \\ \displaystyle-\int_{V^k}\sigma\,(v)\,c_k(x,\ v,\ v_1',\ ..,\ v_k')t\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\psi\,(x,\ v_j')\right).\right]\geq 0 \end{array}\right. \tag{2.34}$$

Donc

$$C_1\tilde{N}\,(t\psi)-tC_1\tilde{N}\,(\psi)\geq 0$$

En tenant compte du Lemme 2.3.1 et, pour tout $k=2,\ ...,\ m$,

$$C_1\tilde{N}\,(t\psi)-tC_1\tilde{N}\,(\psi)\geq C_1\,(0-T)^{-1}\,[C_k\,(t\psi)-tC_k\,(\psi)]\,. \tag{2.35}$$

Soit

$$\varphi(x,\ v_1',\ ...,\ v_k')=\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-t\psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right]-t\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right].$$

On note, en tenant compte du Lemme 2.3.1 que $\varphi\geq 0$, $\varphi\neq 0$. Donc, le terme de droite de (2.35) est égal à

$$C_1\,(0-T)^{-1}\int_{V^k}\sigma\,(v)\,c_k(x,\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k')\varphi(x,\ v_1',\ ...,\ v_k')dv_1'...dv_k'$$

$$=\int_{\Omega\times V^k}P(x,\ x',\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k')\varphi(x',\ v_1',\ ...,\ v_k')dx'dv_1'...dv_k'$$

Où $P(x, x', v, v_1', ..., v_k')$ est égale à

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma\left(\frac{x-x'}{s}\right)s} \sigma(v)\, c_1\left(x,\ v,\ \frac{x-x'}{s}\right) \sigma\left(\frac{x-x'}{s}\right)$$

$$\times c_k\left(x',\ \frac{x-x'}{s},\ v_1',\ ...,\ v_k'\right) \frac{ds}{s^n} \tag{2.36}$$

et c_1, c_k se prolongent par zéro en dehors de V. On note que

$$\begin{aligned} P(x,\ x',\ v,\ v_1',\ ...,\ v_k') &\geq \lambda_k \lambda^{*2} \int_0^{\infty} e^{-\sigma\left(\frac{x-x'}{s}\right)s} \bar{\bar{c}}_1\left(\frac{x-x'}{s}\right) \frac{ds}{s^n} \\ &= \bar{\bar{G}}(x-x') > 0. \end{aligned}$$

Donc

$$C_1 (0-T)^{-1} [C_k(t\psi) - tC_k(\psi)] \geq \int_{\Omega} \bar{\bar{G}}(x-x')\, \Psi(x')\, dx'$$

Où

$$\Psi(x') = \int_{V^k} \varphi(x',\ v_1',\ ...,v_k') dv_1' ... dv_k'.$$

Puisque $\Psi \neq 0$, il s'ensuit que $\int_{\Omega} \bar{\bar{G}}(x-x')\, \Psi(x')\, dx' > 0$ (et est continue par un critère de convolution). Finallement, (2.33) provient de (2.35). On considère maintenant la 1-concavité de $C_k \widetilde{N}$ pour $k \geq 2$. Soit $\psi \in B$, $\psi \neq 0$ et $0 < t < 1$. On voit que pour α_k, β_k, $\mu_k > 0$ tels que

$$\begin{aligned} C_k\widetilde{N}(t\psi) &\geq (1+\mu_k)tC_k\widetilde{N}(\psi) \\ \alpha_k &\leq C_k\widetilde{N}(\psi) \leq \beta_k. \end{aligned} \tag{2.37}$$

L'existence de β_k est claire. D'autre part,

$$C_k\tilde{N}(\psi) = C_k(0-T)^{-1}\sum_{j=1}^{k} C_j\psi \geq C_k(0-T)^{-1}C_1\psi$$

et $C_k(0-T)^{-1}C_1\psi$ est égal à

$$\int\limits_{V^k} \sigma(v)\, c_k(x,\ v,\ v_1',\ \dots,\ v_k')\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-(0-T)^{-1}C_1\psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right]dv_1'...dv_k'$$

ce qui donne

$$C_k\widetilde{N}(\psi) \geq \lambda^*\lambda_k\int\limits_{V^k}\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-(0-T)^{-1}C_1\psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right]dv_1'...dv_k'.$$

En utilisant l'hypothèse de normalisation $\int\limits_{V^k} dv_1'...dv_k' = 1$,

$$\int\limits_{V^k}\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-(0-T)^{-1}C_1\psi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right]dv_1'...dv_k' = 1-(1-\varphi(x))^k$$

Où

$$\varphi(x) = \int\limits_{V}(0-T)^{-1}C_1\psi(x,\ v')\,dv'.$$

En raisonnant comme précédemment, on voit que $\varphi(x)$ admet une borne inférieure positive, ce qui donne l'existence des α_k. Pour montrer la première partie de (2.37), il suffit de prouver l'existence de nombres d_k tels que

$$C_k\tilde{N}(t\psi) - tC_k\tilde{N}(\psi) \geq d_k. \tag{2.38}$$

On note, qu'en tenant compte de (2.34), on obtient :

$$C_k\tilde{N}(t\psi) = C_k(0-T)^{-1}\sum_{j=1}^{k} C_j(t\psi) \geq C_k\left[(0-T)^{-1}\sum_{j=1}^{k} tC_j(\psi)\right].$$

On pose

$$\varphi := (0-T)^{-1}\sum_{j=1}^{k} C_j(\psi) \geq (0-T)^{-1}C_1\psi. \tag{2.39}$$

Donc

$$C_k\tilde{N}(t\psi) - tC_k\tilde{N}(\psi) \geq C_k(t\varphi) - tC_k(\varphi).$$

D'autre part, $C_k(t\varphi) - tC_k(\varphi)$ est égal à

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{V^k} \sigma(v)\, c_k(x,\ v,\ v_1',\ \ldots,\ v_k')\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-t\varphi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right] \\ \displaystyle -\int_{V^k} \sigma(v)\, c_k(x,\ v,\ v_1',\ \ldots,\ v_k')t\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\varphi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right] \end{array}\right.$$

et donc

$$C_k(t\varphi) - tC_k(\varphi) \geq \lambda^*\lambda_k\int_{V^k}\Phi(x, v_1', \ldots, v_k')dv_1'\ldots dv_k'.$$

où $\Phi(x,\, v_1',\, ...,\, v_k')$ est égale à

$$\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-t\varphi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right]-t\left[1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\varphi\left(x,\ v_j'\right)\right)\right].$$

Donc, en utilisant le fait que

$$z \to \left[1-\prod_{j=1}^{k}(1-tz_j)\right]-t\left[1-\prod_{j=1}^{k}(1-z_j)\right]$$

est non décroissante et (2.39), on obtient :

$$\int_{V^k}\Phi(x,\ v_1',\ ...,\ v_k')dv_1'...dv_k' \geq 1-(1-\widetilde{\varphi}(x))^k$$

avec

$$\widetilde{\varphi}(x)=\int\limits_V (0-T)^{-1}C_1\psi dv.$$

Comme dans le cas précédent, on voit que $\widetilde{\varphi}$ est minorée par zéro et donc (2.38) est satisfaite.■

2.4 Le problème d'évolution

On étudie maintenant l'existence de solutions globales dans B pour le problème d'évolution (0.3) qui peut être vu comme un probème de Cauchy

$$\frac{d\psi}{dt}=T\psi+N\psi;\ \psi(0)=\psi_0\in B. \tag{2.40}$$

Notons que T engendre un semi-groupe $\{S(t);\ t\geq 0\}$ dans $L^\infty(\Omega\times V)$

$$\varphi\in L^\infty(\Omega\times V)\to e^{-\sigma(v)t}\varphi(x-tv,\ v)\,\chi_\Omega(x-tv)$$

qui n'est pas de classe C^0. La résolution intégrale de (2.40) est donnée sous la forme

$$\psi(t) = S(t)\psi_0 + \int_0^t S(t-s) N\psi(s)\, ds, \quad \psi(t) \in B. \tag{2.41}$$

On définit l'espace X comme suit :

$$\{f : [0, \infty[\to L^\infty(\Omega \times V) ;\ \omega^*\text{-continue et bornée}\}$$

et

$$\overline{B} := \{f \in X;\ f(t) \in B,\ t \in [0, \infty[\}.$$

Théorème 2.4.1 *Soit $\psi_0 \in B$. Donc (2.41) admet une solution unique globale dans $\overline{B}$.*

Preuve. On définit l'application

$$\overline{N}\ : f \in \overline{B} \to S(t)\psi_0 + \int_0^t S(t-s) Nf(s)\, ds.$$

Il est facile de remarquer la continuité de l'application

$$t \to \langle \overline{N}f(t),\ g\rangle$$

Où $g \in L^1(\Omega \times V)$ et $\langle .,\ . \rangle$ est le crochet de dualité et dans ce cas $\overline{N}f(.)$ est ω^*-continue. Dautre part,

$$0 \le S(t)\psi_0 \le e^{-\sigma(v)t}$$

et

$$0 \leq N\psi(s) \leq \sigma(v).$$

Donc

$$\int_0^t S(t-s)\, N\psi(s)\, ds \leq \int_0^t e^{-\sigma(v)(t-s)}\sigma(v)\, ds \leq 1 - e^{-\sigma(v)t}$$

et donc $\overline{N}f(t) \in B$ pour tout $t \geq 0$. Soient Maintenant $\varphi,\ \psi \in \overline{B}$ et soit $\overline{t} > 0$ fixé. En utilisant la propriété de contraction de $\{S(t);\ t \geq 0\}$,

$$\left\|\overline{N}\varphi(t) - \overline{N}\psi(t)\right\| \leq \int_0^t \|N\varphi(s) - N\psi(s)\|\, ds$$

et

$$\sup_{t\in[0,\,\overline{t}]} \left\|\overline{N}\varphi(t) - \overline{N}\psi(t)\right\| \leq M\, \overline{t} \sup_{t\in[0,\,\overline{t}]} \|\varphi(s) - \psi(s)\|$$

où M est une constante de Lipschitz dépendante de l'opérateur polynômial N sur B car $\varphi(s)$, $\psi(s) \in B$. Donc, on obtient l'existence et l'unicité de la solution dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{M}\right]$. La solution globale sur l'intervalle $[0,\ +\infty[$ s'établit par prolongement.■

2.5 Le comportement asymptotique

Sette section est consacrée à l'étude quand $t \to +\infty$ du comportent asymptotique des solutions. Pour cet objectif, on va donner une autre approche de (2.41) basée sur des arguments de monotonicité.

Théorème 2.5.1 *Soit $\varphi \in B$ et on définit la suite récurrente $\{\psi_k\}$*

$$\psi_{k+1} = \overline{N}\psi_k,\ \psi_0 = \varphi.$$

(i) Si φ est une sous-solution, c'est à dire $\varphi \leq \overline{N}\varphi$, donc $\{\psi_k\}$ est croissante et converge ponctuellement vers la solution de (2.41)
(ii) Si φ est une sur-solution, c'est à dire $\varphi \geq \overline{N}\varphi$, donc $\{\psi_k\}$ est décroissante et converge ponctuellement vers la solution de (2.41).

Preuve. On note que

$$\psi_{k+1} = \overline{N}\psi_k = S(t)\psi_0 + \int_0^t S(t-s)\, N\psi_k(s)\, ds.$$

On sait bien que $\overline{N}$ laisse invariant $\overline{B}$. En utilisant le fait que N est croissant et que $S(t)$ est positif, le résultat s'établit.■

Avant de compléter notre analyse, on va donner le résultat préliminaire suivant :

Lemme 2.5.1 *Le sous-espace X_∞ de X constitié de toutes les applications ayant une limite pour la norme de $L^\infty(\Omega \times V)$ quand $t \to +\infty$ est invariant par $\overline{N}$. Plus précisément, si $\varphi \in X_\infty$ alor $\overline{N}\varphi \in X_\infty$ et*

$$\lim_{t\to\infty} \overline{N}\varphi(t) = (0-T)^{-1} N\left[\lim_{t\to\infty}\varphi(t)\right].$$

Preuve. Soit $\varphi \in X_\infty$ et soit $\varphi_\infty = \lim_{t\to\infty}\varphi(t)$. On a

$$\overline{N}\varphi(t) = S(t)\psi_0 + \int_0^t S(t-s)\, N\varphi(s)\, ds.$$

On note que $S(t)\psi_0 \to 0$ dans L^∞ quand $t \to \infty$ et

$$\int_0^t S(t-s)\,N\varphi(s)\,ds = \int_0^t S(s)\,N\varphi(t-s)\,ds$$
$$= \int_0^\infty \chi_{[0,\,t]}(s)\,S(s)\,N\varphi(t-s)\,ds.$$

En tenant de la continuité de N dans $L^\infty(\Omega\times V)$,

$$\chi_{[0,\,t]}(s)\,S(s)\,N\varphi(t-s)\,ds \to S(s)\,N(\varphi_\infty),\ \forall s>0.$$

De plus

$$\int_0^\infty \|S(s)\|\,ds < \infty.$$

Donc, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

$$\int_0^\infty \chi_{[0,\,t]}(s)\,S(s)\,N\varphi(t-s)\,ds \to \int_0^\infty S(s)\,N(\varphi_\infty)ds = (0-T)^{-1}N\,(\varphi_\infty)$$

ce qui termine la preuve.■

Théorème 2.5.2 *Si* $r_\sigma\left[(0-T)^{-1}K\right]<1$, *ou bien si* $r_\sigma\left[(0-T)^{-1}K\right]=1$ *et (2.15) est satisfaite, alors*

$$\psi(t)\to 0 \text{ dans } L^\infty(\Omega\times V) \text{ quand } t\to\infty$$

où $\psi(.)$ est la solution du problème de Cauchy (2.41).

Preuve. On définit la suite récurrente $\{\overline{\psi}_k\}$, $\overline{\psi}_{k+1}=\overline{N}\,\overline{\psi}_k$, $\overline{\psi}_0=1$.

Donc, en tenant compte du théorème 2.5.1, la suite $\{\overline{\psi}_k\}$ est décroissante et converge ponctuellement vers $\psi(.)$. De plus, par application du Lemme 2.5.1, on obtient :

$$\overline{\psi}_1(t) \to (0-T)^{-1} N(1) = \overline{\varphi}_1.$$

Il s'ensuit par induction, que

$$\overline{\psi}_k(t) \to \overline{\varphi}_k, \quad (k \geq 1) \quad L^\infty(\Omega \times V) \tag{2.42}$$

où $\{\overline{\varphi}_k\}$ est définie inductivement par

$$\overline{\varphi}_{k+1} = \widetilde{N}\overline{\varphi}_k, \ \overline{\varphi}_0 = 1.$$

On voit que la suite $\{\overline{\varphi}_k\}$ n'est autre que la suite utilisée dans le Théorème 2.2.1 pour prouver l'existence de la solution maximale du problème stationnaire et

$$\overline{\varphi}_k \to \overline{\varphi} \text{ dans } L^\infty(\Omega \times V) \text{ quand } k \to \infty$$

où $\overline{\varphi}$ est la solution maximale. Donc

$$\|\psi(t)\|_\infty \leq \left\|\overline{\psi}_k(t)\right\|_\infty \quad \forall k$$

et, en tenant compte de (2.42),

$$\limsup_{t\to\infty} \|\psi(t)\|_\infty \leq \|\overline{\varphi}_k\|_\infty \ \forall k.$$

Ceci termine la preuve car $\overline{\varphi} = 0$.■

L'analyse du cas supercritique est plus technique, et on a besoin d'un résultat préliminaire. Soit ψ^*la fonction propre de l'opérateur $(0-T)^{-1}K$ associée à son rayon spectral, normalisée par $\|\psi^*\|_{L^\infty(\Omega\times V)}=1$ et $\varphi_0=\varepsilon\psi^*$, avec $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ (voir (2.20)). En tenant compte de (2.21), on obtient

$$\varphi_0 \leq (0-T)^{-1} N\varphi_0. \tag{2.43}$$

Lemme 2.5.2 *Soit* $r_\sigma\left[(0-T)^{-1}K\right]>1$. *On suppose que la donnée initiale* ψ_0 *du problème de Cauchy (2.41) vérifie que* $\inf\psi_0>0$. *Soit* $z=\inf\psi_0$, *alors si* $\varepsilon\leq\lambda^*\|K\|^{-1}z$, *on a* $\varphi_0\leq\overline{N}\varphi_0$, *c'est à dire* φ_0 *est une sous-solution de* $\overline{N}$.

Preuve. Ceci revient à prouver que $\overline{N}\varphi_0-\varphi_0\geq 0$, c'est à dire

$$S(t)\psi_0+\int_0^t S(s)\,N\varphi_0 ds-\varphi_0\geq 0.$$

En tenant compte de (2.43), il suffit de montrer que

$$S(t)\,z+\int_0^t S(s)\,N\varphi_0 ds-(0-T)^{-1}N\varphi_0\geq 0,$$

c'est à dire

$$S(t)\,z-\int_t^\infty S(s)\,N\varphi_0 ds\geq 0. \tag{2.44}$$

Soit $(x,\,v)\in\Omega\times V$. Pour $t>s(x,\,v)$, chaque terme de (2.44) s'annule. Si $t<s(x,\,v)$, alors (2.44) se réduit à

$$e^{-t\sigma(v)}z - \int_t^\infty e^{-s\sigma(v)} N\varphi_0 (x - sv,\ v)\, \chi_\Omega (x - sv)\, ds$$

$$= \int_t^\infty e^{-s\sigma(v)} \left[\sigma(v)\, z - N\varphi_0 (x - sv,\ v)\, \chi_\Omega (x - sv)\right] ds.$$

D'autre part, $N\varphi_0 \leq K\varphi_0$ et

$$\sigma(v)\, z - \varepsilon K\psi^* (x - sv,\ v) \geq \lambda^* z - \varepsilon \|K\| \geq 0$$

ce qui complète la preuve.■

Théorème 2.5.3 *Soit* $r_\sigma\left[(0 - T)^{-1} K\right] > 1$. *On suppose que la donnée initiale* ψ_0 *du problème de Cauchy (2.41) satisfait* $\inf \psi_0 > 0$ *et que la solution non triviale du problème stationnaire* $\overline{\varphi}$ *est unique, donc*

$$\psi(t) \rightarrow\ \overline{\varphi} \text{ dans } L^\infty(\Omega \times V) \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

où $\psi(.)$ est la solution dépendante du temps.

Preuve. On définit la suite récurrente $\left\{\underline{\psi}_k\right\}$, $\underline{\psi}_{k+1} = \overline{N}\underline{\psi}_k$, $\underline{\psi}_0 = \varphi_0$.
En utilisant le Lemme 2.5.2, $\varphi_0 \leq \overline{N}\varphi_0$. De plus, le Théorème 2.5.1, montre que la suite $\left\{\underline{\psi}_k\right\}$ est croissante et converge ponctuellement vers $\psi(.)$. Suivant le Lemme 2.5.1, il vient :

$$\underline{\psi}_1(t) \rightarrow (0 - T)^{-1} N\varphi_0 \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega \times V).$$

Il s'ensuit, par récurrence, que

$$\underline{\psi}_k(t) \rightarrow\ \underline{\varphi}_k \text{ dans } L^\infty(\Omega \times V)$$

où la suite $\left\{\underline{\varphi}_k\right\}$, définie inductivement par $\underline{\varphi}_{k+1} = (0 - T)^{-1} N\underline{\varphi}_k$, $\underline{\varphi}_0 = \varphi_0$, n'est autre que celle utilisée dans le Théorème 2.2.4 pour prouver l'existence d'une solution non triviale. Donc

$$\underline{\psi}_k(t) \leq \psi(t) \leq \overline{\psi}_k(t), \ \forall k$$

où $\left\{\overline{\psi}_k\right\}$ est la suite introduite dans la preuve du Théorème 2.5.2. Donc

$$\begin{aligned}
\|\psi(t) - \overline{\varphi}\| &\leq \left\|\psi(t) - \underline{\psi}_k(t)\right\| + \left\|\underline{\psi}_k(t) - \underline{\varphi}_k\right\| + \left\|\underline{\varphi}_k - \overline{\varphi}\right\| \\
&\leq \left\|\overline{\psi}_k(t) - \underline{\psi}_k(t)\right\| + \left\|\underline{\psi}_k(t) - \underline{\varphi}_k\right\| + \left\|\underline{\varphi}_k - \overline{\varphi}\right\|
\end{aligned}$$

et par suite

$$\limsup_{t\to\infty} \|\psi(t) - \overline{\varphi}\| \leq \left\|\overline{\varphi}_k - \underline{\varphi}_k\right\| + \left\|\underline{\varphi}_k - \overline{\varphi}\right\| \ \ \forall k.$$

Ceci termine la preuve puisque chacune des deux suites $\{\overline{\varphi}_k\}$ et $\left\{\underline{\varphi}_k\right\}$ tend vers $\overline{\varphi}$, car la solution non triviale est unique.■

Chapitre 3

Etude de l'existence de solutions d'un problème non-linéaire intervenant en dynamique des populations

3.1 Résultats d'existence.

Dans ce chapitre, notre intérêt va se concentrer sur des résultats d'existence pour le problème aux limites (0.6) (0.7) dans le cas où la fonction $\sigma(a, l, \psi(a, l))$ satisfait l'hypothèse

$$\textbf{(H3)} \quad \sigma(a, l, \psi(a, l)) = \mu(a, l)\psi(a, l) \text{ avec } \mu(., .) \in L^{\infty}(\Delta).$$

Le cadre général va être traité dans la section suivante. Pour le faire, rappelons ce qui suit :

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$. Une fonction $g : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfait les conditions de Carathéodory si $g(x, y)$ est mesurable en x pour tout $y \in \mathbb{C}$ et elle est continue en y pour presque tout x.

Si g satisfait les conditions de Carathéodory, donc on peut définir l'opérateur N_g sur l'ensemble des fonctions $\psi : \Omega \to \mathbb{C}$ par $(N_g\psi)(x) = g(x, \psi(x))$ pour $x \in \Omega$. L'opérateur N_g est dit de Nemytskii (ou bien de superposition) engendré par g. Maintenant, on énonce le résultat (Lemme 3.1.1) qui illustre le fait de base des opérateurs de Nemytskii sur les espaces L_p (voir, par exemple, [20]).

Lemme 3.1.1 *(10, p. 35]). Si $\mathcal{N}_f : L_{p_1}(\Omega) \to L_{p_2}(\Omega)$, $p_1, p_2 \geq 1$, alors $\mathcal{N}_f$ est continue et, transforme les parties bornées en parties bornées et si $p_2 < \infty$, alors il existe une constante $k \geq 0$ et une fonction positive $h \in L_{p_2}(\Omega)$ telle que :*

$$|f(x,\ y)| \leq h(x) + k\,|y|^{p_1/p_2} \ \text{ p.partout en } x, \text{ pour tout } y \in \mathbb{C}.$$

Dans la suite, on suppose que

$$\textbf{(H4)}\quad f \text{ satisfait les conditions de Carathéodory et l'opérateur de Nemytskii } \mathcal{N}_f \text{ agit de } X \text{ dans } X.$$

Soit $\mathbf{r}$ un réel positif et soit

$$B_{\mathbf{r}} = \{\psi \in X;\ \|\psi\|_X \leq \mathbf{r}\}.$$

Maintenant, on est prêt à prouver le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 *Soitent (H1) (H4) sont satisfaites. Alors, il existe un réel λ_0 tel que pour tout λ satisfaisant $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$, le problème aux limites*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial a}(a,l) + (\lambda + \mu(a,l))\,\psi(a,l) = \displaystyle\int_{l_1}^{l_2} \nu(a,l,l')\, f(a,l',\psi(a,l'))\,\chi_\Delta(a,l')\,dl', \\ \psi_{|\Gamma_1} = R\psi_{|\Gamma_2},\ \lambda \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{3.1}$$

admet au moins une solution dans $B_{\mathbf{r}}$.

Preuve. Soit λ un nombre complexe tel que $\operatorname{Re}\lambda > \max(0, -\underline{\mu}, -\underline{\mu} + \frac{1}{l_1}\ln(b))$. En tenant compte du Lemme 1.4.1, $(\lambda - A_R)$ est inversible et par suite le problème (3.1) peut être transformé à un problème du point fixe suivant :

$$\psi = \mathcal{F}(\lambda)\,\psi,\ \psi_{|\Gamma_1} = R\psi_{|\Gamma_2},$$

où $\mathcal{F}(\lambda) = (\lambda - A_R)^{-1} K\mathcal{N}_f$.

On va vérifier, que pour un λ, bien choisi, $\mathcal{F}(\lambda)$ est continue et laisse invariant la boule $B_{\mathbf{r}}$. Il est facile d'observer que $\mathcal{F}(\lambda)$ est continue. D'autre part, puisque f satisfait **(H4)**, alors, le Lemme 3.1.1, montre l'existence d'une constante $k \geq 0$ et une fonction positive $h \in X$ tel que :

$$|f(a,\ l,\ \psi(a,\ l))| \leq h(a,\ l) + k\,|\psi(a,\ l)|\ \textit{p.partout en}\ (a,\ l)\,,\ \textit{pour tout}\ \psi \in X. \tag{3.2}$$

Soit $\psi \in B_{\mathbf{r}}$, il s'ensuit de (1.7) (1.9) et (3.2) que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(\lambda)\psi\| &\leq \|(\Lambda_\lambda R\mathcal{J}_\lambda\Xi_\lambda K\mathcal{N}_f)(\psi)\| + \|(\Pi_\lambda K\mathcal{N}_f)(\psi)\| \\ &\leq \frac{\|R(0)\| + b\,\|\mathcal{J}_\lambda(0)\| + \|K\|\,(\|h\| + k\mathbf{r})\left(1 + b\left(1 - be^{-l_1(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\mu})}\right)^{-1}\right)}{\operatorname{Re}\lambda + \underline{\mu}}\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > \max(0,\ -\underline{\mu},\ -\underline{\mu} + \frac{1}{l_1}\ln(b))$. Pour $\operatorname{Re}\lambda > \varepsilon$, on a

$$b\left(1 - be^{-l_1(\operatorname{Re}\lambda + \underline{\mu})}\right)^{-1} \leq b\left(1 - be^{-l_1(\varepsilon + \underline{\mu})}\right)^{-1}$$

et donc

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(\lambda)\psi\| &\leq \frac{\|R(0)\| + b\|\mathcal{J}_\lambda(0)\| + \|K\|(\|h\| + k\mathbf{r})\left(1 + b\left(1 - be^{-l_1(\varepsilon+\underline{\mu})}\right)^{-1}\right)}{\operatorname{Re}\lambda + \underline{\mu}} \\ &= \mathcal{Q}(\operatorname{Re}\lambda),\end{aligned}$$

où $\mathcal{Q}(.)$ est la fonction donnée par

$$\mathcal{Q}(t) = \frac{\|R(0)\| + b\|\mathcal{J}_\lambda(0)\| + \|K\|(\|h\| + k\mathbf{r})\left(1 + b\left(1 - be^{-l_1(\varepsilon+\underline{\mu})}\right)^{-1}\right)}{t + \underline{\mu}}.$$

On voit que $\mathcal{Q}(.)$ est une fonction strictement décroissante pour $t \neq -\underline{\mu}$ et satisfait $\lim_{t\to+\infty} \mathcal{Q}(t) = 0$. Alors, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\mathcal{Q}(\lambda_0) \leq \mathbf{r}$, et par suite $\mathcal{F}(\lambda)\psi \leq \mathbf{r}$ pour $\operatorname{Re}\lambda \geq \lambda_0$. Ceci implique que $\mathcal{F}(\lambda)$ laisse invariant la boule $B_{\mathbf{r}}$.

Maintenant soit $\mathcal{M}_\lambda = \overline{co}(\mathcal{F}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}))$, l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{F}(\lambda)(B_{\mathbf{r}})$. Il est facile d'observer que $\mathcal{F}(\lambda)$ laisse invariant l'ensemble $\mathcal{M}_\lambda$. De plus, puisque $\mathcal{N}_f(B_{\mathbf{r}})$ est un sous-ensemble borné de X. Il s'ensuit de la faible compacité de l'opérateur $(\lambda - A_R)^{-1}K$ (voir Lemme 1.4.3) que $\mathcal{F}(\lambda)B_{\mathbf{r}} = \left[(\lambda - A_R)^{-1}K\right](\mathcal{N}_f(B_{\mathbf{r}}))$ est faiblement compact. En utilisant le théorème de Krein-Šmulian [14, p. 434] on constate que $\mathcal{M}_\lambda$ est un ensemble faiblement compact.

Pour appliquer le théorème du point fixe de Schauder, on a besoin de montrer que l'ensemble $\mathcal{F}(\lambda)\mathcal{M}_\lambda$ est compact dans X. Pour le faire, soit $(\psi_n)_n$ une suite dans $\mathcal{M}_\lambda$. Donc, $(\psi_n)_n$ admet une sous-suite faiblement convergente $\left(\psi_{n_p}\right)_p$. En particulier, la famille $G = \left\{\psi_{n_p};\ p \geq 0\right\}$ est faiblement compact dans X. En appliqauant le corollaire 11 dans [14, p. 294], on déduit que

$$\lim_{|E|\to 0} \int_E |\psi(a,\ l)|\, da dl = 0$$

uniformément pour $\psi \in G$, où $|E|$ est la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble mesurable E. En tenant compte de (3.2), on obtient

$$\left|\int_E (\mathcal{N}_f\psi)(a,\ l)\, dadl\right| \leq \int_E h(a,\ l)\, dadl + k\int_E |\psi(a,\ l)|\, dadl.$$

Donc

$$\lim_{|E|\to 0}\int_E (\mathcal{N}_f\psi)(a,\ l)\, dadl = 0,$$

uniformément pour $\psi \in G$, car $\lim\limits_{|E|\to 0}\int_E h(a,\ l)\, dadl = 0$. En utilisant une deuxième fois le corollaire 11 dans [14, p. 294], on conclut que la famille G est faiblement compact. Donc, $\left(\mathcal{N}_f\psi_{n_p}\right)_p$ est faiblement convergente. Il s'ensuit de la faible compacité des opérateurs $\Pi_\lambda K$ et $\Xi_\lambda K$ et le Théorème 12 dans [14, p. 508] que les sous-suites $\left(\Pi_\lambda K\mathcal{N}_\lambda\left(\psi_{n_p}\right)\right)$ et $\left(\Xi_\lambda K\mathcal{N}_f\left(\psi_{n_p}\right)\right)$ convergent fortement dans X. Ceci montre que l'ensemble $\mathcal{F}(\lambda)(\mathcal{M}_\lambda)$ est compact (car l'opérateur $\Lambda_\lambda R\mathcal{J}_\lambda$ est continue).

Maintenant en appliquant le Théorème du point fixe de Schauder, on conclut que $\mathcal{F}(\lambda)$ admet au moins un point fixe dans $\mathcal{M}_\lambda$. Ceci complète la preuve.■

Notre prochaine discussion va être consacrée à l'existence des solutions positives du problème aux limites (3.1). Tout d'abord, on va rappeler qu'un opérateur T d'un espace de Banach lattice X_1 dans un espace de Banach lattice X_2 est dit positif si $T\left(X_1^+\right) \subseteq X_2^+$, où X_1^+ $\left(resp.\ X_2^+\right)$ est le cône positif de X_1 $(resp.\ X_2)$.

Pour $\mathbf{r} > 0$, on note par $B_\mathbf{r}^+$ l'ensemble $B_\mathbf{r}^+ := B_\mathbf{r} \cap X^+$, où X^+ est le cône positif de X.

Proposition 3.1.1 *Soient les hypothèses du Théorème 3.1.1 sont satisfaites. Si les opérateurs R, K et $\mathcal{N}_f$ sont positifs. Alors, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\forall\lambda > \lambda_0$, le problème aux limites (3.1) admet au moins une solution dans $B_\mathbf{r}^+$.*

preuve. Soit λ un réel tel que $\lambda > \max(0,\ -\underline{\mu},\ -\underline{\mu} + \frac{1}{l_1}\ln(b))$. Soit $f \in X_2^+$ et considérons dans X_2 la suite définie par

$$u_0 = 0,\ u_{n+1} = \mathcal{A}_{(\lambda,\ f)}(u_n) = \Theta_\lambda R u_n + f.$$

En utilisant la positivité des opérateurs $\Theta_\lambda R$ et f, on voit par inducation que $u_n \in X_2^+$. De plus, puisque l'opérateur $\mathcal{A}_{(\lambda,\ f)}$ est de contraction (voir Section 1. 4), il s'ensuit du Théorème du point fixe de Banach que u_n converge vers $\mathcal{J}_\lambda(f)$. Donc $\mathcal{J}_\lambda(f) \in X_2^+$ ce qui montre que $\mathcal{J}_\lambda$ est un positif. En tenant compte de la positivité des opérateurs Λ_λ, Ξ_λ, R et K et de (1.9), on constate que l'opérateur $(\lambda - A_R)^{-1} K$ est positif aussi. La suite de la preuve est similaire à celle donnée dans le Théorème 3.1.1, il suffit de remplacer l'ensemble $\mathcal{M}_\lambda := \overline{co}(\mathcal{F}(\lambda)(B_{\mathbf{r}}))$ par $\mathcal{M}_\lambda^+ := \mathcal{M}_\lambda \cap X^+$.■

Le résultat suivant assure l'existence des solutions positives non-triviales.

Proposition 3.1.2 *Soient les hypothèses du théorème 3.1.1 sont satisfaites et on suppose que R et K sont positifs. De plus, s'il existe un $\tau > 0$ et $0 \neq \psi_0 \in B_{\mathbf{r}}^+$ tel que*

(i) $\psi_0 \notin \ker(K)$ où $\ker(K)$ est le noyau de l'opérateur K,

(ii) $(\mathcal{N}_f\psi)(a,\ l) \geq \tau\psi_0(a,\ l)$ pour tout $\psi \in B_{\mathbf{r}}^+$.

Alors, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\forall\lambda > \lambda_0$, il existe $\eta > 0$ pour lequel le problème aux limites

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial a}(a,l) + (\lambda + \mu(a,l))\psi(a,l) = \eta \displaystyle\int_{l_1}^{l_2} \nu(a,l,l') f(a,l',\psi(a,l')) \chi_\Delta(a,l')\,dl', \\ \psi_{|\Gamma_1} = R\psi_{|\Gamma_2}, \end{cases}$$

a au moins une solution $\psi^* \in B_{\mathbf{r}}^+$ satisfaisant $\|\psi^*\| = \mathbf{r}$.

preuve. Procédant comme dans la preuve du Théorème 3.1.1 et la proposition 3.1.1, il existe une constante $\lambda_0 > 0$ telle que pour tout $\lambda > \lambda_0$, l'opérateur $\mathcal{F}(\lambda)$ envoie $B_{\mathbf{r}}^+$ en lui même. Dautre part, puisque $\mathcal{N}_f$ vérifie l'hypothèse (ii), il s'ensuit de (1.9) et de la positivité de l'opérateur $\Lambda_\lambda R \mathcal{J}_\lambda \Xi_\lambda$ que

$$\mathcal{F}(\lambda)(\psi) \geq \tau(\Pi_\lambda K\psi_0) \;\; \forall\psi \in B_{\mathbf{r}}^+.$$

Puisque $\lambda \in \mathbb{R}$, il s'ensuit de la positivité de Π_λ et le fait que cet opérateur est la résolvante de l'opérateur A_0 (c'est à dire $R = 0$), il vient

$$\mathcal{F}(\lambda)(\psi) \geq \tau(\Pi_\lambda K\psi_0) \text{ et } \Pi_\lambda K\psi_0 \neq 0.$$

et par suite

$$\|\mathcal{F}(\lambda)(\psi)\| \geq \tau \|\Pi_\lambda K\psi_0\| \;\; \forall\psi \in B_r^+,$$

ce qui implique que

$$\inf\left\{\|\mathcal{F}(\lambda)\psi\| ;\; \psi \in B_{\mathbf{r}}^+\right\} > 0.$$

Donc, pour $\lambda \geq \lambda_0$, on peut définir l'opérateur $\mathcal{G}(\lambda)$ par

$$\mathcal{G}(\lambda)(\psi) = \mathbf{r}\frac{\mathcal{F}(\lambda)(\psi)}{\|\mathcal{F}(\lambda)(\psi)\|} \quad \forall\psi \in B_{\mathbf{r}}^+,$$

on pose $\hat{\mathcal{M}} := \overline{co}\left(\mathcal{G}(\lambda)\left(B_{\mathbf{r}}^+\right)\right)$. Comme $B_{\mathbf{r}}^+$ est un sous-ensemble convexe fermé de X^+, donc $\hat{\mathcal{M}} \subset B_{\mathbf{r}}^+$ ce qui donne que $\mathcal{G}(\lambda)$ laisse invariant l'ensemble $\hat{\mathcal{M}}$. En utilisant des arguments similaires comme dans la preuve du Théorème 3.1.1, il s'ensuit que $\mathcal{G}(\lambda)\left(\hat{\mathcal{M}}\right)$ est compact. En appliquant le Théorème du point fixe de Schauder, on déduit que $\mathcal{G}(\lambda)$ admet un point fixe ψ^* dans $\hat{\mathcal{M}}$ qui satisfait $\|\psi^*\| = \mathbf{r}$. Posons $\eta = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathcal{F}(\lambda)\psi^*\|}$, on obtient

$$(\lambda - A_R)^{-1} K\mathcal{N}_f(\psi^*) = \eta^{-1}\psi^*.$$

Ceci montre que $\psi^* \in D(A_R) \cap B_{\mathbf{r}}^+$ (car $\hat{\mathcal{M}} \subseteq B_{\mathbf{r}}^+$) et

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial a}(a,l)+(\lambda+\mu(a,l))\,\psi^*(a,l)=\eta\int_{l_1}^{l_2}\nu(a,l,l')\,f(a,l',\psi^*(a,l'))\,\chi_\Delta(a,l')\,dl'$$

ce qui termine la preuve.■

3.2 Le cadre général

L'objectif de cette section est de discuter l'existence des solutions du problème aux limites nonlinéaire (0.6) (0.7). En attaquant ce problème, quelques difficultés techniques apparaissent, donc on va introduire les hypothèses suivantes

(H5) R est un opérateur linéaire borné de X_2 dans X_1, et, pour $\mathbf{r}>0$,

$$|\sigma(a,\ l,\ \psi_1(a,\ l))-\sigma(a,\ l,\ \psi_2(a,\ l))|\leq|\rho(a,\ l)|\,|\ \psi_1-\ \psi_2|\quad(\psi_1,\ \psi_2\in B_{\mathbf{r}})$$

où $\rho\in L_\infty(\Delta;\ dadl)$ et $\mathcal{N}_\sigma$ agit de $B_{\mathbf{r}}$ dans $B_{\mathbf{r}}$.
On définit l'opérateur $\widetilde{A}_R$ par

$$\begin{cases} D\left(\widetilde{A}_R\right)=\{\psi\in W;\ R\psi_{|\Gamma_2}=\psi_{|\Gamma_1}\}, \\ D\left(\widetilde{A}_R\right)\ni\psi\to\widetilde{A}_R\psi(a,\ l):=-\dfrac{\partial\psi}{\partial a}(a,\ l). \end{cases}$$

Comme R est linéaire, $\widetilde{A}_R$ est un opérateur linéaire fermé à domaine dense sur X. De plus, un calcul simple montre que l'ensemble résolvant $\rho\left(\widetilde{A}_R\right)$ contient le demi-plan $\{\lambda\in\mathbb{C};$ $\operatorname{Re}\lambda>\frac{1}{l_1}\ln(\|R\|)\}$ et pour tout λ appartenant à ce demi-plan, on a :

$$\left(\lambda-\widetilde{A}_R\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_\lambda^0R\left(\Theta_\lambda^0R\right)^n\Xi_\lambda^0+\Pi_\lambda^0,$$

où Θ_λ^0, Λ_λ^0, Ξ_λ^0 et Π_λ^0 sont des opérateurs linéaires bornées obtenus à partir des opérateurs Θ_λ, Λ_λ, Ξ_λ et Π_λ en prenant $\mu(.,\ .)=0$. Leurs normes sont bornées, respectivement, par

$e^{-l_1 \operatorname{Re}\lambda}$, $\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$, 1 et $\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda > \max\left(\varepsilon, \frac{1}{l_1}\ln(\|R\|)\right)$. D'après ce qui précéde, on peut constater facilement que

$$\left\|\left(\lambda - \widetilde{A}_R\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}\left(1 + \frac{\|R\|}{1 - \|R\| e^{-l_1\varepsilon}}\right). \tag{3.3}$$

On est maintenant dans la position de prouver le Théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Soient (H2), (H4) et (H5) sont satisfaites. Alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour λ qui satisfait $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0$, le problème aux limites (0.6) (0.7) a au moins une solution dans $B_{\mathbf{r}}$.*

On note que la preuve du Théorème 3.2.1 consiste à écrire (0.6) (0.7) sous la forme d'un problème du point fixe. Cependant, contrairement à la preuve du Théorème 3.1.1, on ne peut pas appliquer le Théorème du point fixe de Schauder car le problème (0.6) (0.7) est dérivé de (3.1) comme une perturbation par un opérateur de Nemytskii non constant (qui n'est pas compact ou bien qui n'est pas faiblement compact sur X). La preuve de ce résultat est basée sur le Théorème du point fixe de Krasnosel'skii (voir, par exemple, Théorème 11.B dans [42, p. 501]). Il assure que si $\mathcal{M}$ est un sous-ensemble non vide, fermé et borné et convexe d'un espace de Banach X et A et B deux applications de $\mathcal{M}$ dans X tel que $A\mathcal{M} + B\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, A est compact et B une contraction, alors $A + B$ admet au moins un point fixe dans $\mathcal{M}$.

Preuve. Procédant comme dans la preuve du Théorème 3.1.1, on voit que le problème (0.6) (0.7) peut être mis sous la forme

$$\psi = \mathcal{W}(\lambda)\psi + \mathcal{H}(\lambda)\psi, \ \psi_{|\Gamma_1} = R\psi_{|\Gamma_2},$$

où $\mathcal{W}(\lambda) = \left(\lambda - \widetilde{A}_R\right)^{-1} K\mathcal{N}_f$ et $\mathcal{H}(\lambda) = \left(\lambda - \widetilde{A}_R\right)^{-1} \mathcal{N}_{-\sigma}$.
En tenant compte de (H5), (3.2) et (3.3), on a

$$\begin{aligned}\|\mathcal{W}(\lambda)\psi+\mathcal{H}(\lambda)\psi\| &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}\left(1+\frac{\|R\|}{1-\|R\|e^{-l_1\varepsilon}}\right)(\mathbf{r}(\|\rho\|_\infty+k\|K\|)\\ &\quad+\|\mathcal{N}_\sigma(0)\|+\|h\|\,\|K\|)\\ &= \hat{\mathcal{Q}}(\operatorname{Re}(\lambda))\end{aligned}$$

pour tous $\varphi,\,\psi\in B_{\mathbf{r}}$. Comme la fonction $\hat{\mathcal{Q}}$ a les même propriétés que $\mathcal{Q}$ définie dans la preuve du Théorème 3.1.1, donc il existe $\lambda_1>0$ tel que, pour $\operatorname{Re}\lambda>\lambda_1$, $\mathcal{W}(\lambda)B_{\mathbf{r}}+\mathcal{H}(\lambda)B_{\mathbf{r}}\subset B_{\mathbf{r}}$. Soit $\mathcal{M}_n$ la suite d'ensembles bornée fermés convexes non vides de X définie par

$$\mathcal{M}_0=B_{\mathbf{r}} \text{ et } \mathcal{M}_{n+1}=\overline{co}\left(\mathcal{W}(\lambda)(\mathcal{M}_n)+\mathcal{H}(\lambda)(\mathcal{M}_n)\right).$$

Il est clair que $\mathcal{M}_n$ est une suite décroissante. On pose

$$\mathcal{M}_\lambda=\bigcap_{n\geq 0}\mathcal{M}_n.$$

On va montrer que $\mathcal{M}_\lambda$ est un ensemble faiblement compact non vide. Commençons tout d'abord à montrer que $\mathcal{M}_\lambda$ est non vide. Pour le faire, soit $\varphi\in co\left(\mathcal{W}(\lambda)(B_{\mathbf{r}})+\mathcal{H}(\lambda)(B_{\mathbf{r}})\right)$.
Donc $\varphi=\sum_{i=1}^{p}a_i\left(\mathcal{W}(\lambda)(\varphi_i)+\mathcal{H}(\lambda)(\psi_i)\right)$ où $\varphi_i,\,\psi_i\in B_{\mathbf{r}}$, $1\leq i\leq p$ et $\sum_{i=1}^{p}a_i=1$.
Soit E un sous-ensemble mesurable de Δ. Un calcul systématique montre que

$$\int_E|\varphi(a,\,l)|\,dadl\leq \mathcal{T}_1\int_E\left(h(a,\,l)+|\mathcal{N}_\sigma(0)(a,\,l)|\right)dadl \tag{3.4}$$

$$+\left\|\left(\lambda-\widetilde{A}_R\right)^{-1}\right\|\sum_{i=1}^{p}a_i\left(k\|K\|\int_E|\varphi_i(a,\,l)|\,dadl+\|\rho\|_\infty\int_E|\psi_i(a,\,l)|\,dadl\right),$$

où

$$\mathcal{T}_1=\frac{1+\|R\|\left(1-\|R\|e^{-l_1\varepsilon}\right)^{-1}}{\operatorname{Re}\lambda}\max\left(1,\ \|K\|\right).$$

Donc, $\forall \varphi \in \mathcal{M}_1$

$$\int_E |\varphi(a,\ l)|\, dadl \leq \mathcal{T}_1 \int_E (h(a,\ l) + |\mathcal{N}_\sigma(0)(a,\ l)|)\, dadl + \mathcal{T}_2 \mathbf{r},$$

où

$$\mathcal{T}_2 = \frac{1 + \|R\| \left(1 - \|R\| e^{-l_1 \varepsilon}\right)^{-1}}{\operatorname{Re}\lambda} \left(k \|K\| + \|\rho\|_\infty\right).$$

On déduit de (3.4), par récurrence, que

$$\int_E |\varphi(a,\ l)|\, dadl \leq \mathcal{T}_1 \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{T}_2^i \int_E (h(a,\ l) + |\mathcal{N}_\sigma(0)(a,\ l)|)\, dadl + \mathcal{T}_2^n \mathbf{r} \qquad (3.5)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{M}_n$. Puisque la fonction

$$t \rightarrow \frac{1 + \|R\| \left(1 - \|R\| e^{-l_1 \varepsilon}\right)^{-1}}{t} \left(k \|K\| + \|\rho\|_\infty\right)$$

a les mêmes propriétés que $\mathcal{Q}$, donc il existe λ_2 tel que pour $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_2$, on a $\mathcal{T}_2 < 1$.

Fixons $\psi_n \in \mathcal{M}_n$. Puisque

$$\limsup_{|E| \to 0} \left(\sup_{n \geq 0} \int_E |\psi_n(a,\ l)|\, dadl \right) = \limsup_{|E| \to 0} \left(\sup_{n \geq p} \int_E |\psi_n(a,\ l)|\, dadl \right) \ \forall p \geq 0.$$

En tenant compte de (3.5), il s'ensuit que $\limsup_{|E| \to 0} \left(\sup_{n \geq p} \int_E |\psi_n(a,\ l)|\, dadl \right) = 0 \ (p \to \infty)$ et donc $\limsup_{|E| \to 0} \left(\sup_{n \geq 0} \int_E |\psi_n(a,\ l)|\, dadl \right) = 0$. Donc $\{\psi_n,\ n \geq 0\}$ est faiblement compact. Alors il va exister une sous-suite $\left(\psi_{n_p}\right)_p$ qui converge faiblement vers ψ. Puisque $\mathcal{M}_n$ est fermé, $\psi \in \mathcal{M}_n\ \forall n \geq 0$ et par suite $\mathcal{M}_\lambda$ est non vide.

Prouvons maintenant que $\mathcal{M}_\lambda$ est faiblement compact. Pour le faire, soit $\eta > 0$. Donc, il existe un nombre positif $\delta > 0$ tel que

$$\int_E \left(h(a,\ l) + \left|\mathcal{N}_\sigma(0)(a,\ l)\right|\right) dadl < \frac{1-\mathcal{T}_2}{2\mathcal{T}_1}\eta$$

pour tout ensemble mesurable E telle que $|E| < \delta$, et il va exister un entier $n(\eta)$ avec $\mathcal{T}_2^n < \frac{\eta}{2r}$ $\forall n \geq n(\eta)$. Donc, si $\varphi \in \mathcal{M}_\lambda$, en particulier $\varphi \in \mathcal{M}_{n(\eta)}$. Alors, $\int_E |\varphi(a,\ l)|\, dadl < \eta$ pour tout ensemble mesurable E telle que $|E| < \delta$. Ceci avec le corollaire 11 dans [14, p. 294] implique que $\mathcal{M}_\lambda$ est faiblement compact.

Observons maintenant que l'opérateur $\left(\lambda - \widetilde{A}_R\right)^{-1} K$ est faiblement compact, en utilisant le Théorème 12 dans [14, p. 508] et raisonnant comme dans la preuve du Théorème 3.1.1, on voit que l'opérateur $\mathcal{W}(\lambda)$ est compact sur $\mathcal{M}_\lambda$. Ensuite, pour $\psi_1,\ \psi_2 \in B_r$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{H}(\lambda)(\psi_1) - \mathcal{H}(\lambda)(\psi_2)\right\| &= \left\|\left(\lambda - \widetilde{A}_R\right)^{-1} \mathcal{N}_{-\sigma}(\psi_1) - \left(\lambda - \widetilde{A}_R\right)^{-1} \mathcal{N}_{-\sigma}(\psi_2)\right\| \\
&\leq \frac{1 + \|R\| \left(1 - \|R\| e^{-l_1\varepsilon}\right)^{-1}}{\operatorname{Re}\lambda} \left\|\mathcal{N}_\sigma(\psi_1) - \mathcal{N}_\sigma(\psi_2)\right\|.
\end{aligned}$$

En utilisant (H5), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{H}(\lambda)(\psi_1) - \mathcal{H}(\lambda)(\psi_2)\right\| &\leq \|\rho\|_\infty \frac{1 + \|R\| \left(1 - \|R\| e^{-l_1\varepsilon}\right)^{-1}}{\operatorname{Re}\lambda} \|\psi_1 - \psi_2\| \\
&\leq \mathcal{T}_3 \|\psi_1 - \psi_2\|,
\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{T}_3 = \|\rho\|_\infty \frac{1 + \|R\| \left(1 - \|R\| e^{-l_1\varepsilon}\right)^{-1}}{\operatorname{Re}\lambda} < 1$$

pour tout λ tel que $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_2$. Donc l'opérateur $\mathcal{H}(\lambda)$ est de contraction. Alors, si $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0 := \max\left(\varepsilon,\ \frac{1}{l_1}\ln(\|R\|),\ \lambda_1,\ \lambda_2\right)$, par suite les conditions d'application du Théorème du point fixe sont satisfaites et donc le problème (0.6) admet au moins une solution dans $\mathcal{M}_\lambda \subseteq B_r$. Ceci complète la preuve.

L'existence des solutions positives du problème (0.6) (0.7) comme dans la proposition 3.1.1 peut facilement s'établir, il suffit de prendre $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et remplacer B_r par B_r^+.

3.3 Appendice.

Comme il a été indiqué, on donne ici la preuve du Lemme 1.4.2 dans le cas où $1 \leq p < \infty$. Pour le faire, soit

$$X_p(\Delta) = L_p(\Delta;\ dadl),\ \widetilde{X}_p = L_p([0,\ l_2] \times [l_1,\ l_2];\ dadl)$$

et notons par K l'opérateur donné par

$$K . X_p(\Delta) \to X_p(\Delta),\ \psi \to (K\psi)(a,\ l) := \int_{l_1}^{l_2} \nu(a,\ l,\ l')\psi(a,\ l')\chi_\Delta(a,\ l')\,dl'$$

soit $\widetilde{K}$ l'extension de K à $\widetilde{X}_p$

$$\begin{cases} \widetilde{K} : \widetilde{X}_p \to \widetilde{X}_p \\ \varphi \to \int\limits_{l_1}^{l_2} \widetilde{\nu}(a,\ l,\ l')\varphi(a,\ l')\,dl', \end{cases}$$

où $\widetilde{\nu}$ est une fonction mesurable sur $[0,\ l_2] \times [l_1,\ l_2] \times [l_1,\ l_2]$ telle que $\widetilde{\nu}|_{\Delta\times[l_1,\ l_2]} = \nu$.

Supposons que

(A1) $\widetilde{K}(.)$ est strictement mesurable, il existe un sous-esemble $\mathcal{C} \subseteq Z$ tel que $\widetilde{K}(a) \in C$ $p.p$ et $\widetilde{K}(a) \in \mathcal{K}(L_p([l_1,\ l_2];\ dl))$ $p.p$

où $\mathcal{K}(L_p([l_1,\ l_2];\ dl))$ désigne l'ensemble des opérateurs compacts sur $L_p([l_1,\ l_2];\ dl)$ et $Z := \mathcal{L}(L_p([l_1,\ l_2];\ dl))$.

Enonçons maintenant le Lemme suivant :

Lemme 3.3.1 *On suppose que l'hypothèse (A1) est satisfaite. Donc K peut être approché par la topologie uniforme, par une suite $(K_n)_n$ d'opérateurs linéaires définie par*

$$(K_n\psi)(a,\ l) = \int_{l_1}^{l_2} \left(\sum_{i \in I} \eta_i(a)\,\theta_i(l)\,\beta_i(l') \right) \psi(a,\ l')\,\chi_\Delta(a,\ l')\,dl',$$

où $\eta_i \in L_\infty([0,\ l_2];\ da)$, $\theta_i \in L_p([l_1,\ l_2];\ dl)$, $\beta_i \in L_q([l_1,\ l_2];\ dl)$ et I est un ensemble fini, q est le conjugué de p.

Preuve. En tenant compte du Lemme 3.2 dans [28] l'opérateur $\widetilde{K}$ peut être approché pour la topologie uniforme, par une suite $\left(\widetilde{K}_n\right)_n$ d'opérateurs linéaires à noyaux de la forme $\sum_{i \in I} \eta_i(a)\,\theta_i(l)\,\beta_i(l')$, où $\eta_i \in L_\infty([0,\ l_2];\ da)$, $\theta_i \in L_p([l_1,\ l_2];\ dl)$, $\beta_i \in L_q([l_1,\ l_2];\ dl)$ et I est fini.

Maintenant, $\forall \psi \in X_p(\Delta)$, on pose

$$\widetilde{\psi}(a,\ l) = \begin{cases} \psi(a,\ l) \text{ si } (a,\ l) \in \Delta \\ \\ \quad 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Il est clair que $\widetilde{\psi} \in \widetilde{X}_p$ et $X_p(\Delta)$ peut être vu comme un sous-espace fermé de $\widetilde{X}_p$. Donc

$$\begin{aligned} \|(K - K_n)(\psi)\|_{X_p(\Delta)} &= \left\| \left(\widetilde{K} - \widetilde{K}_n\right)\left(\widetilde{\psi}\right)\chi_\Delta \right\|_{\widetilde{X}_p} \\ &\leq \left\| \left(\widetilde{K} - \widetilde{K}_n\right)\left(\widetilde{\psi}\right) \right\|_{\widetilde{X}_p}, \end{aligned}$$

où χ_Δ est la fonction caractérisitique de Δ.
Il vient donc

$$\|(K - K_n)\|_{X_p(\Delta)} \leq \left\| \widetilde{K} - \widetilde{K}_n \right\|_{\widetilde{X}_p}.$$

Le résultat s'établit en faisant tendre vers $+\infty$.■

Bibliographie

[1] I. Abu-Shumays et al (Ed). Transport Theory. SIAM-AMS Proc. Providence. Rhode Island, 1969.

[2] H. Amann. Fixed-point problems and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. SIAM Rev. **18** (1976) 620-709.

[3] C. Bardos. Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels :théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **3** (1970), 185-233.

[4] R. Beals and V. Protopopescu. Abstract time-dependent transport equations. J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 370-405.

[5] G.I. Bell. Stochastic theory of neutron transport. Nucl. Sci. Eng. **21** (1965) 390-401.

[6] G.I. Bell and S. Glasstone. Nuclear reactor theory, Van Norstrandt, 1970.

[7] M. Borysiewicz and J. Mika. Time behaviour of thermal neutrons in moderating media. J. Math. Appl. **26** (1969), 461-478.

[8] M. Cessenat. Théorèmes de trace L_p pour des espaces de fonctions de la neutronique. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299**(16) (1984), 831-834.

[9] M. Cessenat. Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **300**(3) (1985), 89-92.

[10] S.N. Chow, J.K. Hale, "Methods of Bifurcation Theory," Springer-Verlag, New York, 1982.

[11] Dajun-Guo and V. Lakshmikantham. Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, 1988.

[12] R. Dautray and J.L. Lions. Analyse mathématique et calcul numérique, Volume **9**, Masson, 1988.

[13] J.J. Duderstadt and W.R. Martin. Transport theory. John Wiley and Sons, Inc. 1979.

[14] N. Dunford, J.T. Schwartz, "Linear Operators : Part I," Intersciences, New York, 1958.

[15] K.J. Engel and R. Nagel. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer, New York Berlin Heidelberg, 1999.

[16] E. Hille and R.S. Phillips. Functional analysis and semigroups. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **31**, 1957.

[17] K. Jarmouni-Idrissi. Etude d'une classe de problèmes non linéaires provenant de la modélisation probabiliste des chaînes de fission neutroniques. Thèse de l'université de Franche-Comté, Besançon, 1997.

[18] K. Jarmouni-Idrissi and M. Mokhtar-Kharroubi. A class of nonlinear problems arising in the stochastic theory of neutron transport. Nonlinear Analysis. (1997). To appear.

[19] A. Jeribi, A nonlinear problem arising in the theory of growing cell populations, Nonlinear Anal. Real World Appl. **3** (2002), 85-105.

[20] M.A. Krasnosel'skii et al., "Integral Operators in Space of Summable Functions," Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976.

[21] K. Latrach, On a nonlinear stationary problem arising in transport theory, J. Math. Phys. **37** (1996), 1336-1348.

[22] K. Latrach, A. Jeribi, A nonlinear boundary value problem arising in growing cell populations, Nonlinear Anal. **36** (1999), 843-862.

[23] K. Latrach, M. Mokhtar-Kharroubi, On an unbounded linear operator arising in the theory of growing cell populations, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 273-294.

[24] J.L. Lebowitz, S.I. Rubinow, A theory for the age and generation time distribution of microbial population, J. Math. Biol. **1** (1974), 17-36.

[25] J. Lewins. Linear stochastic neutron transport theory. Proc. R. Soc. Lond. **A 362** (1978) 537-558.

[26] P.L. Lions. On the existence of positive solutions of semilinear equations. SIAM Rev. **24** (1982) 441-467.

[27] M. Mokhtar-Kharroubi. On the stochastic nonlinear neutron transport equation. Proc. Roy. Soc. Edinburg. **121 A** (1992) 253-272.

[28] M. Mokhtar-Kharroubi, Time asymptotic behaviour and compactness in neutron transport theory, Eur. J. Mech. B Fluids **11** (1992), 197-222.

[29] B. Montagnini and M.L. Demuru. Complete continuituy of the free gas scattering operator in neutron thermalization theory. J. Math. Anal. Appl. **12** (1965), 49-57.

[30] M. Otsuka and K. Saito. Theory of statistical fluctuations in neutron distributions. J. Nucl. Sci. Technol. **2**(8) (1965) 304-314.

[31] L. Pál. Statistical theory of neutron chain reactions. Acta. Phys. Hung. **21** (1962) 390-.

[32] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer, New York, 1983.

[33] A. Pazy and P. Rabinowitz. A nonlinear integral equation with applications to neutron transport theory. Arch. Rat. Mech. Anal. **32** (1969) 226-246.

[34] A. Pazy and P. Rabinowitz. Corrigendum. Arch. Rat. Mech. Anal. **35** (1969) 409-410.

[35] A. Pazy and P. Rabinowitz. On a branching process in neutron transport theory. Arch. Rat. Mech. Anal. **51** (1973) 153-164.

[36] D. Verwaerde. Une approche non déterministe de le Neutronique. Modélisation. Note CEA N 2731, 1993.

[37] D. Verwaerde. Une approche non déterministe de le Neutronique. Existence d'une solution aux equations de probabilité de presence. Note CEA N 2791, 1995.

[38] J. Voigt. Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases. München, Habilitationsschrift (1981).

[39] G. Webb, A model of proliferating cell populations with inherited cycle length, J. Math. Biol. **23** (1986), 269-282.

[40] G. Webb, Dynamics of structured populations with inherited properties, Comput. Math. App. **13** (1987), 749-757.

[41] M.M.R. Williams. Mathematical methods in particle transport theory. London Butterworths (1971).

[42] E. Zeidler, "Nonlinear Functional analysis and its Applications I : Fixed-Point Theorems," Springer-Verlag, New York, 1993.