Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Polycopié de travaux dirigés

Première année socle commun

Domaine : Sciences et Technologie

Module : Mathématiques 1

Rappel de cours et exercices résolus

Dr : ZENKOUFI Lilia

Année universitaire

2018/2019

Table des matières

PREFACE

Ce document correspond au programe du module : Mathématiques 1, qui s'adresse aux étudiants de la première année socle commun, domaine Science et Technologie.

Son objectif est de mettre à la disposition du lecteur un document de travail permettant de métriser les notions de mathématiques exposées.

Il se compose de six chapitres. Chaque chapitre est subdivisé en un rappel de cours, suivi par une série d'exercices résolus, permettant ainsi à l'étudiant de tester son assimilation du cours et de contrôler ses connaissances.

- Les ouvrages traitant de ce contenu sont nombreux et il est vivement conseillé de les consulter.

- Je serai attentive à toute suggestion ou critique susceptible d'améliorer le contenu de ce document.

Chapitre 1

Notions de logique élémentaire

1.1 Opérations de logique élémentaire

Le mot « proposition » désigne tout énoncé sur les objets considérés auquel on peut attribuer une valeur de vérité.

Par exemple :

- $(P1)$ $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel,
- $(P2)$ par deux points il passe une droite et une seule,
- $(P3)$ une fonction dérivable est continue.

Quant à la vérité en question, il s'agit d'une valeur logique qui est l'un des deux mots **vraie** ou **faus.**

Toute proposition logique P admet une négation, notée $(non\ P)$.

1.1.1 Opérations logiques

Négation d'une proposition

Définition 1.1 *Si P est une proposition, sa négation, notée $(non\ P)$, est une proposition qui est fausse si P est vraie et qui est vraie si P est fausse.*

Il résulte de cette définition que $non(non\ P)$ et P ont la même valeur logique, c'est à dire sont vraies simultanément ou fausses simultanément.

Par exemple

P : Tous les dimanches je vais au restaurant,

$non\ P$: Il existe au moins un dimanche où je ne vais pas au restaurant

P : Je vais au restaurant au moins un dimanche de décembre,

$non\ P$: Je ne vais jamais au restaurant le dimanche en décembre.

Remarque 1.1 *$non\ P$ se note aussi $\overline{P}$.*

Disjonction

Définition 1.2 *Si P et Q sont deux propositions, la disjonction, notée P ou Q, est une proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie et qui est fausse si les deux propositions sont fausses.*

Remarque 1.2 *P ou Q se note aussi $P \vee Q$.*

Conjonction

Définition 1.3 *Si P et Q sont deux propositions, la conjonction, notée P et Q, est la proposition qui est vraie si les deux propositions sont vraies et qui est fausse si au moins l'une des deux propositions est fausse.*

Il résulte de cette définition que les propositions (P *et* Q) et (Q *et* P) sont équivalentes.

Remarque 1.3 *Pet Q se note aussi $P \wedge Q$.*

On introduit maintenant la notion de table de vérité :

Définition 1.4 *Soient P et Q deux propositions, R une proposition dépendant de P et Q (dans cet ordre). On associe à R le tableau suivant :*

P	Q	R
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

où les cases blanches seront remplies par la lettre V chaque fois que R est vraie et la lettre F si elle est fausse, selon les valeurs logiques (V ou F) de P et Q respectivement indiquées sur la $1^{ère}$ colonne et la $1^{ère}$ ligne. Ce tableau s'appelle la table de vérité de R.

Par exemple si $R = (P \vee Q)$, sa table de vérité s'écrit :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Par exemple, si on considère les deux propositions :

P : Tous les lundis je vais au cinéma,

Q : Le 15 de chaque mois je vais au cinéma,

La proposition $(P \vee Q)$ est vraie si elle s'applique à quelqu'un qui va au cinéma tous les lundis ou à quelqu'un qui va au cinéma le 15 de chaque mois (il peut évidemment faire les deux).

Implication

Implication

Définition 1.5 *Soient P et Q deux propositions, on appelle l'implication logique (de Q par P) la proposition, notée $P \Longrightarrow Q$, qui est fausse dans le seul cas où P est vraie et Q est fausse.*

Attention, $P \Longrightarrow Q$ n'est pas équivalente à $Q \Longrightarrow P$.

L'implication se dit en langage courant, « P *implique* Q » et signifie que Q est vraie dès que P l'est.

Table de vérité :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposition 1.1 *$P \Longrightarrow Q$ est équivalente à $(\overline{P} \vee Q)$.*

Corollaire 1.1 *$\overline{(P \Longrightarrow Q)}$ est équivalente à $(P \wedge \overline{Q}))$.*

Attention ! La négation d'une implication n'est pas une implication.

Réciproque

Définition 1.6 *La réciproque d'une implication inverse l'ordre des évènements. Si P implique Q, sa réciproque est Q implique P.*

Propriété Une propriété et sa réciproque ne sont pas toujours équivalente.

Contraposée

Définition 1.7 *Si P implique Q, sa contraposée est $\overline{Q}$ implique $\overline{P}$.*

Propriété Une propriété et sa contraposée sont toujours équivalente.

Equivalence

Définition 1.8 *L'équivalence de deux propositions P et Q est vraie si les deux propositions sont vraies ou les deux propositions sont fausses, sinon, elle est fausse. Il est symbolisé par $\Leftrightarrow$.*

On a donc la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.1.2 Les quantificateurs

Les quantificateurs permettent de connaitre le domaine de validité d'une propriété.

Pour une propriété universelle

Définition 1.9 *Pour énoncer une propriété universelle (propriété vraie dans tous les cas), on utilise le quantificateur 'pour tout', noté* $\forall$.

Il signifie 'pour tout', 'quel que soit' ou encore 'Tous'.

Exemples :

Tout parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle.

Quel que soit x, x^2 est positif ou nul.

Pour une propriété non universelle

Définition 1.10 *Pour énoncer une propriété vraie sur des exemples mais qui n'est pas universelle, on utilise le quantificateur 'il existe'(existentiel), noté* $\exists$.

Exemples :

Il existe des réels x tels que $x^2 > 100$.

Il existe des années où il ne neige pas.

La négation des quantificateurs

- La négation de " $\forall x \in E,\ P(x)$ " est " $\exists x \in E,\ \overline{P(x)}$ "

  Par exemple

  la négation de " $\forall x \in [1, +\infty[\,,\ x^2 \geq 1.$" est l'assertion "$\exists x \in [1, +\infty[\,,\ x^2 < 1.$"

- La négation de " $\exists x \in E,\ P(x)$ " est " $\forall x \in E,\ \overline{P(x)}$ "

  Par exemple

  la négation de " $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 + z + 1 = 0.$" est l'assertion "$\forall z \in \mathbb{C},\ z^2 + z + 1 \neq 0.$"

Remarque 1.4 *L'ordre des quantificateurs est très important.*

Par exemple les deux phrases logiques

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0 \text{ et } \exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R} : x + y > 0$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse.

1.2 Quelques types de raisonnement en mathématiques

1.2.1 Raisonnement par induction

Le raisonnement par induction et présomption est l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs), dont on déduit par présomption, une propriété générale.

exemple : Quand on lance successivement deux dés, en additionnant les nombres présents sur les deux faces, la probabilité d'obtenir 10 est-elle la même que celle d'obtenir un 9 ?

1.2.2 Raisonnement par déduction

Le raisonnement par déduction est l'étude à partir de propriétés reconnues comme vraies, un enchainement logique pour montrer une propriété.

Raisonnement direct

Définition 1.11 *Si on veut montrer que l'assertion « $P \Longrightarrow Q$» est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode la plus fréquemment utilisée.*

Exemple : Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a+b \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Prenons $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant :

$$\tfrac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*.$$

Alors, $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$, avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. Maintenant $a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+qp'}{qq'}$.

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien de $\mathbb{Z}$, le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b = \frac{p''}{q''}$ avec $p" \in \mathbb{Z}$ et $q" \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$.

Raisonnement par disjonction des cas (ou cas par cas)

Définition 1.12 *Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on peut démontrer successivement que cette propriété est vraie pour les éléments de sous-ensembles disjoints de E dont la réunion est E. On dit qu'on a raisonné par disjonction des cas.*

Exemple : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

<u>Premier cas</u> : $x \geq 1$. Alors, $|x-1| = x-1$.

Calculons alors $x^2 - x + 1 - |x-1|$.

$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - x - 1$

$$= x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0.$$

Ainsi $x^2 - x + 1 - |x-1| \geq 0$ et donc $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$.

Deuxième cas : $x < 1$. Alors, $|x-1| = -(x-1)$.

Nous obtenons $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + (x-1)$

$$= x^2 \geq 0.$$

Dans tous les cas $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Raisonnement par contraposition

Définition 1.13 *Le raisonnement par contraposition permet de démontrer qu'une implication de type ($P \Longrightarrow Q$) est vraie.*

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion «$P \Longrightarrow Q$», on montre en fait que $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.

Exemple : Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$, avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.

Donc, nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

Raisonnement par l'absurde

Définition 1.14 *Le raisonnement par l'absurde pour montrer l'implication «$P \Longrightarrow Q$» repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi, si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie.*

Exemple : Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors, $a(1+a) = b(1+b)$ donc, $a + a^2 = b + b^2$ d'où, $a^2 - b^2 =$

$b-a$. cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$ alors, $a-b \neq 0$ et donc en divisant par $a-b$ on obtient, $a+b=-1$. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a=b$.

Réfutation par utilisation d'un contre-exemple

Définition 1.15 *Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E$, $P(x)$» est vraie alors pour chaque x de E, il faut montrer que $P(x)$ est vraie.*

Par contre, pour montrer que cette assertion est fausse, il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Trouver un tel x, c'est trouver un contre-exemple à l'assertion « pour tout x de $E, P(x)$».

Exemple : Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».

(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple : 6=$2^2+1^2+1^2$.)

Démonstration. Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

Raisonnement par récurrence

Définition 1.16 *Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendante de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en 3 étapes :*

tape 1 - Initialisation : *On prouve que $P(0)$est vraie.*

tape 2 - Hérédité : *On suppose $n \geq n_0$ donné avec $P(n)$ vraie et on démontre que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.*

tape 3 - Conclusion : *On rappelle que par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1.3 Exercices résolus

Exercice 1.1 *Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Ecrire en utilisant $\forall$, $\exists$ les assertions*

$$A = \phi, \quad A \cap B \neq \phi, \quad A \subset B, \quad A \not\subseteq B.$$

Solution

$A = \phi$: $\forall x \in \mathbb{N}$, $x \notin A$.

$A \cap B \neq \phi$: $\exists x \in \mathbb{N}$, $x \in A \wedge x \in B$.

$A \subset B$: $\forall x \in \mathbb{N}$, $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

$A \not\subseteq B$: $\forall x \in \mathbb{N}$, $\exists x \in A \wedge x \notin B$.

Exercice 1.2 *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Donner la négation de cette phrase logique.

Solution

La négation est :

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall \alpha > 0, \ \exists x \in \mathbb{R}, \ \ |x - x_0| < \alpha \ \wedge \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Exercice 1.3 *Soient les quatre assertions suivantes :*

(a) $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; $\quad (b)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$;

$(c) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; $\quad (d)$ $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.

1. *Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?*

2. *Donner leurs négations.*

Solution

1. (a) est fausse. Car sa négation qui est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0, \qquad \text{est vraie.}$$

Étant donné $x \in \mathbb{R}$, il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ *tel que*, $x + y \leq 0$.

Par exemple

on peut prendre $y = -(x+1)$ et alors $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$.

2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0$.

La négation de (b) est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$$

3. (c) est fausse, par exemple $x = -1$, $y = 0$, $x + y = -1 + 0 = -1 < 0$.

La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$$

4. (d) est vraie, on peut prendre $x = -1$, $y^2 > -1$.

La négation est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x.$$

Exercice 1.4 (*Raisonnement direct*)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 8\frac{n(n+1)}{2} + 1$ *est un carré.*

Solution

$$\forall n \in \mathbb{N}, 8\frac{n\,(n+1)}{2} + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 .$$

Exercice 1.5 (*Raisonnement par disjonction de cas*)

Etudier le comportement vers $+\infty$ *de la fonction réelle* $f_n(x) = x^n sinx$.

Solution

- Si n est strictement positif, toutes les fonctions f_n se comportent de la même manière, elles oscillent entre $-\infty$ et $+\infty$.

- De même si n est strictement négatif, elles tendent vers 0.

- Le cas $n = 0$ termine la partition, dans ce cas, f_0 oscille entre -1 et 1.

Exercice 1.6 ($Raisonnement\ par\ contre-exemple$)

La propriètè suivante est-elle vraie : "deux rectangles de même aire ont même périmètre" ?

Solution

Les rectangles de longueurs respectives $4m$ et $2m$ et de largeurs respectives $0,5$ et 1 constituent un contre-exemple.

Exercice 1.7 ($Le\ raisonnement\ par\ contraposée$)

Dans les entiers, montrons que si n^2 est impair, alors n est impair.

Solution

La contraposé de :

$$n^2 \text{ impair} \Longrightarrow n \text{ impair},$$

est

$$n \text{ pair} \Longrightarrow n^2 \text{ pair}.$$

Or, n pair alors

$$n = 2k,$$

donc

$$\begin{aligned} n^2 &= 4k^2, \\ &= 2\left(2k^2\right), \\ &= 2k', \end{aligned}$$

par suite n^2 est pair.

On a démontré la proposition initiale par le raisonement par la contraposée.

C-à-d : par le principe de contraposition, on a démontré la proposition de l'énoncé.

Exercice 1.8 ($Raisonnement\ par\ l'absurde$)

Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Solution

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un rationnel, il s'écrit donc comme quotient de deux entiers strictement positifs p et q (p et q sont premiers entre eux).

Soit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ou $q\sqrt{2} = p$.

Elevons au carré, nous obtenons $2q^2 = p^2$.

Et, p^2 est pair, donc p est pair.

Posons $p = 2p_1$,

donc, $p^2 = 4p_1^2$,

et par conséquent $2q^2 = 4p_1^2$,

et $q^2 = 2p_1^2$.

q est donc aussi pair, ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Exercice 1.9 (*Le raisonnement par récurrence*)

Montrons $\forall n \geq 2,\ P(n) : 2^n > n.$

Solution

- *Initialisation :*

Vérifions $P(2)$, soit l'égalité $2^2 = 4 > 0$.

- *Hérédité :*

Supposons que $P(n)$ est vraie [hypothèse de récurrence]. Vérifions alors que

$$P(n+1) : \forall n \geq 2, \quad 2^{n+1} > n+1, \text{ est aussi vrai.}$$

On a

$$2^{n+1} = 22^n.$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence, $2^n > n$, donc $22^n > 2n > n+1$, ce qui prouve $P(n+1)$.

- *Conclusion :*

D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 2$.

Exercice 1.10 *Montrer par récurrence que :*

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Solution

1. Soit :

$$P(n): \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}..$$

- *Initialisation :*

$P(0): \sum\limits_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}.$

Donc, $P(0)$ est vraie.

- *Hérédité :*

Supposons que $P(n)$ est vraie [hypothèse de récurrence].

Vérifions alors que

$$P(n+1): \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}; \text{ est aussi vrai.}$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

- *Conclusion :*

D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit :

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- *Initialisation :*

$P(1) : 1 = 1$, est vraie

- *Hérédité :*

Montrons que

$$P(n+1): \quad \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

i.e,

$$P(n+1): \quad \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que (P_n) soit vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2, \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)2}{6}, \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6},
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6}, \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+3) + 2(2n+3)]}{6}, \\
&= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve $P(n+1)$.

- *Conclusion :* D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Chapitre 2

Ensembles, Relations et Applications

2.1 Notions sur les ensembles

2.1.1 Définition d'un ensemble

Un ensemble E est considéré comme une collection d'objets (mathématiques) appelés éléments.

Par convention, on note les éléments d'un ensemble entre accolades : $A = \{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

$x \in E$ signifie x est un élément de E,

$x \notin E$ signifie x n'est pas un élément de E.

On définit un ensemble, soit en exhibant tous ses éléments, soit en donnant un critère permettant de vérifier la vérité de $(x \in E)$ ou de $(x \notin E)$

Par exemple l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls s'écrit $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$.

2.1.2 Définition d'un sous-ensemble et de l'ensemble vide

Soit E un ensemble, une partie ou *sous-ensemble* de E est un ensemble A vérifiant la propriété suivante :

$$\text{pour tout } x \in E, \quad (x \in A) \Longrightarrow (x \in E).$$

L'*ensemble vide*,

c'est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Il se note ϕ, mais ne se note pas $\{\phi\}$.

En effet, l'ensemble $\{\phi\}$ n'est pas vide puisqu'il contient un élément.

2.1.3 Inclusion

Un ensemble A est inclus dans un ensemble B, si tous les éléments de A appartiennent à B. On note $A \subset B$ (lire « A inclus dans B »).

On dit A une partie ou *sous-ensemble* de E c'est-à-dire que $A \subset E$.

2.1.4 Egalité de deux ensembles

Deux ensembles A et B sont dits égaux s'ils ont exactement les même éléments. $A = B$ signifie donc

$$\forall x \quad (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)\,.$$

- Pour montrer l'égalité de deux ensembles on procède par double inclusion, c'est-à-dire

$$(A = B) \Leftrightarrow \{(A \subset B) \text{ et } (B \subset A)\},$$

ou par équivalence, c'est-à-dire :

$$(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B),$$

qui est la traduction de la double inclusion.

2.1.5 Union et intersection d'ensembles

• Si A et B sont deux parties de E, on appelle intersection de A et B, notée $A \cap B$ l'ensemble des éléments communs à A et B, et l'on a :

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \; et \; (x \in B).$$

• On appelle union de A et B, notée $A \cup B$ l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B, et l'on a :

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \; ou \; (x \in B).$$

- Soit E un ensemble quelconque, pour toutes parties A, B et C de l'ensemble E, on a les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C, \\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C),
\end{aligned}
$$

que l'on peut démontrer par équivalence.

Notation :

$\cap$ se lit « inter » et représente l'intersection de deux ensembles.

$\cup$ se lit « union » et représente la réunion de deux ensembles.

Remarque 2.1 *Si A et B n'ont aucun élément en commun, on a $A \cap B = \phi$.*

2.1.6 Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble, pour toute partie A de E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A s'appelle le complémentaire de A dans E et se note $C_E A$.

$$C_E A = \{x \in E \text{ et } x \notin A\}.$$

• Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, on a les propriétés suivantes

$$A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A,$$

$$C_E (C_E A) = A,$$

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B,$$

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B.$$

Remarque 2.2 *Notons que lorsque l'on définit un ensemble E comme l'ensemble des* *éléments vérifiant une propriété P, le complémentaire de E est l'ensemble des éléments vérifiant* $($*non* $P)$.

Attention ! Pour A et B deux partie de E, la notation $C_E A$ suppose que A est inclus dans E, on a donc $C_E(C_E A) = A$, alors que la notation $B \backslash A$ définie par $(x \in B \backslash A) \Leftrightarrow (x \in B,\ x \notin A)$ ne suppose pas que A est inclus dans B.

2.1.7 Cardinal d'un ensemble fini

On dit qu'un ensemble E est fini s'il a un nombre fini d'éléments. Le nombre de ses éléments est appelé cardinal de E et se note $card(E)$.

Exemple 2.1 *Si* $E = \{1, 2, 4\}$, *alors*

$$card(E) = 3.$$

- On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

Proposition 2.1 *Le nombre des parties d'un ensemble fini de cardinal n est égal à 2^n.*

2.1.8 Produit cartésien d'ensembles

Si E et F sont deux ensembles, le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$ est constitué des couples (x, y), où x décrit E et y décrit F.

• Les couples (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si $x = x'$ *et* $y = y'$.

• Le produit cartésien $E \times E$, se note E^2.

Plus généralement, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le produit cartésien de E par lui-même n fois, se note

$$E^n = E \times E \times ... \times E \ . \quad (n - fois)$$

• Les éléments de E^n sont les $n-uples$ $(x_1, x_2, ...x_n)$ où les éléments : $x_1, x_2, ...x_n$, appartiennent à E.

Les $n-uples$ $(x_1, x_2, ...x_n)$ et $(x'_1, x'_2, ...x'_n)$ sont égaux si et seulement si

$$x_i = x'_i \text{ pour tout } i, \quad \text{tel que } 1 \leq i \leq n.$$

Attention ! Lorsque $E \neq F$, $E \times F$ est différent de $F \times E$.

2.2 Relation d'ordre, Relation d'équivalence

Une relation est une proposition qui lie deux éléments. Le lien entre deux éléments peut s'exprimer sous forme d'un couple.

2.2.1 Relation binaire

Définition 2.1 *Une relation $\Re$ d'un ensemble E vers un ensemble F est appelée relation binaire si et seulement si $E = F$. On dit alors que $\Re$ est une relation binaire dans E.*

Relation d'équivalence

Définition 2.2 *Une relation binaire $\Re$ dans un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est*

1. *réflexive,* $\forall x \in E : x \Re x$,
2. *symétrique,* $\forall (x, y) \in E^2 : x \Re y \Rightarrow y \Re x$,
3. *transitive,* $\forall (x, y, z) \in E^3 : (x \Re y \text{ et } y \Re z) \Rightarrow x \Re z$.

Dans ce cas, deux éléments en relation sont aussi dits équivalents.

Classe d'équivalence, ensemble quotient

Définition 2.3 *Soit $\Re$ une relation d'équivalence dans un ensemble E.*

• *Pour tout* x *de* E*, on appelle classe d'équivalence de* x *(modulo* $\Re$*) l'ensemble noté* $cl(x)$, $\bar{x}$, $\dot{x}$ *, ou encore* $\hat{x}$*, défini par :*

$$cl(x) = \{y \in E \ / \ x\Re y\}\,.$$

• *Tout élément de* $cl(x)$ *est appelé un représentant de* $cl(x)$*.*

• *On appelle ensemble quotient de* E *par* $\Re$*, et on note* $E/\Re$*, l'ensemble des classe d'équivalence modulo* $\Re$*.*

Remarque 2.3 *Les classes d'équivalence constituent une partition de* E *: elles sont deux à deux disjointes et leurs réunion est égale à* E*. Tout élément de* E *appartient à une seule classe d'équivalence.*

Relation d'ordre

Définition 2.4 *Soit* E *un ensemble. Une relation binaire* $\Re$ *dans* E*, est une relation d'ordre si elle est*

1. *réflexive,*
2. *antisymétrique,* $\forall\,(x, y) \in E^2 : x\Re y$ *et* $y\Re x \Rightarrow x = y$*,*
3. *transitive.*

Ordre total, ordre partiel

Définition 2.5 *Une relation d'ordre* $\Re$ *est une relation d'ordre total sur un ensemble* E *si deux éléments* x *et* y *de* E *sont toujours comparables, c'est à dire : on a* $x\Re y$ *ou* $y\Re x$*. Dans le cas contraire, on a une relation d'ordre partiel.*

2.2.2 Majorant, minorant

Définition 2.6 *Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné. Soit* A *une partie non vide de* E*.*

On dit qu'un élément x *de* E *est un majorant de* A *(ou qu'il majore la partie* A*) si* x *est comparable à tous les éléments de* A *et si, pour tout élément* a *de* A*, on a :* $a \leq x$*.*

On dit qu'un élément $x \in E$ est un minorant de A (ou qu'il minore A) si x est comparable à tous les éléments de A et si, pour tout a de A, $x \leq a$.

Définition 2.7 *Soit A une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$. On dit que A est*

majorée si l'ensemble de ses majorants est non vide,

minorée si l'ensemble de ses minorants est non vide,

bornée si elle est à fois majorée et minorée. Autrement dit :

$$A \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists (x, y) \in E,\ \forall a \in A,\ x \leq a \leq y.$$

Proposition 2.2 *Soit A une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$. Soit α un élément de A.*

On dit que α est un élément maximum de A (ou plus grand élément de A) s'il majore A. Il n'existe au plus qu'un élément maximum de A, et s'il existe, on le note $\max(A)$.

On dit que α est un élément minimum de A (ou plus petit élément de A) s'il minore A. Il n'existe au plus qu'un élément minimum de A et s'il existe, on le note $\min(A)$.

2.2.3 Intervalles ouverts, fermés

Définition 2.8 *Soient a et b deux nombre réels tels que : $a < b$.*

- *On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b l'ensemble*

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}.$$

- *On appelle intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b, l'ensemble*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}.$$

- *On appelle intervalle ouvert de centre a, tout intervalle de type*

$$]a-h, a+h[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x-a| < h\}.$$

- *On appelle intervalle fermé de centre a, tout intervalle de type*

$$[a-h, a+h] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x-a| \leq h\}.$$

Il existe aussi des intervalles non bornés, par exemple :

$$]a, +\infty[\quad ou \quad]-\infty, b[.$$

2.3 Applications

2.3.1 Définition et image d'une application

Soit E et F deux ensembles.

Définition 2.9 *(Fonction)*

On appelle fonction de E vers F une relation qui à chaque valeur de la variable x fait correspondre au plus une valeur de y. Pour exprimer que y dépend de x, on écrit $y = f(x)$

Si $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x et x est un antécédent de y.

Le graphe de f est la partie G de $E \times F$ constituée des éléments de la forme $(x, f(x))$, où $x \in E$.

Définition 2.10 *(Domaine de définition)*

On appelle ensemble (ou domaine) de définition de la fonction f, et on note D_f, l'ensemble des éléments x de E tels qu'il existe un élément y de F vérifiant $y = f(x)$.

Définition 2.11 *(Application)*

On appelle application de E dans F, toute fonction

$$f : E \to F, \quad x \mapsto y = f(x)$$

tel que tout élément de l'ensemble de départ a une image par f.

Définition 2.12 *Pour tout ensemble E, l'application de E dans E qui à tout élément x associe x, se note Id_E et s'appelle l'application identique ou identité de E.*

$$Id_E : E \to E, \quad x \mapsto Id_E(x) = x$$

Définition 2.13 *Deux applications f_1 et f_2 sont égales si elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée F et si ($\forall x \in E,\ f_1(x) = f_2(x)$).*

Définition 2.14 *On appelle image d'une application $f : E \longrightarrow F$ l'ensemble*

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\},$$

ce qui se traduit par " $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des éléments y de F tels qu'il existe au moins un élément x de E vérifiant $y = f(x)$ " .

Définition 2.15 *Soit f une application de E dans F et A est un sous-ensemble de E. On appelle la restriction de f à A, l'application de A dans F, qui à tout x de A associe $f(x)$. On la note $f_{/A}$.*

Définition 2.16 *Soit A un sous-ensemble de E, et g une application de A dans F. Si f est une application de E dans F, qui coïncide avec g sur A alors, on dit que f est un prolongement de g.*

Définition 2.17 ***Fonction indicatrice (ou caractéristique) d'une partie***

Soit E un ensemble non vide et A une partie donnée de E. Pour $x \in E$, on pose

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 1, & si \;\; x \in A, \\ 0, & si \;\; x \notin A. \end{cases}$$

Remarque 2.4 *La fonction caractéristique de A, notée ψ_A, peut aussi être notée 1_A.*

2.3.2 Applications injective, surjective, bijective

Définition 2.18 *Une application f de E vers F est dite :*

- Une injection (ou application injective) si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Ce qui est équivalent à

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2 : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Une surjection (ou une application surjective) si

$$\forall y \in F, \; \exists x \in E : y = f(x).$$

- Bijective (ou que c'est une bijection) lorsqu'elle est à la fois injective et surjective. Ce qui est équivalent à

$$\forall y \in F, \; \exists! x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

2.3.3 Composition des applications

Définition 2.19 *Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. La composée de f et g, notée gof, (ce qui se lit " g rond f ") est l'application* *de E dans G, définie par*

$$\begin{aligned} gof \quad &: \quad E \to G, \\ x \quad &\longmapsto \quad (gof)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Soit $f : E \to F$ et $Id_E : E \to E$, alors on a

$$\forall x \in E,\ foId_E\,(x) = f\,[Id_E\,(x)] = f\,(x)\,.$$

Proposition 2.3 *Soient E, F, G et H des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ des applications, alors on a $ho(gof) = (hog)of$ (associativité de la composition) et cette application est notée $hogof : E \to H$.*

Remarque 2.5 *La composition des applications n'est pas commutative.*

Proposition 2.4

La composée de deux injections est une injection.

La composée de deux surjections est une surjection.

La composée de deux bijections est une bijection.

Définition de l'application réciproque

Définition 2.20 *Soit f une application de E dans F, on dit que g application de F dans E, est une application réciproque de f, si on a*

$$fog = Id_F \quad et \quad gof = Id_E.$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} \forall y \quad &\in \quad F,\ (fog)(y) = y, \\ \forall x \quad &\in \quad E, (gof)(x) = x. \end{aligned}$$

Proposition 2.5 *Si f admet une application réciproque g , alors cette application réciproque est unique.*

Lorsque l'application réciproque de f existe on la note f^{-1}.

Définition 2.21 *Soit f une application bijective d'un ensemble non vide E sur un ensemble non vide F. La réciproque de f est l'application notée f^{-1} définie par*

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Proposition 2.6 *Soit $f : E \to F$, A_1, A_2 et A des parties de E et B_1, B_2 et B des parties de F. Alors :*

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, avec égalité si f est injective,
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,
4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
5. $f(f^{-1}(B)) \subset B$, avec égalité si f est surjective,
6. $f^{-1}(f(A)) \supset A$, avec égalité si f est injective.

Composition des applications réciproques

Proposition 2.7 *Soient E, F et G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications bijectives. Alors*

$$\text{l'application } gof \text{ est bijective et } (gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}.$$

2.4 Exercices résolus

2.4.1 Ensembles

Exercice 2.1 *Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.*

Solution

Comme $A \subset B$ on a,

$A \cap B = A$ et

$A \cup B = B$.

$A \times B = \{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

Remarque :

$$\begin{aligned} Card\,(A \times B) &= Card\,(A) \times Card\,(B) \\ &= 3 \times 4 = 12 \end{aligned}$$

Exercice 2.2 *Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.*

Solution

$$A \cap B = [2,3].$$

$$A \cup B = [1,4].$$

Exercice 2.3 1. *Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :*

$A_1 =]-\infty, 0]$; $A_2 =]-\infty, 0[$; $A_3 =]0, +\infty[$; $A_4 = [0, +\infty[$; $A_5 =]1, 2[$; $A_6 = [1, 2[$.

2. *Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C =]2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants : $C_{\mathbb{R}}A$ et $C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$.*

Slution

1. $C_{\mathbb{R}}A_1 =]0, +\infty[$, $C_{\mathbb{R}}A_2 = [0, +\infty[$, $C_{\mathbb{R}}A_3 =]-\infty, 0]$, $C_{\mathbb{R}}A_4 =]-\infty, 0[$,

$C_{\mathbb{R}}A_5 =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$, $C_{\mathbb{R}}A_6 =]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$.

2. $C_{\mathbb{R}}A = [1, 2]$.

$C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = [1, +\infty[\cap]-\infty, 2] = [1, 2]$.

Remarque :

$C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C = C_{\mathbb{R}}(B \cup C) = C_{\mathbb{R}}A$.

Exercice 2.4 *Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :*

1. $\forall A, B \in P(E)$, $(A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B$,

2. $\forall A, B, C \in P(E)$, $(A \cap B = A \cap C \ \textit{et}\ A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C$.

Solution

Nous allons démontrer l'*assertion* 1. de deux manières différentes.

1. Tout d'abord de façon "*directe*".

Nous supposons que A et B sont telles que $A \cap B = A \cup B$.

Nous devons montrer que $A = B$.

Pour cela, étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B.

Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$, donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$).

Ainsi $x \in B$.

Maintenant nous prenons $x \in B$, et le même raisonnement implique $x \in A$.

Donc, tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.

2. Ensuite, nous le montrons par *contraposition*.

Nous supposons que :

$A \neq B$ et nous devons monter que $A \cap B \neq A \cup B$.

Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A$ et $x \notin B$, ou alors un élément $x \in B$ et $x \notin A$.

Nous supposons qu'il existe $x \in A$ et $x \notin B$.

Alors $x \in A \cup B$, mais $x \notin A \cap B$.

Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Exercice 2.5 *Soit A, B deux ensembles, montrer*

$C_E\,(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$,

$C_E\,(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

Solution

1-

$$\begin{aligned} x \in C_E(A \cup B) &\Longleftrightarrow x \notin A \cup B, \\ &\Longleftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B, \\ &\Longleftrightarrow x \in C_E A \text{ et } x \in C_E B, \\ &\Longleftrightarrow x \in C_E A \cap C_E B. \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} x \in C_E(A \cap B) &\Longleftrightarrow x \notin A \cap B, \\ &\Longleftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B, \\ &\Longleftrightarrow x \in C_E A \text{ ou } x \in C_E B, \\ &\Longleftrightarrow x \in C_E A \cup C_E B. \end{aligned}$$

Exercice 2.6 *Soit A, B et C trois ensembles de E.*

(a) *Etablir que,*

1. $(C_E A) \setminus (C_E B) = B \setminus A.$

2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$

(b) *Justifier l'équivalence suivante :*

$$A \cup B = A \cap C \Longleftrightarrow B \subset A \subset C.$$

Solution (a)

1.

$$\begin{aligned} (C_E A) \setminus (C_E B) &= \{x \;/\; x \in C_E A \text{ et } x \notin C_E B\}, \\ &= \{x \;/\; x \notin A \text{ et } x \in B\}, \\ &= B \setminus A. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B \cap C\}, \\ &= \{x \ / \ x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin C)\}, \\ &= \{x \ / \ (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \notin C)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{x \ / \ (x \in A \setminus B) \text{ ou } (x \in A \setminus C)\}, \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

(b) Supposons que $A \cup B = A \cap C$, on a

$$B \subset A \cup B = A \cap C \subset A \subset A \cup B = A \cap C \subset C,$$

d'où

$$B \subset A \subset C.$$

Supposons $B \subset A \subset C$, on a

$$A \cup B = A = A \cap C,$$

d'où

$$A \cup B = A \cap C.$$

Exercice 2.7 *Soit X et Y deux ensembles. Montrer que*

$$X \subset Y \Longleftrightarrow X \cap Y = X.$$

ou,

$$X \subset Y \Longleftrightarrow X \cup Y = Y.$$

Solution

On suppose que $X \subset Y$, on a toujours

$$X \subset X \cap Y \subset X,$$

d'où

$$X \cap Y = X.$$

Inversement si

$$X = X \cap Y \Longrightarrow X \subset Y.$$

- L'équivalence

$$X \subset Y \Longleftrightarrow X \cup Y = Y,$$

s'étudie de même façon.

Exercice 2.8 *Décrire* $P\{P\{a\}\}$ *où* a *désigne un élément.*

Solution

$$P(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}.$$

$$P\{P\{a\}\} = \{\phi, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\phi, \{a\}\}\}.$$

Exercice 2.9 *(différence symétrique).*

Soit E *un ensemble. Pour* $(A,B) \in (P(E))^2$, *on pose* $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. *Démontrer que :*

1) $\forall (A,B) \in (P(E))^2$, $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

2) $\forall (A,B) \in (P(E))^2$, $A \triangle B = B \triangle A$.

3) $\forall A \in P(E)$, $A \triangle \phi = A$.

4) $\forall A \in P(E)$, $A \triangle A = \phi$.

5) $\forall (A,B,C) \in (P(E))^3$, $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Solution

1) Soient A et B deux éléments de $P(E)$.

$A\triangle B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et pas dans B ou dans B et pas dans A.

$A\triangle B$ est donc l'ensemble des éléments de E qui sont dans exactement une des deux parties A ou B et qui ne sont pas dans A et B simultanément, de même que $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

Ceci montre que

$$A\triangle B=(A\cup B)\backslash(A\cap B).$$

<u>D'une autre façon :</u>

$$\begin{aligned}
A\triangle B &= (A\backslash B)\cup(B\backslash A),\\
&= \{(x\in A \text{ et } x\notin B) \text{ ou } (x\in B \text{ et } x\notin A)\},\\
&= \{(x\in A \text{ ou } x\in B) \text{ et } (x\notin B \text{ ou } x\notin A)\},\\
&= \{(x\in A\cup B) \text{ et } (x\notin A\cap B)\},\\
&= \{x\in (A\cup B)\backslash(A\cap B)\},\\
&= (A\cup B)\backslash(A\cap B).
\end{aligned}$$

2) Soient A et B deux éléments de $P(E)$.

$$\begin{aligned}
A\triangle B &= (A\backslash B)\cup(B\backslash A)\\
&= (B\backslash A)\cup(A\backslash B)=B\triangle A.
\end{aligned}$$

3) Soit A un élément de $P(E)$.

$$A\triangle\phi=(A\backslash\phi)\cup(\phi\backslash A)=A\cup\phi=A.$$

4) Soit A un élément de $P(E)$.

$$A\triangle A = (A\backslash A)\cup(A\backslash A) = \phi\cup\phi = \phi.$$

5) Soient A, B et C trois éléments de $P(E)$.

$$(A\cap C)\triangle(B\cap C) = [(A\cap C)\backslash\,(B\cap C)]\cup[)\,(B\cap C)\,\backslash(A\cap C]\,,$$

$$\begin{aligned}(A\cap C)\triangle(B\cap C) &= \left[(A\cap C)\cap\overline{(B\cap C)}\right]\cup\left[\overline{(A\cap C)}\cap(B\cap C)\right],\\ &= \left[(A\cap C)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{C}\right)\right]\cup\left[(\overline{A}\cup\overline{C})\cap(B\cap C)\right],\\ &= \left[(A\cap C\cap\overline{B})\cup\left(A\cap C\cap\overline{C}\right)\right]\cup\left[(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\left(\overline{C}\cap B\cap C\right)\right]\\ &= (A\cap C\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B\cap C),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right]\cap C = [(A\backslash B)\cup(B\backslash A)]\cap C,\\ &= (A\triangle B)\cap C.\end{aligned}$$

Exercice 2.10 *Montrer que l'ensemble*

$$A = \left\{x\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{N},\ x = \frac{n}{n+1}\right\},\quad \textit{est borné.}$$

Solution

Comme

$$n < n+1 \Longrightarrow \frac{n}{n+1} < 1.$$

Donc, il est clair que :

$$\forall x\in A,\ \text{on a}\quad 0\le x = \frac{n}{n+1}\le 1.$$

2.4.2 Relations binaires

Exercice 2.11 *Montrer que la relation $<$ n'est pas réflexive ni symétrique*

Solution

Quels que soient les réels x et y, les propriétés

$$\begin{cases} \quad x < x & \text{(réflexive)}, \\ \text{et} \quad (x < y) \Longrightarrow (y < x) & \text{(symétrique)}, \end{cases}$$

sont clairement fausses.

Exercice 2.12 *Dans* $\mathbb{N}^*$, *on définit la relation de divisibilité* $|$ *par :*

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : b = ka.$$

1) *Montrer que* $|$ *est une relation d'ordre sur* $\mathbb{N}^*$.

2) *Cette relation d'ordre est-elle une relation d'ordre total ou une relation d'ordre partiel* ?

Solution

1)

- $\underline{Réflexivité.}$

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. $a = 1 \times a$, avec $1 \in \mathbb{N}^*$. Donc $\exists k = 1 : a = 1 \times a$.

Ainsi,

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \ a|a.$$

Ceci montre que la relation $|$ est réflexive.

- $\underline{Anti - symétrie.}$

Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que,

$$a|b \ \text{ et } \ b|a.$$

Donc, il existe deux entiers naturels non nuls k et k' de $\mathbb{N}^*$ tels que,

$$b = ka \quad \text{et} \quad a = k'b.$$

On en déduit que

$$a = k'b = k'ka,$$

puis que

$$kk' = 1 \quad \text{car} \quad a \neq 0.$$

* Si $k \neq 1$, alors $k \geq 2$ puis $kk' \geq 2$ ce qui n'est pas (car, $kk' = 1$) .

Donc,

$$k = 1$$

puis

$$b = a.$$

On a montré que

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ \left(a|b \ \text{ et } \ b|a \Rightarrow a = b \right),$$

et donc, que la relation | est anti-symétrique.

- <u>*Transitivité.*</u>

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, tel que

$$a|b \quad \text{et} \quad b|c.$$

Il existe deux entiers naturels non nuls k et k' tels que

$$b = ka \quad \text{et} \quad c = k'b.$$

Alors,

$$c = k'b = kk'a$$

et donc

$$\exists k'' = kk'$$

un entier naturel non nul tel que,

$$c = k''a.$$

Par suite,

$$a|c.$$

On a montré que

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3,\ (\ a|b \ \text{ et } \ b|c \Rightarrow a|c\ )$$

et donc que la relation $|$ est transitive.

Finalement, la relation $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

2)

2 et 3 sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$, tels que 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2, et on écrit : $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$. Alors,

$$\exists\, (x,y) = (2,3) : x \nmid y \ \text{ et } \ y \nmid x,$$

c-à-d : l'ordre n'est pas total.

Donc, $|$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 2.13 *Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit une relation R sur E, en posant pour tout $(x,x') \in E \times E$,*

$$xRx' \Longleftrightarrow f(x) = f(x').$$

1. *Montrer que R est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout $x \in E$.*

Solution

1. On a,

$$f(x) = f(x) \Longrightarrow xRx,$$

donc, R est réflexive.

Et,

$$\begin{aligned} xRx' &\Longleftrightarrow f(x) = f(x') \Longrightarrow f(x') = f(x) \\ &\Longrightarrow x'Rx. \end{aligned}$$

donc, R est symétrique.

Et,

$$\begin{aligned} \begin{cases} xRx' \\ x'Rx'' \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} f(x) = f(x') \\ f(x') = f(x'') \end{cases}, \\ &\Longrightarrow f(x) = f(x''), \\ &\Longrightarrow xRx''. \end{aligned}$$

donc, R est transitive.

Finalement, R est une relation d'équivalence.

2.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{y \in E \;/\; yRx\}, \\ &= \{y \in E \;/\; f(y) = f(x)\}. \end{aligned}$$

Exercice 2.14 *Montrer que la relation binaire définie par :*

$$xRy \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y),$$

est une relation d'ordre.

Solution

• $f(x) \leq f(x)$, entraine que

$$xRx,$$

la relation est réflexive.

• Si xRy et yRx alors, $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$, alors :

$$f(x) = f(y),$$

f est strictement monotone donc, f est injective, par conséquent $x = y$, ce qui signifie que R est antisymétrique.

• Si xRy et yRz alors, $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$, alors :

$$f(x) \leq f(z),$$

ce qui signifie que xRz, et R est transitive.

Donc, R est une relation d'ordre.

Remarque :

On pourrait montrer que c'est une relation d'ordre totale.

Exercice 2.15 *Sur $\mathbb{R}^2$ on considère la relation R définie par*

$$(a,b)\,R\,(c,d) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

1. *Montrer que R est une relation d'équivalence.*
2. *Décrire la classe d'équivalence $\overset{\cdot}{(a,b)}$ du couple (a,b).*

Solution 1.

$i)$ On a

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \Longleftrightarrow (a,b)\,R\,(a,b),$$

R est réflexive.

ii)

$$\begin{aligned} (a,b)\,R\,(c,d) &\iff a^2+b^2=c^2+d^2, \\ &\Longrightarrow c^2+d^2=a^2+b^2, \\ &\Longrightarrow (c,d)\,R\,(a,b)\,, \\ &\Longrightarrow R \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{cases} (a,b)\,R\,(c,d) \iff a^2+b^2=c^2+d^2, \\ (c,d)\,R\,(e,f) \iff c^2+d^2=e^2+f^2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow a^2+b^2=e^2+f^2, \\ &\Longrightarrow (a,b)\,R\,(e,f)\,, \\ &\quad\; R \text{ est transitive.} \end{aligned}$$

Finalement R est une reletion d'équivalence.

2.

$$\begin{aligned} (\dot{a,b}) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ (x,y)\,R\,(a,b)\right\}, \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2=a^2+b^2\right\}. \end{aligned}$$

Si on pose

$$r^2=a^2+b^2,$$

alors

$$(\dot{a,b})=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2=r^2\right\}.$$

Donc la classe de (a,b) est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r.

Si $(a,b)=(0,0)$ la classe de (a,b) est réduite à $(0,0)$.

2.4.3 Fonctions, applications

Exercice 2.16 *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose*

$$f(x) = ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}\right).$$

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in D_f \iff \begin{cases} x^2 - 3x + 3 \geq 0, \text{ et} \\ \sqrt{x^2 - 3x + 3} \neq 0, \text{ et} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}} > 0. \end{cases}$$

Alors, $x \in D_f \iff \begin{cases} x^2 - 3x + 3 > 0, \text{ et} \\ \sqrt{x^2 - 3x + 3} > 1. \end{cases}$

Donc,

$$\begin{aligned} x \quad \in \quad & D_f \iff x^2 - 3x + 3 > 1, \\ \iff & x^2 - 3x + 2 > 0, \\ \iff & x < 1 \text{ ou } x > 2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$D_f = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[.$$

Exercice 2.17 *Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F. Montrer que :*

1. $f(\phi) = \phi$.
2. $\forall (A, B) \in (P(E))^2$, $(A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B))$.
3. $\forall (A, B) \in (P(E))^2$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $\forall (A, B) \in (P(E))^2$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Solution

1. Immédiat.

2. Soient A et B deux parties de E, telles que $A \subset B$.

Si $f(A) = \phi$, alors $f(A) \subset f(B)$.

Sinon, soit $y \in f(A)$.

Il existe $x \in A$ tel que :

$$y = f(x) \in f\left(A\right).$$

Puisque $A \subset B$, alors, $x \in B$ et donc y est l'image par f d'un élément de B ou encore

$$y = f(x) \in f(B).$$

Ceci montre dans tous les cas que

$$f(A) \subset f(B).$$

3. Soient A et B deux parties de E. Soit $y \in F$.

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B \ / \ y = f(x),\\
&\Leftrightarrow \exists x \in E \ / \ (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } y = f(x),\\
&\Leftrightarrow \exists x \in E \ / \ (x \in A \text{ et } y = f(x)) \text{ ou } (\exists x \in E \ / \ (x \in B \text{ et } y = f(x)),\\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A \ / \ y = f(x)) \text{ ou } (\exists x \in B \ / \ y = f(x))\\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B),\\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B).
\end{aligned}$$

Donc,

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

4. Soient A et B deux parties de E.

Soit $y \in F$.

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B \ / \ y = f(x),\\
&\Longrightarrow \exists x \in E \ / \ (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } y = f(x),
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow [\exists x \in E/(x \in A \text{ et } y = f(x))] \text{ et } [\exists x \in E/(x \in B \text{ et } y = f(x))],$$
$$\Leftrightarrow (\exists x \in A \ / \ y = f(x)) \text{ et } (\exists x \in B \ / \ y = f(x)),$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(B),$$
$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B).$$

Donc,

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Exercice 2.18 *Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E vers F. Montrer que :*

1. $f^{-1}(\phi) = \phi$.
2. $\forall A \in P(F),\ f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$.
3. $\forall (A, B) \in (P(F))^2,\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
4. $\forall (A, B) \in (P(E))^2,\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Solution

1. Immédiat.
2. Soit A une partie de F. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}\left(\overline{A}\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \overline{A} \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \overline{f^{-1}(A)}. \end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}.$$

3. Soient A et B deux parties de F. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B, \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in A) \text{ ou } (f(x) \in B), \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(A)) \text{ ou } (x \in f^{-1}(B)), \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

4. Soient A et B deux parties de F. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B, \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in A) \text{ et } (f(x) \in B), \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(A)) \text{ et } (x \in f^{-1}(B)), \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Exercice 2.19 *Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F. Montrer que :*

1. $\forall A \in P(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $\forall B \in P(F), f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

Solution

1. Soit $A \in P(E)$. Soit $x \in E$. On a :

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A)).$$

Ce qui montre que

$$A \subset f^{-1}(f(A)).$$

(les éléments de A sont des antécédents d'éléments de $f(A)$).

2. Soit $B \in P(F)$. L'image par f d'un antécédent d'élément de B est par définition dans B. Donc,

$$f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B.$$

Exercice 2.20 *Soient E, F et G trois ensemble et soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*

1. *Montrer que si f et g sont injectives alors gof est injective.*
2. *Montrer que si f et g sont surjectives alors gof est surjective.*
3. *Que peut-on conclure sur gof si f et g sont bijectives ?*
4. *Montrer que si gof est injective alors f est injective.*
5. *Montrer que si gof est surjective alors g est surjective.*

Solution Soit $x_1, x_2 \in E$, on a :

1. $gof(x_1) = gof(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$,

$\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, car : g est injective,

$\Longrightarrow x_1 = x_2$, car : f est injective.

Donc, gof est injective.

2. Pour tout $z \in G$, il existe $y \in F$, tel que $z = g(y)$ car g est surjective.

Comme pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$, tel que $y = f(x)$, car f est surjective.

On en déduit que pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$, tel que

$$z = g(f(x)) = gof(x),$$

autrement dit gof est surjective.

3. Si f et g sont bijective alors, elles sont injectives et gof est injective et si g et f sont bijectives alors, elles sont surjectives et gof est surjective, on en déduit que gof est bijective.

4. $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$,

$\Longrightarrow gof(x_1) = gof(x_2)$,

$\Longrightarrow x_1 = x_2$.

Car gof est injective, par conséquent f est injective.

5. Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$, tel que

$$z = gof(x) = g(f(x)),$$

donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$, ce qui signifie que g est surjective.

Exercice 2.21 *Soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

Montrer que g *n'est pas injective.*

Solution

On a, $g(1) = 0 = g(2)$ avec $1 \neq 2$. On a montré que :

$\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1 \neq x_2 \text{ et } g(x_1) = g(x_2))$.

Donc, l'application g n'est pas injective.

Exercice 2.22 *Soit* f *et* g *deux applications bijectives,définies par,*

$f : \mathbb{R}^+ \underset{x \longmapsto x^2.}{\longrightarrow} \mathbb{R}^+$, $\qquad g : \mathbb{R} \underset{x \longmapsto e^x.}{\longrightarrow}]0, +\infty[$

déterminer les applications réciproques f^{-1} *et* g^{-1}.

Solution

1. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\begin{aligned} y &= f(x) \Longleftrightarrow y = x^2, \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y}. \end{aligned}$$

L'application $f : \mathbb{R}^+ \underset{x \longmapsto x^2.}{\longrightarrow} \mathbb{R}^+$, est bijective et sa réciproque est l'application

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \underset{x \longmapsto \sqrt{x}.}{\longrightarrow} \mathbb{R}^+,$$

2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} y &= f(x) \Longleftrightarrow y = e^x, \\ &\Leftrightarrow x = \ln y. \end{aligned}$$

L'application $g : \mathbb{R} \underset{x \longmapsto e^x.}{\longrightarrow}]0, +\infty[$, est bijective et sa réciproque est l'application

$$g^{-1} :]0, +\infty[\underset{x \longmapsto \ln x.}{\longrightarrow} \mathbb{R},$$

Exercice 2.23 *Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :*

$$1.\ f:\underset{x\longmapsto x^2.}{\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},}\qquad 2.\ f:\underset{x\longmapsto x^2.}{\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+,}\qquad 3.\ f:\underset{x\longmapsto x^2.}{[0,1]\longrightarrow[0,2].}$$

Solution

1.

$$f:\underset{x\longmapsto x^2.}{\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},}$$

• $f(-1)=f(1)$, $\exists(x_1,x_2)=(-1,1)\in\mathbb{R}^2$, tel que $x_1\neq x_2$ et $f(x_1)=f(x_2)$.

donc f n'est pas injective.

• (-4) n'a pas d'antécédent, car

$$f(x)=-4\Longleftrightarrow x^2=-4,$$

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Alors, f n'est pas surjective.

• Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

2.

$$f:\underset{x\longmapsto x^2.}{\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+,}$$

• On a, $$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Longrightarrow x_1^2=x_2^2,\\ &\Longrightarrow \sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2},\\ &\Longrightarrow |x_1|=|x_2|,\\ &\Longrightarrow x_1=x_2,\ \text{car : } x_1,x_2\in\mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Donc f est injective.

• Pour tout $y\in\mathbb{R}^+$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x=\sqrt{y}\in\mathbb{R}^+$, (celui de l'ensemble de départ), tel que : $y=f(x)$, <u>en effet</u>

$$f(x)=\left(\sqrt{y}\right)^2=y.$$

Donc f est surjective.

• Alors, f est bijective.

3.

$$f : [0,1] \underset{x \longmapsto x^2.}{\longrightarrow} [0,2]\,,$$

• On a,$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2,$

$$\Longrightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2},$$
$$\Longrightarrow |x_1| = |x_2|\,,$$
$$\Longrightarrow x_1 = x_2, \text{ car : } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0.$$

Donc f est injective.

• 2 n'a pas d'antécédent, car :

$$f\,(x) = 2 \Longleftrightarrow x^2 = 2,$$

donc, $f\,(x) = 2$ n'a pas de solution dans $[0,1]\,.$

f n'est pas surjective.

• Donc f n'est pas bijective.

Exercice 2.24 *Soient les applications* $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$, *et* $g : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *définies par*

$$f\,(x) = \frac{1}{x}, \quad g\,(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Montrer que $gof = -g$ *sur* $\mathbb{R}_*^+$.

Solution

Tout d'abord, comme 0 et -1 sont exclus des domaines de définition, ces deux applications sont effectivement bien définies.

Il suffit ensuite de calculer $g(f(x))$. En effet,

$$g(f(x)) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1-x}{1+x} = -\frac{x-1}{1+x} = -g\,(x)\,.$$

Exercice 2.25 *Soit l'application bijective*

$$f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}, \qquad x \longmapsto \frac{x+1}{x+2}.$$

Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$.

Solution

En résolvant l'équation $y = f(x)$, on obtient :

$$y = \frac{x+1}{x+2} \Longrightarrow x = \frac{1-2y}{y-1}.$$

Donc,

$$f^{-1}(y) = \frac{1-2y}{y-1}.$$

Exercice 2.26 *Soient les applications* $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$, *et* $g : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *définies par*

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Donner f^{-1}, g^{-1}*puis* $(gof)^{-1}$.

Solution

$f^{-1} : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ et

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y} \qquad \text{(résoudre l'équation } y = f(x)\text{).}$$

$g^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ et

$$g^{-1}(y) = \frac{1+y}{1-y} \qquad \text{(résoudre } y = g(x)\text{)}$$

Et

$$(gof)^{-1}(y) = \left(f^{-1}og^{-1}\right)(y) = \frac{1}{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1-y}{1+y} = -g(y).$$

Exercice 2.27 *Soient E et F deux ensembles, et soit f de E dans F qui admet une application réciproque f^{-1}.*

Montrer, à partir de la définition de f^{-1} que f^{-1} admet une application réciproque et que $(f^{-1})^{-1} = f$.

Solution

$$f^{-1}of = id_E \text{ et } fof^{-1} = id_E,$$

caractérisent (par définition) l'inverse de f^{-1} qui est donc f.

Et,

$$f^{-1}of = id_E \Longrightarrow \left(f^{-1}of\right)^{-1} = (id_E)^{-1},$$

ceci implique que :

$$f^{-1}o\left(f^{-1}\right)^{-1} = id_E.$$

Donc,

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Chapitre 3

Fonctions réelles à une variable réelle

3.1 Limite et continuité

3.1.1 Voisinage d'un point

Soit D_f le domaine de définition d'une fonction f d'une variable réelle. En pratique, ce domaine est très souvent constitué de la réunion d'un nombre fini d'intervalles.

Définition 3.1 *On appelle voisinage de $a \in \mathbb{R}$, toute partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$ avec $\alpha > 0$. (il revient au même de dire : une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert).*

Exemple 3.1 *un voisinage de 0 est $]-1,1[$ ou $[-1,0,5]$ ou $[-1000,0,001[$ mais par contre $[-1,0]$ n'est pas un voisinage de 0 car il n'existe aucun réel α strictement positif tel que l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$ soit contenu dans $[-1,0]$.*

- Un intervalle ouvert est voisinage de chacun de ses points.

3.1.2 Définition de la limite

Définition 3.2 *Soient Ω un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de Ω et f une fonction numérique définie sur Ω sauf éventuellement en a. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ 0 < |x-a| < \eta : |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On dit aussi que l est la limite de f en a et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Définition 3.3 *(concerne les fonctions qui tendent vers ∞)*

Soient Ω un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de Ω et f une fonction numérique définie sur Ω sauf éventuellement en a. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers *a si*

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \ (0 < |x - a| < \eta) \Rightarrow (f(x) > A).$$

Soit f définie sur $]\omega, +\infty[$, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \geq \omega,\ \ (x > B) \Rightarrow (f(x) > A).$$

3.1.3 Limite à gauche, à droite

Définition 3.4 *Soient Ω un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de Ω et f une fonction numérique définie sur Ω sauf éventuellement en a. On dit que la fonction f admet une limite à droite en a s'il existe un nombre l tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \ a < x < a + \eta : |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On notera $f(a + 0)$ ou simplement $f(a+)$ la limite à droite.

On définit de façon analogue la limite à gauche de f en a et on notera $f(a - 0)$ ou simplement $f(a-)$ la limite à gauche.

Exemple 3.2 *- La fonction $\sqrt{x}$ admet en 0 une limite à droite égale à 0. Ce n'est qu'une limite à droite puisque cette fonction n'est définie que sur $[0, +\infty[$.*

- La fonction Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } x < 0, \\ 1, & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

admet en 0 une limite à droite, égale à 1 et une limite à gauche égale à 0.

Proposition 3.1 *Une fonction numérique f , définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$, admet une imite en a si et seulement si, f admet une limite à droite et une limite à gauche en a qui sont égales.*

Proposition 3.2 *La limite d'une fonction en un point, si elle existe est unique.*

3.1.4 Propriétés des limites liées aux comparaisons des fonctions

Théorème 3.1 *(Théorèmes de comparaison)*

Soit Ω un intervalle ouvert contenant a. Soient f_1, f_2, f et g des fonctions définies sur $\Omega\backslash\{a\}$.

1. *Si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \beta, \quad \forall x \in \Omega\backslash\{a\}, \ f(x) \leq g(x),$$

alors,

$$\alpha \leq \beta.$$

2. *Si*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = l, \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = l, \quad \forall x \in \Omega\backslash\{a\}, \quad f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x),$$

alors,

$$\lim_{x\to a} f(x) = l.$$

Cette propriété est souvent appelée théorème des gendarmes.

3. Si f est bornée et si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0.$$

3.1.5 Opérations sur les limites

Théorème 3.2 *Soient f et g définies dans un voisinage de a (sauf éventuellement en a) telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \lim_{x\to a} g(x) = \beta$, avec a fini, alors*

1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$,
2. $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \alpha\beta$,
3. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$, *sous la condition que $\beta \neq 0$.*

Ce théorème peut se généraliser au cas où x tend vers l'infini.

Théorème 3.3 *(Opérations sur les limites généralisées)*

Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a et telles que

$$g(x) \to +\infty \quad \textit{quand} \quad x \to a.$$

1. *si f est bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.*
2. *si f est minorée au voisinage de a, alors $f(x) + g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$.*
3. *si f est minorée, au voisinage de a, par un réel strictement positif, alors $f(x)g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$.*
4. *si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, et $f(x) > 0$ dans un voisinage de a, alors $\frac{1}{f(x)} \to +\infty$ quand $x \to a$.*

3.2 Continuité d'une fonction

Définition 3.5 *Soient Ω un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur Ω.*

On dit que f est continue au point $a \in \Omega$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \ (|x-a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

On dit que f est continue à droite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \ (a \leq x < a+\eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

On dit que f est continue à gauche en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \Omega,\ \ (a-\eta < x \leq a) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Enfin on dit qu'une fonction est continue sur Ω, si elle est continue en tout point de Ω.

Dans cette définition, le nombre η dépend de ε et en général de a.

Proposition 3.3 *Une fonction f est continue en $a \in \Omega$, si et seulement si f admet une limite en a, égale à $f(a)$*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Une fonction f est continue à gauche (resp. à droite) en a si et seulement si f admet une limite à gauche (resp. à droite) en a égale à $f(a)$.

Proposition 3.4 *Une fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et continue à gauche en a.*

Corollaire 3.1 *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions rationnelles sont continues sur leurs intervalles de définition.*

Proposition 3.5 *(prolongement par continuité)*

Soit $c \in [a,b]$ et $f : [a,b] \backslash \{c\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} f(x) = l$. Alors la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \neq c, \\ l, & si\ x = c. \end{cases}$$

est continue sur $[a,b]$.

3.2.1 Opérations sur les fonctions continues

Théorème 3.4 *Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a et continues au point a. Alors*

1. *la fonction $f + g$ est continue au point a.*
2. *pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est continue au point a.*
3. *la fonction fg est continue au point a.*
4. *si $g(a) \neq 0$, la fonction $\frac{1}{g}$ est continue au point a.*

Théorème 3.5 *Soit f une fonction définie dans un voisinage de a et continue en a. Soit g une fonction définie dans un voisinage du point $b = f(a)$ et continue en b. Alors gof définie dans un voisinage de a et est continue au point a.*

3.2.2 Théorème de la valeur intermédiaire

Proposition 3.6 *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points de I tels que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$ Alors il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Corollaire 3.2 *(Théorème des valeurs intermédiaires).*

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points de I tels que $a < b$. Alors, quel que soit le réel k strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.

3.2.3 Fonctions continues sur un segment

Théorème 3.6 *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors :*

(i) f est bornée.

(ii) f atteint son minimum et son maximum, c'est à dire que :

$$\exists c \in [a, b], \quad f(c) = \sup\{f(x) \ / \ x \in [a, b]\},$$

et

$$\exists d \in [a, b], \quad f(d) = \inf\{f(x) \ / \ x \in [a, b]\}.$$

Théorème 3.7 *Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$. Alors, l'image de $[a, b]$ par f est un segment $[a', b'] : f([a, b]) = [a', b']$.*

Proposition 3.7 *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, l'image de I par f est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Remarque 3.1 *(Formes indéterminées)*

$\frac{\infty}{\infty}, \ 0 \times \infty, \ \frac{0}{0}, \ \infty - \infty, \ \infty^0, \ 1^\infty, ...$

3.3 Rappels sur le calcul des dérivées

La notion de dérivée est une notion fondamentale en analyse. Elle permet d'étudier les variations d'une fonction,....

3.3.1 Taux de variation

Le taux de variation d'une fonction f continue définie sur un intervalle $[a, b]$ est égale à :

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si $T > 0$, f est croissante ; $T < 0$, f est décroissante.

Définition 3.6 *Soit I un intervalle réel ouvert et $x_0 \in I$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles ; on dit que f est dérivable en x_0 si la limite*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \textit{existe}$$

et dans ce cas cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Bien sûr, il revient au même de regarder la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

<u>Rappelons l'interprétation géométrique de la dérivée</u> : si f est dérivable en x_0, alors la courbe représentative de la fonction f admet une tangente au point $(x_0, f(x_0))$, de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Théorème 3.8 *Si f est dérivable en tout point, la fonction $x \mapsto f'(x)$ ainsi définie s'appelle la fonction dérivée. Si f' est elle même dérivable, sa dérivée s'appelle la dérivée seconde de f et se note f'' ou $f^{(2)}$. On définit de même la dérivée $n-$ième (si elle existe,* *on la note $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$) par la relation de récurrence :*

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(1)}(x) = f'(x), ..., \quad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

Théorème 3.9 *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

(***ATTENTION !*** *l a réciproque est FAUSSE*).

3.3.2 Équation de la droite tangente

Théorème 3.10 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors : la droite T_a passant par le point $A(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$, est tangente à la courbe C_f au point A. Son équation est donnée par :*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Définition 3.7 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in I$.*

(1) *On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{existe et est finie.}$$

Cette limite s'appelle la dérivée de f à gauche en x_0, on la note $f'_g(x_0)$.

(2) *On définit de même la dérivée à droite, que l'on note $f'_d(x_0)$.*

Proposition 3.8 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in]a, b[$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

3.3.3 Fonction dérivée

Nous venons de définir le nombre dérivé d'une fonction en un point, nous allons maintenant étendre cette notion à tous les points d'un intervalle.

Définition 3.8

1°) *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout nombre $x \in I$.*

2°) *Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors on définit une nouvelle fonction sur I, notée f' qui à tout nombre $x \in I$ fait associer le nombre dérivé $f'(x)$ La fonction f' s'appelle la fonction dérivée de f sur l'intervalle I.*

Remarque 3.2 *Une fonction f définie sur un domaine D_f , n'est pas nécessairement dérivable en tout point de D_f. On peut dire donc que le domaine de définition $D_{f'}$ de f', qui est contenu dans D_f n'est pas nécessairement égal à D_f .*

3.3.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $U(x)$ et $V(x)$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$$\begin{aligned}
(kU)' &= kU'. \\
(U+V)' &= U'+V'. \\
(UV)' &= U'V+V'U. \\
(U^n)' &= nU^{n-1}U'. \\
\left(\frac{U}{V}\right)' &= \frac{U'V-V'U}{V^2}. \\
\left(\frac{1}{V}\right)' &= \frac{-V'}{V^2}. \\
\left(\sqrt{U}\right)' &= \frac{U'}{2\sqrt{U}}.
\end{aligned}$$

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, la fonction composée fog, notée également $f\left[g\left(x\right)\right]$ est aussi dérivable sur I.

$$\left(f\left[g\left(x\right)\right]\right)' = g'\left(x\right) f'\left[g\left(x\right)\right].$$

3.3.5 Dérivée et sens de variation

Théorème 3.11 *Soit I un intervalle ouvert de R, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors*

(1) *f est constante* $\Longleftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

(2) *f est croissante* $\Longleftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0.$

(3) $\forall x \in I,\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *est strictement croissante.*

3.3.6 Théorème de Rolle

Théorème 3.12 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

3.3.7 Théorème des accroissements finis

Théorème 3.13 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3.3.8 Règle de l'Hôpital

Cette règle permet de lever certaines indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Notons qu'on peut appliquer la recette plusieurs fois de suite !

Théorème 3.14 *Soient f et g deux fonctions continues et dérivables respectivement sur un intervalle $[a,b]$ et $]a,b[$.*

Si pour tout $x \in]a,b[$, $g'(x_0) \neq 0$ et si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0}$. Alors

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Si cette limite tend de nouveau vers $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$ on réitère la règle.

3.4 Exercices résolus

3.4.1 Limite et Continuité

Exercice 3.1 *Déterminer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$, 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}$,

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^2 x}$, 4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Solution

1. Il s'agit d'une forme indéterminée. On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)},\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1+x-\left(1+x^2\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)},\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)},\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x\left(1-x\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)},\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{2}.$$

2. Il s'agit d'une forme indéterminée. On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)},\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-(1+x)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)},\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)},\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}\\
&= 1\times 0 = 0.
\end{aligned}$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1,$$

(c'est la limite des termes de plus haut degré.)

Et,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=0,$$

(Car le dénominateur tend vers l'infini.)

Alors,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=0.$$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^2 x}$,

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, il s'agit d'une forme inderterminée, nous allons utiliser la règle de L'Hospital, on pose

$$f(x)=\ln\left(1+x^2\right)\quad \text{et}\quad g(x)=\sin^2 x.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{g(x)},\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)},\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2\sin x\cos x},\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{\sin x} \times \frac{1}{(1+x^2)\cos x},
\end{aligned}$$

on a « séparé » la partie indéterminée $\frac{x}{\sin x}$ de la partie $\frac{1}{(1+x^2)\cos x}$ où il n'y a pas de problème.

Comme on sait que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{\sin x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

D'autre part

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{(1+x^2)\cos x} = 1.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{\sin x} \times \frac{1}{(1+x^2)\cos x},\\
&= 1\times 1 = 1.
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1.$$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Posons, $t = x-1 \Longleftrightarrow x = 1+t$.

Alors,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1. \text{ (On peut utiliser la règle de L'Hospital.)}$$

Exercice 3.2 *Calculer si elles existent les limites suivantes*

$$1. \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}, \qquad 2. \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{x}$$

Solution

1. La limite de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ en 0 est une forme indéterminée car de la forme $\frac{0}{0}$.
Nous allons utiliser la règle de L'Hospital, on pose

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2.$$

Alors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \\ \text{et} \quad g'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)}{g(x)}, \\ &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \\ &= \lim_{x \to 0} -\frac{\frac{x}{1+x}}{2x}, \\ &= \lim_{x \to 0} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^{2x}\right)}{x}$. Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée. Nous allons transformer le numérateur :

$$\begin{aligned}\ln\left(1+e^{2x}\right) &= \ln\left(e^{2x}\left(e^{-2x}+1\right)\right),\\ &= \ln\left(e^{2x}\right)+\ln\left(e^{-2x}+1\right),\\ &= 2x+\ln\left(e^{-2x}+1\right).\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x} &= \frac{2x+\ln(e^{-2x}+1)}{x},\\ &= 2+\frac{\ln(e^{-2x}+1)}{x}.\end{aligned}$$

$\ln(e^{-2x}+1)\longrightarrow 0$ lorsque x tend vers $+\infty$,
par conséquent $\frac{\ln\left(e^{-2x}+1\right)}{x}=\ln(e^{-2x}+1)\,\frac{1}{x}\longrightarrow 0$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Alors,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{\ln(e^{-2x}+1)}{x}\right),\\ &= 2+0=2\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x}=2.$$

Exercice 3.3 *Soit $f_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{\sqrt{x^2}}{x} & si \quad x\neq 0,\\ 0 & si \quad x=0.\end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

Solution

Notons déjà que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ il reste à étudier la continuité en 0.

D'autre part $\sqrt{x^2} = |x|$, nous allons donc distinguer deux cas $x < 0$ et $x > 0$.

• Si $x < 0$ alors,

$$f(x) = x + \frac{-x}{x} = x - 1,$$

donc,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

• Si $x > 0$ alors,

$$f(x) = x + \frac{x}{x} = x + 1,$$

donc,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Par conséquent

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Ce qui montre que f n'est pas continue en 0.

Exercice 3.4 *Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :*

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n) + x - 1.$$

1. *Montrer qu'il existe $c_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.*
2. *Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.*

Solution

1. <u>Remarque</u>

Si l'énoncé avait demandé « montrer qu'il existe un unique $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$, on aurait étudier la fonction f_n sur $[0,1]$ en espérant pouvoir montrer que cette fonction est une bijection et que $f_n(0)$ et $f_n(1)$ soient de signe distincts, mais ce n'est pas le cas. L'autre théorème qui permet ce genre de résultat (sans l'unicité) est le théorème des valeurs intermédiaires.

f_n est une fonction continue sur $[0,1]$ et

$$f_n(0) = -1 < 0, \quad \text{et} \quad f_n(1) = \ln 2 > 0,$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c_n \in [0,1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.

2. Alors là, il faut calculer la dérivée de f_n, (car, évidemment f_n est dérivable).

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} + 1, \\ &= \frac{nx^{n-1} + 1 + x^n}{1+x^n} > 0. \end{aligned}$$

3.4.2 Continuité et dérivabilité

Exercice 3.5 *Les fonctions f, g, h et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par :*

1. $f(x) = x|x|$, 2. $h(x) = |x|\sin x$, 3. $\varphi(x) = \ln(1+|x|)$, 4. $g(x) = x^{\frac{3}{5}}$,

sont-elles dérivables en 0 ?

Solution

Par, taux de variation.

1.

$$f(x) = x|x|, \quad f(0) = 0.$$

On a,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x|x|}{x}=|x|.$$

Alors,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}|x|=0.$$

Par conséquent f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

2.

$$h(x)=|x|\sin x,\quad h(0)=0.$$

On a,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{|x|\sin x}{x}$$

Pour $x\neq 0$, $\frac{|x|}{x}=\pm 1$, cette expression est bornée et $\sin x\to 0$ lorsque $x\to 0$, donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=0.$$

Par conséquent h est dérivable en 0 et $h'(0)=0$.

3.

$$\varphi(x)=\ln(1+|x|),\quad \varphi(0)=0.$$

On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\ln(1+|x|)}{x}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\ln(1+|x|)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\ln(1-x)}{x}=-1.\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+|x|)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.\end{cases}$$

Ces deux limites sont distinctes donc φ n'est pas dérivable.

4.

$$g(x) = x^{\frac{3}{5}}, \quad g'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}.$$

On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x^{-\frac{2}{5}}.$$

La limite est infinie donc g n'est pas dérivable en 0.

Remarque : Le seul cas où on ne peut pas conclure c'est quand la dérivée de la fonction n'admet pas de limite, auquel cas il se peut que le taux de variation admet une limite.

Exercice 3.6 *Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & si \quad x \leq 0, \\ \frac{1}{1+x} & si \quad x > 0. \end{cases}$$

1. *Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.*

Solution

1.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} ax + b = b.$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Et

$$f(0) = b$$

Alors, la condition pour que f soit continue en 0 est :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0),$$

c-à-d,

$$b = 1.$$

Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = 1$.

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{ax+1-1}{x} = a \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{x} = -1. \end{cases}$$

Alors, $f'_g(0) = f'_d(0) \Longrightarrow a = -1$.

Si, $b = 1$ et $a = -1$, f est dérivable en 0.

Finalement, pour $b = 1$ et $a = -1$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.7 *Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0, \\ x + \frac{x\ln x}{1-x} & si \quad 0 < x < 1, \\ 0 & si \quad x = 1. \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue sur $[0,1]$.*

2. *Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ telle que $f'(c) = 0$. (on ne demande pas la valeur de c).*

Solution

Si, $0 < x < 1$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left(x + \frac{x\ln x}{1-x}\right) = 0 = f(0). \\ & \text{car } \left(\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\right) \end{aligned}$$

Alors, f est continue en 0.

Et,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x + \frac{x\ln x}{1-x}\right),$$

on pose $t = 1 - x$, c'est mieux que $t = x - 1$, parce qu'alors $t \to 0^+$ lorsque $x \to 1^-$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{t \to 0^+} \left(1 - t + (1 - t)\frac{\ln(1 - t)}{t}\right) = 1 - 1 = 0. \\
&\text{car } \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 - t)}{t} = -1\right)
\end{aligned}$$

Alors, f est continue en 1.

Comme f est continue sur $]0, 1[$ et continue en 0 et en 1, alors f est continue sur $[0, 1]$.

2. f ainsi prolongée est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, de plus $f(0) = f(1)$.

En appliquant le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$f'(c) = 0.$$

Exercice 3.8 *Soit* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *une fonction continue telle que* $f(0) = f(1)$.

Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *telle que*

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right).$$

Solution

Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ défini par

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

On a

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(1\right), \\
&= f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(0\right), \\
&= -\left(f\left(0\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right), \\
&= -g\left(0\right).
\end{aligned}$$

La fonction g est continue, $g\left(0\right)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signes opposés, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ telle que

$$g\left(c\right)=0,$$

c'est-à-dire, tel que

$$f\left(c\right)-f\left(c+\frac{1}{2}\right)=0,$$

et

$$f\left(c\right)=f\left(c+\frac{1}{2}\right).$$

Chapitre 4

Fonctions élémentaires

4.1 Fonction logarithme népérien

Définition 4.1 *La fonction logarithme népérien notée* ln, *est la primitive sur* $]0,+\infty[$ *de la fonction* $x \longmapsto \frac{1}{x}$, *qui s'annule pour* $x = 1$:

$$\textit{Soit pour } \; x \in \left]0,+\infty\right[, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt,$$

$$\textit{et} \quad \ln 1 = 0.$$

Propriétés

• La fonction logarithme est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0,$$

• Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I, on a $\forall x \in I$

$$[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

• La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned}
\forall x &> 0,\ \forall x' > 0, \quad \ln xx' = \ln x + \ln x'. \\
\forall x &> 0, \qquad\qquad\quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x. \\
\forall x &> 0, \forall x' > 0, \quad \ln \frac{x}{x'} = \ln x - \ln x'. \\
\forall x &> 0, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad \ln (x^r) = r \ln x.
\end{aligned}$$

• La fonction logarithme est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]-\infty,+\infty[$, on a donc :

$$(\ln x_1 = \ln x_2) \Longleftrightarrow (x_1 = x_2), \quad \forall x_1 > 0 \text{ et } \forall x_2 > 0.$$

4.2 Fonction exponentielle

Définition 4.2 (*Définition du nombre e*)

La fonction logarithme étant une bijection de $]0, +\infty[$ *vers* $]-\infty, +\infty[$, *il existe un nombre unique noté e tel que* $\ln e = 1$.

La valeur décimale approchée de e *à* 10^{-5} *après par défaut est* $2,71828$.

Définition 4.3 (*Fonction exponentielle*)

La fonction logarithme étant une bijection de $]0, +\infty[$ *vers* $]-\infty, +\infty[$, *elle admet une fonction réciproque appelée exponentielle et notée* exp $($*ou* $x \longmapsto e^x)$,

$$\begin{matrix} y = e^x, \\ x \in \left]-\infty, +\infty\right[\end{matrix} \iff \begin{matrix} x = \ln y, \\ y \in \left]0, +\infty\right[\end{matrix}$$

Propriétés

$$e^0 = 1.$$

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[, \quad e^{\ln x} = x.$$

$$\forall x \in \left]-\infty, +\infty\right[, \quad \ln(e^x) = x, \quad e^x > 0.$$

- La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \left]-\infty, +\infty\right[, \quad (e^x)' = e^x.$$

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, on a

$$\forall x \in I, \quad \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}.$$

<u>*Formules d'addition :*</u>

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{x+x'} &= e^x e^{x'}, \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \\ \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x &= +\infty, \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0. \end{aligned}$$

En repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction exponentielle est symétrique de celle de le fonction logarithme par rapport à la première bissectrice.

4.3 Fonction logarithme et exponentielle de base a

Théorème 4.1 *(logarithme de base a)*

Soit $a \in \left]0, +\infty\right[- \{1\}$, *on appelle fonction logarithme de base a et on note* $\log_a$ *la fonction définie par*

$$\forall x > 0, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

En particulier le logarithme népérien est le logarithme en base e.

Le logarithme de base 10 est appelé logarithme décimal et noté $\log$.

Propriétés

• La fonction logarithme de base a est continue et strictement monotone sur $\left]0, +\infty\right[$,

$$\log_a 1 = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0, \quad \log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad \forall x \in \left]0, +\infty\right[.$$

• $\forall x > 0, \forall x' > 0$,

$$\begin{aligned} \log_a xx' &= \log_a x + \log_a x', \\ \log_a \frac{x}{x'} &= \log_a x - \log_a x'. \end{aligned}$$

• $\forall x > 0$, $\forall r \in \mathbb{Q}$,

$$\log_a (x^r) = r \log_a x.$$

4.3.1 Exponentielle de base a

$a \in (]0, +\infty[- \{1\})$, la fonction $\log_a$ est continue, strictement monotone sur $]0, +\infty[$. elle admet donc une fonction réciproque appelée exponentielle de base a et notée : $\exp_a$ ou $x \longmapsto a^x$. On a,

$$\begin{pmatrix} y = a^x, \\ x \in]-\infty, +\infty[\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x = \log_a y, \\ \text{y} \in]0, +\infty[\end{pmatrix},$$

ou encore

$$x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a} \quad \text{et} \quad \ln y = x \ln a,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = a^x = e^{x \ln a},$$

4.4 Fonction puissance

Soit $s \in \mathbb{R}$, on appelle *fonction puissance d'exposant* s la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x \longmapsto x^s = e^{s \ln x}.$$

La fonction puissance est continue sur $]0, +\infty[$.

Propriétés

$\forall x > 0$, $\forall y > 0$, $\forall s, s' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^0 &= 1, \\ x^s x^{s'} &= x^{s+s'}, \\ x^{-s} &= \frac{1}{x^s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^s y^s &= (xy)^s, \\ \ln(x^s) &= s \ln x, \\ (x^s)' &= s x^{s-1}. \end{aligned}$$

4.5 Croissance comparée des fonctions exponentielle, logarithme et puissance

Pour tout s,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^s} = +\infty.$$

Si $s > 0$,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0, \qquad \lim_{x \longrightarrow 0^+} x^s \ln x = 0.$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

4.5.1 Fonction puissance généralisée

Si u et v sont deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$, avec $\forall x \in A$, $u(x) > 0$,

$$[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}.$$

4.6 Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 4.4 *La fonction sinus est continue strictement croissante sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

C'est donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1, 1]$.

On appelle la fonction Arcsinus et on note $x \longmapsto Arc\sin x$, *la bijection réciproque :*

$$\begin{array}{c} y = Arc\sin x, \\ x \in [-1,1]. \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = \sin y, \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{array}$$

La fonction Arcsinus est impaire, continue et strictement croissante sur $[-1,1]$.

La fonction Arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée :

$$(Arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition 4.5 *La fonction cosinus est continue strictement décroissante sur* $[0,\pi]$.

C'est donc une bijection de $[0,\pi]$ *sur* $[-1,1]$.

On appelle la fonction Arccosinus et on note $x \longmapsto Arc\cos x$, *la bijection réciproque :*

$$\begin{array}{c} y = Arc\cos x, \\ x \in [-1,1]. \end{array} \iff \begin{array}{c} x = \cos y, \\ y \in [0,\pi]. \end{array}$$

La fonction Arccosinus est continue strictement décroissante de $[-1,1]$ *sur* $[0,\pi]$.

La fonction Arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée :

$$(Arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Définition 4.6 *La fonction tangente est continue strictement croissante sur* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *à valeur dans tout* $\mathbb{R}$

Elle admet donc une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}$, *appelée Arctangente (notée :* $Arc\tan x$ *) et on a :*

$$\begin{array}{c} y = Arc\tan x, \\ x \in \mathbb{R}. \end{array} \iff \begin{array}{c} x = \tan y, \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]. \end{array}$$

La fonction Arctangente est impaire, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction Arctangente est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$(Arc\tan x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Cette expression a un rôle important en calcul d'intégrales.

Propriétés (Fonctions trigonométriques)

$*$ Pour tout réel x, on a

$$-1 < \cos x < 1; \qquad -1 < \sin x < 1; \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$*$ Pour tout réel x, on a

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

on dit que les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période 2π.

$*$ Pour tout réel x, la fonction cosinus est paire,

$$cos(-x) = \cos x,$$

la fonction sinus est impaire,

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

$*$ Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x, & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x,\\
\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x,\\
\sin(x + \pi) &= -\sin x, & \cos(x + \pi) &= -\cos x,\\
\sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x.
\end{aligned}$$

$*$ *Formules d'additon*

$$\begin{aligned}
\cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \\
\sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b.
\end{aligned}$$

$*$ *Formules de duplication*

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a, \\
&= 2\cos^2 a - 1, \\
&= 1 - 2\sin^2 a.
\end{aligned}$$

Et

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$*$ *Limites*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

4.7 Fonctions hyperboliques

On définit pour tout réel x, les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique par :

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Propriétés

La fonction cosinus hyperbolique est une fonction paire et continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction sinus hyperbolique est une fonction impaire et continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction tangente hyperbolique est une fonction impaire et continue sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$chx + shx = e^x, \qquad chx - shx = e^{-x},$$

$$ch^2x - sh^2x = 1, \qquad 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}.$$

4.7.1 Dérivées

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(shx)' = chx,$$

$$(chx)' = shx,$$

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x.$$

Remarque 4.1 *On définit aussi la fonction cotangente hyperbolique par :*

$$\coth x = \frac{1}{thx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

4.8 Fonctions hyperboliques inverses

4.8.1 Fonction Argument sinus hyperbolique

La fonction sh est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

La bijection réciproque est appelée fonction argument sinus hyperbolique et notée $Argsh$,

$$\begin{array}{c} y = Argshx, \\ x \in \mathbb{R}. \end{array} \iff \begin{array}{c} x = shy, \\ y \in \mathbb{R} \end{array}$$

La fonction $Argsh$ est impaire, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction $Argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$(Argshx)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

La fonction $Argsh$ s'exprime à l'aide de la fonction logarithme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Argshx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

En effet,

puisque $chy > 0$, $chy = \sqrt{sh^2y + 1} = \sqrt{x^2+1}$,

et donc, $e^y = chy + shy = \sqrt{x^2+1} + x$.

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Argshx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

4.8.2 Fonction Argument cosinus hyperbolique

La fonction ch est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. C'est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

La bijection réciproque est appelée fonction argument cosinus hyperbolique et notée $Argch$,

$$\begin{matrix} y = Argchx, \\ x \in [1, +\infty[\end{matrix} \iff \begin{matrix} x = chy, \\ y \in [0, +\infty[\end{matrix}$$

La fonction $Argch$ est continue, impaire et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

La fonction $Argch$ est dérivable sur $]1, +\infty[$,

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad (Argchx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

La fonction $Argch$ s'exprime à l'aide de la fonction logarithme

$$\forall x \in [1, +\infty[\,, \quad Argchx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

En effet,

puisque $shy > 0$, $\forall y > 0$, donc

$$shy = \sqrt{ch^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1},$$

et

$$e^y = chy + shy = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

D'où, $\forall x \in [1, +\infty[\,,$

$$Argchx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

4.8.3 Fonction Argument tangente hyperbolique

La fonction th est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[\,.$

La bijection réciproque est appelée fonction argument tangente hyperbolique et notée $Argth$,

$$\begin{matrix} y = Argthx, \\ x \in \,]-1, 1[\end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} x = thy, \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

La fonction $Argth$ est continue, impaire et strictement croissante sur $]-1, 1[\,.$

La fonction $Argth$ est dérivable sur $]-1, 1[\,,$

$$\forall x \in \,]-1, 1[\,, \quad (Argthx)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

La fonction $Argth$ s'exprime à l'aide de la fonction logarithme

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad Argthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

En effet,

$$x = thy = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}, \text{ et}$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x},$$

et

$$y = Argthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

4.9 Exercices résolus

Exercice 4.1 *Déterminer la limite quand x tend vers 0^+, $(avec\ x \neq 0)$ de*

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}.$$

Solution

Il s'agit d'une forme indéterminée. On pose $t = \frac{1}{x}$, si $x \to 0^+$ alors $t \to +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{t\to+\infty} t^3 e^{-t^2} = 0.$$

Exercice 4.2 *Soient f et g les fonctions définies par*

$$f(x) = e^{-x} + \left(1-e^{-x}\right)\ln\left(1-e^{-x}\right) \quad et \quad g(x) = \ln\left(1-e^{-x}\right)e^x.$$

1. *Montrer que f et g sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$.*
2. *Calculer les variations de f et en déduire que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.*
3. *Montrer que $g'(x) = \frac{e^x}{1-e^{-x}} f(x)$.*

4. *En déduire les variations de* g.

Solution

1.

$$x > 0 \Longleftrightarrow -x < 0 \Longleftrightarrow e^{-x} < 1 \Longleftrightarrow 1 - e^{-x} > 0.$$

Donc f et g sont définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} + e^{-x} \ln\left(1 - e^{-x}\right) + \left(1 - e^{-x}\right) \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}, \\ &= -e^{-x} + e^{-x} \ln\left(1 - e^{-x}\right) + e^{-x}, \\ &= e^{-x} \ln\left(1 - e^{-x}\right). \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(1 - e^{-x})$, comme $e^{-x} > 0$, on a $1 - e^{-x} < 1$, donc $\ln(1 - e^{-x}) < 0$, on en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

Pour montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ il faut et il suffit de montrer que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est positive, comme la limite de e^{-x} en $+\infty$ est nulle, la limite de $f(x)$ est $0 + 1 \times \ln(1) = 0 \geq 0$, ce qui achève la démonstration.

3.

$$g(x) = \ln\left(1 - e^{-x}\right) e^{x}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \times e^{x} + \ln\left(1 - e^{-x}\right) e^{x} \\ &= \frac{e^{x}}{1 - e^{-x}} \left(e^{-x} + \left(1 - e^{-x}\right) \ln\left(1 - e^{-x}\right)\right) \\ &= \frac{e^{x}}{1 - e^{-x}} f(x). \end{aligned}$$

4. Donc, pour tout $x > 0$, $g'(x) > 0$ donc, g est croissante.

$g'(x) > 0$, car $1 - e^{-x} > 0$ et $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Exercice 4.3 *Calculer les limites suivantes :*

$$1.\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(ch^3(x) - sh^3(x)\right), \qquad 2.\ \lim_{x\to+\infty}(x - \ln chx).$$

Solution

1.

$$\begin{aligned}
e^{-x}\left(ch^3(x) - sh^3(x)\right) &= e^{-x}\left[\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3\right],\\
&= \frac{e^{-x}}{8}\left[e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x} - \left(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x}\right)\right],\\
&= \frac{e^{-x}}{8}\left(6e^x+2e^{-3x}\right) = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4x}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(ch^3(x) - sh^3(x)\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4x},\\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
x - \ln chx &= x - \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = x - \ln e^x\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right),\\
&= x - \ln e^x - \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right),\\
&= -\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(ch^3(x) - sh^3(x)\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left[-\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right],\\
&= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.
\end{aligned}$$

Exercice 4.4 1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$

$$shx - 3chx + 3 = 0.$$

Solution

1.

$$\begin{aligned} shx - 3chx + 3 &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} - 3\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, \\ &= \frac{1}{2e^x}\left[\left(e^{2x} - 1\right) - 3\left(e^{2x} + 1\right) + 6e^x\right], \\ &= \frac{1}{2e^x}\left(-2e^{2x} + 6e^x - 4\right), \\ &= -\frac{1}{e^x}\left(e^{2x} - 3e^x - +2\right). \end{aligned}$$

Les racines de $e^{2x} - 3e^x - +2 = 0$ sont

$$e^x = 1, \quad \text{et} \quad e^x = 2.$$

Donc

$$\begin{aligned} shx - 3chx + 3 &= -\frac{1}{e^x}\left(e^x - 1\right)\left(e^x - 2\right), \\ &= e^{-x}\left(e^x - 1\right)\left(e^x - 2\right). \end{aligned}$$

Donc :

$$shx - 3chx + 3 = 0 \Longleftrightarrow e^{-x}\left(e^x - 1\right)\left(e^x - 2\right) = 0, ...$$

Exercice 4.5 1. *Montrer que,*

$$0 < \arccos\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}.$$

2. *Résoudre*

$$\arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4}.$$

Solution

Comme arccos est décroissante

$$1 > \frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Et

$$\arccos 1 < \arccos \frac{3}{4} < \arccos \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ce qui équivaut à

$$0 < \arccos \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}.$$

2. D'après la première question

$$0 < 2 \arccos \frac{3}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$2 \arccos \frac{3}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Et bien sûr

$$\arccos x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

On en déduit que

$$\arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4} \Longleftrightarrow x = \cos\left(2 \arccos \frac{3}{4}\right),$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad x = 2\cos^2\left(\arccos \frac{3}{4}\right) - 1, \\ &\qquad \big(\text{car,} \quad \cos(2a) = 2\cos^2 a - 1\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{8} - 1, \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{1}{8}.$$

Exercice 4.6 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{chx + shx + 1}{chx - 1}.$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.*

Solution

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si

$$chx - 1 \neq 0,$$

autrement dit si et seulement si

$$x \neq 0.$$

$$D_f = \mathbb{R}^*.$$

2. On pose

$$t = e^x, \quad \lim_{x\to-\infty} t = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{chx + shx + 1}{chx - 1} = \frac{\frac{t+\frac{1}{t}}{2} + \frac{t-\frac{1}{t}}{2} + 1}{\frac{t+\frac{1}{t}}{2} - 1}, \\ &= \frac{2t^2 + 2t}{t^2 - 2t + 1} = \frac{2t(t+1)}{(t-1)^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2 + 2t}{t^2 - 2t + 1} = 0.$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t^2+2t}{t^2-2t+1} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2}{t^2} = 2.$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{chx+shx+1}{chx-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Chapitre 5

Développements limités

5.1 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Définition 5.1 *Soient f et g deux fonctions numériques définies dans V un voisinage d'un point a. on dit que f est* ***dominée par*** *g dans V et l'on note*

$$f = O(g)$$

(lire f est égale à grand O de g), si l'on a :

$$\exists M > 0,\ \exists \delta \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in V,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M\ \ |g(x)|\,.$$

Remarque 5.1

1- On dit aussi que g domine f dans V.

2- Si g ne s'annule pas dans V, alors dire que $f = O(g)$ équivaut à dire que $\frac{f}{g}$ est bornée dans V.

Définition 5.2 *Soient f et g deux fonctions numériques définies dans V un voisinage d'un point a. on dit que f est* ***négligeable devant*** *g dans V et l'on note*

$$f = o(g)$$

(lire f est égale à petit o de g), si l'on a :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in V,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon\ \ |g(x)|\,.$$

Remarque 5.2 *Si g ne s'annule pas dans V, alors la relation $f = o(g)$ est équivaute à $\frac{f}{g}$ tend vers 0 quand x tend vers a.*

Définition 5.3 *Soient f et g deux fonctions numériques définies dans V un voisinage d'un point a. on dit que f est* ***équivalente à*** *g dans V et l'on note*

$$f \backsim g \quad si \quad f - g = o(g)\,,$$

autrement dit

$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists \delta \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in V,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g(x)| < \varepsilon\ \ |g(x)|.$$

Remarque 5.3 *Si g ne s'annule pas dans V, alors la relation $f \backsim (g)$ signifie que $\frac{f}{g}$ tend vers 1 quand x tend vers a.*

Exemple 5.1 *Quelques classiques exemples de fonctions équivalentes, au voisinage de zéro.*

$$\begin{array}{lll}
\sin x \backsim x, & shx \backsim x, & e^x - 1 \backsim x. \\
Arc\sin x \backsim x, & Arcshx \backsim x, & \ln(1+x) \backsim x. \\
\tan x \backsim x, & thx \backsim x, & (1+x)^n - 1 \backsim nx, \quad n \neq 0. \\
Arc\tan x \backsim x, & Arcthx \backsim x, & a^x - 1 \backsim x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1.
\end{array}$$

5.2 Développements limités

Définition 5.4 *Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0. On dit que f admet* ***un développement limité à l'ordre* n** *au voisinage de 0, s'il existe un polynôme P de degré inferieur ou égal à n tel que $f(x) - P(x)$ est négligeable devant x^n au voisinage de $0 \Longleftrightarrow f(x) = P(x) + o(x^n)$.*

- Le polynôme P, s'il existe est unique et appelé ***partie régulière*** *du développement limité. Le terme $o(x^n)$ est appelé* ***reste*** *du développement limité.*

Proposition 5.1 *(Unicité)*

Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, alors il est unique

5.2.1 Téchnique de calcul des développements limités

Proposition 5.2 *Soit f une fonction numérique dérivable sur $]-h,h[$, $(h>0)$ et telle que f' admet un dévelappement limité à l'ordre n au voisinage de* 0 :

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n).$$

Alors f admet un dévelappement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 :

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}+o\left(x^{n+1}\right).$$

Proposition 5.3 *Si une fonction numérique f est $(n+1)-fois$ dérivable en 0 et $f^{(n+1)}$ est bornée dans un voisinage de 0, alors f admet un dévelappement limité à l'ordre n au voisinage de 0 donné par la formule de $Maclaurin$ à l'ordre n* :

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+o(x^n).$$

5.2.2 Applications

On donne comme exemples les développements limités suivants (on pourra vérifier en exercice leur exactitude...) à l'ordre $n\in\mathbb{N}^*$ au point 0 ($\alpha\in\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+...+x^n+o(x^n),\\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+...+(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right),\\
tgx &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7...,\\
chx &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+-\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right),\\
shx &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right),\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right),\\
(1+x)^\alpha &= 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right).
\end{aligned}
$$

Exemple 5.2 *Calculer la limite en* 0 *de* $f(x)$ *et donner un équivalent à linfini de* $g(x)$*, où*

$$f(x)=\frac{2\cos x-2}{x^2},\quad et\quad g(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}.$$

Solution :

Pour le calcul de cette limite, on aura besoin du développement limité du cosinus à l'ordre 2 en 0.

On a, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$, et par suite,

$$
\begin{aligned}
\frac{2\cos x-2}{x^2} &= \frac{2\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-2}{x^2}\\
&= \frac{-x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{-1+o(1)}{1}=-1,
\end{aligned}
$$

alors,

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)=-1.$$

Pour l'équivalent, on remarque que

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}} \\ &= e^{-x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} \\ &= e^{-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= e^{-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent en l'infini à

$$e^{-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} \backsim e^{-x+\frac{1}{2}} = e^{-x}\sqrt{e}.$$

5.3 Exercices résolus

Exercice 5.1 *Donner le développement limité à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *pour les fonctions :* $\cos x$, $\sin x$, tgx. *En déduire :*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x-tgx}.$$

Solution

$$\begin{aligned} \cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right), \\ \sin x &= x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right), \\ tgx &= x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x-tgx} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{x-\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)} = \frac{\frac{-1}{3}}{\frac{-1}{3}} = 1.$$

Exercice 5.2 *Déterminer le développement limité au voisinage de* 0 *à l'ordre* n *des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}, \quad n = 2.$
2. $g(x) = \frac{\sin x}{1+\ln(1+x)}, \quad n = 3.$
3. $h(x) = e^{\frac{shx}{x}}, \quad n = 1.$
4. $k(x) = \sin x^2, \quad n = 6.$

Slution

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x}{(1+x)^3} = e^x (1+x)^{-3}, \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} o\left(x^2\right)\right)\left(1 - 3x + \frac{(-3)(-4)}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right), \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} o\left(x^2\right)\right)\left(1 - 3x + 6x^2 + o\left(x^2\right)\right), \\ &= 1 + (-3+1)x + \left(6 - 3 + \frac{1}{2}\right)x^2 + o\left(x^2\right), \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

2.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sin x}{1 + \ln(1+x)}, \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \end{aligned}$$

En utilisant la division euclidienne, on obtient :

$$g(x) = x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o\left(x^3\right).$$

3.

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{\frac{shx}{x}} = e^{\frac{x+o(x)}{x}}, \\ &= ee^{o(x)} = e^{(1+o(x))}, \end{aligned}$$

$$h(x) = e + o(x).$$

4.

$$\begin{aligned} k(x) &= \sin x^2 \\ &= x^2 - \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right). \end{aligned}$$

Exercice 5.3 1. *Calculer un développement limité à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *de :*

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

2. *En déduire qu'on peut prolonger cette fonction par continuité en* $x = 0$ *et que la fonction ainsi prolongée admet une dérivée première en* $x = 0$.

3. *Calculer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage* $x = 0$ *de :*

$$g(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Slution

1. Comme on va diviser par x, il faut faire un *d.l.* de $\sin x$ à l'ordre 5.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{x}, \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)}{x}, \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

2.
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f\left(x\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right)\right) = 1.$$

On peut prolonger f par continuité en posant $f\left(0\right) = 1$, et on écrit :

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

f admet un *d.l.* à l'ordre 1, donc $f'\left(0\right)$ existe.

On rappelle que l'on ne peut pas conclure des résultats identiques sur les dérivées d'ordre supérieures si on n'a pas montré auparavant que la fonction admettait une dérivée à l'ordre voulue.

3.
$$g\left(x\right) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right)\right).$$

On pose
$$y = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right),$$

on obtient :
$$g\left(x\right) = \ln\left(1 + y\right) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o\left(x^4\right).$$

Avec :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right), \\ y^2 &= \frac{x^4}{36} + o\left(x^4\right), \\ y^3 &= y^4 = o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} g(x) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o\left(x^4\right), \\ &= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{\left(\frac{x^4}{36}\right)}{2} + o\left(x^4\right), \\ &= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{72} + o\left(x^4\right), \end{aligned}$$

$$g(x) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o\left(x^4\right).$$

Exercice 5.4 *Justifier l'existence et calculer le développement limité à l'ordre* 4 *relatif à* 0*, de l'application suivante :*

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Solution

$f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0, donc f est prolongeable par continuité en 0.

x et $\sin x$ sont $C^{+\infty}$, donc ces fonctions admettent des développements limité à n'importe quelle ordre, leur quotient aussi.

Il va y avoir une simplification par x, donc il faut faire un développement limité du dénominateur à l'ordre 5. Le numérateur x est un polynôme de degré inférieur à 5, son développement limité est lui-même.

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)}, \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right)}. \end{aligned}$$

Là, il y a deux techniques, soit la division suivant les puissances croissantes, ou utiliser la formule $\frac{1}{1+y}$, où $y = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right)$.

Don, on va obtenir :

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Exercice 5.5 *Déterminer le développement limité en $x = a$ à l'ordre n de*

$f(x) = e^{\cos x}, \quad a = \frac{\pi}{2}, \ n = 2.$

Solution

$f(x) = e^{\cos x}, \quad a = \frac{\pi}{2}, \ n = 2.$

On pose

$$y = x - \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = y + \frac{\pi}{2}.$$

Et

$$\cos x = \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin y.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\cos x}, \\ &= e^{-\sin y} = e^{-y+o\left(y^2\right)}. \end{aligned}$$

Et on sait que

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o\left(t^2\right).$$

Posons

$$t =^{-y+o\left(y^2\right)},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\sin y} = e^{-y+o\left(y^2\right)} \\ &= 1 + \left(-y + o\left(y^2\right)\right) + \frac{y^2 + o\left(y^2\right)}{2!} + o\left(y^2\right), \\ &= 1 - y + \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right). \end{aligned}$$

Alors,

$$f(x) = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right).$$

Chapitre 6

Algèbre linéaire

6.1 Lois de composition interne

Définition 6.1 *Soit E un ensemble. Une loi de composition interne sur E est une application de $E \times E$ dans E. Si on la note*

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E, \\ (a,b) &\mapsto a * b, \end{aligned}$$

on dit que $a * b$ est le composé de a et b pour la loi $*$, i.e,

$$\forall\,(a,b) \in E \times E,\ a * b \in E.$$

Exemple 6.1 *L'addition sur $\mathbb{N}$ est une loi de composition interne, c-à-d :*

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n + m \in \mathbb{N}.$$

6.1.1 Propriété des lois internes

Définition 6.2 *Soit $*$ une loi interne sur un ensemble E.*

1− *(**commutativité**) la loi est commutative si pour tous les éléments x, y de E, on a*

$$x * y = y * x.$$

2− *(**Associativité**) la loi est associative si pour tous les éléments x, y, z de E, on a*

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

3− *(**Elément neutre**) Un élément e de E est un élément neutre pour la loi $*$ si pour tout élément a de E, on a*

$$a * e = e * a = a.$$

4− (***Elément symétrique***) *On suppose qu'il existe un élément neutre e de* E, *on dit qu'un élément a de* E *admet un symétrique* b *pour la loi* $*$ *si l'on a*

$$a * b = b * a = e.$$

Proposition 6.1 *Soit* $*$ *une loi interne sur un ensemble* E*, si* $*$ *possède un élément neutre, il est unique.*

Définition 6.3 *Soit* E *un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées* $+$ *et* $*$*. On dit que* $*$ *est distributive par rapport à* $+$ *si pour tous les éléments* x, y, z *de* E*, on a*

$$\begin{aligned} x * (y + z) &= (x * y) + (x * z) \\ \text{et} \quad (x + y) * z &= (x * z) + (y * z). \end{aligned}$$

Définition 6.4 *Soit* E *un ensemble muni d'une loi de composition interne* $*$*. On dit que* $(E, *)$ *est* ***un groupe*** *si la loi satisfait aux trois conditions suivantes :*

1− *Elle est associative.*

2− *Elle admet un élément neutre.*

3− *Chaque élément de* E *admet un symétrique pour* $*$.

Si de plus, la loi est commutative, on dit que le groupe est commutatif ou abélien (du nom du mathématicien Abel).

Définition 6.5 *Soit* E *un ensemble muni de deux lois de composition internes que nous notrons* $+$ *et* $*$*. On dit que* $(E, +, *)$ *est un anneau si les conditions suivantes sont remplies :*

1− $(E, +)$ *est un groupe commutatif.*

2− *La loi* $*$ *est associative.*

3− *La loi* $*$ *est distributive par rapport à la loi* $+$.

Si de plus la loi $*$ est commutative, on dit que l'anneau est commutatif ; si elle admet un élément neutre, on dit que l'anneau est unitaire.

On note en général 0 *l'élément neutre de la loi* $+$ *et* 1 *celui de la loi* $*$ *l'orsqu'il existe.*

Définition 6.6 *Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes toujours notées $+$ et $*$. On dit que $(E,+,*)$ est un corps commutatif si les conditions suivantes sont remplies :*

1− $(E,+,*)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2− Chaque élément de $E\setminus\{0\}$ a un symétrique pour la loi $*$.

Si $(E,+,*)$ est corps commutatif, alors $(E\setminus\{0\},*)$ a une structure de groupe commutatif, dont l'élément neutre est 1.

6.2 Espace vectoriel

E est appelé ensemble dont les éléments sont des vecteurs et K un corps désigne en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 6.7 *E est appelé K-espace vectoriel (ou espace vectoriel sur K) si E est muni d'une loi de comoposition interne notée $+$, et une loi de composition externe :*

$$\begin{array}{ccc} K\times E & \longrightarrow & E, \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x, \end{array}$$

vérifiant :

(1) $(E,+)$ *est un groupe commutatif (abélien).*

(2) $\forall\lambda\in K$, $\forall x\in E$, *on a :* $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

(3) $\forall\lambda\in K$, $\forall x,\ y\in E$, *on a :* $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.

(4) $\forall\lambda,\ \mu\in K$, $\forall x\in E$, *on a :* $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$.

(5) $\forall x\in E$, *on a :* $1x=x$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs ; et les éléments de K sont appelés scalaires.

Proposition 6.2 *Pour tout λ, $\mu \in K$et pour tout x, $y \in E$, on a :*

(1) $\lambda x = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0$.

(2) $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

(3) $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$.

(4) $(-\lambda)(-x) = \lambda x$.

6.3 Sous-espace vectoriel

Définition 6.8 *Soit F un sous-ensemble d'un espace vectoriel E sur K.*

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F possède les propriétés suivantes :

(1) $0 \in F$, $(F \neq \phi)$,

(2) $\forall x$, $y \in E$, $x + y \in F$. *(stabilité de l'addition)* ,

(3) $\forall x \in E$ *et* $\forall \lambda \in K$, $\lambda x \in F$. *(stabilité de la multiplication par un scalaire).*

Corollaire 6.1 *Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble d'e E $(F \subset E)$. Si F vérifie les propriétés* (1) *et* (2) *suivantes alors F est un sous-espace vectoriel de E* :

(1) *F est non vide (F contient l'élément neutre de E).*

(2) $\forall \lambda$, $\mu \in K$, $\forall x$, $y \in E$: $\lambda x + \mu y \in F$.

Proposition 6.3 *Soient E un espace vectoriel et $E_1, ..., E_n$ des sous-espaces vectoriels de E, alors l'intersection $F = \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

6.3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Théorème 6.1 *Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels* (*sev*) *de E. On appelle somme des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 l'ensemble noté* $(F_1 + F_2)$ *défini par :*

$$F_1 + F_2 = \{x + y \ / \ x \in F_1 \ \text{ et } y \in F_2\}.$$

Définition 6.9 (*Somme directe de sous-espaces vectoriels*)

On appelle somme directe la somme notée : $F_1 \oplus F_2$

$$F = F_1 \oplus F_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} F = F_1 + F_2, \\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\}. \end{cases}$$

Propriété

Un élément z de $F_1 + F_2$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'un élélment de F_1 et un élément de F_2 :

$$z = x + y, \text{ avec } x \in F_1 \text{ et } y \in F_2$$

6.3.2 Combinaisons linéaires, familles libres, liées et génératrices

Définition 6.10 *Soit E un $K - ev$ et $\{x_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On appelle combinaison linéaire de la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ l'expression*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \ , \quad où \ \ I = \{1, 2, ..., n\}.$$

Définition 6.11 *On dit que la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est libre (ou linéairement indépendante) si*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E \Longrightarrow \lambda_i = 0, \ \forall i \in I.$$

Définition 6.12 *On dit que la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est liée si elle n'est pas libre :*

$$\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0) \quad tq \ \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E.$$

Définition 6.13 *On appelle $\{x_i\}_{i\in I}$ famille génératrice de E (ou on dit, E est engendré par les vecteurs d'e la famille $\{x_i\}_{i\in I}$) si, tout élément de E est une combinaison linéaire* *des éléments de cette famille :*

$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in K \quad tq \quad x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i.$$

Définition 6.14 *On dit que la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est une base de E si $\{x_i\}_{i\in I}$ est une famille libre et génératrice.*

Remarque 6.1 *La famille $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ avec*

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), e_3 = (0, 0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., n)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$.

Propriétés

- $\{x\}$ est une famille libre $\Longleftrightarrow x \neq 0$.
- Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute famille contenant une famille liée est liée.
- Toute famille $\{x_i\}_{i\in I}$ dont l'un des vecteurs x_i est nul, est liée.

6.3.3 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 6.15 *Soit $S = \{x_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.*

E est un ev de dimension finie si E admet une famille génératrice de cardinal fini.

Théorème 6.2 *Toutes les bases d'un même ev E ont le même cardinal (nombre de vecteurs).*

Ce nombre commun est appelé la dimension de E. On note dimE (nombre des vecteurs de la base).

Définition 6.16 (***Coordonnées d'un vecteurs***)

Soit E un $K-ev$ de dimension n et $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une dase de E

$\left(\textit{c'est-à-dire } \forall x \in E,\ x \textit{ s'écrit de manière unique } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right)$, *les scalaire* $\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_n$ *sont appelés les coordonnées de* x *dans la base* B.

6.3.4 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 6.17 *Soit* $X = \{x_1, ..., x_p\}$. *Le sev* F *des combinaisons linéaires des vecteurs* $x_1, ..., x_p$ *est appelé sous-espace engendré par* X *et se note :*

$$F = VectX = Vect\{x_1, ..., x_p\}.$$

$$F = \left\{ x \in E \ / \ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \ , \ \textit{avec} \quad (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

Définition 6.18 *La dimension de* F *s'appelle le rang de la famille* X *:*

$$\dim F = rgX.$$

Propriété

Soit $X = \{x_1, ..., x_p\}$.

- $rgX \leq p$.
- $rgX = p \Longleftrightarrow X$ est libre.
- On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs si **:**

- en ajoutant à l'un d'eux une combinaison linéaire des autres.

- en multipliant l'un d'eux par un scalaire non nul.

- en changeant l'ordre des vecteurs.

6.3.5 Dimension d'une somme de sev

(Formule de Grassmann)

Proposition 6.4 *Soit E un $K-ev$ de dimension finie et F et G deux sev de E, alors :*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

6.4 Applications linéaires, noyau, image, rang

Définition 6.19 *Soient E et F deux $K-$espaces vectoriels, et soit f.une application de E dans F. On dit que f est linéaire (ou est un morphisme d'espace vectoriel) si :*

(1) $\forall x,\ y \in E$, *on a* $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(2) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E$, *on a* $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Proposition 6.5 *Soit $f : E \longrightarrow F$. L'application f est linéaire si et seulement si,*

$$\forall \lambda,\ \mu \in K \text{ et } \forall x,\ y \in E,\ \text{on a } f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

6.4.1 Applications linéaires particulières

Définition 6.20 (***Formes linéaires***)

On appelle forme linéaire sur un $K-ev$ E, toute application linéaire de E dans K. On note $\mathcal{L}(E,K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

Définition 6.21 (***Endomorphisme***)

On appelle endomorphisme de E, toute application linéaire de E dans lui même. On note $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Proposition 6.6 *Si f et g deux endomorphismes de E, alors fog est aussi un endomorphisme de E.*

Définition 6.22 (***Isomorphisme***)

On appelle isomorphisme d'un $K-ev$ E vers un $K-ev$ F, toute application linéaire bijective de E vers F. On note $Iso(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F.

Proposition 6.7 *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes, alors la composée $gof : E \to G$ est un isomorphisme.*

Proposition 6.8 *Si $f : E \to F$ est un isomorphisme alors son application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme.*

Définition 6.23 (***Automorphisme***)

On appelle automorphisme de E, toute application linéaire bijective de E. On note $GI(E)$ l'ensemble d'automorphismes de E.

Proposition 6.9 *Si f et g sont des automorphismes, alors la composée de g et f est un automorphisme.*

Proposition 6.10 *Si f est un automorphisme alors son application réciproque f^{-1} est un automorphisme.*

6.4.2 Image et noyau d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F

1) On appelle **image** de f et on note $\mathrm{Im}(f)$ le sous-ensemble de F défini par :

$$\mathrm{Im}\, f = \{y \in F \ / \ \exists x \in E,\ f(x) = y\}.$$

2) On appelle **noyau** de f et on note $Ker(f)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$Ker(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0\}.$$

Théorème 6.3

$\mathrm{Im}(f)$*est un sev de F.*

$Ker(f)$ est un sev de E.

Théorème 6.4 *Soit f une application linéaire de E dans F.*

f est injective ssi $Ker\,(f) = \{0_E\}$.

f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.

6.4.3 Rang d'une application linéaire

Définition 6.24 *Le rang d'une application linéaire f est égal à la dimension de $Im(f)$:*

$$rg(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

propriétés

1) on a toujours $rg(f) \leq \dim E$.

2) f est surjective ssi $rg(f) = \dim F$.

3) f est injective ssi $rg(f) = \dim E$.

4) f est bijective ssi $rg(f) = \dim E = \dim F$

Remarque 6.2 *Si f est un endomorphisme de E, alors :*

$$f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \text{ surjective} \Longleftrightarrow f \text{ bijective}$$

Théorème 6.5 *Soit f une application linéaire de E dans F avec $\dim E = n$, alors*

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(Kerf) = \dim E.$$

Remarque 6.3 *ce n'est vrai qu'en dimension finie !*

6.5 Exercices résolus

Exercice 6.1 *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels ?*

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 3z = 0\}$,

2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 3z = 2\}$,
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y = 2z = 4t\}$,
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$,
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\}$,
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$,
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 5x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$.

Solution

1.

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 3z = 0\right\}.$$

• $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, $0 + 0 + 3 \times 0 = 0$, $\Longrightarrow (0, 0, 0) \in E_1 \Longrightarrow$

$$E_1 \neq \phi$$

• Soient $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ éléments de E_1. Alors,

$$x + y + 3z = 0, \quad x' + y' + 3z' = 0.$$

On a,

$$\begin{aligned} X + X' &= (x, y, z) + (x', y', z'), \\ &= (x + x', y + y', z + z') \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Et, $x + x' + y + y' + 3(z + z') = (x + y + 3z) + (x' + y' + 3z') = 0 + 0 = 0$.

Donc,

$$X + X' \in E_1.$$

• De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in \mathbb{R}^3.$$

Et, $\lambda x+\lambda y+3\lambda z=\lambda\left(x+y+3z\right)=\lambda\times 0=0$.

Alors,

$$\lambda X\in E_1.$$

E_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$E_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+3z=2\right\}.$$

E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car $0+0+3\times 0\neq 2$, donc : $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$, n'est pas élément de E_2.

3. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

4. E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, car il n'est pas stable par addition. En effet,

$$X=(1,0)\ \text{ et } Y=(0,1),$$

sont deux éléments de E_4, car :

$$1\times 0=0=0\times 1,$$

mais,

$$X+Y=(1,1),$$

n'est pas élément de E_4, car :

$$xy=1\times 1=1\neq 0.$$

5. Les éléments $(1,1)$ et $(-1,1)$ sont éléments de E_5. Si on effectue leur somme, on trouve $(0,2)$ qui n'est pas élément de E_5, car : $x^2=0\neq y=2$.

E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ est une droite passant par $(0,0)$, ou $\mathbb{R}^2$ lui-même, ou encore le singleton $\{(0,0)\}$.

E_5 est une parabole et n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

6. E_6 est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

7. On pose

$$E_7 = F \cup G.$$

Cette fois, aucun théorème du cours ne dit qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels reste un sous-espace vectoriel.

Ici, prenons $(5,0,5) \in F \subset F \cup G$ et $(1,1,0) \in G \subset F \cup G$, alors

$$(5,0,5) + (1,1,0) = (6,1,2) \notin F \cup G = E_7,$$

Ainsi, $E_7 = F \cup G$ n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement, on prouve qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

Exercice 6.2

1) *On considère l'ensemble* $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z = t = 0\}$.

Vérifier que E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$. *Donner une base et la dimension de* E.

2) *On considère le sous-espace vectoriel* F *de* $\mathbb{R}^4$ *défini par*

$F = \{(a, a+b, -a+c, c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Donner une base et la dimension de F.

3) *Montrer que* E *et* F *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^4$.

Solution

1) $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z = t = 0\}$.

$i)$ <u>E non vide</u>

Soit $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$, on a $0 + 0 = 0 = 0$.

Donc, $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \in E$. Alors

$$E \neq \phi.$$

$ii)$ <u>E stable par combinaison linéaire</u>

Soient $u = (x,y,z,t) \in E$, alors $x+y=z=t=0$.

$v = (x',y',z',t') \in E$ et $(\alpha,\beta) \in E$, alors $x'+y'=z'=t'=0$.

Alors,

$$\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t') \in \mathbb{R}^4.$$

Et

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' &= \alpha\,(x+y) + \beta\,(x'+y')\,, \\ &= \alpha z + \beta z' = \alpha t + \beta t' = 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\alpha u + \beta v \in E.$$

Alors, on peut conclure que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y=z=t=0\}, \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | y=-x \text{ et } z=t=0\}, \\ &= \{(x,-x,0,0)\}, \\ &= \{x(1,-1,0,0)\}. \end{aligned}$$

Donc,

$$E = \{(1,-1,0,0)\},$$

autrement dit $\{(1,-1,0,0)\}$ est une famille génératrice de E.

Par ailleurs, la famille $\{(1,-1,0,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$, car elle est composée d'un seul vecteur non nul de $\mathbb{R}^4$.

Cela signifie que $\{(1,-1,0,0)\}$ est une base de E et que

$$\dim E = 1.$$

2)

$$\begin{aligned} F &= \{(a, a+b, -a+c, c) | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}, \\ &= \{(a,a,-a,0) + (0,b,0,0) + (0,0,c,c) \,|(a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}, \\ &= \{a(1,1,-1,0) + b\,(0,1,0,0) + c\,(0,0,1,1) \,|(a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

Tout élément de F est une combinaison linéaire des vecteurs $(1,1,-1,0)$, $(0,1,0,0)$ et $(0,0,1,1)$, donc

$$F = \{(1,1,-1,0), (0,1,0,0)\,, (0,0,1,1)\}.$$

autrement dit $\{(1,1,-1,0), (0,1,0,0)\,, (0,0,1,1)\}$ est une famille génératrice de F.

Par ailleurs, on vérifie que la famille $\{(1,1,-1,0), (0,1,0,0)\,, (0,0,1,1)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$, en considérant une combinaison linéaire nulle de ses trois éléments : soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \alpha(1,1,-1,0) + \beta\,(0,1,0,0) + \gamma\,(0,0,1,1) &= (0,0,0,0)\,, \\ (\alpha, \alpha+\beta, -\alpha+\gamma, \gamma) &= (0,0,0,0)\,. \end{aligned}$$

Alors,

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha = 0, \\ \alpha + \beta = 0, \\ -\alpha + \gamma = 0, \\ \gamma = 0. \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \gamma = 0.$$

Cela signifie que $\{(1,1,-1,0), (0,1,0,0)\,, (0,0,1,1)\}$ est libre.

On peut en conclure que $\{(1,1,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ est une base de F et que

$$\dim F = 3.$$

3)

– Déterminons $E \cap F$:

Soit $u \in E \cap F$.

Comme $u \in F$, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (a, a+b, -a+c, c)$.

Comme $u \in E$, $a + (a+b) = -a + c = c = 0$, soit encore $a = b = c = 0$.

Donc $u = 0_{\mathbb{R}^4}$.

On en déduit que

$$E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}.$$

Et par conséquent,

$$\dim (E \cap F) = 0.$$

Et,

$$\begin{aligned} \dim (E+F) &= \dim E + \dim F - \dim (E \cap F), \\ &= 1 + 3 - 0 = 4. \end{aligned}$$

$$\dim (E+F) = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

Et

$$E + F \subset \mathbb{R}^4, \text{ comme sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4.$$

Donc

$$E + F = \mathbb{R}^4.$$

On peut conclure de ces résultats que

$$E \oplus F = \mathbb{R}^4.$$

Exercice 6.3 *Soit* $E = \mathbb{R}^4$. *On considère* (u_1, u_2, u_3, u_4) *une famille libre de* E *et on pose*

$$F = vect\left(u_1 + u_2, u_3\right), \quad G = vect\left(u_1 + u_3, u_4\right), \quad H = vect\left(u_1 + u_4, u_2\right).$$

- *Démontrer que* $F \cap G = \{0\}$, *que* $F \cap H = \{0\}$ *et que* $G \cap H = \{0\}$.
- *La somme* $F + G + H$ *est-elle directe ?*

Solution

On va simplement démontrer que $F \cap G = \{0\}$, les deux autres égalités se prouvant de façon tout à fait similaire.

- Soit $u \in F \cap G$ Alors il existe des scalaires $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ tels que

$$\begin{aligned}
u &= \alpha\left(u_1 + u_2\right) + \beta u_3 = \alpha'\left(u_1 + u_3\right) + \beta' u_4, \\
&\Longrightarrow \left(\alpha - \alpha'\right) u_1 + \alpha u_2 + \left(\beta - \alpha'\right) u_3 - \beta' u_4 = 0, \\
&\Longrightarrow \alpha - \alpha' = 0,\ \alpha = 0,\ \beta - \alpha' = 0,\ -\beta' = 0, \\
&\Longrightarrow \alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0
\end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) étant libre.

Ainsi,

$$u = 0.$$

Et

$$F \cap G = \{0\}.$$

- On va prouver que la somme $F + G + H$ n'est pas directe en trouvant un vecteur qui admet deux décompositions différentes dans $F+G+H$. Par exemple,

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_3 + (u_1+u_3) + 0 \in F+G+H, \\ &= (u_1+u_2) + 0\,(-u_2) \in F+G+H. \end{aligned}$$

Donc, la somme n'est pas directe !

Exercice 6.4 *Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :*

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \ (x,y) \longmapsto (x+y, x-2y, 0)\,,$
2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \ (x,y) \longmapsto (x+y, x-2y, 1)\,,$
3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ \ (x,y) \longmapsto x^2 - y^2.$

Solution

1.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y) \longmapsto (x+y, x-2y, 0)\,,$$

Prenons, $u = (x,y)$ et $v = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

on a,

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - 2\lambda y, 0)\,, \\ &= \lambda (x+y, x-2y, 0)\,, \\ &= \lambda f(u)\,. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} f(u+v) &= ((x+x') + (y+y')\,, (x+x') - 2\,(y+y')\,, 0)\,, \\ &= (x+y, x-2y, 0) + (x'+y', x'-2y', 0)\,, \\ &= f(u) + f(v)\,. \end{aligned}$$

Donc, f est une application linéaire.

2. f n'est pas une application linéaire car $f(0,0) \neq (0,0,0)$.

3. f n'est pas une application linéaire car

$$\begin{aligned} f(1,0) &= 1, \quad f(-1,0) = 1 \text{ et} \\ f[(1,0)+(-1,0)] &= f(0,0) = 0 \neq f(1,0) + f(-1,0). \end{aligned}$$

C-à-d : $f(X+Y) \neq f(X) + f(Y)$.

Exercice 6.5 *On considère l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *définie par*

$$f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z).$$

1. *Déterminer une base de* $\operatorname{Im} f$.
2. *Déterminer une base de* $\ker f$.
3. *L'application* f *est-elle injective ? surjective ?*

Slution

1.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+z, y-x, z+y, x+y+2z), \\ &= (x,-x,0,x) + (0,y,y,y) + (z,0,z,2z), \\ &= x(1,-1,0,1) + y(0,1,1,1) + z(1,0,1,2), \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3). \end{aligned}$$

La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. or,

$$f(e_3) = f(e_1) + f(e_2),$$

donc, $f(e_3)$ est combinaison linéaire de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
Ainsi, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est une génératrice de $\operatorname{Im} f$. De plus, elle est libre

car les deux vecteurs sont non-nuls et ne sont pas proportionnels. On en déduit que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

2.

$$\begin{aligned}\ker f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^4}\right\}, \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x+z, y-x, z+y, x+y+2z) = (0,0,0,0)\right\},\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+z=0, \\ y-x=0, \\ z+y=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=-z, \\ y=-z, \\ z=z. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\ker f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^4}\right\}, \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x=-z, \ y=-z, \ z=z\right\}, \\ &= \{(-z,-z,z)\} = \{z(-1,-1,1)\}\end{aligned}$$

On en déduit que le vecteur $(-1,-1,1)$ engendre $\ker f$. Comme il est non-nul, c'est une base de $\ker f$.

Donc, on trouve que

$$\dim \ker f = 1.$$

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.

f n'est pas surjective, car son image n'est pas $\mathbb{R}^4$ tout entier. En effet,

$$\dim \operatorname{Im} f = 2 \neq \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$