11510.036

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université 08 mai 45 Guelma

جامعة 08 ماي 45- قالمة

Faculté des Sciences et de l'Ingénierie
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vu de l'obtention du diplôme de
Magister en Mathématique

Option : Mathématiques Appliquées

Semi-groupes et existence globale de la Solution d'un système de réaction-diffusion

Par : Brahmia Baya
Sous la direction : Dr .Moumeni A

Soutenu le :

Devant le jury :

Président	Dr.HITTA Amara	MC	Univ .Guelma
Rapporteur	Dr .Moumeni A	MC	Univ Annaba
Examinateur	Dr.M Haiour	MC	Univ . Annaba
Examinateur	Dr. N. Boussetila	MC	Univ .Guelma

2017

REMERCIEMENT

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadreur le **Docteur A.MOUMENI** dont les orientations opportunes, les recommandations perspicaces et les conseils avisés, m'ont été d'un précieux apport. Je lui exprime ma profonde gratitude pour sa gentillesse et la grande patience dont il a fait preuve tout long de l'élaboration de mon mémoire.

Mes remerciements vont également à Monsieur **HITA AMARA** , Maître de conférences à l'université de Guelma, qui a bien voulu présider le jury.

De même je remercie vivement Monsieur **BOUSSETILA Nadjib**, Maître de conférences à l'université de Guelma et Monsieur **HAIOUR Mohamed**, Maître de conférences à l'université d'Annaba, qui ont accepté d'examiner le mémoire et bénéficier de leur remarque.

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et toute celles que j'ai connue au département de mathématiques et qui ont rendu mon séjour au département Monsieur agréa.

Table des matières

0.1 Historique du problème de réaction-diffusion 4

1 Systèmes de réaction-diffusion **7**

1.1 Principe de Diffusion 7

1.1.1 Introduction 7

1.1.2 Loi de Fick 8

1.1.3 Diffusion et migration 9

1.1.4 Première loi de Fick : 10

1.1.5 Seconde loi de Fick : 11

1.1.6 Activation thermique 11

1.1.7 Mouvement Brownien 12

1.1.8 Mécanismes de diffusion 12

1.2 Modélisation des équations de réaction- diffusion 13

1.2.1 Modélisation 13

1.2.2 Quelques exemples de modélisation 15

2 Quelques résultats préliminaires **21**

2.1 Théorèmes et formules fondamentaux 21

2.2 Rappel sur les opérateurs 23

2.2.1 Notations et définitions 23

2.2.2 Opérateur monotone 23

2.2.3 Opérateur accrétif 24
2.2.4 Opérateur m-accrétif 25
2.2.5 Opérateur sectoriels 26

2.3 Semi-groupes 26
2.3.1 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C^0 27
2.3.2 Théorème de Hille-Yosida 27
2.3.3 Premières propriétés des semi-groupes de classe C^0 29
2.3.4 Semi-groupes analytiques 30
2.3.5 Problèmes d'évolution 31

2.3.6 Existence non globale 32

3 Existence et unicité de la solution de l'équation homogène 37

3.1 Existence et unicité de la solution de l'équation homogène 42
3.2 Théorème de Kato 43

4 Existence locale et globale de la solution 44

4.1 Quelques résultats préliminaires 44
4.1.1 Positivité de la solution 44
4.2 Existence locale de la solution 48
4.2.1 Etude d'un système particulier 49
4.3 L'existence globale de la solution du système (SRD) 53
4.4 Bornitude et estimation de la solution d'un système de réaction-diffusion 55
4.5 **La bornitude de la solution** 57

Introduction

L'intérêt de ce travail réside dans l'étude de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type parabolique connus sous le nom "réaction-diffusion", ces systèmes modélisent plusieurs phénomènes naturels et apparaissent dans beaucoup de domaines comme en physique nucléaire et atomique, en chimie (les réactions thermiques) et en biochimie (l'inspiration et l'expiration). Dans notre étude, pour établir l'unicité, la bornitude, l'existence locale et globale des solutions préservant la positivité de ce type de problèmes, nous avons imposé des conditions sur les termes de réaction en utilisant diverses approches comme le principe du maximum, les estimations a priori et la théorie des semi-groupes.

L'objet est d'apporter notre contribution à l'étude d'une classe de systèmes différentiels de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - d_1 \Delta u(x,t) = f(u(x,t), v(x,t)); \ \forall (x,t) \in \Omega \times]0,+\infty[\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) - d_2 \Delta v(x,t) = g(u(x,t), v(x,t)); \ \forall (x,t) \in \Omega \times]0,+\infty[\\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = \dfrac{\partial v}{\partial \eta}(x,t) = 0; \ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times]0,+\infty[\\ u(.,0) = u_0(x); \ v(.,0) = v_0(x); \ \forall x \in \Omega \end{cases}$$

où $d_1$et d_2 sont deux constantes positives, f une fonction continûment différentiable.

Comme la plupart des phénomènes naturels sont gouvernés par des équations non-linéaires, nous allons nous intérésser à des systèmes de réaction-diffusion semi-linéaires.

A cet effet, l'étude de l'existence locale et globale, la bornitude, sera notre préoccupation majeure. Le principe de comparaison avec des équations différentielles faciles à étudier est l'un des outils les plus efficaces que nous avons utilisé avec succès pour arriver à des resultats forts intéressants.

0.1 Historique du problème de réaction-diffusion

Dans la nature, de nombreux phénomènes sont gouvernés par une classe de systèmes de type réaction-diffusion. Parmi ceux-ci, un intérêt particulier est porté pour ceux qui possédent des solutions ayant des propriétés fortes telles que la globalité (par rapport à la variable temporelle)

Nous nous intéréssons plus particulierement à un modèle mathématique proposé par R. H. Martin [12], décrivant différents phénomènes, en tenant compte des flux migratoires à travers la frontière du domaine sur lequel le problème est posé.

Nous noterons par (P) le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - d_1 \Delta u(x,t) = f(u(x,t), v(x,t)); \ \forall (x,t) \in \Omega \times]0,+\infty[\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) - d_2 \Delta v(x,t) = g(u(x,t), v(x,t)); \ \forall (x,t) \in \Omega \times]0,+\infty[\\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = \dfrac{\partial v}{\partial \eta}(x,t) = 0; \ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times]0,+\infty[\\ u(.,0) = u_0(x); \ v(.,0) = v_0(x); \ \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{P}$$

où d_1 et d_2 sont deux constantes positives et f une fonction continûment différentiable. Notre but est d'obtenir l'existence globale de la solution du problème (P) sous les hypothèses suivantes :

H_1 : La positivité des solutions est préservée au cours du temps.

H_2**(Condition de la balance)** : la masse totale des termes de réaction est controlée au cours du temps, c'est-à-dire $f+g$ est nulle ou raisonnablement majorée.

Pour u_0 et v_0 bornées, l'existence locale en temps de la solution est classique, on note $T_{\max}$ le temps d'existence maximale. De plus, les solutions sont positives si u_0,$v_0 \geq 0$.

Si $T_{\max} < +\infty$, alors

$$\lim_{t \to T_{\max}} \left(\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \right) = +\infty \qquad (*)$$

et on dit que la solution explose à l'instant $t = T_{\max}$.

Donc pour avoir une existence globale de la solution, il suffit d'utiliser la contraposée de $(*)$. Si

$$\lim_{t \to T_{\max}} \left(\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \right) < +\infty$$

alors $T_{\max} = +\infty$.

Beaucoup de travaux ont abordé la question de l'existence globale de la solution des systèmes de réaction-diffusion du type (P). Pour g quasi-positive et $f + g = 0$, il résulte, par application du principe du maximum, l'estimation a priori :

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \quad \forall\, 0 \leq t \leq T_{\max}$$

puisque $f(u, v) \leq 0$.

S'il était possible d'établir une estimation a priori pour $v(t)$, l'existence globale en résulterait, mais, et c'est là la difficulté, une telle estimation n'est pas du tout évidente sauf bien sur dans le cas trivial $d_1 = d_2$ où

$$\|(u + v)(t)\|_\infty \leq \|u_0 + v_0\|_\infty$$

puisque $\dfrac{\partial}{\partial t}(u + v) - d_1 \Delta (u + v) = 0$.

Lorsque $f(u, v) = -uv^\sigma$, N. Alikakos [1] a établi l'existence globale de la solution pour $1 < \sigma < \frac{n+2}{n}$ avec une méthode de Bootstrap basée sur les injections de Sobolev.

L'existence de ce résultat pour $\sigma < 1$ est obtenue par K. Masuda [13] puis par S. L. Hollis-R. H. Martin -M. Pierre [9], avec une méthode différente dont le caractère générale permet de l'appliquer à une classe de système plus large comme le Brussélateur pour

lequel l'existence globale de la solution était un problème ouvert.

Ensuite A. Haraux et A.Youkana [7] ont généralisé la méthode de K. Masuda en utilisant la fonctionnelle de lyapunov pour la fonction $f(u,v) = -u\varphi(v)$, φ non linéaire et satisfait $\lim_{v\to 0}\frac{[1+\varphi(v)]}{v} = 0$. A. Moumeni-L. Salah derradji [14] ont généralisé la méthode de A. Haraux, A.Youkana [7] .

contenu du mémoire

Ce mémoire est présenté comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation de certaines équations de réaction-diffusion liée aux phénomènes de combustion, des réactions chimiques, des morphogènes et enfin de la dynamique des populations.

En fait, les équations obtenues sont le fruit d'observations minutieuse et de suivis inlassables des spécialistes de terrain.

Dans **le deuxième chapitre**, on rappelle certaines notions fondamentales d'analyse utiles pour le reste du mémoire. Nous citons, entre autres, le principe du maximum, et quelques résultats de base de la théorie des semi-groupes.

Dans le **troisième chapitre**, on s'intéresse à l'étude d'une classe d'équations non-linéaires. En utilisant l'approximation de Yosida pour prouver l'existence de la solution des systèmes de réaction-diffution.

Dans le **quatrième chapitre,** on considère des systèmes de réaction-diffusion soumis à des hypothèses sur le terme de réaction. On étudie l'existence locale et globale de la solution de ces systèmes.

Chapitre 1

Systèmes de réaction-diffusion

1.1 Principe de Diffusion

1.1.1 Introduction

L'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles se trouve à la l'interface de nombreux problèmes scientifiques et en particulier les systèmes de réactions-diffusion qui apparaissent dans plusieurs domaines et interviennent surtout dans la description des phénomènes concernant la cohabitation des espèces ou matières différentes.

Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les équations de réaction-diffusion qui gouvernent ces phénomènes s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = F(u)$$

où :

$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t).) \ldots . u_n(x,t))$ est l'inconnu avec $t \geq 0$, et $x \in \Omega$.

$F(u\,(x,t)) = (f_1(u(x,t),x,t), ..., f_n(u(x,t),x,t))$ est le terme de réaction (en générale non linéaire).

D est une matrice carrée $(n \times n)$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion, Δ est le Laplacien. $D\Delta u$ s'appelle le terme de diffusion .

On suppose que $u(x,t)$ vérifie sur le bord des conditions aux limites choisies selon l'origine et la nature du problème étudié (les conditions aux limites homogène de Dirichlet signifient qu'il n'y a pas d'individus sur la frontière et les conditions aux limites homogène de Neumann signifient qu'il n'y a pas d'imigration d'individus à travers la frontière).

Ce système constitue aussi un modèle pour beaucoup de phénomènes rencontrés en Physique, en Chimie, en Economie ou encore en Biologie. Il apparait notament en combustion (voir Bebernes et Eberly [2]), on le trouve aussi dans beaucoup de situations physique, de la mécanique des fluides à l'optique sous forme de l'equation de Ginzburg-landau complexe. Ce système et ses variantes ont également un grand intéret en Biologie (voir Murray [15] Pao [16]), en particulier en dynamique des population et chimiotactisme (voir M. A. Herrero, et A. A Lacey et J. L Velazquez [8]), étude du cancer (voir Bebernes et Eberly D [2]) .

Les théories de la diffusion ont été développées à partir de deux approches majeurs :

1°/la théorie atomistique, laquelle enveloppe l'intéraction entre les défauts, les lacunes, les atomes interstitiels, et les impuretés.

2°/ La théorie simple de Fick, qui décrit le phénomène de diffusion à l'aide des solutions des équations de Fick due aux conditions aux limites appropriées, et à la diffusivité de l'impureté.

1.1.2 Loi de Fick

La diffusion désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogène ; les concentrations des espèces chimiques en son sein. C'est un phénomène de transport irréversible qui se traduit par la migration d'espèces chimiques dans un milieu sous l'effet de l'agitation thermique, on observe un déplacement des constituants des zones de forte concentration vers celles de faible concentration d'un point de vue phénoménologique et au premier ordre. Ce phénomène est régi par une loi de Fick.

1.1.3 Diffusion et migration

Le déplacement des atomes, ions ou molécules dans un milieu, que celui-ci soit solide (cristallin ou amorphe) liquide ou gazeux, est appelé de manière générale « migration » la diffusion est la migration sous l'effet de l'agitation thermique à l'exception des autres phénomènes. Elle intervient par exemple dans des procédés d'amélioration des caractéristiques mécaniques (Traitements de surface comme la nitruration ou cémentation), la résistance à la corrosion et les procédés d'assemblage par brasage.

Lorsqu'un atome se déplace parmi des atomes de même nature, on parle **d'autodiffusion.** Par exemple, on parlera d'autodiffusion du fer pour désigner la migration d'un atome de fer dans un cristal de fer.

Lorsque l'on a deux milieux homogènes différents que l'on met en contact, on parle **d'interdiffusion.**

En 1827, le botaniste Robert Brown observe le mouvement erratique de petites particules de pollen immergées dans l'eau. Il ne s'agit pas d'un phénomène de diffusion puisque ce qui bouge est une particule macroscopique, mais cette «marche aléatoire» (Random Walk), autrement appelé par le nom de son observateur «mouvement brownien» servira de modèle pour la diffusion.

En 1855, Adolph Fick propose des lois phénoménologiques, empiriques inspirées des lois de Fourier pour la chaleur (établies en 1822).

En 1896, Robert- Austen, responsable de la monnaie en Grande-Bretagne accole une plaquette d'or à une plaquette de plomb et fait chauffer le tout, en mesure, la profondeur de pénétration d'un métal dans l'autre, c'est la première mesure d'un coéfficient d'interdiffusion à l'état solide. C'est Albert Einstein qui démontrera les lois de Fick en 1905 avec ses travaux sur la loi stochastique. En 1908, Jean Perrin, fondateur du CNRS et prix Nobel de physique, fût le premier à mesurer la trajectoire des particules soumises au mouvement brownien et confirma ainsi l'analyse théorique d'Einstein.

1.1.4 Première loi de Fick :

La première loi de Fick énonce que :

Le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration.

Cette loi est inspirée de loi de Fourier sur la conduction de la chaleur. Elle peut-être vue comme une définition du «vecteur densité de courant» $\overrightarrow{J_i}$ qui vérifie la seconde loi de Fick, en ce sens qu'elle ne contient pas la physique du phénomène de diffusion.

Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante :

Soit un milieu B dans lequel se trouve une espèce chimique A, soit une surface S. Si $C_A(x, y, z, t)$ est la concentration de A en un point donné, on appelle $\overrightarrow{J_A}$(molécule $s^{-1}m^{-2}$) le «vecteur densité de courant de particules» des particules de A .

La première loi de Fick s'écrit :

$$\overrightarrow{J} = -D_{AB}\overrightarrow{\nabla}C_A$$

La grandeur $D_{AB}(m^2s^{-1})$ est le coefficient de diffusion de A dans le milieu B considéré ; il dépend de la température du milieux A et B, à une dimension (par exemple en se plaçant sur l'axe des z) cette équation devient

$$\overrightarrow{J_{Az}} = -D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial z}$$

Ce vecteur donne accès au flux des particules de A à travers une surface S quelconque, c'est-a-dire le nombre des particules de A traversant cette surface par unité de temps. Si on note φ_A ce flux on a l'expression :

$$\varphi_A = \iint_S \overrightarrow{J_A}\overrightarrow{ds}$$

1.1.5 Seconde loi de Fick :

La loi de conservation des espèces indique que la variation par unité de temps de la quantité de particules i : $\iiint_V C_i dv$

dans un volume donné V est égale au flux sortant $\iint_S \overrightarrow{J_A}\overrightarrow{ds}$

du vecteur densité de courant de particules $\overrightarrow{J_i}$ à travers la surface fermée S délimitant le volume V. On obtient la deuxième loi de Fick en identifiant les intégrants ci-dessous :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V C_i dv = \iint_S \overrightarrow{J_i}\overrightarrow{ds} = \iiint_V div\overrightarrow{J_i} dv.$$

La deuxième égalité ci-dessus est due au théorème de divergence dit de «Green-Ostrogradsky» et le signe moins provient du fait que la concentration diminue quand le flux sortant augmente. On a donc :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + div\overrightarrow{J_i} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{J_i} = 0$$

à une dimension, l'équation devient :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial x} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial J_i}{\partial x}$$

1.1.6 Activation thermique

L'origine de l'auto-diffusion est l'agitation thermique. La diffusion est donc thermiquement activée, et le coefficient de diffusion suit une loi d'Arrhenius :

$D_i^m(T) = D_{i0}^m e^{-\frac{E}{kT}}$

où E est l'énergie d'activation, k est la constante de Boltzmann et T la température absolue.

1.1.7 Mouvement Brownien

Le déplacement de l'espèce chimique concerné peut se modéliser par le mouvement brownien comme l'a formalisé Einstein, ceci permet de retrouver la première loi empirique de diffusion de Fick.

1.1.8 Mécanismes de diffusion

Diffusion dans les cristaux

Un solide cristallin est un arrangement régulier d'atomes, mais il présente des défauts. Ce sont ces défauts qui permettent la diffusion, et essentiellement les défauts ponctuels. On distingue essentiellement deux mécanismes :

* **Le mécanisme lacunaire** : le cristal présente des lacunes. C'est à dire que certains sites sont vides, un atome voisin de la lacune peut donc sauter cette place vide, et se déplacer d'une position.

* **Le mécanisme interstitiel** : si l'on représente les atomes comme des sphères dures, un cristal est un empilement de sphères dures et il reste de l'espace vide entre les sphères.

Un petit atome peut donc se glisser dans un de ces interstices, et sauter d'un interstice vers un interstice voisin.

Dans tous les cas, il s'agit de sauts atomiques d'une position vers une position voisine, sous l'effet de l'agitation thermique. Mais un cristal dispose également d'autres défauts, dislocations, joints de grain et surfaces libres. La diffusion dans ces zones est plus rapide que dans la masse du cristal.

Dans les liquides

L'orsqu'on met une substance colorée, comme une goutte d'encre, dans un récipient rempli d'eau, il s'opère ce que l'on appelle un phénomène de diffusion. La substance est d'abord séparée de l'eau par une frontière bien nette, puis les molécules de la substance se distribuent uniformément dans l'eau sous l'action d'un gradient de concentration. Là où la concentration est élevée, les molécules tendent à décroître en nombre ; et inversement, aux endroits de faible concentration leur nombre augmente. Les molécules de la substance colorée se déplacent sous l'impact des molécules d'eau sans aucune préférence quant à la direction. Ce processus de migration aléatoire, de transport de matière à l'intérieur d'un système prendra fin quand la densité des molécules sera la même partout. La diffusion se définit comme étant cette tendance des molécules à se déplacer en direction d'une activité thermodynamique (concentration) moindre, de façon à atteindre une concentration uniforme et une entropie maximale dans tout le système.

1.2 Modélisation des équations de réaction- diffusion

1.2.1 Modélisation

Pour modéliser un phénomene donné, on simplifiera plusieurs termes et on négligera d'autres facteurs rentrant dans les réactions dans le but d'obtention des équations simples et faciles à étudier.

Considérons une région bornée Ω de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les réactions se réalisent.

Notons u_i la concentration de la $i^{\underline{eme}}$ espèce et $f_i(t, x, u_1, u_2, ..., u_m)$ son taux de formation dans la réaction où x est la position et t le temps.

Soit J_i le flux de ces espèces dû à la diffusion à travers la frontière Γ de Ω, et V un volume infiniment petit de la région Ω de frontière $S = \partial V$. Alors la vitesse de formation de u_i est égale à la quantité (f_i) formée par la réaction moins le flux à travers la surface S .

On a mathématiquement :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u_i(t,x)dx = \int_V f_i\left(t,x,u_1(t,x),...u_m(t,x)\right)dx - \int_S J_i ds$$

Et en vertu du théorème de divergence

$$\int_S J_i d\sigma = \int_V \nabla J_i dx$$

ce qui donne

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}u_i(t,x) - f_i\left(t,x,u_1(t,x),...,u_m(t,x)\right) + \nabla J_i\right] dx = 0$$

et comme le volume V est infiniment petit et arbitraire, alors on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i(t,x) = f_i(t,x,u_1(t,x),...,u_m(t,x)) - \nabla J_i \quad i = \overline{1,m}$$

Dans le plan microscopique, le terme de réaction f_i vient de l'application de la loi d'action de masses et dans le plan macroscopique d'une loi semblable, et si $f_i > 0$, alors il existe une source ou production de masse pour la i^{eme} espèce et dans le cas contraire où $f_i < 0$, il y a une annihilation de masse.

Le flux est donné par la loi de diffusion (ou seconde loi de Fick) et d'aprés cette dernière loi J_i est proportionnel au gradient de la concentration des espèces et il est donné par

$$J_i = -\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\nabla u_j$$

où a_{ij} est le coefficient d'auto-diffusion et $A = (a_{ij})\, 1 \leq i, j \leq m$ est une matrice définie positive appelée matrice de diffusion, où ses termes a_{ij} sont les coefficients de diffusion qui caractérisent la diffusion de u_i dans u_j et dans ce cas, on a affaire à ce qu'on appelle croissement de diffusion entre les densités u_i. De ce qui précède on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\Delta u = f\,(u)$$

et par un changement de variable, la matrice A peut être ramenée à une matrice diagonale $D = (d_1, ..., d_m)$; d'où enfin l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + D\Delta v = g(v)$$

où les coefficients de diffusion d_i ne sont pas toujours positifs. Si $d_i > 0$, alors l'écoulement de la matière se fait des milieux plus concentrés vers les moins concentrés et le contraire pour le cas $d_i < 0$ ce qui signifie que les organismes s'attirent vers leurs espèse et le mouvement se fait alors dans le sens du gradient de concentration.

1.2.2 Quelques exemples de modélisation

Dans les modèles de biologie ou de la dynamique des populations, on s'intéresse à la concentration d'une substance chimique ou à la densité d'une population (particules, cellules) et son évolution au cours du temps. l'inconnu u est une fonction de $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$.

Equation de Fisher (1937)

Pour $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, cette équation et un modèle de dispersion en une dimension spatiale, d'un morphogène favorable dans une population, elle s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = ru(1 - \frac{u}{C}).$$

Le terme de croissance logistique (terme de réaction) dépend de la constante de reproduction linéaire r, de la capacité de l'environnement C et du coefficient de dispersion de la population k.

Equations Fitz-Hugh-Nagumo

Elles prennent la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) - v \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \delta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \delta\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha u - \beta v \end{cases}$$

où :

u designe le potentiel éléctrique

v designe une concentration chimique déterminant la conductance dans la matière poteuse.

Ces équations sont utilisées pour modéliser la transmission d'impulsions nerveuses le long d'axones ou des réactions chimiques cycliques de Belousov-Zhabotinsky.

Biochimie

On prend l'exemple de deux substances a et i telles que : a joue le rôle d'un activateur (enzume) et i joue le role d'un inhibiteur, ce dernier dénature l'enzume.

Ce phènomène est régi par le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} - D_a \nabla^2 a = f_a(a,i) \\ \\ \dfrac{di}{dt} - D_i \nabla^2 i = f_i(a,i) \end{cases}$$

Le premier terme de la partie à droite représente le processus de diffusion.

D_a et D_i sont les constantes de diffusion des substances a et i respectivement .

Les termes $f_a(a,i)$ et $f_i(a,i)$ représentent d'autres processus comme la production ou la décomposition qui sont donnés par :

$$\begin{cases} f_a = \dfrac{Ca^2}{C_1 i\,(1 \mid Ka^2) \mid C_2 i^2} - m_1 a + r_1 \\ f_i = C_1\,(C_2 a + C_1 a^2) - m_2 i + r_2 \end{cases}$$

La production est donnée par le premier et le troisième terme, par contre le deuxième terme reprèsente la décomposition.

Concentration de morphogène

Posons $C = u(x,y,t)$ la concentration de morphogène au point (x,y), en un temps t, l'équation de réaction-diffusion décrivant cette concentration est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = -bu + R \quad (x,y,t) \in [0,1]^2 \times \mathbb{R}^+$$

où a est le taux de diffusion, b le taux de dissipation et la fonction R est la fonction de réaction de la concentration C. Ainsi , notre modèle intègre, trois processus (les trois termes à droite).

La diffusion : décrit le transfert des morphogènes des points de forte concentration vers des points de faible concentration.

La dissipation : concerne la décomposition des morphogènes causant des concentrations, en l'absence d'autre influences, qui s'effritent exponentiellement vers 0.

La réaction : décrit le taux de production des morphogènes.

En pratique : posons h le pas d'une discrétisation uniforme du carré $[0,1]^2$. Notons par $C_{i,j}$ la valeur de concentration au point (i,j). Le Laplacien de $C_{i,j}$ s'écrit :

$$\Delta_{i,j} = \Delta C_{i,j} \simeq \frac{C_{i+1,j} + C_{i-1,j} + C_{i,j+1} + C_{i,j-1} - 4C_{i+1,j}}{h^2}$$

En fait $\Delta_{i,j}$ est décrit comme la convolution des valeurs de la concentration sur les sommets du carré discrétisé de côté h par la matrice d'ordre 3 ;

$$L = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En multipliant le Laplacien par a^2 et en tenant compte des termes $-bC_{i,j}$ on obtient la matrice symétrique

$$M = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & a^2 & 0 \\ a^2 & -4 - h^2 b & a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a la forme matricielle de l'équation décrivant la concentration

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M * C + R$$

où $*$ dénote la convolution discrète.

Réactions chimiques

Soient A et B deux substances chimiques qui réagissent suivant la Loi :

$$A + B \rightarrow 2B + R$$

On note C_a, C_b les concentrations respectives de A et B. Si A et B n'ont pas été

mélangés et si on veut modéliser leur diffusion, on obtient le modèle de réaction-diffusion

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_a}{\partial t} - d_A \Delta C_a = -k C_a C_b \\ \\ \dfrac{\partial C_b}{\partial t} - d_B \Delta C_b = k C_a C_b \end{cases}$$

Où d_A et d_B sont les constantes de diffusion des substances A, B dans la solution et $k > 0$ désigne le taux de réaction. Si $d_A = d_B = 1$ alors la somme

$C = C_A + C_B$ est solution de l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial C}{\partial t} = \Delta C$. Si on outre, les données initiales sont telles que : $C_a(x, 0) + C_b(x, 0) = 1$ pour tout $x \in \Omega$, alors (pour les conditions au bord de Neumann, par exemple) la solution vérifie :

$$C_a(x, t) + C_b(x, t) = 1 \text{ pour } x \in \Omega \text{ et } t \geq 0$$

De sorte que notre système se réduit à l'équation scalaire, appelée équation de Fisher ou équation de Kolmogorov-Petrovisky-Piskunov(Kpp)

$$\frac{\partial C_b}{\partial t} - \Delta C_b = C_b \left(1 - C_b\right).$$

Nucléaire

Le modèle dècrivant une réaction nucléaire est donné par le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = auv - bu & \text{sur } \Omega \times (0, +\infty) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = cv & \text{sur } \Omega \times (0, +\infty) \end{cases}$$

avec conditions aux bords homogène de Neumann et conditions initiales positives.

On montre que, pour $a > 0, b > 0$ et $c > 0$, la solution du système précédent explose en temps fini.

Modélisation de la combustion

On décrit la combustion d'un milieu gazeux par une réaction chimique exothermique de la forme $R \rightarrow P$ où R est le réactant (mélange gazeux) et P le produit de la réaction (substance inerte). On note $Y(x,t)$ la densité du réactant au point x à l'instant t et $T(x,t)$ la température du mélange. Alors sous différentes approximations (densité, convection négligeable,....) on obtient le système Thermo-diffusif

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} - K\Delta T = YF(T) \\ \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t} - \dfrac{K}{Le}\Delta Y = -YF(T) \end{cases}$$

Où le nombre de lewis, noté Le, est le rapport des constantes de diffusion. La non-linéarité de F est de type «Arrhenius »

$$F(T) = P(T)\exp\left(\frac{-E}{RT}\right)$$

Où :

P est un polynôme en T.

R est la constante des gaz parfaits et E une énergie d'activation.

Si $Le = 1$ et si $T + Y \equiv 1$, on est ramené à l'équation scalaire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - K\Delta T = -(1-T)F(T)$$

La fonction $f(T) \equiv F(T)(1-T)$ s'annulant très vite lorsque $T \rightarrow 0$, on l'approche souvent par une fonction identiquement nulle sur un petit intervalle $[0,\theta]$, ou $\theta > 0$ est la "température d'ignition".

Chapitre 2

Quelques résultats préliminaires

2.1 Théorèmes et formules fondamentaux

Théorème 1 (Principe du maximum) :

Il existe plusieures formalismes du principe de maximum, on présente ici quelques une.

Soit

$$Pu = Au + au = f$$

où

$$u = u(t.x)\,;\, t \geq 0 \; et \; x \; \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

et

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \;\; (t,x)\, D_i D_j u + \sum_{i=1}^{n} a_i \;\; (t,x)\, D_i u - u_t$$

avec les a_{ij} , a_i bornés dans $Q = [0, +\infty[\times \Omega$ et $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$.

Définition 1 *On dit que A est uniformément parabolique dans Q, s'il existe* $\mu > 0$, $\forall$ $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, *tel que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \;\; (t,x)\, \xi_i \xi_j \geq \mu \left|\xi\right|^2, \forall (t.x) \in Q.$$

Définition 2 *Soient* (t_1, x_1) *et* $(t_2, x_2) \in Q$. *On dit que* (t_1, x_1) *est connecté à* (t_2, x_2) *par un segment horizontal si* $t_1 = t_2$ *et les points sont isolés, par un segment contenu dans* $\{t_1 = t_2\} \bigcap Q$. *De la méme façon , on dit que ces points peuvent etre connectés par un segment vertical si* $x_1 = x_2$ *et le segment contenu dans* Q.

Théorème 2 *Supposons que* A *est uniformément parabolique dans* Q , *avec* $a \leq 0$ *et* $f \geq 0$ $(resp\ f \leq 0)$ *dans* Q. *Soit* $\sup_Q u = M \geq 0$ $(resp\ \inf_Q u = m)$ *et supposons que* $u(t, x) = M$ *pour un certain* $(t, x) \in Q$, *alors* $u(t, x) = M$ *en tous points dans* Q *qui peuvent étre connectés à* (t, x) *pour un arc dans* Q *formé par un nombre fini de segments horizontaux et verticaux.*

Preuve. Voir J.Smoller [19] . ■

Théorème 3 *Considérons le probléme :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 & dans\ [0, T[\times \Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ [0, T[\times \partial\Omega \end{cases}$$

Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *et soit* u *la solution du problème ci-dessous , alors on a :*

$$\begin{aligned} Min\{0, \inf\ u_0\} \ &\leq\ u(t, x) \leq Max\{0, \sup\ u_0\}, \\ \forall\ (t, x) \ &\in\ [0, T] \times \Omega \end{aligned}$$

Preuve. Voir Brézis [4] ■

2.2 Rappel sur les opérateurs

2.2.1 Notations et définitions

On désigne par X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et par X^* son dual de norme $\|.\|_{X^*}$. Soit A un opérateur de X de domaine $D(A)$, alors :

$$(u, v) \in A \text{ signifie que : } u \in D(A) \text{ et } v \in R(A).$$

- L'image d'un opérateur A sera notée $R(A)$.

Définition 3 *Un opérateur linéaire dans X est un couple (D, A) où*

$i)$ D est un sous espace vectoriel de$X$

$ii)$ $A : D \to X$ une application linéaire

On dit que A est **borné** si $\|Au\|$ reste borné lorsque $u \in \{u \in D; \|u\| \leq 1\}$. Dans le cas contraire A est dit **non borné.**

Lemme 1 *Un opérateur A est dit **fermable** si la fermeture de son graphe est un graphe i.e. $(0, y) \in \overline{G(A)} \Rightarrow y = 0$, alors $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur fermé qu'on appelle la fermeture de A et qu' on note par $\overline{A}$.*

2.2.2 Opérateur monotone

Soit $A : D(A) \subset X \to X^*$. L'opérateur A est dit **monotone** si $(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_{X \times X} \geq 0$ pour tout $(u_1, u_2) \in D(A)$.

Autrement dit ;

$$\forall (u_i, v_i)_{i=1,2} \in A \text{ on a : } (v_1 - v_2, u_1 - u_2) \geq 0.$$

2.2.3 Opérateur accrétif

Un opérateur A de X est dit **accretif** si : pour tous $\lambda > 0$, et $(u_i, v_i)_{i=1,2} \in A$ on a : $\|u_2 - u_1\| \leq \|(u_2 - u_1) + \lambda(v_2 - v_1)\|$.

Remarque 1 *Si A est accrétif, $f \in X$, l'équation $u + \lambda Au = f$, $\forall \lambda > 0$ a au plus une solution.*

Théorème 4 *Dans le cas où X est un espace de Hilbert on a :*

$$Amonotone \iff Aaccrétif.$$

Remarque 2 *Designons par I l'identité de X.Si A est un opérateur de X , on définit*

$$A^{-1} := \{(v, u) \in X \times X : (u, v) \in A\}$$

exemple 1 *Soit Ω un espace mesuré (de mesure dx) et B un graphe monotone de $\mathbb{R}^2$.*

On définit le prolongement Bp de B à $L^p(\Omega)$ de la manière suivante :

$Bp := \{(u, v) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) : v(x) \in B(u(x))dxpp\}$ alors B_p est accrétif dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Preuve. Soit $(u_i, v_i) \in Bp$ pour $i = 1.2$. Puisque Bp est monotone dx $p.p$ Alors :

$$\forall \lambda > 0 : |u_1(x) - u_2(x)| \leq |u_1(x) - u_2(x) + \lambda(v_1(x) - v_2(x))| \qquad (H)$$

Cas $p = +\infty$, prenant la borne supérieure essentiel des deux membres, on obtient :

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|u_1 - u_2 + \lambda(v_1 - v_2)\|_\infty$$

Ce Ce qui prouve l'accréditive de Bp dans $L^\infty(\Omega)$.

Cas $1 \leq p < \infty$: elévant à la puissance p l'inégalité (H) et intégrant sbtient :

$$\int_\Omega |u_1(x) - u_2(x)|^p \, dx \leq \int_\Omega |u_1(x) - u_2(x) + \lambda(v_1(x) - v_2(x))|^p \, dx.$$

Ce qui prouve l'accrétivité de Bp dans $L^p(\Omega)$. ■

exemple 2 $X = L^2(\Omega)$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$Au = -\Delta u$$

Alors A est monotone

Preuve. Puisque A est linéaire et X est un espace de Hilbert, il s'agit de montrer que $(Au, u)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \ \forall u \in D(A)$.En effet :

$$(Au, u) = \int_\Omega (-\Delta u) \, u dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq 0$$

i.e. A est monotone. ■

2.2.4 Opérateur m-accrétif

On dit que A est m -accrétif dans X si

i) A est accrétif dans X

ii)Pour tout $\lambda > 0, R(I + \lambda A) = X$

Cas X un espace de Hilbert : Soit A un opérateur dans X, alors :

$$A \text{ maximal monotone} \iff \begin{cases} i) \ A \text{ est monotone} \\ ii) \forall \lambda > 0, \ R(I + \lambda A) = X, \text{ i.e.} \\ \forall f \in X, \exists u \in D(A) \ : u + \lambda A u = f \end{cases}.$$

Remarque 3 *Lorsque X est un espace de Hilbert : A m-accretif $\Longrightarrow$ A maximale monotone.*

2.2.5 Opérateur sectoriels

Un opérateur linéaire A dans un espace de Banach X est appelé opérateur sectoriel s' il est fermé, $D(A)$ est dense dans X, et il existe $\phi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $M \geq 1$, et $a \in \mathbb{R}$ tels que le secteur

$$\Delta_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \phi \leq \arg\ (\lambda - a) \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A)$$

où $\rho(A)$ est la résolvante de A et $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$, pour tout $\lambda \in \Delta_{a,\Phi}$.

* Tout opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X est sectoriel.

* Si A est un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et à domaine dense dans un espace de Hilbert, alors A est sectoriel.

2.3 Semi-groupes

Définition 4 *Soit X un espace de Banach, une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de X vers X est dite un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si et seulement si :*

i) $T(0) = I$, l'identité dans X

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour $t, s \geq 0$

Remarque 4 *La famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ constitue un groupe, si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites pour s et t, alors tout semi-groupe se prolonge en un groupe sur $\mathbb{R}$.*

Définition 5 *Un semigroupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés est dit*

*1) **Fortement continu** est noté C_0 semi-groupes si l'application $t \longrightarrow T(t)$ est continue pour la topologie d'opérateur sur $L(E)$ i.e.*

$$\lim_{t\to t_0} \|T(t)f - T(t_0)f\| = 0$$

pour tout $f \in X, t, t_0 \in \mathbb{R}^+$. *De manière analogue, on définit les semi-groupes faiblement continus en s'appuyant sur les topologies d'opérateurs.*

2) ***Uniformément continue*** *si* $\lim_{t \searrow 0} \|T(t) - I\| = 0$.

3) ***Semi-groupe de contraction*** *de classe* C° *s'il est de classe* C° *et verifie :*

$$\|T(t)\| \leq 1, \ \forall t \geq 0.$$

2.3.1 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C^0

L'objet le plus important qui est associe à un C_0- semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, est son générateur infinitésimal qui peut etre obtenu comme la dérivée (à droite) de la fonction $t \to T(t)$ en $t = 0$. Puisque pour les C_0-semi-groupes, les fonctions $t \to T(t)f$, $f \in X$ sont continues mais ne sont pas en général différentiables, on doit se restreindre aux cas où $f \in X$ pour lesquelles la dérivée existe.

On obtient alors le généralteur qui n'est pas nécessairement défini partout.

2.3.2 Théorème de Hille-Yosida

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé de domaine dense dans X soit générateur d'un semi-groupe fortement continu est qu'il existe $w \in \mathbb{R}$ tel que :

i) $(\rho I - A)^{-1}$ existe pour tout ρ avec $\mathrm{Re}\,\rho = \lambda > w$

ii) $\left\|(\rho I - A)^{-k}\right\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - w)^k}, k \in \mathbb{N}$ pour $\lambda > w$.

Preuve. Voir Dautray-L. Lions [5]

Remarque 5 *Le cas où* $M = 1$, $w = 0$ *correspond à un semi-groupe de contraction.*

■

Proposition 1 *Soit* X *un espace de Banach,* $T : X \to X$ *une contraction , Alors l'opérateur* $I - T$ *est m-accretif*

Preuve. i) Accrétivité : Puisque T est une contraction , on vérifie facilement que :

$$(u-\hat{u},(I-T)u-(I-T)\hat{u})\geq 0,\ \forall\ u,\hat{u}\in D(T)$$

ii) Montrons que :

$$\forall\lambda>0, R(I+\lambda(I-T))=X \text{ i.e.}$$

$$\forall y\in X,\exists\ x\in D(T); y=x+\lambda(I-T)x\ ,\ y=x+\lambda x-\lambda Tx \iff x=\frac{1}{\lambda+1}(y+\lambda Tx)$$

soit

$$\Phi: x\to \frac{1}{1+\lambda}\ (y+\lambda Tx)$$

alors

$$\begin{aligned}|\Phi(x)-\Phi(\widehat{x})| &= \frac{\lambda}{1+\lambda}|Tx-T\widehat{x}|\\ &\leq \frac{\lambda}{1+\lambda}|x-\widehat{x}|\end{aligned}$$

Pour tout $\lambda>0$ on a : $0<\dfrac{\lambda}{1+\lambda}<1$ et alors Φ est une contraction stricte dans X, d'où l'existence d'un point fixe (qui est unique). ■

Définition 6 *Soit X un espace de Banach , $T(t)_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe, on appelle* ***générateur infinitésimal*** *de $T(t)_{t\geq 0}$ l'opérateur $(A,D(A))$ défini par :*

$$D(A)=\left\{f\in X, \lim_{h\to 0}\frac{T(h)f-f}{h}\ existe\ dans\ X\right\}$$

$$Af=\lim_{h\to 0}\frac{T(h)f-f}{h} pour f\in D(A).$$

Il est clair que $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de X et A est linéaire de $D(A)$ dans X.

2.3.3 Premières propriétés des semi-groupes de classe C^0

Propriétés des semi-groupes :

Proposition 2 *Soit $T(t)_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe, A son générateur infinitésimal, alors :*

a) pour tout $x \in X$, $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$.

b) pour tout $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et $A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x$.

c) pour tout $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.

d) pour tout $x \in D(A)$, $T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau$.

Remarque 6 *Un C_0-semi -groupe $(T(t)_{t\geq 0})$ de générateur A peut avoir une extension à u C_0 groupe $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ si est seulement si -A génère un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$. Dans ce cas $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est obtenue comme suit :*

$$U(t) = \begin{cases} S(-t) & t \leq 0 \\ T(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

Pour un groupe il est naturel de définir le générateur infinitésimale comme étant la dérivée.

Proposition 3 *Soit $(T(t)_{t\geq 0})$ un C_0semi-groupe de classe C^0sur X alors :*

i) $t \to \|T(t)\|$ est brnée sur tout intervalle compact $[0, T]$

ii) Il existe $w \geq 0, M \geq 1$, deux constantes telles que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt} \quad 0 \leq t < +\infty$$

Corollaire 1 *Si A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C^0 sur X, alors $D(A)$ est dense dans X et A est linéaire fermé.*

Caractérisation des générateurs infinitésimaux :

Le problème de Cauchy abstrait avec second membre nul admet une solution pour toute donnée initiale dans le domaine de A si et seulement si l'opérateur A est un générateur infinitésimal d'un C_0-Semi-groupe.

Le théorème de Hill-Yosida -Phillips donne une caractérisation différente en terme de résolvante de A et met à notre disposition un outil puissant pour décider qu'un opérateur donné est ou non le générateur d'un C_0-semi-groupe. C'est plus intéressant du point de vue applications ; car l'opérateur A est l'objet fourni par l'équation différentielle à résoudre.

2.3.4 Semi-groupes analytiques

Définition 7 *Un semi-groupe T(t) est dit holomorphe s'il est* ***holomorphe*** *dans un secteur contenant le demi-axe des réels non négatifs. Le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$ de domaine :*

$$D(\Delta) = \left\{u, u \in L^2(\mathbb{R}^n); \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 5 *Soit A un opérateur fermé de domaine dense dans un espace de Banach complexe X, tel que $(-A)$ vérifie la condition : il existe w avec $0 \leq w \leq \frac{\pi}{2}$, $M > 0$, telles que :* $\begin{cases} \rho_A \supset \sum_{0,w} = \left\{\rho \in \mathbb{C}, |\arg(p-0)| \leq \frac{\pi}{2} + w\right\} \\ \|R(p)\| \leq M \ / \ (1-|p|) \ \ \forall p \in \sum_{0,w} \end{cases}$ *Alors le semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de générateur infinitésimal $(-A)$ vérifie :*

i) $T(t) : X \to D(A^\alpha)$,pour tout $t > 0$, et tout $\alpha > 0$.

ii) Pour tout $x \in D(A^\alpha)$ on a

$$T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t), \alpha \in \mathbb{R}.$$

iii) pour tout $t > 0$, l'opérateur $A^\alpha T(t)$ est bornée, et $\|A^\alpha T(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$

iv) Pour $\alpha \in]0,1]$ *et* $x \in D(A^\alpha)$

$$\|T(t)x - x\|_X \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|_X$$

Preuve. Voir Dautray-Lions [5] ■

2.3.5 Problèmes d'évolution

Préliminaire

Soit $(X, \|.\|)$ pun espace de Banach et A un opérateur non borné fermé et à domaine $D(A)$ dense dans X. Etant donné $u_0 \in X$ et $f : X \to X$. Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ telle que} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - Au = f \quad \text{pour } t > 0 \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

où f peut etre linéaire ou non et A un opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^n$ qui peut être abstrait dans un espace de Banach abstrait. On suppose que A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C^0.

Définition 8 *On dit que u est une solution forte de (2.6) si :*

i) u vérifie (2.6)

ii) $u \in D(A)$ *pour* $t > 0$

On dit qu'une fonction u de variable réelle $t \geq 0$ à valeur dans X est solution locale du probléme (2.6), s'il existe u définie sur un intervalle maximal $[0, T^*)$ qui pour $t \leq T^*$ est

l'unique solution de (2.6) dans $C^1([0,T^*),X)$. En particulier, l'une des deux éventualités suivantes a lieu

$$\begin{cases} (i)\ T^* = \infty \\ (ii)\ T^* < \infty \text{ et } \lim\limits_{t \to T^*} \|u(t)\| = \infty \end{cases}$$

2.3.6 Existence non globale

Etant donné le probléme suivant où l'éxistence de la solution est locale mais non globale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u^3 \qquad 0 < x < \pi, t > 0. \\ u(t,0) = 0 \ , \quad u(t,\pi) = 0. \\ u(0,x) = \Phi(x) \end{cases}$$

où Φ est une fonction régulière positive donnée sur $[0,\pi[$ par $S(0) = \int_0^\pi \Phi \sin x \ dx > 2$, alors la solution de ce probléme existe dans l'intervalle $[0,T[$ et cesse d'exister au delà de

$$T \leq \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{4}{S^2(0) - 4}).$$

En effet, si on pose

$$S(t) = \int_0^\pi \sin x \ u(t,x) dx$$

alors

$$S'(t) = \int_0^\pi \sin x \ \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) dx = \int_0^\pi \sin x \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) dx + \int_0^\pi \sin x \ u^3(t,x) dx.$$

L'intégration par parties et les conditions initiales donnent

$$S'(t) = -S(t) + \int_0^{\pi} \sin x \; u^3 dx$$

Moyennant l'integalité de Hölder, on arrive à $S(t) \leq 2^{2/3}(\int_0^{\pi} \sin x \; u^3 dx)^{\frac{1}{3}}$, il s'ensuit que :

$$S'(t) \geq -S(t) + \frac{1}{4}S^3(t)$$

Si l'on pose $\Psi = S^{-2}$, alors :

$$\Psi' = -2S^{-3}S'$$

par suite

$$\frac{\Psi'}{-2} \geq -\Psi + \frac{1}{4},$$

d'où

$$\Psi' - 2\Psi \leq \frac{-1}{2}.$$

On multiplie les deux membres de l'inégalité par e^{-2t} pour avoir

$$\begin{aligned} (e^{-2t}\Psi)' &\leq \frac{-1}{2}e^{-2t} \\ \int_0^t (e^{-2t}\Psi)' \, ds &\leq \frac{-1}{2}\int_0^t e^{-2s} ds \\ e^{-2t}\Psi(t) - \Psi(0) &\leq \frac{1}{4}\left(e^{-2t} - 1\right), \end{aligned}$$

alors

$$\Psi(t) \leq e^{2t}\Psi(0) + \frac{1}{4}\left(1 - e^{2t}\right).$$

Donc

$$S^{-2}(t) \leq \frac{e^{2t}}{S^2(0)} + \frac{1}{4}\left(1 - e^{2t}\right) = \frac{4e^{2t} + S^2(0)\left(1 - e^{2t}\right)}{4S^2(0)}.$$

L'expression $4e^{2t} + S^2(0)\left(1 - e^{2t}\right)$ doit être positive , i.e.

$$4e^{2t} + S^2(0)\left(1 - e^{2t}\right) > 0$$

ce qui donne

$$e^{2t}(4 - S^2(0)) > -S^2(0)$$

comme $S(0) > 2$, alors $4 - S^2(0) < 0$ et $e^{2t} < \dfrac{S^2(0)}{S^2(0) - 4}$, ou encore

$$t < \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{4}{S^2(0) - 4}) = t^*.$$

De ce que précéde on peut écrire

$$\frac{4S^2(0)}{4e^{2t} + S^2(0)\left(1 - e^{2t}\right)} \leq S^2(t)$$

ce qui implique que :

$$\max_{x\in[0,\pi]} |u| \geq S(t) \geq \frac{2S\left(0\right)}{\sqrt{4e^{2t} + S^2(0)\left(1 - e^{2t}\right)}}, t \in [0, t^*[$$

Ainsi il doit exister un certain $T \leq t^*$ pour lequel on a $\lim_{t\to T} \|u\|_\infty = \infty$, ce qui prouve que la solution cesse d'exister au delà de T . Par conséquent, la solution ne peut étre globale.

Cas semi-linéaire :

Soit le probléme :

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = f(t,u)\,;\, t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

où A est un opérateur sectoriel, alors l'opérateur fractionnaire A_1^α où : $A_1 = A + aI$ est bien défini et l'espace $X^\alpha = D\left(A_1^\alpha\right)$ muni de la norme du graphe, $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$ est

défini pour $\alpha \geq 0$.

Lemme 2 *Si u est une solution de (S) dans $]t_0, T[$, alors*

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds \tag{2.7}$$

Inversement, si u est une fonction continue de $]t_0, T[$ dans X^α $(D(A_1^\alpha))$ et,

$$\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(s,u(s))\| ds < \infty$$

pour un certain $\rho > 0$, et si l'équation intégrale (2.7) est vraie pour $t_0 < t < T$, alors $u(.)$ est une solution de (S) dans $]t_0, T[$.

Preuve. Suppossons que u est une solution de (2.7) et $u \in C(]t_0, T[, X^\alpha)$. Si $t_0 < t < t+h < T$ alors :

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= (T(h)-I).T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds - \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds. \\ &\quad (T(h)-I)T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} (T(h)-I)T(t-s)f(s,u(s))ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds, \end{aligned}$$

Maintenant si $0 < \delta < 1-\alpha$, alors pour chaque $z \in X$ et d'après le théoréme (5) sur les semi-groupes holomorphes , on obtient

$$\begin{aligned} \|(T(h)-I)T(t-s)z\|_\alpha &\leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} h^\alpha \|A^\alpha T(t-s)z\| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} h^\alpha C_\alpha (t-s)^{-\alpha}.e^{-\delta(t-s)} \|z\| \\ &\leq C(t-s)^{-\alpha} e^{-\delta(t-s)} h^\alpha \|z\|. \end{aligned}$$

Donc pour $t \in [t_0^*, T^*] \subset]t_0, T[$ il s'ensuit que $t \to f(t, u(t))$ est localement continue de Hölder, u résout l'équation linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + Av = f(t,u) & t_0 < t < T \\ v(t_0) = u_0 \end{cases}$$

et enfin u aussi une solution de (S) ■

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution de l'équation homogène

Soit X un espace de Banach, et A un opérateur accretif. Soit $\lambda > 0$, on pose

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$$

et

$$A_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}$$

par définition J_λ s'appelle la résolvante de A et A_λ l'approximation de Yosida ou (régularisée de Yosida de A). On montre que si A est m-accrétif, alors $A_\lambda \to A$, quand $\lambda \to 0$ sous certain sens (ce qui justifie l'appellation ci-dessus).

Théorème 6 *On a :*

i) J_λ *est une contraction de* X, $D(A_\lambda) = D(J_\lambda) = R(I + \lambda A)$.

ii) A_λ *est une application lipschitizienne de constante* $\frac{2}{\lambda}$.

iii)A_λ *est m-accrétif.*

iv)$A_\lambda \subset AJ_\lambda$ *i.e. pour tout* $u \in D(A_\lambda)$ *on a :* $A_\lambda u \in A(J_\lambda u)$.

v) pour tout $u \in D(A) \cap D(J_\lambda)$, *alors* $\|A_\lambda u\| \leq \inf_{w \in Au} \|w\|$.

vi) $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda u - u$, $\forall u \in \overline{D(A)}$.

vii) Si A est m-accretif , pour tout $u \in D(A)$ *on a :* $\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda u = Au$.

Preuve. i) Par définition même de l'accretivité de A : $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur univoque et c'est une contraction. Naturellement

$$D(J_\lambda) = R(I + \lambda A).$$

ii) $A_\lambda = \dfrac{I - J_\lambda}{\lambda}$ donc A_λ est un opérateur univoque et $D(A_\lambda) = D(J_\lambda) = R(I + \lambda A)$ pour tout $u, v \in D(A_\lambda)$ on a

$$\lambda(A_\lambda u - A_\lambda v) = u - v - (J_\lambda u - J_\lambda v)$$

et donc :

$$\|A_\lambda u - A_\lambda v\| \leq \frac{2}{\lambda} \|u - v\|$$

iii) Découle immediatement de la proposition 1

iv) Pour tout $u \in D(A_\lambda)$, on pose

$$v = A_\lambda u = \frac{u - J_\lambda u}{\lambda}$$

et soit

$$w = J_\lambda u \iff u = w + \lambda A w \iff u = w + \lambda z$$

avec $z \in Aw$. Donc

$$v = \frac{u - J_\lambda u}{\lambda} = \frac{u - u + \lambda z}{\lambda} = z \implies v \in A(J_\lambda u)$$

v) Soit $u \in D(A) \cap D(J_\lambda)$, et soit $x \in Au$, alors :

$$u + \lambda x \in (u + \lambda A u) = (I + \lambda A)u$$

donc

$$u = (I + \lambda A)^{-1}[u + \lambda x] = J_\lambda (u + \lambda x).$$

Ainsi quel que soit $x \in Au$, on a toujours $u - J_\lambda(u + \lambda x)$

$$A_\lambda u = \lambda^{-1}(u - J_\lambda u) = \lambda^{-1}[J_\lambda(u + \lambda x) - J_\lambda u], \forall x \in Au$$

$$\|A_\lambda u\| \leq \frac{1}{\lambda}\lambda \|x\| = \|x\|, \forall x \in Au$$

et par suite

$$\|A_\lambda u\| \leq \inf_{w \in Au} \|w\|$$

vi) $\underline{1^{er}\text{cas :}}$ $u \in D(A)$

$$\|u - J_\lambda u\| = \lambda \|A_\lambda u\| \leq \lambda \inf_{w \in Au} \|w\|$$

donc $\lim_{\lambda \to 0} \|u - J_\lambda u\| = 0$ i.e. $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda u = u$

$\underline{2^{eme}\text{cas}}$: $u \in \overline{D(A)}$

$$u \in \overline{D(A)} \implies \exists u_n \in D(A)$$

tel que $u_n \to u$ dans X

$$\begin{aligned} \|u - J_\lambda u\| &= \|u - u_n + u_n - J_\lambda u_n + J_\lambda u_n - J_\lambda u\| \\ &\leq \|u - u_n\| + \|u_n - J_\lambda u_n\| + \|J_\lambda u_n - J_\lambda u\| \\ &\leq 2\|u - u_n\| + \|u_n - J_\lambda u_n\| \end{aligned}$$

Comme $u_n \in D(A) \implies \lim_{\lambda \to 0} \|u_n - J_\lambda u_n\| = 0$, donc

$$\lim_{\lambda \to 0} \sup_{u \in \overline{D(A)}} \|u - J_\lambda u\| \leq 2\|u - u_n\|, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

i.e.

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda u = u, \ \forall u \in \overline{D(A)}$$

vii) Lorsque A est m-accretif , nous avons naturellement pour tout $\lambda > 0, R(I+\lambda A) = X$ et donc

$$D(A_\lambda) = D(J_\lambda) = X$$

$$A_\lambda u = \lambda^{-1}(u - J_\lambda u)$$

$$J_\lambda u = (I + \lambda A)^{-1} u \implies u = (I + \lambda A) J_\lambda u$$

Donc :

$$A_\lambda u = \lambda^{-1} \left[(I + \lambda A) J_\lambda u - J_\lambda u\right] = A J_\lambda u$$

et puisque A et J_λ commute alors

$$A_\lambda u = J_\lambda \left(Au\right)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda u = \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda \left(Au\right) = Au.$$

■

Remarque 7 : *Soit A un opérateur m-accrétif dans X*

$$P(u_0, 0) = \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 & sur \ ]0, +\infty[\\ u(0) = u_0 & condition \ initiale \end{cases}$$

pour prouver l'existence de la solution u du probléme $P(u_0, 0)$ en remplace A par sa

régularisée Yosida A_λ, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

et u_λ existe grâce au théoréme de Cauchy-Lipschitz-Picard , on peut ensuite montrer que u_λ converge vers la solution u.

*cas X est un espace de Hilbert.

Théorème 7 *(Hille-Yosida) ;*

Soit A un opérateur maximal monotone dans X, alors :

$$\text{pour tout } u_0 \in D(A), \exists! u \in C^1([0,+\infty[\,, X) \cap C([0,+\infty[\,, D(X))$$

solution de

$$P(u_0, 0) = \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{sur }]0,+\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

de plus on a :

i) $|u(t)| \leq |u_0|$

ii) $\left|\dfrac{du}{dt}(t)\right| \leq |Au(t)| \leq |Au_0|, \ \forall t \geq 0.$

Preuve. Voir Brézis [4] ■

Remarque 8 *L'intérêt principal du théorème de Hille-Yosida réside dans le fait que pour prouver l'existence et l'unité de la solution du probléme d'évolution $P(u_0, 0)$, il suffit de vérifier que A est maximal monotone (ou A m-accértif dans les espaces de Banach) i.e. ce qui revient à étudier le probléme stationnaire suivanant :*

$$u + \lambda Au = f$$

3.1 Existence et unicité de la solution de l'équation homogène

Soient X un espace de Banach et A un opérateur m-dissipatif

Théorème 8 *a) pour tout* $u_0 \in X$, *la suite des fonctions* $u_\lambda(t) = T_\lambda(t)\,u_0$ *converge uniformément sur tout intervalle borné* $[0,T]$ *vers une fonction* u *continue sur* $[0,+\infty[$ *à valeurs dans* X, *quand* $\lambda \to 0$.

b) Si on pose $u(t) = T(t)u_0$, *pour tout* $u_0 \in X, t \geq 0$, *on a :*

$$\begin{cases} i)\ T(t) \in L(X) \quad ; \quad \forall t \geq 0 \\ ii)\ \|T(t)\| \leq 1 \\ iii)\ T(0) = I \\ iv) T(t+s) = T(t)T(s),\ \forall t \geq 0, \forall s \geq 0 \end{cases}$$

i.e. $T(t)$ *est un semi-groupe de contraction de classe* C^0.

c) De plus , pour tout $u_0 \in D(A); u(t) = T(t)u_0$ *est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} u \in ([0,+\infty[\,; D(A)) \cap C^1([0,+\infty[\,; X) \\ \quad \dfrac{du}{dt}(t) - Au(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ \quad\quad u(0) = u_0. \end{cases} \tag{E}$$

d) Enfin , pour tout $u_0 \in D(A)$ *et pour tout* $t \geq 0$, *on a la commutation*

$$T(t)Au_0 = AT(t)u_0\ .$$

3.2 Théorème de Kato

Définition 9 *Soit α un nombre réel tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .On appele semi-groupe holomorphe de type α, une fonction $z \to T(z)$ définie sur $\{z, |\arg\ z| < \alpha, z \neq 0\ \}$ possédant les propriétés :*

$$\begin{cases} 1)\ z \to T(z) \ \ est\ holomorphe \\ 2)\ T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), |\arg\ z_1| < \alpha, |\arg\ z_2| < \alpha \ et\ |\arg(z_1 + z_2)| < \alpha \\ 3)\ \forall x \in X, T(z)x \to x \ dans\ X\ lorsque\ z \to 0\ dans\ un\ secteur\ |\arg\ z| < \alpha - \varepsilon \\ \ avec\ \varepsilon > 0, arbitraire \end{cases}$$

On suppose que l'opérateur A satisfait les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} 1) \text{ le domaine de A est dense dans X} \\ 2) \text{ l'opérateur A est fermé} \\ 3)\ \rho_A \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^*; R\lambda \geq 0\} \text{ et il existe une constante } M \text{ tq } R\lambda \geq 0 \\ \text{implique } \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \end{cases}$$

Théorème 9 *(Kato) : A est le générateur d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ tel que il existe $M > 0$;*

$$\begin{cases} 1)\ \ pour\ tout\ t\ \ on\ a : \|T(t)\| \leq M \\ 2)\ t \geq 0 \implies T(t) \in L(X, DA)\ et\ \|AT(t)\| \leq \frac{M}{t} \end{cases}$$

Chapitre 4

Existence locale et globale de la solution

4.1 Quelques résultats préliminaires

4.1.1 Positivité de la solution

Définition 10 *On dit qu'une fonction $f = (f_1, f_2, ...; f_m)$ est quasi-positive si*

$$\xi \geq 0,\ \xi_i = 0 \Rightarrow f_i(\xi) \geq 0,\ i = \overline{1,m}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...\xi_m)$, et la notation $\xi \geq \eta$ veut dire $\xi_i \geq \eta_i$ pour $i = \overline{1,m}$.

Proposition 4 *Soit $u_0 \in X$, et u la solution du probléme (P_1)*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - Au = F(u) \\ u(0) = u_0 \geq 0 \\ u \in C^1([0,T), D(A)) \cap C^1([0,T), X) \end{cases} \qquad (P_1)$$

alors u vérifie l'equation suivante :

$$u(t) = T(t)\,u_0 + \int_0^t T(t-s)\,F(u(s))\,ds, \forall t \in [0,T] \tag{4.1}$$

Preuve. *Soit $t \in [0,T]$ et u une solution du probléme (P_1).*

Posons $w(s) = T(t-s)\,u(s)$ pour $s \in [0,t]$, soit $h \in]0, t-s]$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{w(s+h) - w(s)}{h} &= \frac{T(t-s+h)\,u(s+h) - T(t-s)\,u(s)}{h} \\
&= T(t-s+h)\,\frac{u(s+h) - T(h)\,u(s)}{h} \\
&= T(t-s+h)\,\frac{u(s+h) - u(s)}{h} - \frac{T(h) - I}{h}u(s).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite $h \to 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
w'(s) &= T(t-s)\{u'(s) - Au(s)\} \\
&= T(t-s)F(u(s))
\end{aligned}$$

Si on intègre sur l'intervalle $[0,\tau[$, où $0 < \tau < t$ on trouve :

$$w(\tau) - w(0) = \int_0^\tau T(t-s)\,F(u(s))\,ds$$

qui s'écrit

$$w(\tau) = T(t)\,u_0 + \int_0^\tau T(t-s)\,F(u(s))\,ds$$

pour $\tau \to t$ on aura :

$$w(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)\,F(u(s))\,ds.$$

et puisque :

$$w(t) = T(t-t)\,u(t) = T(0)\,u(t) = u(t)$$

alors $u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds,\ \forall t \in [0.T]$ ■

Proposition 5 *Soit* $M > 0$, *posons*

$$T_M = [2K(2M + \|F(0)\|) + 2]^{-1} > 0, \textit{pour}\ \ M > 0,$$

pour tout $u_0 \in X$ *tel que :* $\|u_0\| \leq M$, *alors il existe une solution unique* $u \in C([0,T],X)$ *de (4.1) avec* $T = T$

Proposition 6 *Soit* $T > 0$, $u_0 \in X$ *et* u, v *deux solutions de* (P_1) *tel que;* $u, v \in C([0,T],X)$ *alors* $u = v$.

Preuve. Soient u, v deux solutions de (P_1), elles sont donc deux solution de $(4,1)$. Posons

$$M = \sup_{t\in[0,T]} \max\{\| u(t) \|, \| v(t) \|\}$$

on a :

$$u(t) - v(t) = \int_0^t T(t-s)\,[F(u(s)) - F(v(s))]\,ds$$

donc

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|\,ds \\ &\leq K(M) \int_0^t \| u(s) - v(s) \|\,ds \end{aligned}$$

d'aprés le lemme de Gronwell on a : $\| u(s) - v(s) \| = 0$ ce qui implique $u = v$ d'où l'unicité. ■

Théorème 10 *Il existe une fonction* $T : X \longrightarrow]0, +\infty[$ *avec les propriétés suivantes :*

Pour tout $u_0 \in X$, *il existe* $u \in C([0, T(u_0)[, X)$ *qui pour tout* $T < T(u_0)$ *est l'unique solution de* $(4,1)$ *dans* $C([0,T], X)$ *de plus*

$$2K(\| F(0) \| + 2 \| u(t) \|) \geq \frac{1}{T(u_0) - t} - 2, \forall t \in [0, T(u_0)[\tag{4.2}$$

En particulier on aura l'une des deux éventualités ;

i) $T(u_0) = +\infty$

ii) $T(u_0) < +\infty$ *et* $\lim_{t \to T(u_0)} \|u(t)\| = +\infty$

Preuve. Soit $u_0 \in X$, supposons que $T(u_0) = \sup\{T > 0, \exists u \in C([0,T], X)$ solution de $(4,1)\}$, d'aprés la proposition 5, on a $T(u_0) > 0$. D'autre part la propriété d'unicité permet de construire une solution maximale $u \in C([0, T(u_0)[, X)$ de $(4,1)$.

Montrons maintenant l'inégalité $(4,2)$:

* Si $T(u_0) = +\infty$ alors $(4,2)$ est immédiate

* Si $T(u_0) < \infty$, on raisonne par l'absurde. Soit $t_0 \in [0, T(u_0)[$, tel que $(4,2)$ n'est pas vérifiée alors

$$T(u_0) - t_0 < T_M$$

avec $M = \| u(t_0) \|$, soit $v \in C([0, T_M], X)$, la solution donnée par la proposition 5 de l'equation

$$v(t) = T(t) u(t_0) + \int_0^t T(t-s) F(v(s)) ds, \forall t \in [0, T_M].$$

On définit la fonction $w \in C([0, t_0 + T_M], X)$ par :

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{pour } 0 < t < t_0. \\ v(t - t_0) & \text{pour } t_0 < t < t_0 + T_M. \end{cases} \tag{4.3}$$

■

4.2 Existence locale de la solution

Soit le système de réaction-diffusion (SRD) suivant .

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = F(u) & \text{dans } \Omega \times]0,\infty[\\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,\infty[\\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,\infty[\\ u(.,0) = u_0 \geq 0 \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t) \ldots u_m(x,t)) : \Omega \times [0,\infty[\to \mathbb{R}^m$

.

$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une fonction régulière et D une matrice diagonale $m \times m$ à coéfficients positifs et u_0 bornée.

une fonction réguliére (localement lipschitzienne) et Δ un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans $L^1(\Omega)$ alors d'après la proposition 4, si $u = (u_1, u_2 ..., u_m)$ est une solution du probléme (SRD), on a

$$u_i(x,t) = T_i(t)\, u_{0i} + \int_0^t T_i(t-s)\, F_i(u_1(s), u_2(s) \ldots u_m(s))\, ds, \ 1 \leq i \leq m$$

pour tout $t \in [0,\infty[$ telle que $T_i(t)$ est le semi groupe de contraction de générateur infinitésimale l'opérateur $\alpha_i \Delta$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \end{pmatrix}$, $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \cdots, u_{0m})$ puisque u_0 est bornée alors d'après la proposition 5 , proposition 6 et le théorème10 le systeme (SRD) admet une solution locale unique.

L'existence globale de la solution

Maintenant , nous allons étudier l'existence globale de la solution du systéme de réaction-diffusion (SRD). On suppose que la fonction $F(u)$ vérifie les hypothèses suivantes :

H_1) $u_{i0}(x)$ sont des fonctions non négatives de $L^1(\Omega)$.

H_2) Ils existent des constantes positives β_i pour $i = \overline{1,m}$ telles que :

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i F_i(\xi) \leq C\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \xi_i\right)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}_+^m$ où C est une constonte indépendante de ξ.

H_3) Ils existent des constantes $C' \geq 0$ et $\beta \geq 0$ telles que :$|F_i(\xi)| \leq C'\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \xi_i\right]^{\beta}$.

H_4) F est une fonction quasi- positive.

Théorème 11 *Supposons que les hypothèses $H_i, i = \overline{1,4}$ sont satisfaites, alors il existe*

$u = (u_1, u_2 \cdots u_m)$ *solution de :*
$$\begin{cases} u_i \in C([0,+\infty[, L^1(\Omega)) \\ F_i \in L^1(Q) \ \text{où } Q = \Omega \times [0,T[\\ u_i(x,t) = T_i(t)\, u_{0i} + \displaystyle\int_0^t T_i(t-s)\, F_i(u_1(s) \cdots u_m(s))\, ds, \\ \forall t \in [0,T[, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

où $T_i(t)$ sont les semigroupes engendrés par les opérateures $-\alpha_i \Delta, i = \overline{1,m}$ dans $L^1(\Omega)$.

4.2.1 Etude d'un système particulier

Pour tout $n > 0$, on définit les fonctions $u_{0i}^n, i = \overline{1,m}$ par $u_{0i}^n = \min(u_{0i}, n)$ on remarque que les $u_{0i}, i = \overline{1,m}$ sont des fonctions positives de $L^1(\Omega)$ i.e. $u_{0i}^n \geq 0$.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u_n = F(u_n) & \text{dans} \quad \Omega \times [0,T] \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial \eta} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ u_n(0,.) = u_{0n} & \text{dans } \Omega \end{cases} \qquad (S_n)$$

Existence locale de la solution du systéme (Sn) :

Possons : $u_n = \begin{pmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \Delta u_{1n} \\ \alpha_2 \Delta u_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_m \Delta u_{mn} \end{pmatrix}$ et $u_{0n} = \begin{pmatrix} u_{01}^n \\ u_{02}^n \\ \vdots \\ u_{0m}^n \end{pmatrix}$

alors le système (Sn) peut être ramené à la forme du système (SRD), donc si $(u_{1n}, u_{2n}, \cdots, u_{mn})$ est une solution de (Sn) alors elle vérifie les équations :

$$u_{in}(x,t) = T_i(t)\, u_{0i}^n + \int_0^t T_i(t-s)\, F(u_{1n}(s), \cdots u_{mn}(s))\, ds \quad i = \overline{1,m} \tag{4.4}$$

Théorème 12 *Il existe $T_M > 0$ et $(u_{1n}, u_{2n}, \cdots u_{mn})$ une solution locale de (Sn) pour tout $t \in [0, T_M]$, de plus $u_{in}, i = \overline{1,m}$ sont positives.*

Preuve. *On sait que$T_i(t), i = \overline{1,m}$ sont des semi- groupes de contractions et comme F est localement lipschitzienne et $0 \leq u_{0i}^n \leq n, i = \overline{1,m}$ alors on a d'aprés la proposition (5), il existe $T_M > 0$ et $(u_{1n}, u_{2n} \cdots u_{mn})$ sera une solution locale de (Sn) sur $[0, T_M]$ .Puisque F est quasi-positive (d'après l'hypothèse (H_4)) et les u_{0i}^n sont positives $\left(i = \overline{1,m}\right)$, alors u_{in} sont aussi positives pour $i = \overline{1,m}$.*

L'existence globale de la solution du systéme (S_n)

Pour montrer l'existence globale de la solution du systéme (S_n), il suffit de trouver une estimation de la solution pour tout $t \geq 0$,d'aprés A. Haraux , M. Kirane [7].Le lemme suivant nous montre l'existence d'une estimation de la solution de (S_n) dans $L^1(\Omega)$.

Lemme 3 *Soit u_n la solution du systéme (S_n) où $u_n = (u_{1n}, u_{2n} \cdots, u_{mn})$, alors il existe*

$M(t)$ qui dépend seulement de t, tel que pour tout $0 \leq t \leq T_M$ on a :

$$\| \sum_{i=1}^{m} u_{in} \|_{L^1(\Omega)} \leq M(t)$$

Preuve. On peut écrire le systéme (S_n) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{1n}}{\partial t} - \alpha_1 \Delta u_{1n} = F_1(u_n) & \text{dans } \Omega \times [0, \infty[\quad (1) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u_{mn}}{\partial t} - \alpha_m \Delta u_{mn} = F_m(u_n) & \text{dans } \Omega \times [0, \infty[\\ \\ \dfrac{\partial u_{in}}{\partial \eta} = 0, i = \overline{1,m} \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[& (\text{d}) \\ u_{in}(0,i) = u_{0i}^n(.) \geq 0, i = \overline{1,m} \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

Multiplions chaque équation (i) par $\beta_i, i = \overline{1,m}$, on obtient :

$$\begin{cases} \beta_1 \dfrac{\partial u_{1n}}{\partial t} - \beta_1 \alpha_1 \Delta u_{1n} = \beta_1 F_1(u_n) & (1') \\ \\ \beta_m \dfrac{\partial u_{mn}}{\partial t} - \beta_m \alpha_m \Delta u_{mn} = \beta_m Fm(u_n) & (d') \end{cases}$$

de $(1') - (d')$ on a :

$$\sum_{i=1}^{m} \beta i \frac{\partial u_{in}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{m} \beta_i \alpha i \Delta u_{in} = \sum_{i=1}^{m} \beta i F_i(u_n) \leq C \left(1 + \sum_{i=1}^{m} u_{in}\right)$$

■

(d'aprés l' hypothése H_2).

Intégrons sur Ω et appliquons la formule de Green, on trouve

$$\beta_{\min} \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_{in}}{\partial t} dx \leq C \int_\Omega \left(1 + \sum_{i=1}^{m} u_{in}\right) dx$$

tel que $\beta_{\min} = \min_{1\leq i\leq m} \beta_i$, alors

$$\beta_{\min} \frac{\int_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial u_{in}}{\partial t} dx}{\int_\Omega \left(1 + \sum_{i=1}^m u_{in}\right) dx} \leq C.$$

Intégrons sur $[0, t]$ on trouve :

$$\beta_{\min} \int_0^t \frac{\int_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial u_{in}}{\partial t} dx}{\int_\Omega \left(1 + \sum_{i=1}^m u_{in}\right) dx} dt \leq Ct$$

d'où :

$$\beta_{\min} \log \left(\frac{\int_\Omega \left(1 + \sum_{i=1}^m u_{in}\right) dx}{\int_\Omega \left(1 + \sum_{i=1}^m u_{0i}^n\right) dx} \right) \leq Ct$$

donc :

$$\int_\Omega \left(1 + \sum_{i=1}^m u_{in}\right) dx \leq \exp\left(K_1 t\right) \int_\Omega \left(1 + \sum_{i=1}^m u_{0i}^n\right) dx, \quad \text{pour } K_1 = \frac{Ct}{\beta_{\min}}.$$

Posons :

$$M\left(t\right) = K_1 \exp\left(K_2 t\right) \|1 + \sum_{i=1}^m u_{0i}^n\|_{L^1(\Omega)}$$

donc :

$$\|\sum_{i=1}^m u_{in}\|_{L^1(\Omega)} \leq M\left(t\right), 0 \leq t \leq T_M.$$

On peut conclure à partir de cette estimation que la solution $u = (u_{1n}, u_{2n} \cdots, u_{mn})$ donnée par le théoréme 11 est une solution globale.

4.3 L'existence globale de la solution du système (SRD)

Lemme 4 *Pour tout solution* $(u_{1n}, u_{2n} \cdots, u_{mn})$ *de* (S_n) , *il existe une constante* $K(t)$ *qui dépend seulement de* t, *tel que :*

$$\| \sum_{i=1}^{m} u_{in}(t) \|_{L^1(Q)} \leq K(t) \| \sum_{i=1}^{m} u_{0i}^n \|_{L^1(\Omega)} + 1$$

Preuve. *Pour démontrer ce lemme on utilise les resultats donnés dans S. Bonafede et D. Schmitt* [3]

$$\forall \theta \in C_0^{\infty}(Q), \theta \geq 0,$$

il existe une fonction non négative $\phi \in C^{2,1}(Q)$ *solution du problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{-\partial \phi}{\partial t} - \alpha_1 \Delta \phi = \theta & \text{dans } Q \\ \dfrac{-\partial \phi}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T] \\ \phi = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

de plus la solution ϕ *vérifiél'inégalité*

$$\exists C'' \geq 0 \quad \|\phi\|_{L^p(Q)} \leq C'' \|\theta\|_{L^q(Q)}.$$

■

Nous avons d'aprés la proposition 6 *de S. Bonafede et D. Schmitt* [3] *que*

$$\int_Q T_1(t) u_{01}^n(x) \left(\frac{-\partial \phi}{\partial t} - \alpha_1 \Delta \phi \right) dxdt = \int_\Omega u_{01}^n(x) \phi(x,0) dx$$

et que :

$$\int_Q \left(\int_0^t T_1(t-s) F_1(u_n) ds \right) \left(\frac{-\partial \phi}{\partial t} - \alpha_1 \Delta \phi \right) dxdt = \int_Q F_1(u_n) \phi(x,s) \theta dxdsx \quad (i)$$

$$d'où \int_Q S_1(t) u_{01}^n(x) \phi dxdt = \int_\Omega u_{01}^n(x) \phi(x,o) dx \qquad (4.1)$$

et

$$\int_Q \left(\int_0^t T_1(t-s) F_1(u_n) ds \right) \theta dxdt = \int_Q F_1(u_n) \phi(x,s) dxds \qquad (ii)$$

Multiplions l'équation 4.4 *pour* $i = 1$ *par* θ *et intégrons sur* Q *en utiliant* $(i), (ii)$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} \int_Q u_{1n} \theta dxdt &= \int_Q T_1(t) u_{01}^n \theta dxdt + \int_Q \left(\int_0^t T_1(t-s) F_1(u_n(s)) ds \right) \theta dxdt \\ &= \int_\Omega u_{01}^n(x) \phi(x,0) dx + \int_Q F_1(u_n) \phi(x,s) dxds \\ &\leq \int_\Omega u_{01}^n(x) \phi(x,0) dx + \int_Q \beta_1 F_1(u_n) \phi(x,s) dxds \quad pour\ \beta_1 \geq 0, \theta\ arbitraire. \end{aligned}$$

De méme on trouve :

$$\begin{aligned} \int_Q u_{in} \theta dxdt &= \int_\Omega u_{0i}^n(x) \phi(x,0) dx + \int_Q F_i(u_n) \phi(x,s) dxds \\ &\leq \int_\Omega u_{0i}^n(x) \phi(x,0) dx + \int_Q \beta i Fi(u_n) \phi(x,s) dxds \end{aligned}$$

pour β_i *des constantes positives et* $i = \overline{2,m}$ *donc :*

$$\int_Q \left(\sum_{i=1}^m u_{in} \right) \theta dxdt \leq \int_\Omega \sum_{i=1}^m u_{0i}^n \phi(x,0) dx + C \int_Q \left(1 + \sum_{i=1}^m u_i \right) \phi(x,s) dxds$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}\int_Q \left(\sum_{i=1}^{m} u_{in}\right)\theta dxdt &\leq \|\sum_{i=1}^{m} u_{0i}^n\|_{L^1(\Omega)}.\|\phi(.,0)\|_{L\infty(\Omega)} + C\|\sum_{i=1}^{m} u_{in}+1\|_{L^1(Q)}.\|\phi\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq K_1\left(\|\sum_{i=1}^{m} u_{0i}^n\|_{L^1(\Omega)} + \|\sum_{i=1}^{m} u_{in}\|_{L^1(Q)} + 1\right).\|\theta\|_{L^\infty(Q)}\end{aligned}$$

comme θ est arbitraire dans $C_0^\infty(Q)$ on a

$$\|\sum_{i=1}^{m} u_{in}\|_{L^1(Q)} \leq K_1\left(\|\sum_{i=1}^{m} u_{0i}^n\|_{L^1(\Omega)} + \|\sum_{i=1}^{m} u_{in}\|_{L^1(Q)} + 1\right)$$

On prend :

$$K(t) = \frac{1}{1 - K_1(t)}$$

on trouve :

$$\|\sum_{i=1}^{m} u_{in}\|_{L^1(Q)} \leq K(t)\left(\|\sum_{i=1}^{m} u_{0i}^n\|_{L^1(\Omega)} + 1\right)$$

voir S. L. Hollis ,R. H. Martin et M. Pierre [9] .

4.4 Bornitude et estimation de la solution d'un système de réaction-diffusion

Un grand nombre de chercheurs se sont intéréssés ces dernières années à une classe de systéme d'equations aux dérivées partielles de type parabolique, appelées "systéme de

réaction-diffussion " et un intérêt particuller a été réservé aux système de la forme ;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - a\Delta u_1 = f_1(t,x,u_1,u_2) & t>0, x\in\Omega \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - b\Delta u_2 = f_2(t,x,u_1,u_2) & t>0, x\in\Omega \\ \alpha_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \eta} + \beta_1 u_1 = \gamma_1,\ \alpha_2\dfrac{\partial u_2}{\partial \eta} + \beta_2 u_2 = \gamma_2 & t>0, x\in\partial\Omega \\ u_1(0,x) = u_{01}(x),\ u_2(0,x) = u_{02}(x) & x\in\Omega \end{cases}$$

concernant la positivité, l'unicité, la bornitude, l'existence locale et globale, l'explosion. On s'intéresse à étudier la bornitude de la solution et donner une estimation du temps maximale d'existence d'un système couplé de réaction -diffussion de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = a_{11}u_1 + f_1(t,u) & x\in\Omega \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = a_{22}u_2 + f_2(t,u) & x\in\Omega \\ u_i(0,x) = u_{0i}(x) & x\in\Omega \\ u_i(t,x) = 0 & t>0 \quad x\in\partial\Omega \end{cases}$$

Ce système peut s'ecrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = a_{ii}u_i + f_i(t,u) & x\in\Omega \\ u_i(0,x) = u_{0i}(x) & x\in\Omega \\ u_i(t,x) = 0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \qquad (P_2)$$

où $u_{0i}(x) > 0, i = 1, 2$, et $\{a_{ii}\} \subset [0, +\infty[$.

On suppose que (u_1, u_2) est une solution classique positive du problème (P_2) définie dans le cylindre $Q_T = [0, T) \times \Omega$ avec $T \leq \infty$

Définition 11 *S'il existe un* $T < \infty$ *tel que* $\limsup_{t \to T_{x \in \Omega}} (|u_1(t,x)| + |u_2(t,x)|) = +\infty$ *, on dira alors que la solution* ***explose en temps fini*** *. D'autre part si* u_1, u_2 *sont bornées dans* $Q_{T_0} = [0, T_0) \times \Omega$ *quel que soit* $T_0 < \infty$ *, alors la solution existe globalement dans* $Q_\infty = (0, \infty) \times \Omega$.

Soit $\phi(x) > 0, (x \in \Omega)$ *la première fonction propre , et* $\lambda > 0$ *sa plus petite valeur propre, de plus on pose tout au long de se paragraphe* $J_0 = J(0) = \int_\Omega (u_{01} + u_{02}) \phi dx$ *pour les donnés initiales* u_{01} *et* u_{02}.

4.5 La bornitude de la solution

Il souvent très important de savoir si la solution du système de réaction-diffusion considéré est bornée. Sous certaines hypothèses adéquates on arrive aux résultats de bornitude suivants...

Théorème 13 *Si* $a_{ii} = 0, \forall i = 1, 2$ *et* f_1, f_2 *des fonctions telles que :*

$$0 \leq f_1(t,u) + f_2(t,u) \leq C_1 |u_1 + u_2|^p + C_2 |u_1 + u_2|$$

pour certainses constantes $C_1 > 0, 0 < C_2 < \lambda$ *et* $0 < p < 1$. *Si de plus* u_{01}, u_{02} *satisfont*

$$\sum_{i=1}^{2} u_{0i} \geq 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } J(0) > 0$$

alors toute solution (u_1, u_2) *du problème* (P_2) *existe pour* $t > 0$, *et satisfait :*

$$0 < \int_\Omega (u_1 + u_2) \phi \, dx \leq \max \left\{ J_0, \left(\frac{C_1}{\lambda - C_2} \right)^{\frac{1}{P-1}} \right\} \tag{4.5}$$

Preuve. Soit (u_1, u_2) une solution positive du problème (P_2) on pose :

$$J(t) = e^{\lambda t} \int_{\Omega} (u_1 + u_2)(x)\, \phi(x)\ dx$$

alors il est aisé de voir que :

$$J'(t) = e^{\lambda t} \int_{\Omega} (f_1 + f_2)(x)\, \phi\, dx$$

il s'ensuit :

$$J'(t) \leq C_1 e^{\lambda t} \int_{\Omega} |u_1 + u_2|^p\, \phi\, dx + C_2 e^{\lambda t} \int_{\Omega} |u_1 + u_2|\, \phi\, dx$$

comme :

$$(f_1 + f_2) \geq 0, (u_{01} + u_{02}) \geq 0, J(0) \geq 0, J'(t) \geq 0$$

alors

$$u_1 + u_2 \geq 0$$

et

$$J(t) > 0,\ \forall t \geq 0$$

on obtient grâce à l'inégalité de Jenseon

$$\begin{aligned} J'(t) &\leq C_1 e^{\lambda t} \int_{\Omega} (u_1 + u_2)^p\, \phi\, dx + C_2 e^{\lambda t} \int_{\Omega} (u_1 + u_2)\, \phi\, dx \\ &\leq C_1 e^{\lambda t} \left(\int_{\Omega} (u_1 + u_2)\, \phi\, dx \right)^p + C_2 e^{\lambda t} \int_{\Omega} (u_1 + u_2)\, \phi\, dx \end{aligned}$$

ou encore

$$J'(t) \leq C_1 e^{(1-p)\lambda t} J^p(t) + C_2 J(t)$$

Pour résoudre l'inequation de Bernoulli ci dessus, on pose $\Psi = J^{1-P}$pour obtenir :

$$\frac{\Psi'}{1-p} \leq C_2\Psi + C_1 e^{(1-p)\lambda t}$$

$$\Psi' \leq C_2\left(1-p\right)\Psi + C_1\left(1-p\right)e^{(1-p)\lambda t}$$

c-à-d :

$$\Psi' + \quad C_2\left(p-1\right)\Psi \leq \ C_1\left(1-p\right)e^{(1-p)\lambda t}.$$

On multiplie cette inéquation par $e^{(p-1)c_2 t}$ pour avoir :

$$\left(e^{(p-1)c_2 t}\Psi\right)' = e^{(p-1)c_2 t}\Psi' + C_2\left(p-1\right)e^{(p-1)c_2 t}\Psi \leq C_1\left(1-p\right)e^{(1-p)(\lambda - c_2)t}$$

L'intégration de 0 à t donne :

$$e^{(p-1)c_2 t}\Psi\left(t\right) - \Psi\left(0\right) \leq \frac{C_1}{\lambda - C_2}\left(e^{(1-p)(\lambda-c_2)t} \ - 1\right)$$

$$e^{(p-1)c_2 t}\Psi\left(t\right) \leq \Psi\left(0\right) + \frac{C_1}{\lambda - C_2}\left(e^{(1-p)(\lambda-c_2)t} \ - 1\right).$$

d'où :

$$J^{1-p}\left(t\right) \leq e^{(1-p)c_2 t}J_0^{1-p} + \frac{C_1}{\lambda - C_2}\left(e^{(1-p)\lambda t} - e^{(1-p)c_2 t}\right).$$

Par suite

$$\left(\int_\Omega \left(u_1 + u_2\right)\phi \ dx\right)^{1-p} \leq \frac{C_1}{\lambda - C_2} + \left[J_0^{1-P} + \frac{C_1}{C_2 - \lambda}\right]e^{(1-p)(c_2-\lambda)t} \ ,$$

posons :

$$G\left(t\right) = \frac{C_1}{\lambda - C_2} + \left[J_0^{1-P} + \frac{C_1}{C_2 - \lambda}\right]e^{(1-p)(c_2-\lambda)t}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} G'(t) &= (1-p)(C_2-\lambda)\left[J_0^{1-p}(0) + \frac{C_1}{C_2-\lambda}\right] e^{(1-p)(c_2-\lambda)t} \\ &= (1-p)\left[(C_2-\lambda)J_0^{1-P} + C_1\right] e^{(1-p)(c_2-\lambda)t} \end{aligned}$$

Envisageons les cas suivantes :

* Si $J_0^{1-P} \leq \dfrac{C_1}{\lambda - C_2}$, alors $G'(t) \geq 0$ et par suite $G(t)$ est croissante ;donc

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} G(t) = \lim_{t\to+\infty} G(t) = \frac{C_1}{\lambda - C_2}$$

* Si $J_0^{1-P} \geq \dfrac{C_1}{\lambda - C_2}$, alors $G'(t) \leq 0$ et par suite $G(t)$ est décroissante, ce qui entraine que $\forall t \geq 0, G(t) \leq G(0)$ et ainsi

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} G(t) = G(0) = J_0^{1-P}$$

Ce qui établit l'estimation (4.5), et partant la solution est définie quel que soit $t \geq 0$.

Bibliographie

[1] N.ALIKALOS. LP bounds of solutions of reaction-diffusion equations.Comm, in P.D.E., 4 : 827-868, 1979.

[2] Aibech cours de majister (semi-groupe), Univ de Annaba 2008

[3] J. Bebernes and A.D.Eberly, Mathematical problems from comution in "Applied Math.Sci.Series".Vol.83, Springer-Vverlag, New-york, 1989.

[4] S.Bonafede, D.Schmitt : "Triangular, reaction-diffusion systems with integrable initial data", Nonlinear Analysis 33 (1998) 785-801.

[5] H.Brézis : "Analyse Fonctionnelle (Théorie et Application)", Masson, Paris, 1983.

[6] R.Dautray, J.L.Lions : "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques; Evolution : semi-groupe, Variationnel,", Masson, Paris 1987,Tome8.

[7] A.Haraux, M.Kirane : "Estimation C1 pour des problèmes paraboliques semi-linéaires", Annales Faculté des sciences Toulouse, Vil V, pp. 265-280, 1983.

[8] A.Haraux, A.Youkana : "On a result of K. Masuda concerning reaction-diffusion equations", Tohoku Math. J. 40 (1988), 159-163.

[9] M.A. Herrero, A.A. Lacey and J.L Vel azquez, Global existence for reaction-diffusion systems modelling ignition, Arch. Rat. Mech. Anal., 142 (1998),219-251.

[10] S.L.HOLLIS, R.H.MARTIN and M.PIERRE, Global existence and boundedness in reaction in reaction-diffusion systems. SIAM J.Math anal., 18 : 744-761, 1987

[11] S.L.Hollis , "On the question of global existence for reaction-diffusion systems with mixed boundary conditions quarterly of applied mathematics", Volume LI. Number2. June 1993, pages 241-250.

[12] S. KOUACHI and A.YOUKANA, Global existence for a class of reaction-diffusion systems.Bull. Polish Acad. Sci. Math. 49(2001), N°. 3, 303–308.

[13] R.H.Martin Jr : "Global existence questions for reaction-diffusion systems". in "Semi-groups. Theory and Applications". Ed. H. Brezis, M. Crandall, F. Kappel. PitmanResearch Notes in Math, Vol. 1 (1986). 169-177.

[14] K. Masuda : "On the global existence and asymptotic behavior of solution of reaction-diffusion equation ". Hokkaido Mathematical Journal Vol 12 (1983) p 360-370.

[15] A.Moumeni :"Semi-groupes de contraction et application aux EDP semi-linéaire".Cours de magister 2005-2006.Univ de Annaba.

[16] A.Moumeni and L.Salah Derradji, Globale existence of solution for reaction diffusion Systems IAENG International Journal of Applied Mathematics, 40 :2, IJAM-40-2-06

[17] J.D.Murray., Mathematical Biology, Springer- Verlag, New York, 1989.

[18] Pao, C.V, Non linear parabolic and elliptic equations, New York, Plenum Press, 1992.

[19] A.Pazy "Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equatios", Applied Math.Sciences 44, Springer-Verlag, New York, (1981).

[20] M.PIERRE,Systèmes de réaction-diffusion, Ecole de printemps, "Equations aux dérivées partielles non linéaires", Marrakech, 31 mars-5 avril 2008, Ecole Normale Supérieur de Cachan, Antenne de Bretagne et et Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR), France.

[21] J.Smoller :"Shok Waves and Reaction Diffusion Equations ", Springer- Verlag, New York, 1983"