

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



## Mémoire de Master

Présenté à l'Université 08 Mai 1945 de Guelma

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de : Génie Civil & Hydraulique

Spécialité : Génie Civil

Option : STRUCTURES

Présenté par : MAIZI SALAH EDDINE

---

**Thème : NOUVEL ELEMENT FINI DE PLAQUE MINCE  
BASE SUR L'APPROCHE EN DEFORMATION  
ET LES SOLUTIONS BI-HARMONIQUES DE LA FONCTION  
D'AIRY**

---

Sous la direction de : HIMEUR MOHAMMED

Jun 2018

## Dédicace

*Je dédie ce travail*

- à la mémoire de ma chère tante *Nadra*, qui avant sa disparition me souhaitait toujours le succès dans mes études et ma vie,

- à ma chère maman *Naziha*,

- à mon cher papa *Ahmed*,

- à la mémoire de ma sœur *Hiba*,

- à mon frère *Housseem* et ma sœur *Lina*,

- à ma grand-mère *Fatma* et ma tante *Kamila* ainsi que toute la famille,

- à tous les proches et amis,

- et à toute personne ayant contribué de près ou de loin à ce travail.

## Remerciements

*Ce travail a été réalisé à l'université 08 mai 1945 de Guelma Faculté des sciences et de technologie – département de génie civil sous la direction du Docteur MOHAMMED HIMEUR.*

*Dans le cadre de Hadith de notre prophète : (qui ne remercie pas les gens ne remercie pas Allah), J'exprime ma profonde reconnaissance à monsieur HIMEUR qui m'a initié à la méthode des éléments finis et m'a guidé tout au long de ce travail.*

*Je tiens à remercier ma mère, qui m'a toujours encouragée pas seulement dans ce travail mais tout le long de mon parcours, et qui sans Allah et puis elle, je ne serais pas été dans cette place.*

*Je remercie le président de jury et tous les membres de Jury.*

*Je dirige tous mes compliments et respects aux enseignants, qui ont été à la hauteur, et qui m'ont fait une bonne formation au sein de ce département.*

*Je remercie également mon père Ahmed, mon frère Housseem et ma sœur Lina et mon oncle Sofian pour leur soutien, et leurs précieux conseils et moralités.*

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو تطوير عنصر منتهي جديد من الصفائح الرقيقة يسمح بالتعامل مع معظم المواقف التي تتم مواجهتها في حساب الهياكل، خاصة الحالات التي يصبح فيها استخدام النظريات الكلاسيكية معقدًا، هذا العنصر ثلاثي العقد العقد تمت دراسته من افتراضات نظرية اللوحة الرقيقة لـ

يكن التجديد عند دراسة هذا العنصر في استخدام دالة "إيري" في اختيار كثيرات الحدود، بالإضافة إلى استخدام مفاهيم وتقنيات أخرى من أجل :

- إثراء حقول الانتقال مما يؤدي إلى زيادة الدقة في

تقريب الحل

- تحسين السلوك في حالة التشوه الهندسي للشبكات -

- "تجاوز المشاكل المعروفة" بانسداد القص -

يتم تلخيص هذه التقنيات فيما يلي :

- بناء كثيرات الحدود الخاصة بالحقول انطلاقًا من الحلول البي هارمونية لدالة "إيري".

- اعتماد تقريب التشوه.

- استخدام "التكامل التحليلي" لتقييم مصفوفة الصلابة.

- استخدام لغة البرمجة فورتران لتطوير مصفوفة الصلابة.

لتقييم أداء عنصرنا أنشأنا سلسلة من الاختبارات، تتعلق السلسلة الأولى بالتحقق من الحالة المستمرة للالتواء ومشكلة انسداد القص، كما تهتم السلسلة الثانية بتقييم كفاءة ومتانة عنصرنا في التقارب نحو الحل.

**الكلمات المفتاحية:** عنصر منتهي ، لوحات رقيقة ، دالة "إيري" ، تقريب التشوه ، تكامل تحليلي ، سلسلة اختبارات ، تقارب نحو الحل.

# Résumé

L'objet de ce travail est la mise au point d'un nouvel élément fini de plaque mince permettant de prendre en charge l'essentiel des situations rencontrées dans le calcul des ouvrages notamment les cas où l'utilisation des théories classiques devient complexe, cet élément de trois nœuds est étudié dans le cadre des hypothèses de la théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff.

La nouveauté dans cette formulation réside dans l'utilisation de la fonction d'Airy dans le choix des polynômes d'interpolation, et l'utilisation d'autres concepts et techniques en vue de :

- L'enrichissement des champs de déplacement (raffinement p), donc une plus grande précision dans l'approximation de la solution.
- L'amélioration des comportements en cas de distorsion géométrique des maillages.
- Le contournement des problèmes connus de "blocage de cisaillement".

Ces techniques se résument dans :

- La construction des polynômes d'interpolation des champs à partir des solutions biharmoniques de la fonction d'Airy.
- L'adoption de l'approche "en déformation".
- L'utilisation de «l'intégration analytique» pour évaluer la matrice de rigidité.
- L'utilisation de langage de programmation FORTRAN pour la mise au point de la matrice de rigidité.

Pour évaluer la performance de notre élément on a établi une série de tests, la première série concerne la vérification de l'état constante de torsion et le problème de blocage de cisaillement, la deuxième série s'implique à évaluer l'efficacité et la robustesse de notre élément dans la convergence vers la solution.

**Mots Clés :** *Elément fini, plaques minces, fonction d'Airy, approche en déformation, Intégration analytique, série de tests, convergence vers la solution.*

# Abstract

The object of this work is the development of a new thin plate finite element allowing to deal with most of the situations faced in the calculation of structures, especially the cases where the use of classical theories becomes complex, this Three-node element is studied as part of the assumptions of Love-Kirchhoff's thin plate theory.

The novelty in this formulation lies in the use of the Airy function in the choice of interpolation polynomials, and the use of other concepts and techniques in order to:

- The enrichment of the displacement fields (refinement  $p$ ), so a larger precision in the approximation of the solution.
- Improvement of behavior in case of geometric distortion of meshes.
- Bypassing known problems of "shear locking".

These techniques are summarized in:

- The construction of field interpolation polynomials from the biharmonic solutions of Airy function.
- The adoption of the "strain" approach.
- The use of "analytic integration" to evaluate the stiffness matrix.
- The use of FORTRAN programming language for the development of stiffness matrix.

To evaluate the performance of our element we have established a series of tests, the first series concerns the verification of the constant state of torsion and the problem of shear locking, the second series is involved in evaluating the efficiency and robustness of our element in the convergence towards the solution.

**Keywords** : finite element, thin plates, Airy function, deformation approach, Analytical integration, series of tests, convergence towards the solution.

# SOMMAIRE

## Introduction general

Introduction.....	01
Position du problème et objectifs.....	01
Plan du mémoire.....	02

## Chapitre I : Notions théoriques générales

1.1 Introduction.....	04
1.2 Notions générales de la Mécanique des milieux continus et de l'élasticité.....	04
1.2.1 Etat de contrainte.....	04
1.2.2 Equation d'équilibre.....	06
1.2.3 Etat de déformation.....	07
1.2.4 Loi de comportement.....	10
1.3 Principes des travaux virtuels.....	11
1.3.1 Introduction.....	11
1.3.2 Principes des déplacements virtuels (ou des travaux virtuels).....	12
1.3.3 Principes des forces virtuelles (ou des travaux virtuels complémentaires).....	12
1.4 Théorie des plaques.....	13
1.4.1 Définition.....	13
1.4.2 Différents types de plaques.....	14
1.4.3 Domaine d'utilisation des plaques.....	14
1.4.4 Théorie de Love- Kirchhoff (théorie des plaques minces).....	15
1.5 Fonctions d'Airy.....	19
1.6 Conclusion.....	20

## Chapitre II : Modélisation par éléments finis

2.1 Introduction.....	21
-----------------------	----

2.2 Principe de la méthode des éléments finis.....	21
2.2.1 Démarche.....	21
2.2.2 Construction de l'approximation nodale sur un élément.....	22
2.2.3 Construction de l'approximation nodale sur un élément.....	23
2.2.4 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire et du vecteur des charges nodales équivalentes.....	26
2.2.5 Assemblage.....	27
2.2.6 Evaluation des grandeurs élémentaires.....	28
2.3 Intégration analytique.....	28
2.4 Synthèse sur quelques éléments finis flexionnels.....	30
2.4.1 Introduction.....	30
2.4.2 Eléments finis triangulaire travaillant à la flexion.....	31
2.4.3 Eléments finis quadrilatère travaillant à la flexion.....	31
2.5 Conclusion.....	32

### **Chapitre III : Formulation d'un nouvel élément fini de flexion**

3.1 Introduction.....	33
3.2 Caractéristiques de l'élément.....	33
3.3 Pourquoi l'approche en déformation ?.....	35
3.4 Cinématique.....	36
3.5 Conditions de compatibilité cinématique.....	37
3.6 Loi de comportement.....	37
3.7 Equation d'équilibre.....	37
3.8 Fonctions d'interpolation.....	38
3.9 Mise en équation.....	40
3.10 Conclusion.....	40

### **Chapitre IV : Validation de l'élément**

4.1 Introduction.....	42
4.2 Torsion constante.....	42



4.3 Tests de convergence.....	43
4.3.1 Cas d'une poutre console.....	43
4.3.2 Cas d'une plaque carrée isotrope.....	45
4.4 Plaque circulaire.....	53
4.5 Plaque biaise.....	55
4.5 Conclusion.....	58

<b>Conclusion général et recommandation.....</b>	<b>59</b>
--	-----------

<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>60</b>
---	-----------

## **Annexes**

I- Formulation des champs d'approximation à partir des solutions homogènes (polynômes bi-harmoniques) de la fonction d'Airy.....	62
I-a / Champ des déformations.....	62
I-b / Champ des déplacements.....	63
II- Matrice des coordonnées nodales [A] de l'élément « SBA3 ».....	64
III- Matrice [ K <sub>0</sub> ].....	65
III-a / Forme développée avant intégration de la matrice [K <sub>0</sub> ].....	65
III-b / Forme développée après intégration de la matrice [K <sub>0</sub> ].....	66

# Liste des figures

## Chapitre I

Figure 1.1	: Coupure et facette $\vec{n}$ en M	04
Figure 1.2	: Equilibre du tétraèdre	05
Figure 1.3	: Equilibre en translation le long de $Ox_1$	06
Figure 1.4	: Cinématique et vecteur déplacement	07
Figure 1.5	: Définition d'une plaque et système d'efforts associés	13
Figure 1.6	: Utilisation des plaques dans les différents ouvrages	14
Figure 1.7	: Flexion des plaques et champ de déplacement	15
Figure 1.8	: Conventions générales	17
Figure 1.9	: Contraintes généralisées de flexion sur une surface élémentaire de plaque	19

## Chapitre II

Figure 2.1	: Démarche de discrétisation en éléments finis.	21
Figure 2.2	: Degrés de liberté dans un repère cartésien.	23
Figure 2.3	: Intégration analytique exemple d'un élément fini triangulaire.	28

## Chapitre III

Figure 3.1	: Elément SBA3 ; Triangle avec trois nœuds et trois degrés de liberté par nœud.	34
Figure 3.2	: Cinématique d'une plaque en flexion (théorie de Kirchoff).	36

## Chapitre IV

Figure 4.1	: Torsion d'une plaque carrée.	42
Figure 4.2	: Poutre – Console soumise à une charge ponctuelle.	43

Figure 4.3	: Déplacement $W_A$ selon l'élancement $L/h$ .	44
Figure 4.4	: Plaque carrée isotrope.	45
Figure 4.5	: Plaque simplement appuyée – Déplacement normalisé pour $L/h=10$ .	47
Figure 4.6	: Plaque simplement appuyée – Déplacement normalisé pour $L/h=100$ .	47
Figure 4.7	: Plaque encastree sur ses quatre côtés – Déplacement normalisé pour $L/h=10$ .	48
Figure 4.8	: Plaque encastree sur ses quatre côtés – Déplacement normalisé pour $L/h=100$ .	49
Figure 4.9	: Plaque simplement appuyée – Déplacement normalisé pour $L/h=10$ .	50
Figure 4.10	: Plaque simplement appuyée – Déplacement normalisé pour $L/h=100$ .	50
Figure 4.11	: Plaque encastree – Déplacement normalisé pour $L/h=10$ .	51
Figure 4.12	: Plaque encastree – Déplacement normalisé pour $L/h=100$ .	52
Figure 4.13	: Plaque circulaire – densités de maillage considérées.	53
Figure 4.14	: Plaque circulaire encastree– Déplacement normalisé au centre.	54
Figure 4.15	: Plaque circulaire simplement appuyée– Déplacement normalisé au centre.	54
Figure 4.16	: Maillage d'une plaque biaise de $60^\circ$ .	55
Figure 4.17	: Maillage d'une plaque biaise de $30^\circ$ .	56
Figure 4.18	: Plaque biaise appuyé sur ces deux côtés opposés– Déplacement normalisé au centre.	57
Figure 4.19	: Plaque circulaire simplement appuyée– Déplacement normalisé au centre.	57

# Liste des tableaux

## Chapite II

Tableau 2.1	: Valeur des coefficients $C(k)$ en fonction de $\beta$ .	29
-------------	---	----

## Chapitre IV

Tableau 4.1	: Résultats de la simulation de la torsion d'une plaque carrée.	43
Tableau 4.2	: Déplacement $W_A$ selon l'élancement $L/h$ .	44
Tableau 4.3	: Valeurs référentielles de $\alpha_q$ et $\alpha_p$ .	46
Tableau 4.4	: Valeurs de $\alpha$ pour la plaque simplement appuyée.	46
Tableau 4.5	: Valeurs de $\alpha$ pour une plaque encastree sur ses quatre côtés.	48
Tableau 4.6	: Valeurs de $\alpha$ pour une plaque simplement appuyée.	49
Tableau 4.7	: Valeurs de $\alpha$ pour une plaque encastree.	51
Tableau 4.8	: Erreurs relatives $\left[ \frac{100(1-w_{cal.})}{w} \right]_{ref.}$ .	52
Tableau 4.9	: Plaque circulaire – Déplacement $W$ au centre.	53
Tableau 4.10	: Les solutions de références pour les plaques biaise à $60^\circ$ et à $30^\circ$ .	55
Tableau 4.11	: Plaques biaises appuyées sur ces deux côtés opposés déplacement $W$ au centre.	56

# INTRODUCTION GENERALE

## **Introduction :**

Dans le domaine de génie civil les dalles sont des éléments fréquemment rencontrés dans les différents ouvrages, on les trouve notamment dans les bâtiments et les ponts. Les théories classiques pour l'étude de ces structures présentent des calculs rigoureux et épuisants, en plus de la complexité des équations pour arriver aux résultats, surtout pour le calcul de grands ouvrages et éléments complexes.

Avec le développement de la machine et de l'outil informatique, les ingénieurs numériciens commencèrent à mettre des méthodes numériques pour le calcul des structures, et c'est là que la méthode des éléments finis a vu le jour. Le principe de base de cette méthode consiste à remplacer le domaine réel par un ensemble d'éléments finis, qui peuvent être réunis de plusieurs manières, et donc les employer pour représenter les formes les plus complexes.

## **Position du problème et objectifs :**

Dès lors, Beaucoup de recherche sont faites sur les éléments finis de plaque, en considérant différentes approches et principes variationnels dans la formulation. Les premières recherches ont été menées sur des approches simples en considérant des éléments triangulaires et quadrilatères plats. L'avantage de ces approches réside dans leur simplicité relative dérivée de la théorie des plaques minces de Kirchhoff. Seulement cette théorie néglige l'énergie de déformations due au cisaillement, ce qui la rend inadaptée pour l'analyse des plaques épaisses. Malgré cet inconvénient ces éléments ont été développés par plusieurs auteurs, en utilisant de différentes techniques et approches.

Auparavant dans l'aspect fonctionnel de l'étude, on utilisait fréquemment l'approche en déplacement, cependant les chercheurs ont remarqué qu'elle ne donne des résultats satisfaisants qu'après minimisation de la taille des mailles. L'une des réponses à cette problématique réside en l'utilisation de l'approche en déformation qui permet de donner des degrés plus élevés aux polynômes d'interpolation. Ce constat est observé pour les éléments développés par Ashwell et Al qui ont utilisé le modèle en déformation au lieu de modèle en déplacement.

Notre travail vise à développer *un nouvel élément fini triangulaire de plaque mince, basé sur l'approche en déformation et sur les solutions bi-harmonique de la fonction d'Airy,*

concurrentiel aux autres éléments, et capable de contourner les différentes problématiques posé dans l'analyse numérique, notamment les problèmes de convergence et de blocage de cisaillement, en utilisant de nouvelles concepts et techniques dans la formulation.

La prise en compte des solutions bi-harmoniques de la fonction d'Airy pour la construction des polynômes d'interpolation est l'un de ces concepts qui n'a jamais été utilisé pour ce type d'éléments. L'introduction de ces fonctions vise à augmenter la performance de l'élément, en lui donnant un comportement assimilé au comportement réel, puisqu'il introduit l'effet physique de Poisson (coefficient de poisson) dans la formulation des différents champs de la cinématique, chose ignorée dans les formulations basées sur le triangle de pascal.

L'utilisation de l'intégrale analytique dans le développement de la matrice de rigidité, au lieu de l'intégrale numérique, vise à donner à l'élément plus de performance lorsqu'on est en présence de maillage distordu, contrairement aux éléments iso-paramétriques qui utilisent l'intégration numérique et qui présentent dans la situation de distorsion du maillage une perte de convergence.

### **Plan du mémoire**

Ce mémoire est composé :

- de la présente introduction,
  - de quatre chapitres,
  - des conclusions et recommandations
  - et d'un bloc d'annexes.
- Au niveau de cette introduction, nous avons positionné le but visé de notre recherche, qui se résume dans la formulation d'un nouvel élément fini de flexion, en donnant les objectifs visant d'apporter des réponses et les axes de travail et de développement pour la concrétisation de ces objectifs.
- Dans le chapitre 01, nous exposons les notions théoriques générales traitant de l'élasticité, de la théorie des plaques minces de Kirchhoff, de la fonction d'Airy. Il s'agit d'une synthèse des aspects théoriques, des hypothèses et des techniques utilisées dans la formulation de notre élément.

- Dans le chapitre 02, nous donnons d'abord sommairement une présentation de la méthode des éléments finis et un bref aperçu sur l'évolution de cette méthode.

Nous enchaînerons ensuite sur des généralités mettant en relief les hypothèses d'utilisation de l'élasticité linéaire, la manière dont il est possible d'en déduire les principaux modèles d'éléments finis existants, particulièrement les formulations «en déplacement », « en équilibre», «mixte », «hybrides» et «en déformation» ainsi que les principes de l'approche variationnelle.

Comme nous avons présenté une explication de la méthode de l'intégration analytique utilisée dans la construction de la matrice de rigidité relative à notre élément.

Enfin, pour situer les performances de notre élément vis-vis à celle des autres éléments existant dans la littérature, nous avons fait une synthèse sur quelques éléments de plaques flexionnelles, développés par d'autres auteurs.

- Le chapitre 03, quant à lui, est réservé à la formulation et au développement de l'élément nouveau d'élasticité plane basé sur la formulation en déformation et sur les solutions bi-harmoniques de la fonction d'Airy, baptisé : « SBA3 ».

- Le chapitre 04 présente uniquement les tests effectués sur des exemples tirés de la littérature. Il y est mis en relief le comportement de nos éléments face à des sollicitations et des situations diverses,

Comme il est fait état d'une analyse comparative des performances de notre élément par rapport à celles de certains éléments développés par d'autres auteurs.

- Nous terminons, enfin, par quelques conclusions et recommandations

# CHAPITRE I : NOTIONS THEORIQUES GENERALES

## 1.1 Introduction :

L'élasticité ou mécanique des solides déformables est l'une des sciences de la mécanique des milieux continus (MMC), qui étudie le comportement des matériaux sous l'action des forces et des moments, en d'autre terme on détermine la relation qui existe entre les contraintes et les déformations, les principes fondamentaux de cette théorie sont la réversibilité des déformations lors de déchargement, et la linéarité de comportement. L'élasticité représente un langage commun entre les ingénieurs, même s'ils prétendent ne pas la comprendre parfaitement, la majorité d'entre eux s'en servent.

Après avoir expédié les principes de l'élasticité dans le cas tridimensionnelle, on appliquera ces principes dans le cas bidimensionnel dans le cadre de la théorie des plaques.

## 1.2 Notions générales de la Mécanique des milieux continus et de l'élasticité :

### 1.2.1 Etat de contrainte :

Soit un corps (S) qui se déforme sous l'action des forces extérieures de résultante F, dans tout points M de ce corps existe des forces de rappelles dites forces de frottement et de cohésion qui tendent à ramener ce corps à son état d'équilibre ( $\sum \vec{F} = \vec{0}$ ).

Tout point M de ce corps est entouré par une surface dS caractérisé par une normale  $\vec{n}$  où s'applique une résultante de force notée  $d\vec{F}$  (Figure 1.1).

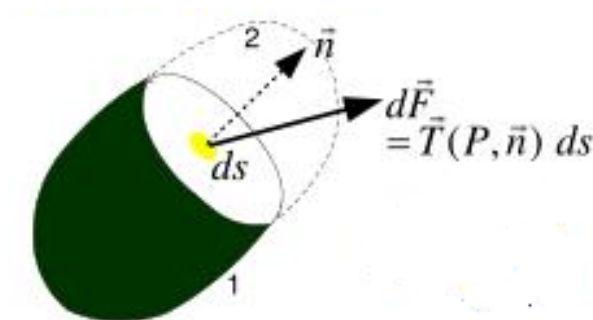


Figure 1.1 : Coupure et facette  $\vec{n}$  en M.



D'après le postulat de Cauchy le vecteur contrainte se définit :

$$\sigma(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left\{ \frac{d\vec{F}}{dS} \right\} \quad (1.1)$$

Celui-ci se décompose de deux types de vecteur contraints :

$$\vec{T}(P, \vec{n}) = \sigma_n \cdot \vec{n} + \vec{\tau}(P, \vec{n}) \quad (1.2)$$

-  $\sigma_n \cdot \vec{n}$  : Un vecteur contrainte normale qui correspond à une sollicitation de type traction (lorsque  $\sigma_n > 0$ ) ou de type compression (lorsque  $\sigma_n < 0$ ).

-  $\vec{\tau}(P, \vec{n})$  : Un vecteur contrainte tangentielle (appliqué au point P et tangentielle à la surface de normale  $\vec{n}$ ) qui correspond à une sollicitation de cisaillement. L'intensité (ou le module) de ce vecteur est donnée comme suit :

$$\|\vec{\tau}(P, \vec{n})\| = \sqrt{\|\vec{T}(P, \vec{n})\|^2 - \|\sigma_n \cdot \vec{n}\|^2} \quad (1.3)$$

Si on considère, en un point P du solide, les axes  $Px_1, Px_2, Px_3$  de base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et un tétraèdre *MABC* dans cette base. Sous l'action des sollicitations extérieures, les vecteurs contraintes qui s'exercent au point P se présentent comme suit :

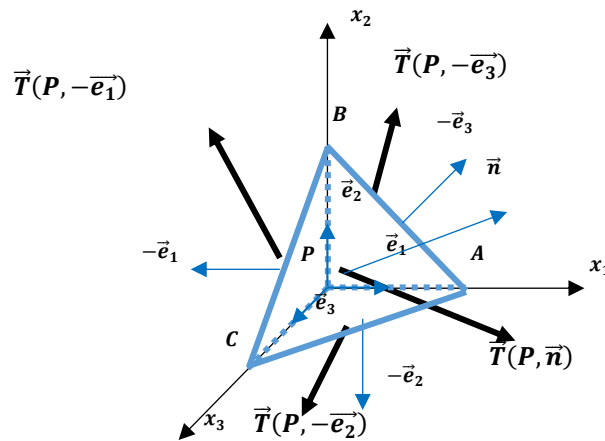


Figure 1.2 – Equilibre du tétraèdre

L'équilibre du tétraèdre conduit à l'équation :

$$\{T(P, \vec{n})\} = [\{T(P, \vec{e}_1)\} \quad \{T(P, \vec{e}_2)\} \quad \{T(P, \vec{e}_3)\}] \cdot \{n\} = [\sigma(P)] \cdot \{n\} \quad (1.4)$$

Cette équation s'appelle la formule de Cauchy où  $[\sigma(P)]$  est le tenseur des contraintes de Cauchy au point P. Les composantes de ce tenseur des contraintes dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

L'équilibre des moments au point P autour des axes  $Px_1, Px_2, Px_3$  conduit à :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (1.6)$$

Ce qui dénote que le tenseur des contraintes de Cauchy est un tenseur symétrique avec six composantes indépendantes :  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$

### 1.2.2 Equation d'équilibre :

Soit une portion du solide infiniment petite de dimensions  $dx_1, dx_2, dx_3$  soumise à :

- une force par unité de volume  $\vec{f}$  de composantes  $f_1, f_2, f_3$ . Appliquée au point de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ ,
- $\vec{\gamma}$  l'accélération de composantes  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  auquel est soumis le point de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ ,
- $\rho$  la masse volumique du matériau de ce volume.

L'équilibre en translation le long de la direction  $Ox_1$  (figure 1.3) traduit par :

$$\sum \vec{F}_1 = \vec{0} \quad (1.7)$$

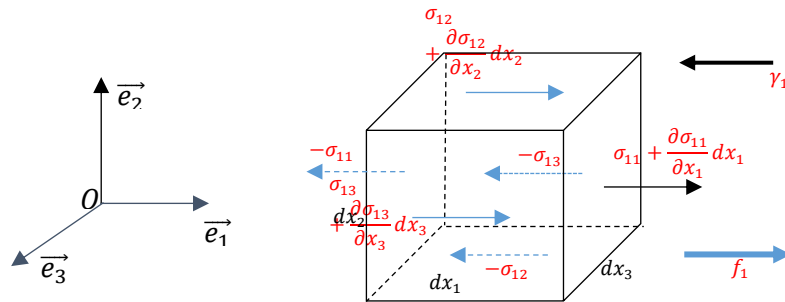


Figure 1.3 – Equilibre en translation le long de  $Ox_1$

Le développement de l'équation (1.7) nous donne :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho \cdot \gamma_1 \quad (1.8)$$

De la même façon, on obtient pour les autres directions les équations d'équilibre suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = \rho \cdot \gamma_2 \mapsto \text{Le long de } Ox_2 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho \cdot \gamma_3 \mapsto \text{Le long de } Ox_3 \quad (1.10)$$

Sous forme indicielle, ces trois équations s'écrivent, d'une façon condensée comme suit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \cdot \gamma_i \quad (1.11)$$

La deuxième série d'équation à vérifier sont les équations d'équilibre aux limites la condition à vérifier est la suivante :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{f}_{ext} \quad (1.12)$$

### 1.2.3 Etat de déformation :

#### 1.2.3.1 Cinématique des milieux continus :

Soit un point P dans un corps soumis à un chargement donné dans un instant ( $t_0 = 0$ ), ce dernier subit une transformation géométrique lors du passage d'un état initial à un état final.

Dans un repère cartésien (O, x, y, z) le point P est repéré par le vecteur de coordonnées  $\vec{X}(x_0, y_0, z_0)$ , à l'instant t le corps se déforme et le point P est repéré par le vecteur  $\vec{x}(x_t, y_t, z_t)$ .

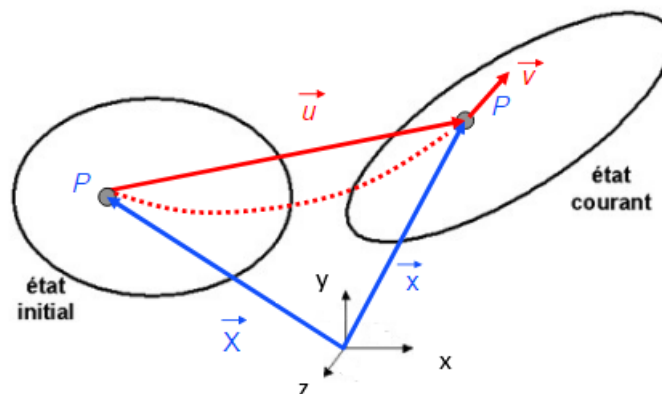


Figure 1.4 : Cinématique et vecteur déplacement.

Cette transformation se caractérise par une déformation ou un changement de forme, et un mouvement de corps rigide (translation et rotation), la cinématique de corps solide est étudiée en utilisant l'approche de Lagrange qui est plus adaptée au domaine de la mécanique des solides.

D'après la description de Lagrange, on a :

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \quad (1.13)$$

Où le vecteur  $\vec{u}$  est appelé le déplacement du point P.

Le tenseur gradient de la transformation est la matrice

$$\nabla \vec{x} = \nabla \vec{X} + \nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_t}{\partial x_0} & \frac{\partial x_t}{\partial y_0} & \frac{\partial x_t}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y_t}{\partial x_0} & \frac{\partial y_t}{\partial y_0} & \frac{\partial y_t}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z_t}{\partial x_0} & \frac{\partial z_t}{\partial y_0} & \frac{\partial z_t}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x_0} & \frac{\partial x_0}{\partial y_0} & \frac{\partial x_0}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y_0}{\partial x_0} & \frac{\partial y_0}{\partial y_0} & \frac{\partial y_0}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z_0}{\partial x_0} & \frac{\partial z_0}{\partial y_0} & \frac{\partial z_0}{\partial z_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$\nabla \vec{x} = \nabla \vec{X} + \nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} = [I] + [L_0] \quad (1.15)$$

$$\text{Soit : } [L_0] = \frac{1}{2}([L_0] + [L_0]^T) + \frac{1}{2}([L_0] - [L_0]^T) = [D_0] + [W_0]$$

Après développement on aura :

$$[D_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \\ Sym & & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ Sym & & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$[W_0] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z_0} - \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) & \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

1.2.3.2 Condition de compatibilité cinématique :

En utilisant la convention d'Einstein on peut écrire les matrices  $[D_0]$  et  $[W_0]$  de déformation et de rotation respectivement sous forme simplifiée :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (1.18)$$

- Où  $\varepsilon_{ij}$  représente la déformation  $[D_0]$  sous forme matricielle.

On dérivant la rotation  $\omega_{ij}$  et après simplification on obtient :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i} \quad (1.19)$$

Toutefois nous obtiendrons effectivement un vecteur gradient si le rotationnel est nul, c'est à dire si nous pouvons vérifier les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} \right) = 0 = \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_l \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \quad (1.20)$$

Ce sont en fait les conditions d'intégrabilité de Cauchy de la différentielle :

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_m} dx_m \quad (1.21)$$

Exprimées en fonction des composantes du tenseur de déformations ces conditions nous donnent l'équation générale suivante :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_j \partial y_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \quad (1.22)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (1.23)$$

Dans le cas de déformation plane c'est-à-dire  $\varepsilon_{xz}$  et  $\varepsilon_{yz}$  sont nulle et que toutes les autres déformations sont indépendantes de  $z$ , les équations de compatibilité se réduisent à l'équation unique :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.24)$$

#### 1.2.4 Loi de comportement :

La loi de comportement est une loi permettant de relier les déformations aux contraintes établit par Hooke à travers des essais de compression et traction en supposant comme approximation que le matériau est homogène élastique linéaire isotrope, elle dépend aussi des caractéristiques intrinsèques du matériau, à partir de ces conditions on peut écrire la relation suivante :

$$\sigma = C \cdot \varepsilon + \sigma_0 \quad (1.25)$$

Où :

- $\sigma_0$  est le tenseur des contraintes à l'état initial qu'on suppose nul ( $\sigma_0 = 0$ ) pour simplifier l'écriture de problème.
- $C$  est un tenseur de comportement d'ordre 4 dont les composantes font intervenir les caractéristiques physiques intrinsèques du matériau est égale à :

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement, le module de Young et le coefficient de poisson du matériau considéré. Leurs expressions en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  sont données comme suit :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad 2\mu + \lambda = \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (1.27)$$

Pour un état bidimensionnel, la matrice  $C$  se réduit à une taille de 3x3 pour fournir les composantes suivantes :

- A l'état plan de contraintes,

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

- A l'état plan de déformation,

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

En raison de symétrie des tenseurs de contrainte des vecteurs de contrainte  $\sigma$  et de déformation  $\varepsilon$ , on peut les écrire en utilisant la notation de Voigt pour simplifier l'écriture matricielle :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

### 1.3 Principes des travaux virtuels :

#### 1.3.1 Introduction :

Les formulations des théorèmes énergétiques sont à la base des méthodes par éléments finis.

En mécanique analytique le Principe des Travaux Virtuels (PTV) est une autre formulation de principe fondamentale de la dynamique (PFD), Il représente l'équilibre entre le travail extérieur due aux forces de volumes et de surfaces appliquées sur un solide, et le travail interne due aux contraintes dans un solide, le rôle de ce principe est d'obtenir une formulation plus compacte et faciliter la résolution des équations pour les rendre plus systématique.

Pourquoi utilise-t-on le principe des travaux virtuels ?

On utilise Le PTV pour les causes suivantes :

- Difficulté de résolution des équations différentielles de la statique et de la cinématique.
- La forme intégrale qui permet d'utiliser un calcul numérique pour trouver les différentes inconnues.

**1.3.2 Principes des déplacements virtuels (ou des travaux virtuels) :**

Un solide déformable est en équilibre statique, lorsque pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement compatibles, le travail virtuel des forces extérieures est égal au travail virtuel intérieur [5]. Cet équilibre s'exprime par la relation :

$$\int_V \sigma^T \cdot \delta \varepsilon \cdot dV = \int_V F^T \cdot \delta u \cdot dV + \int_S f^T \cdot \delta u \cdot dS \quad (1.31)$$

Le terme :  $\delta W_{int} = \int_V \sigma^T \cdot \delta \varepsilon \cdot dV$  représente la variation de l'énergie de déformation

Le terme :  $\delta W_{ext} = \int_V F^T \cdot \delta u \cdot dV + \int_S f^T \cdot \delta u \cdot dS$  représente la variation de l'énergie des forces extérieures, dans laquelle  $F$  est le vecteur des forces de volume et  $f$  est le vecteur des forces de surface.

– Un Champ Cinématiquement Admissibles (CCA) est un champ de déplacements  $\rightarrow u^*$  qui vérifie toutes les données cinématiques du problème. Il est continu dans  $\Omega$  et sur  $\partial\Omega$ , continument dérivable par morceaux sur  $\Omega$ . et satisfait les conditions aux limites en déplacement :

$$\vec{u}^* = \vec{U} \text{ sur } \partial\Omega_u \quad (1.32)$$

Où  $U$  est un déplacement connu.

**1.3.3 Principes des forces virtuelles (ou des travaux virtuels complémentaires) :**

Un solide déformable est en équilibre statique, lorsque pour tout accroissement virtuel statiquement admissible des contraintes et des forces, le travail virtuel complémentaire des forces extérieures est égal au travail virtuel complémentaire intérieur. Cet équilibre s'exprime par la relation :

$$\int_V \varepsilon^T \cdot \delta \sigma \cdot dV = \int_V u^T \cdot \delta F \cdot dV + \int_S u^T \cdot \delta f \cdot dS \quad (1.33)$$

Le terme  $\delta W_{int}^C = \int_V \varepsilon^T \cdot \delta \sigma \cdot dV$  : Représente la variation de l'énergie complémentaire de déformation.



Le terme  $\delta W_{ext}^C = \int_V u^T \cdot \delta F \cdot dV + \int_S u^T \cdot \delta f \cdot dS$  : Représente la variation de l'énergie complémentaire des forces extérieures, dans laquelle  $F$  est le vecteur des forces de volume et  $f$  est le vecteur des forces de surface.

- Un Champ Statiquement Admissible (CSA) est un champ de contraintes  $\sigma^*$  qui vérifie toutes les données statiques du problème. Il est continu dans  $\Omega$  et sur  $\partial\Omega$ , continument dérivable par morceaux sur  $\Omega$ , et vérifie les équations d'équilibre local et les conditions aux limites en efforts:

$$\begin{cases} \overrightarrow{div}(\underline{\sigma}^*) + \overrightarrow{f}_v = \vec{0} \text{ dans } \Omega \\ \underline{\sigma}^* \cdot \vec{n} = \vec{T} \text{ sur } \partial\Omega_T \end{cases} \quad (1.34)$$

## 1.4 Théorie des plaques :

### 1.4.1 Définition :

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan  $x_1 x_2$ ) et par une petite épaisseur (notée  $h(x_1, x_2)$ ) par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur).

Typiquement, le rapport de la taille caractéristique de la plaque sur l'épaisseur est :  $\frac{R}{h} > 5$ .

Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane [1] [2]. On note  $\omega$  le domaine de l'espace occupé par le plan moyen de la plaque.

Le corps occupe le domaine  $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / (x_1, x_2) \in \omega \mid x_3 \leq \frac{h}{2} \right\}$

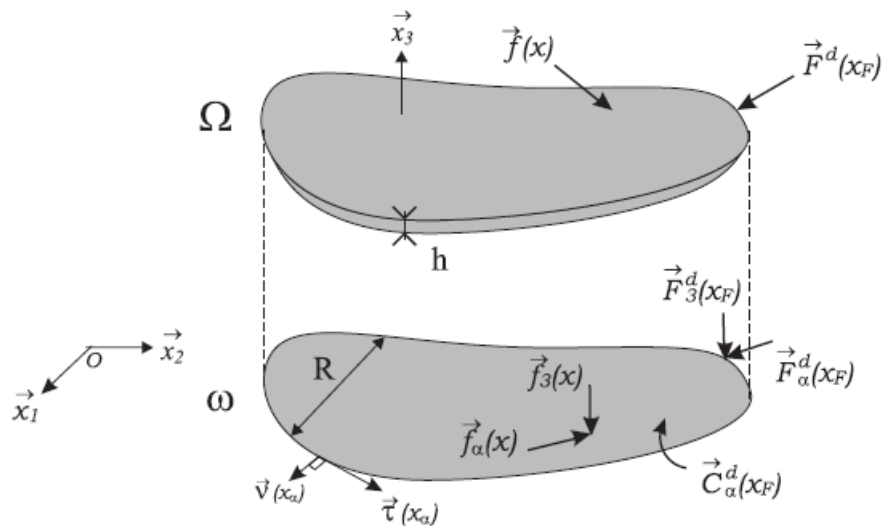


Figure 1.5 : Définition d'une plaque et système d'efforts associés.

**N.B :** Posons, par convention, que les indices grecques ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta..$ ) prennent les valeurs de 1 à 2, les indices romains ( $i; j; k; l; m..$ ) étant réservés aux sommations de 1 à 3

#### 1.4.2 Différents types de plaques :

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories ;

a) *Les plaques isotropes* : elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques ( $E$  et  $\nu$ ) respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...).

b) *Les plaques orthotropes* : leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art. [3]

c) *Les plaques anisotropes* : leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

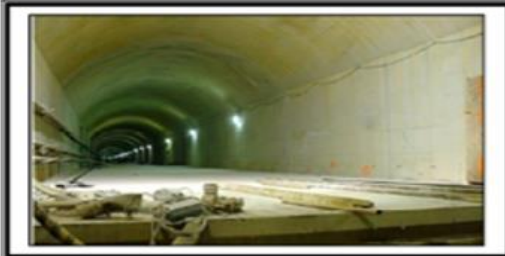
### 1.4.3 Domaine d'utilisation des plaques :



Ouvrages d'arts ponts (plaque circulaire)



Ouvrages d'arts ponts (plaque circulaire)



Ouvrages souterrains



Constructions civiles

Figure 1.6 : Utilisation des plaques dans les différents ouvrages.

Le domaine de l'utilisation de plaque est très répandue dans tous les domaines, en particulier dans le domaine du génie civil où, on les utilise dans les constructions simples (habitation) où les ouvrages d'art et elle existe sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaires et d'autres formes selon la qualité de l'ouvrage, Comme celle-ci est représentée dans les photos ci-dessous.

### 1.4.4 Théorie de Love- Kirchhoff (théorie des plaques minces) :

#### ➤ Hypothèses de la théorie :

La théorie classique des plaques [Kirchhoff 1850], est basée essentiellement sur les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 1 :** Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.

**Hypothèse 2 :** La contrainte normale  $\sigma_z$  est négligeable devant les autres composantes.

**Hypothèse 3 :** Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan après déformation, comme le montre la figure 1.7 :

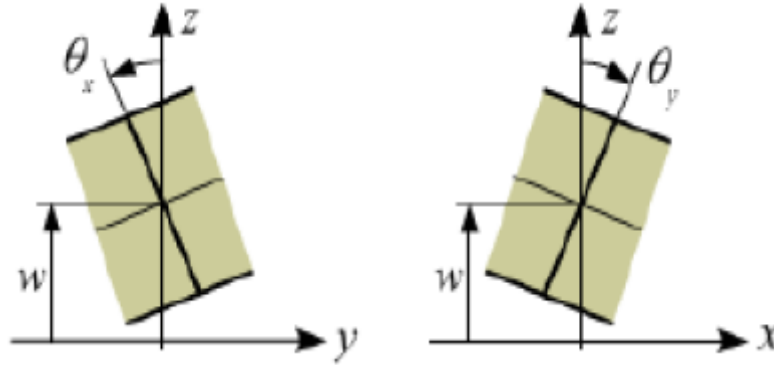


Figure 1.7 : Flexion des plaques et champ de déplacement.

À partir de la première de ces hypothèses, on déduit que le déplacement perpendiculaire à la plaque est indépendant de la variable  $x_3$  de l'épaisseur. Il est égal au déplacement du centre de gravité du brin :

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2, 0) = w(x_1, x_2) \quad (1.35)$$

➤ *Cinématique en flexion :*

Pour simplifier l'étude de la plaque, Kirchhoff suppose que le cas de flexion pure, c'est-à-dire qu'aucune des forces statiques volumiques ( $f_\alpha(\vec{x}) = 0$ ) ou ponctuelle ( $F_\alpha^d(\vec{x}) = 0$ ) ni de déplacement de membrane, seule les efforts perpendiculaires au plan  $(x_1, x_2)$  notée  $f_3(\vec{x}) \neq 0$ ,  $F_3^d(\vec{x}) \neq 0$  sont considérés.

Toujours dans le cas de flexion pure on peut trouver le champ de déplacement transverse dans n'importe quel point du plan moyen, en se basant sur l'intégration des déformations.

D'après l'équation de l'équilibre aux limites :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{f}_{ext} \quad (1.36)$$

On suppose que les efforts extérieurs sont très faibles et en tenant compte de la minceur de la plaque sa implique que les contraintes dans le sens  $x_3$  sont nulles, ce qui se traduit à :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}\left(x_\alpha, x_3 = \pm \frac{h}{2}\right) \cdot \vec{n} = 0 \text{ avec } \vec{n} = \vec{x}_3, x_\alpha \in \omega \quad (\alpha = 1; 2)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \rightarrow \sigma_{i3} = 0 \quad (1.37)$$

Pour un matériau constitutif élastique et linéaire les déformations correspondant sont :

$$\varepsilon_{\alpha 3} \approx 0 \quad (\sigma_{\alpha 3} = 2\mu\varepsilon_{\alpha 3}).$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3} \approx 0 = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_{\alpha}} \quad (1.38)$$

On intègre en  $x_3$  :

$$u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3) = u_{\alpha}(x_1, x_2, 0) - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_{\alpha}} + \vartheta(x_3^2) \quad (1.39)$$

Comme pour l'instant seule la flexion est considérée, le déplacement de membrane du feuillet moyen  $u_{\alpha}(x_1, x_2, 0)$  est pris nul. Finalement, le champ de déplacement de flexion s'écrit simplement :

$$u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_{\alpha}} \quad (1.40)$$

➤ *Champs de déformation :*

A partir du champ de déplacement trouvé dans l'équation (1.40) on peut conclure le champ de déformation qui est le suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w(x_{\alpha})}{\partial x_1^2} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w(x_{\alpha})}{\partial x_2^2} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w(x_{\alpha})}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (\text{état de déformation plane}).$$

Sous forme matricielle le tenseur de déformation s'écrit :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^{2D}(x_{\alpha}) = \begin{bmatrix} -x_3 \frac{\partial^2 w(x_{\alpha})}{\partial x_1^2} & -x_3 \frac{\partial^2 w(x_{\alpha})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \text{Sym} & -x_3 \frac{\partial^2 w(x_{\alpha})}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Comme pour les poutres, la déformation varie de manière linéaire avec  $x_3$  : de part et d'autre du feuillet moyen, une face est en traction et l'autre est en compression.

On remarque qu'ici le feuillet moyen ne se déforme pas dans son plan : on ne prend pas en compte les déformations dites de membrane.

Les courbures liées aux moments sont données par (Figure 1.8) :

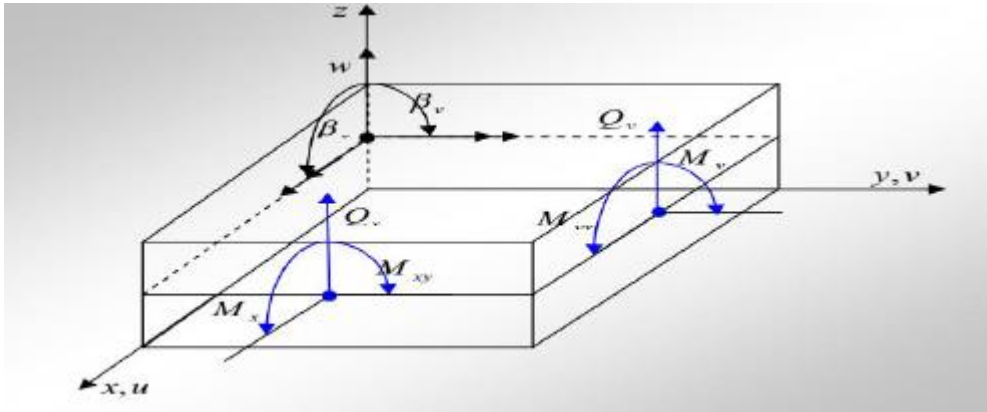


Figure 1.8 : Conventions générales.

$$\begin{aligned}
 K_{x1} &= -\frac{\partial^2 w(x_\alpha)}{\partial x_1^2} \\
 K_{x2} &= -\frac{\partial^2 w(x_\alpha)}{\partial x_2^2} \\
 K_{x_1 x_2} &= -\frac{\partial^2 w(x_\alpha)}{\partial x_1 \partial x_2}
 \end{aligned}
 \tag{1.43}$$

On peut définir de manière plus générale le tenseur de courbure :

$$K = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w(x_\alpha)}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 w(x_\alpha)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \text{Sym} & -\frac{\partial^2 w(x_\alpha)}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}
 \tag{1.44}$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = x_3 \cdot K
 \tag{1.45}$$

Cette écriture met en évidence la linéarité de la déformation en  $x_3$ .

➤ *Contrainte généralisée et moment résultant :*

Connaissant les déformations généralisées, il est très simple d'expliciter les contraintes via la loi de comportement du matériau constitutif, d'où les contraintes généralisées.

Ces contraintes généralisées résultent, par définition, de l'intégrale sur l'épaisseur de la plaque du torseur résultant du transport du vecteur contrainte (relativement à la normale courante) au

centre de gravité du brin considéré. On définit, pour le cas des plaques minces, les contraintes généralisées de courbure, qui ont la dimension de moment par unité de longueur :

$$M_{\alpha\beta}(x_\alpha) = \int_{x_3} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^{2D}(x_\alpha) dx_3$$

Ou d'une autre manière :

$$\{M\} = \{M_i\} = \begin{Bmatrix} M_1(x_1, x_2) \\ M_2(x_1, x_2) \\ M_{12}(x_1, x_2) \end{Bmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_1(t, x_1, x_2) \\ \sigma_2(t, x_1, x_2) \\ \sigma_{12}(t, x_1, x_2) \end{Bmatrix} x_3 dx_3 \quad (1.46)$$

On peut représenter ces contraintes généralisées sur une plaque, comme sur la (Figure 1.9) le montre dans le cas d'une plaque rectangulaire, possédant deux normales  $x_1$  et  $x_2$ .

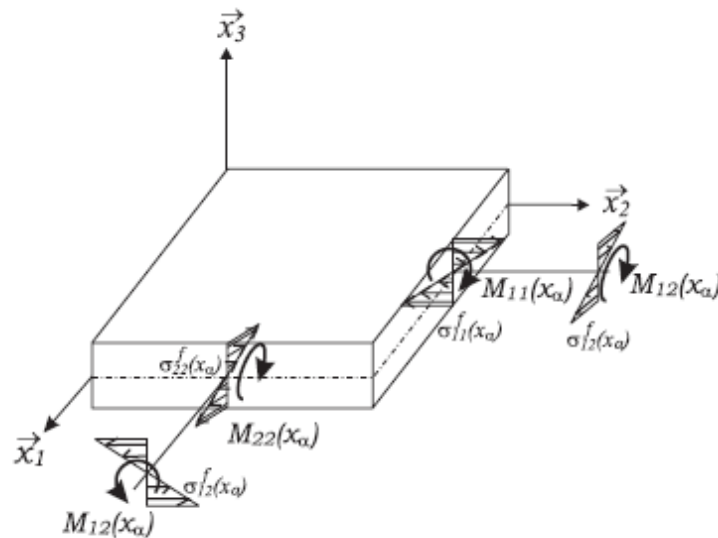


Figure 1.9 : Contraintes généralisées de flexion sur une surface élémentaire de plaque.

➤ *Loi de comportement :*

Nous pouvons maintenant relier les contraintes aux déformations, puis les contraintes généralisées au tenseur des déformations (Eq : 1.42). Considérons pour cela un matériau constitutif isotrope élastique linéaire [4]. La loi de comportement d'un matériau s'écrit donc classiquement, en raideur ou en souplesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \\ \sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \\ \sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{\alpha 3} = 2\mu\varepsilon_{\alpha 3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} \\ \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{\sigma_{\alpha 3}}{2G} \end{array} \right. \quad (1.47)$$

### 1.5 Fonctions d'Airy :

On veut dire par fonction d'Airy toute fonction noté  $\phi(x, y)$  et vérifiant la condition suivante :

$$\nabla^4 \phi(x, y) = 0 \quad (1.48)$$

Soit les deux équations d'équilibre dans le cas de contrainte plane avec prise de forces de volumes nulles ( $F=0$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (1.49)$$

$$\text{Avec : } \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

En combinant la condition de compatibilité donnée dans l'équation (1.24), la loi de Hooke et l'équation d'équilibre (1.11) on trouve :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (1.50)$$

### I.6 Conclusion :

Cette étude bibliographique nous a permis de présenter un bref rappel sur les théories et principes qui entre dans notre étude, notamment la loi de comportement, la détermination des contraintes et déformations dans le cadre de la théorie des plaques, et la fonction d'Airy qui entre dans l'élasticité plane.



# CHAPITRE II : MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

## FINIS

### 2.1 Introduction :

La résolution des équations différentielles est possible analytiquement pour des géométries et des cas simples. En revanche, cela devient impossible pour des systèmes complexes, discontinus, que l'on rencontre souvent dans la pratique. C'est pourquoi les formulations permettant une approximation numérique sont plus indiquées.

Parmi les méthodes numériques qui conduisent à des solutions approchées du problème, celle des éléments finis (ou FEM, de l'anglais Finite Element Method) s'est montrée particulièrement efficace.

### 2.2 Principe de la méthode des éléments finis :

#### 2.2.1 Démarche :

Dans le domaine du génie civil on a souvent besoin de calculer des structures complexes pour lesquelles il est très rare que l'on puisse obtenir une solution analytique du problème en utilisant les théories classiques. De ce fait, on est la plupart du temps obligé de recourir à des méthodes numériques comme celle des éléments finis. La démarche de modélisation par éléments finis est schématisée comme suit :

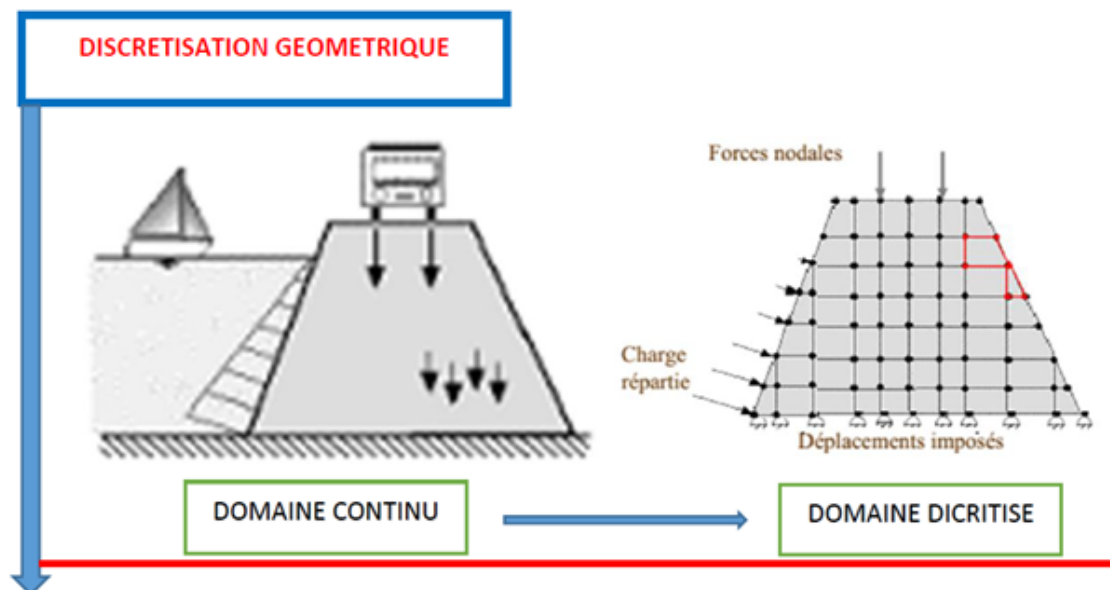



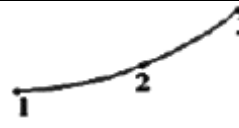
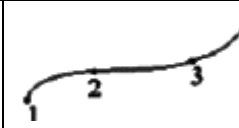

Figure 2.1 : Discrétisation en éléments finis.

## CHAPITRE II : MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

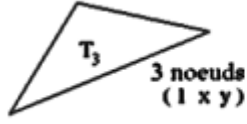
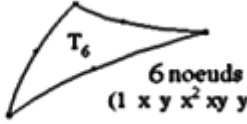
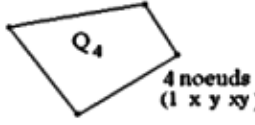

### 2.2.2 Construction de l'approximation nodale sur un élément

- Définition du type d'Elément-

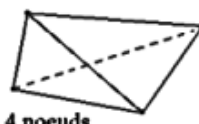
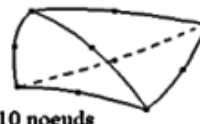

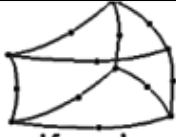
a) Eléments à une dimension :

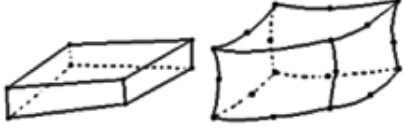
Type d'élément	Barre			Poutre
Elément				
Nbre de nœuds	02	03	04	02
Nombre de paramètres du polynôme d'approximation	$01 \times 02 = 02$	$01 \times 03 = 03$	$01 \times 04 = 04$	$02 \times 02 = 04$
Type d'approximation	Lagrange			Hermite

b) Eléments à deux dimensions :

Elément triangulaire	 <b>3 nœuds</b> $(1 \ x \ y)$	 <b>6 nœuds</b> $(1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2)$
<b>Les bases polynomiales sont complètes</b>		
0Elément Quadrilatère	 <b>4 nœuds</b> $(1 \ x \ y \ xy)$	 <b>8 nœuds</b> $(1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^2y \ y^2x)$
<b>Les bases polynomiales sont incomplètes</b>		

.b) Eléments à trois dimensions :

Elément Tétraédrique	 <b>4 nœuds</b> $(1 \ x \ y \ z)$	 <b>10 nœuds</b> $(1 \ x \ y \ z \ x^2 \ y^2 \ z^2 \ xy \ xz \ yz)$
<b>Les bases polynomiales sont complètes</b>		
Eléments Prismatiques	 <b>6 nœuds</b>	 <b>15 nœuds</b>
<b>bases incomplètes</b>		

<p>Eléments Hexaédriques</p>		<p>bases incomplètes</p>
	<p>8 noeuds      20 noeuds</p>	

2.2.3 Construction de l'approximation nodale sur un élément :

- Formulation mathématique -

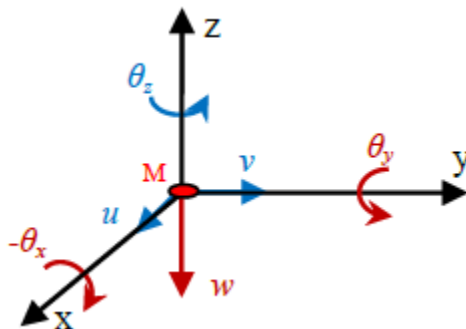


Figure 2.2 : Degrés de liberté dans un repère cartésien.

➤ Définition de la cinématique (Degrés de liberté et déformations) :

- Déplacements :  $\vec{q} = \langle \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \rangle \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$  (2.1)

- Rotations infinitésimales :

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad ; \quad \theta_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad ; \quad \theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$
 (2.2)

- Déformations infinitésimales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right.$$
 (2.3)

➤ Approximation nodale à l'intérieur d'un élément :

Il s'agit de donner une fonction d'interpolation des champs (de déplacements, de déformations et des contraintes) à l'intérieur d'un élément simple (élément fini) en fonction de la valeur des variables aux nœuds. Cette fonction est de forme polynomiale :

$$\text{Champs des déplacements : } \{q\} = [N_i]\{q_i\} \quad (2.4)$$

$$\text{Variations de champs des déplacements : } \{\delta q\} = [N_i]\{\delta q_i\} \quad (2.5)$$

$$\text{Champs des Déformations : } \{\varepsilon\} = [N_i]'\{q_i\} = [B]\{q_i\} \quad (2.6)$$

$$\text{Champs des Contraintes : } \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][N_i]'\{q_i\} = [D][B]\{q_i\} \quad (2.7)$$

$\Rightarrow \{q\} ; \{\varepsilon\} ; \{\sigma\}$  : sont, respectivement, les champs des déplacements ; des déformations et des Contraintes.

$\Rightarrow \{q_i\}$  : Valeurs des déplacements nodaux.

$\Rightarrow [N_i] ; ([N_i]' = [B])$  : Matrices respectivement des fonctions de formes (poids nodaux) et des Déformations.

$\Rightarrow [D]$  : Matrice des paramètres du matériau

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$E$  : Module de Young       $\nu$  : Coefficient de Poisson

➤ *Approches de formulation*

- *Modèle en déplacement*

Dans cette approche, l'approximation est faite sur le **champ de déplacement** en considérant l'élément cinématiquement admissible ; c'est-à-dire l'intégrabilité du champ de déformation à l'intérieur de l'élément.

- *Modèle en équilibre*

Il s'agit, dans ce modèle, de choisir une forme paramétrique simple du champ de contraintes à l'intérieur des éléments.

- *Modèle hybride*

La terminologie utilisée consiste à désigner par « *hybrides* » les approches éléments finis pour lesquels plusieurs champs sont discrétisés indépendamment à l'intérieur de l'élément et sur sa frontière. Les éléments finis hybrides peuvent être développés selon deux approches conventionnelles : éléments finis hybrides en déplacement et en contraintes.

- *Modèle mixte*

Dans cette approche, l'approximation est faite, indépendamment, sur divers champs d'inconnues (déplacements, déformation, contraintes).

- *Modèle en déformation*

La démarche à ce niveau consiste à choisir, en premier lieu, une forme paramétrique simple du **champ de déformations** à l'intérieur des éléments. Le champ des déplacements, continu et différentiable, est déduit par intégration du champ des déformations.

➤ *Conditions de compatibilité cinématique*

Physiquement, ces conditions expriment la continuité de la matière avant et après déformation d'un corps solide, d'où l'appellation de *conditions de compatibilité cinématique*. Mathématiquement, elles expriment des restrictions sur la forme des fonctions des déformations pour permettre l'intégration des équations aux dérivées partielles.

Leur **satisfaction est obligatoire pour garantir l'unicité des déplacements**. En état tridimensionnel, les six équations de compatibilité sont sous forme développée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (2.9)$$

**2.2.4 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire :**

➤ *Formulation variationnelle – Application du principe des travaux virtuels*

Un solide déformable est en équilibre statique, lorsque pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement compatibles, le travail virtuel des forces extérieures est égal au travail virtuel intérieur. Cet équilibre s'exprime par la relation :  $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_{Vi} \delta q_i dV + \int_A f_{Si} \delta q_i dA \quad (2.10)$$

Où :

Le premier terme représente la variation du travail virtuel intérieur (variation de l'énergie de déformation) :  $\delta w_{int} = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$

Et le deuxième terme représente la variation du travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta w_{ext} = \int_V f_{Vi} \delta q_i dV + \int_A f_{Si} \delta q_i dA$$

$$\{q\} = [N_i] \{q_i\}$$

$$\{\delta q\} = [N_i] \{\delta q_i\}$$

$$\{\varepsilon\} = [N_i]' \{q_i\} = [B] \{q_i\}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D][N_i]' \{q_i\} = [D][B] \{q_i\}$$

$$\implies \delta W_{int} = \int_V [B]^T \{\delta q_i\}^T [D][B] \{q_i\} dV = \{\delta q_i\}^T \left( \int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{q_i\} \quad (2.11)$$

L'expression :  $[K^e] = \int [B]^T [D][B] dV$  représente la matrice de rigidité élémentaire de l'élément fini.

Pour les efforts externes : nous avons :

$$\{q\} = [N_i] \{q_i\}$$

$$\{\delta q\} = [N_i] \{\delta q_i\}$$

$$\delta W_{ext} = \int_V f_{Vi} \delta q_i dV + \int_A f_{Si} \delta q_i dA$$

$$\delta W_{ext} = \delta q_i \left( \int_V f_{Vi} [N_i] dV + \int_A f_{Si} \delta q_i dA \right) \quad (2.12)$$

L'expression :  $[F^e] = \left( \int_V f_{Vi} [N_i] dV + \int_A f_{Si} \delta q_i dA \right)$  représente le vecteur des forces nodales équivalentes appliquées aux nœuds de l'élément fini.

➤ *Intégration*

L'évaluation de la matrice de rigidité est établie par intégration sur l'élément fini de l'expression :

$$\int [B]^T [D] [B] dV \quad (2.13)$$

Pour cela deux méthodes sont utilisables :

-Intégration numérique.

-Intégration analytique.

### 2.2.5 Assemblage :

- Mise en équation de l'équilibre statique de la structure :

➤ Application du principe des travaux virtuels :  $\delta W_{int} = \delta W_{ext}$

$$\rightarrow [K^e] \{q_i\} = \{F^e\} \quad (2.14)$$

➤ Assemblage :

La structure (domaine D) est constituée de l'ensemble des sous domaines  $D_e$  qui sont représentés par les éléments finis.

$$\rightarrow D = \cup D_e \quad (2.15)$$

$$\rightarrow [K] = \sum_e [K^e] ; [F] = \sum_e [F^e] ; [Q] = \sum_e [Q^e] \quad (2.16)$$

$$\rightarrow [K] \{Q\} = \{F\}_s \quad (2.17)$$

*Prise en compte des conditions aux limites et résolution*

➤ Prise en compte des conditions aux limites :

→ Blocages des déplacements (appuis)

Sollicitations (Charges équivalentes aux nœuds)

➤ Résolution :

→ Déterminations du vecteur de déplacement  $Q$

→ Déterminations des réactions au niveau des appuis.

### 2.2.6 Evaluation des grandeurs élémentaires :

→ Déterminations du vecteur de déplacement  $Q$  étant connu, il s'agit de déterminer à l'intérieur de l'élément fini.

- Le champ des déplacements :  $\{q\} = [N_i]\{q_i\}$  (2.18)

- Le champ des déformations :  $\{\varepsilon\} = [N_i]'\{q_i\} = [B]\{q_i\}$  (2.19)

- Le champ des contraintes :  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][N_i]'\{q_i\} = [D][B]\{q_i\}$  (2.20)

**2.3 Intégration analytique :**

Une formulation classique par l'utilisation de l'intégration numérique (éléments isoparamétriques) peut engendrer un double problème :

- perte de précision pour les distorsions géométriques, surtout lorsque les champs d'approximation sont constitués de polynômes de degré élevé.
- blocage de cisaillement « *shear locking* » spécifique aux plaques minces.

L'utilisation de l'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice  $[K_0] \int [Q(x,y)]^T \cdot [D] \cdot [Q(x,y)] ds$  permet d'éviter ces problèmes.

Pour ce faire, une démarche fut adoptée par D.J. Hamadi et M.T Belarbi [HAM06], qui consiste en la formulation d'une expression générale facile à mettre en œuvre et permettant une évaluation automatique de la matrice  $[K_0]$ , ceci quel que soit le degré du polynôme résultant du produit  $[Q_0] = [Q(x,y)]^T \cdot [D] \cdot [Q(x,y)]$  et quel que soit la distorsion de l'élément. Cette démarche se présente comme suit :

Soit un élément fini (triangulaire par exemple) (Figure2.3).

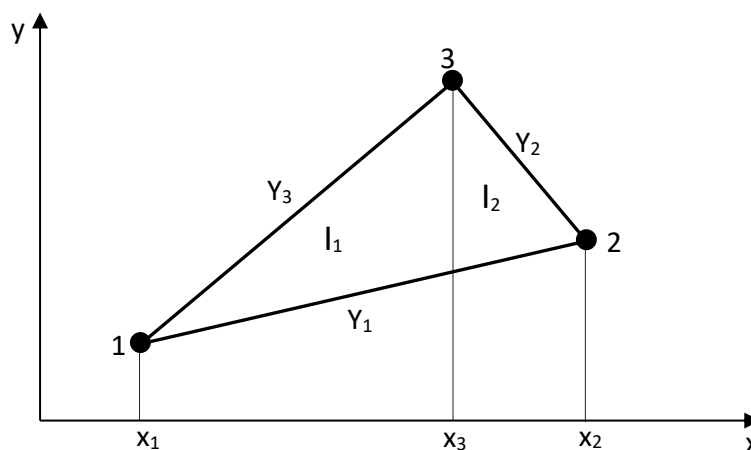


Figure 2.3 : Intégration analytique  
Exemple d'un élément fini triangulaire



Les termes de la matrice résultant du produit  $[Q_0] = [Q(x, y)]^T \cdot [D] \cdot [Q(x, y)]$  sont sous la forme  $C \cdot x^\alpha y^\beta$ . Donc l'intégration de l'expression  $\int [Q(x, y)]^T \cdot [D] \cdot [Q(x, y)] ds$  revient à intégrer chacun des termes de la matrice :

$$[Q_0] \rightarrow I = \iint_{xy} C \cdot x^\alpha y^\beta \cdot dx \cdot dy \quad (2.21)$$

Avec :

- $I = I_1 + I_2$  et  $C$  : une constante.
- $I_1$  : représente l'intégrale entre les droites  $Y_1$  et  $Y_3$  dans le sens des  $y$  et entre  $x_1$  et  $x_3$  dans le sens des  $x$ .
- $I_2$  : représente l'intégrale entre les droites  $Y_1$  et  $Y_2$  dans le sens des  $y$  et entre  $x_3$  et  $x_2$  dans le sens des  $x$ .

Les valeurs de  $I_1$  et  $I_2$  sont données comme suit :

$$I_1 = \iint_{x_1 Y_1}^{x_3 Y_3} C \cdot x^\alpha y^\beta \cdot dx \cdot dy \quad I_2 = \iint_{x_3 Y_1}^{x_2 Y_2} C \cdot x^\alpha y^\beta \cdot dx \cdot dy \quad (2.22)$$

$y$  : représente l'ordonnée de la droite d'équation  $y = a \cdot x + b$ .

donc : pour  $\beta = 2$ , nous aurons  $y^2 = (a \cdot x + b)^2 = 1 \cdot a^2 \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot x + 1 \cdot b^2$ ,

pour  $\beta = 3$ , nous aurons  $y^3 = (a \cdot x + b)^3 = 1 \cdot a^3 \cdot x^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b \cdot x^2 + 3 \cdot a \cdot b^2 \cdot x + 1 \cdot b^3$ ,

Ainsi, selon la valeur de  $\beta$ , on aboutit à la forme générale suivante :

$$y^\beta = (ax + b)^\beta = \sum_{k=1}^{k=\beta+1} C(k) \cdot a^{\beta+1-k} \cdot b^{k-1} \cdot x^{\beta+1-k} = \sum_{k=1}^{k=\beta+1} C(k) \cdot a^{k-1} \cdot b^{\beta+1-k} \cdot x^{k-1} \quad (2.23)$$

Avec  $C(k)$  des coefficients dont le nombre et la valeur sont fonction de la valeur de  $\beta$  (voir Tableau 1.1). A titre d'exemple, pour :

- $\beta = 1$  nous avons 2 coefficients dont les valeurs sont données dans le Tableau 1.1,
- $\beta = 2$  nous avons 3 coefficients dont les valeurs sont données dans le Tableau 1.1,
- $\beta = 3$  nous avons 5 coefficients dont les valeurs sont données dans le Tableau 1.1,

*Tableau 2.1 : Valeur des coefficients  $C(k)$  en fonction de  $\beta$ .*

	$C(k)$ , $k=1,6$					
	$C(1)$	$C(2)$	$C(3)$	$C(4)$	$C(5)$	$C(6)$
$\beta = 1$	1	-	-	-	-	-
$\beta = 2$	1	1	-	-	-	-
$\beta = 3$	1	2	1	-	-	-

$\beta = 4$	1	3	3	1	-	-
$\beta = 5$	1	4	6	4	1	-
$\beta = 6$	1	5	10	10	5	1

L'intégrale  $\int y^\beta dy$  devient :

$$\int y^\beta dy = \frac{1}{\beta + 1} y^{\beta+1} = \frac{1}{\beta + 1} (ax + b)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta + 1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k). a^{k-1}. b^{\beta+2-k}. x^{k-1} \quad (2.24)$$

Pour des bornes constituées de droites d'équation  $Y_i = a_i.x + b_i$  et  $Y_j = a_j.x + b_j$ , l'équation (2.24) devient :

$$\int_{Y_i}^{Y_j} y^\beta dy = \frac{1}{\beta + 1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k). (a_j^{k-1}. b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1}. b_i^{\beta+2-k}). x^{k-1} \quad (2.25)$$

L'intégration de l'équation (2.25) par rapport aux bornes  $x_m$  et  $x_n$  nous donne :

$$\int_{x_m}^{x_n} x^\alpha \left( \int_{Y_i}^{Y_j} y^\beta dy \right). dx = \int_{x_m}^{x_n} \frac{1}{\beta + 1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} C(k). (a_j^{k-1}. b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1}. b_i^{\beta+2-k}). x^{k+\alpha-1}. dx \quad (2.26)$$

L'expression finale de l'intégrale est enfin :

$$I_p = C \frac{1}{\beta + 1} \sum_{k=1}^{k=\beta+2} \frac{1}{k + \alpha} C(k). (a_j^{k-1}. b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1}. b_i^{\beta+2-k}). (x_n^{k+\alpha} - x_m^{k+\alpha}) \quad (2.27)$$

- Pour le cas d'un triangle :

$$I = \sum_{p=1}^1 I_p \quad (2.28)$$

## 2.4 Synthèse sur quelques éléments finis flexionnels :

### 2.4.1 Introduction :

Depuis l'apparition de la méthode des éléments finis, un nombre considérable de recherches ont été consacré à l'analyse des structures de plaques et de coques. Un grand nombre de documents a été publié à ce sujet. Cependant, malgré la quantité de recherches consacrées à ce sujet, d'autres efforts de recherche sont encore nécessaires pour fournir aux ingénieurs un calcul

numérique fiable, rentable et précis pour résoudre divers problèmes d'assemblages de plaques et de coque complexes.

### *2.4.2 Eléments finis triangulaires travaillant à la flexion :*

**BATOZ et AI** ont mis au point des éléments finis triangulaires efficace dans le calcul des plaques en flexion, ces éléments comprennent trois degrés de liberté par nœud une translation selon z, une rotation selon x et une rotation selon y, à ce sujet ils ont développé trois types d'élément de flexion de plaque, un élément (**DKT**) repose sur des hypothèses discrets de Théorie de Kirchoff, le deuxième élément (**HSM**) basé sur la Méthode hybride de stress. Afin de surmonter les problèmes observés, un troisième élément **SRI** fondé sur un schéma d'intégration sélective réduite qui comprend une déformation de cisaillement transversale a été mise au point [7] [3].

Par la suite d'autres chercheurs ont fait la comparaison entre ces trois éléments, ils ont constaté que l'élément (**DKT**) donne de meilleurs résultats par rapport aux éléments (**HSM**) et **SRI** de point de vue de sa simplicité de mise au point tant que du point de vue économique (nécessitant moins d'espace de stockage).

**M.HIMEUR** et **M.GUENFOUD** Ont présenté un élément fini de plaque triangulaire d'élasticité plane. Cet élément est développé dans la perspective de construction des éléments de coques. Sa formulation utilise des concepts relatifs à l'approche en déformation, au quatrième nœud fictif, à la condensation statique, à l'intégration analytique et se base sur les hypothèses de la théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff). La démarche adoptée a permis d'aboutir à un élément fini de plaque concurrentiel, robuste et performant [8].

### *2.4.3 Eléments finis quadrilatère travaillant à la flexion :*

Les éléments quadrilatère de flexion des plaques doté de quatre nœuds sont utilisé dans l'analyse des structures pour les structure de forme de coque comme pour les dalles, seulement ils représentent une complexité dans leur mis au point.

**L.BELOUNAR** et **M.GUENFOUD** en 2005 ont développé l'élément fini quadrilatère "SBRP" qui travaille à la flexion avec prise en compte de l'effet de l'effort de cisaillement transverse basé sur le modèle en déformation au lieu de modèle en déplacement ce qui a augmenter la précision des résultats, après ils ont validé leur résultat en l'appliquant sur des exemples numériques linéaires et dynamiques [9].

**F.BOURAS** à développer l'élément quadrilatère "LORA" de plaque mince doté de quatre nœuds et de trois degré de liberté par nœud, en considérant le modèle en contrainte au lieu de modèle en déplacement ce qui a donné des résultats plus précis pour la flexion des plaques [10].

**BELARBI M.T.** et **CHARIF A.**, en 1998 Nouveau élément hexaédrique simple "SBH8" pour l'étude des plaques minces et épaisses [11].

### **2.5 Conclusion :**

La méthode des éléments finis est un outil principal dans la modélisation numérique, car elle nous permet par la suite de déterminer la matrice de rigidité spécifique à notre élément fini triangulaire de plaque.

La synthèse sur les éléments finis existant dans la littérature représente deux avantages principaux, le premier, est la classification de notre élément finis par rapport aux autres éléments en distinguant les différentes approches et principes utilisés, le deuxième, est de placer notre élément dans une perspective d'enrichissement de la bibliothèque des éléments finis.

## CHAPITRE III : FORMULATION D'UN NOUVEL ELEMENT FINI DE FLEXION

### 3.1 Introduction :

Depuis l'apparition de calcul numérique dans les années 1960 beaucoup d'éléments finis ont été développés en se basant sur différentes approches et formulations. Dans ce chapitre l'élément fini développé «*SBA3* » est un élément triangulaire d'élasticité plane qui travaille à la flexion. Sa formulation est basée sur la théorie de Kirchhoff. C'est une théorie simplificatrice pour l'étude des plaques minces qui ne prend pas en considération les déformations liées au cisaillement. Les solutions bi-harmoniques de la fonction d'Airy ont été considérées dans la construction des polynômes d'interpolation des différents champs de la cinématique. En ce sens on est passé par quatre principales étapes :

- Prise en compte des neuf premières solutions établies par [21].
- Etablissement des champs des contraintes dérivant de la fonction d'Airy.
- Déterminations des champs des déformations par application de la loi de comportement (loi de Hooke).
- Détermination des champs des déplacements par intégration des champs des déformations.

La matrice de rigidité est construite par application du principe des travaux virtuels et en adoptant l'intégration analytique.

### 3.2 Caractéristiques de l'élément :

C'est un élément fini de plaque épaisse triangulaire d'élasticité plane, baptisé «*SBA3* » (voir figure 3.1). Chaque nœud possède trois degrés de liberté : les flèches  $w_i$  et les rotations  $\theta_{xi}$  et  $\theta_{yi}$ . Ce qui donne un total de neuf degrés de liberté.

Cet élément est formulé en utilisant le modèle en déformation, c'est-à-dire que les polynômes d'interpolation sont établis, en premier lieu pour décrire des champs des déformations. Les fonctions d'interpolation des champs des déplacements sont par la suite obtenues par intégration de ces polynômes. Pour des forces de volume nulles, le choix des fonctions d'approximation est fait à travers l'introduction de la fonction d'Airy  $\phi(x, y)$  qui permet de réduire le problème des conditions d'équilibre :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.01)$$

À l'équation bi-harmonique :

$$\nabla^4 \phi(x, y) = 0 \quad (3.02)$$

Avec

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3.03)$$

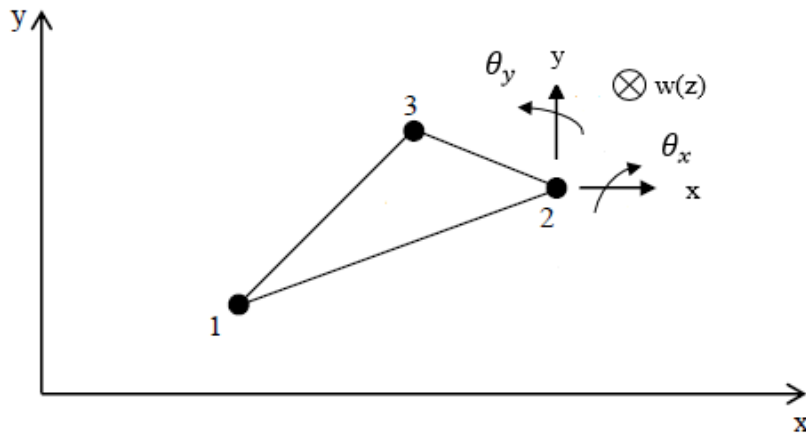


Figure 3.1 : Élément SBA3 ; Triangle avec trois nœuds et trois degrés de liberté par nœud.

Pour un état plan de contraintes et pour des matériaux isotropes, les déformations sont reliées aux contraintes par les relations suivantes (loi de Hooke) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Ou encore} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.04)$$

En introduisant la fonction d'Airy  $\phi(x, y)$ , les déformations seront exprimées comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \right); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( -\nu \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \right);$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \left( \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.05)$$

Les solutions bi-harmoniques de la fonction d'Airy  $\phi(x, y)$  considérées pour la construction du polynôme d'interpolation du champ des déformations sont celles établies par [ZWE52]. Chacun

des nœuds de cet élément possède trois degrés de liberté. Donc les champs de déplacement, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, possèdent neuf (09) constantes indépendantes ( $a_1, \dots, a_9$ ). De ce fait, on a considéré les neuf premières solutions (Voir annexe I) :

- 03 solutions conduisant aux mouvements de corps rigides,
- 03 solutions conduisant aux déplacements linéaires,
- 03 solutions conduisant à des déplacements non linéaires.

### 3.3 Pourquoi l'approche en déformation ?

Beaucoup d'études ont été menées sur les éléments finis flexionnels en utilisant différents modèles telle que le modèle en déplacement, en contrainte ou hybride.

L'approche en déplacement pose une problématique de convergence des résultats : En ce sens, pour minimiser l'écart entre la solution exacte et la solution approchée il fallait jouer sur la discrétisation physique en diminuant la dimension des éléments, ce qui n'est pas économique.

La réponse à cette problématique réside en l'utilisation de l'approche en déformation qui permet de donner des degrés plus élevés aux polynômes d'interpolation. Ce constat est observé pour les éléments développés par Ashwell et Al [12] qui ont utilisé le modèle en déformation au lieu de modèle en déplacement : précision des résultats, convergence plus rapide vers la solution exacte et sans avoir recours à la diminution de la taille des éléments, aspect économique.

Ces résultats ont orienté beaucoup de chercheurs à développer des éléments d'ordre supérieurs. Ainsi beaucoup d'éléments finis d'élasticité plane ont vu le jour, [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [11], [20]

Autres avantages de modèle en déformation :

- L'amélioration des comportements en cas de distorsion géométrique des maillages.
- Le contournement des problèmes connus de "blocage de cisaillement".

### 3.4 Cinématique :

Dans la figure (3.2), les rotations autour des deux axes x et y sont notées  $\theta_x$  et  $\theta_y$  et les pentes dans les deux directions sont définies par les variables  $\beta_x$  et  $\beta_y$  avec :

$$\beta_x = \theta_y \quad \beta_y = -\theta_x \quad (3.06)$$

La première des hypothèses de la théorie des plaques mince qui consiste à considérer qu'aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque implique que :

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.07)$$

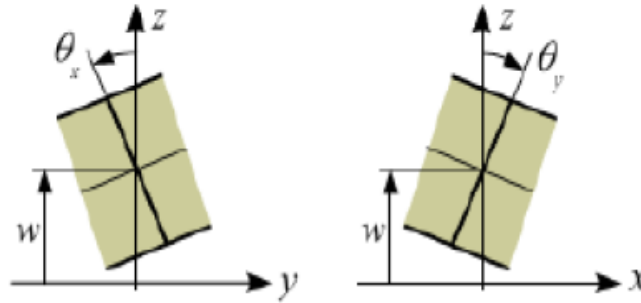


Figure 3.2 : Cinématique d'une plaque en flexion (théorie de Kirchoff).

Ainsi les rotations sont données par :

$$\beta_x = \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \beta_y = -\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.08)$$

Les déformations sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.09)$$



Les courbures liées aux moments sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ K_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ K_{xy} = \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

### 3.5 Conditions de compatibilité cinématique :

L'approche en déformation nécessite la vérification des équations de compatibilité cinématique qui se réduisent pour le cas de l'état plan de contraintes à l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.11)$$

Cette condition est automatiquement satisfaite puisque les champs des contraintes dérivent d'une fonction bi-harmonique.

### 3.6 Loi de comportement :

En état plan de contraintes et pour des matériaux isotropes, hypothèse généralement admise pour le calcul des structures minces (poutre, plaque et coque) [6], la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Ce qui se traduit en terme de relation (*Moment – Courbure*) par le système d'équation suivant :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.7 Equation d'équilibre :

L'équilibre d'un élément géométrique de dimension ( $dx \times dy$ ) est obtenu par le bilan des forces extérieures et des actions internes.

$$qdx dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}\right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) dx - Q_x dy - Q_y dx = 0 \quad (3.14)$$

Où  $Q_x$  et  $Q_y$  sont respectivement les efforts tranchants dans les sections perpendiculaires aux axes x et y. l'expression (3.14) est simplifiée pour donner :

$$q + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (3.15)$$

L'équilibre des moments autour des axes x et y donne :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.16)$$

En remplaçant les valeurs des équations (3.15) et (3.16) dans la relation établie par les équations (3.13), la condition de l'équilibre se traduirait en fonction de déplacement "w" par l'expression suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{q}{D} = 0 \quad (3.17)$$

$$\text{Avec : } D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

### 3.8 Fonctions d'interpolation :

Les neuf premières solutions bi-harmoniques de la fonction d'Airy  $\phi(x, y)$  constituent les fonctions associées aux neuf paramètres des polynômes d'interpolation des champs des contraintes, des déformations et enfin par intégration des champs des déplacements. Les polynômes d'interpolation des champs des déformations liés à la flexion (détaillés dans l'annexe I) sont obtenus par l'introduction de ces fonctions dans les équations (3.03). Ceux-ci se présentent comme suit :

$$\begin{cases} w = a_1 - a_2x - a_3y - a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{y^2}{2} - a_6xy + a_7(\nu x^3 + 3xy^2) + a_8(\nu y^3 + 3yx^2) + a_9(yx^3 - \nu xy^3) \\ \beta_x = a_2 + a_4x + a_6y + a_7(-3\nu x^2 - 3y^2) + 6a_8xy + a_9(-3yx^2 + \nu y^3) \\ \beta_y = a_3 + a_5y + a_6x + 6a_7xy + a_8(-3x^2 - 3\nu y^2) + a_9(-x^3 + 3\nu xy^2) \end{cases} \quad (3.18)$$

Sous forme matricielle le champ des déplacements donné par l'équation (3.17) s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)]. \{a_i\} \quad (3.19)$$

Avec :  $\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \rangle$

$$[f(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & \frac{-x^2}{2} & \frac{-y^2}{2} & -xy & vx^3 + 3xy^2 & vy^3 + 3yx^2 & yx^3 - vxy^3 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & -3vx^2 - 3y^2 & 6xy & -3yx^2 + vy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y & x & 6xy & -3x^2 - 3vy^2 & -x^3 + 3vxy^2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Connaissant les coordonnées nodales correspondant aux nœuds  $j$  ( $j = 1, \dots, 3$ ) et en application de la relation (3.19) le vecteur des déplacements nodaux au niveau élémentaire, est donné par :

$$\{q_e\} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \end{bmatrix} \{a_i\} \quad (3.21)$$

Avec :  $\{q^e\}^T = \langle w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, w_2, \beta_{x2}, \beta_{y2}, w_3, \beta_{x3}, \beta_{y3} \rangle$

$\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \rangle$

$$[A] = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \end{bmatrix} : \text{matrice des coordonnées nodales.}$$

La forme matricielle développée de la matrice des coordonnées nodales  $[A]$  est donnée en annexe.

De l'équation (3.21), on en déduit la valeur des paramètres ' $a_i$ ' qui sont données par le système d'équation suivant :

$$\{a_i\} = [A]^{-1}\{q^e\} \quad (3.22)$$

En remplaçant les valeurs des paramètres  $a_i$  données par la relation (3.22) dans le système d'équation (3.19), on obtient la relation :

$$\begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)][A]^{-1}\{q^e\} \quad (3.23)$$

Dans laquelle,  $[N] = [f(x, y)][A]^{-1}$  représente la matrice des fonctions de forme  $N_i$

En remplaçant dans les équations (3.10),  $w(x, y)$  par ses valeurs de l'équation (3.18), les courbures liées aux moments prendront la forme développée suivante :

$$[\chi] = \begin{Bmatrix} K_x(x, y) \\ K_y(x, y) \\ K_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{Ez} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6vx & 6y & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6x & -6vy & 6vxy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -6(x^2 - vy^2) \end{bmatrix} \cdot [A]^{-1}\{q^e\} \quad (3.24)$$

Ainsi la matrice de déformation est donnée comme suit :

$$[Q(x, y)] = \frac{1}{Ez} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6vx & 6y & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6x & -6vy & 6vxy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -6(x^2 - vy^2) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

### 3.9 Mise en équation :

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta\{\varepsilon\}^T \cdot [\sigma] dV^e \quad (3.26)$$

Sachant que :

$$\{\varepsilon\} = [N']\{q^e\} = [Q(x, y)] \cdot [A]^{-1}\{q^e\} \quad (3.27)$$

Et que :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.28)$$

Et en remplaçant dans l'expression (3.26)  $\{\varepsilon\}$  et  $\{\sigma\}$  par leurs valeurs données, respectivement dans les équations (3.27) et (3.28), on obtient :

$$(\delta W_{int})^e = \delta\{q^e\}^T \int_{V^e} [Q(x, y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D][Q(x, y)][A]^{-1}\{q^e\} dV^e \quad (3.29)$$

Ainsi la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (3.29) est la suivante :

$$[K^e] = \int_{V^e} [Q(x, y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D][Q(x, y)][A]^{-1} dV^e \quad (3.30)$$

L'expression (3.30) peut, s'écrire :

$$[K^e] = [A^{-1}]^T \int_{V^e} [Q(x, y)]^T \cdot [D][Q(x, y)] dV^e \cdot [A]^{-1} = [A^{-1}]^T [K_0][A]^{-1} \quad (3.31)$$

L'évaluation de l'expression  $[K_0]$  est établie par intégration analytique des différentes composantes résultant du produit matriciel  $[Q(x, y)]^T \cdot [D][Q(x, y)]$  dont les expressions prennent la forme  $H_{\alpha\beta} = Cx^\alpha y^\beta$ . La matrice  $[K_0]$  relative à notre élément est donnée en annexe.

### 3.10 Conclusion :

Les techniques et les formulations utilisées dans le développement de notre éléments devront contourner les différentes difficultés rencontrées dans le calcul numérique.

À niveau du développement, l'approche en déformation a contribué à l'enrichissement des champs de déplacement (raffinement p) en augmentant les degrés des polynômes, donc une plus grande précision dans l'approximation de la solution.

La construction des polynômes d'interpolation des champs de déformation à partir des solutions bi-harmoniques de la fonction d'Airy vise la prise en compte du phénomène physique lié à

l'effet de « Poisson » directement au niveau des fonctions de formes d'approximation des champs de la cinématique ce qui se traduit par une simulation réelle du comportement du matériau d'un côté, et une augmentation de la précision des résultats de l'autre.

La partie programmation de notre élément est réalisée en langage « Fortran », en implémentant la matrice de rigidité de notre élément dans le programme « Eléments finis » existant au Laboratoire de Génie Civil et d'Hydraulique de l'université 08 mai 1945 de Guelma.

## CHAPITRE IV : VALIDATION DE L'ELEMENT

### 4.1 Introduction :

Ce chapitre est consacré à la validation de l'élément fini flexionnel « SBA3 », à travers des tests cités dans la littérature et utilisés par plusieurs auteurs, pour estimer la performance de l'élément dans la convergence vers la solution exacte, pour différent cas de figures simulées, et sa robustesse dans le contournement des problèmes rencontrés.

Le premier test a pour but de présenter la capacité de notre élément à vérifier l'état de torsion constante. Ce problème était traité par [22] [23] dans la validation d'autres éléments.

Le deuxième test est destiné à vérifier la performance de l'élément vis-à-vis au blocage de cisaillement, pour une console soumise à une charge concentre à son extrémité libre, en faisant à chaque fois varier l'épaisseur.

Les autres essais sont des essais de convergence qui dépendent de type de maillages et des conditions limites et de chargement.

### 4.2 Torsion constante :

Ce test est utilisé pour évaluer la capacité des éléments finis à représenter l'état des torsions constantes. Il s'agit d'une plaque carrée (Figure 4.1) de côté  $L=8,0$ , d'épaisseur  $h=1,0$ , simplement appuyée ( $W_B=W_C=W_D=0$ ) et soumise à une force transversale  $P=5$  appliquée au coin A. Les paramètres du matériau sont : Module de Young  $E=10000$  – Coefficient de Poisson  $\nu=0,30$ .

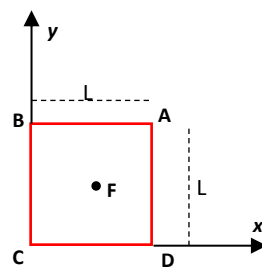


Figure 4.1 : Torsion d'une plaque carrée.

La solution exacte résultant de la théorie des plaques se présente comme suit :

Variable	Position	Valeur
$W_A$	Coin A	0,24960
$W_F$	Centre F	0,06

Tableau 4.1 : Résultats de la simulation de la torsion d'une plaque carrée.

Type d'élément	Déplacement "W"	
	Point A	Point F
<b>SBA3 (2x2)</b>	<b>0.24966</b>	<b>0.06</b>
ACM (8x8)	0.24972	0.06
HCT (8x8)	0.25002	0.06
DKT	0.24960	0.06
<b>Solution exacte (Thin theory)</b>	<b>0.24960</b>	<b>0.06</b>

**Commentaire :** Les résultats obtenus pour l'élément « SBA3 », sont présentés au tableau 4.1. La comparaison de ces résultats avec la solution exacte et avec ceux obtenus par d'autres éléments extraits de la littérature, montre une bonne performance de l'élément SBA3 dans la représentation de l'état des torsions constantes.

### 4.3 Tests de convergence :

#### 4.3.1 Cas d'une poutre console :

Ce test est utilisé pour évaluer le comportement des éléments finis face au phénomène de blocage lié au cisaillement transversal. Il s'agit d'une poutre-console (Figure 4.2) travaillant à la flexion simple, encastree à une extrémité et soumise à une force ponctuelle  $P=0.1$  N à l'autre extrémité. Les données géométriques et mécaniques utilisées sont : Longueur  $L=10$ m ; Largeur  $b=1.0$ m ; Module d'Young  $E= 1.2 \times 10^6$ N/m<sup>2</sup> ; Coefficient de Poisson  $\nu = 0$ . Ce test permet de vérifier le comportement de l'élément « SBA3 » en flexion simple en fonction de l'élanement (rapport  $L/h$ ).

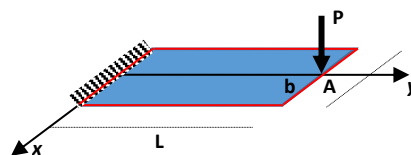


Figure 4.2 : Poutre – Console soumise à une charge ponctuelle.

Le comportement de l'élément fini exprimé à travers le déplacement "W" du point "A" dans la direction "Oz" est entrevu pour plusieurs rapports "L/h" ; h étant l'épaisseur de la poutre. La solution théorique du déplacement "W<sub>A</sub>" est donnée, avec k=5/6, comme suit :

$$w_t = \frac{4PL^3}{Ebh^3} \left( 1 + \frac{1}{2k} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \right) \quad (4.01)$$

Tableau 4.2 : Déplacement W<sub>A</sub> selon l'élancement L/h.

L/h	DSTM	ANST6	DKTM	SBA3	Solution théorique
1	5,10E-07	5,30E-07	3,10E-07	3,30E-07	3,33E-07
2	2,90E-06	3,00E-06	2,50E-06	2,64E-06	2,66E-06
4	2,00E-05	2,20E-05	2,00E-05	2,11E-05	2,13E-05
5	4,00E-05	4,20E-05	3,90E-05	4,13E-05	4,16E-05
10				3,30E-04	3,33E-04
50				4,13E-02	4,17E-02
100	0,313	0,323	0,313	0,330	0,333

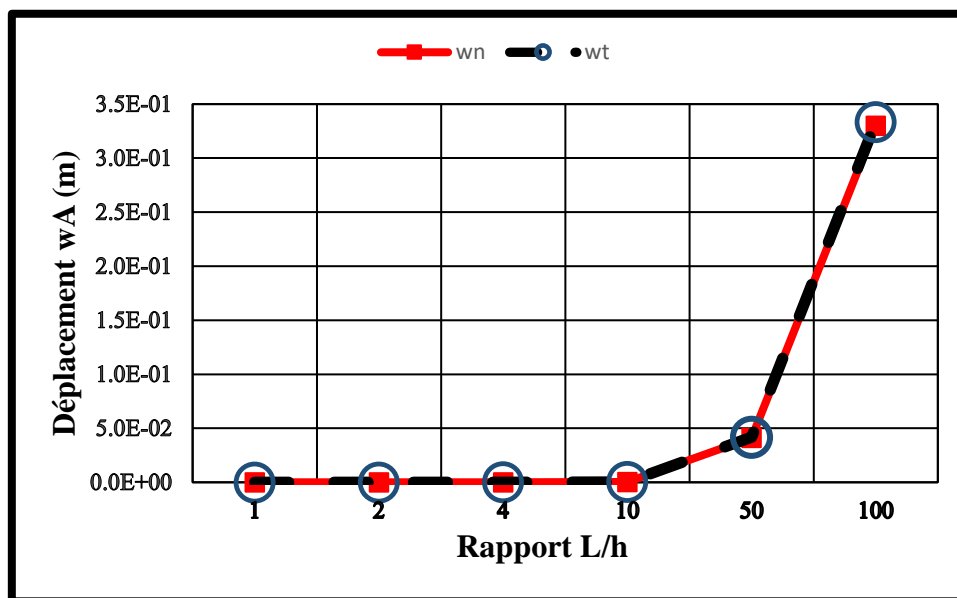


Figure 4.3 : Déplacement W<sub>A</sub> selon l'élancement L/h.

**Commentaire :**

Les résultats obtenus par l'élément « SBA3 » donnés dans le Tableau 4.2 et le graphe de la Figure 4.3, montrent une absence totale du phénomène de blocage lié au cisaillement transversal, puisque les déplacements obtenus se situent au niveau de la solution théorique quel



que soit l'éclatement (rapport L/h). Comme nous remarquons sa robustesse comparativement à certains éléments existants dans la littérature. Il est à noter que sa convergence vers la solution est obtenue avec un maillage composé de vingt (20) éléments.

### 4.3.2 Cas d'une plaque carrée isotrope :

Cet exemple repris par de nombreux auteurs dans la littérature, est utilisé pour vérifier la capacité des éléments finis, vis-à-vis de leur convergence en fonction de la taille du maillage. Pour cela, on considère une plaque carrée isotrope de côté « a » et d'épaisseur « h » (Figure 4.4).

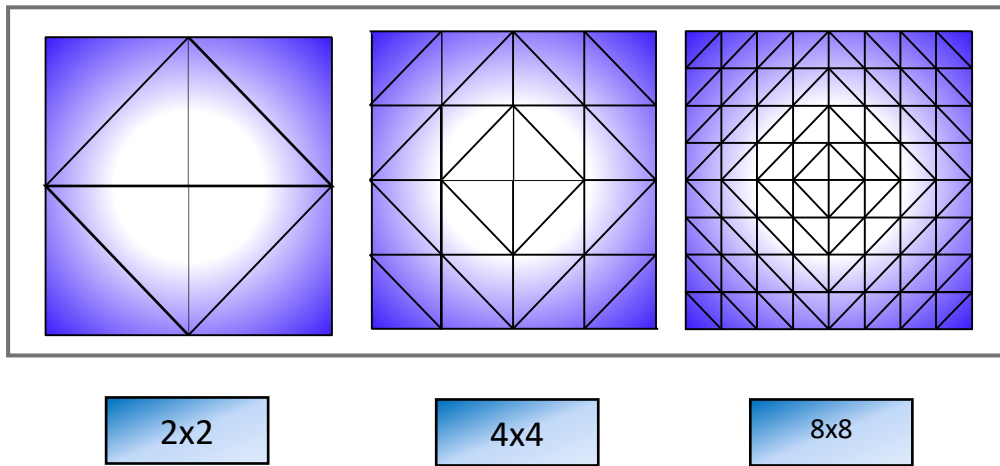


Figure 4.4 : Plaque carrée isotrope.

Cette vérification porte sur plusieurs cas de figure nuancés selon les conditions aux limites, le type de chargement et l'éclatement de la plaque (rapports « a/h »). Les solutions de références sont données comme suit :

- Plaque sollicitée par une charge q uniformément répartie :

$$w_{ref.} = \frac{\alpha_q q a^4}{100D} \quad (4.02)$$

- Plaque sollicitée par une force P appliquée au centre (point C) :

$$w_{ref.} = \frac{\alpha_P P a^2}{100D} \quad (4.03)$$

Avec :  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ ,

Selon les conditions aux limites et l'éclatement de la plaque les valeurs de  $\alpha_q$  et  $\alpha_P$  sont données dans le tableau 4.3 :

Tableau 4.3 : Valeurs référentielles de  $\alpha_q$  et  $\alpha_p$ .

Conditions aux limites	Plaque simplement appuyée sur ses quatre côtés		Plaque encastree sur ses quatre côtés	
	a/h=10	a/h=100	a/h=10	a/h=100
$\alpha_q$	0.46169	0.4062	0.15046	0.1260
$\alpha_p$	1.44267	1.1600	0.77775	0.5600

Les résultats obtenus, concernant la flèche au centre de la plaque (point C) sont comparés aux solutions de références et à celles d'autres éléments existants dans la littérature. Ceux-ci sont présentés dans les tableaux n° 4.4 – 4.5 – 4.6 – 4.7 et illustrés par les graphes des figures 4.5 – 4.6 – 4.7 – 4.8 – 4.9 – 4.10 – 4.11 – 4.12.

- *Plaque sollicitée par un chargement q uniformément réparti :*

Tableau 4.4 – Valeurs de  $\alpha$  pour la plaque simplement appuyée

L/h = 10 - $\alpha_q = 0.46169$			
N	R4	SBH8	SBA3
2	0,23169	0,35935	<b>0,1520</b>
4	0,36519	0,43161	<b>0,4187</b>
8	0,43142	0,45299	<b>0,4202</b>
L/h = 100 - $\alpha_q = 0.4062$			
N	R4	SBH8	SBA3
2	0,00446	0,08817	<b>0,1520</b>
4	0,01727	0,31235	<b>0,4188</b>
8	0,06128	0,39628	<b>0,4203</b>

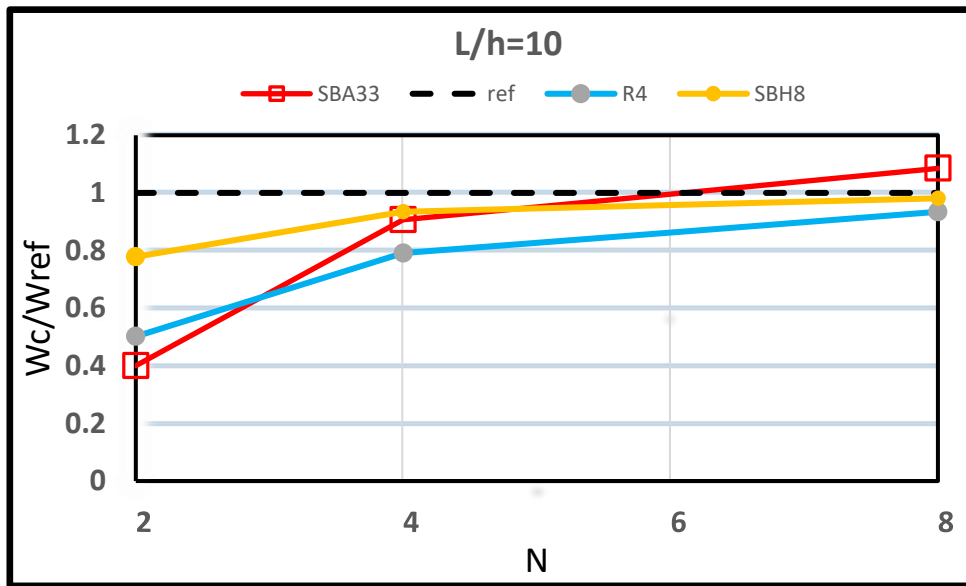


Figure 4.5 : Plaque simplement appuyée – Déplacement normalisé pour  $L/h=10$ .

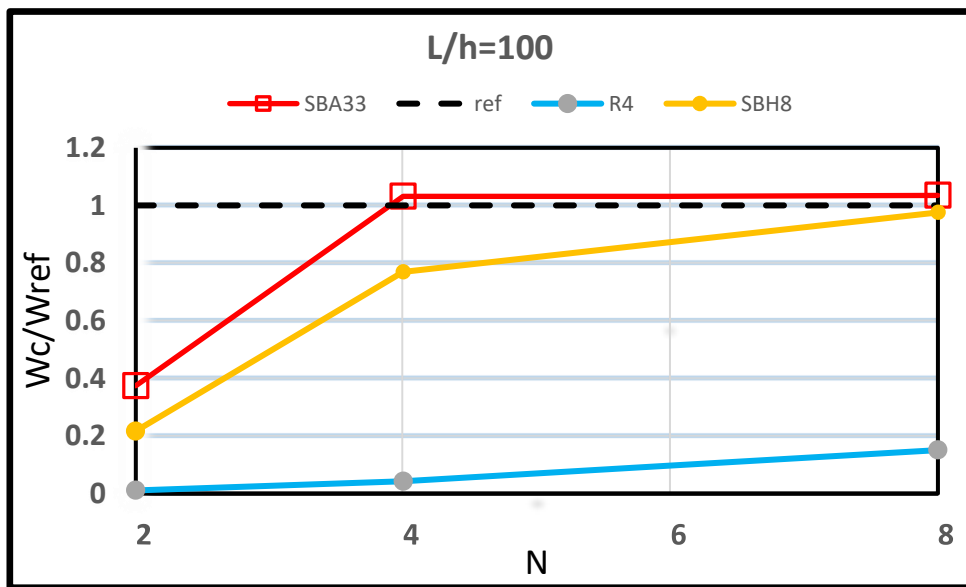


Figure 4.6 : Plaque simplement appuyée – Déplacement normalisé pour  $L/h=100$ .

Tableau 4.5 : Valeurs de  $\alpha$  pour une plaque encadrée sur ses quatre côtés

L/h =10 - $\alpha_q = 0.15046$			
N	R4	SBH8	SBA3
2	0,06989	0,09089	<b>0,0455</b>
4	0,11518	0,13871	<b>0,1329</b>
8	0,13954	0,14789	<b>0,1389</b>
L/h =100 - $\alpha_q = 0.1260$			
N	R4	SBH8	SBA3
2	0,00101	0,00273	<b>0,0455</b>
4	0,00367	0,05624	<b>0,1320</b>
8	0,01322	0,11797	<b>0,1295</b>

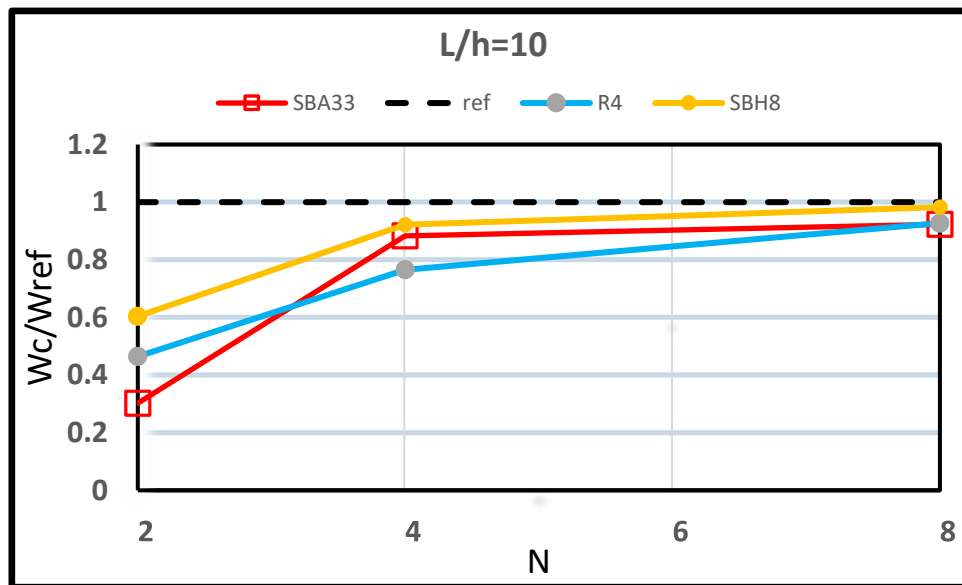


Figure 4.7 : Plaque encadrée sur ses quatre côtés – Déplacement normalisé pour L/h=10.

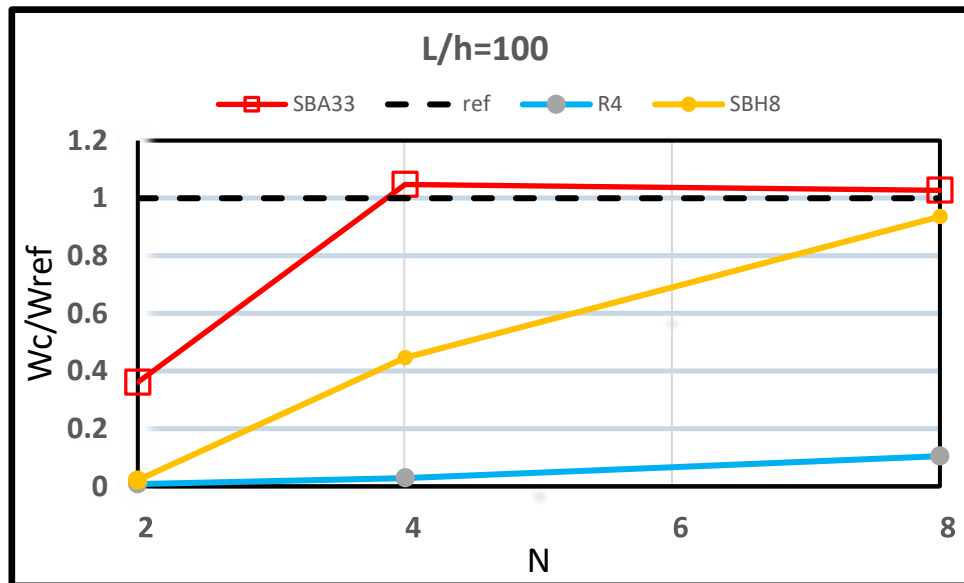


Figure 4.8 : Plaque encastree sur ses quatre cotes – Deplacement normalise pour  $L/h=100$ .

- *Plaque sollicitee par un chargement ponctuel P applique au centre :*

Tableau 4.6 : Valeurs de  $\alpha$  pour une plaque simplement appuye.

L/h = 10 - $\alpha_P = 1.44267$			
N	R4	SBH8	SBA3
2	0,73584	1,06336	<b>0,9116</b>
4	1,12951	1,30142	<b>1,2025</b>
8	1,34606	1,40198	<b>1,1984</b>
L/h = 100 - $\alpha_P = 1.160$			
N	R4	SBH8	SBA3
2	0,01342	0,25566	<b>0,9119</b>
4	0,04846	0,8563	<b>1,2029</b>
8	0,16901	1,11674	<b>1,1868</b>

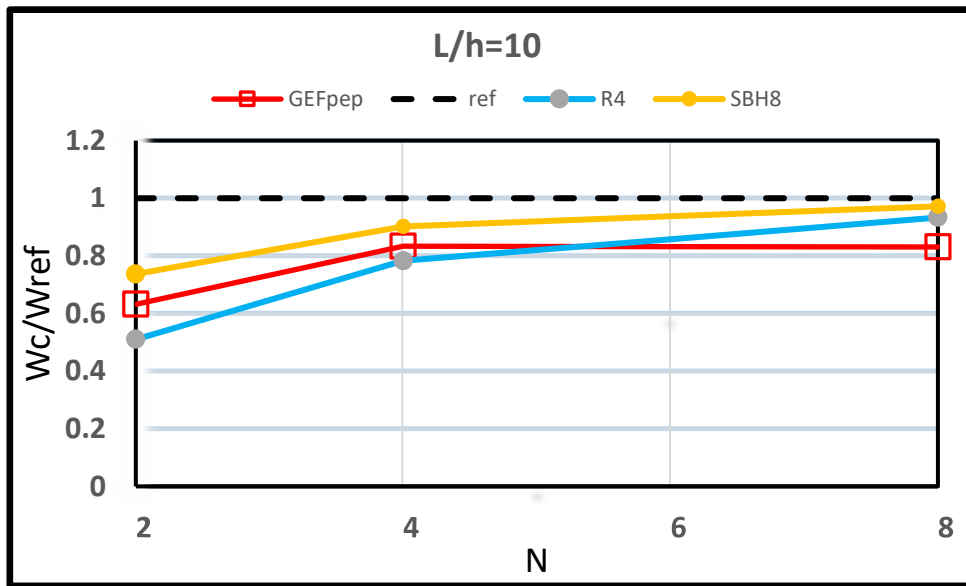


Figure 4.9 : Plaque simplement appuyée – Déplacement normalisé pour  $L/h=10$ .

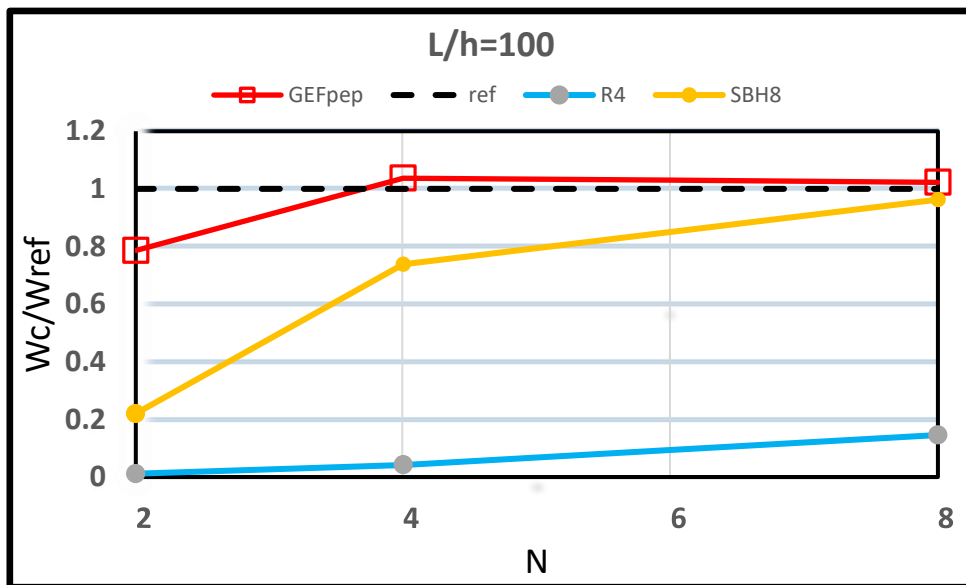


Figure 4.10 : Plaque simplement appuyée – Déplacement normalisé pour  $L/h=100$ .

Tableau 4.7 : Valeurs de  $\alpha$  pour une plaque encastrée.

L/h =10 - $\alpha_P = 0.77775$			
N	R4	SBH8	SBA3
2	0,32949	0,39486	<b>0,2939</b>
4	0,57104	0,65482	<b>0,6900</b>
8	0,71499	0,74492	<b>0,8244</b>
L/h =100 - $\alpha_P = 0.560$			
N	R4	SBH8	SBA33
2	0,00458	0,01078	<b>0,2730</b>
4	0,0169	0,24204	<b>0,4645</b>
8	0,06043	0,51216	<b>0,5358</b>

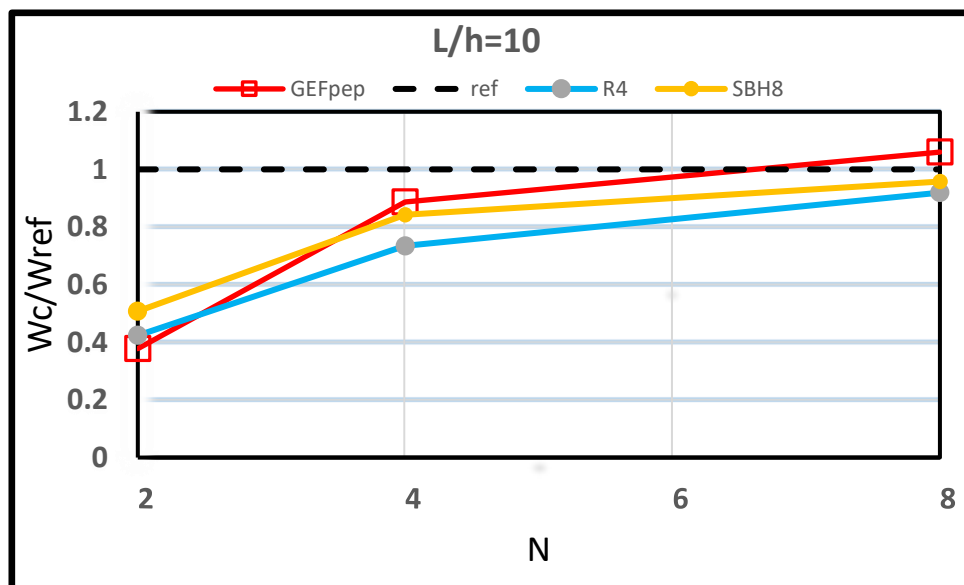


Figure 4.11 : Plaque encastrée – Déplacement normalisé pour L/h=10.

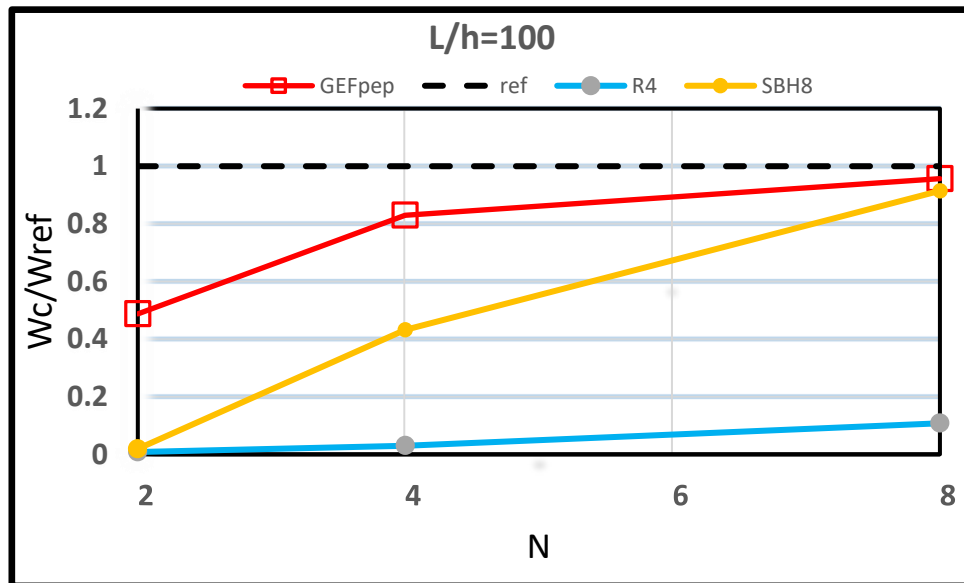


Figure 4.12 : Plaque encastrée – Déplacement normalisé pour  $L/h=100$ .

**Commentaire :**

L'analyse de ces résultats montre que :

- L'élément SBA3 donne une bonne convergence vers la solution de référence surtout pour les plaques élancés de rapport  $L/h = 100$  pour toutes les situations simulées (conditions aux limites, type de chargement et élancement), tandis qu'on remarque un abaissement négligeable dans la convergence pour le cas des plaques épaisses.
- Les erreurs relatives observées pour une taille du maillage  $N=8$  se présentent comme suit :

Tableau 4.8 : Erreurs relatives  $100(1 - w_{cal.}/w_{ref.})$ .

Elancement	Charge ponctuelle P au centre		Charge uniformément répartie q	
	SA	ENC.	SA	ENC.
L/h=10	3,66	6,00	8,98	7,68
L/h=100	2,31	4,32	1,45	2,77

- Au vu de ces observations et des comparaisons des résultats avec ceux des autres éléments existants dans la littérature, nous remarquons une robustesse de l'élément SBA3 surtout pour le traitement des structures en plaques mince.



**4.4 Plaque circulaire :**

Cet exemple a été utilisé par de nombreux auteurs dans la littérature, notamment (Batoz et al, 1990). Cette étude est établie selon plusieurs scénarios basés sur les conditions aux limites de la plaque sous chargement uniforme  $f$  et l'élancement. Comme, la plaque est discrétisée selon trois densités de maillage : 16, 28 et 116 (Figure 4.13). Les données géométriques et mécaniques sont : ( $R = 5$  ;  $\nu = 0,36$  ;  $f = 0,1$  ;  $E = 10^7$ ).

Les solutions de références sont  $w_{ref} = \frac{f.r^4}{64D} \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} + \phi \right)$  pour la plaque sur appuis simples et  $w_{ref} = \frac{f.r^4}{64D} (1 + \phi)$  pour la plaque encastree avec  $\phi = \frac{16}{5} \left( \frac{h}{r} \right)^2 \frac{1}{1-\nu}$   $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

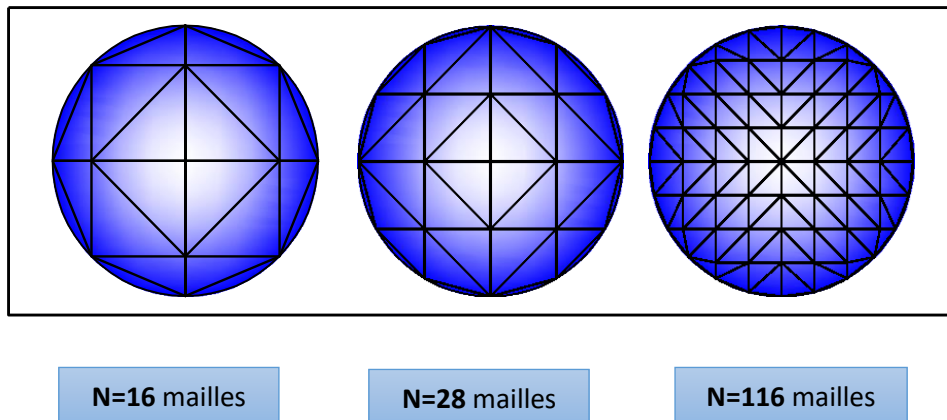


Figure 4.13 : Plaque circulaire – densités de maillage considérées

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.9 et illustrés par les graphes des figures 4.14 et 4.15.

Tableau 4.9 : Plaque circulaire – Déplacement  $W$  au centre.

ENCASTREE			
h/R	Maillage	Wref,	Wcalc,
0,04	16	1,2852 <sup>E</sup> -04	6,18 <sup>E</sup> -05
	28	1,2852 <sup>E</sup> -04	9,92 <sup>E</sup> -05
	116	1,2852 <sup>E</sup> -04	1,18 <sup>E</sup> -04
0,1	16	8,5680 <sup>E</sup> -06	3,95 <sup>E</sup> -06
	28	8,5680 <sup>E</sup> -06	6,35 <sup>E</sup> -06
	116	8,5680 <sup>E</sup> -06	7,53 <sup>E</sup> -06

SUR APPUIS			
h/R	Maillage	Wref,	Wcalc,
0,04	16	5,0352 <sup>E</sup> -04	3,99 <sup>E</sup> -04
	28	5,0352 <sup>E</sup> -04	4,61 <sup>E</sup> -04
	116	5,0352 <sup>E</sup> -04	5,05 <sup>E</sup> -04
0,1	16	3,2568 <sup>E</sup> -05	2,55 <sup>E</sup> -05
	28	3,2568 <sup>E</sup> -05	2,95 <sup>E</sup> -05
	116	3,2568 <sup>E</sup> -05	3,23 <sup>E</sup> -05

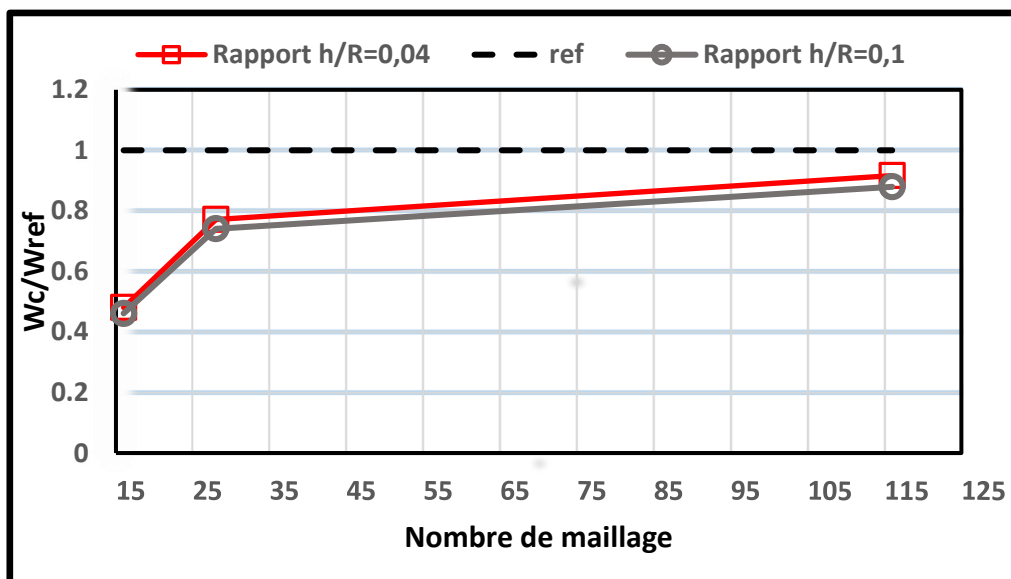


Figure 4.14 : – Plaque circulaire encastree– Déplacement normalisé au centre.

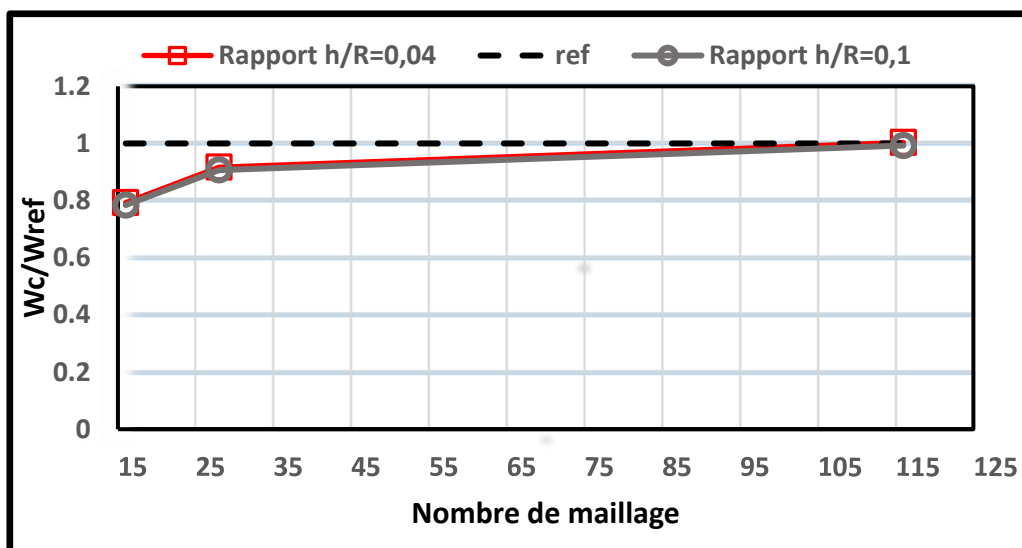


Figure 4.15 : Plaque circulaire simplement appuyée– Déplacement normalisé au centre.

**Commentaire :**

On remarque à travers ces résultats que l'élément *SBA3* présente un bon comportement vis-à-vis de ce test et une convergence rapide pour les différents cas de figures simulés. Cette performance est beaucoup plus significative pour la plaque élancée.

**4.5 Plaque biaise :**

Ce test représenté dans les figures 4.16 et 4.17 est réalisé en deux parties, la première s'agit d'une dalle biaise losange de 60° soumise à une charge uniformément répartie et supposée simplement appuyée sur ces deux côtés opposés, la deuxième d'une dalle biaise losange de 30° supposée appuyée sur ces quatre cotés et chargée par un chargement uniformément répartie. La solution de référence est énumérée dans le tableau 4.10. Elle est obtenue par différences finies (Razzaque 1973).

Tableau 4.10 : Les solutions de références pour les plaques biaise à 60° et à 30°.

Charge uniforme	Flèche au centre
Plaque à 60°	$0,007945qL^4/100D$
Plaque à 30°	$0,408*10^{-3}qL^4/100D$

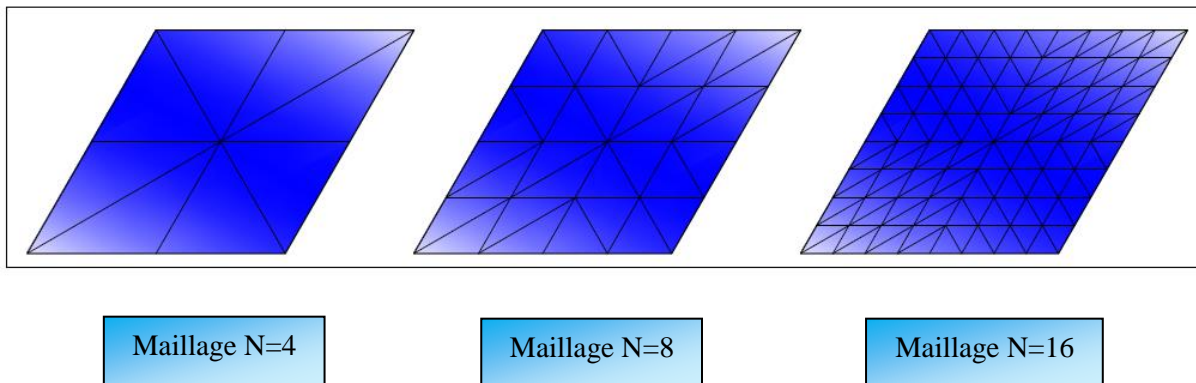


Figure 4.16 : Maillage d'une plaque biaise de 60°.

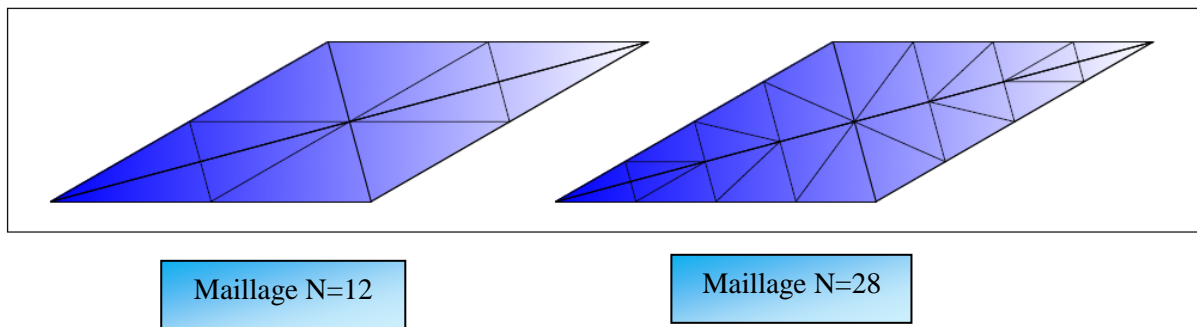


Figure 4.17 : Maillage d'une plaque biaisée de 30°.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 11 et illustrés par les graphes des figures 18 et 19.

Tableau 4.11 : Plaques biaisées appuyées sur ces deux côtés opposés—  
Déplacement  $W$  au centre.

60°			
L/h	Maillage	Wref,	Wcalc,
0,1	4	8,676E+00	6,10E+00
	8	8,676E+00	8,28E+00
	16	8,676E+00	8,35E+00
1,0	4	8,676E-03	6,10E-03
	8	8,676E-03	8,28E-03
	16	8,676E-03	8,35E-03
2,0	4	1,084E-03	7,63E-04
	8	1,084E-03	1,03E-03
	16	1,084E-03	1,04E-03
30°			
L/h	Maillage	Wref,	Wcalc,
0,1	12	4,455E-01	7,039E-01
	28	4,455E-01	4,703E-01
1,0	12	4,455E-04	7,039E-04
	28	4,455E-04	4,703E-04
2,0	12	5,569E-05	8,799E-05
	28	5,569E-05	5,879E-05

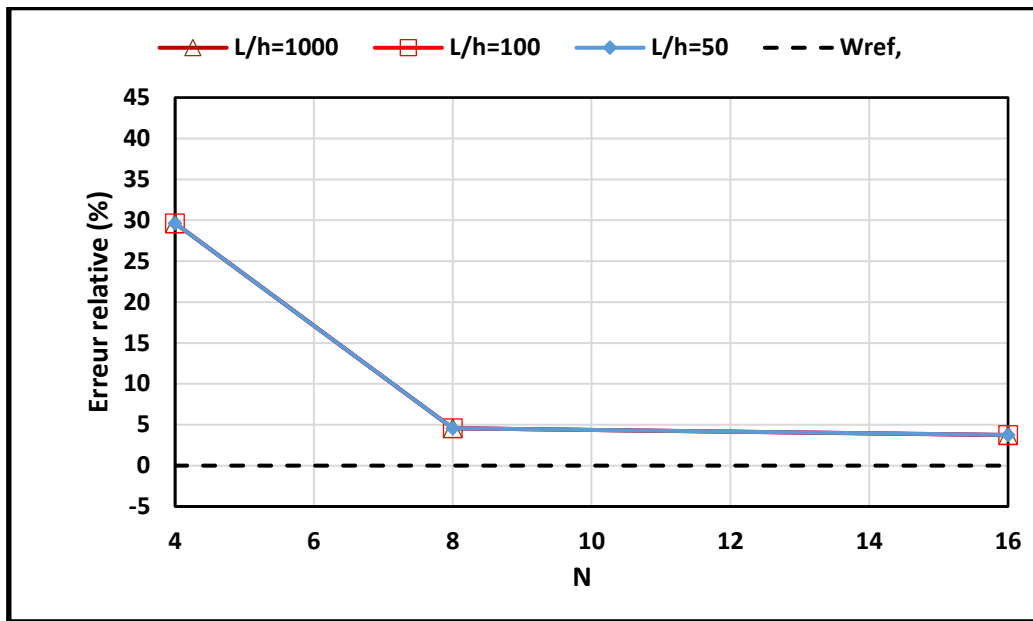


Figure 4.18 : – Plaque biseau 60° appuyée sur ces deux côtés opposés– Déplacement normalisé au centre.

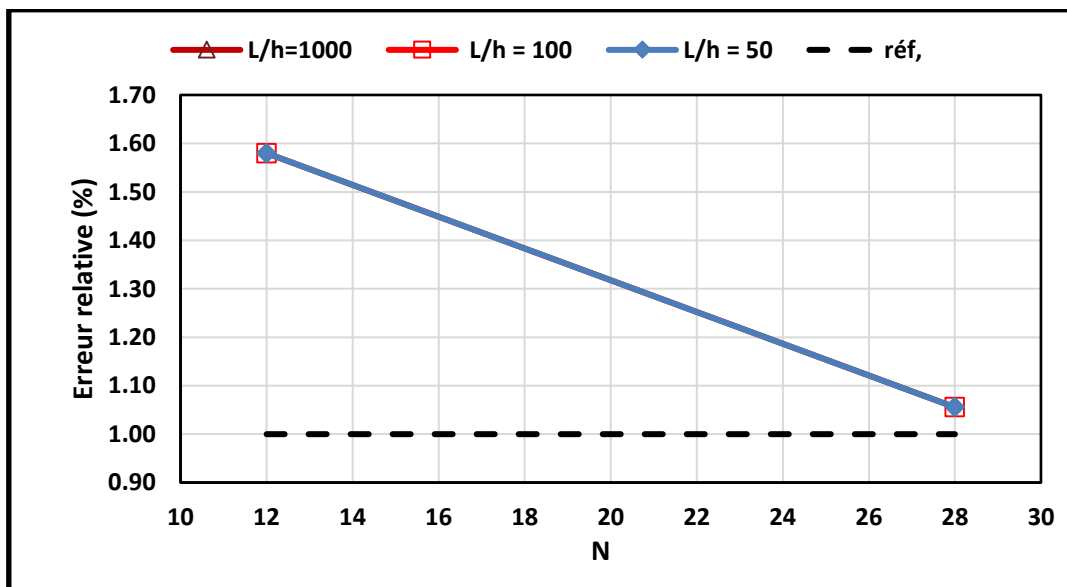


Figure 4.19 : Plaque biseau 30° appuyée sur ces quatre côtés opposés– Déplacement normalisé au centre.

**Commentaire :**

A travers ce test on remarque que l'élément « SBA3 » converge bien vers la solution de référence pour les différents cas de figure simulé, les résultats que donne cet élément en faisant varier l'élanement à chaque fois a prouvé sa performance dans le traitement des plaques baises.

### 4.5 Conclusion :

Dans ce chapitre on a validé l'élément fini flexionnel de plaque mince. Cet élément a prouvé sa performance et sa robustesse dans le traitement des plaques, grâce aux approches et techniques utilisées dans son développement. La comparaison avec d'autres éléments de la littérature a montré que l'élément peut rivaliser malgré sa simplicité de formulation par rapport à d'autres éléments. L'adoption de l'approche en déformation qui a contribué dans l'enrichissement de champ de déplacement, plus l'utilisation de l'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, ont augmenté à la fois la rapidité de convergence vers la solution et la performance de notre élément. Le choix de la fonction d'Airy comme fonction d'interpolation a permis de prendre en compte le coefficient de poisson, alors qu'il ne n'est pas considéré dans les fonctions issues de triangle de Pascal, ce qui a donné à l'élément une assimilation au comportement réelle, par conséquent une augmentation de la précision.

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Dans cette étude nous avons développé un nouvel élément fini flexionnel triangulaire d'élasticité plane. L'approche adoptée, les concepts et les techniques de développement utilisés, ont permis d'aboutir à un élément fini concurrentiel qui combine entre la performance, l'efficacité et la simplicité de sa formulation.

L'utilisation des solutions bi-harmoniques de la fonction d'Airy dans le développement fonctionnel a contribué à une amélioration remarquable des résultats à travers l'introduction de coefficient de poisson dans les polynômes d'interpolation, de plus l'adoption de l'approche en déformation dans la formulation, nous a donné la possibilité d'enrichir les champs de déplacements, par conséquent une plus grande précision dans l'approximation de la solution.

L'utilisation de l'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, a donné à notre élément des comportements robustes vis-à-vis de la distorsion géométrique du maillage.

Ces constatations ont été confirmées à travers une série de tests normalisés destinés à étudier la performance de notre élément dans les différents cas de figure. Les essais de convergence ont permis de faire les observations suivantes :

- Une rapidité dans la convergence vers la solution théorique sans avoir recours à minimiser la taille de maillage.
- Les résultats remarquables que donne l'élément dans le traitement des plaques de différentes épaisseurs, malgré sa formulation qui ne prend pas en compte l'énergie de déformation due au cisaillement.
- Malgré sa simplicité de formulation, notre élément a donné des résultats très satisfaisants en concurrence avec d'autres éléments se basant sur d'autres approches et formulations.

Le test de blocage de cisaillement a montré que l'élément se comporte très bien même pour les plaques épaisses ou le cisaillement devient important.

En perspectives, un travail nouveau portant sur la comparaison entre différentes formulations est recommandé, dans le but de voir plus concrètement l'influence de la fonction d'Airy sur les résultats, par rapport à d'autres fonctions d'interpolation.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

- [1] : M. HIMEUR., *Développement d'éléments membranaires nouveaux d'élasticité plane basés sur la formulation en déformation*, P104, Mémoire de magister université de Guelma 2008.
- [2] : S. DERBANE., *Modélisation des plaques par la méthode des éléments finis*, P133, mémoire de magister université de Biskra, 2012.
- [3] : Y. SAYIAD., *La modélisation des plaques de formes géométriques irrégulières par la méthode des éléments finis*, P13, Mémoire de magister université de Biskra.
- [4] : S. DRAPIER., *Mécanique des Structures et Approximations Numériques*, P118.
- [5] : M. HIMEUR., *Mécanique des milieux continus*, P121, cours de master université de Guelma, 2018.
- [6] : M. HIMEUR., *Contribution à la formulation de quelques éléments de coques basés sur la formulation en déformation*, P42, Thèse de doctorat université de Guelma, 2014.
- [7] : J.L BATOZ. BATHE, LEE-WING HO., "A study of three-node triangular plate bending elements", P01.
- [8] :M. HIMEUR, M. GUENFOUD., *Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach*, [European Journal of Computational Mechanics](#) Volume 20 2011 – Issue 7-8.
- [9] : L. BELOUNAR, M. GUENFOUD., *A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending*, Thin-Walled structures 43-2005, pp 47-63 (2004)
- [10] : F.BOURAS., *Développement et validation d'un élément quadrilatère à 4 nœuds et 12 D.L en éléments finis*. Mémoire de magister université d'Annaba.
- [11] : M.T. BELARBI et A.CHARIF., *Nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses*, apparu dans la revue européenne des éléments finis, Vol 8, n°2, 1999.
- [12] : D.G ASHWELL and A.B SABIR., T.M ROBERTS., *Further studies in the application of curved finite elements to circumar arches*, IJMS Vol 13, pp. 507-517, 1971.



- [13] : D.G ASHWELL and A.B SABIR., *A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain function*, IJMS Vol 14, pp. 171-183, 1972.
- [14] : A.B SABIR., *Stiffness matrices for the general deformation (out of plane and inplane) of curved beam elements based on independent strain functions*, The mathematics of finite elements and application II, Edition J.R. Whiteman. Chapter 34, 411-421, Academic Press, 1975.
- [15] : A.B SABIR and D.G ASHWELL., *Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells*, The mathematics of finite elements and application III, Editor J.R. Whiteman, Academic Press, 1978.
- [16] : A.B SABIR., *A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom*, chapter 9 in proceeding of the 2<sup>nd</sup> International conference on variational methods in engineering, Southampton University, Springer verlag, Berlin, 1985, pp 17-25.
- [17] : A.B SABIR., and F. RAMADHANI., *A shallow shell finite element for general shell analysis*, Variational methods in engineering Proceeding of the 2<sup>nd</sup> international conference Southampton England, 1985.
- [18] : A.B SABIR and H.Y SALHI., *A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates*, Res. Mathematica 19, pp 1-16, 1986.
- [19] : M.T BELARBI et A.CHARIF., *Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan*, Revue européenne des éléments finis Vol 7, n°4, pp 439-458, 1998.
- [20] : M. HIMEUR., développement membranaire nouveau d'élasticité plane basée sur la formulation en déformation, Thèse de magistère, Université de Guelma (Algérie), département de Génie Civil, Novembre 2008.
- [21] : K. Zweiling, Grundlagen einer, *Theorie der biharmonischen Polynome*, Verlag Technik Berlin, 1952.
- [22] : Yuan F., Miller RE., *A rectangular finite element for moderately thick flat plat*, Computer struct. 1988, 30, p. 1375-87.
- [23] : Clough R.W., Tocher JL., *Finite element stiffness matrixes for analysis of plate bending*, *Proceeding of first conference Matrix methods in structural mechanics*, Wright-Pattersonm Qir force basem Ohiom, 1965, p 515-812.

ANNEXE I – Formulation des champs d’approximation à partir  
des solutions homogènes (polynômes bi-harmoniques) de la  
fonction d’Airy

**I-a/ Champ des déformations :**

$a_k$ $k$	$F = P_{kl}(x, y)$	Contraintes			Déformations			Modes
		$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$	$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( -\nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)$	$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \left( -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)$	
1	1	0	0	0	0	0	0	Conduisant aux Mouvements rigides
2	$x$	0	0	0	0	0	0	
3	$y$	0	0	0	0	0	0	
4	$\frac{(\nu x^2 + y^2)}{2(1-\nu^2)}$	$\frac{1}{1-\nu^2}$	$\frac{\nu}{1-\nu^2}$	0	$\frac{1}{E}$	0	0	Conduisant aux déplacements linéaires
5	$\frac{(x^2 + \nu y^2)}{2(1-\nu^2)}$	$\frac{\nu}{1-\nu^2}$	$\frac{1}{1-\nu^2}$	0	0	$\frac{1}{E}$	0	
6	$\frac{-xy}{(1+\nu)}$	0	0	$\frac{1}{1+\nu}$	0	0	$\frac{2}{E}$	
7	$x^3$	0	$6x$	0	$\frac{-6\nu x}{E}$	$\frac{6x}{E}$	0	Conduisant aux déplacements non linéaires
8	$y^3$	$6y$	0	0	$\frac{6y}{E}$	$\frac{-6\nu y}{E}$	0	
Choix du polynôme au niveau des déformations								
9					$-6xy$	$6\nu xy$	$-6(x^2 - \nu y^2)$	

**I-b / Champ des déplacements :**

Paramètres	Champs des courbatures			Champs des déplacements		
	$EzK_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x}$	$EzK_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y}$	$EzK_{xy} = \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)$	$Ez\beta_x = \theta_y$	$Ez\beta_y = -\theta_x$	$Ezw$
	$\varepsilon_x = zK_x$	$\varepsilon_y = zK_y$	$\gamma_{xy} = zK_{xy}$			
$a_1$	0	0	0	0	0	1
$a_2$	0	0	0	1	0	$-x$
$a_3$	0	0	0	0	1	$-y$
$a_4$	1	0	0	$x$	0	$\frac{-x^2}{2}$
$a_5$	0	1	0	0	$y$	$\frac{-y^2}{2}$
$a_6$	0	0	2	$y$	$x$	$-xy$
$a_7$	$-6vx$	$6x$	0	$-3vx^2 - 3y^2$	$6xy$	$vx^3 + 3xy^2$
$a_8$	$6y$	$-6vy$	0	$6xy$	$-3x^2 - 3vy^2$	$vy^3 + 3yx^2$
$a_9$	$-6xy$	$6vxy$	$-6(x^2 - vy^2)$	$-3yx^2 + vy^3$	$-x^3 + 3vxy^2$	$yx^3 - vxy^3$

ANNEXE II – Matrices des coordonnées nodales [A] de l'élément « SBA3 »

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & -y_1 & \frac{-x_1^2}{2} & \frac{-y_1^2}{2} & -x_1y_1 & vx_1^3 + 3x_1y_1^2 & vy_1^3 + 3y_1x_1^2 & y_1x_1^3 - vx_1y_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & -3vx_1^2 - 3y_1^2 & 6x_1y_1 & -3y_1x_1^2 + vy_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_1 & x_1 & 6x_1y_1 & -3x_1^2 - 3vy_1^2 & -x_1^3 + 3vx_1y_1^2 \\ 1 & -x_2 & -y_2 & \frac{-x_2^2}{2} & \frac{-y_2^2}{2} & -x_2y_2 & vx_2^3 + 3x_2y_2^2 & vy_2^3 + 3y_2x_2^2 & y_2x_2^3 - vx_2y_2^3 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & -3vx_2^2 - 3y_2^2 & 6x_2y_2 & -3y_2x_2^2 + vy_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_2 & x_2 & 6x_2y_2 & -3x_2^2 - 3vy_2^2 & -x_2^3 + 3vx_2y_2^2 \\ 1 & -x_3 & -y_3 & \frac{-x_3^2}{2} & \frac{-y_3^2}{2} & -x_3y_3 & vx_3^3 + 3x_3y_3^2 & vy_3^3 + 3y_3x_3^2 & y_3x_3^3 - vx_3y_3^3 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & -3vx_3^2 - 3y_3^2 & 6x_3y_3 & -3y_3x_3^2 + vy_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 & x_3 & 6x_3y_3 & -3x_3^2 - 3vy_3^2 & -x_3^3 + 3vx_3y_3^2 \end{bmatrix}$$

### Annexe III – Matrice [ **K<sub>0</sub>** ]

$$[K_0] = \iint [Q^T] \cdot [D] \cdot [Q] \cdot dx \cdot dy$$

**III-a** / Forme développée avant intégration de la matrice [ **K<sub>0</sub>** ] :

$$[K_0] = \iint [Q^T] \cdot [D] \cdot [Q] \cdot dx \cdot dy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \nu & 0 & 0 & -6 \cdot x \cdot y \cdot (\nu^2 - 1) & 6 \cdot x \cdot y \cdot (\nu^2 - 1) \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 1 & 0 & -6 \cdot x \cdot (\nu^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 - 2 \cdot \nu & 0 & 0 & 6 \cdot (\nu - 1) \cdot (x - \nu \cdot y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \cdot x \cdot (\nu^2 - 1) & 0 & -36 \cdot x^2 \cdot (\nu^2 - 1) & 36 \cdot \nu \cdot x \cdot y \cdot (\nu^2 - 1) & -36 \cdot \nu \cdot x^2 \cdot y \cdot (\nu^2 - 1) \\ 0 & 0 & 0 & -6 \cdot y \cdot (\nu^2 - 1) & 0 & 0 & 36 \cdot \nu \cdot x \cdot y \cdot (\nu^2 - 1) & -36 \cdot y^2 \cdot (\nu^2 - 1) & 36 \cdot x \cdot y^2 \cdot (\nu^2 - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 6 \cdot x \cdot y \cdot (\nu^2 - 1) & 0 & 6 \cdot (\nu - 1) \cdot (x - \nu \cdot y) & -36 \cdot \nu \cdot x^2 \cdot y \cdot (\nu^2 - 1) & 36 \cdot x \cdot y^2 \cdot (\nu^2 - 1) & -18 \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu^2 \cdot y^2 + 2 \cdot \nu \cdot x^2 \cdot y^2 - 2 \cdot \nu \cdot x \cdot y + 2 \cdot x^2 \cdot y^2 + x^2) \end{bmatrix}$$

**III-b** / Forme développée après intégration de la matrice  $[K_0]$  :

$$H_{\alpha\beta} = \iint X^{\alpha-1} \cdot Y^{\beta-1} \cdot dx \cdot dy$$

$$\begin{aligned}
 & [K_e] \\
 = & \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & H_{11} & \nu H_{11} & 0 & 0 & -6(\nu^2 - 1)H_{12} & 6(\nu^2 - 1)H_{22} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \nu H_{11} & H_{11} & 0 & -6(\nu^2 - 1)H_{21} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2 - 2\nu)H_{11} & 0 & 0 & 6(\nu - 1)(H_{21} - \nu H_{12}) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -6(\nu^2 - 1)H_{21} & 0 & -36(\nu^2 - 1)H_{31} & 36\nu(\nu^2 - 1)H_{22} & -36\nu(\nu^2 - 1)H_{32} & 36(\nu^2 - 1)H_{23} \\
 0 & 0 & 0 & -6(\nu^2 - 1)H_{12} & 0 & 0 & 36\nu(\nu^2 - 1)H_{22} & -36(\nu^2 - 1)H_{13} & 36(\nu^2 - 1)H_{23} & -18(\nu - 1)(\nu^2 H_{13} + 2\nu H_{33} - 2\nu H_{22} + 2H_{33} + H_{31}) \\
 0 & 0 & 0 & 6(\nu^2 - 1)H_{22} & 0 & 6(\nu - 1)(H_{21} - \nu H_{12}) & -36\nu(\nu^2 - 1)H_{32} & 36(\nu^2 - 1)H_{23} & -18(\nu - 1)(\nu^2 H_{13} + 2\nu H_{33} - 2\nu H_{22} + 2H_{33} + H_{31}) & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$