Université du 8 mai 1945 – Guelma

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique

Mémoire de fin d'étude
pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Maintenance d'Equipements Industriels

Présenté par : ***Larbi DJEMILI***

===

Analyse dynamique des paliers aéroélastiques

===

Sous la Direction de :

Pr. Mustapha LAHMAR

Année Universitaire 2016 / 2017

Dédicace

Ce travail est dédié à ma très chère mère qui a toujours cru en moi et m'a encouragé et conseillé vivement à reprendre mes études.

Remerciements

Merci à Dieu le Tout Puissant de m'avoir donné la force et le courage de commencer et de terminer ce modeste travail.

Je tiens particulièrement à remercier vivement mon encadreur M. Mustapha LAHMAR pour le thème qu'il m'a proposé et le soutien permanent qu'il m'a apporté et pour son accompagnement tout au long de mon travail par ces conseils et les moyens nécessaires mis à ma disposition pour mener à bien cette étude.

D'une façon générale je remercie vivement l'ensemble des enseignants du département pour leur engagement et disponibilité et leur permanent encouragement.

Table des matières

Résumé

L'amélioration des performances des machines passent par le bon choix des matériaux, des éléments de guidage en rotation des arbres (palier) et la conformité de la machine par rapport aux exigences légales, techniques et commerciales et environnementales. Ces exigences sont de plus en plus sévères, et on cherche de meilleur rendement à moindre coup et conformément aux exigences en vigueur.

En effet, durant l'histoire de la fabrication de machines, on s'est focalisé sur l'amélioration des éléments de guidage et notamment quand on est en face d'utilisation de paliers lisses, sachant que 35% du coût de la maintenance est lié à la lubrification des paliers, ajoutant à ça l'encombrement et les risques sur l'environnement. Le palier à gaz a vu le jour pendant les années soixante motivé par des avantages remarquables. On en fabrique aujourd'hui pour l'aéronautique, l'aviation et les compresseurs de gaz.

Le comportement dynamique des paliers lubrifiés par l'air a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche de modélisation, nous revenons dans cette étude au premier palier à feuilles déformables développé par MITI, utilisant une approche linéaire pour étudier son comportement par l'analyse des coefficients de raideur et amortissement et leurs comportements en fonction du type de fluide considéré et des fréquences d'excitations auxquelles le palier est exposé.

Les résultats obtenus montrent l'effet positif de l'élasticité des feuilles (bumps) constituant le palier sur le champ de pression, la géométrie du film d'air.

Introduction générale

Du plus petit moteur de quelques grammes à la plus grosse turbomachine, l'étude des éléments de guidage en rotation (paliers) joue un rôle très important dans la conception des machines. En effet, l'évolution de la conception de machines et des conditions d'utilisations était conditionnée par l'amélioration du rendement et de la stabilité dynamique des paliers.

Les exigences sont de plus en plus sévères notamment dans le domaine de l'aviation où on cherche le maximum de rendement avec l'encombrement le plus simple et le poids le moins élevé possible. Malgré toutes les qualités du premier appareil supersonique de transport de voyageurs « Concorde », ce dernier n'a pas pu résister longtemps et a cédé la place aux appareils les plus performants en matière de coût par siège.

Concorde mach 2.02
Consommation par passager 17 litres/100km

Boeing 747 Mach 0.85
Consommation par passager 03 litres/100km

Fig. 1 : Consommation du kérosène par siège

Réduire le poids tout en assurant le même rendement passe par l'amélioration de la conception des paliers, les paliers lisses classiques lubrifiés à l'huile malgré qu'ils permettent de transporter des charges importantes présentent certains inconvénients contraignants : limites en vitesses, cout de maintenance très élevés, encombrement causé par les équipements annexes à intégrer, les problèmes de fuites sans perdre de vue l'impact sur l'environnement. Outre cela, les conditions de démarrage et d'arrêt peuvent être fatales. Depuis les années soixante une nouvelle génération de paliers lisses refroidis à l'air a vu le jour, avec les avantages de propreté, résistance à la température, simplicité et moindre coût et peuvent fonctionner à des vitesses élevées. De tels paliers prennent de plus en plus de la place dans les applications industrielles. En effet, ces nouveaux paliers sont aujourd'hui couramment utilisés en aéronautique tels que les ACM « Air Cycle Machine » montés dans des appareils militaires **[13]** et dans des compresseurs de gaz. Néanmoins, ces paliers à air se caractérisent par un très faible amortissement. Le rajout de feuilles déformables rend l'alésage déformable et permet ainsi d'améliorer sensiblement les caractéristiques de ce type de paliers.

Fig. 2 Photographies d'un ACM avec pack de refroidissement et d'un ACM MITI allégé

Aujourd'hui MITI (Mohawk Innovate Technology Incorporation) qui est une firme leader dans le domaine des paliers à feuilles lubrifiés par l'air est sur des projets an collaboration avec la NASA pour le développement de plusieurs équipements voire la fabrication de moteurs à réaction 100% (free oil) refroidis à l'air ! Il convient de noter que des tests ont déjà été faits sur l'appareil Navy's BQM-74 **[13]**.

De nombreux travaux de recherche portant sur la modélisation et la simulation numériques sont en course pour la résolution du problème de lubrification élasto-aérodynamique ou thermo-élasto-aérodynamique considéré comme un problème d'interaction fluide-structure en utilisant la résolution par ordinateur des équations gouvernant le problème afin de mieux comprendre le comportement dynamique du système rotor-palier.

Nous essayons dans la présente étude de revenir à la première génération de paliers à feuilles lubrifiés à l'air de type MITI (actuellement on est à la quatrième génération) en vue de déterminer les caractéristiques dynamiques, en particulier les coefficients de raideurs et d'amortissement. Ces derniers servent comme des données pour l'analyse de la stabilité et de la réponse dynamique du système.

Dans le premier chapitre, nous présentons un aperçu global sur les types de paliers utilisés dans l'industrie avec plus de détails sur les paliers lisses expliquant les différents types de paliers refroidis à l'air en mettant l'accent sur les paliers à feuilles déformables de type MITI objet de la présente étude.

Dans le chapitre qui suit, nous rappelons les lois qui gouvernent le fonctionnement de ces paliers, en particulier les équations de l'hydrodynamique, les équations fondamentales de la dynamique des fluides qui sont basées sur les lois de conservation masse-quantité de mouvement- énergie et l'équation de Reynolds qui en découle considérée comme l'équation fondamentale dans l'étude des paliers fluides.

Le troisième chapitre est réservé à la modélisation du système par une approche dynamique linéaire qui a donc pour objet de calculer les coefficients de raideurs et d'amortissement du palier.

La normalisation et la discrétisation de l'équation de Reynolds compressible modifiée par la méthode des différences finies sera présentée en détails.

Nous finirons en chapitre quatre par la présentation des résultats de l'étude en mettant l'accent sur l'impact des couples de contraintes présents dans le fluide sur le comportement dynamique linéaire des paliers rigide et à feuilles.

Mots clés- paliers à gaz, équation de Reynolds, champ de pression, feuilles déformables,

Chapitre I

Type de paliers lisses

I-1 Introduction :

Les paliers lisses à portance hydrodynamique classique sont refroidis à l'huile et permettent le transport de charges importantes mais à des vitesses limités. Par ailleurs, la contrainte de circuit fermé d'huile est source d'échauffement et de dégradation de sa qualité ce qui impose des mécanismes complexes de contrôle et de surveillance en maintenance prédictive de la température et des caractéristiques de l'huile. Pour limiter la dissipation d'énergie par frottement, les paliers refroidis à l'air semblent être les mieux adoptés surtout en cas de faibles charges de rotors tournants à grandes vitesses.

Grace au développement de nouveaux matériaux, l'outil informatique a permis la modélisation de plusieurs systèmes complexes, beaucoup de recherches sont en course pour élargir le domaine d'utilisation de ces paliers et les présenter comme les paliers de l'avenir surtout qu'ils ne présentent aucun risque sur l'environnement, ils assurent une meilleure préservation de la puissance et une meilleure stabilité en rotation à des vitesses qui peuvent aller jusqu'à 300 000 Tr/mn ($4^{ème}$ génération de MITI). Par ailleurs, ces paliers présentent certains inconvénients :

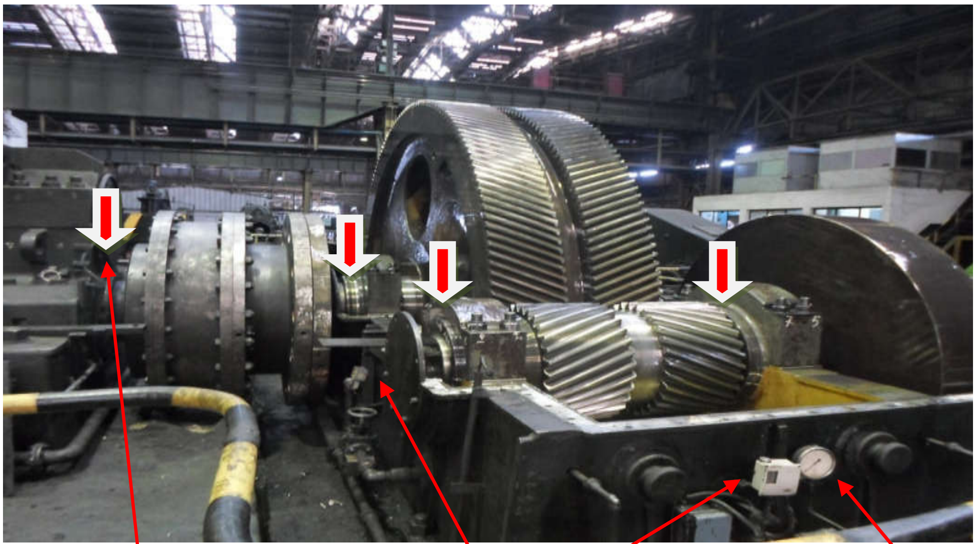
- Limite en charge vu que les pressions d'air sont très faibles par comparaison à la pression de l'huile.
- Assurer un guidage avec moins d'usure impose des exigences sévères sur les tolérances d'usinage des arbres et des paliers en feuilles montées avec des jeux radiaux très faibles.
- Les matériaux à utiliser doivent présenter de bonne qualité de résistance aux frottements. Et Les conditions de démarrage et d'arrêt ou il y a contact arbre coussinet à sec d'où la nécessité de revêtement spécifique. Un palier refroidis à l'air peu durer plus de 100000 heures mais la durée de vie est sensiblement réduite si la fréquence d'arrêt – marche augmente.

Voir en annexes 4, tableau des matériaux utilisés par MITI

Nous présentant dans ce qui suit les principaux types de paliers lisses, le travail sera focaliser sur les paliers refroidis à l'air et en particulier ceux conçus avec un alésage déformable.

I-2 Paliers hydrodynamiques :

Ces paliers qui sont lubrifiés par un fluide incompressible permettent la transmission de charges importantes à des vitesses moyennes (figure I.2), on utilise souvent une huile minérale, la contrainte température reste un élément difficilement maitrisable. La lubrification hydrodynamique est conditionnée par une vitesse de glissement considérable. Si ce glissement diminue l'épaisseur du film d'huile devient incapable de maintenir un champ de pression, et l'arbre vient en contact avec le coussinet. [4] chap.4 page 182-183 [Limit of hydrodynamic lubrication]



Figue I.1 : Paliers d'un Laminoir refroidis à l'huile Puissance 2x1200KW

Bien que ces paliers permettent des durées de vie importante au-delà de 30 000 heures de service, ils nécessitent une maintenance prédictive soigneusement et rigoureusement appliquée, car une petite variation de température ou de pression de service risque d'endommager sévèrement les paliers. Ce qui explique pourquoi ces paliers sont alimentés par des centrales hydrauliques bien surveillées (figure I.1) avec un circuit d'huile refroidie à l'eau. La figure (I.2) présente un coussinet et un arbre d'un laminoir endommagés...

Figure I.2 : Palier lisse à régule et arbre endommagés

I-3 Paliers aérodynamiques :

Ce sont des paliers refroidis à l'aide d'un gaz et sont classés en deux grandes familles (figure I-3): Paliers à *alésage déformable* et Paliers à *alésage non déformable*

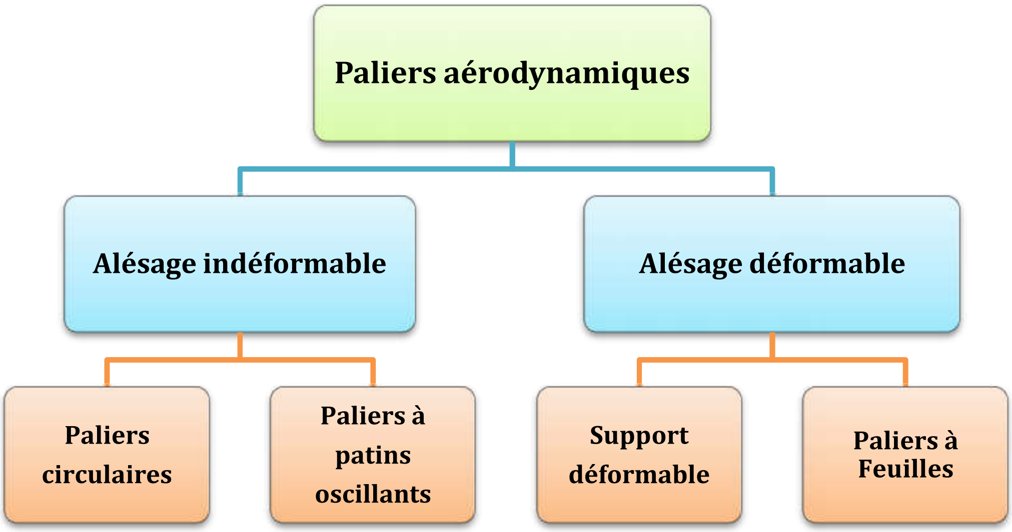


Figure I.3 : Principales architectures de paliers à air

Rappelons d'abord quelques avantages par rapport à ceux refroidis à l'huile :

- Moins de frottement et donc mois de dissipation d'énergie ce qui permet de monter à de très grandes vitesses.

- Lubrifiant perdu, pas besoin de recyclage du fluide (centrale de lubrification)

- Grace au mode de lubrification perdu, les caractéristiques demeurent inchangés notamment la température et donc on a réduit au maximum le facteur usure.

Ce n’est pas sans inconvénients car l’air par sa compressibilité ne permet pas la portance de charges importantes et est source d’instabilité. La conception aussi de ce type de paliers impose des exigences trop serrées dans la fabrication des organes en mouvement.

La performance de tout type paliers aérodynamiques dépend du taux de compressibilité, ce taux qui est fonction de la vitesse, du jeu radiale et de la viscosité dynamique [8], plus il est élevé plus on peut monter à des vitesses supérieurs. C’est la maitrise de ce facteur qui a permis de passer d’une configuration très simple à des conceptions très complexes que nous décrivons ci-dessous :

I-4 Paliers aérodynamiques à alésage indéformable:

Dans ce type de paliers on est resté dans des contraintes de stabilité en rotation, le domaine d’utilisation est resté très limité ; beaucoup de recherches dans l’amélioration de la conception ont permet d’améliorer la conception en passant d’un palier à *alésage cylindrique lisse* figure I.5, à paliers *à lobes discontinus* figure I.5 et paliers *à patins oscillants* figure I.6 sans beaucoup d’amélioration ni sur les vitesses ni sur les charges à supporter, jusqu’à l’invention des paliers à profils déformable.

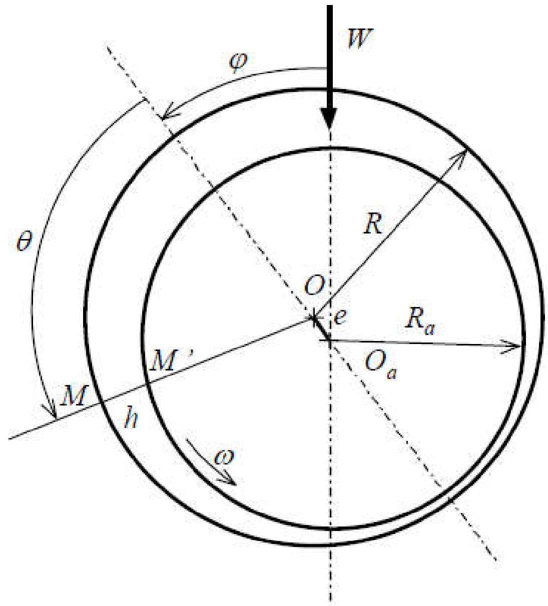


Figure I.4 : Palier cylindrique lisse [8]

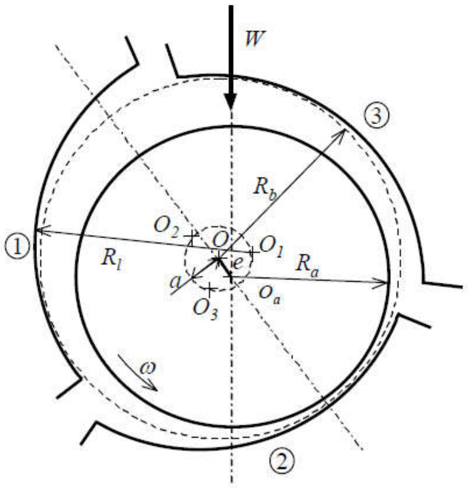


Figure I.5 : paliers à lobes discontinus [8]

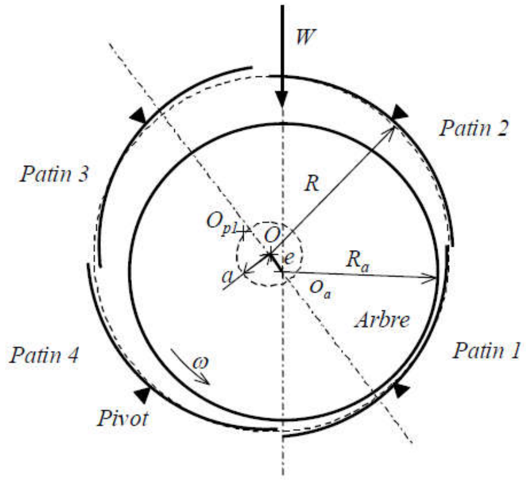


Figure I.6 paliers à patins oscillants [8]

I-5 Paliers aérodynamiques à alésage déformable:

Finalement, et en début des années 70 fut découverte la technologie de paliers à support déformable et feuilles élastiques permettant de répondre partiellement aux soucis des chercheurs, un alésage déformable oscillant permettant ainsi un taux de compressibilité meilleur et éviter les conceptions complexes des paliers rigides avec oscillation sur des ressort. Ils sont utilisés dans la fabrication des turbomachines et dans de petites machines à arbres tournants à grandes vitesses supportant des charges modérés [8]. On a commencés à utiliser des paliers à patins montés sur des éléments déformables (support déformable), mais la fabrication de paliers à patins oscillants montés sur ressorts s'avère difficile et délicate et on s'est orienté aux paliers à feuilles ou deux technologies sont adoptées [8]

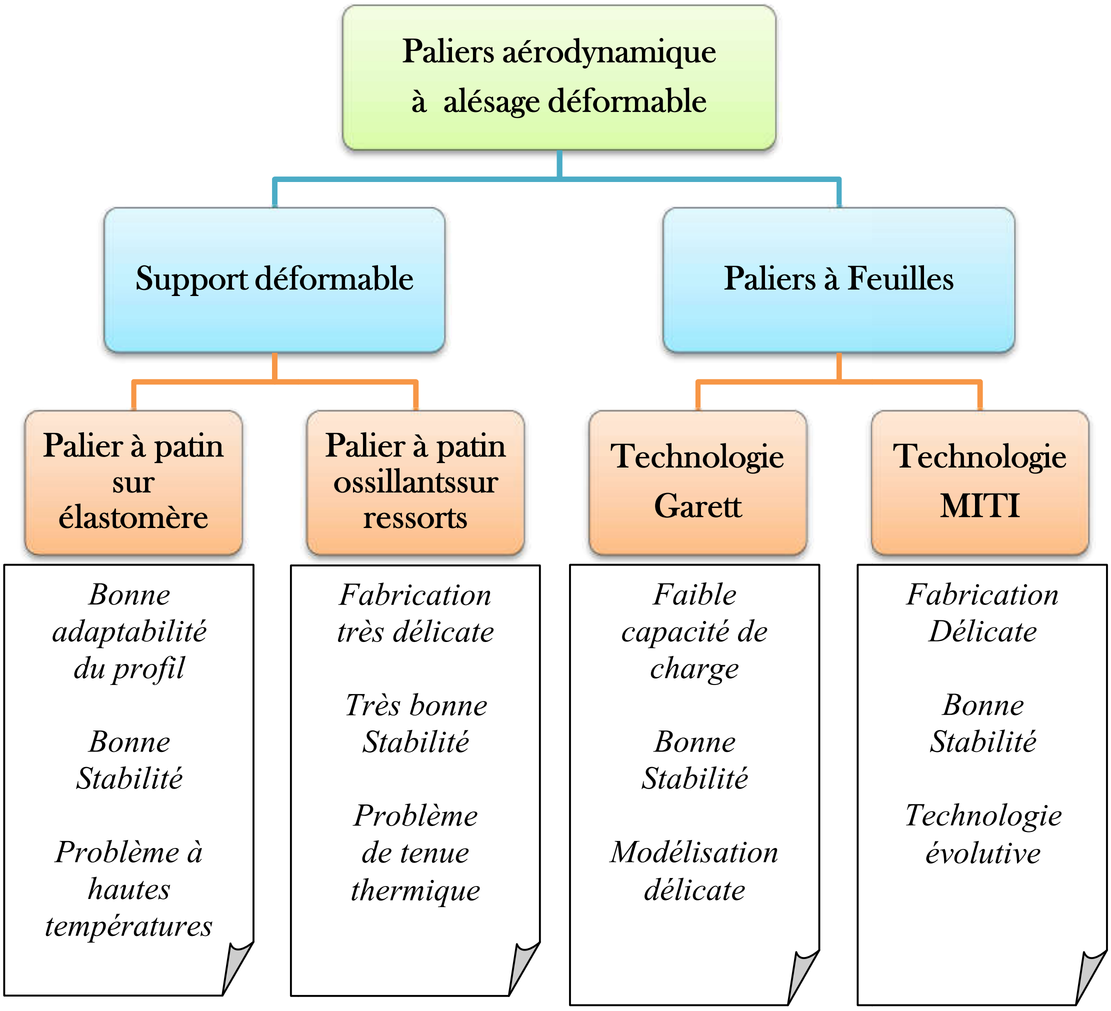


Figure I.7 Types de paliers à alésage déformable

I.5.1 La technologie Garett

Des feuilles sont articulées sur le fourreau du palier et enroulées les unes sur les autres permettant ainsi (à l'ensemble) une déformation de l'alésage du palier. Figure I.8. Des frottements sont à prendre en considération dans l'étude de ces paliers surtout : feuille – feuille, feuille – arbre et feuille – fourreau et qui sont loin d'être négligeables.

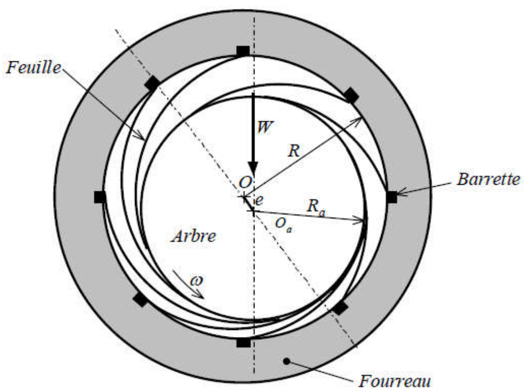


Figure I.8 paliers à patins oscillants [8]

I.5.2 La technologie MITI :

Dans cette technologie on utilise un empilage de *feuilles lisses* et *ondulées* connus sous le nom de raidisseurs, Figure I.9, malgré la conception simple, l'étude est théoriquement complexe que celle des paliers à ressorts car on doit aussi faire intervenir la mécanique des solides afin de prendre en considération la déformation des feuilles [8]

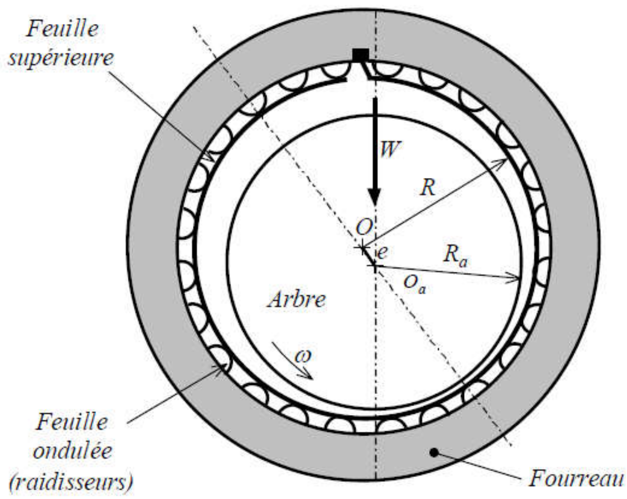


Figure I.9. paliers à feuilles MITI [8]

Ces paliers sont utilisés par ACM (Air Cycle Machine) et ont permis une durée de vie extraordinaire plus de 100 000 heures, et ce grâce au développement de matériaux sous forme de feuilles minces de très hautes qualité (flexibilité et résistance à l'usure) par H. Heshmat avec (Mohawk Innovative Technology Incorporate) qui porte d'ailleurs le nom MITI Figure I.10

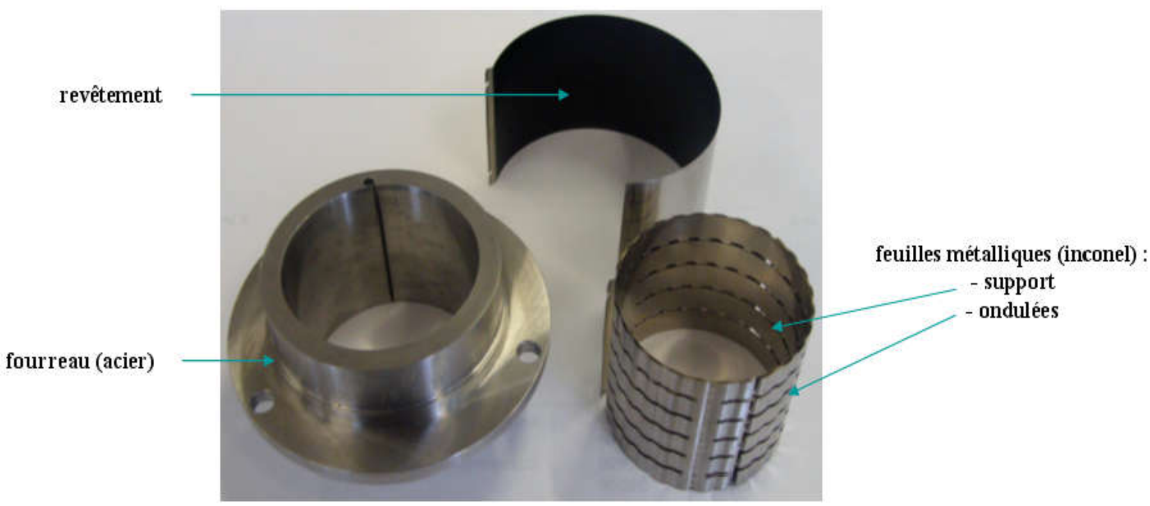


Figure I.10 Composants d'un palier à feuilles MITI [10]

I.6 Schéma de Fonctionnement / Palier à feuilles

La trajectoire du centre du rotor est suivre selon le processus [10] suivant :

- La position de l'arbre et son mouvement de rotation vont générer un champ de pressions et de hauteurs dans le film fluide,
- Le champ de pression va venir déformer les feuilles et par conséquent modifier le champ de hauteurs du fluide ainsi que son champ de pression
- La position de l'arbre sera affectée à son tour et ainsi de suite figure I.11.

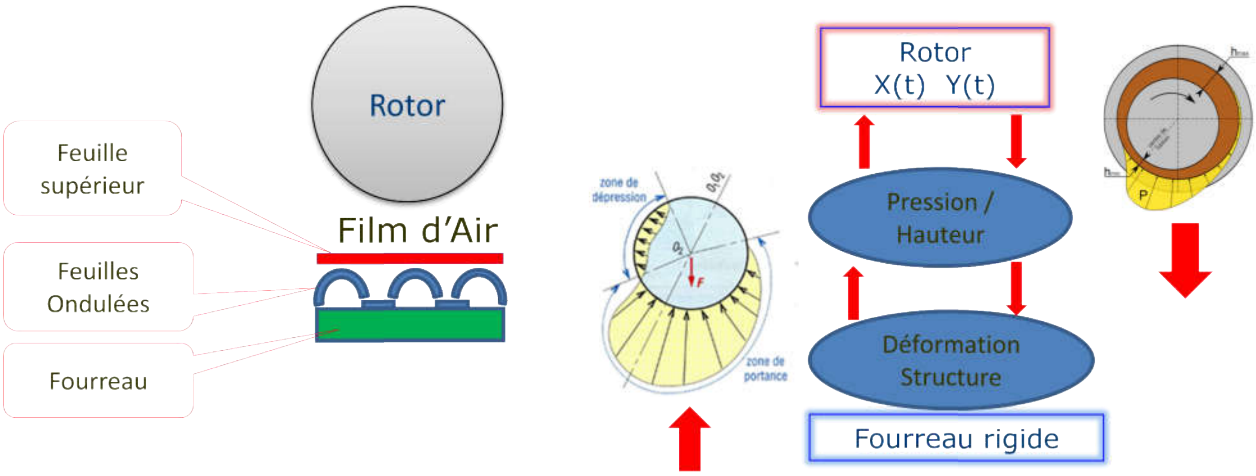


Figure I.11 Schéma de fonctionnement du palier à feuilles MITI

I.7 Conclusion :

Les paliers lisses sont d'une utilisations très large que se soit dans l'industrie lourde (palier lubrifiés à l'huile), dans l'aviation et l'aéronautique (palier lubrifié par l'air), la technologie MITI a fait beaucoup de recherche pour élargir le domaine d'utilisation des paliers à gaz qui présentaient l'inconvénient de faible charge et faible amortissement, mais grace au développement de nouveau matériau, on a pu conçu des paliers avec des feuilles déformable permettant ainsi l'amélioration de ces coefficient dynamiques. Les paliers à gaz peuvent monter à des vitesses très grande ne nécessite pas beaucoup de maintenance et en plus ils sont conformes en matière d'exigence environnementales, c'est ce qui nous a motivé à travailler sur le palier à feuille déformable de MITI.

Chapitre II

Théorie de la lubrification par fluide compressible

II.1 Introduction

En tribologie, la lubrification des paliers lisses par un film visqueux qui sépare les parties mobiles des parties fixes est un domaine très important. Il y a lieu de calculer la charge que peut supporter le palier, les forces de frottement, le débit du fluide, la puissance dissipée et déterminer les champs de pression.

Les équations de la lubrification sont basées sur les lois de conservation de la MMC et de la TMC :

II. 2 Equations de la MMC

Equation de Cauchy issue de la loi de Newton du mouvement à un élément fluide infinitésimal :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} \tag{II.1}$$

avec

$$\underbrace{\frac{Du_i}{Dt}}_{\text{Partie totale}} = \underbrace{u_1 \frac{\partial u_i}{\partial X_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial X_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial X_3}}_{\text{Partie convective}} + \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\text{Partie instationnaire}} \tag{II.2}$$

ρ: Masse volumique du fluide

$\{V\} \equiv \boldsymbol{V} = \{U_1, U_2, U_3\}^t$: Vecteur vitesse de la particule fluide,

$\{f\} \equiv \boldsymbol{f} = \{f_1, f_2, f_3\}^t$:Vecteur des forces de volume,

$[\tau]$:Tenseur des contraintes de Cauchy,

$\{X\} = \{X_1, X_2, X_3\}^t$: Système de coordonnées spatiales

La partie instationnaire correspond à l'accélération locale d'une particule fluide et est nulle pour des écoulements en régime permanent. L'accélération convective représente le changement de vitesse résultant du transport de la particule d'un emplacement à un autre où la vitesse est différente.

Pour un fluide dit newtonien, l'équation constitutive exprime une relation linéaire entre les Contraintes et le taux de déformation :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + K_{ijmn} D_{mn} \tag{II.3}$$

$i, j, m, n = 1,2,3$

Le terme $-p\delta_{ij}$où δ_{ij}est le symbole de Kronecker, correspond à la partie sphérique des contraintes.

Le tenseur taux de déformation de Cauchy est:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \tag{II.4}$$

Puisque $[\tau]$ est un tenseur symétrique, K_{ijmn} doit l'être également. Si l'on suppose en plus quelle milieu est isotopique, on démontre que deux termes seulement de K_{ijmn} sont non nuls et que l'équation constitutive peut s'écrire :

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + \lambda D_{mm}\delta_{ij} \tag{II.5}$$

Où μ et λ sont deux constantes scalaires appelées les coefficients de Navier, et

$D_{mm} = \mathbf{\nabla}.\mathbf{V} = \frac{\partial u_m}{\partial X_m}$ est le taux de déformation volumétrique.

En définissant la pression moyenne, $-\bar{p}$ comme la moyenne des termes diagonaux de$[\sigma]$, lorsque l'on pose i = j, la somme sur les indices donne :

$$p - \bar{p} = \kappa\mathbf{\nabla}.\mathbf{V} \tag{II.6}$$

Où $\kappa = \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)$est une constante de proportionnalité appelée coefficient de viscosité volumique. Dans la majorité des problèmes de la mécanique des fluides, l'hypothèse de Stokes

$$\frac{2}{3}\mu + \lambda = 0 \tag{II.7}$$

s'avère correcte. L'équation constitutive d'un fluide newtonien (II.5) devient donc :

$$\sigma_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu\mathbf{\nabla}.\mathbf{V}\right)\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \tag{II.8}$$

Où la constante μ est appelée la viscosité dynamique du fluide.

En reportant l'équation constitutive d'un fluide newtonien (II.8) dans l'équation de mouvement de Cauchy (II.1), on obtient l'équation vectorielle de Navier-Stokes dont la *ième* composante s'écrit :

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial X_i} + f_i + \frac{\partial}{\partial X_j}\left[2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\mathbf{\nabla}.\boldsymbol{V})\delta_{ij}\right] \tag{II.9}$$

Bien que la viscosité soit une fonction de la pression et de la température qui caractérisent l'état thermodynamique du fluide, dans la théorie classique de la lubrification, cette propriété est supposée constante. Sous cette hypothèse, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial X_i} + f_i + \mu\left[\mathbf{\nabla}^2 u_i + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial X_i}(\mathbf{\nabla}.\boldsymbol{V})\right] \tag{II.10}$$

Où $\boldsymbol{\nabla}^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_3^2}$ est le laplacien de u_i.

Pour des fluides incompressibles, le taux de déformation volumétrique ou le taux de dilatation cubique, $\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{V}$, est nul. Si l'on suppose encore que le vecteur des forces de volume, $\boldsymbol{f}$, est négligeable, l'équation précédente se ramène à :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial X_i} + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 u_i \qquad \text{(II.11)}$$

L'écoulement d'un fluide newtonien, incompressible et isovisqueux est entièrement décrit par l'équation de Navier-Stokes simplifiée, équation (II.11), et par l'équation de continuité :

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{V} = 0 \quad 0 \qquad \text{(II.12)}$$

Les équations de Navier-Stokes **[6] page 218-220** sont obtenues de la conservation de la quantité de mouvement figure II.1 définie comme suit :

Le taux de changement de la quantité de mouvement dans un élément de volume = ∑ des flux de quantités de mouvement ***entrant*** *dans l'élément de volume -∑ des flux de quantités de mouvement* ***sortant*** *de l'élément de volume+∑ les contraintes tangentielles et les contraintes normales agissant sur le volume+∑ les forces agissant sur les masses de l'élément de volume* **[6]**

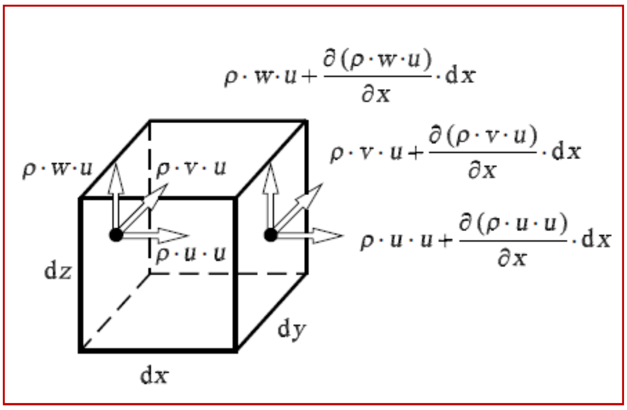


Figure II.1 : Quantité de mouvement entrant et sortant dans l'axe x [6] chapitre 5 page 217

a- conservation de la masse

Par définition, nous pouvons dire que la masse reste constante ou que la dérivation de la masse par rapport au temps est égale à zéro ($\frac{d(masse)}{dt} = 0$) **[3] page 32-33**.

En général, la conservation de masse pour un élément de volume dV=dx.dy.dz peut être formulée comme suit : *Le taux de changement de la masse dans un élément de volume est égal à la somme des flux de masse entrants dans l'élément de volume moins la somme des* *flux de masse sortants* [6]. La démonstration faite en annexe 1 ramène à *l'équation de continuité*:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \boldsymbol{t}}+\frac{\partial(\boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial(\boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{y}}+\frac{\partial(\boldsymbol{\rho}.\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{z}}=\mathbf{0}$$

avec u, v et w les composantes du vecteur de vitesse de l'écoulement.

En utilisant la notation vectorielle, l'équation (II.1) s'écrit sous forme condensée comme suit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial \boldsymbol{t}}+\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\rho}.\mathbf{v})=\mathbf{0} \quad \textit{avec nable } \nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)^T=0$$

II.3 Equation de Reynolds :

C'est l'équation qui gouverne dans l'étude des paliers lisses à portance hydrodynamique ou dans les paliers à gaz. Cette équation issue des équations de mécanique du milieu continu appliqué à un fluide newtonien ou polaire permet de déterminer les champs de pression et les hauteurs de films dans les paliers.

Considérant l'écoulement comme présenté dans la figure II.2 dans une section droite quelconque le débit q(x) par unité de largeur est donné par la relation :

$$q(x)=\frac{Q(X)}{L}=\int_0^{h(X)}u dy=-\frac{\rho h^3(X,t)}{12\mu}\frac{\partial p(X,t)}{\partial X}+U(x,t)\frac{\rho h(X,t)}{2} \qquad \text{II.13}$$

Dans un plan à deux dimensions, la conservation de masse dans une tranche de fluide [x, x+dx] permet d'écrire :

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h dX)=Q(X)-Q(X+dX)$ Ce qui donne $\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}=-\frac{\partial Q}{\partial X}$ II.14

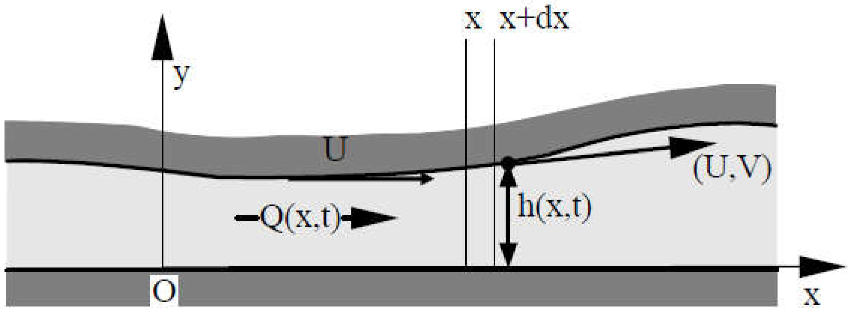


Figure II.2 : conservation de masse sur dx

Ainsi on obtient :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{-\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial X}+\frac{U}{2}\rho h\right) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial X}\right)-\frac{1}{2}U\frac{\partial(\rho h)}{\partial X}=\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}$$

On obtient $$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial X}\right)=\frac{1}{2}U\frac{\partial(\rho h)}{\partial X}+\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}$$

Par projection dans le plan z on obtient l'équation de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial X}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}U\frac{\partial(\rho h)}{\partial X}+\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \qquad \text{II.15}$$

Avec :

- p : Champ de pression
- h :Champ de hauteur
- X,Y, et Z les coordonnées des particules fluides

Revenons à notre cas d'étude, la configuration de paliers cylindriques (figure II.3) permet aussi d'écrire l'équation en cordonnées polaire comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right]=\frac{1}{2}U\frac{\partial(\rho h)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}$$

Avec θ l'angle de rotation par rapport à z.

- Prenant maintenant $U=\omega.R$, et $\rho=\frac{p}{\Re T}$ considérant notre fluide comme gaz parfait avec

$\Re$ constant des gaz parfait, et T température du gaz, l'équation sera réécrite ainsi :

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{ph^3}{12\mu\mathcal{R}T}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{ph^3}{12\mu\mathcal{R}T}\frac{\partial p}{\partial z}\right]=\frac{w}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{ph}{\mathcal{R}T}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ph}{\mathcal{R}T}\right) \qquad \text{II.16}$$

- Notre palier à feuille, travaille à flux perdu et la variation de température est presque nulle, on est donc dans des conditions isothermiques donc $\Re$ et T sont constants et l'équation précédente sera réduite à :

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[ph^3\frac{\partial p}{\partial \theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[ph^3\frac{\partial p}{\partial z}\right]=6\mu\omega\frac{\partial}{\partial \theta}(ph)+12\mu\frac{\partial}{\partial t}(ph)$$

Fluide à couples de contraintes

Dans la dérivation de l'équation de mouvement de Cauchy (II.1), les efforts extérieurs exercés sur l'élément fluide sont schématisés, suivant le postulat de Cauchy], par une répartition surfacique de forces. Lors de l'application de la loi de Newton, la densité de forces massiques est également prise en compte. Une schématisation différente fondée sur la théorie du microcontinuum de Stokes permet d'introduire, outre les forces massiques et surfaciques, des couples de contraintes et des couples de volume. Pour un fluide incompressible, cela conduit à l'équation suivante:

$$\rho\frac{DV}{Dt}=\mathrm{f}-\nabla p+\frac{1}{2}\nabla.(\rho\psi)+(\mu-\eta\nabla^2)\nabla^2.V \qquad \text{(II.17)}$$

Où ψ est le vecteur densité de couple et η est une propriété constante du fluide associée aux couples de contraintes.

En négligeant le vecteur densité de couple et les forces de volume, l'application à l'équation (II.26) d'une procédure analogue à celle menée lors de la simplification de l'équation de Navier-Stokes fournit les profils de vitesse suivants :

$$u(x,y,z) = \underbrace{U_2\frac{y}{h}}_{terme\ de\ Couette} + \underbrace{\frac{1}{2\mu}\left\{y^2 - hy + 2l^2\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)}\right]\right\}\frac{\partial p}{\partial x}}_{terme\ de\ Poiseuille} \quad \text{(II.18)}$$

$$w(x,y,z) = \underbrace{\frac{1}{2\mu}\left\{y^2 - hy + 2l^2\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)}\right]\right\}\frac{\partial p}{\partial z}}_{terme\ de\ Poiseuille}$$

Ces profils de vitesse, lorsque reportés dans l'équation de continuité (II.12), conduisent à la déduction d'une équation de Reynolds modifiée donnée par :

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{G(h,l)}{12\mu}p\frac{\partial p}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{G(h,l)}{12\mu}p\frac{\partial p}{\partial z}\right] = \frac{\omega}{2}\frac{\partial(ph)}{\partial\theta} + \frac{\partial(ph)}{\partial t} \quad \textbf{(II.19)}$$

Avec

$$G(h,l) = h^3 - 12l^2\left[h - 2l\tan\left(\frac{h}{2l}\right)\right] \quad \text{(II.20)}$$

Et

$$h(\theta,z,t) = C + X(t)cos\theta + Y(t)\sin\theta + U(\theta,z,t) \quad \text{(II.21}$$

avec : C : le jeu radial , X(t) et Y(t) : les coordonnées instantanés de l'axe de l'arbr e O_a et U l'opérateur d'élasticité ou opérateur de compliance qui dépend du module d'élasticité du matériau des feuilles et du coefficient de poisson et de l'épaisseur de la tôle

$$G(h,l) = h^3 - 12hl^2 + 24\tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \text{ et } l = \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

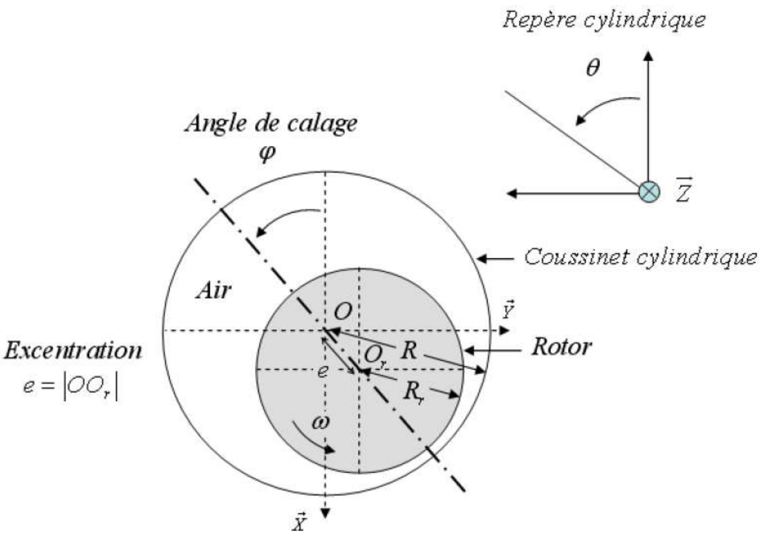


Figure II.3 Repères cylindriques du palier [10]

II. 3.1 Equation de Reynolds adimensionnée :

Pour le traitement numérique il convient d'écrire l'équation II.10 en variables sans dimension (V.S.D.), posant donc :

- Pour la pression on peut définie comme le rapport sur la pression d'alimentation Pa et donc on met : $\tilde{p} = \frac{p}{p_a} \quad soit\ p = \tilde{p}.p_a$
- La coordonnée z peut être rapportée au rayon R on écrit ainsi : $\tilde{z} = \frac{z}{L}\ soit\ z = \tilde{z}L$
- L'épaisseur du film h est en fonction du jeu radial et donc peut aussi être adimensionnée comme suit : $\tilde{h} = \frac{h}{C}\ soit\ h = \tilde{h}C$ avec C=rayon du palier – rayon de l'arbre
- Le temps de rotation t peut aussi être adimensionnée par rapport à w ainsi on écrit : $\tilde{t} = tw$

De ce qui précède nous réécrivons l'équation de Reynolds ainsi :

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[p_a\tilde{p}\tilde{h}^3C^3\frac{\partial p_a\tilde{p}}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[p_a\tilde{p}\tilde{h}^3c^3\frac{1}{R}\frac{\partial p_a\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right] = 6\mu\omega\frac{\partial}{\partial\theta}\left(p_a\tilde{p}\tilde{h}C\right) + 12\mu\omega\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(p_a\tilde{p}\tilde{h}C\right)$$

Notre palier étant constamment alimenté par la même pression donc p_a est constant, en sortant p_a et C comme facteur commun on obtient :

$$\frac{p_a^2C^3}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left[\tilde{p}\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{p}\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right]\right) = 6\mu\omega p_aC\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}\tilde{h}\right) + 12\mu\omega p_aC\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{p}\tilde{h}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left[\tilde{p}\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{p}\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right]\right) = \frac{R^2}{p_a^2C^3}6\mu\omega p_aC\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}\tilde{h}\right) + \frac{R^2}{p_a^2C^3}12\mu\omega p_aC\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{p}\tilde{h}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left[\tilde{p}\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{p}\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right]\right) = \frac{R^2}{C^2}\frac{6\mu\omega}{p_a}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}\tilde{h}\right) + 2\frac{R^2}{C^2}\frac{6\mu\omega}{p_a}\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{p}\tilde{h}\right)$$

- En posant le nombre de compressibilité du fluide $\Lambda = \frac{6\mu\omega}{P_a}\left(\frac{R}{C}\right)^2$ qui dépend des

caractéristiques géométriques et de fonctionnement avec μ la viscosité dynamique, ω la vitesse de rotation, P_a la pression d'alimentation constante, R le rayon de l'arbre et C le jeu radial, on obtient finalement l'équation de Reynolds adimensionnée :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{p}\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{p}\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right] = \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}\tilde{h}\right) + 2\Lambda\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{p}\tilde{h}\right)$$

En introduisant le facteur G, généralisant l'état du fluide l'équation II.4 s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}(\tilde{h},\tilde{l})\tilde{p}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}(\tilde{h},\tilde{l})\tilde{p}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right] = \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}\tilde{h}\right) + 2\Lambda\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\tilde{p}\tilde{h}\right) \qquad (\text{II}.22)$$

Avec $\tilde{G}(\tilde{h},\tilde{l}) = \tilde{h}^3 - 12\tilde{l}^2\left[\tilde{h} - 2\tilde{l}\tan(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{l}})\right]$

Et l'é

$\tilde{h} = \frac{h}{c} = 1 + \tilde{X}(\tilde{t})cos\theta + \tilde{Y}(\tilde{t})sin\theta + \tilde{U}(\theta,\tilde{z},\tilde{t})$,

II.4 Conditions aux limites

Le palier est alimenté en air avec la pression atmosphérique et les conditions aux limites sont les suivants :.

- Conditions liées à l'environnement du palier : $p\left(\theta, z = \pm\frac{L}{2}\right) = p_{atm}$
- Conditions de périodicités: $p(\theta = 0, z) = p(\theta = 2\pi, z)$
- Conditions liées aux flux du lubrifiant (suction phenomenon): $p(\theta, z) = p_{atm}$ dans la zone de dépression
- A ces conditions on ajoute pour le cas d'un arbre rotor aligné $\frac{\partial p}{\partial z}(\theta, z = 0) = 0$ au centre du coussinet.

Dans ce type de lubrification trois hypothèses sont généralement acceptées :

Conditions de Sommerfeld : Pression toujours positive, c'est-à-dire il n'y a pas de rupture dans le film lubrifiant.

Conditions de Gümbel : Possibilité de rupture, la pression peut donc s'annuler. Dans le calcul les pressions négatives sont tout simplement négligées.

Conditions de Reynolds : Débit de lubrifiant continu dans le palier, et la pression circonférentielle s'annule. C'est la condition la plus proche du fonctionnement de notre palier et elle sera adoptée dans cette étude.

II. 5 Conclusions :

L'étude dynamique de palier lubrifié par l'air dépendra donc en partie de la résolution de l'équation de Reynolds pour un fluide polaire, la déformation des feuilles sera traitée par les lois de la mécanique des solides. Nous verrons dans les chapitres qui suivent le traitement de l'équation de Reynolds avec une approche de résolution linéaire.

Chapitre III

Traitement numérique de l'équation de Reynolds

III.1 Introduction :

Dans l'analyse dynamique du système Rotor-palier refroidis à l'air deux méthodes sont utilisées, la méthode linéaire et la méthode non linéaire. Dans ce chapitre nous allons décrire brièvement le principe de la modélisation non linéaire qui a été utilisée dans une étude précédente [11] et, nous passerons ensuite en détail à la méthode linéaire qui sera utilisée dans cette étude qui consiste essentiellement à déterminer les coefficients de *raideur* et d'*amortissement* du palier, par un couplage des équations de la dynamique avec les équations décrivant l'écoulement du fluide en particulier:

- ✓ Loi de conservation de masse
- ✓ Loi de conservation de la quantité de mouvement
- ✓ L'équation de Reynolds
- ✓ Lois exprimant les propriétés du fluide

III.2 Modélisation du système par approche non linéaire :

Dans cette approche la détermination de la trajectoire de l'arbre est définie après résolution des équations de la dynamique car la ligne d'arbre est supposée comme rotor rigide supporté par deux paliers sous l'effet des charges de la masse M, de la charge statique Wo, de la charge dynamique cyclique $W_d(t)$ et l'excitation du balourd e_b, on écrit alors l'équation de la dynamique :

$$M\ddot{X} = W_0 + M.e_b.w^2.\cos(wt) + F_X + W_{dX}(t) \qquad \text{III.1}$$

$$M\ddot{Y} = 0 \ + \ M.e_b.w^2.\sin(wt) + F_Y + W_{dY}(t) \qquad \text{III.2}$$

Avec X et Y les coordonnées de l'axe du rotor.

La résolution du système se résumé comme suit (voir en annexe III l'algorithme du schéma de résolution) :

1- L'action aérodynamique est calculée par intégration de l'équation de Reynolds en

régime stationnaire.

2- L'action aérodynamique est calculée par intégration de l'équation de Reynolds en

régime stationnaire.

3- Pour une meilleure précision les équations sont rendues sans dimensions

4- En calculant les accélérations (d^2X/dt^2), en prenant aussi en considération l'action du Balourd. On définie finalement la trajectoire en résolvant les équations de la dynamique

5- Résolution de l'équation de Reynolds à l'instant « t » pour une position X(t), Y(t) et on définit F_X et F_Y. Et le calcul par la dynamique de l'accélération $A_X(t)$ et $A_Y(t)$.

6- On refait pour t+∆t, et on définie ainsi un algorithme de calcul avec une boucle de retour jusqu'à stabilisation du centre du rotor.

III.3 Modélisation par une approche linéaire :

Une machine peut être simulée au système simple ci-dessous, avec une masse, un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient C, si ce système à un degré de liberté est excité avec une force sinusoïdale F(t), la distribution des forces générées par le résultat déplacement dynamique « x » peuvent êtres déterminées par l'équation (III.3):

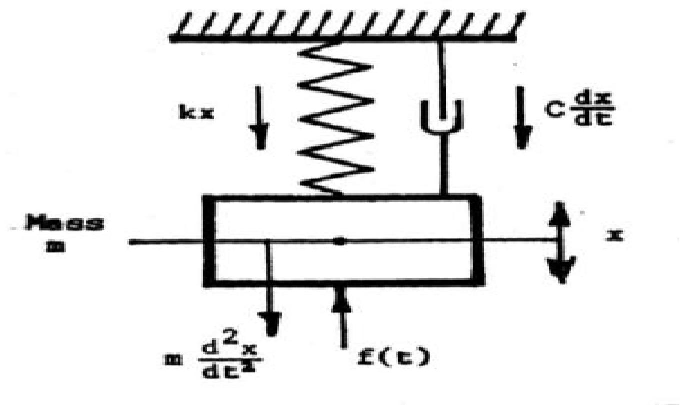


Figure III.1 Simulation d'un système vibratoire

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t) \qquad \text{III.3}$$

Inertie de la masse — Amortissement. Vitesse — Raideur .déplacement

De ce qui précède on peut facilement montrer que le déplacement « x » (la stabilité du système) dépend de la raideur et de l'amortissement et c'est la raison pour laquelle, nous adoptons la méthode linéaire qui a pour objet le calcul coefficient de Raideurs et d'Amortissements de notre système (palier) en imposant une charge d'excitation.

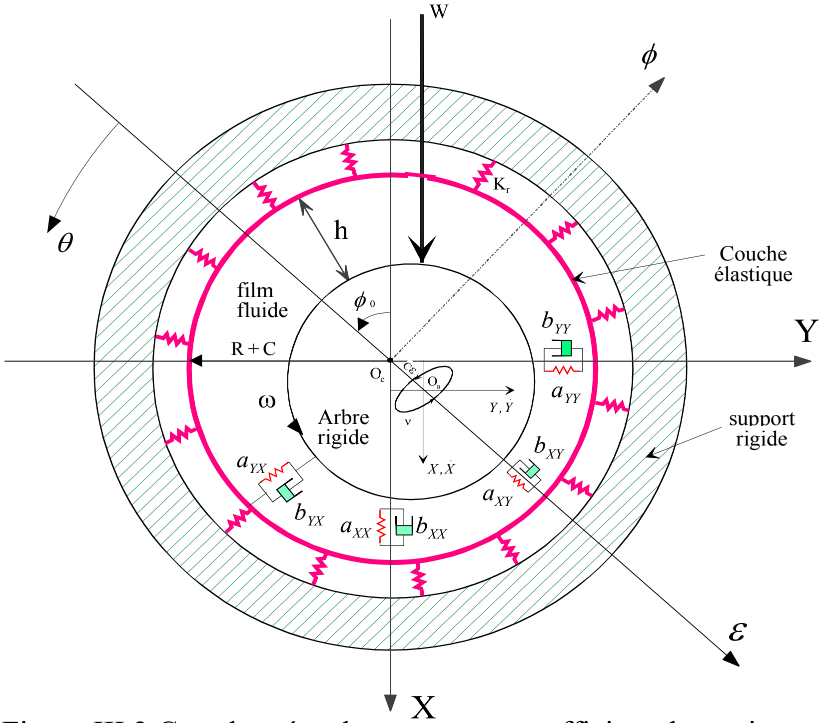


Figure III.2 Coordonnées du systeme et coefficient dynamiques

Les efforts du palier peuvent êtres décrit par le développement en série de Taylor du premier ordre autour de la position d'équilibre (x_0, y_0) :

$$[M]\begin{Bmatrix}\ddot{X}\\ \ddot{Y}\end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix}C_{XX} & C_{XY}\\ C_{YX} & C_{YY}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{Bmatrix} - \begin{bmatrix}K_{XX} & K_{XY}\\ K_{YX} & K_{YY}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X\\ Y\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}F_{ext/X}\\ F_{ext/y}\end{Bmatrix}$$

Avec $\begin{Bmatrix}F_{ext/X}\\ F_{ext/y}\end{Bmatrix}$ le vecteur des forces extérieures appliquées au rotor, dans notre cas $\begin{Bmatrix}W_0\\ 0\end{Bmatrix}$

$$F = \begin{Bmatrix}F_X\\ F_Y\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_{X0}\\ F_{Y0}\end{Bmatrix} + \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_0 \Delta X + \left.\frac{\partial F}{\partial Y}\right|_0 \Delta Y + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right|_0 \Delta \dot{X} + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{Y}}\right|_0 \Delta \dot{Y} \qquad \text{III.4}$$

En fonction de la raideur et d'amortissement du palier l'équation précédente peut être ré-écrite ainsi :

$$\Delta F_X = F_X - F_{X0} = K_{XX}\Delta X + K_{XY}\Delta Y + B_{XX}\Delta\dot{X} + B_{XY}\Delta\dot{Y} \qquad \text{III.5a}$$

$$\Delta F_Y = F_Y - F_{Y0} = K_{YX}\Delta X + K_{YY}\Delta Y + B_{YX}\Delta\dot{X} + B_{YY}\Delta\dot{Y} \qquad \text{III.5b}$$

Ou les coefficients dynamiques sont les dérivés partiels évalués à la position d'équilibre statique :

$$K_{\xi\eta} = \left.\frac{\partial F_\xi}{\partial \eta}\right|_0 \qquad B_{\xi\eta} = \left.\frac{\partial F_\xi}{\partial \dot{\eta}}\right|_0 \qquad \text{avec} \qquad \xi, \eta = X, Y$$

- Le développant en série de Taylor de la pression du lubrifiant est donné par :

$$p = p_0 + \frac{\partial p}{\partial X}\Big|_0 \Delta X + \frac{\partial p}{\partial Y}\Big|_0 \Delta Y + \frac{\partial p}{\partial \dot{X}}\Big|_0 \Delta \dot{X} + \frac{\partial p}{\partial \dot{Y}}\Big|_0 \Delta \dot{Y} \qquad \text{III.6}$$

En substituant l'équation III.6 dans III.4 et en comparant avec (III.5 a et b) on obtient :

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} = -\int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial X}\cos(\theta) & \frac{\partial p}{\partial Y}\cos(\theta) \\ \frac{\partial p}{\partial X}\sin(\theta) & \frac{\partial p}{\partial Y}\sin(\theta) \end{bmatrix} R d\theta dz \qquad \text{III.7a}$$

$$\begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{bmatrix} = -\int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \dot{X}}\cos(\theta) & \frac{\partial P}{\partial \dot{Y}}\cos(\theta) \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{X}}\sin(\theta) & -\frac{\partial P}{\partial \dot{Y}}\sin(\theta) \end{bmatrix} R d\theta dz \qquad \text{III.7b}$$

Ces deux équations (III.7a et III.7b) permettent de calculer les coefficients de raideur et d'amortissement, une fois les composants de pressions $\frac{\partial P}{\partial X}$, $\frac{\partial P}{\partial \dot{X}}$, $\frac{\partial P}{\partial Y}$ et $\frac{\partial P}{\partial \dot{Y}}$ sont connus donc une fois 'équation de Reynolds est résolue.

III.4 Perturbation de l'équation de Reynolds :

Le calcul des coefficients dynamiques peut se faire par différentiation numérique sans faire apparaitre la fréquence ou par la technique de Perturbation et là on a besoin de faire la transformation de l'équation de Reynolds transitoire en un système d'E.D.P. d'ordre 0 et d'ordre 1.

Rappelons l'équation de l'équation adimensionnée de Reynolds pour un fluide polaires décrite en chapitre II.

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\tilde{G}(\tilde{h},\tilde{l})\tilde{p}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\left[\tilde{G}(\tilde{h},\tilde{l})\tilde{p}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}}\right] = \Lambda\frac{\partial}{\partial \theta}(\tilde{p}\tilde{h}) + 2\Lambda\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}(\widetilde{p h})$$

a/ Perturbation de la grandeur $\tilde{G}(\tilde{h},\tilde{l})$:

$$\tilde{G}(\tilde{h},\tilde{l}) = \tilde{h}^3 - 12\tilde{l}^2\left[\tilde{h} - 2\tilde{l}\tan(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{l}})\right] \qquad \text{III.8}$$

Et l'épaisseur du film :

$$\tilde{h} = \frac{h}{c} = 1 + \tilde{X}(\tilde{t})cos\theta + \tilde{Y}(\tilde{t})sin\theta + \tilde{U}(\theta,\tilde{z},\tilde{t}) \qquad \text{III.9}$$

Avec

$$\tilde{X} = \tilde{X}_0 + \Delta\tilde{X}$$

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 + \Delta\tilde{Y}$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + \Delta\tilde{U}$$

Et $\tilde{U}_0 = \tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_0$ est la déformation radiale statique, soit par conséquent :

$$\tilde{h}(\theta, \tilde{z}, \tilde{t}) = 1 + (\tilde{X}_0 + \Delta\tilde{X})cos\theta + (\tilde{Y}_0 + \Delta\tilde{Y})sin\theta + \tilde{U}_0 + \Delta\tilde{U}\ (\theta, \tilde{z}, \tilde{t})$$

Ou encore $\tilde{h} = \underbrace{1 + \tilde{X}_0 cos\theta + \tilde{Y}_0 sin\theta + \tilde{U}_0}_{\tilde{h}_0} + \underbrace{\Delta\tilde{X}cos\theta + \Delta\tilde{Y}sin\theta}_{\Delta\tilde{h}} + \Delta\tilde{U}$

$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \Delta\tilde{h} + \Delta\tilde{U}$

Et $\tilde{U}_0 = \tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_0$ est la déformation radiale statique, soit par conséquent :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \Delta\tilde{X}(cos\theta + U_x) + \Delta\tilde{Y}(sin\theta + U_Y) + \Delta\dot{\tilde{X}}U_{\dot{X}} + \Delta\dot{\tilde{Y}}U_{\dot{Y}} \qquad \text{III.10}$$

En supposant des vibrations harmoniques (sinusoïdales) avec $i = \sqrt{-1}$:

$$\Delta\tilde{X} = \Delta\tilde{X}^* e^{i\gamma t}$$

$$\Delta\tilde{Y} = \Delta\tilde{Y}^* e^{i\gamma t}$$

Avec γ la fréquence de fouettement (whirl frequency) et les coefficients ΔX et ΔY sont complexes. Les dérivés de ces fonctions donnent :

$\Delta\dot{X} = i\gamma\Delta\tilde{X}^* e^{i\gamma t}$ et $\Delta\dot{Y} = i\gamma\Delta\tilde{Y}^* e^{i\gamma t}$

Pour déterminer $\Delta\tilde{U}$ on utilise un développement limité de l'ordre un au voisinage de la position d'équilibre statique ($\tilde{X}_0$, $\tilde{Y}_0$):

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{X}}\right)_0 \Delta\tilde{X} + \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{Y}}\right)_0 \Delta\tilde{Y} + \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\dot{\tilde{X}}}\right)_0 \Delta\dot{\tilde{X}} + \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\dot{\tilde{Y}}}\right)_0 \Delta\dot{\tilde{Y}} + t.o.s.$$

En mettant $U_x = \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{X}}\right)_0$, $U_y = \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{Y}}\right)_0$, $U_{\dot{x}} = \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\dot{\tilde{X}}}\right)_0$ et $U_{\dot{y}} = \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\dot{\tilde{Y}}}\right)_0$

l'équation (III.8) s'écrit

$$U = U_0 + U_X \Delta\tilde{X} + U_Y \Delta\tilde{Y} + U_{\dot{X}} \Delta\dot{\tilde{X}} + U_{\dot{Y}} \Delta\dot{\tilde{Y}}$$

Ainsi l'équation du de la hauteur du film s'écrit :

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + (cos\theta + U_X)\Delta\tilde{X}^* e^{i\gamma t} + (sin\theta + U_Y)\Delta\tilde{Y}^* e^{i\gamma t} + i\gamma \Delta\tilde{X}^* e^{i\gamma t} U_{\dot{X}} +$$
$$i\gamma \Delta\tilde{Y}^* e^{i\gamma t} U_{\dot{Y}}$$

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \left(\Delta\tilde{X}^*(cos\theta + U_X + i\gamma U_{\dot{X}}) + \Delta\tilde{Y}^*(sin\theta + U_Y + i\gamma U_{\dot{Y}})\right) e^{i\gamma t} \qquad \text{III.11}$$

Soit : $\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \Delta\tilde{H}^* e^{i\gamma t}$ III.12

avec

$$\Delta\tilde{H}^* = \Delta\tilde{X}^*(cos\theta + \underbrace{U_X + i\gamma U_{\dot{X}}}_{\mathcal{U}_X}) + \Delta\tilde{Y}^*(sin\theta + \underbrace{U_Y + i\gamma U_{\dot{Y}}}_{\mathcal{U}_Y}) \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta\tilde{H}^*}{\tilde{h}_0} \ll 1$$

En insérant maintenant III.12 dans III.8 on obtient finalement :

a/ La grandeur $\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{l})$:

$$\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{l}) = \tilde{h}_0{}^3 + 3\tilde{h}_0{}^2 \Delta\tilde{H}^* e^{i\gamma t} - 12\tilde{l}^2 \left[\tilde{h}_0{}^3 + 3\tilde{h}_0{}^2 \Delta\tilde{H}^* e^{i\gamma t} - 2\tilde{l} \tan\left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{l}}\right)\right]$$

$$\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{l}) = \underbrace{\tilde{h}_0{}^3 - 12\tilde{l}^2 \tilde{h}_0{}^3 + 24\tilde{l}^3 \tan\left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{l}}\right)}_{\tilde{G}_0(\tilde{h}, \tilde{l})} + 3\tilde{h}_0{}^2 \Delta\tilde{H}^* e^{i\gamma t} \qquad \text{III.13}$$

Soit par conséquent :

$$\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{l}) = \tilde{G}_0(\tilde{h}, \tilde{l}) + 3\tilde{h}_0{}^2 \Delta\tilde{H}^* e^{i\gamma t} \qquad \text{III.14}$$

avec $\tilde{G}_0(\tilde{h}, \tilde{l}) = \tilde{h}_0{}^3 - 12\tilde{l}^2 \tilde{h}_0 \;\; + 24\tilde{l}^3 \tan(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{l}})$

b/ La grandeur $\mathbf{p.h}$:

On a vu que : $\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \Delta\widetilde{H}^* e^{i\gamma\tilde{t}}$ et $\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \Delta\tilde{p}^* e^{i\gamma\tilde{t}}$ donc :

$$\tilde{p}\tilde{h} = (\tilde{p}_0 + \Delta\tilde{p}^* e^{i\gamma\tilde{t}})(\tilde{h}_0 + \Delta\widetilde{H}^* e^{i\gamma\tilde{t}})$$

Soit $\tilde{p}\tilde{h} = \tilde{p}_0\tilde{h}_0 + (\tilde{h}_0\Delta\tilde{p}^* + \tilde{p}_0\Delta\widetilde{H}^*)e^{i\gamma\tilde{t}}$

Ou $\Delta\tilde{p}^*$ est déterminée à partir d'un D.L. de p au voisinage de la position d'équilibre ce qui donne :

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{X}}\right|_0 \Delta\tilde{X} + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}}\right|_0 \Delta\tilde{Y} + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\dot{\tilde{X}}}\right|_0 \Delta\dot{\tilde{X}} + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\dot{\tilde{Y}}}\right|_0 \Delta\dot{\tilde{Y}}$$

soit :

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \Delta\tilde{p}$$

En prenant en considération l'aspect harmonique du mouvement :

$$\Delta\tilde{P} = \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{X}}\right|_0 \Delta\tilde{X} + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}}\right|_0 \Delta\tilde{Y} + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\dot{\tilde{X}}}\right|_0 \Delta\dot{\tilde{X}} + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\dot{\tilde{Y}}}\right|_0 \Delta\dot{\tilde{Y}}$$

$$\Delta\tilde{p}^* = \Delta\tilde{X}^* e^{i\gamma t}\tilde{p}_X + \Delta\tilde{Y}^* e^{i\gamma t}\tilde{p}_Y + i\gamma\Delta\tilde{X}^* e^{i\gamma t}\tilde{p}_{\dot{X}} + i\gamma\Delta\tilde{Y}^* e^{i\gamma t}\tilde{p}_{\dot{Y}}$$

Soit

$$\Delta\tilde{p}^* = \Delta\tilde{X}^* e^{i\gamma t} Q_X + \Delta\tilde{Y}^* e^{i\gamma t} Q_Y$$

avec

$Q_x = \tilde{p}_X + i\gamma\tilde{p}_{\dot{X}}$ et $Q_Y = \tilde{p}_Y + i\gamma\tilde{p}_{\dot{Y}}$

soit par conséquent :

$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \Delta\tilde{p}^* e^{i\gamma t}$ avec $\Delta\tilde{p}^* = \Delta\tilde{X}^* Q_X + \Delta\tilde{Y}^* Q_Y$

Finalement on a:

$$\tilde{p}\tilde{h} = \tilde{p}_0\tilde{h}_0 + (\tilde{h}_0\Delta\tilde{p}^* + \tilde{p}_0\Delta\widetilde{H}^*)e^{i\gamma\tilde{t}} \qquad \text{III.16}$$

c/ Grandeur G.p :

$$\tilde{G}.\tilde{p} = \left(\tilde{G}_0 + 3\tilde{h}_0{}^2 \Delta\tilde{H}^* e^{i\gamma t}\right)(\tilde{p}_0 + \Delta\tilde{p}^* e^{i\gamma\tilde{t}})$$

$$\tilde{G}.\tilde{p} = \left(\tilde{G}_0\tilde{p}_0 + \tilde{G}_0\Delta\tilde{p}^* e^{i\gamma\tilde{t}} + 3\tilde{h}_0{}^2 \Delta\tilde{H}^*\tilde{p}_0 e^{i\gamma t}\right) + 3\tilde{h}_0{}^3 \Delta\tilde{H}^*\Delta\tilde{p}^* e^{i\gamma t}$$

$$\tilde{G}.\tilde{p} \approx \tilde{G}_0\tilde{p}_0 + \tilde{G}_0\Delta\tilde{p}^* e^{i\gamma\tilde{t}} + 3\tilde{h}_0{}^2 \Delta\tilde{H}^*\tilde{p}_0 e^{i\gamma t} \qquad \text{III.17}$$

d/ Grandeur $\boldsymbol{\tilde{G}\tilde{p}\frac{\partial p}{\partial\theta}}$***:***

$$\tilde{G}\tilde{p}\frac{\partial p}{\partial\theta} = \tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta} + \tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\Delta\tilde{p}^*}{\partial\theta}e^{i\gamma t} + \tilde{G}_0\,\Delta\tilde{p}^*\frac{\Delta\tilde{p}_0}{\partial\theta}e^{i\gamma t} + 3\tilde{h}_0{}^2\Delta\tilde{H}^*\tilde{p}_0\frac{\Delta\tilde{p}_0}{\partial\theta}e^{i\gamma t} \qquad \text{III.18}$$

e/ Grandeur $\boldsymbol{\tilde{G}\tilde{p}\frac{\partial p}{\partial\tilde{z}}}$***:***

$$\tilde{G}\tilde{p}\frac{\partial p}{\partial z} = \tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial z} + \tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\Delta\tilde{p}^*}{\partial z}e^{i\gamma t} + \tilde{G}_0\,\Delta\tilde{p}^*\frac{\Delta\tilde{p}_0}{\partial z}e^{i\gamma t} + 3\tilde{h}_0{}^2\Delta\tilde{H}^*\tilde{p}_0\frac{\Delta\tilde{p}_0}{\partial z}e^{i\gamma t} \qquad \text{III.19}$$

Maintenant introduisant les différents termes (a, b, c, d et e) dans l'équation de Reynolds on obtient les trois équations suivantes :

1. Equation d'ordre zéro (cas stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\right] = \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}_0\tilde{h}_0\right) \qquad \text{III.20}$$

2. Deux équations d'ordre un

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta} + \tilde{G}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\tilde{Q}_X + 3\tilde{h}_0{}^2\tilde{p}_0\frac{\Delta\tilde{p}_0}{\partial\theta}(\cos\theta + \tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_X)\right] + \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_x}{\partial\tilde{z}} + \right.$$

*G0∂p0∂zQX+3h02p0*Δ*p0∂z*(cos*θ+ℒQX)=*Λ*∂∂θp0(*cos*θ+ℒQX)+h0QX+2*Λ*iγp0*
(cos*θ+ℒQX)+h0QX* III.21

Et

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_Y}{\partial\theta} + \tilde{G}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\tilde{Q}_Y + 3\tilde{h}_0{}^2\tilde{p}_0\frac{\Delta\tilde{p}_0}{\partial\theta}(\sin\theta + \tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_Y)\right] + \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_y}{\partial\tilde{z}} + \right.$$

*G0∂p0∂zQY+3h02p0*Δ*p0∂z(*sinθ*+ℒQY)=*

$$\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{p}_0(\sin\theta + \tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_Y) + \tilde{h}_0\tilde{Q}_Y\right] + 2\Lambda i\gamma\left[\tilde{p}_0(\sin\theta + \tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_Y) + \tilde{h}_0\tilde{Q}_Y\right] \qquad \text{III.22}$$

En posant $\tilde{h}_X = \cos\theta + \tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_X$ et $\tilde{h}_Y = \sin\theta + \tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_Y$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\tilde{z}}\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right]+$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[3\tilde{h}_0{}^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[3\tilde{h}_0{}^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Lambda\tilde{p}_0\tilde{h}_0\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right]+$$
$$2\Lambda i\gamma\tilde{p}_0\tilde{h}_0\left[\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right] \qquad \text{III.23a}$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_Y}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_Y}{\partial\tilde{z}}\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\right]+$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[3\tilde{h}_0{}^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[3\tilde{h}_0{}^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Lambda\tilde{p}_0\tilde{h}_0\left(\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\right]+$$
$$2\Lambda i\gamma\tilde{p}_0\tilde{h}_0\left[\left(\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\right] \qquad \text{III.23b}$$

En posant le terme $R(.)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial}{\partial\theta}(.)\right]+\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}(.)\right]$, les équations (III.23a) et (III.23b) peuvent aussi être simplifiées ainsi :

$$R(\tilde{Q}_X)+\tilde{G}_0\tilde{p}_0\left[\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)+\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right]+\Lambda\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{p}_0\tilde{h}_0)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[3\tilde{h}_0{}^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)\right]+$$
$$\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[3\tilde{h}_0{}^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)\right]=\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\tilde{p}_0\tilde{h}_0)\left(\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right)\right]+2i\Lambda\gamma\tilde{p}_0\tilde{h}_0\left[\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right]$$

Et

$$R(\tilde{Q}_Y)+\tilde{G}_0\tilde{p}_0\left[\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)+\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\right]+\Lambda\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{p}_0\tilde{h}_0)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[3\tilde{h}_0{}^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right)\right]+$$
$$\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[3\tilde{h}_0{}^3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right)\right]=\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\tilde{p}_0\tilde{h}_0)\left(\left(\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\right)\right]+2i\Lambda\gamma\tilde{p}_0\tilde{h}_0\left[\left(\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\right]$$

Tout calcul fait on obtient :

$$\{R(\tilde{Q}_X)\}+\left\{\tilde{G}_0\tilde{p}_0\left[\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)+\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right]\right\}+\left\{\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{p}_0\tilde{h}_0)\left[\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)+3\left(\frac{\tilde{h}^3{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)\right]\right\}+$$
$$\left\{3\tilde{G}_0\tilde{p}_0\left[\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{h}^3{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)+\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{h}^3{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)\right]\right\}=$$
$$\left\{\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\tilde{p}_0\tilde{h}_0)\left(\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right)\right]\right\}+\left\{2i\Lambda\gamma\tilde{p}_0\tilde{h}_0\left[\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right]\right\} \qquad \text{III.24}$$

Et :

$$\{R(\tilde{Q}_Y)\} + \left\{\tilde{G}_0\tilde{p}_0\left[\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right) + \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\right]\right\} + \left\{\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{p}_0\tilde{h}_0)\left[\left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right) + 3\left(\frac{\tilde{h}^3{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right)\right]\right\} +$$

$$\left\{3\tilde{G}_0\tilde{p}_0\left[\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{h}^3{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right) + \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{h}^3{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right)\right]\right\} =$$

$$\left\{\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\tilde{p}_0\tilde{h}_0)\left(\left(\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right) + \left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\right)\right]\right\} + \left\{2i\Lambda\gamma\tilde{p}_0\tilde{h}_0\left[\left(\frac{\tilde{h}_Y}{\tilde{h}_0}\right) + \left(\frac{\tilde{Q}_Y}{\tilde{p}_0}\right)\right]\right\} \qquad \text{III.25}$$

Les {.} juste pour décrire l'équation en six (06) termes (T1+T2+T3+T4=T5+T6)

III.5 Traitement numérique :

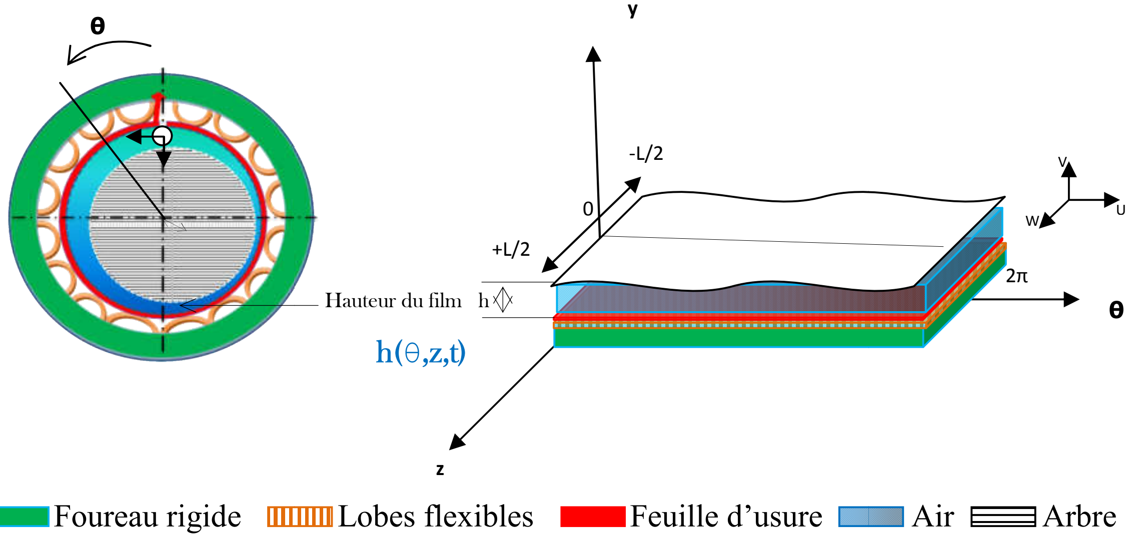


Figure III.4 Développement du palier dans l'axe thêta

Ce développement du palier permet de découper en un certain nombre de rectangles élémentaires et les variables continues θ et z sont remplacés par les variables discrètes i et j de la figure suivante :

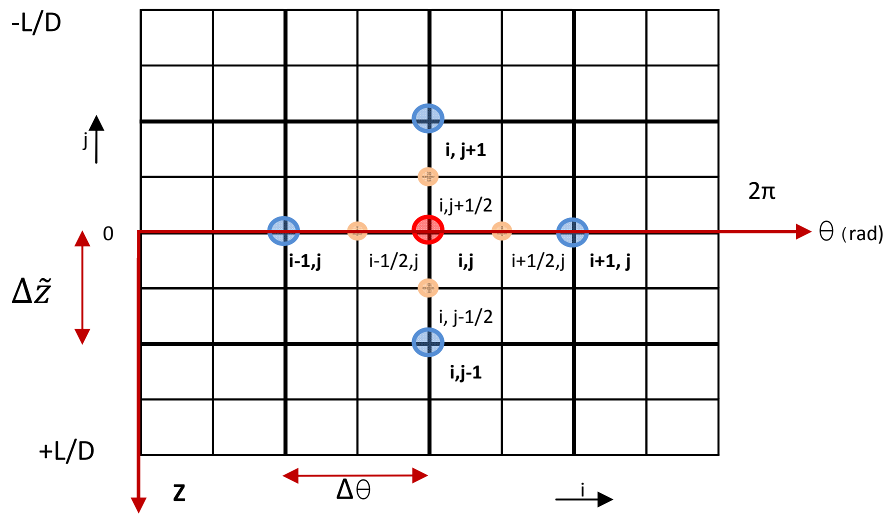


Figure III.5 Maillage du film lubrifiant

- $1 \leq i \leq N_\theta + 1$ et $1 \leq j \leq N_z + 1$
- $z = \frac{L}{2}$ et $\tilde{z} = \frac{z}{R} = \frac{L}{2R} = \frac{L}{D}$

Avec :

- N_θ : Nombre de mailles suivant θ
- N_z : Nombre de mailles suivant z
- $\Delta\theta$: Pas circonférentiel $= \frac{2\pi}{N_\theta}$
- Δz : Pas axial $= \frac{L/D}{N_z}$

Cette discrétisation nous permet de faire le calcul de nos équations d'ordre zéro et d'ordre un nœud (i, j)

Conditions liées à la pression:

La méthode consiste à construire une série de solutions $p_{ij}^{(0)}, p_{ij}^{(1)}, \dots \dots, p_{ij}^{(m-1)}, p_{ij}^{(m)}$ où $p_{ij}^{(0)}$ est l'estimé initial de la solution. La pression nodale $p_{ij}^{(m)}$ est déterminée par la résolution du système en utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel avec le coefficient de relaxation Ω_{GS} afin d'accélérer la convergence notamment pour le cas non linéaire .Durant l'itération sur la pression du film fluide, et dans la zone de dépression (suction phenomenon) la pression est considérée (p_{cav}=0) si les calcules donnent des valeurs négatives.

Conditions liées à l'épaisseur du film :

Considérant, le jeu radial qui est la différence entre les rayon de l'arbre et son logement (alésage du coussinet) $C = R_a - R_p$ et e_X, e_Y comme étant le déplacement du centre de l'arbre du rotor, on a donc :

$h_0 = C + e_X(t)\,cos\,\theta + e_Y(t)\,sin\,\theta$
III.25

Avec $\theta = \frac{X}{R}$ l'angle du palier (coordonnées cylindriques)

Quant le l'épaisseur du film h_0 est modifiée avec la déformation élastique de la feuille, la géométrie du film devient :

$h(\theta, z, t) = h_0 + \mathcal{L}p(\theta, z, t)$
III.26

avec $\mathcal{L} = \frac{2s}{E}\left(\frac{l}{t_b}\right)^3 (1 - \sigma^2)$ est l'opérateur de compliance de la feuille (bump foil) in (m/Pa) modelé comme un ressort. Cet opérateur donne la relation entre la pression et le déplacement élastique. A noter que et opérateur $\mathcal{L}$ est un paramètre clé dans nos EHD

a/ Traitement numérique de l'équation d'ordre zéro:

$$R(\tilde{p}_0)|_{i,j} - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)\bigg|_{i,j} + \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\right)\bigg|_{i,j} - \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{p}_0\tilde{h}_0)\bigg|_{\mathrm{i,j}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)\bigg|_{i,j} \approx \frac{\tilde{G}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta})_{i+1/2,j} - \tilde{G}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta})_{i-1/2,j}}{\Delta\theta^2}$$

$$= \frac{\left(\tilde{G}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\tilde{p}_{0_{i+1,j}} - \tilde{p}_{0_{i,j}}\right)\right) - \tilde{G}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\tilde{p}_{0_{i,j}} - \tilde{p}_{0_{i-1,j}}\right)}{\Delta\theta^2}$$

$$= \tilde{p}_{0_{i,j}}\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i+\frac{1}{2},j}} + \tilde{G}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}}{\Delta\theta^2}\right] + \tilde{p}_{0_{i+1,j}}\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}}{\Delta\theta^2}\right] + \tilde{p}_{0_{i-1,j}}\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}}{\Delta\theta^2}\right]$$

De la même façon :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\left(\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}}\right)\Big|_{i,j} \approx$$

$$\tilde{p}_{0_{i,j}}\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i,j+1/2}}\tilde{p}_{0_{i,j+\frac{1}{2}}}+\tilde{G}_{0_{i,j-\frac{1}{2}}}\tilde{p}_{0_{i,j-\frac{1}{2}}}}{\Delta\tilde{z}^2}\right]+\tilde{p}_{0_{i,j+1}}\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i,j+\frac{1}{2}}}\tilde{p}_{0_{i,j+\frac{1}{2}}}}{\Delta\tilde{z}^2}\right]+\tilde{p}_{0_{i,j-1}}\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i,j-\frac{1}{2}}}\tilde{p}_{0_{i,j-\frac{1}{2}}}}{\Delta\tilde{z}^2}\right]$$

Et le terme :

$$\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}_0\tilde{h}_0\right)\Big|_{\mathrm{i,j}} \approx \Lambda\frac{\tilde{p}_{0_{i+1,j}}\tilde{h}_{0_{i+1,j}}-\tilde{p}_{0_{i-1,j}}\tilde{h}_{0_{i-1,j}}}{2\Delta\theta}$$

Soit par conséquent :

$$-\tilde{p}_{0_{i,j}}\underbrace{\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}+\tilde{G}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}}{\Delta\theta^2}+\frac{\tilde{G}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}+\tilde{G}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}}{\Delta\tilde{z}^2}\right]}_{\mathrm{A_{i,j}}}+$$

$$\tilde{p}_{0_{i+1,j}}\underbrace{\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}}{\Delta\theta^2}-\Lambda\frac{\tilde{h}_{0_{i+1,j}}}{2\Delta\theta}\right]}_{\mathrm{B_{i,j}}}+\tilde{p}_{0_{i-1,j}}\underbrace{\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}}{\Delta\theta^2}+\Lambda\frac{\tilde{h}_{0_{i-1,j}}}{2\Delta\theta}\right]+}_{\mathrm{C_{i,j}}}$$

$$+\tilde{p}_{0_{i,j+1}}\underbrace{\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i,j+\frac{1}{2}}}\tilde{p}_{0_{i,j+\frac{1}{2}}}}{\Delta\tilde{z}^2}+\right]}_{\mathrm{D_{i,j}}}+\tilde{p}_{0_{i,j-1}}\underbrace{\left[\frac{\tilde{G}_{0_{i,j-\frac{1}{2}}}\tilde{p}_{0_{i,j-\frac{1}{2}}}}{\Delta\tilde{z}^2}\right]=0}_{\mathrm{E_{i,j}}}$$

ou encore :

$$A_{i,j}\tilde{p}_{0_{i,j}}=B_{i,j}\tilde{p}_{0_{i+1,j}}+C_{i,j}\tilde{p}_{0_{i-1,j}}+D_{i,j}\tilde{p}_{0_{i,j+1}}+E_{i,j}\tilde{p}_{0_{i,j-1}}$$

Donc : $\tilde{p}_{0_{i,j}}=\frac{B_{i,j}}{A_{i,j}}\tilde{p}_{0_{i+1,j}}+\frac{C_{i,j}}{A_{i,j}}\tilde{p}_{0_{i-1,j}}+\frac{D_{i,j}}{A_{i,j}}\tilde{p}_{0_{i,j+1}}+\frac{E_{i,j}}{A_{i,j}}\tilde{p}_{0_{i,j-1}}$

$$\tilde{p}_{0_{i,j}}=\acute{B}_{i,j}\tilde{p}_{0_{i+1,j}}+\acute{C}_{i,j}\tilde{p}_{0_{i-1,j}}+\acute{D}_{i,j}\tilde{p}_{0_{i,j+1}}+\acute{E}_{i,j}\tilde{p}_{0_{i,j-1}}$$

B/ Traitement numérique de l'équation d'ordre un:

1) *Premier terme :* $T_1|_{i,j} = R(\tilde{Q}_X)\big|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta}\right)\Big|_{i,j} + \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\tilde{z}}\right)\Big|_{i,j}$

$$= \frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\theta}\bigg|_{i,j}(P_0)|_{i,j}\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta}\bigg|_{i,j} + \tilde{G}_0\big|_{i,j}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\bigg|_{i,j}\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta}\bigg|_{i,j} + \tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial^2\tilde{Q}_X}{\partial\theta^2}\bigg|_{i,j} + \frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\tilde{z}}\bigg|_{i,j}(P_0)|_{i,j}\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\tilde{z}}\bigg|_{i,j}$$
$$+ \tilde{G}_0\big|_{i,j}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\bigg|_{i,j}\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\tilde{z}}\bigg|_{i,j} + \tilde{G}_{0_{i,j}}\tilde{p}_{0_{i,j}}\frac{\partial^2\tilde{Q}_X}{\partial\tilde{z}^2}\bigg|_{i,j}$$

$$T_1|_{i,j} \approx \frac{\tilde{P}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\theta}\right)_{i,j} + \tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)_{i,j}}{2\Delta\theta}\left(\tilde{Q}_{X_{i+1,j}} - \tilde{Q}_{X_{i-1,j}}\right)$$
$$+ \tilde{G}_{0_{i,j}}\tilde{P}_{0_{i,j}}\left[\frac{\tilde{Q}_{X_{i+1,j}} - 2\tilde{Q}_{X_{i,j}} + \tilde{Q}_{X_{i-1,j}}}{(\Delta\theta)^2} + \frac{\tilde{Q}_{X_{i,j+1}} - 2\tilde{Q}_{X_{i,j}} + \tilde{Q}_{X_{i,j-1}}}{(\Delta\tilde{z})^2}\right]$$

2) *Deuxième terme:*

$$T_2|_{i,j} = \tilde{G}_0\tilde{p}_0\left\{\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right) + \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right\}$$

$$= \tilde{G}_0\tilde{p}_0\left\{\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\left(\frac{\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta}\tilde{p}_0 - \tilde{Q}_X\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}}{\tilde{p}_0^{\ 2}}\right) + \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\tilde{z}}\tilde{p}_0 - \tilde{Q}_X\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}}{\tilde{p}_0^{\ 2}}\right)\right\}$$

$$= \tilde{G}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta} - \frac{\tilde{G}_0\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)^2\tilde{Q}_{X_{i,j}}}{\tilde{p}_0} + \tilde{G}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\tilde{z}} - \frac{\tilde{G}_0\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\right)^2\tilde{Q}_{X_{i,j}}}{\tilde{p}_0}$$

Avec $\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta} = \tilde{Q}_{X_{i+1,j}} - 2\tilde{Q}_{X_{i-1,j}}$ et $\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\tilde{z}} = \tilde{Q}_{X_{i,j+1}} - 2\tilde{Q}_{X_{i,j-1}}$

3) *Troisième terme:*

$$T_3|_{i,j} = \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{p}_0\tilde{h}_0\right)\left[\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right) + 3\left(\frac{\tilde{h}^3{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)\right]$$

$$= \Lambda\left(\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta} + \tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)\left[\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0} + 3\frac{\tilde{h}^2{}_0}{\tilde{G}_0}\left(cos\theta + \tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_X\right)\right]$$

$$= \Lambda\left(\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta} + \tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)\left[\tilde{Q}_X\left(\frac{1}{\tilde{p}_0} + \frac{3\tilde{\mathcal{L}}\tilde{h}^2{}_0}{\tilde{G}_0}\right) + 3\frac{\tilde{h}^2{}_0}{\tilde{G}_0}cos\theta\right]$$

4) *Quatrième terme :*

$$T_4|_{i,j} = 3\tilde{G}_0\tilde{p}_0\left[\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{h}^3{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)+\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{h}^3{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)\right]$$

$$T_4|_{i,j} = 3\tilde{G}_0\tilde{p}_0\left[\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde{h}^2{}_0}{\tilde{G}_0}\left(cos\theta+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_X\right)\right)+\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{h}^2{}_0}{\tilde{G}_0}\left(cos\theta+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_X\right)\right)\right]$$

$$= 3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\left\{2\tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta}cos\theta-\frac{\tilde{h}^2{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\theta}cos\theta+\tilde{h}^2{}_0\frac{\partial}{\partial\theta}cos\theta\right.$$

$$\left.+\tilde{\mathcal{L}}\left(2\tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta}\tilde{Q}_{X_{i,j}}-\frac{\tilde{h}^2{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\theta}\tilde{Q}_{X_{i,j}}+\tilde{h}^2{}_0\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta}\right)\right\}$$

$$+3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\left\{\frac{cos\theta}{\tilde{G}_0}\left(2\tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\tilde{z}}\tilde{G}_0-\tilde{h}^2{}_0\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\tilde{z}}\right)\right.$$

$$\left.+\tilde{\mathcal{L}}\left(2\tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\tilde{z}}\tilde{Q}_{X_{i,j}}-\frac{\tilde{h}^2{}_0}{\tilde{G}_0}\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\tilde{z}}\tilde{Q}_{X_{i,j}}+\tilde{h}^2{}_0\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\tilde{z}}\right)\right\}$$

Avec $\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta}=\frac{\tilde{Q}_{X_{i+1,j}}-\tilde{Q}_{X_{i,j}}}{2\Delta\theta}$ et $\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\tilde{z}}=\frac{\tilde{Q}_{X_{i,j+1}}-2\tilde{Q}_{X_{i,j-1}}}{2\Delta\tilde{z}}$

5) *Cinquième terme :*

$$T_5|_{i,j} = \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\tilde{p}_0\tilde{h}_0\right)\left(\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right)\right] = \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{p}_0\left(cos\theta+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_X\right)+\tilde{h}_0\tilde{Q}_X\right]$$

$$= \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{p}_0cos\theta+\tilde{Q}_X\left(\tilde{h}_0+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_0\right)\right]$$

$$T_5|_{i,j} = \Lambda\left\{\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}cos\theta+\tilde{p}_0\frac{\partial}{\partial\theta}(cos\theta)+\left(\tilde{h}_0+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_0\right)\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta}+\tilde{Q}_{X_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta}+\tilde{\mathcal{L}}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)\right\}$$

Avec $\frac{\partial\tilde{Q}_X}{\partial\theta}=\frac{\tilde{Q}_{X_{i+1,j}}-\tilde{Q}_{X_{i-1,j}}}{2\Delta\theta}$

6) *Sixième terme :*

$$T_6|_{i,j} = 2i\Lambda\gamma\tilde{p}_0\tilde{h}_0\left[\left(\frac{\tilde{h}_X}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right]$$

$$= 2i\Lambda\gamma\tilde{p}_0\tilde{h}_0\left[\left(\frac{\left(cos\theta+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{Q}_X\right)}{\tilde{h}_0}\right)+\left(\frac{\tilde{Q}_X}{\tilde{p}_0}\right)\right]$$

$$= 2i\Lambda\gamma\tilde{h}_0\left[\tilde{p}_0cos\theta+\tilde{Q}_X(\tilde{h}_0+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_0)\right]$$

Soit par conséquent :

$$T_1|_{i,j} + T_2|_{i,j} + T_3|_{i,j} + T_4|_{i,j} - T_5|_{i,j} - T_6|_{i,j} = 0$$

$$\tilde{Q}_{X\,i,j}\left\{\frac{2\tilde{G}_{0_{i,j}}\tilde{P}_{0_{i,j}}}{(\Delta\theta)^2} + \frac{2\tilde{G}_{0_{i,j}}\tilde{P}_{0_{i,j}}}{(\Delta\tilde{z})^2} + \frac{\tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)_{i,j}^2}{\tilde{P}_{0_{i,j}}} + \frac{\tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\right)_{i,j}^2}{\tilde{P}_{0_{i,j}}}\right.$$

$$-\Lambda\left(\left(\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta} + \tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta}\right)\left(\frac{1}{\tilde{p}_0} + 3\tilde{\mathcal{L}}\frac{\tilde{h}_0^{\,2}}{\tilde{G}_0}\right)\right) - 6\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\tilde{h}_0\tilde{\mathcal{L}}\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta}$$

$$+3\tilde{p}_0\tilde{\mathcal{L}}\frac{\tilde{h}_0^{\,2}}{\tilde{G}_0}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\theta} - 6\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\tilde{h}_0\tilde{\mathcal{L}}\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\tilde{z}} + +3\tilde{p}_0\tilde{\mathcal{L}}\frac{\tilde{h}_0^{\,2}}{\tilde{G}_0}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\tilde{z}}$$

$$\left.+\Lambda\left(\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta} + \tilde{\mathcal{L}}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right) + 2i\Lambda\gamma\left(\tilde{h}_0 + \tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_0\right)\right\} +$$

$$\tilde{Q}_{X\,i+1,j}\left\{\frac{\tilde{P}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\theta}\right)_{i,j} + \tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)_{i,j}}{2\Delta\theta} + \frac{\tilde{G}_{0_{i,j}}\tilde{P}_{0_{i,j}}}{(\Delta\theta)^2} + \frac{\tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)_{i,j}}{2\Delta\theta} + \frac{3\tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_0\tilde{h}_0^{\,2}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}}{2\Delta\theta}\right.$$

$$\left.-\Lambda\left(\frac{\tilde{h}_0 + \tilde{p}_0\tilde{\mathcal{L}}}{2\Delta\theta}\right)\right\} +$$

$$\tilde{Q}_{X\,i-1,j}\left\{-\frac{\tilde{P}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\theta}\right)_{i,j} + \tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)_{i,j}}{2\Delta\theta} + \frac{\tilde{G}_{0_{i,j}}\tilde{P}_{0_{i,j}}}{(\Delta\theta)^2} - \frac{\tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)_{i,j}}{2\Delta\theta} - \frac{3\tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_0\tilde{h}_0^{\,2}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}}{2\Delta\theta}\right.$$

$$\left.+\Lambda\left(\frac{\tilde{h}_0 + \tilde{p}_0\tilde{\mathcal{L}}}{2\Delta\theta}\right)\right\} +$$

$$\tilde{Q}_{X,j+1}\left\{\frac{\tilde{P}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\tilde{z}}\right)_{i,j}+\tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\right)_{i,j}}{2\Delta\tilde{z}}+\frac{\tilde{G}_{0_{i,j}}\tilde{P}_{0_{i,j}}}{(\Delta\tilde{z})^2}+\frac{\tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\right)_{i,j}}{2\Delta\tilde{z}}+\frac{3\tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_0\tilde{h}_0{}^2\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}}{2\Delta\tilde{z}}\right\}$$

$$+\tilde{Q}_{X,j\pm1}\left\{-\frac{\tilde{P}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\tilde{z}}\right)_{i,j}+\tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\right)_{i,j}}{2\Delta\tilde{z}}+\frac{\tilde{G}_{0_{i,j}}\tilde{P}_{0_{i,j}}}{(\Delta\tilde{z})^2}-\frac{\tilde{G}_{0_{i,j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\right)_{i,j}}{2\Delta\tilde{z}}\right.$$

$$\left.-\frac{3\tilde{\mathcal{L}}\tilde{p}_0\tilde{h}_0{}^2\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}}{2\Delta\tilde{z}}\right\}$$

$$=3\Lambda\left(\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta}+\tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)\frac{\tilde{h}_0{}^2}{\tilde{G}_0}cos\theta$$
$$+3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\left\{2\tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta}cos\theta-\frac{\tilde{h}_0{}^2}{\tilde{G}_0}\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\theta}cos\theta+\tilde{h}_0{}^2\frac{\partial}{\partial\theta}(cos\theta)\right\}$$
$$+3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\left\{\frac{cos\theta}{\tilde{G}_0}\left(2\tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\tilde{z}}\tilde{G}_0-\tilde{h}_0{}^2\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\tilde{z}}\right)\right\}$$
$$-\Lambda\left\{\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}cos\theta+\tilde{p}_0\frac{\partial}{\partial\theta}(cos\theta)\right\}-2i\Lambda\gamma\tilde{p}_0cos\theta$$

En conclusion, on trouve les mêmes matrices $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}, et\ D_{i,j}$ par contre, on remarque que une certaine différence dans les expressions $\grave{F}_{i,j}, E_{i,j},\ et\ \grave{E}_{i,j}$

$$\grave{E}_{i,j}=3\Lambda\left(\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta}+\tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)\frac{\tilde{h}_0{}^2}{\tilde{G}_0}\sin\theta$$
$$+3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\left\{2\tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\theta}\sin\theta-\frac{\tilde{h}_0{}^2}{\tilde{G}_0}\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\theta}\sin\theta+\tilde{h}_0{}^2\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\right\}$$
$$+3\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\tilde{z}}\left\{\frac{\sin\theta}{\tilde{G}_0}\left(2\tilde{h}_0\frac{\partial\tilde{h}_0}{\partial\tilde{z}}\tilde{G}_0-\tilde{h}_0{}^2\frac{\partial\tilde{G}_0}{\partial\tilde{z}}\right)\right\}$$
$$-\Lambda\left\{\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\sin\theta+\tilde{p}_0\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\right\}-2i\Lambda\gamma\tilde{p}_0\sin\theta$$

En fin on obtient :

$$F_{i,j}\tilde{Q}_{X_{i,j}} + A_{i,j}\tilde{Q}_{X_{i+1,j}} + B_{i,j}\tilde{Q}_{X_{i-1,j}} + C_{i,j}\tilde{Q}_{X_{i,j+1}} + D_{i,j}\tilde{Q}_{X_{i,j-1+}}E_{i,j} = 0$$

Et

$$-F_{i,j}\tilde{Q}_{Y_{i,j}} + A_{i,j}\tilde{Q}_{Y_{i+1,j}} + B_{i,j}\tilde{Q}_{Y_{i-1,j}} + C_{i,j}\tilde{Q}_{Y_{i,j+1}} + D_{i,j}\tilde{Q}_{Y_{i,j-1+}}\grave{E}_{i,j} = 0$$

La résolution des EDPs permet le des champs de pression dynamique $\tilde{q}_X$ et $\tilde{q}_Y$ et par conséquents les coefficients dynamiques

$$\begin{Bmatrix} A_{XX} \\ A_{YX} \end{Bmatrix} = -\int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{2\pi} \tilde{p}_X \begin{Bmatrix} \cos\hat{\theta} \\ \sin\hat{\theta} \end{Bmatrix} d\hat{\theta}d\tilde{z}; \quad \begin{Bmatrix} A_{XY} \\ A_{YY} \end{Bmatrix} = -\int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{2\pi} \tilde{p}_Y \begin{Bmatrix} \cos\hat{\theta} \\ \sin\hat{\theta} \end{Bmatrix} d\hat{\theta}d\tilde{z}$$

III.26

$$\begin{Bmatrix} B_{XX} \\ B_{YX} \end{Bmatrix} = -\int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{2\pi} \tilde{p}_{X'} \begin{Bmatrix} \cos\hat{\theta} \\ \sin\hat{\theta} \end{Bmatrix} d\hat{\theta}d\tilde{z}; \quad \begin{Bmatrix} B_{XY} \\ B_{YY} \end{Bmatrix} = -\int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{2\pi} \tilde{p}_{Y'} \begin{Bmatrix} \cos\hat{\theta} \\ \sin\hat{\theta} \end{Bmatrix} d\hat{\theta}d\tilde{z}$$

Sachant que

$$\tilde{p}_X = R\acute{e}el(\tilde{q}_X); \tilde{p}_Y = R\acute{e}el(\tilde{q}_Y); \tilde{p}_{X'} = \mathrm{Im}ag(\tilde{q}_X)/\gamma; \tilde{p}_{Y'} = \mathrm{Im}ag(\tilde{q}_Y)/\gamma$$

En utilisant la méthode itérative de Newton-Raphson, nous calculons(X_0,Y_0) résultant de l'application de la charge statique $\boldsymbol{W_0} = (W_{X0}, W_{Y0})$

$$\tilde{W}_{X0} = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos\hat{\theta}d\hat{\theta}d\tilde{z} \qquad \text{III.27a}$$

$$\tilde{W}_{Y0} = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin\hat{\theta}d\hat{\theta}d\tilde{z} \qquad \text{III.27b}$$

Ainsi que le calcul des composantes du vecteur résidu ***r*** :

$$\tilde{W}_X(\tilde{X},\tilde{Y}) = \tilde{W}_{X0} - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos\theta d\theta d\tilde{z} = 0 \qquad \text{III.28a}$$

$$\tilde{W}_Y(\tilde{X},\tilde{Y}) = \tilde{W}_{Y0} - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin\theta d\theta d\tilde{z} = 0 \qquad \text{III.28b}$$

a) Méthode de Newton-Raphson

$\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right)$ étant l'estimé initial proche de la solution $\left(\tilde{X}, \tilde{Y}\right)$, le développement en séries de Taylor des deux fonctions $\tilde{W}_X$ et $\tilde{W}_Y$ au point $\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right)$ donne :

$$\tilde{W}_X\left(\tilde{X}, \tilde{Y}\right) = \tilde{W}_X\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}}\right)_{\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right)} \delta\tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}}\right)_{\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right)} \delta\tilde{Y}_0 + \text{t.o.s.} \qquad \text{III.29a}$$

$$\tilde{W}_Y\left(\tilde{X}, \tilde{Y}\right) = \tilde{W}_Y\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right) + \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}}\right)_{\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right)} \delta\tilde{X}_0 + \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}}\right)_{\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right)} \delta\tilde{Y}_0 + \text{t.o.s.} \qquad \text{III.29b}$$

Avec $\delta\tilde{X}_0 = \tilde{X} - \tilde{X}_0$ et $\delta\tilde{Y}_0 = \tilde{Y} - \tilde{Y}_0$

Et on obtient finalement la matrice :

$$-\begin{Bmatrix} \tilde{W}_X\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right) \\ \tilde{W}_Y\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}}\right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}}\right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}}\right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}}\right) \end{bmatrix}_{\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right)} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_0 \\ \delta\tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} + \text{t. o. s} \qquad \text{III.30}$$

La matrice jacobienne inverse étant : $\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}}\right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}}\right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}}\right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}}\right) \end{bmatrix}^{-1}$, on a :

$$\begin{Bmatrix} \delta\tilde{X}_0 \\ \delta\tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{Y}_0 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{X}}\right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_X}{\partial \tilde{Y}}\right) \\ \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{X}}\right) & \left(\frac{\partial \tilde{W}_Y}{\partial \tilde{Y}}\right) \end{bmatrix}^{-1}_{\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right)} \begin{Bmatrix} \tilde{W}_X\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right) \\ \tilde{W}_Y\left(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0\right) \end{Bmatrix} + \text{t.o.s} \qquad \text{III.31}$$

Ce qui donne pour la solution $\left(\tilde{X}, \tilde{Y}\right)$ en négligeant les termes d'ordre supérieur:

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{X}_1 \\ \widetilde{Y}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widetilde{X}_0 \\ \widetilde{Y}_0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \widetilde{W}_X}{\partial \widetilde{X}}\right) & \left(\dfrac{\partial \widetilde{W}_X}{\partial \widetilde{Y}}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \widetilde{W}_Y}{\partial \widetilde{X}}\right) & \left(\dfrac{\partial \widetilde{W}_Y}{\partial \widetilde{Y}}\right) \end{bmatrix}^{-1}_{(\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0)} \begin{Bmatrix} \widetilde{W}_X\left(\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0\right) \\ \widetilde{W}_Y\left(\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0\right) \end{Bmatrix} \qquad \text{III.32}$$

Ainsi, on a une formule de récurrence de Newton-Raphson avec deux inconnues :

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{X}_{k+1} \\ \widetilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widetilde{X}_k \\ \widetilde{Y}_k \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \widetilde{W}_X}{\partial \widetilde{X}}\right) & \left(\dfrac{\partial \widetilde{W}_X}{\partial \widetilde{Y}}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \widetilde{W}_Y}{\partial \widetilde{X}}\right) & \left(\dfrac{\partial \widetilde{W}_Y}{\partial \widetilde{Y}}\right) \end{bmatrix}^{-1}_{(\widetilde{X}_k, \widetilde{Y}_k)} \begin{Bmatrix} \widetilde{W}_X\left(\widetilde{X}_k, \widetilde{Y}_k\right) \\ \widetilde{W}_Y\left(\widetilde{X}_k, \widetilde{Y}_k\right) \end{Bmatrix} \qquad \text{III.33}$$

$k = 0, 1, 2, k_{\max}$

Ou encore :

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{X}_{k+1} \\ \widetilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widetilde{X}_k \\ \widetilde{Y}_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta\widetilde{X}_k \\ \delta\widetilde{Y}_k \end{Bmatrix} \qquad \text{III.34}$$

L'inversion analytique de la matrice jacobéenne permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \delta\widetilde{X}_k \\ \delta\widetilde{Y}_k \end{Bmatrix} = - \frac{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \widetilde{W}_Y}{\partial \widetilde{Y}} & -\dfrac{\partial \widetilde{W}_X}{\partial \widetilde{Y}} \\ -\dfrac{\partial \widetilde{W}_Y}{\partial \widetilde{X}} & \dfrac{\partial \widetilde{W}_X}{\partial \widetilde{X}} \end{bmatrix}_{(\widetilde{X}_k, \widetilde{Y}_k)} \begin{Bmatrix} \widetilde{W}_X\left(\widetilde{X}_k, \widetilde{Y}_k\right) \\ \widetilde{W}_Y\left(\widetilde{X}_k, \widetilde{Y}_k\right) \end{Bmatrix}}{\left(\dfrac{\partial \widetilde{W}_X}{\partial \widetilde{X}} \dfrac{\partial \widetilde{W}_Y}{\partial \widetilde{Y}} - \dfrac{\partial \widetilde{W}_X}{\partial \widetilde{Y}} \dfrac{\partial \widetilde{W}_Y}{\partial \widetilde{X}}\right)_{(\widetilde{X}_k, \widetilde{Y}_k)}} \qquad \text{III.35}$$

$k = 0, 1, 2, k_{\max}$

b) Méthode de Newton-Raphson amortie

L'algorithme de *Newton-Raphson* amorti qui converge plus vite que l'algorithme précédent s'écrit :

1. Etant donné ε_I, un critère d'arrêt
2. Etant donné $k_{\max}$, le nombre maximal d'itérations
3. Etant donné $\left(\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0\right)$, une approximation initiale de la solution du système III.28
4. Résoudre le problème EHD non linéaire en régime stationnaire et calcul de $\widetilde{h}_0$ et $\widetilde{p}_0$

5. Calculer les composantes de la portance hydrodynamique :

$$\widetilde{F}_{X0} = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{2\pi} \widetilde{p}_0 \cos\hat{\theta} d\hat{\theta} d\widetilde{z} \text{ et } \widetilde{F}_{Y0} = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{0}^{2\pi} \widetilde{p}_0 \sin\hat{\theta} d\hat{\theta} d\widetilde{z}$$

6. Calculer les composantes du vecteur résidu : $\widetilde{W}_X$ et $\widetilde{W}_Y$

7. Différentiation numérique de la matrice jacobienne comme suit :

$$\left(\frac{\partial \widetilde{W}_X}{\partial \widetilde{X}}\right)_k \approx \frac{\widetilde{W}_X\left(\widetilde{X}_k+\delta,\widetilde{Y}_k\right)-\widetilde{W}_X\left(\widetilde{X}_k,\widetilde{Y}_k\right)}{\delta}; \quad \left(\frac{\partial \widetilde{W}_X}{\partial \widetilde{Y}}\right)_k \approx \frac{\widetilde{W}_X\left(\widetilde{X}_k,\widetilde{Y}_k+\delta\right)-\widetilde{W}_X\left(\widetilde{X}_k,\widetilde{Y}_k\right)}{\delta};$$

$$\left(\frac{\partial \widetilde{W}_Y}{\partial \widetilde{X}}\right)_k \approx \frac{\widetilde{W}_Y\left(\widetilde{X}_k+\delta,\widetilde{Y}_k\right)-\widetilde{W}_Y\left(\widetilde{X}_k,\widetilde{Y}_k\right)}{\delta}; \quad \left(\frac{\partial \widetilde{W}_Y}{\partial \widetilde{Y}}\right)_k \approx \frac{\widetilde{W}_Y\left(\widetilde{X}_k,\widetilde{Y}_k+\delta\right)-\widetilde{W}_Y\left(\widetilde{X}_k,\widetilde{Y}_k\right)}{\delta}$$

la valeur de δ est 10^{-4}.

8. Calculer les corrections $\left(\delta\widetilde{X}_k, \delta\widetilde{Y}_k\right)$

9. Calculer les nouvelles approximations du système non linéaire :

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{X}_{k+1} \\ \widetilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widetilde{X}_k \\ \widetilde{Y}_k \end{Bmatrix} + \varpi^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta\widetilde{X}_k \\ \delta\widetilde{Y}_k \end{Bmatrix}$$

Où $\varpi^{(k)}$ est le coefficient de relaxation

$\varpi^{(k)} = 1$: Méthode classique de *Newton*

$\varpi^{(k)} < 1$: Méthode de *Newton* dite amortie

10. Si

$$\sqrt{\left\langle \widetilde{W}_X^{(k+1)} \quad \widetilde{W}_Y^{(k+1)} \right\rangle \begin{Bmatrix} \widetilde{W}_X^{(k+1)} \\ \widetilde{W}_Y^{(k+1)} \end{Bmatrix}} \le \varepsilon_1 \text{ ou } \left|\widetilde{W}_X^{(k+1)}\right| + \left|\widetilde{W}_Y^{(k+1)}\right| \le \varepsilon_1$$

$$\text{ou encore } \sqrt{\left\langle \delta\widetilde{X}_k \quad \delta\widetilde{Y}_k \right\rangle \begin{Bmatrix} \delta\widetilde{X}_k \\ \delta\widetilde{Y}_k \end{Bmatrix}} \Big/ \sqrt{\left\langle \widetilde{X}_{k+1} \quad \widetilde{Y}_{k+1} \right\rangle \begin{Bmatrix} \widetilde{X}_{k+1} \\ \widetilde{Y}_{k+1} \end{Bmatrix}} \le \varepsilon_1 \text{ et } \quad k < k_{\max}$$

où $\varepsilon_1 = 10^{-6}$

- convergence atteinte : Les valeurs de $\left(\widetilde{X}_{k+1}, \widetilde{Y}_{k+1}\right)$ correspondent aux coordonnées de la position d'équilibre statique qui en résulte de l'application de la charge statique $\boldsymbol{W_0}$.
- calculer l'angle de calage statique du palier par : $\phi_0 = \tan^{-1}\left(\widetilde{Y}_{k+1} / \widetilde{X}_{k+1}\right)$
- arrêt

11. Si le nombre maximal d'itérations $k_{\max}$ est atteint :

- convergence non atteinte en k_{max} itérations

- arrêt

12. Sinon, poser $k \leftarrow k+1$
13. Retour à l'étape 4 pour une autre itération.

III.5 Réponse dynamique :

La trajectoire du centre de l'arbre (rotor) prédite par l'approche linéaire est toujours de forme elliptique pour un balourd de faible excentricité e_b. Celle-ci est obtenue dans le cas d'un rotor rigide à partir de la résolution du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_{XX} & b_{XY} \\ b_{YX} & b_{YY} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{XX} & a_{XY} \\ a_{YX} & a_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = m e_b \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.57a)}$$

En variable sans dimension, l'équation (III.57a) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M} & 0 \\ 0 & \widetilde{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widetilde{X}'' \\ \widetilde{Y}'' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \widetilde{X}' \\ \widetilde{Y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widetilde{X} \\ \widetilde{Y} \end{Bmatrix} = \widetilde{M} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} \cos\widetilde{t} \\ \sin\widetilde{t} \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.57b)}$$

Où : $\widetilde{t} = \omega t$ et $\varepsilon_b = \dfrac{e_b}{C}$

Le vecteur solution du système d'équation (III.57b) est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \widetilde{X} \\ \widetilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \widetilde{X}_1 \\ \widetilde{Y}_1 \end{Bmatrix} \cos\widetilde{t} + \begin{Bmatrix} \widetilde{X}_2 \\ \widetilde{Y}_2 \end{Bmatrix} \sin\widetilde{t} \qquad \text{(III.58)}$$

En remplaçant (III.58) dans le système (III.57b) et en identifiant les termes en $\cos\widetilde{t}$ et $\sin\widetilde{t}$, on aura :

$$\begin{bmatrix} (A_{XX}-\widetilde{m}) & B_{XX} & A_{XY} & B_{XY} \\ -B_{XX} & (A_{XX}-\widetilde{m}) & -B_{XY} & A_{XY} \\ A_{YX} & B_{YX} & (A_{YY}-\widetilde{m}) & B_{YY} \\ -B_{YX} & A_{YX} & -B_{YY} & (A_{YY}-\widetilde{m}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widetilde{X}_1 \\ \widetilde{X}_2 \\ \widetilde{Y}_1 \\ \widetilde{Y}_2 \end{Bmatrix} = \widetilde{m}\varepsilon_b \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.59)}$$

La solution du système (III.59) s'écrit :

$$\begin{cases} \widetilde{X}_1 = \widetilde{M}\varepsilon_b \dfrac{AC+BD}{C^2+D^2} \\ \widetilde{X}_2 = -\widetilde{M}\varepsilon_b \dfrac{BC-AD}{C^2+D^2} \\ \widetilde{Y}_1 = \widetilde{M}\varepsilon_b \dfrac{EC+FD}{C^2+D^2} \\ \widetilde{Y}_2 = -\widetilde{M}\varepsilon_b \dfrac{FC-ED}{C^2+D^2} \end{cases} \qquad \text{(III.60)}$$

Avec :

$$A = -\widetilde{M} + A_{YY} - B_{XY}$$
$$B = A_{XY} + B_{YY}$$
$$C = \widetilde{M}^2 - \widetilde{M}(A_{XX} + A_{YY}) + A_{XX}A_{YY} - A_{XY}A_{YX} - (B_{XX}B_{YY} - B_{XY}B_{YX})$$
$$D = -\widetilde{M}(B_{XX} + B_{YY}) + A_{XX}B_{YY} + A_{YY}B_{XX} - A_{XY}B_{YX} - A_{YX}B_{XY}$$
$$E = -A_{YX} + B_{XX}$$
$$F = \widetilde{M} - A_{XX} - B_{YX}$$

Caractéristiques de la trajectoire du centre de l'arbre

La solution (III.58) du système (III.57b) correspond à une trajectoire de forme elliptique (figure III. 3) dont les caractéristiques sont les suivantes :

$a = \widetilde{a}C$: Demi-grand axe ;

$b = \widetilde{b}C$: Demi-petit axe ;

φ : Angle de déphasage entre le vecteur balourd et le vecteur déplacement ;

δ : L'angle qui donne l'inclinaison du demi-grand axe par rapport à l'axe X .

Ainsi, dans le repère propre de l'ellipse (o_{a0}, X^*, Y^*), l'équation de l'ellipse s'écrit :

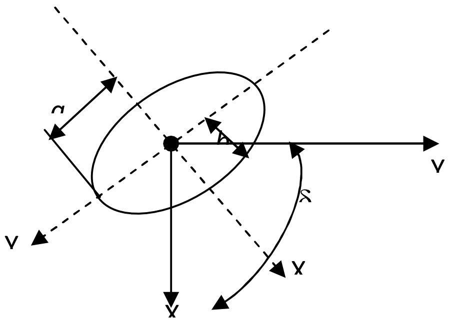


Fig. III.3 *Caractéristiques d'une trajectoire elliptique.*

$$\begin{cases} \widetilde{X}^* = \widetilde{a}\cos\left(\widetilde{t} + \varphi\right) \\ \widetilde{Y}^* = \widetilde{b}\sin\left(\widetilde{t} + \varphi\right) \end{cases} \tag{III.61}$$

Où : $\left(\widetilde{X}^*, \widetilde{Y}^*\right) = \dfrac{\left(X^*, Y^*\right)}{C}$

Compte tenu de la relation (III.69), la projection sur (o_{a0}, X, Y) donne :

$$\begin{cases} \widetilde{X} = \widetilde{a}\cos\left(\widetilde{t} + \varphi\right)\cos\delta + \widetilde{b}\sin\left(\widetilde{t} + \varphi\right)\sin\delta \\ \widetilde{Y} = -\widetilde{a}\cos\left(\widetilde{t} + \varphi\right)\sin\delta + \widetilde{b}\sin\left(\widetilde{t} + \varphi\right)\cos\delta \end{cases}$$

(III.62) Les équations (III.66) sont identiques aux équations (III.70), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \widetilde{X}_1\cos\widetilde{t} + \widetilde{X}_2\sin\widetilde{t} = \widetilde{a}\cos\left(\widetilde{t} + \varphi\right)\cos\delta + \widetilde{b}\sin\left(\widetilde{t} + \varphi\right)\sin\delta \\ \widetilde{Y}_1\cos\widetilde{t} + \widetilde{Y}_2\sin\widetilde{t} = -\widetilde{a}\cos\left(\widetilde{t} + \varphi\right)\sin\delta + \widetilde{b}\sin\left(\widetilde{t} + \varphi\right)\cos\delta \end{cases} \tag{III.63}$$

Ce système d'équations étant vérifié quelque soit le temps $\widetilde{t}$, il vient en identifiant les termes en $\cos\widetilde{t}$ et $\sin\widetilde{t}$:

$$\begin{cases} \widetilde{X}_1 = \widetilde{a}\cos\delta\cos\varphi + \widetilde{b}\sin\delta\sin\varphi \\ \widetilde{X}_2 = -\widetilde{a}\cos\delta\sin\varphi + \widetilde{b}\sin\delta\cos\varphi \\ \widetilde{Y}_1 = -\widetilde{a}\sin\delta\cos\varphi + \widetilde{b}\cos\delta\sin\varphi \\ \widetilde{Y}_2 = \widetilde{a}\sin\delta\sin\varphi + \widetilde{b}\cos\delta\cos\varphi \end{cases} \tag{III.64}$$

La résolution des équations (III.64) permet de déterminer les caractéristiques de l'ellipse :

$$
\begin{cases}
\tilde{a}=\sqrt{\dfrac{\left(\tilde{X}_1^2+\tilde{X}_2^2+\tilde{Y}_1^2+\tilde{Y}_2^2\right)}{2}+\sqrt{\left(\tilde{X}_1\tilde{Y}_1+\tilde{X}_2\tilde{Y}_2\right)^2+\dfrac{1}{4}\left(\tilde{X}_1^2+\tilde{X}_2^2-\tilde{Y}_1^2-\tilde{Y}_2^2\right)^2}} \\
\tilde{b}=\sqrt{\dfrac{\left(\tilde{X}_1^2+\tilde{X}_2^2+\tilde{Y}_1^2+\tilde{Y}_2^2\right)}{2}-\sqrt{\left(\tilde{X}_1\tilde{Y}_1+\tilde{X}_2\tilde{Y}_2\right)^2+\dfrac{1}{4}\left(\tilde{X}_1^2+\tilde{X}_2^2-\tilde{Y}_1^2-\tilde{Y}_2^2\right)^2}} \\
\delta=\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{-2\left(\tilde{X}_1\tilde{Y}_1+\tilde{X}_2\tilde{Y}_2\right)}{\tilde{X}_1^2+\tilde{X}_2^2-\tilde{Y}_1^2-\tilde{Y}_2^2}\right) \\
\varphi=\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{-2\left(\tilde{X}_1\tilde{X}_2+\tilde{Y}_1\tilde{Y}_2\right)}{\tilde{X}_1^2-\tilde{X}_2^2+\tilde{Y}_1^2-\tilde{Y}_2^2}\right)
\end{cases}
\tag{III.65}
$$

C- Pseudo code:

La première étape consiste en l'introduction des paramètres géométriques, le maillage ainsi que les paramètres de fonctionnement du palier.

Données d'entrée :

N_θ, Nz, Δ_θ , $\Delta\tilde{z}$,k_{max}, n_{max}, ω, Ω_{GS}, ω_{NR}, ʌ, L, R, C, μ, , ρ, G, η, A, B, C, W_X, W_Y

Choisir les valeurs initiales de la position de l'arbre ε_X et ε_Y

Choisir l'estimation initiale pour la méthode de Newton-Raphson: $\varepsilon_X^{(0)}=\varepsilon_X$, $\varepsilon_Y^{(0)}=\varepsilon_Y$

***Do**1 i=1,..., N_θ+1; **Do**1 j=1,..., Nz+1 ! Boucle sur les nœuds du maillage*

$p_{ij}=1.;\ p_{old_{ij}}=1.;\ h_{old_{ij}}=C-e_X(1)cos\theta_i-e_Y(1)sin\theta_i$

***End do**1 ! Fin de boucle sur les nœuds*

Mettre $\varepsilon_X^{(old)}=\varepsilon_X$; $\varepsilon_Y^{old}=e_Y$;

Déroulement du programme :

Mettre k=0

1 $k\leftarrow k+1$ *! Compteur d'itérations de la méthode de Newton-Raphson*

Mettre J=0

2 $J \leftarrow J + 1$

norm=1. *! valeur initiale*

m=0

Do while$(norm > 10^{-6}\ et\ \ m < m_{max})$

$m \leftarrow m + 1$ *! Compteur d'itérations pour la method de substitutions successives*

Do 2 *i=1,...., N_θ +1;* ***Do 2*** *j=1,....,N_z+1*

$$h_{ij} = 1 + \varepsilon_X^{(k)} cos\theta_i - \varepsilon_Y^{(k)} sin\theta_i + C\, p_{ij}^{old}$$

If *(η=0)* ***then*** *! Cas Newtonien*

$$G_{ij} = h_{ij}^3$$

Else *! Cas non Newtonien*

$$G_{ij} = h_{ij}^3 exp - 12l^2 \left[h_{ij} - 2l\ \tanh\left(\frac{h_{ij}}{2l}\right)\right]$$

Endif

End do 2

Calcul de p_{ij} *en utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel*

$Calculate\ p_{ij} using the Gauss - Seidel algorithm Eq. (23)$

$$Calculate\ the\ relative\ least\ square\ norm = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_x+1}\sum_{j=1}^{N_z+1}\left(p_{ij}-p_{ij}^{old}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N_x+1}\sum_{j=1}^{N_z+1} p_{ij}^2}}$$

! Mise à jour de la solution initiale avec la solution actuelle

Do 3 *i=1,....,N_x+1;* ***Do 3*** *j=1,....,N_z+1*

$\tilde{p}_{ij}^{old} = (1-\omega)\tilde{p}_{ij}^{old} + \omega p_{ij}$ *(Eq. 21)*

End do 3

End do while

Evaluation des gradients de pression $\left.\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta}\right|_{ij}$ *and* $\left.\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}}\right|_{ij}$ *à chaque nœud i,j par différence finie centrale.*

Calcul des composants de la force de portance $\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = -\iint_A p \begin{Bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{Bmatrix} dA$ *en utilisant*

Calcule des composants résiduels : $r_X^{(k)} = W_X - F_X$; $r_Y^{(k)} = W_Y - F_Y$

Evaluation des coefficients de la matrice Jacobienne $[J_k]$ *:*

If *(J=1)* ***then***

$$\varepsilon_X^{(save)} = \varepsilon_X^{(k)};\ \varepsilon_Y^{(save)} = \varepsilon_Y^{(k)};\ r_X^{(save)} = r_X^{(k)}\ et\ \ r_Y^{(save)} = r_Y^{(k)}$$

$$Mettre\ \varepsilon_X^{(k)} = \varepsilon_X^{(save)} + \delta X\ ;\ \varepsilon_Y^{(k)} = \varepsilon_Y^{(save)}$$

Return to 2

Elseif *(J=2)* ***then***

$$r_{X+\delta X} = r_X^{(k)}\ ;\ r_{Y+\delta Y} = r_Y^{(k)}$$

$$Mettre\ \varepsilon_X^{(k)} = \varepsilon_X^{(save)} - \delta X\ ;\ \varepsilon_Y^{(k)} = \varepsilon_Y^{(save)}$$

Return to 2

Elseif *(J=3)* ***then***

$$r_{X-\delta X} = r_X^{(k)}\ ;\ r_{Y-\delta X} = r_Y^{(k)}$$

$$Mettre\ \varepsilon_X^{(k)} = \varepsilon_X^{(save)};\ \varepsilon_Y^{(k)} = \varepsilon_Y^{(save)} + \delta Y$$

Return to 2

Elseif *(J=4)* ***then***

$$r_{X+\delta Y} = r_X^{(k)}\ ;\ r_{Y+\delta Y} = r_Y^{(k)}$$

$$Set\ \varepsilon_X^{(k)} = \varepsilon_X^{(save)};\ \varepsilon_Y^{(k)} = \varepsilon_Y^{(save)} - \delta Y$$

Return to 2

Elseif *(J=5)* ***then***

$$r_{X-\delta Y} = r_X^{(k)}\ ;\ r_{Y-\delta Y} = r_Y^{(k)}$$

Endif

$$(\partial r_X/\partial \varepsilon_X)^{(k)} = \frac{r_{X+\delta X} - r_{X-\delta X}}{2\delta X}\ ;\ (\partial r_Y/\partial \varepsilon_X)^{(k)} = \frac{r_{Y+\delta X} - r_{Y-\delta X}}{2\delta X}\ ;\ (\partial r_X/\partial \varepsilon_Y)^{(k)} = \frac{r_{X+\delta Y} - r_{X-\delta Y}}{2\delta Y}\ et$$

$(\partial r_Y/\partial \varepsilon_Y)^{(k)} = \frac{r_{Y+\delta Y} - r_{Y-\delta Y}}{2\delta Y}$ $\quad ou\ \delta X = \delta Y = \delta = 10^{-4}$ $\quad$ *pour calcul double precision.*

Résoudre le système linéaire pour $\delta\varepsilon_X^{(k)}$ *et* $\delta\varepsilon_Y^{(k)}$

Mise à jour de la solution selon : $\varepsilon_X^{(k+1)} = \varepsilon_X^{(k)} + \omega_{NR}\delta\varepsilon_X^{(k)}$ *et* $\varepsilon_Y^{(k+1)} = \varepsilon_Y^{(k)} + \omega_{NR}\delta\varepsilon_Y^{(k)}$

if $\left(\left|r_X^{(k)}(n)\right| + \left|r_Y^{(k)}(n)\right| > 10^{-2}\ and\ k < k_{max}\right)$ ***then***

Return to 1 *pour faire une autre itération*

Else if$(k > k_{max})$***Stop***

Endif

Calcul des caractéristiques hydrodynamique : $p_{max}, h_{min}, \mathcal{P}, Q_z$

End program7

III. 6 Validation des résultats :

Dans la validation de nos résultats, nous nous sommes référés aux fameux travaux d'Heshmat & AO. l (H.Heshmat, J.A. Walovit, O. Pinkus, Analysis of gas lubricated foil journal bearings, 1983, Journal of Lubrication and Technology, Trans. Of the ASME, 105, 647-655) et ceux de Peng & al (Calculation of stiffness and damping coefficients for elastically supported gas foil bearing, 1993, Journal of Tribology, Tran. Of the ASME, 115,20) et les travaux de H. Bensouilah (Etude statique et dynamique des paliers à feuille 2012) Malheureusement pour les coefficients d'amortissement on n'a pas pu trouver de référence à Heshmat. Les valeurs sont calculées sur la base des données suivantes :

- ✓ Λ =1 , C/R=8.64x10^{-4} , α=0 γ=0 pour le calcul des coefficients et selon le cas pour le calcul des pressions
- ✓ Maillage N_Θ =120 et N_z =60
- ✓ Conditions aux limites de Reynolds (Article de Bensouilah C.L. de Gumbel)

Coefficient de raideurs et d'amortissement :

$W_{0\text{ en N}}$	ε_0	A_{xx}	Δ en %/(3)	A_{xy}	Δ en %/(3)	A_{yx}	Δ en %/(3)	A_{yy}	Δ en %/(3)	
60	0.5959	**3,175**	**-1,9%**	**2,399**	**2,3%**	**0,0687**	**-45,0%**	**2,047**	**6,6%**	(1)
		3,304	2,1%	2,398	2,3%	0,131	4,8%	1,975	2,9%	(2)
		3,237	0,0%	2,345	0,0%	0,125	0,0%	1,92	0,0%	(3)
		4,175	29,0%	0,775	-67,0%	0,225	80,0%	1,049	-45,4%	(4)
120	0.7465	**8,848**	**-1,5%**	**4,176**	**4,7%**	**1,286**	**10,3%**	**3,405**	**-0,3%**	(1)
		9,208	2,5%	4,185	4,9%	1,345	15,4%	3,365	-1,5%	(2)
		8,981	0,0%	3,989	0,0%	1,166	0,0%	3,416	0,0%	(3)
		10,424	16,1%	1,715	-57,0%	1,405	20,5%	2,397	-29,8%	(4)
320	0.8967	**43,28**	**-2,7%**	**10,27**	**1,2%**	**5,88**	**-2,4%**	**7,12**	**-1,1%**	(1)
		46,957	5,5%	10,383	2,3%	6,395	6,2%	7,261	0,8%	(2)
		44,493	0,0%	10,151	0,0%	6,024	0,0%	7,202	0,0%	(3)
		45,572	2,4%	5,451	-46,3%	6,192	2,8%	6,384	-11,4%	(4)

Tableau III.1 : Comparaison Coefficients de Raideurs avec littérature

W_0	ε_0	B_{xx}	Δ en %/3	B_{xy}	Δ en %/3	B_{yx}	Δ en %/3	B_{yy}	Δ en %/3	
60	0.5959	**1,854**	**17,9%**	**-0,568**	**-21,3%**	**0,859**	**215,8%**	**0,93**	**54,0%**	(1)
		1,628	3,5%	-0,715	-1,0%	0,452	66,2%	0,616	2,0%	(2)
		1,573	0,0%	-0,722	0,0%	0,272	0,0%	0,604	0,0%	(3)
120	0.7465	**2,352**	**1,3%**	**-0,936**	**-6,9%**	**0,779**	**52,4%**	**0,898**	**20,2%**	(1)
		2,097	-9,7%	-1,09	8,5%	0,454	-11,2%	0,849	13,7%	(2)
		2,322	0,0%	-1,005	0,0%	0,511	0,0%	0,747	0,0%	(3)
320	0.8967	**4,04**	**-21,2%**	**-1,761**	**11,1%**	**0,616**	**-27,2%**	**1,114**	**16,6%**	(1)
		3,184	-37,9%	-1,828	15,3%	0,202	-76,1%	0,968	1,4%	(2)
		5,126	0,0%	-1,585	0,0%	0,846	0,0%	0,955	0,0%	(3)

Tableau III.1 : Comparaison Coefficients de Raideurs avec littérature

Nous pouvons bien constater la concordance des résultats obtenues, avec la littérature. La comparaison des coefficient de raideurs aux travaux résultats des travaux d'Heshmat montre qu'excepté deux résultats A_{YX} pour 60N et A_{YX} à 120N tout le reste des résultats est inférieur à 7% de différence. Pour les coefficient d'amortissement nous trouvons pratiquement des valeurs très proches de ceux obtenus par Bensouileh.

Pression max et angle de calage :

W_0 en N	ε_0	A	ϕ_0 (deg)	Δ en %/(3)	P_o max	Δ en %/(3)	
60	0.5959	0	**37,1**	**3,9%**	**1,533**	**-0,4%**	(1)
			35,9	0,6%	1,541	0,1%	(2)
			35,7	0,0%	1,539	0,0%	(3)
			36,5	2,2%	-		(4)
120	0.7465	0	**25,2**	**4,6%**	**2,17**		(1)
			24,5	1,7%	2,189		(2)
			24,1	0,0%	-		(3)
			24,7	2,5%	-		(4)
320	0.8967	0	**13,13**	**2,6%**	**4,718**	**-2,7%**	(1)
			12,7	-0,8%	4,861	0,2%	(2)
			12,8	0,0%	4,85	0,0%	(3)
			12,9	0,8%	-		(4)
36	0.5959	1	**35,4**	**10,3%**	**1,252**	**-0,1%**	(1)
			33,1	3,1%	1,253	0,0%	(2)
			32,1	0,0%	1,253	0,0%	(3)
			34	5,9%	-		(4)
50	0.7465	1	**27,69**	**0,0%**	**1,339**		(1)
			26,7	-3,6%	1,339		(2)
			27,7	0,0%	-		(3)
			26,3	-5,1%	-		(4)
65	0.8967	1	**22,7**	**1,3%**	**1,445**	**-2,7%**	(1)
			21,6	-3,6%	1,431	-3,6%	(2)
			22,4	0,0%	1,485	0,0%	(3)
			21,4	-4,5%	-		(4)

Tableau III.1 : Comparaison Coefficients de Raideurs avec littérature

Nous trouvons des résultats très proches par rapport à la littérature en matière d'angle de calage et pas de déviation remarquable, alors pour les pressions max on obtient pratiquement les mêmes valeurs de la littérature.

III.7 Conclusion :

L'approche utilisé a permet le calcul des coefficients dynamiques, des champs de pression et la hauteur du film d'air. Le rapprochement des résultats avec la littérature a donné satisfaction et, il y a lieu de faire l'analyse dynamique du palier par une étude paramétrique.

Chapitre IV

Etude paramétrique

VI.1 Introduction :

L'étude dynamique des paliers à gaz, implique l'analyse des coefficients dynamiques et les éléments influents. Dans ce chapitre, nous allons d'abord voir l'impact des conditions

aux limites sur le profil de pression et la géométrie du film en prenant en considérations les conditions les conditions aux limites de cette étude qui sont ceux de Reynolds pour un palier à gaz déformable et on va les comparer aux conditions de Sommerfeld et Gumbel avec aussi une comparaison à un palier rigide, ce qui va permettre d'illustrer le travail de feuilles sur le champ de pression et la hauteur du film. Ensuite nous examinerons en détails l'influence de la fréquence d'excitation sur le comportement de chaque coefficient de raideur et d'amortissement dans le cas d'un fluide Newtonien et dans le cas d'un fluide polaire tout en examinant les cas de palier rigide, statiquement déformable et en déformation statique et dynamique.

Nous rappelons d'abord les données de calcul :

Lambda=1., L0=0. ou L0=1.07, Ntheta=120, Nz=60, omega2=0.1, omegaNR=1. N=80krpm

65. WX0, N, 0.0 WY0, N

0.8 EPSX0, sans dim., 0.4 EPSY0, sans dim.

1.013E5 pression ambiante, Pa

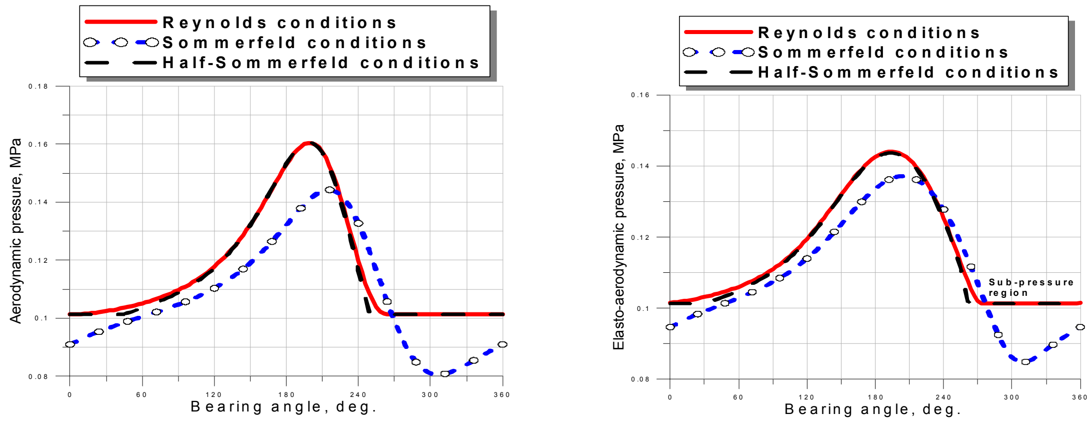
0.050 Longueur du palier, m, 0.025 Rayon du palier, m, 21.6E-6 Jeu radial du palier, m

18.2E-6 µ: Viscosité dynamique du gaz, Pa.s

eta: Coefficient responsable des couples de contraintes

IV.2 –Analyse des champs de pressions et de la géométrie du film:

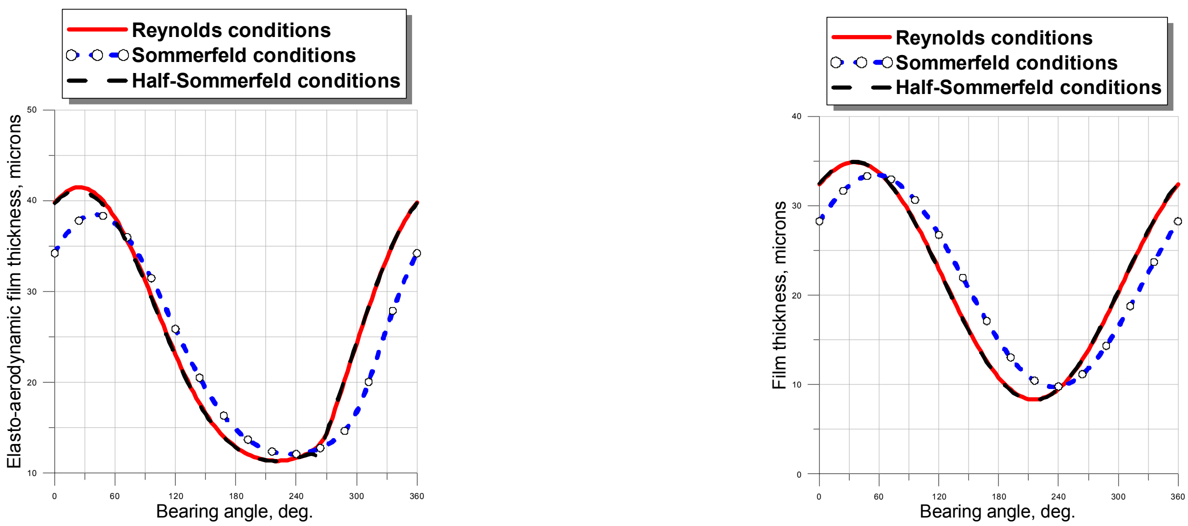
IV.2.1 Influence des CL liées à l'écoulement



Palier à feuille déformable Palier rigide

Fig. IV.1 Influence des CL sur le profil de pression

Pour les deux cas (rigide et déformable), nous constatons que les conditions de Sommerfeld donnent des champs de pression inférieurs à ceux en condition Reynolds ou Gumbel, l'impact est plus important sur le palier à feuilles malgré qu'en général ce dernier (palier MITI) présente des valeurs plus importantes en pression comparées au cas rigide. La variation de pression selon les conditions de Reynolds comparée aux conditions de Gumbel en début de zone de dépression (suction area) n'est pas brusque et permet d'atténuer le déséquilibre du palier.

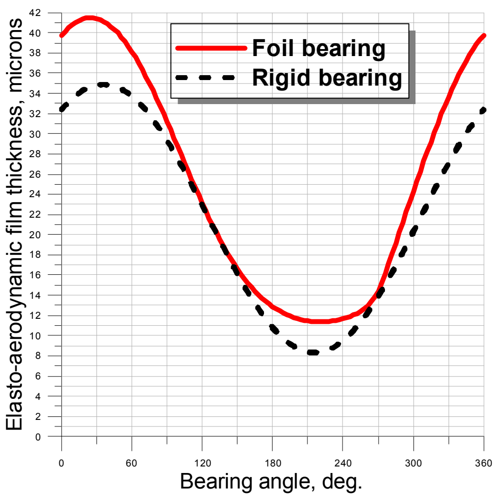


Palier à feuille déformable Palier rigide

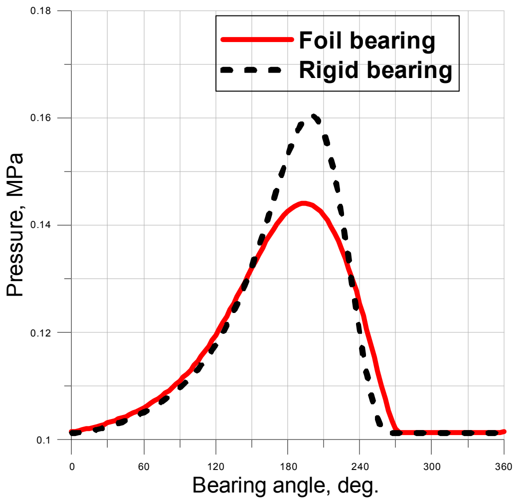
Fig. IV.2 Influence des CL sur la géométrie du film

Pratiquement pas de différence entre les conditions Reynodls et Gumbel sauf en début de zone de dépression (petite perturbation) mais les conditions de Sommerfeld donnent des épaisseurs moindres avec un léger retard en angle travail.

IV-2.2 Influence des déformations élastiques



Film du fluide



Champs de pression

Fig. IV.3 Influence de déformation élastique sur la géométrie du film et le champ de pression

Le palier MITI à feuille déformable présente un martelât de pression plus large (angle plus large) avec des épaisseurs de film de fluide plus grandes et permettant ainsi un meilleur guidage en rotation et une stabilité meilleure. Par contre la pression est plus importante en palier rigide et donc une portance hydrodynamique plus importante mais semble instable (variation brusque de pression).

IV.2.1 Effet des couples de contraintes

Données : W0=65 N, Lambda=1., L0=1.07, el/C=0., 0.1, 0.3 & 0.6

Dans notre étude nous avons résolu l'équation de Reynolds pour un fluide polaire en prenant en considération les couples de contraintes. Nous verrons dans ce qui suit l'influence de ce paramètre.

Influence sur le champ de pression :

Dans la figure (IV.4), nous constatons qu'en cas de fluide polaire le champ de pression est plus large (angle plus important), et plus on augmente le rapport ℓ/C plus la pression s'étale sur des angles plus larges permettant ainsi une portance équilibrée sur une surface plus importante de l'arbre. Nous constatons aussi clairement que pour un rapport de $\ell/C=0.1$ pratiquement le fluide se comporte comme un fluide Newtonien.

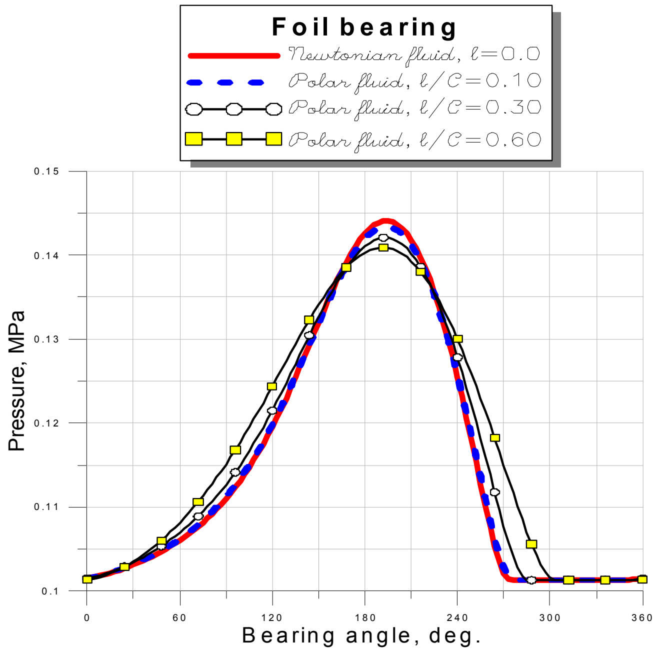


Fig. IV.4 Influence des couples de contraintes sur le champ de pression

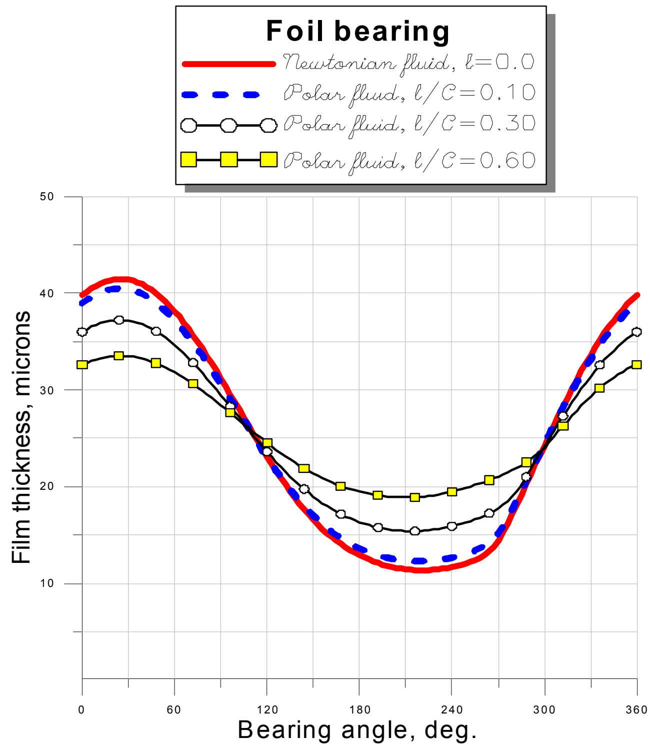


Fig. IV.5 Influence des couples de contraintes sur la géométrie du film pour palier à feuille

Les résultats affichés sur la courbe de la figure (IV.5) du palier MITI nécessitent vraiment une étude à part, nous constatons bien que pour un fluide polaire avec $\ell/C > 0.1$, les amplitudes sont de plus en plus moindre et la variation du hauteur du film se fait avec douceur comparée à celle d'un fluide Newtonien, remarquable encore dans les zones critiques du fluide Newtonien (zone d'hauteur du film du fluide faible) le fluide polaire se comporte d'une façon inverse et vient sécuriser la rotation de l'arbre en présentant des hauteurs plus grandes ! L'impact des couples de contraintes sur la hauteur du film apparait même à des valeurs très petite ($\ell/C = 0.1$) ! L'élasticité des feuilles déformable et le rapport ℓ/C donnent de bons résultats en stabilité pendant la rotation de l'arbre.

IV.3 Analyse des Coefficients dynamiques

IV.3.1 Effets des couples de contraintes :

Nous avons faits des essais de calcul des raideurs et amortissement en fonctions des fréquences d'excitation jusqu'à une valeur adimensionnée de 5, mais il s'avère que les calculs prennent beaucoup de temps et la convergence n'est pas tout le temps évidente car pratiquement à partir du rapport $\gamma = {}^{\upsilon}/_{\omega}$ supérieure à 2 on a une tendance vers une valeur constante et on s'est donc limité dans nos calculs à $\gamma = 2$.

a- ***Influence sur les coefficients de raideurs en cas de déformation statique***

Les coefficient de raideurs (fig. VI.6)dans le sens de l'application de la charge (directs) et les coefficient indirects prend les valeurs les plus élevés de raideurs, à la fréquence de 0.5 on obtient souvent les valeurs mini, puis le comportement du palier change de sens d'action jusqu'à stabilisé à partir d'une fréquence de 1.25 (ce phénomène est général pour tout les coefficients), nous pouvons aussi constater qu'un palier rigide présente des raideurs plus important dans le cas d'un fluide Newtonien, les couples de contraintes contribuent à diminuer cette différence, on constate rapidement sur le palier à feuille la différence même à partir de ($\ell/C = 0.1$), les amplitudes sont plus importantes dans le cas rigide le palier à feuille fait moins d'oscillations.

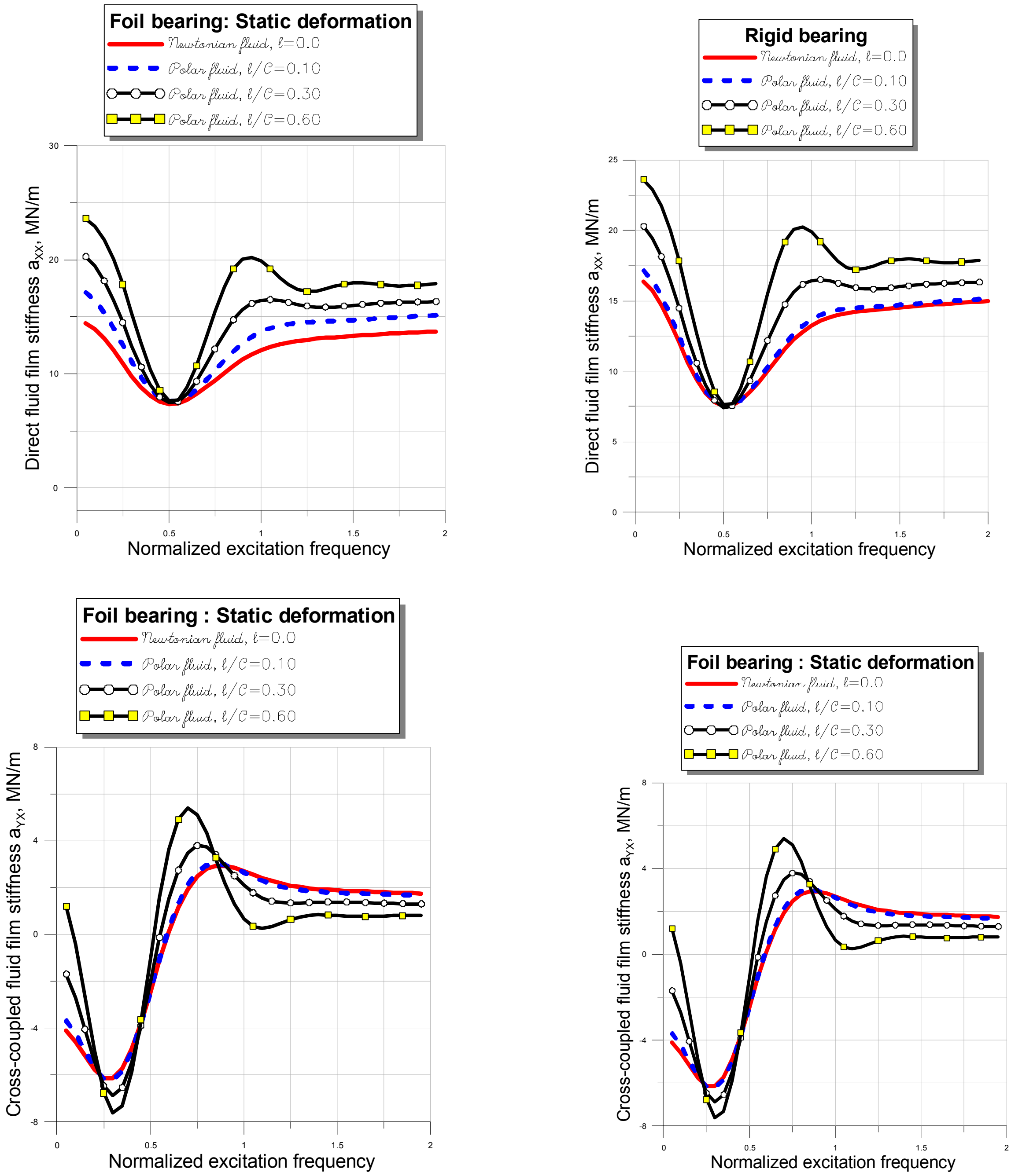


Fig. IV.6 Influence des couples de contraintes sur la raideur directe et indirecte dans l'axe X

.

A bien noter que les coefficients directs et indirects tendent vers des valeurs fixe une fois le système est statiquement stable, bien sur les coefficients indirect ont une tendance vers une valeur nulle. Les coefficients directs du palier rigide tendent vers une valeur légèrement supérieur par rapport au palier à feuilles mais le travaille des couples de contrainte rapproche les valeurs des deux paliers

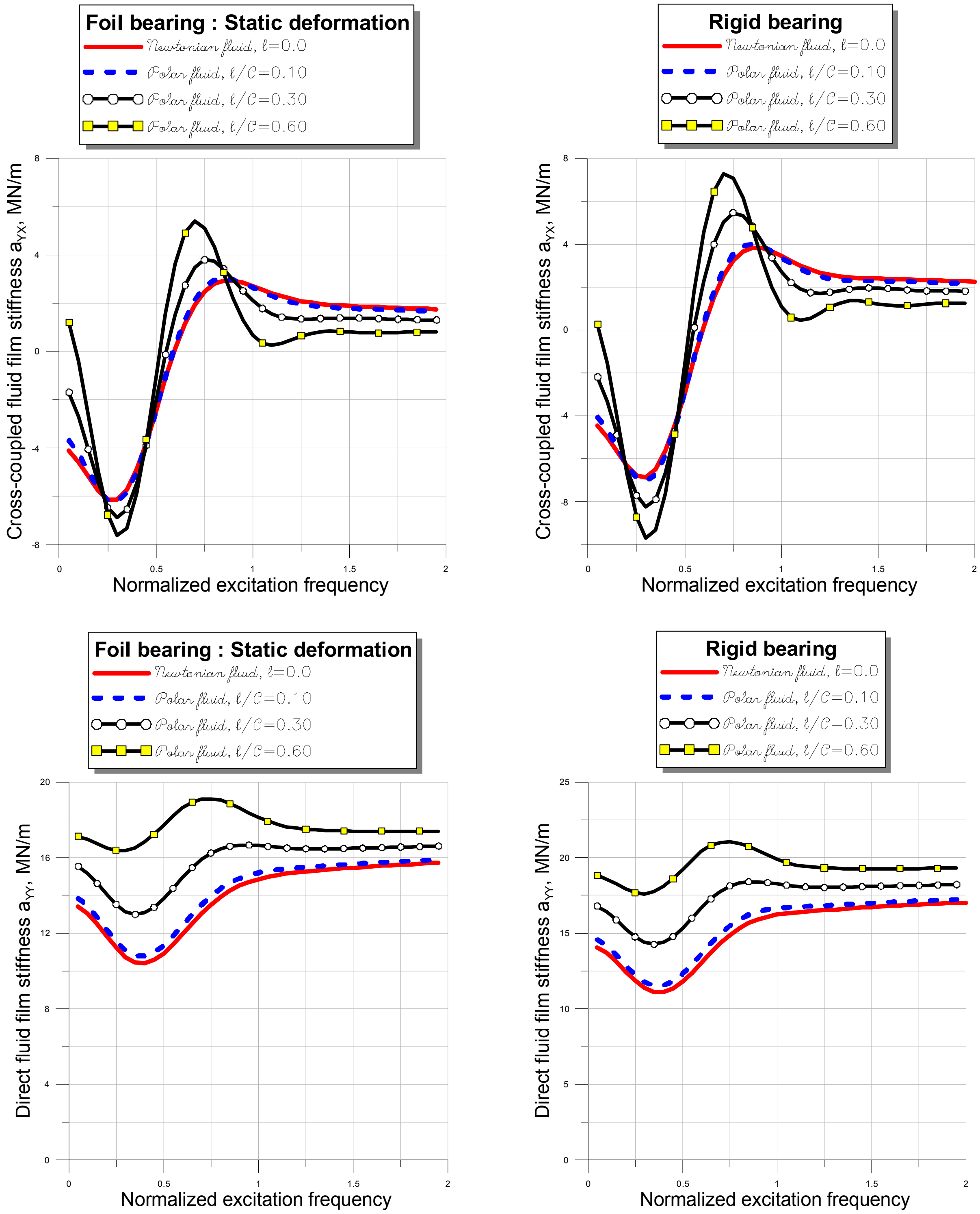


Fig. IV.7 Influence des couples de contraintes sur la raideur directe et indirecte dans l'axe Y

Les coefficients indirects dans l'axe Y ont pratiquement le même effet que ceux dans l'axe X, et tendent à s'annuler à partir de la fréquence de 1.25, par ailleurs les coefficients directs dans l'axe Y sont de très faible amplitude mais ont une tendance à la même valeur après le passage par la fréquence de 1.25

b- Influence sur les coefficients d'amortissement en cas de déformation statique :

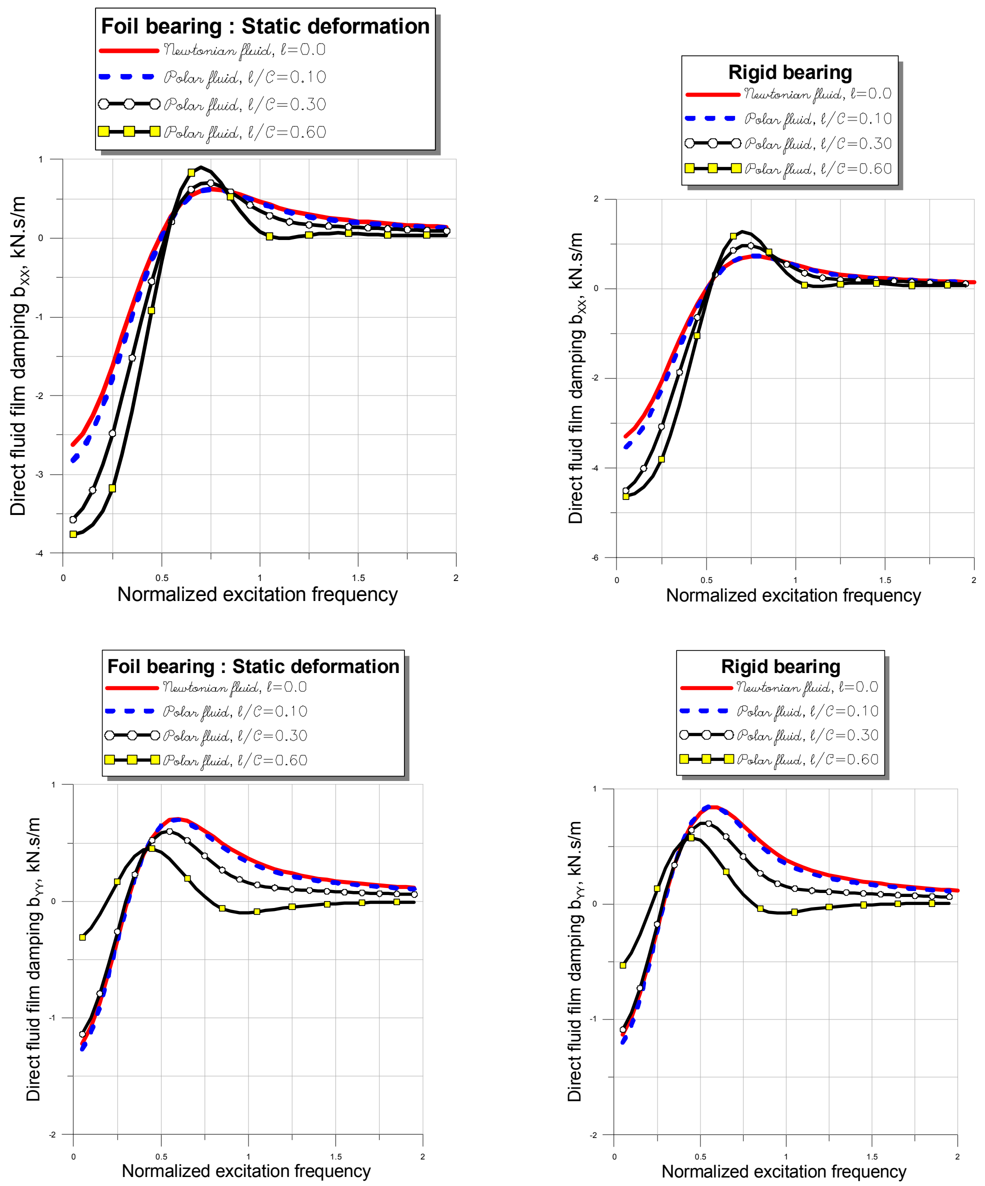


Fig. IV.8 Influence des couples de contraintes sur les coefficients d'amortissement directs

L'impact des couples de contraintes sur les coefficients d'amortissement direct n'est remarquable dans l'axe Y (b_{YY}) qu'à partir de la valeur ($\ell/C=0.6$) pour les deux paliers mais on commence à le constater à partir de la fréquence 0.5 jusqu'à atténuation à zéro.

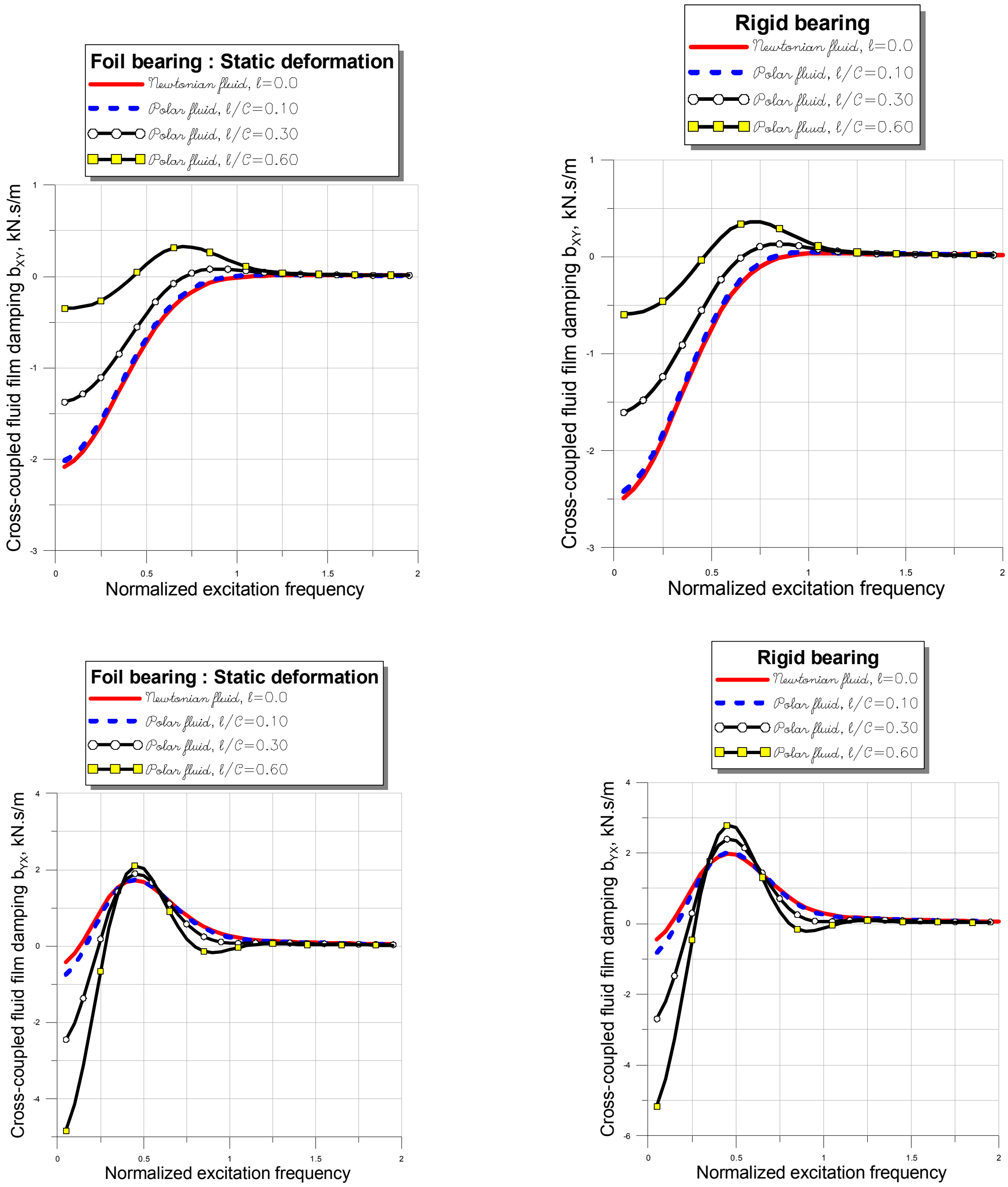


Fig. IV.9 Influence des couples de contraintes sur les coefficients d'amortissement indirects

L'amplitude d'amortissement est très atténuer pou un fluide polaire avec ($\ell/C=0.6$) dans l'axe X (b_{XY}) ainsi que dans l'axe Y (b_{YX}) est à partir d'une fréquence de 1.25 le système le travail des couples de contraintes s'opèrent sensiblement à des fréquences inférieures à 0.5.

c- Influence sur les coefficients de raideurs en cas de déformation statique et dynamique :

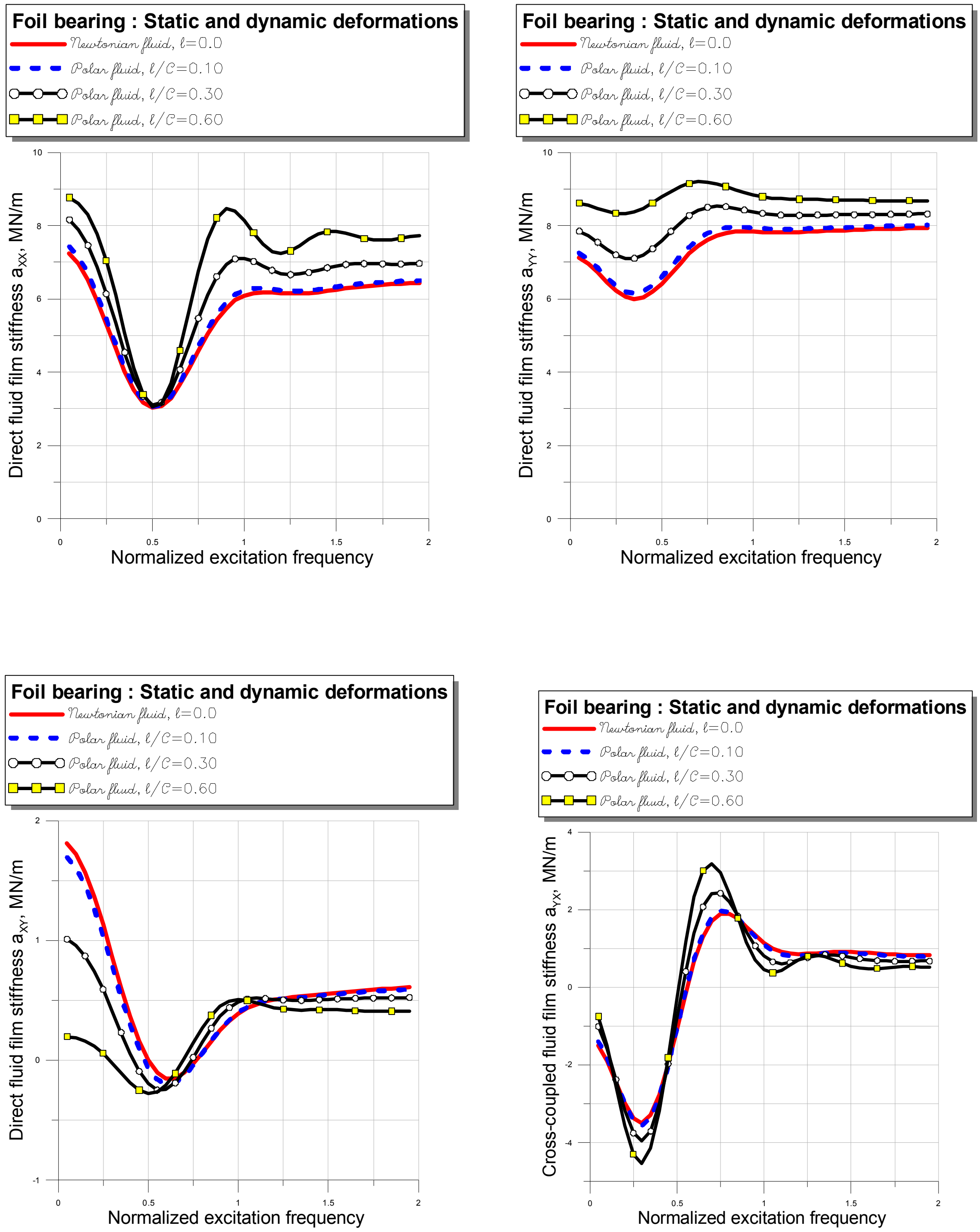


Fig. IV.10 Influence des couples de contraintes sur les coefficients de raideurs directs et indirects en cas de déformation statique et dynamique

Dans le sens de l'application de la charge A_{XX} l'effet des couples de contraintes s'annulent à la fréquence 0.5 mais intervient clairement avant et après cette fréquence et plus on monte en coefficient ℓ/C on des valeurs de raideurs plus importantes. En général on constate que tant que la variation des raideurs n'est pas importante l'effet des couples de contraintes est sensible et il s'atténue s'il y a une variation importante des coefficients.

d- Influence sur les coefficients d'amortissement en cas de déformation statique et dynamique :

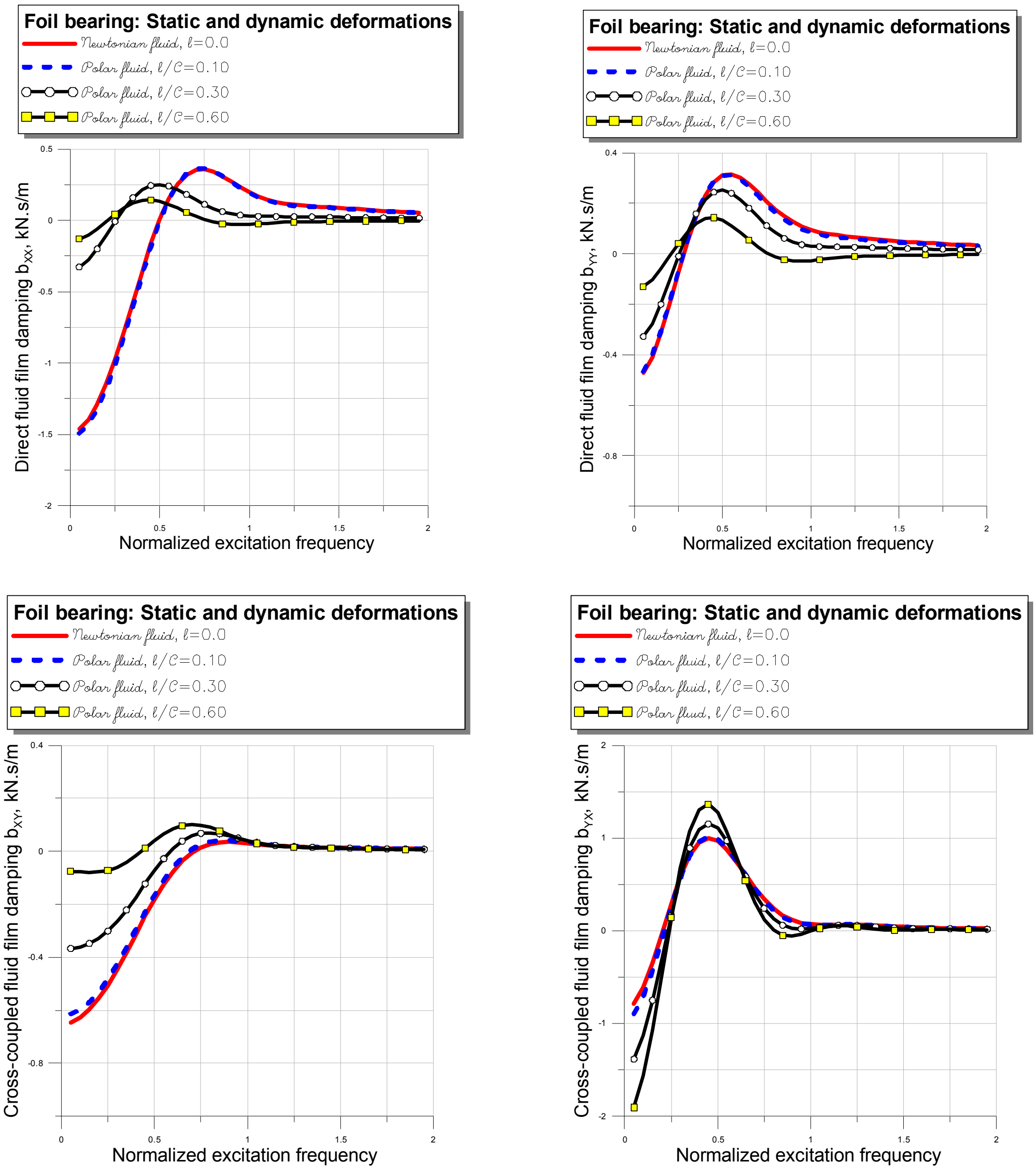


Fig. IV.11 Influence des couples de contraintes sur les coefficients d'amortissement directs et indirects en cas de déformation statique et dynamique

Cette partie nécessite vraiment plus d'études et analyse plus approfondie afin de comprendre ce phénomène de grande dépendance des coefficients d'amortissement des couples de contraintes en cas de fluide polaire lorsqu'on est dans la fréquence d'excitation adimensionnée de 0-1, le palier change totalement de comportement même dans le sens d'application de la charge et devient plus stable qu'un fluide Newtonien à partir des valeurs supérieures à 0.1 du coefficient ℓ/C

IV.3.2 Effet de la déformation (cas de fluide Newtonien) :

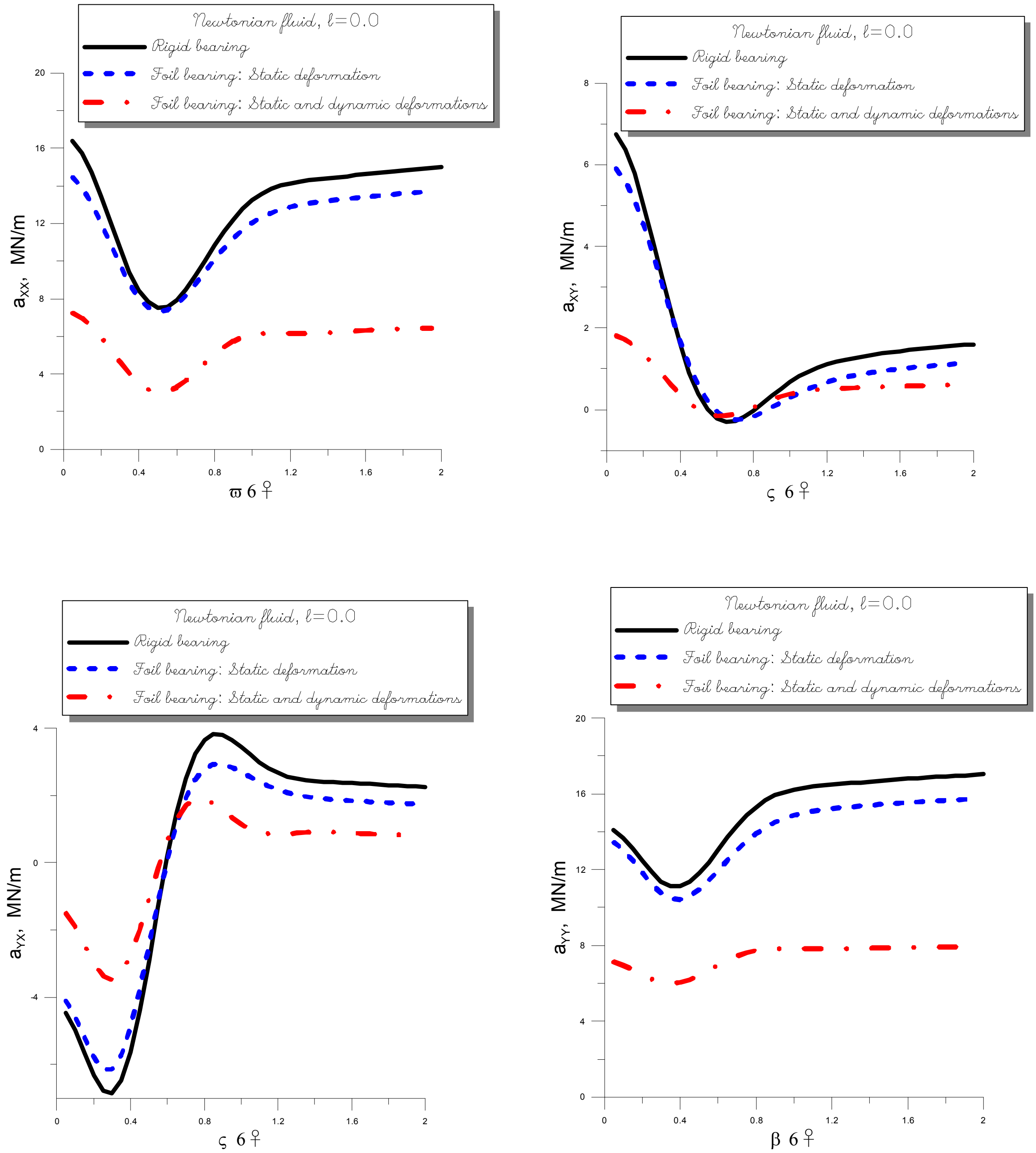


Fig. IV.12 Influence de la déformation des feuilles sur les coefficients de raideurs

Les coefficients de raideurs diminuent amplitude avec la déformation des feuilles en statistique et en dynamique notamment avec les coefficients directs ce qui donne une meilleure stabilité comparé au palier rigide,

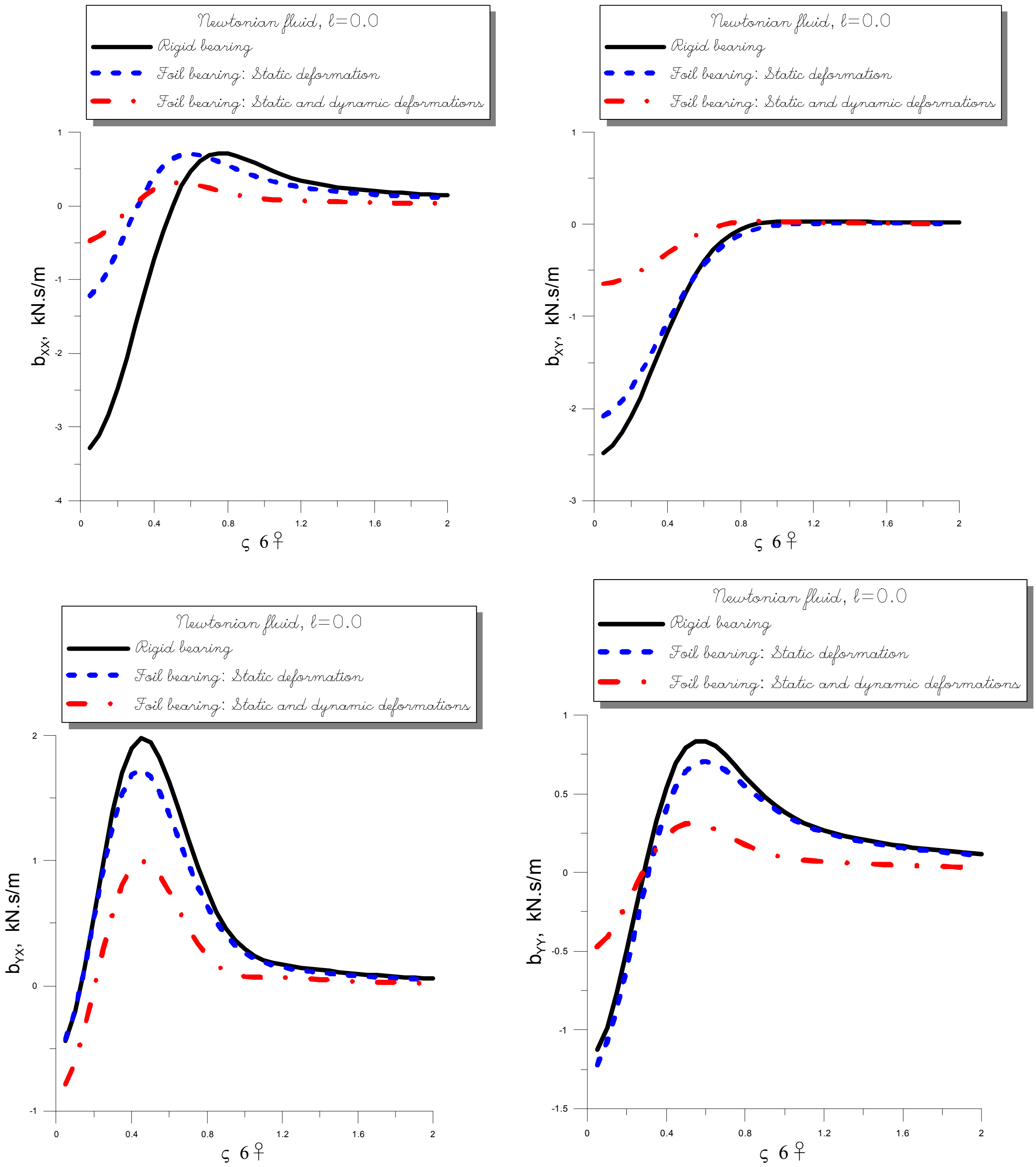


Fig. IV.13 Influence de la déformation des feuilles sur les coefficients de raideurs

La déformation des feuilles du palier a eu impact important sur tous les coefficients d'amortissement notamment en dynamique, le palier se comporte nettement mieux.

IV. 7 Analyse de l'orbite / Effet des couples de contraintes sur l'orbite :

Dans les mêmes conditions de précédentes de l'étude, nous supposons l'effet d'un balourd résiduel avec excentricité du balourd $\varepsilon_b = 0.1$, tournant toujours à une vitesse élevée de 80 000 rpm, nous allons définir et analyser l'orbite du centre de l'arbre en fonction du cercle de jeu (clearance circle) sous l'effet des couples de contraintes en le comparant aussi notre palier à un palier rigide

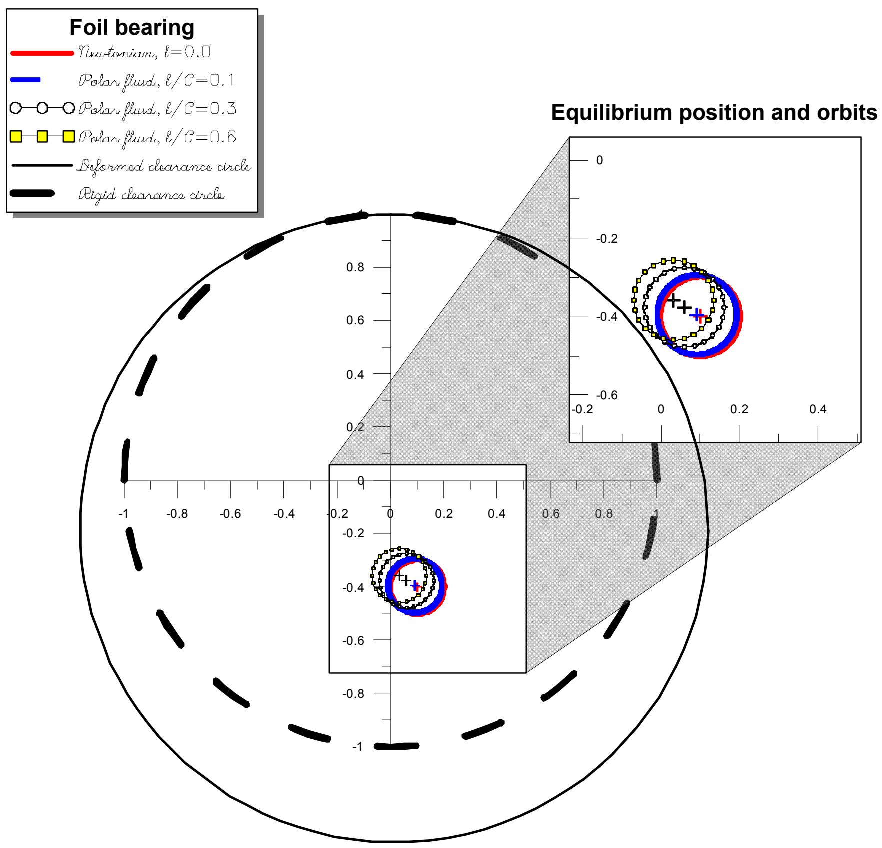


Fig. IV.14 Orbites du centre de l'arbre du palier à feuille selon le type de fluide

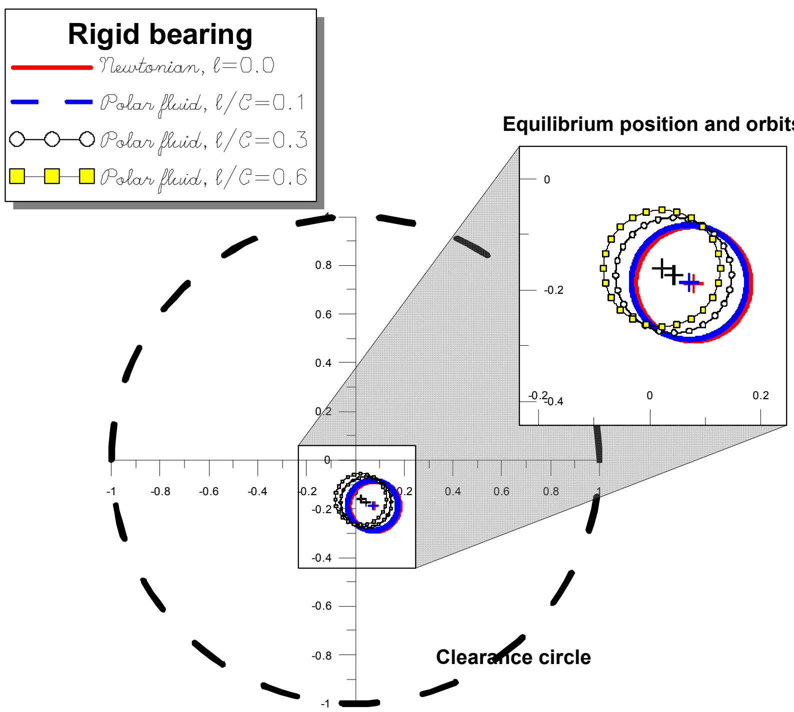


Fig. IV.15 Orbites du centre de l'arbre du palier rigide selon le type de fluide

Sur les deux figures précédentes, nous avons présenté l'orbite du centre de l'arbre pour le cas d'un fluide Newtonien et plusieurs cas de fluide polaire (ℓ/C=0.1, 0.3 et 0.6) nous constatons :

1. L'orbite est tout à fait circulaire contrairement à ce qu'on trouve dans les littératures qui ont étudié les cas de paliers lubrifiés à l'huile (forme elliptique de l'orbite) et, c'est encore une démonstration d'un meilleur comportement en vibration du palier à gaz (comportement harmonique homogène)
2. Dans le cas de fluide polaire et plus on monte en rapport ℓ/C, l'arbre à tendance à aller vers le centre de rotation du palier (on s'approche vers le centre du -Clearance circle-) et s'éloigne du risque de frottement arbre-coussinet.
3. Un autre point important, le cercle du jeu « clearance circel » dans le cas de palier à feuille est déformé selon la répartition du champ de pression permettant ainsi plus d'hauteur au film d'air et améliorant nettement les oscillations suite au balourd.

Faisons maintenant une comparaison entre orbite d'un palier rigide et orbite du palier à feuille en cas de fluide Newtonien et en cas de fluide polaire avec $\ell/C=0.6$:

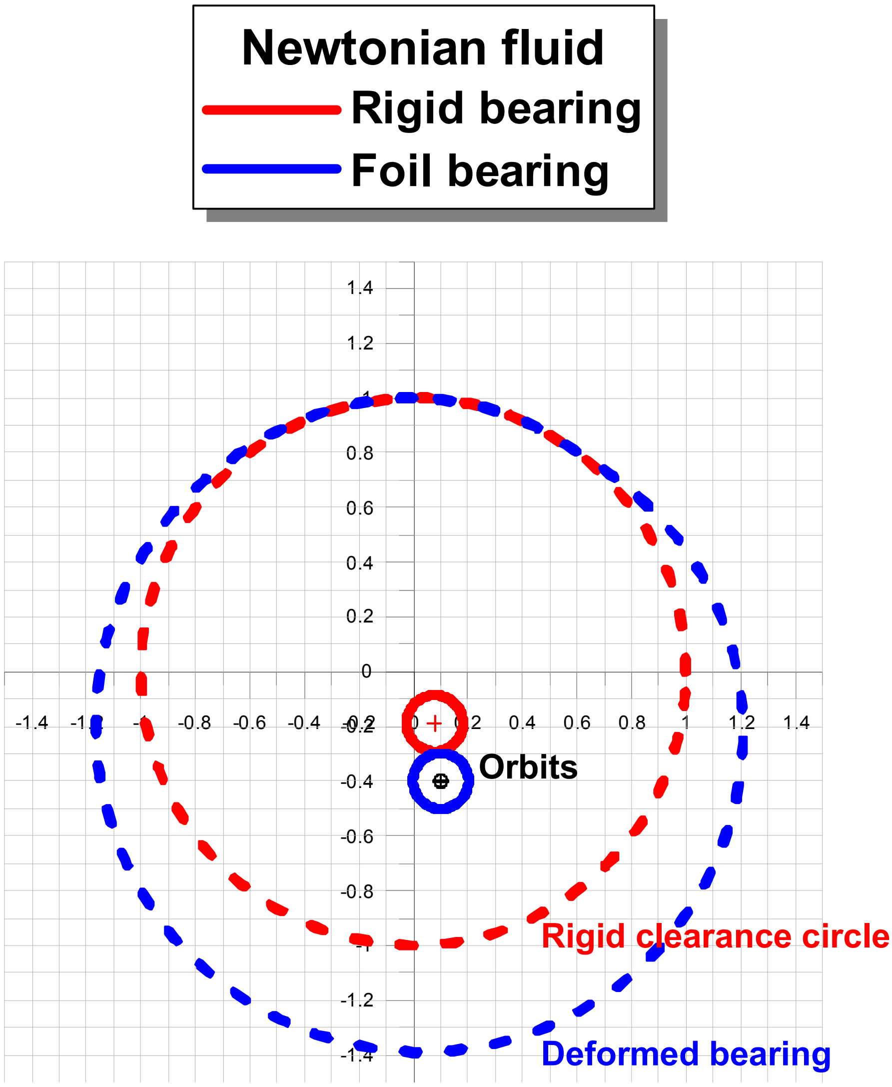


Fig. IV.16 Orbite palier rigide et déformable en fluide Newtonien

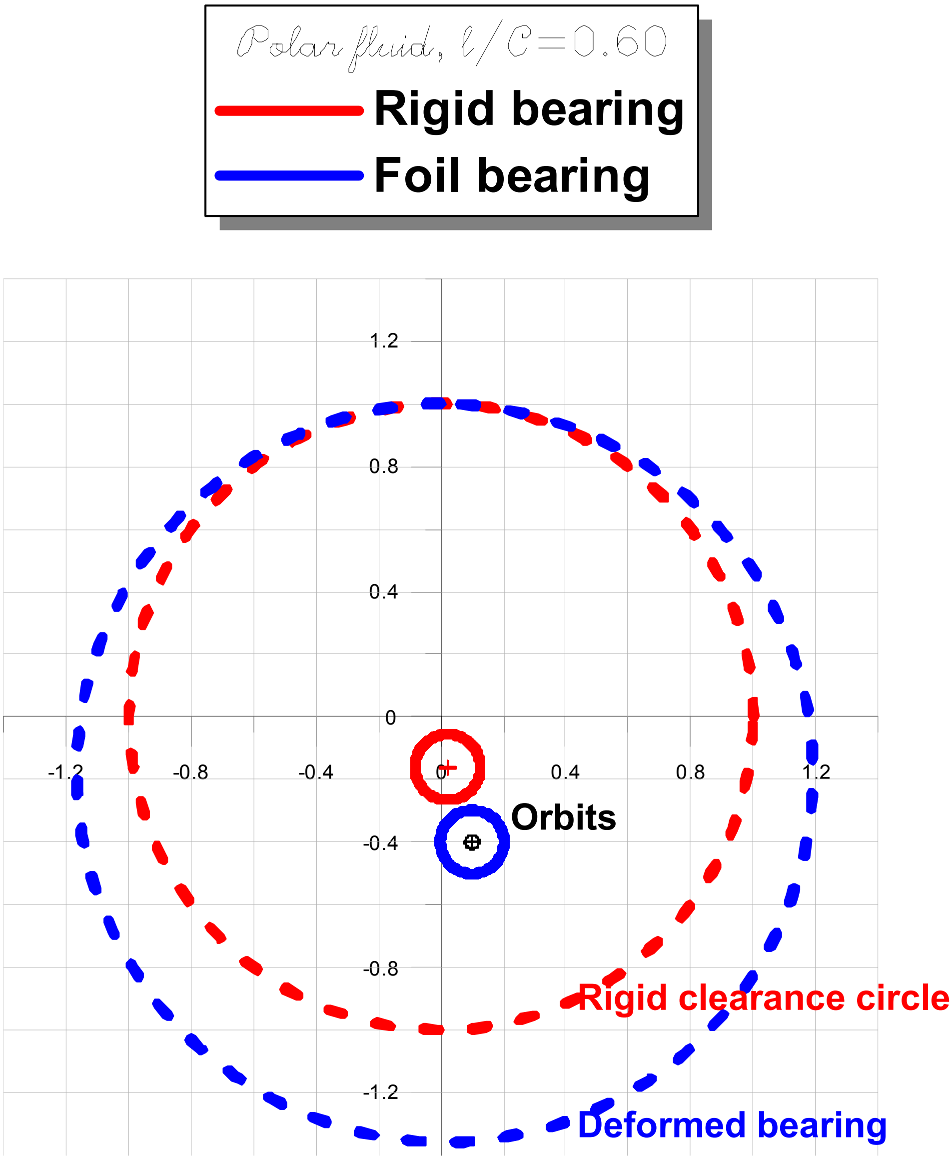


Fig. IV.17 Orbite palier rigide et déformable en fluide Polaire

L'analyse des figures (IV.15 IV.16) permet de tirer les conclusions suivantes :

1. Les eux orbites ont pratiquement la même amplitude (même diamètre du circle)
2. Le palier à feuille permet plus de jeu (d'hauteur pour le film d'air)
3. Le fluide polaire permet encore d'améliorer la géométrie du film et a tendance à ramener les orbites vers le centre du circle.

En résumé, nous constatons que l'analyse des orbites confirmes les résultats obtenus lors de l'analyse des champs de pression et la géométrie du film faite plus haut et ces résultat sont en parfaite concordance avec les résultats liés aux coefficients dynamiques.

IV.5 Conclusions :

L'élasticité des feuilles (bump) permet une meilleure répartition du champ de pression sur un angle couvrant une grande surface de l'arbre du rotor et la variation de la géométrie du film est bien atténuée par le travail des feuilles qui permettent de conserver une hauteur suffisante évitant ainsi le risque de collage de l'arbre sur la feuille d'usure. Ces deux paramètres (pression et hauteur) dans le palier MITI permet un bon guidage en rotation et une meilleure stabilité du palier en matière de fréquence de vibration ce qui permet à ce genre de palier de travailler à des vitesses élevées.

Les coefficients d'amortissement et de raideurs du palier sont aussi nettement améliorés par l'oscillation des bumps assurant une harmonie dans le fonctionnement du palier, l'étude a aussi montré que les couples de contraintes jouent un rôle très important dans la détermination des coefficients et leurs comportement avec la fréquence d'excitation.

L'analyse orbites vient confirmée l'approche initiée avec les champs de pression et la géométrie du film et confirme d'avantage le travail important des feuilles déformable du palier MITI sur l'amélioration du comportement du palier avec balourd.

Conclusion générale et perspectives

Cette étude a permet de révéler plusieurs qualités de portance des paliers lubrifiés par l'air avec un alésage à feuilles déformable comparativement aux paliers rigides. En effet, on a démontré une répartition large du champs de pression aux alentours de l'arbre permettant une meilleurs répartition des forces de portance réduisant ainsi l'amplitude d'oscillation ; la hauteur ou l'épaisseur du film est plus homogène et ne présente aucune variation aigu ou brusque qui peut causer un déséquilibre, la charge appliquée ne vient pas écraser brusquement le film fluide car l'élasticité des feuilles permet d'amortir ces charges en offrant plus de volume en se déformant dans le sens de l'application de la charge. L'étude a montré que le centre de l'arbre est en oscillation harmonique et homogène sur les deux axes, on constate pratiquement que le centre de l'arbre fait un cercle autour de sa position d'équilibre.

En plus de toutes ces qualités, l'étude a montré que dans le cas ou on considère un fluide polaire, le travail des couples de résistance fait améliorer nettement les coefficients dynamiques, la répartition du chams de pression et augmente la hauteur du film.

Dans notre étude nous avons fait apparaitre quelques aspects qui nécessitent des études approfondies afin de mieux comprendre le comportent du palier à feuilles. Des résultats de travaux de recherche de MITI engineering et Pennsylvania University montrent que la raideur augment avec la charge et diminuent avec la vitesse, mais les data prisent sur des turbomachines ne montrent pas comportement, les chercheurs disent que ça est un signe motivant et promettant pour les paliers à feuilles [13], ceci est au phénomène complexe dans la modélisation qui doit prendre en considération le flux du fluide dans le palier et la déflexion des feuilles.

Espérant une continuité de recherches sur ce sujet, dans notre université qui dispose de grand personnel scientifique, si l'université se dotera de certains outils et d'un banc d'essai elle pourra participer à l'évolution de ce type de palier universellement reconnu comme le palier du futur.

Références bibliographiques

[1] M. DAMOU « Mécanique des fluides», O.P.U. 03-1994 2001.

[02] M. DELANETTE et H. DUBOIS « mécanique théorique et appliquée», 1983 édition DELAGRAVE

[3] R. ZUCKER et O. BIBLARTZ « Fundamentals of Gas dynamics», 2ème édition 2002,

[4] G.W. STATCHOWIAK et A.W. BACHELOR, «Engineering Tibology», Edition Butterworth Heinmann,.

[5] F.M. WHITEE, « Fluid Mechanics », 4ème édition

[6] S.S ANTMAN, J.E. MARSDEN et L. SIROVICH «Prandtl's Essentials of Fluid Mechanics», 2ème édition, Translated by Katherine Mayes, Edition Herbert-springer 2004

[7] A. BECHKOK « Les Moteurs à combustion interne Module TE 369», O.P.U. 06-1995

[8] G. GRAU «Paliers aérodynamiques radiaux à structure à feuilles : Contribution à l'étude statique et comportement dynamique non linéaire», Thèse de Doctorat 2004. Université Lyon.

[9] F. BLANC «Méthodes numériques pour l'aéroélasticité des surfaces de contrôle des avions », Thèse de Doctorat, 2009 Ecole aéronautique de Toulouse.

[10] L. BARZEM «Analyse théorique et expérimentale de la dynamique d'un rotor sur paliers à feuilles lubrifié par l'air», thèse de Doctorat présenté en 2009 à l'université de Lyon dirigé par B. BOU-SAID.

[11] F. SEKFALI «Comportement dynamique d'un rotor de micro-turbine supporté par des paliers à air tournant à grande vitesse », thèse de Master 2013, dirigée par Pr. M. LAHMAR, université de 8 mai 1945.

[12] Keith A. Hurley «EXPEREMENTAL DETERMINATION OF THE ROTOR DYNAMIC COEFFICIENTS OF GAS LUBRICATED FOIL JOURNAL BEARING », thèse Doctor of Pholosophy Degree 1998, Pennsylvania State University Graduate school.

[13] Scott Fields «TRIBOLOGY & LUBRICATION TECHNOLOGY», april 2004.

Table des figures

Nomenclature

Λ: nombre de compressibilité $\Lambda = \frac{6\mu\omega}{P_a}\left(\frac{R_r}{C_0}\right)^2$

ρ: masse volumique

μ: viscosité dynamique du gaz

σ: contrainte de cisaillement

D : diamètre de l'arbre

e : excentricité de l'arbre, e=OOa

u_i^k les composantes des vitesses suivant les différents axes

X, Y, et Z les coordonnées des particules fluides

h : hauteur de film d'air

M : masse du rotor

C : jeu du coussinet

Oa : centre de l'arbre

p : pression

pa : pression ambiante

R ou Ra : rayon de l'arbre

Rc : rayon du coussinet

Annexes

Annexe 1 : Equations fondamentales de fluide

Equation de continuité :

Par définition, nous pouvons dire que la masse reset constante ou que la dérivation de la masse est égale à zéro ($\frac{d(masse)}{dt} = 0$) **[3] page 32-33**.

Pour un écoulement Laminaire, la *conservation de masse* pour un volume dV=dx.dy.dz pour un flux incompressible **[6] page 217-218**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial zx} = 0 \qquad (A.1)$$

Avec u, v et w les composant du vecteur de vitesse
La conservation de masse pour un élément de volume peut être formulée comme suit :

Le taux de changement de la masse dans un élément volume est égal à la somme des flux de masse entrants dans l'élément de volume moins la somme des flux de masse sortants [6]

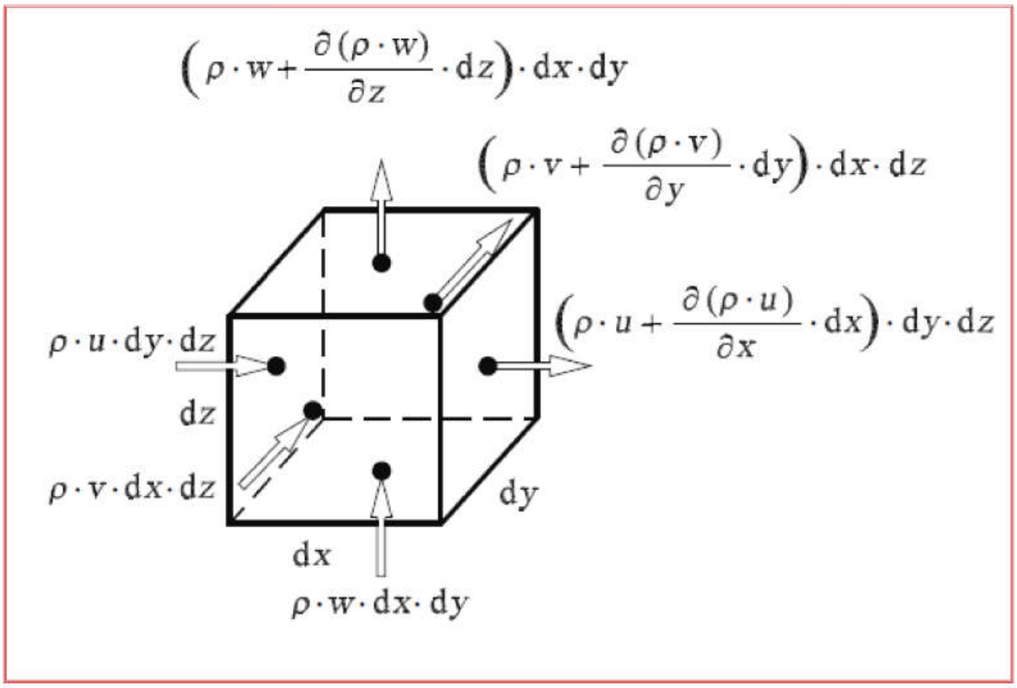


Figure A.1 : Flux de masse entrants et sortants. Source [6] chapitre 5 page 217

La figure A.1 montre un volume dV avec dimensions dx, dy et dz, le flux de masse ρ.u.dy.dz coule à travers la surface de gauche du volume de surface dy.dz et la quantité $\rho.u$ de la position x jusqu'à x+dx dans la direction x par $\partial(\rho.u)/dx$ et donc le flux de masse quittant l'élément de volume par la surface de droite dy.dz peut être écrit [6]:

$$(\rho.u + \frac{\partial(\rho.u)}{\partial x}.dx)dy.dx$$

Par la même analogie dans les directions y et z, le taux changement de masse dans l'élément de volume correspondant à la différence entre flux entrant et flux sortant le terme

$$\frac{\partial(\rho.dx.dy.dz)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.dx.dy.dz \qquad (A.2)$$

est une expression mathématique du taux de changement de masse dans l'élément de volume et enfin on [6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}.dx.dy.dz = \left(\rho.u - \left(\rho.u + \frac{\partial(\rho.u)}{\partial x}.dx\right)\right).dy.dz +$$
$$+\left(\rho.u - \left(\rho.u + \frac{\partial(\rho.u)}{\partial y}.dy\right)\right).dx.dz$$
$$+\left(\rho.u - \left(\rho.u + \frac{\partial(\rho.u)}{\partial z}.dz\right)\right).dx.dy$$

Ce qui nous ramène à *l'équation de continuité* [6]:

$$\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho.u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho.w)}{\partial z} = 0}$$

En utilisant le vecteur de rotation l'équation s'écrit en coordonnées généralisées

$$\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho.\mathrm{v}) = 0} \quad avec\ nable\ \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T = 0$$

En général on doit ajouter aussi les débits fournis, par unité de temps, par des sources ou des puits de débits Q_v lorsqu'elles existent soit [1]:

$$\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho.u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho.w)}{\partial z} = \sum Q_v}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho.\mathrm{v}) = \sum Q_v\ [\mathbf{1}]$$

Si le fluide est incompressible (3.6) devient :

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

Equation de Navier - Stockes : Conservation de quantité de mouvement :

Les équations de Navier-Stockes **[6] page 218-220** sont obtenues de la conservation de la quantité de mouvement dans un élément de volume dV. Nous considérons maintenant un flux de fluide compressible.

La quantité de mouvement est le produit de masse et vitesse $(p = mv)$. Le fluide donc à l'intérieur du volume a une quantité de mouvement $\rho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot \boldsymbol{v}$ on a ainsi le taux de changement [6]:

$$\boldsymbol{\frac{\partial(\rho.dx.dy.dz.v)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho.v)}{\partial t}.dx.dy.dz} \qquad (\boldsymbol{A.3})$$

En général le taux de changement de la quantité de mouvement est définie comme suit:

Le taux de changement de la quantité de mouvement dans un élément de volume =

*∑ des flux de quantités de mouvement **entrant** dans l'élément de volume*

*-∑ des flux de quantités de mouvement **sortant** du l'élément de volume*

+∑ les contraintes et les contraintes normales agissant sur le volume

+∑ les forces agissant sur les masses de l'élément de volume **[6]**

Considérant d'abord un seul composant $\boldsymbol{\rho.dx.dy.dz.v}$ dans la direction **x ,** le flux de la quantité de mouvement t ($\boldsymbol{\rho.u.u}$) **change sa valeur dans la direction x** de mouvement **:**

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\rho.dx.dy.dz.u})}{\partial \boldsymbol{t}} = \frac{\partial(\boldsymbol{\rho.u})}{\partial \boldsymbol{t}}.\boldsymbol{dx.dy.dz}$$

Et en suivant la même démarche ; dnas la conservation de masse nous avons utilisé , maintenant nous utiliserons $\boldsymbol{\rho.u}$ (quantité de mouvement par unité de volume), le flux entrant du coté droit c.a.d. à partir de la surface dy.dz comme shématisé sur la figure 3.3 est :

$$(\rho.u).u.dy.dz = \rho.u.u.dy.dz$$

Le flux sortant serait donc :

$$(\rho.u.u + \frac{\partial(\rho.u.u)}{\partial x}.dx).dy.dz$$

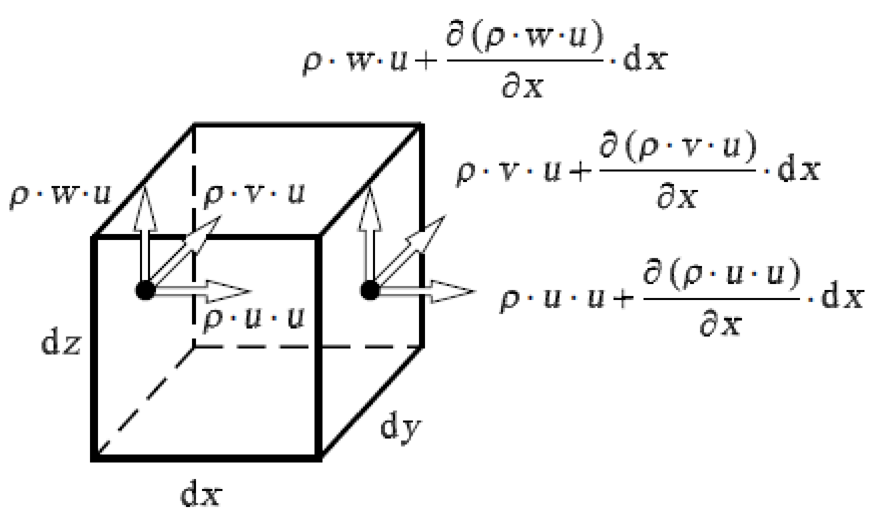


Figure A.2 : Quantité de mouvement entrant et sortant [6] chapitre 5 page 217

La quantité de mouvement $\boldsymbol{\rho.u}$ agissant dans la direction x entre aussi et sort de l'élément de de volume par les surface dx.dz et dx.dy au vitesses $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ **et** les mêmes équations seront écrit dans les directions y et z :

Direction	Flus entrant	Flus srotant	Surface
x	$(\rho.u.u)$	$(\rho.u.u+\frac{\partial(\rho.u.u)}{\partial x}.dx)$	$dy.dz$
	$(\rho.v.u)$	$(\rho.v.u+\frac{\partial(\rho.v.u)}{\partial x}.dx)$	
	$(\rho.w.u)$	$(\rho.w.u+\frac{\partial(\rho.w.u)}{\partial x}.dx)$	
y	$(\rho.v.v)$	$(\rho.v.v+\frac{\partial(\rho.v.v)}{\partial y}.dy)$	$dx.dz$
	$(\rho.u.v)$	$(\rho.u.v+\frac{\partial(\rho.u.v)}{\partial y}.dy)$	
	$(\rho.w.v)$	$(\rho.w.v+\frac{\partial(\rho.w.v)}{\partial y}.dy)$	
z	$(\rho.w.w)$	$(\rho.w.w+\frac{\partial(\rho.w.w)}{\partial z}.dz)$	$dx.dy$
	$(\rho.u.w)$	$(\rho.u.w+\frac{\partial(\rho.u.w)}{\partial z}.dz)$	
	$(\rho.v.w)$	$(\rho.v.w+\frac{\partial(\rho.v.w)}{\partial y}.dz)$	

Tableau A3.1 : Equation de conservation de mouvement

Maintenant, les flux entrants et sortants ne sont pas les seuls caus du taux de changement de la quantité de mouvement dans l'élément de volume.Les quantité de mouvemet à l'interieur de l'élément changent aussi sous l'effort des forces agissants sur l'élément de volume qui sont les contraintes normales et les contraintes de cisaillement figure 3.4 montre ces contraintes dans les idrestions $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ et le changement **aux positions** $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}$, $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{dy}$ et $\boldsymbol{z}+\boldsymbol{dz}$ **:**

Les équations des contraintes sont déterminées comme suit, à noter que l'effort est positif dans le sens positif des axes et est négatif dans dans le sens négatives des axes. Les forces du volume agient sur la masse de le l'élément de volume et ça incluent également l'effet gravitationnel, électrique et magnetique qui peut agir sur le flux $F = (F_x\ F_y\ F_z)^T$:

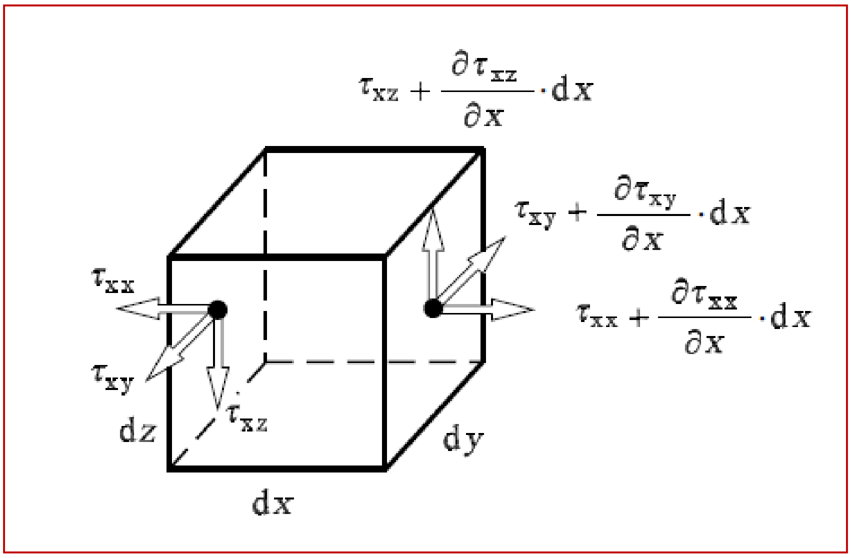


Figure 3.3 : Contraintes et contraintes de cisaillement [6] chapitre 5 page 221

Ci-dessous un tableau récapitulant les contraintes dans les différents axes :

Direction	Flus entrant	Flus srotant	Surface
x	τ_{xx}	$(\tau_{xx} + \frac{\partial(\tau_{xx})}{\partial x}.dx)$	$dy.dz$
	τ_{xy}	$(\tau_{xy} + \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x}.dx)$	
	τ_{xz}	$(\tau_{xz} + \frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial x}.dx)$	
y	τ_{yy}	$(\tau_{yy} + \frac{\partial(\tau_{yy})}{\partial y}.dy)$	$dx.dz$
	τ_{yx}	$(\tau_{yx} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial x}.dy)$	
	τ_{yz}	$(\tau_{yz} + \frac{\partial(\tau_{yz})}{\partial y}.dy)$	
z	τ_{zz}	$(\tau_{zz} + \frac{\partial(\tau_{zz})}{\partial z}.dz)$	$dx.dy$
	τ_{zx}	$(\tau_{zx} + \frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial z}.dz)$	
	τ_{zy}	$(\tau_{zx} + \frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial z}.d)$	

Tableau 3.2 . Contrainte de cisaillement d'un élément de fluide

De la même façon que celle utilisé dans la conservation de masse, le taux de changement de la quantité de mouvement de $\boldsymbol{\rho.dx.dy.dz.u}$ est

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho.u)}{\partial t}.dx.dy.dz = (\rho.u.u - (\rho.u.u + \frac{\partial(\rho.u.u)}{\partial x}.dx)dy.dz \\
+(\rho.u.v - (\rho.u.v + \frac{\partial(\rho.u.v)}{\partial y}.dy)dx.dz \\
+(\rho.u.w - (\rho.u.w + \frac{\partial(\rho.u.w)}{\partial x}.dz)dx.dy \\
+F_x.dx.dy.dz \\
+(-\tau_{xx} + (\tau_{xx} + \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}.dx)).dy.dz \\
+(-\tau_{yx} + (\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}.dy)).dx.dz \\
+(-\tau_{zx} + (\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}.dz)).dx.dy
\end{aligned}
\quad (A.5)
$$

Ce qui donne dans la direction x :

$$\frac{\partial(\rho.u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho.u.u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho.u.v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho.u.w)}{\partial z}=F_x+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\quad(A.6)$$

Sans refaire les mêmes étapes on obtient sur les axes y et z :

$$\frac{\partial(\rho.v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho.v.u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho.v.v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho.v.w)}{\partial z}=F_y+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\quad(A.7)$$

$$\frac{\partial(\rho.w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho.w.u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho.w.v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho.w.w)}{\partial z}=F_x+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau z_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\quad(A.8)$$

La pression peut être écrite comme l'effet du tenseur des contraintes :

$$p=-\frac{\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}}{3}\qquad(A.9)$$

Le signe – vient du principe que la pression agit comme une contrainte négative.

Les contraintes τ_{xx},τ_{yy} et τ_{zz} peuvent êtres devisées en deux parties : La pression et l'effet de frottement du fluide, et on écrit ainsi :

$$\tau_{xx}=\sigma_{xx}-p\ ,\tau_{yy}=\sigma_{yy}-p\quad et\ \ \tau_{zz}=\sigma_{zz}-p\qquad(A.10)$$

En insérant (A.10) dans (A.6) on obtient pour l'axe x :

$$\frac{\partial(\rho.u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho.u.u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho.u.v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho.u.w)}{\partial z}=F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\qquad(A.11)$$

Pour un fluide newtonien on retient :

$$\sigma_{xx}=2.\mu.\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}.\mu.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

$$\sigma_{yy}=2.\mu.\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}.\mu.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

$$\sigma_{zz}=2.\mu.\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}.\mu.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\qquad(A.12)$$

$$\tau_{yx}=\tau_{xy}=\mu.\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu.\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$et\ \tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu.\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Insérant les contraintes normales et les contraintes de cisaillements données dans l'équation (3.11) dans l'équation de conservation de l'énergie (3.6), (3.7) et (3.8) on obtient les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial(\rho.u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho.u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho.u.v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho.u.w)}{\partial z}= F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu.\left(2.\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}.(\nabla.\mathrm{v})\right)\right] +\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu.\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] +\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu.(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z})\right] \quad (A.13)$$

$$\frac{\partial(\rho.v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho.v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho.v.u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho.v.w)}{\partial z}= F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu.\left(2.\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}.(\nabla.\mathrm{v})\right)\right] +\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu.\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] +\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu.\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \quad (A.14)$$

$$\frac{\partial(\rho.w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho.w^2)}{\partial z}+\frac{\partial(\rho.w.u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho.w.v)}{\partial y}= F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu.\left(2.\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}.(\nabla.\mathrm{v})\right)\right] +\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu.\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] +\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu.(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})\right] \quad (A.15)$$

Ces équations peuvent êtres simplifiées par l'utilisation du vecteur de rotation :

$$\rho.\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+(\mathrm{v}.\nabla)\mathrm{v}\right)=F-\nabla p+\mu.\Delta\mathrm{v}, \quad (A.16)$$

Avec∇p est le gradient de la pression, et $\mathrm{v}.\nabla$ est le produit de la vitesse avec l'opérateur nabla et enfin $\Delta\mathrm{v}$ l'opérateur de Laplace appliqué à v:

$$\nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z}\right) \qquad \mathrm{v}\nabla= u.\frac{\partial}{\partial x}+v.\frac{\partial}{\partial y}+w.\frac{\partial}{\partial z} \qquad \Delta\mathrm{v}=\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathrm{v}}{\partial z^2}$$

Annexe 2 : Matériaux utilisés par MITI pour la fabrication des feuilles d'usure

MiTi® Korolon® Coatings				
	Korolon® 700	Korolon® 800 & 900	Korolon® 1350	Korolon® 2250
Chemical Composition	Polymer Based Coating with Solid Lubricants	Tungsten Disulfide with Solid Lubricants	Nickel-Chrome with Solid Lubricants	Nickel – Chrome and Tungsten Disulfide with Solid Lubricants
Tribological Properties	Low Friction Wear Resistant 700°F (370°C)	Low Friction Wear Resistant 800-900°F (427-482°C)	Low Friction Wear Resistant 1350°F (732°C)	Low Friction Wear Resistant 1500°F (810°C)
Thermal Properties	N/A	N/A	Thermal Barrier Environmental Barrier 2400°F (1315°C)	Thermal Barrier Environmental Barrier 2250°F (1232°C)
Chemical Resistance	Inert to Alkali			
Deposition Method	Spray Gun (Room Temperature)			
Color	Gray to Black			

Université de 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique

Option : Maintenance d'Equipements Industriels

Mémoire de fin d'études

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master

Analyse dynamique des paliers aéroélastiques

Sous la Direction du :

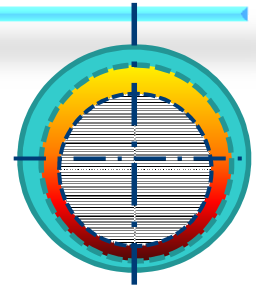
Pr. M.LAHMAR

Présenté par :
L. DJEMILI

Année :
2016/2017

- Introduction et Types de paliers / Problématique
- Théorie de la lubrification aérodynamique
- Perturbation de l'équation de Reynolds compressible: approche dynamique linéaire
- Traitement numérique des EDP résultant de la perturbation
- Validation et étude paramétrique
- Conclusions et perspectives

Introduction / Type de paliers:

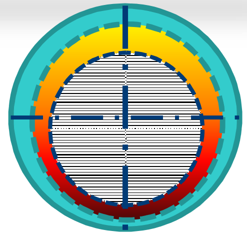


Bon | Moyen | Mauvais

	TYPE DE PALIERS				
	Roulement	Paliers lisses rigides lubrifiés par :		Palier déformable lubrifié par l'air	
		L'HUILE	L'AIR	Tech. Garett	Tech. MITI *
START-STOP	Bon	Mauvais	Mauvais	Moyen	Bon: 100 000= 60 ans
CHARGE	Moyen	Bon	Moyen	Moyen	Moyen: 6670 N
GUIDAGE	Bon	Moyen	Moyen	Moyen	Bon
VITESSE	Moyen	Moyen	Bon	Bon	Bon: 120 000
ENVIR.	Mauvais	Mauvais	Bon	Bon	Bon: free
T°	Mauvais	Mauvais	Moyen	Moyen	Bon: 650°C
VIBRAT.	Mauvais	Moyen	Bon	Bon	Bon

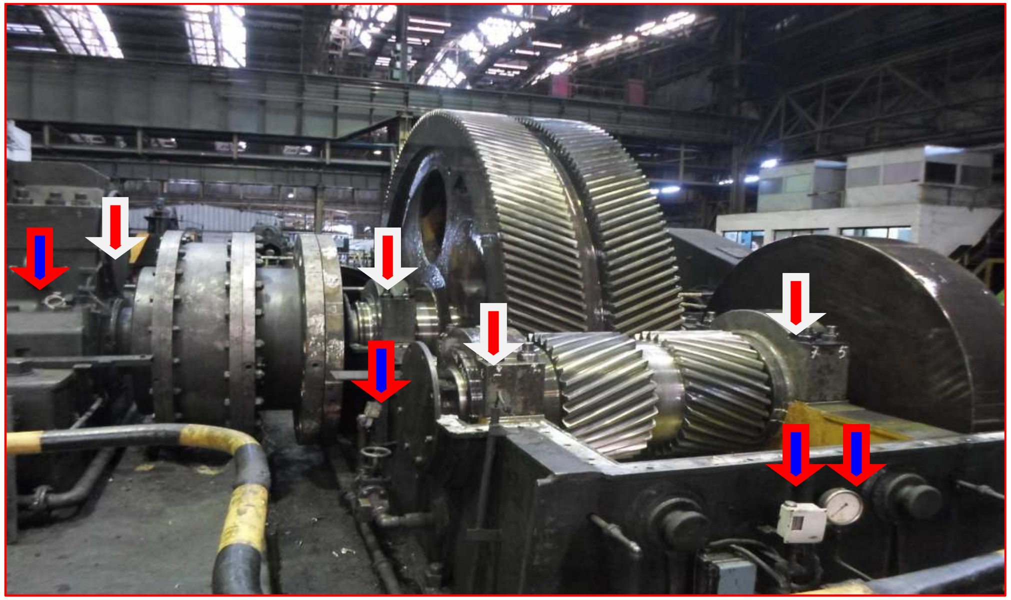
* Valeur palier MITI : NASA project Passenger jet engine [Tribology & Lubrication technology april 2004]

Palier lisse à portance hydrodynamique

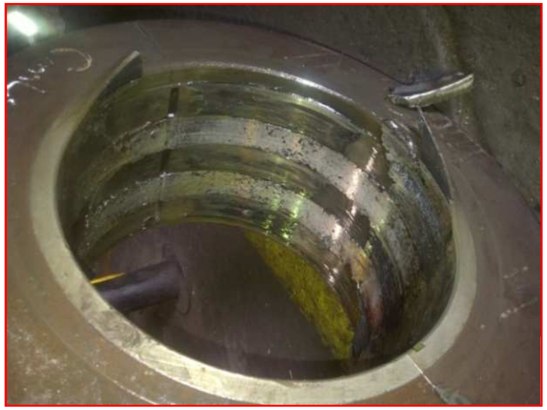


Palier

Capteur



Réducteur d'un Laminoir Puissance 2X1200Kw



Palier lisse Diam . 420mm

Inconvénients:

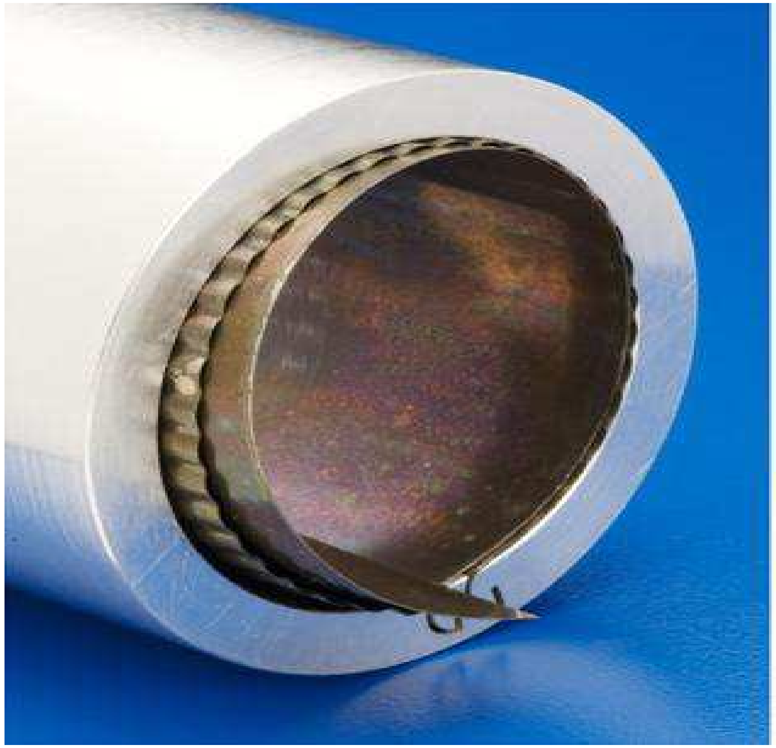
- Usure à des T° faible (Pour le régule $\approx 70°$)
- Nécessité d'un Circuit de lubrification sous une pression bien déterminée
- Maintenance conditionnelle rigoureuse (surveillance : P /T°/Qualité d'huile/Qualité d'eau de refroidissement..
- Maintenance couteuse (temps d'arrêts, cout de la PDR, outillages spécifiques…

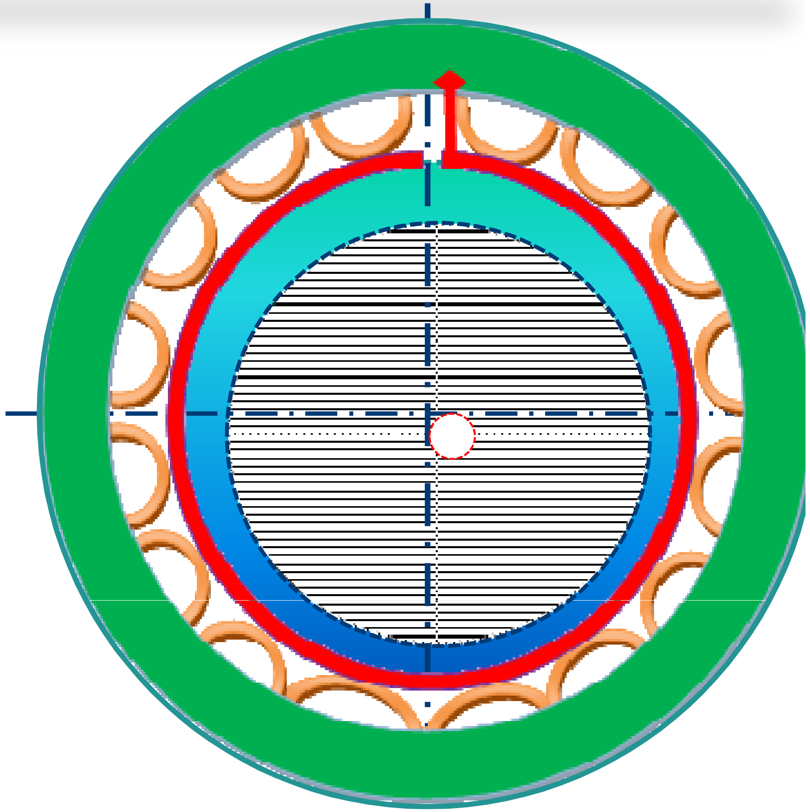
Avantage du palier lubrifié par l'air

ACM avec pack de refroidissement et d'un ACM MITI allégé

- ~~Huile de lubrification~~
- ~~Centrale de lubrification~~
- ~~Centrale de refroidissement de refroidissement~~
- ~~Surveillance et maintenance des paliers~~
- ~~Coût de maintenance élevé~~
- ~~Limite en vitesses~~
- ~~Température de fusion du régule~~
- ~~Amortissement faible~~
- ~~Limite en vitesse~~

Palier à feuille MITI

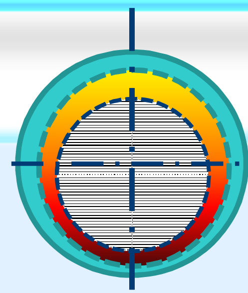




Fourreau rigide
Lobes flexibles
Feuille d'usure
Air sous pression

✓Utilisés dans les ACM, moteurs de fusé, petit moteur à grandes vitesses..
✓ Grande vitesse (illimitée dans la $4^{ème}$ génération)
✓Durée de vie > 100 000 heures
✓Résistance à des hautes températures

PLAN DE PRESENTATION



- Introduction et types de paliers
- Théorie de la lubrification aérodynamique
- Perturbation de l'équation de Reynolds compressible: approche dynamique linéaire
- Traitement numérique des EDP résultant de la perturbation
- Validation et étude paramétrique
- Conclusions et perspectives

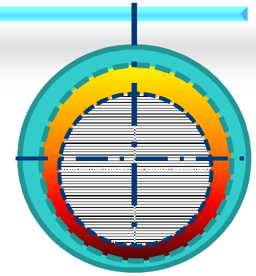
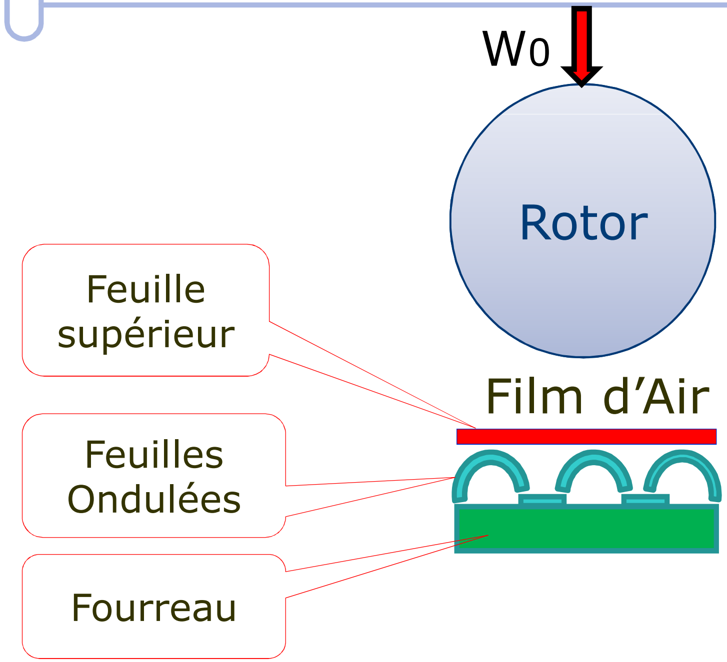
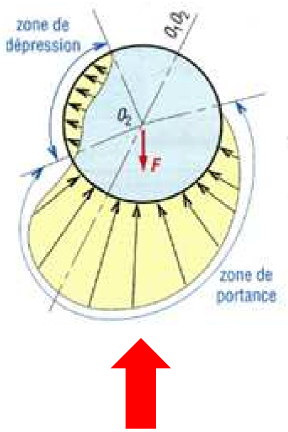
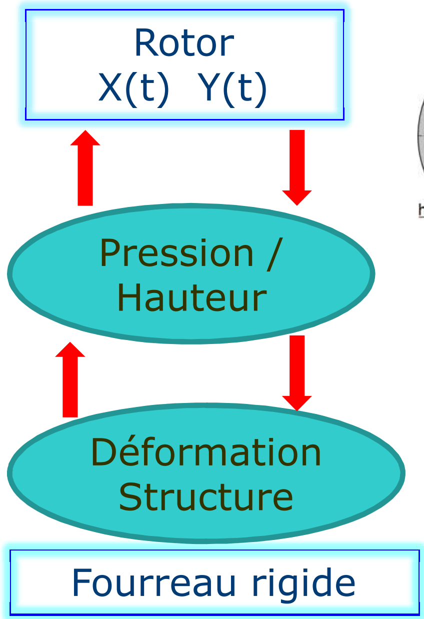


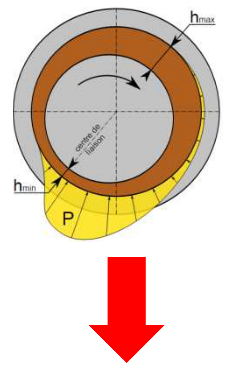
Schéma de fonctionnement:

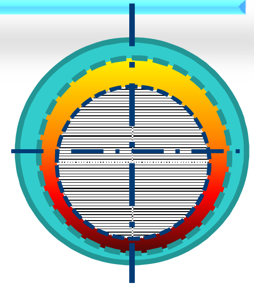
Position arbre ⟶ champ de pressions et de hauteurs ⟶ déformer les feuilles ⟶ modifier le champ de hauteurs du fluide et le champ de pression ⟶ La position de l'arbre sera affectée à son tour et ainsi de suite











Loi de la MMC :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Loi de comportement rhéologique pour un fluide compressible et newtonien

$$\sigma_{ij} = \left(-p + \lambda D_{kk}\right)\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

Equation de Reynolds pour palier lisses :

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{6U_2}{R}\frac{\partial(\rho h)}{\partial \theta} + 12\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}$$

Fluide à couple de contrainte :

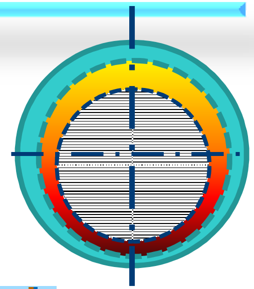
Fluide à couples de contraintes

L'introduction couples de contraintes et des couples de volume en plus des forces massiques et surfaciques conduit à l'équation suivante:

$$u(x,y,z) = \underbrace{U_2 \frac{y}{h}}_{terme\ de\ Couette} + \underbrace{\frac{1}{2\mu}\left\{y^2 - hy + 2l^2\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)}\right]\right\}\frac{\partial p}{\partial x}}_{terme\ de\ Poiseuille}$$

$$w(x,y,z) = \underbrace{\frac{1}{2\mu}\left\{y^2 - hy + 2l^2\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)}\right]\right\}\frac{\partial p}{\partial z}}_{terme\ de\ Poiseuille}$$

Ces profils de vitesse, lorsque reportés dans l'équation de continuité conduisent à l'équation de Reynolds modifiée:



Equation de Reynolds modifiée:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{G(h,l)}{12\mu}\,p\,\frac{\partial p}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{G(h,l)}{12\mu}\,p\,\frac{\partial p}{\partial z}\right]=\frac{\omega}{2}\frac{\partial(ph)}{\partial\theta}+\frac{\partial(ph)}{\partial t}$$

Avec :

$$G(h,l)=h^3-12l^2\left[h-2l\tan\left(\frac{h}{2l}\right)\right] \quad \text{Et :} \quad l=\left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

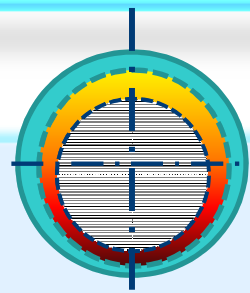
$$h(\theta,z,t)=C+X(t)cos\theta+Y(t)\sin\theta+U(\theta,z,t)$$

C : jeu radial , U :Opérateur d'élasticité dépend du module d'élasticité et coefficient de poisson et de l'épaisseur de la tôle

L'équation adimensionnée s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}(\tilde{h},\tilde{l})\tilde{p}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}(\tilde{h},\tilde{l})\tilde{p}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right]=\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{p}\tilde{h})+2\Lambda\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}(\tilde{p}\tilde{h})$$

PLAN DE PRESENTATION



- Introduction et types de paliers
- Type de paliers
- Théorie de la lubrification aérodynamique
- Perturbation de l'équation de Reynolds compressible: approche dynamique linéaire
- Traitement numérique des EDP résultant de la perturbation
- Validation et étude paramétrique
- Conclusions et perspectives

Perturbation de des différents grandeurs de l'équation :

$$\tilde{X} = \tilde{X}_0 + \Delta\tilde{X} \qquad \Delta\tilde{X} = \Delta\tilde{X}^* e^{i\gamma t}$$

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 + \Delta\tilde{Y} \qquad \Delta\tilde{Y} = \Delta\tilde{Y}^* e^{i\gamma t}$$

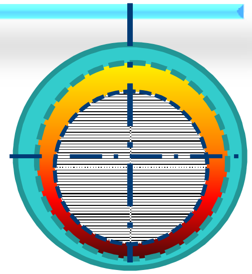
$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 + \Delta\tilde{U} \qquad \tilde{U} = \tilde{U}_0 + \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{X}}\right)_0 \Delta\tilde{X} + \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\tilde{Y}}\right)_0 \Delta\tilde{Y} + \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\dot{\tilde{X}}}\right)_0 \Delta\dot{\tilde{X}} + \left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\dot{\tilde{Y}}}\right)_0 \Delta\dot{\tilde{Y}}$$

$$\tilde{G}(\tilde{h},\tilde{l}) = \tilde{h}_0^{\,3} + 3\tilde{h}_0^{\,2}\Delta\tilde{H}^* e^{i\gamma t} - 12\tilde{l}^2\left[\tilde{h}_0^{\,3} + 3\tilde{h}_0^{\,2}\Delta\tilde{H}^* e^{i\gamma t} - 2\tilde{l}\tan\left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{l}}\right)\right]$$

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \left(\Delta\tilde{X}^*(cos\theta + U_X + i\gamma U_{\dot{X}}) + \Delta\tilde{Y}^*(sin\theta + U_Y + i\gamma U_{\dot{Y}})\right)e^{i\gamma t}$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}}\right|_0 \Delta\tilde{X} + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}}\right|_0 \Delta\tilde{Y} + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\dot{\tilde{x}}}\right|_0 \Delta\dot{\tilde{X}} + \left.\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\dot{\tilde{y}}}\right|_0 \Delta\dot{\tilde{Y}}$$

Tout calcul fait i on obtient 3 EDP : une équation d'ordre zéro et deux équation d'ordre 1 :



3 EDP :

Equation d'ordre zéro (cas stationnaire)

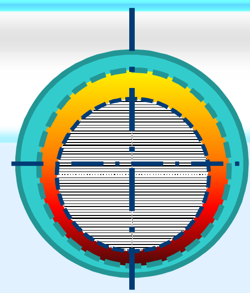
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde G_0 \tilde p_0 \frac{\partial \tilde p_0}{\partial\theta}\right] + \frac{\partial}{\partial \tilde z}\left[\tilde G_0\tilde p_0\frac{\partial\tilde p_0}{\partial\tilde z}\right] = \Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde p_0\tilde h_0\right)$$

2 Equations d'ordre 1:

$$\left\{R(\tilde Q_X)\right\} + \left\{\tilde G_0\tilde p_0\left[\frac{\partial\tilde p_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde Q_X}{\tilde p_0}\right)+\frac{\partial\tilde p_0}{\partial\tilde z}\frac{\partial}{\partial\tilde z}\left(\frac{\tilde Q_X}{\tilde p_0}\right)\right]\right\} + \left\{\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde p_0\tilde h_0)\left[\left(\frac{\tilde Q_X}{\tilde p_0}\right)+3\left(\frac{\tilde h^3{}_0}{\tilde G_0}\frac{\tilde h_X}{\tilde h_0}\right)\right]\right\} + \left\{3\tilde G_0\tilde p_0\left[\frac{\partial\tilde p_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde h^3{}_0}{\tilde G_0}\frac{\tilde h_X}{\tilde h_0}\right)+\frac{\partial\tilde p_0}{\partial\tilde z}\frac{\partial}{\partial\tilde z}\left(\frac{\tilde h^3{}_0}{\tilde G_0}\frac{\tilde h_X}{\tilde h_0}\right)\right]\right\} =$$

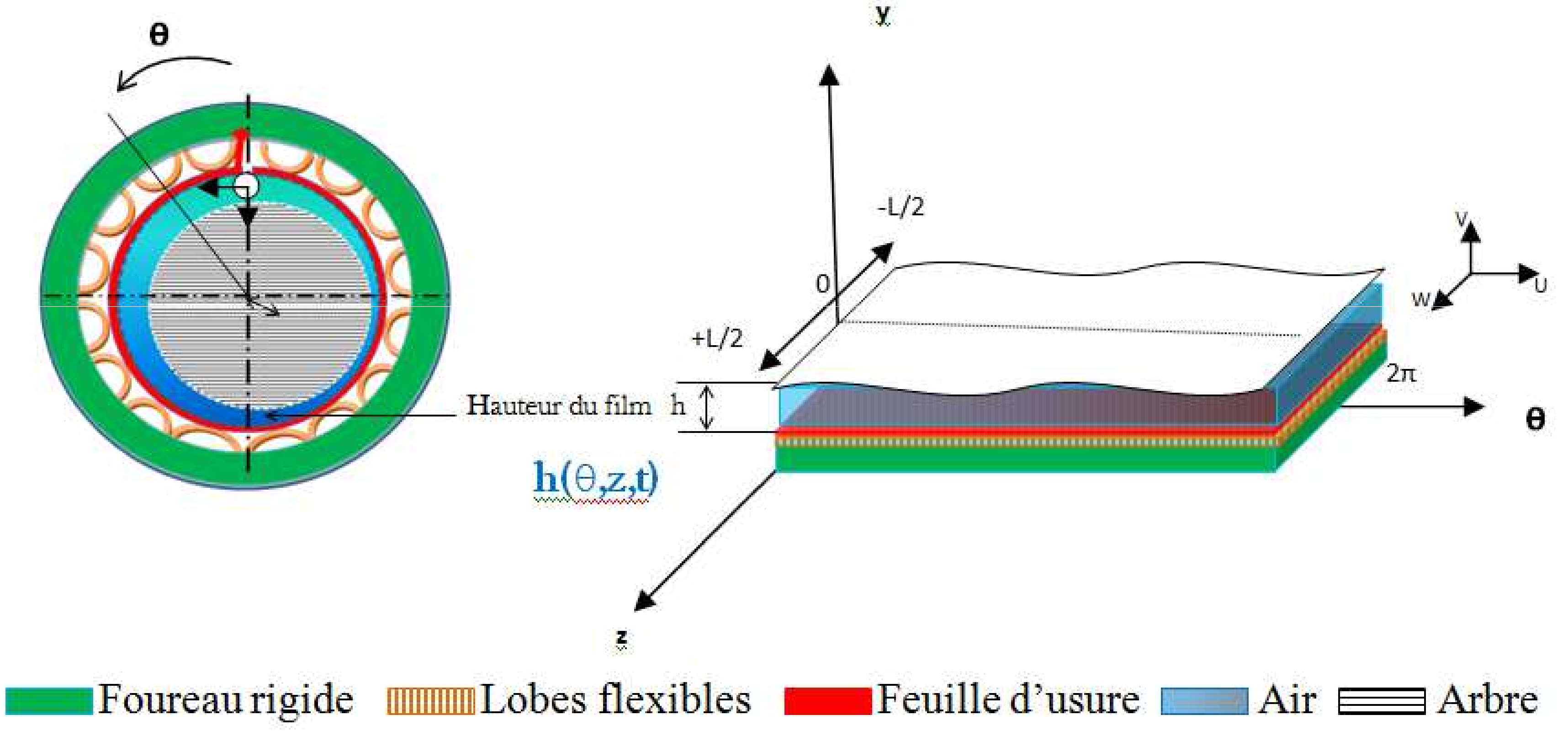
$$\left\{R(\tilde Q_Y)\right\} + \left\{\tilde G_0\tilde p_0\left[\frac{\partial\tilde p_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde Q_Y}{\tilde p_0}\right)+\frac{\partial\tilde p_0}{\partial\tilde z}\frac{\partial}{\partial\tilde z}\left(\frac{\tilde Q_Y}{\tilde p_0}\right)\right]\right\} + \left\{\Lambda\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde p_0\tilde h_0)\left[\left(\frac{\tilde Q_Y}{\tilde p_0}\right)+3\left(\frac{\tilde h^3{}_0}{\tilde G_0}\frac{\tilde h_Y}{\tilde h_0}\right)\right]\right\} + \left\{3\tilde G_0\tilde p_0\left[\frac{\partial\tilde p_0}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\tilde h^3{}_0}{\tilde G_0}\frac{\tilde h_Y}{\tilde h_0}\right)+\frac{\partial\tilde p_0}{\partial\tilde z}\frac{\partial}{\partial\tilde z}\left(\frac{\tilde h^3{}_0}{\tilde G_0}\frac{\tilde h_Y}{\tilde h_0}\right)\right]\right\} =$$

PLAN DE PRESENTATION



- Introduction et types de palier / Problématique
- Théorie de la lubrification aérodynamique
- Perturbation de l'équation de Reynolds compressible: approche dynamique linéaire
- **Traitement numérique des EDP résultant de la perturbation**
- Validation et étude paramétrique
- Conclusions et perspectives

Développement du palier :



Maillage du film:

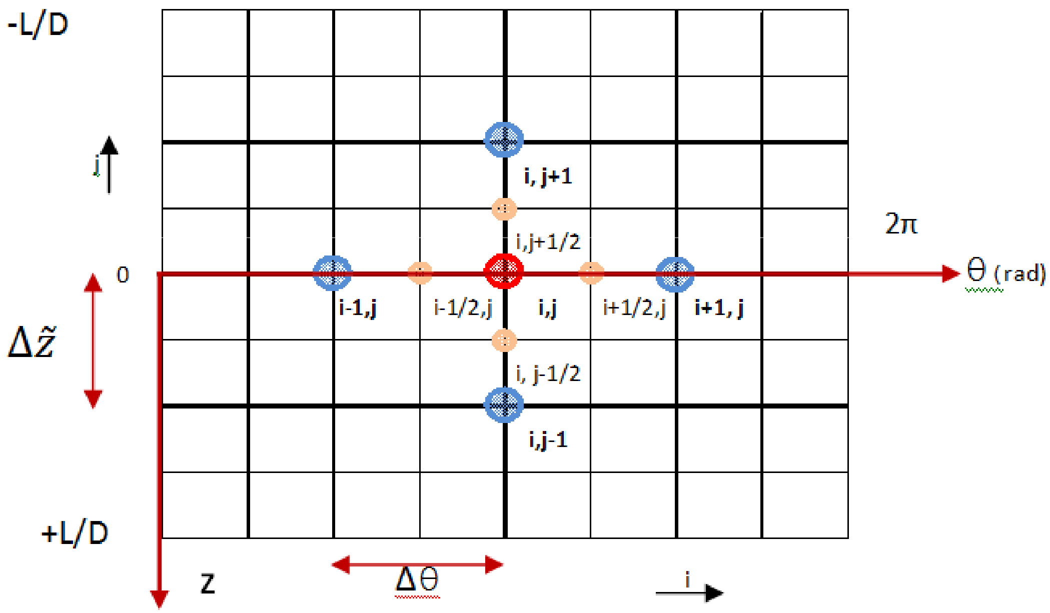
Avec :

- $1 \leq i \leq N_\theta + 1$ et $1 \leq j \leq N_z + 1$
- $z = \frac{L}{2}$ et $\tilde{z} = \frac{z}{R} = \frac{L}{2R} = \frac{L}{D}$

Avec : N_θ : Nombre de mailles suivant θ N_z : Nombre de mailles suivant z

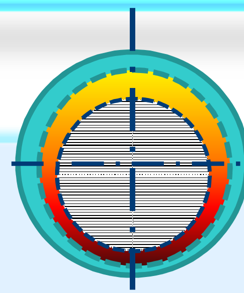
$\Delta\theta$: Pas circonférentiel $= \frac{2\pi}{N_\theta}$ Δz : Pas axial $= \frac{L/D}{N_z}$

Traitement des différents termes de l'équation de Reynolds

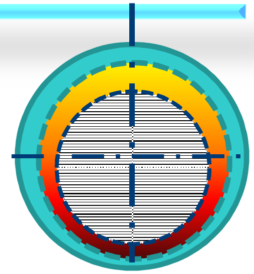


$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{G}_0\tilde{p}_0\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)\Bigg|_{i,j} \approx \frac{\tilde{G}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i+\frac{1}{2},j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)_{i+1/2,j} - \tilde{G}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}\tilde{p}_{0_{i-\frac{1}{2},j}}\left(\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\theta}\right)_{i-1/2,j}}{\Delta\theta^2}$$

PLAN DE PRESENTATION



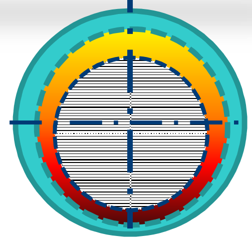
- Introduction
- Type de paliers
- Théorie de la lubrification aérodynamique
- Perturbation de l'équation de Reynolds compressible: approche dynamique linéaire
- Traitement numérique des EDP résultant de la perturbation
- **Validation et étude paramétrique**
- Conclusions et perspectives



Validation des résultats :

Coefficient de raideurs :

$W_{0 \text{ en N}}$	ε_0	A_{xx}	Δ en %/(3)	A_{xy}	Δ en %/(3)	A_{yx}	Δ en %/(3)	A_{yy}	Δ en %/(3)	
60	0.5959	**3,175**	**-1,9%**	**2,399**	**2,3%**	**0,0687**	**-45,0%**	**2,047**	**6,6%**	(1)
		3,304	2,1%	2,398	2,3%	0,131	4,8%	1,975	2,9%	(2)
		3,237	0,0%	2,345	0,0%	0,125	0,0%	1,92	0,0%	(3)
		4,175	29,0%	0,775	-67,0%	0,225	80,0%	1,049	-45,4%	(4)
120	0.7465	**8,848**	**-1,5%**	**4,176**	**4,7%**	**1,286**	**10,3%**	**3,405**	**-0,3%**	(1)
		9,208	2,5%	4,185	4,9%	1,345	15,4%	3,365	-1,5%	(2)
		8,981	0,0%	3,989	0,0%	1,166	0,0%	3,416	0,0%	(3)
		10,424	16,1%	1,715	-57,0%	1,405	20,5%	2,397	-29,8%	(4)
320	0.8967	**43,28**	**-2,7%**	**10,27**	**1,2%**	**5,88**	**-2,4%**	**7,12**	**-1,1%**	(1)
		46,957	5,5%	10,383	2,3%	6,395	6,2%	7,261	0,8%	(2)
		44,493	0,0%	10,151	0,0%	6,024	0,0%	7,202	0,0%	(3)
		45,572	2,4%	5,451	-46,3%	6,192	2,8%	6,384	-11,4%	(4)



Validation des résultats :

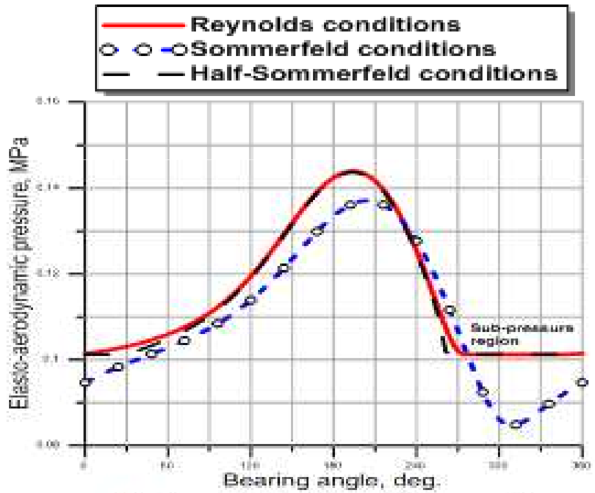
Coefficient d'amortissement :

W_0	ε_0	B_{xx}	Δ en %/3	B_{xy}	Δ en %/3	B_{yx}	Δ en %/3	B_{yy}	Δ en %/3	
60	0.5959	**1,854**	**17,9%**	**-0,568**	**-21,3%**	**0,859**	**215,8%**	**0,93**	**54,0%**	(1)
		1,628	3,5%	-0,715	-1,0%	0,452	66,2%	0,616	2,0%	(2)
		1,573	0,0%	-0,722	0,0%	0,272	0,0%	0,604	0,0%	(3)
120	0.7465	**2,352**	**1,3%**	**-0,936**	**-6,9%**	**0,779**	**52,4%**	**0,898**	**20,2%**	(1)
		2,097	-9,7%	-1,09	8,5%	0,454	-11,2%	0,849	13,7%	(2)
		2,322	0,0%	-1,005	0,0%	0,511	0,0%	0,747	0,0%	(3)
320	0.8967	**4,04**	**-21,2%**	**-1,761**	**11,1%**	**0,616**	**-27,2%**	**1,114**	**16,6%**	(1)
		3,184	-37,9%	-1,828	15,3%	0,202	-76,1%	0,968	1,4%	(2)
		5,126	0,0%	-1,585	0,0%	0,846	0,0%	0,955	0,0%	(3)

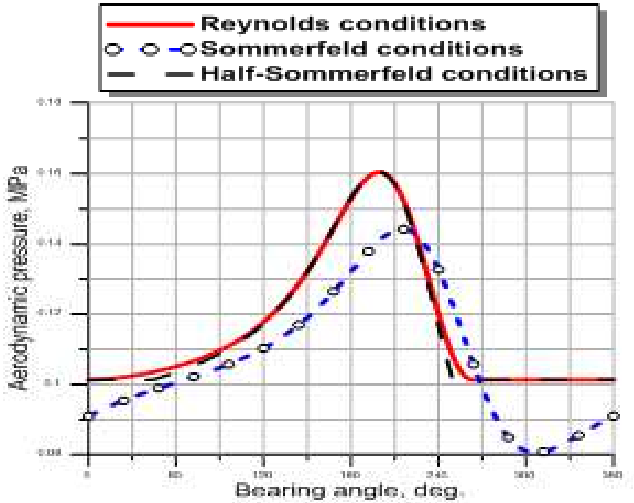
Etude paramétrique :

Données : Lambda=1., L0=0. ou 1.07,
Ntheta=120, Nz=60, Charge =65 N, Vitesse : 80 000rpm

C.L. Influence sur le champ de <u>pression</u> et Hauteur du film:



Palier à feuille déformable

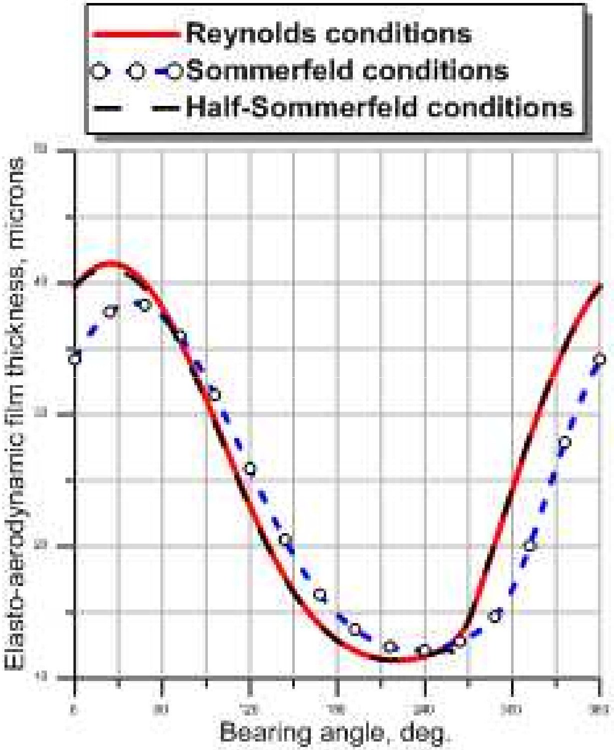


Palier rigide

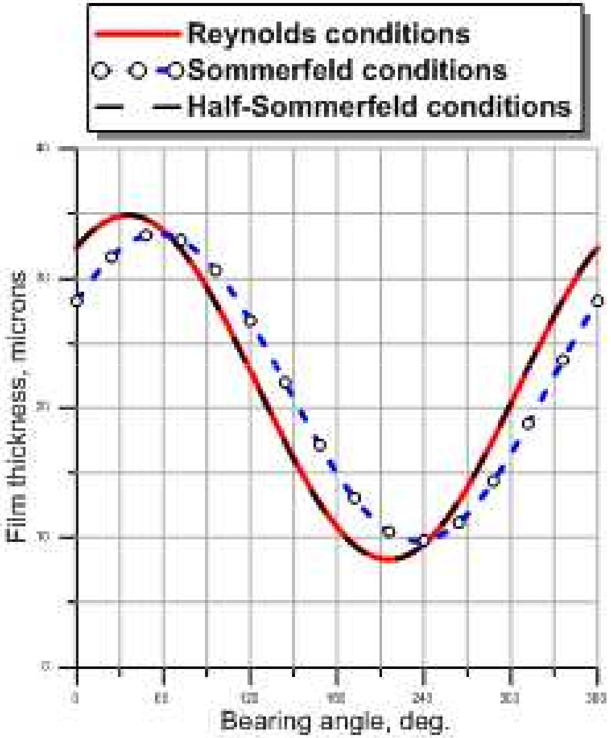
CL. Sommerfeld donnent des champs de pression faibles, l’impact est plus important sur le palier à feuilles . Cham de pression plus large dans le palier à feuilles. r.

Etude paramétrique :

C.L. Influence sur la __Hauteur du film__:



Palier à feuille déformable

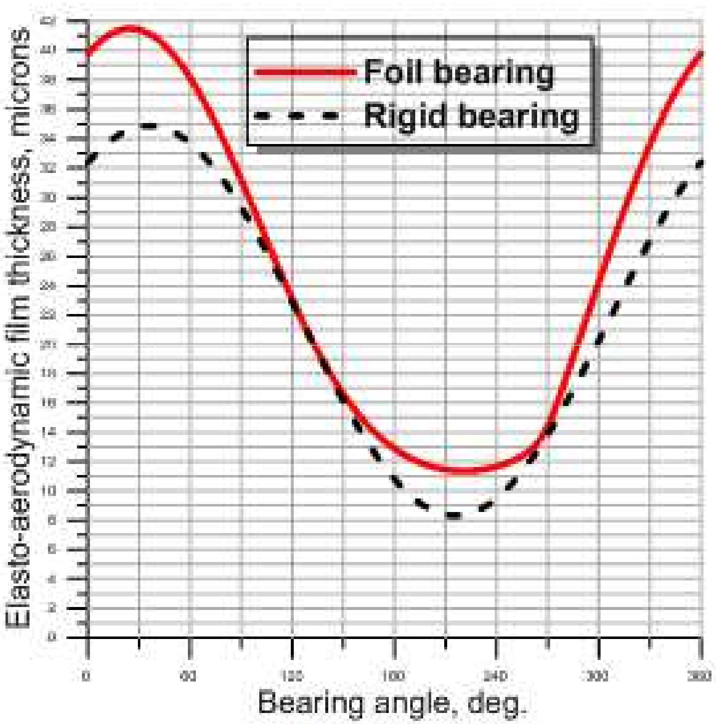


Palier rigide

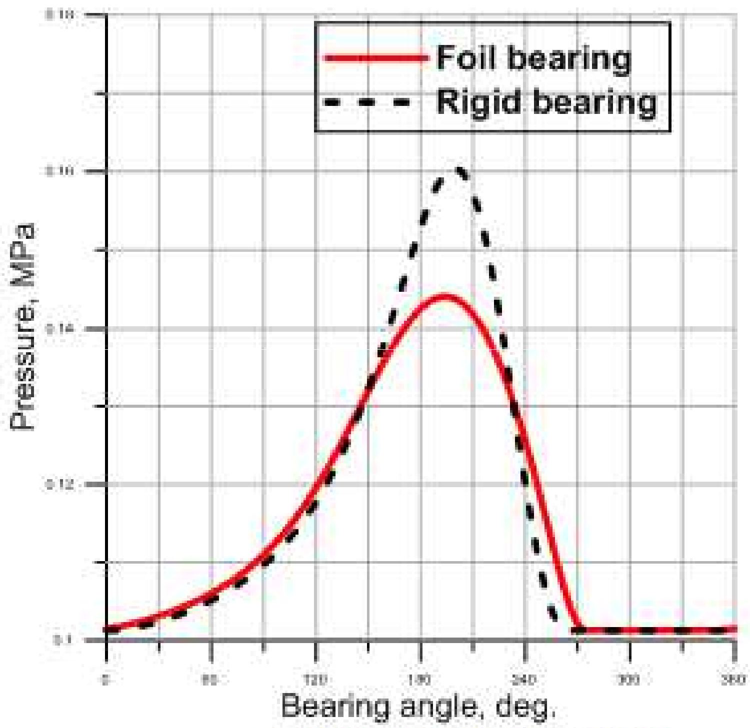
Pas de grandes influences des CL. On constate bien des hauteurs plus importantes et sur un angle plus large du film / meilleure stabilité

Etude paramétrique :

C.L /Influence de la déformation (Palier rigide / MITI):



Film du fluide

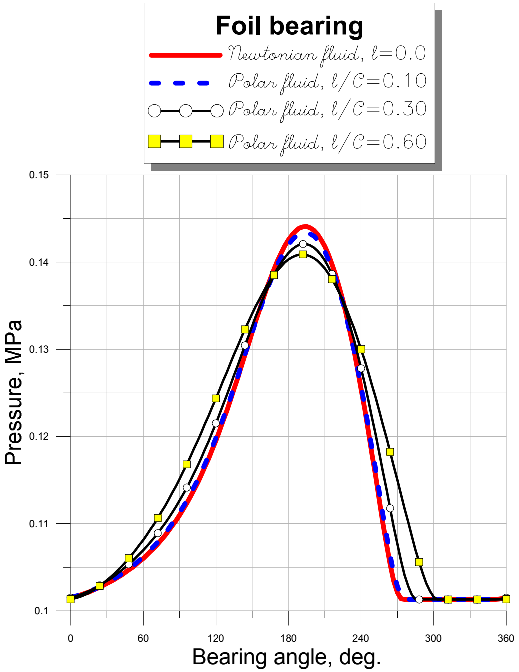


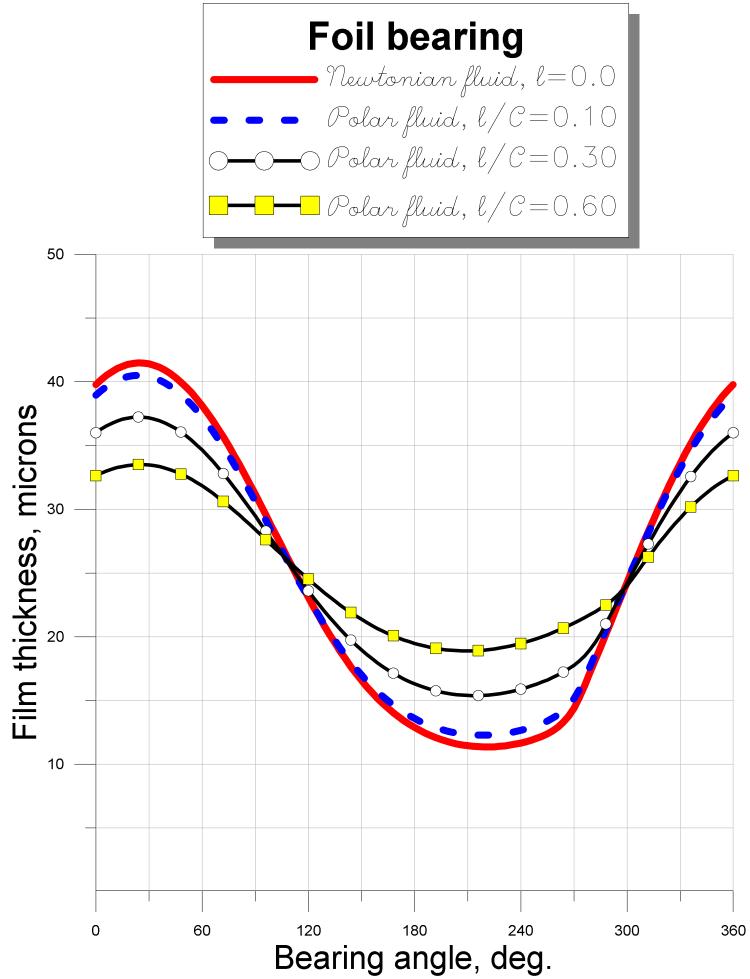
Champs de pression

L'élasticité des feuilles donne de bon comportement du palier :
Hauteur plus importante du film un champ de pression plus large.

Etude paramétrique :

Couple de contrainte /Influence sur la géométrie du film :

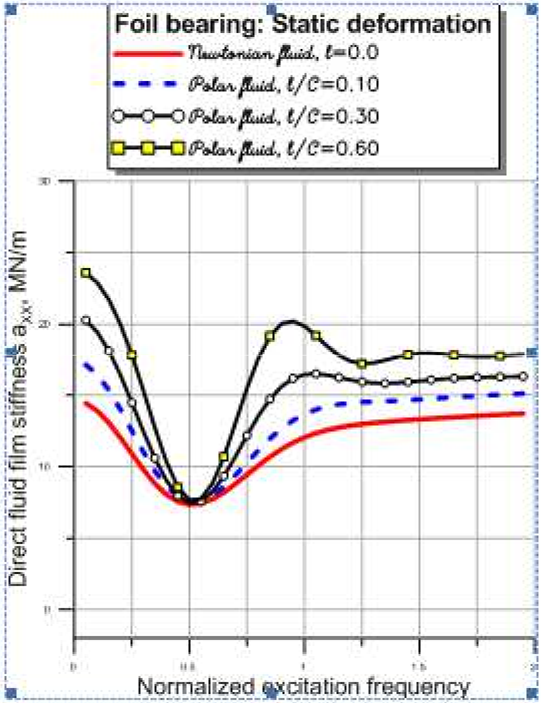


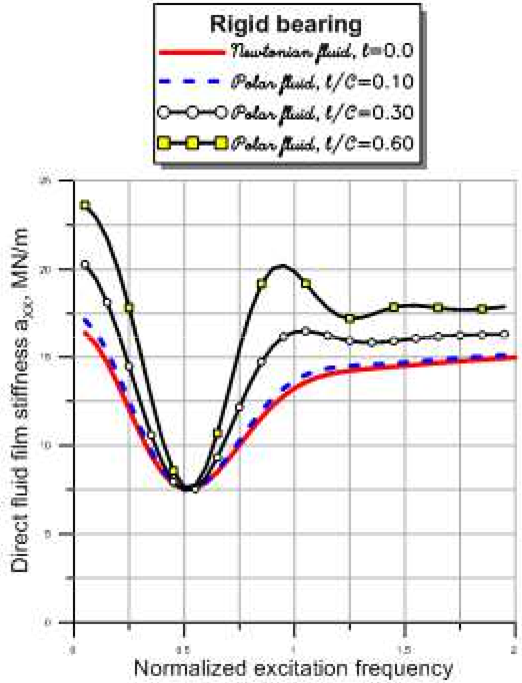


!!! Dans le cas du fluide polaire, la variation de la hauteur film s’effectue de faible amplitude et vient sécuriser la rotation de l’arbre dans la zone critique

Etude paramétrique :

Analyse des coefficients dynamiques : Effet des couples de contraintes :

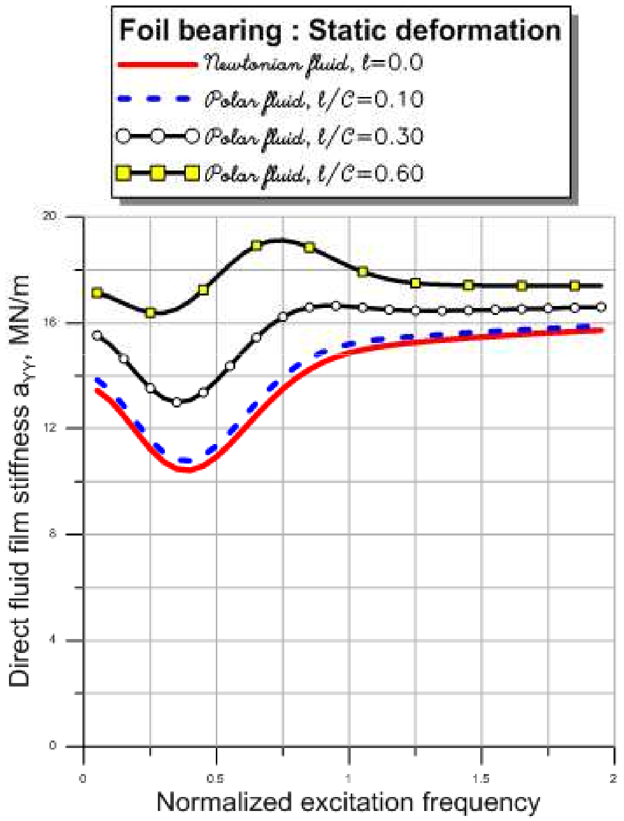


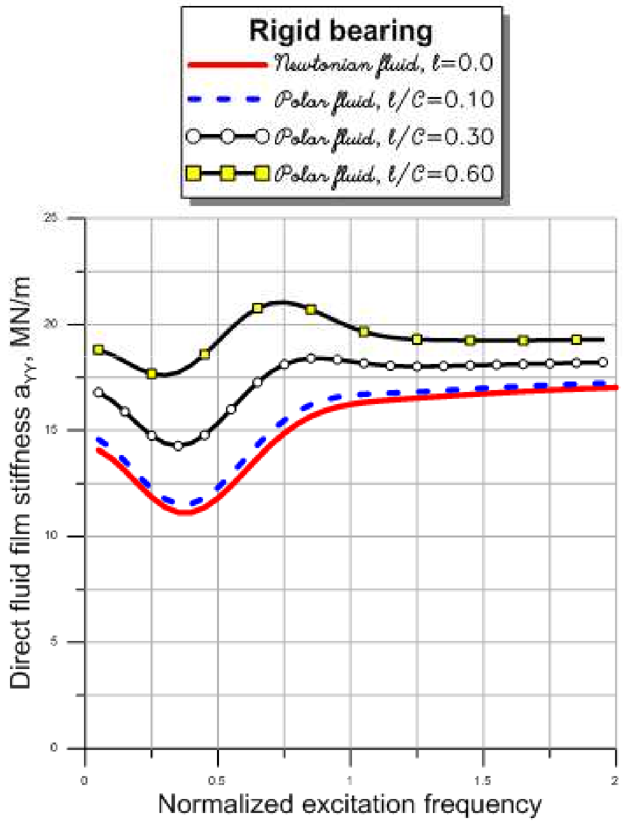


Pratiquement le même impact sur les coefficients directs du palier rigide et du palier MITI. À l/C=0.1, l’effet est déjà remarquable sur le palier à feuilles, des valeurs légèrement inférieurs en MN/m en MITI

Etude paramétrique :

Analyse des coefficients dynamiques : Effet des couples de contraintes :

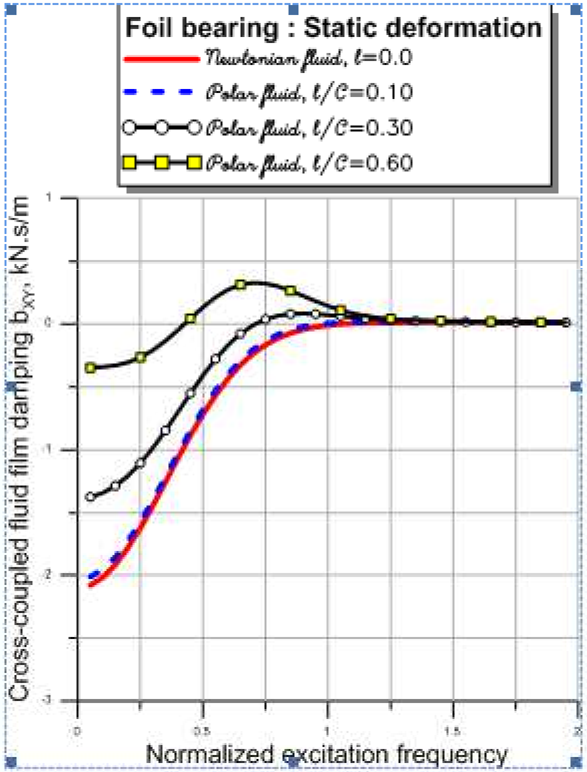


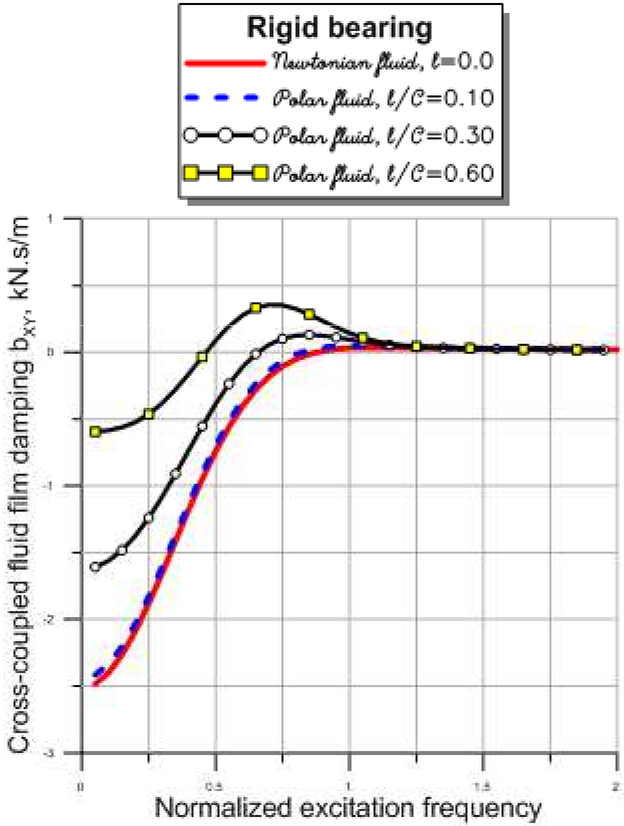


Mais sur des valeurs élevés des raideurs l'impact les couples agissent d'une façon remarquable. Cas a_{yy}

Etude paramétrique :

Analyse des coefficients dynamiques : Déformation statique / Effet des couples de contraintes :

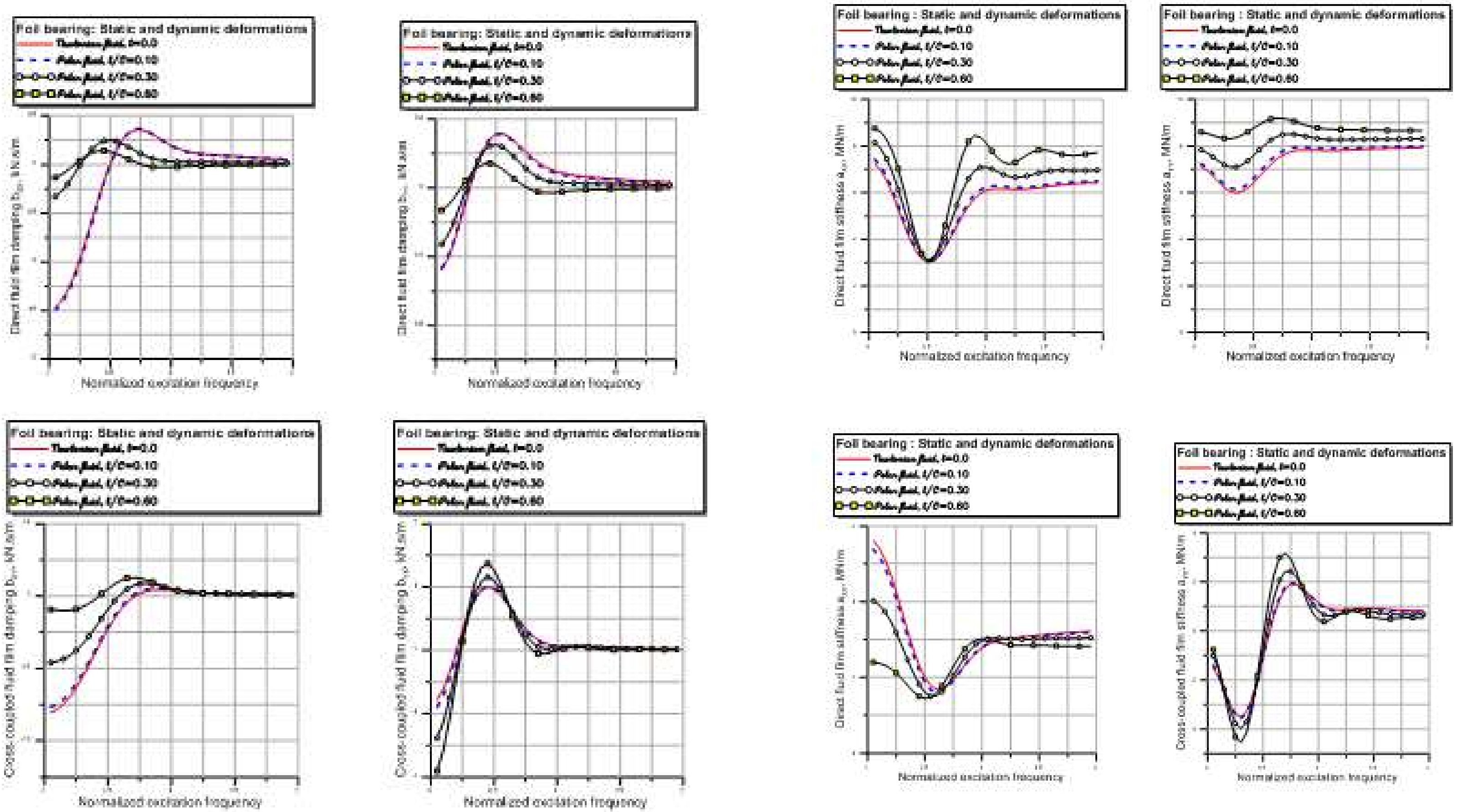




Même choses sur les coefficients d'amortissement, l'impact est plus importants sur les coefficients indirects.

Etude paramétrique :

Analyse des coefficients dynamiques :Déformation statique et dynamique / Effet des couples de contraintes :

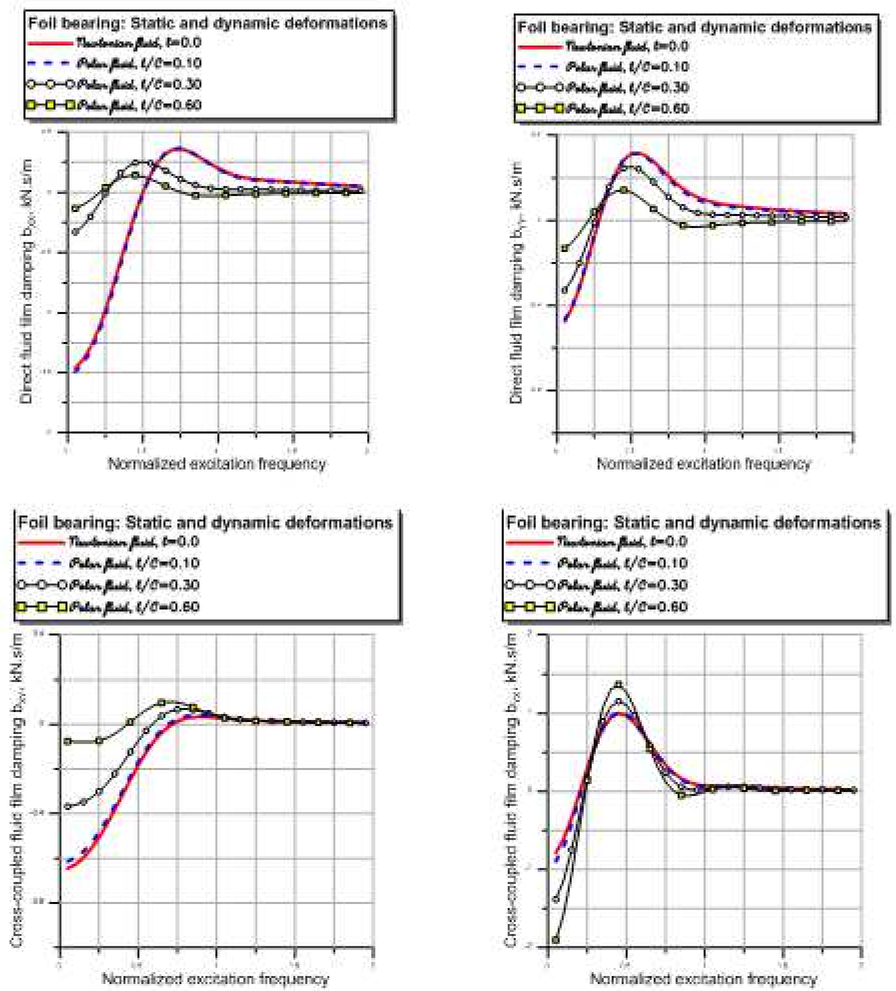


Impact remarquable avant la fréquence de 0.5 mais pratiquement pas de grandes influences sur les coefficients indirects.

Etude paramétrique :

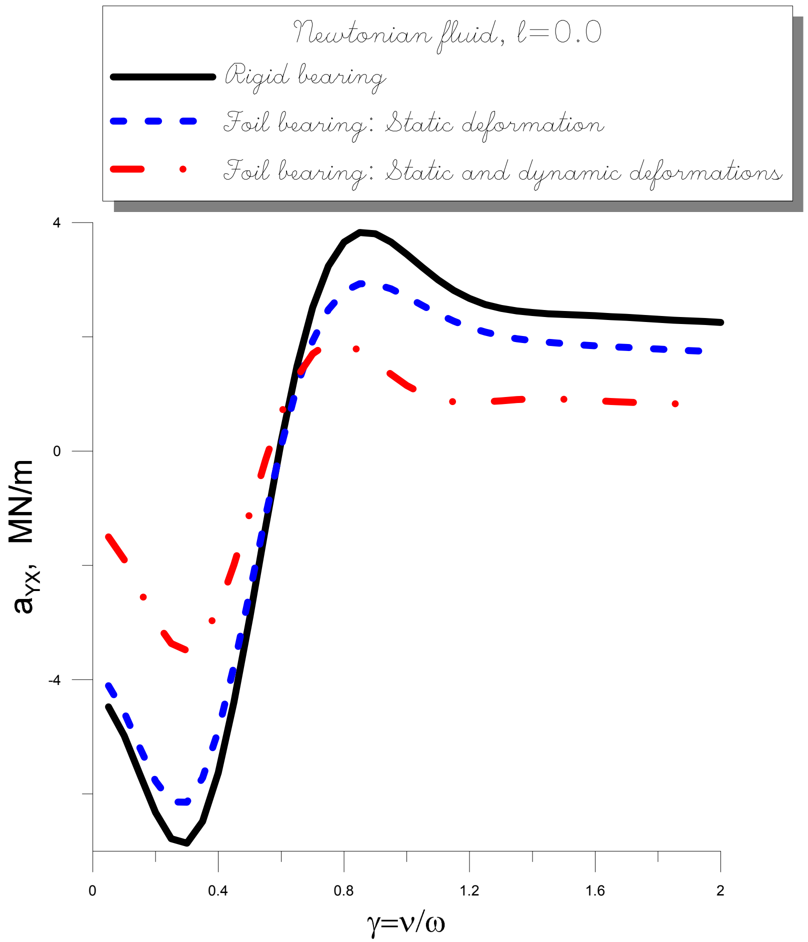
Analyse des coefficients dynamiques :Déformation statique et dynamique / Effet des couples de contraintes :

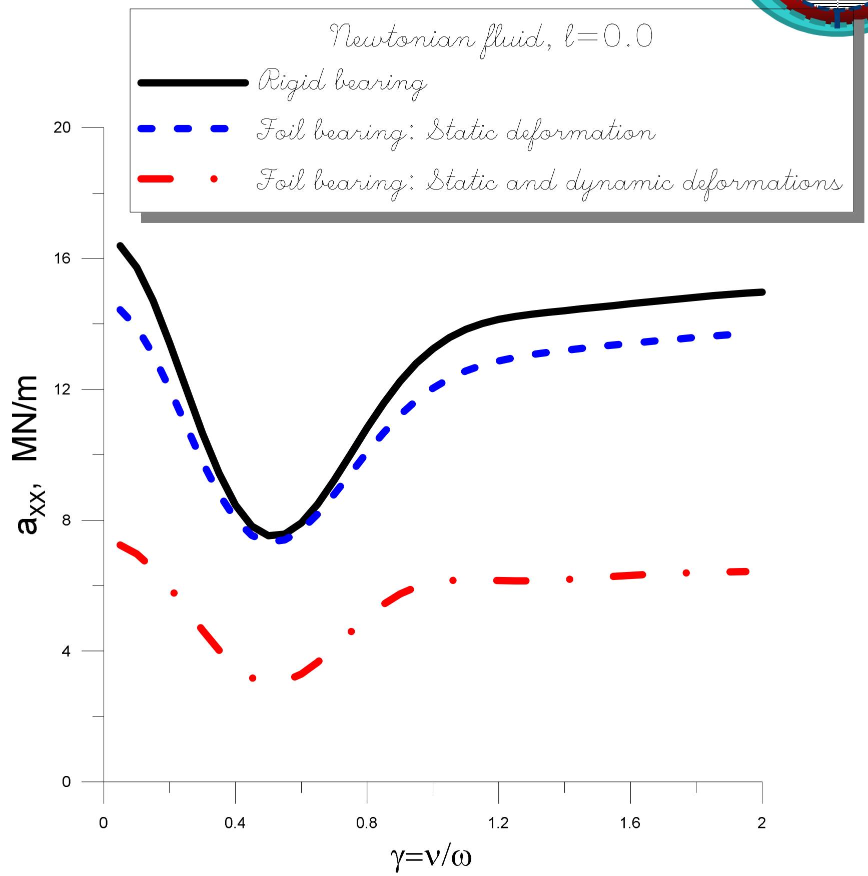
!!! grande dépendance des coefficients d’amortissement des couples de contraintes en cas de fluide polaire lorsqu’on est dans la fréquence d’excitation adimensionnée de 0-1, le palier change totalement de comportement même dans le sens d’application de la charge et devient plus stable qu’un fluide Newtonien à partir des valeurs supérieures à 0.1 du coefficient **l/C**



Etude paramétrique :

Effet de la déformation sur les raideurs / Cas d'un fluide Newtonien :



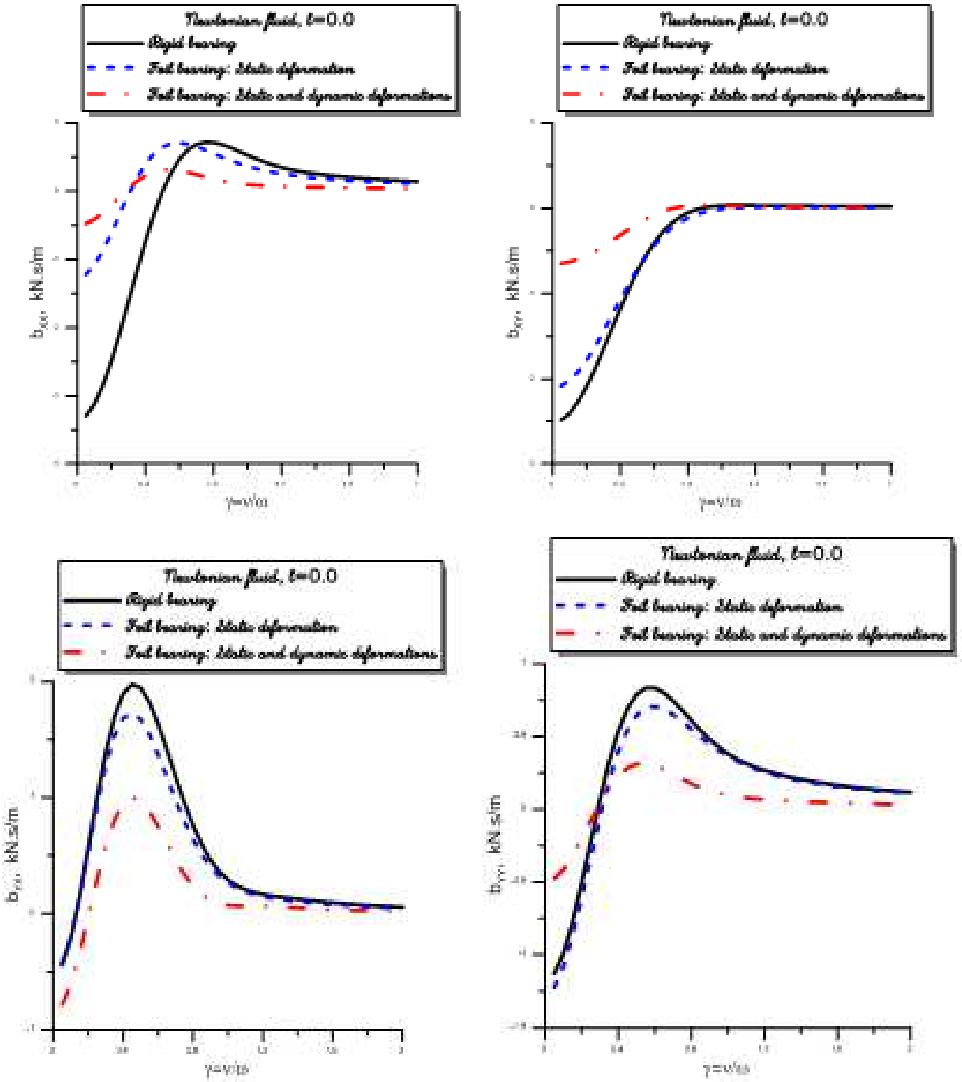


Amplitude moins importantes des coefficients directs et indirects (meilleure stabilité)

Etude paramétrique :

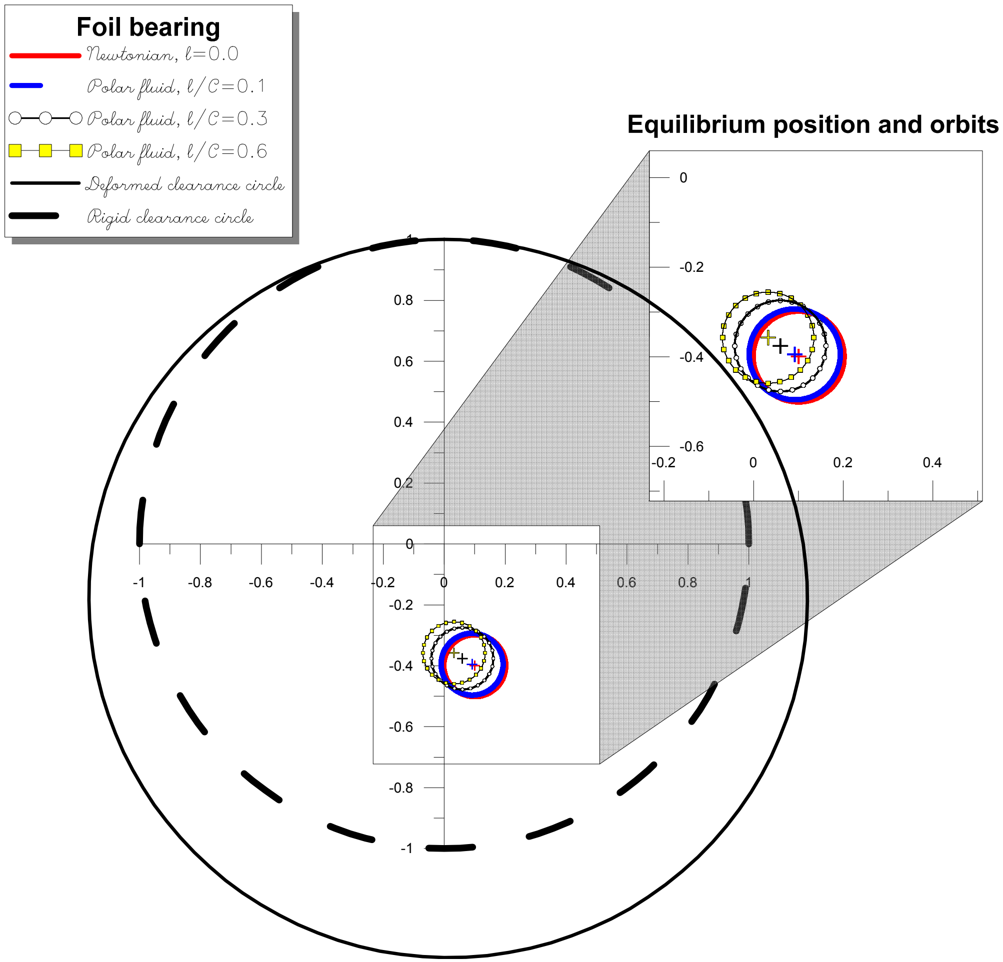
effet de la déformation sur l' / Cas d'un fluide Newtonien :

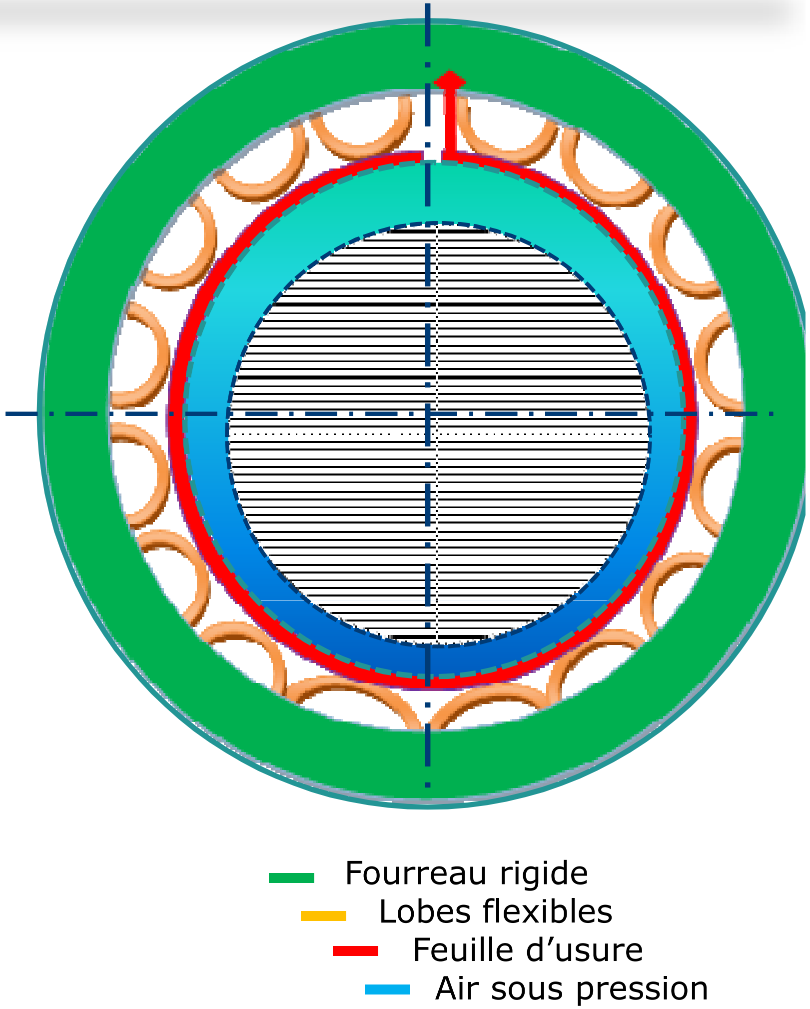
Impact direct de la déformation des feuilles sur tous les coefficients d'amortissement notamment en dynamique, le palier se comporte nettement mieux



Etude paramétrique :

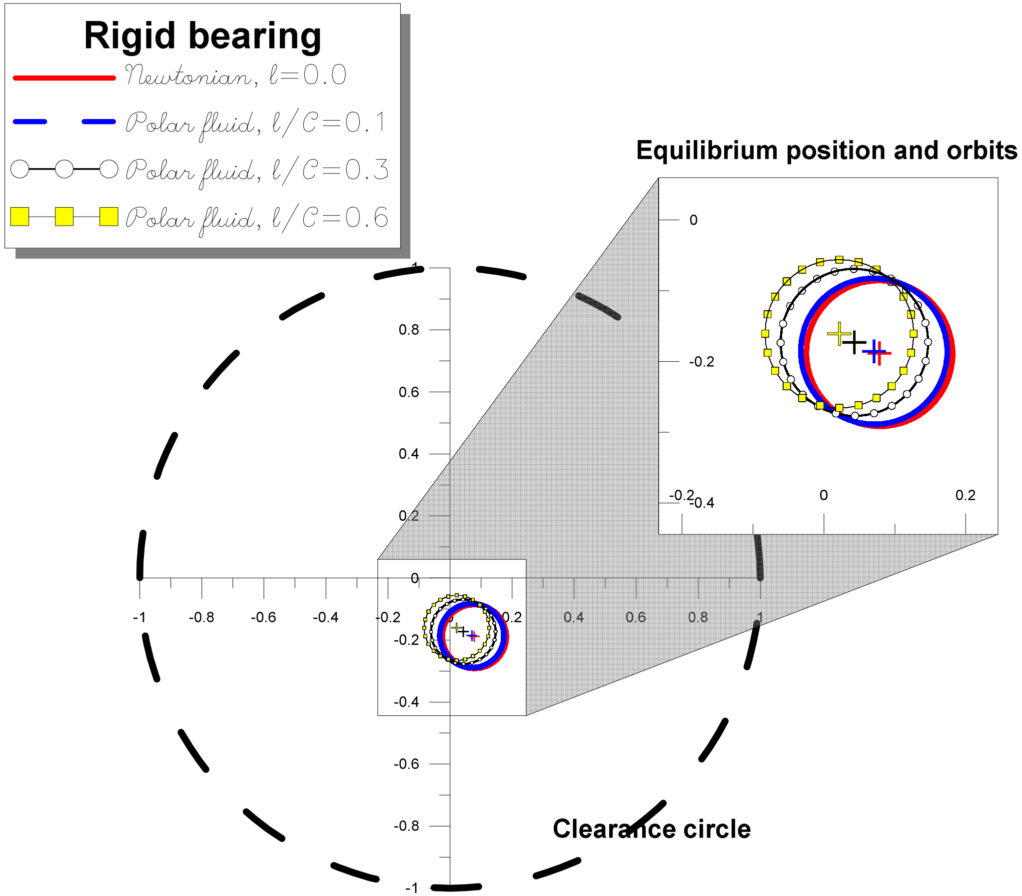
Effet des couples de contraintes sur l'orbite:

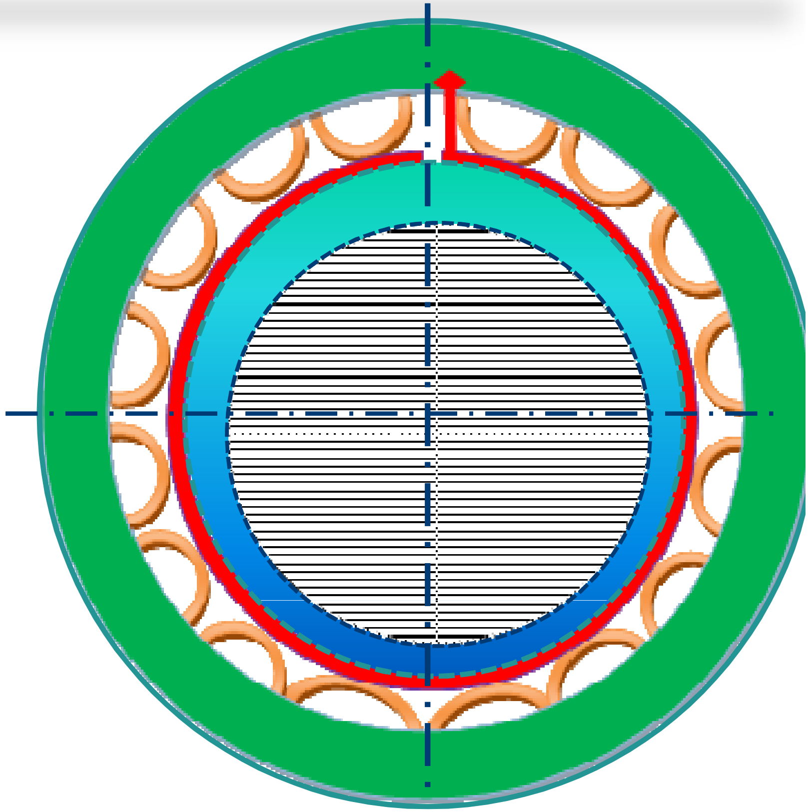




Etude paramétrique :

Effet des couples de contraintes sur l'orbite:

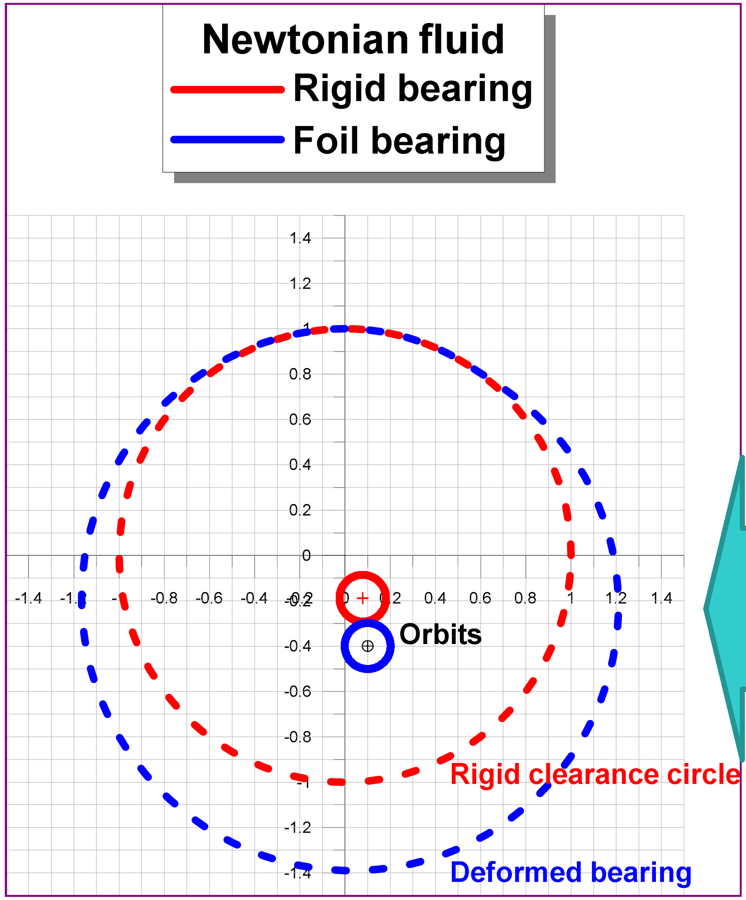


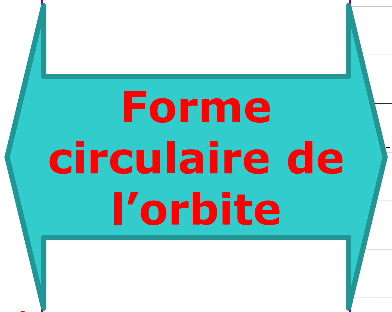


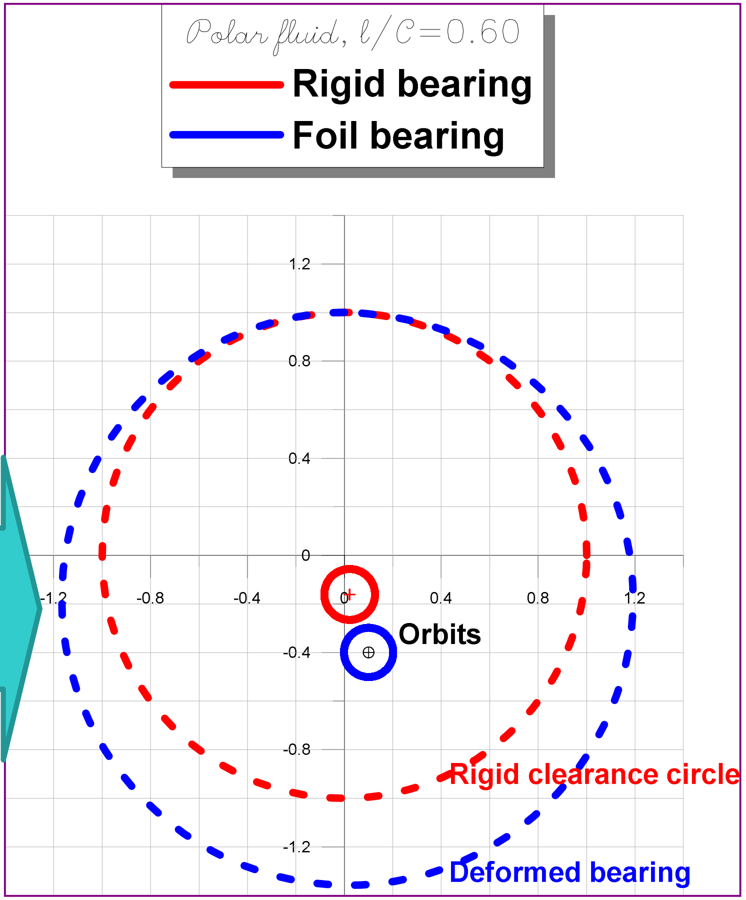
Fourreau rigide
Lobes flexibles
Feuille d'usure
Air sous pression

Etude paramétrique :

Effet des couples de contraintes sur l'orbite par type de palier et type de fluide:







La déformation élastique de l'alésage du palier sous l'effet de la pression du fluide Grace à l'élasticité des bumps permet à l'arbre du rotor de tourner à 80 000 rpm avec assez de clearance (jeu). Confirmation de tout les résultats précédents

Conclusion et perspectives :

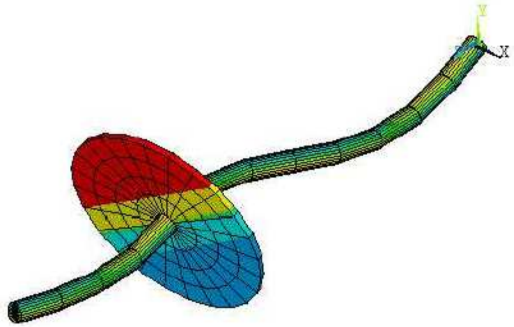
L'étude a permet de révéler plusieurs avantages du palier à feuille de MITI, notamment la répartition du champs de pression sur un angle plus important et une géométrie du film plus régulière donnant ainsi un orbite harmoniquement stable à l'axe de l'arbre.

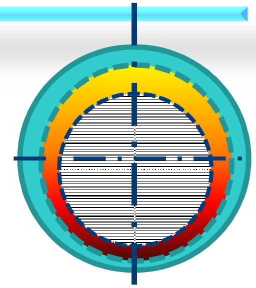
1- Dans tout palier à feuilles, l'inquiétude N°1 est de protéger l'arbre dans son logement contre les frottement de *Start up* et de *Shut down* et pouvoir supporter des charges importantes à grandes vitesses. Les paliers modernes de MITI utilisent plusieurs feuilles (*layers*) et la feuille intérieure (*inner top foil*) est d'une structure élastique avec un revêtement spécial.

2- Une analyse dynamique sur tout les degrés de libertés possibles de l'arbre:

- Déplacement sur X et Y
- Rotation sur thêta
- Moment sur X et Y

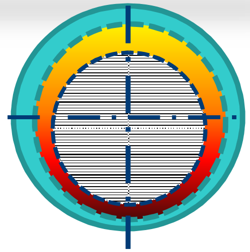
et en intégrant facteur dimensionnel du palier permettra certainement à une modélisation proche du réalité de fonctionnement et les Datas pratiques





Merci

Référence bibliographique :



[1] M. DAMOU « Mécanique des fluides», O.P.U. 03-1994 2001.

[2] M. DELANETTE et H. DUBOIS « mécanique théorique et appliquée», 1983 édition DELAGRAVE

[3] R. ZUCKER et O. BIBLARTZ « Fundamentals of Gas dynamics», 2ème édition 2002,

[4] G.W. STATCHOWIAK et A.W. BACHELOR, «Engineering Tibology», Edition Butterworth Heinmann,.

[5] F.M. WHITEE, « Fluid Mechanics », 4ème édition

[6] S.S ANTMAN, J.E. MARSDEN et L. SIROVICH «Prandtl's Essentials of Fluid Mechanics», 2ème édition, Translated by Katherine Mayes, Edition Herbert-springer 2004

[7] A. BECHKOK « Les Moteurs à combustion interne Module TE 369», O.P.U. 06-1995

[8] G. GRAU «Paliers aérodynamiques radiaux à structure à feuilles :Contribution à l'étude statique et comportement dynamique non linéaire», Thèse de Doctorat 2004. Université Lyon .

[9] F. BLANC «Méthodes numériques pour l'aéroélasticité des surfaces de contrôle des avions », Thèse de Doctorat, 2009 Ecole aéronautique de Toulouse.

[10] L. BARZEM «Analyse théorique et expérimentale de la dynamique d'un rotor sur paliers à feuilles lubrifié par l'air», thèse de Doctorat présenté en 2009 à l'université de Lyon dirigé par B. BOU-SAID.