

**Université du 8 mai 1945 – Guelma**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



**Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du**  
**diplôme de MASTER**

Option : **Conception et Production Industrielle**

Présenté par : **Ramdani wafa**

**Etude expérimentale du comportement**  
**plastique des aciers inoxydables sous**  
**sollicitation uniaxiale**

Sous la Direction de :: **Mr. ELAGGOUNE A.**

**Année universitaire 2015/2016**

## *Introduction*

La mise en forme des métaux par déformation plastique constitue une technique pour laquelle l'expérience et le savoir-faire ont très largement devancé la compréhension et la qualification des phénomènes mis en jeu. Le double apport résultant d'une meilleure connaissance des lois de comportement plastique d'une part, et du développement considérable des possibilités de calcul sur ordinateurs d'autre part, permet d'espérer une utilisation plus rationnelle des matériaux conduisant en particulier à un abaissement des coûts de production et une diminution du poids des structures.

La tâche est toutefois considérable, dans la mesure où il convient, dans le cas le plus général, d'incorporer dans un code de calcul des lois de comportement issues d'une caractérisation expérimentale rigoureuse et conforme à une formulation de l'élasto-plasticité des phénomènes physiques de déformation et de rupture, tout en maîtrisant des problèmes plus spécifiquement numériques.

Dans le cas particulier de l'emboutissage, ou de pliage des tôles, différents phénomènes limitent la capacité de mise en forme : *déflexions des surfaces* correspondant à des flambements localisés dans des zones comprimées ; *bandes de cisaillement* dans des zones tendues ; le phénomène grave que l'on rencontre dans ce cas est celui de la *striction*, qui consiste en une localisation de la déformation dans certaines zones de la pièce, conduisant inévitablement à la rupture.

A l'intérieur de ce cadre général, et afin de choisir la loi de comportement plastique qui décrit le mieux l'érouissage dans un domaine étendu de déformation, l'objectif que nous nous sommes fixé consiste à effectuer des essais de traction conventionnelle à deux vitesses de déformation et différentes températures. Ces lois de comportement seront en particulier utilisées dans une modélisation de la striction diffuse (propagée).

Le présent travail est divisé par commodité en trois parties.

Le premier chapitre concerne la recherche bibliographique du comportement elasto-plastique sous sollicitation uniaxiale.

Dans Le deuxième chapitre, on développe, le choix du formalisme phénoménologique, permettant la modélisation de la déformation plastique.

Le troisième chapitre est consacré à la caractérisation du comportement des matériaux par essai de traction. L'étude expérimentale est effectuée sur des éprouvettes en acier inoxydable, pour lequel l'adoucissement thermique est susceptible de modifier très nettement les caractéristiques de ductilité.

on trouve aussi dans ce chapitre l'analyse des résultats basée sur une approche phénoménologique faisant appel à un modèle rhéologique de HART, susceptible de décrire la loi de comportement plastique à une variable interne de ces types de matériaux. La confrontation entre prévisions et résultats expérimentaux s'appuie sur des reconstitutions de courbes de traction conventionnelles.



## ***CHAPITRE I :***

### ***ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE***

« Lorsqu'un théoricien trouve un résultat nouveau personne n'y croît, sauf lui !  
Lorsqu'un expérimentateur trouve un résultat nouveau tout le monde y croît, sauf  
lui ! »

## ***ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE***

### ***1 – 1 INTRODUCTION***

Un métal soumis à une contrainte extérieure se déforme plastiquement quand cette contrainte atteint le seuil d'écoulement plastique. A la différence des déformations élastiques, la déformation plastique est non recouvrable. De plus ; « l'histoire de déformation » joue souvent un rôle important de sorte qu'il n'est pas possible de prévoir le comportement ultérieur à partir de la seule connaissance de l'état de déformation atteint.

Alors que le comportement élastique des matériaux est caractérisé par une réversibilité qui garantit (en l'absence d'endommagement) la conservation des

dimensions et des caractéristiques mécaniques de la pièce, la fabrication d'une pièce mécanique se réalise de façon quasi exclusive par une succession de transformations thermomécaniques irréversibles conduisant au produit finis, par exemple :

*Pièce de carrosserie : coulée continue de l'acier, laminage à chaud, laminage à froid, découpage du flan, emboutissage.*

*Bielle : coulée d'un lingot, tronçonnage, forgeage, usinage.*

La fabrication des pièces mécaniques fait donc appel à des transformations irréversibles qui sont possibles grâce au comportement plastique des matériaux. La déformation plastique permanente, traduit le caractère irréversible du comportement, avec une *dissipation intrinsèque* et une *dissipation thermique*. L'irréversibilité se traduit aussi par le fait que la limite élastique augmente avec la déformation plastique (*écrouissage du matériau*).

L'étude du comportement plastique des métaux peut être abordée selon deux grands types d'approche :

- une approche microscopique s'intéressant aux mécanismes de la déformation plastique en termes de mouvements des dislocations aux échelles atomique et cristalline ou moléculaire ;
- une approche phénoménologique décrivant le comportement plastique en faisant appel plus ou moins explicitement à un modèle rhéologique.

Récemment ; un effort particulier a été porté sur la recherche de lois de comportement susceptibles de décrire des histoires de déformation comportant des modifications des conditions d'essai. De telles approches sont largement phénoménologiques, c'est-à-dire qu'elles formulent le comportement plastique du matériau en faisant intervenir des variables macroscopiques, et se basant en général sur un modèle schématisant les mécanismes de la déformation.

Le comportement déformable des matériaux a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Nous rappelons dans ce chapitre les principaux aspects physiques de l'écoulement plastique, les essais classiques mis en œuvre pour caractériser le comportement plastique et les modélisations phénoménologiques récemment développées

## ***I-2 Aspects physiques de l'écoulement plastique des métaux***

Dans les métaux polycristallins, la déformation plastique résulte globalement des processus actifs à l'intérieur des grains, et des glissements aux joints des grains. D'un point de vue microscopique, la déformation plastique intragranulaire est due aux mouvements à grandes distances (par rapport à la distance interatomique) des défauts linéaires (*dislocations*) dans l'empilement atomique. La multiplication des dislocations a pour effet de créer des champs de contraintes internes, tels que la contrainte appliquée doit être augmentée pour poursuivre la déformation plastique.

Les modes de déformation plastique intragranulaire les plus importants sont le glissement et la montée. La vitesse de déformation plastique peut être reliée à la vitesse moyenne de déplacement des dislocations  $\bar{v}$  à l'aide de la formule d'OROWAN :

$$\dot{\epsilon} = \dots_m \cdot b \cdot \bar{v} \quad (\text{I-1})$$

où  $\dots_m$  est la densité des dislocations mobiles et  $b$  leur vecteur BURGERS. Au cours de la déformation plastique, la densité des dislocations augmente, ce qui accroît leur difficulté à se déplacer et conduit au phénomène d'*écrouissage*.

Une des approches physiques importantes visant à expliquer le processus d'écoulement plastique est à BASINSKI Z. (1957, 1959). Cet auteur a décomposé la contrainte appliquée en deux parties :

$$\sigma = \sigma_i + \sigma_{\text{eff}} \quad (\text{I-2})$$

$\tau_i$  est appelée contrainte interne et représente la somme en chaque point du matériau de toutes les contraintes à grande distance créées par les défauts (essentiellement les dislocations). Cette contrainte est le résultat des processus simultanés d'écrouissage et de restauration thermique (réarrangement et ruine des dislocations) ; son évolution est souvent décrite à l'aide de la relation d'OROWAN :

$$\frac{d\tau_i}{dV} = h - \frac{r}{\dot{v}} \quad (\text{I-3})$$

où  $h$  est le taux d'évolution de la contrainte interne en l'absence de restauration et  $r$  est la vitesse de restauration en l'absence de déformation.

$\tau_{\text{eff}}$  est appelée contrainte effective ; c'est elle qui, avec l'aide de l'activation thermique, permet le franchissement des obstacles au mouvement des dislocations.

Suivant la théorie des vitesses absolues de réaction, le franchissement thermiquement activé des obstacles conduit à une équation de la forme :

$$\dot{v} = \dot{v}(S, \tau_i, T) \quad (\text{I-4})$$

où  $S$  représente l'ensemble des paramètres nécessaires pour caractériser l'état microstructural.

L'équation (I-4) est en outre souvent remplacée par la loi empirique suivante :

$$\dot{v} = A \left( \frac{\tau - \tau_i}{\tau_d} \right)^M \quad (\text{I-5})$$

où  $\tau_d$  est la contrainte de drainage, qui représente la « hauteur » des obstacles à franchir ;  $\tau_d$  dépend de  $S$  et  $A$  dépend de  $T$  et  $S$ .

### **I-3 Essais classiques de caractérisation du comportement plastique**

De nombreux travaux expérimentaux ont été effectués pour étudier le comportement plastique des métaux dans des cas particuliers tels que la traction, le fluage (avec éventuellement changement de charge ou de température) et l'essai de relaxation de la charge. Nous exposons brièvement les principales caractéristiques de ces essais, ainsi que leur interprétation physique qualitative.

#### **I-3-1 Essais d'écroutissage en traction**

C'est l'essai le plus couramment utilisé. L'éprouvette est soumise à une déformation à vitesse constante ou éventuellement avec changement de vitesse ou de température en cours d'essai. La réponse est constituée par la variation de la contrainte en fonction de la déformation qui met en évidence le durcissement du matériau.

Dans ces essais la vitesse de déformation est imposée. (Cette affirmation constitue une approximation, du fait que l'allongement total représenté par le déplacement de la traverse, est décomposé en allongement élastique et en allongement plastique. L'allongement élastique incorpore les comportements du montage de traction : mâchoires, tiges de traction et cellule de mesure de la force). Une fois que la contrainte appliquée a dépassé la limite élastique, la courbe contrainte-déformation présente en général une concavité vers le bas, de nature grossièrement parabolique, ce qui se traduit par une réduction continue du taux d'écroutissage  $d/d$  quand la déformation progresse (Fig. I-1). La nature parabolique des courbes d'écroutissage peut être attribuée, d'abord au glissement multiple (variation de la distance interatomique d'équilibre dans le réseau d'empilement des atomes, sous l'action de la contrainte appliquée) qui commence à des déformations relativement faibles, mais surtout à l'action du glissement dévié qui réduit la contrainte nécessaire pour poursuivre la déformation à vitesse constante, et par conséquent réduit le taux d'écroutissage  $d/d$ .

A ces effets s'ajoutent ceux de la restauration dynamique qui réduisent la contrainte interne, de sorte que la contrainte appliquée peut éventuellement atteindre une valeur de saturation, et ceci de façon d'autant plus précoce que la température

d'essai est élevée. (La puissance consommée lors de la traction se décompose en trois termes : *puissance élastique*, récupérable par décharge ; *puissance bloquée*, associée à la dissipation intrinsèque ; *puissance dissipée en chaleur*, associée à la dissipation thermique).

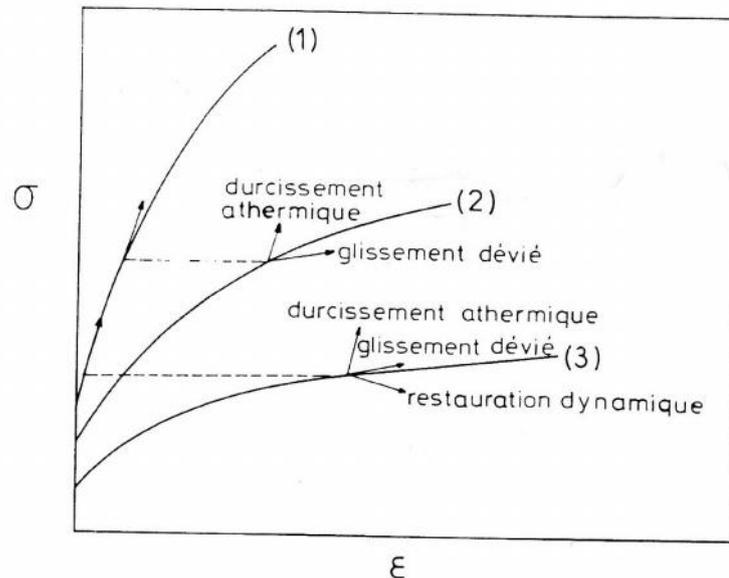


Fig. I-1 : Schéma de l'évolution de l'écrouissage en cours de traction ; les courbes (1), (2) et (3) correspondent respectivement à des comportements de basse, moyenne et haute température. (Issu de [1])

### I-3-2 Essai de fluage

L'éprouvette est soumise à un échelon de contrainte (apparente généralement) et l'on étudie comment varie la déformation en fonction du temps  $t$ , ce qui caractérise le durcissement et la viscosité du matériau.

Deux types d'essais de fluage peuvent être envisagés : celui où la charge est maintenue constante (fig. I-2) et celui où la contrainte est maintenue constante. Dans le premier cas la contrainte appliquée augmente au début de l'essai, cette augmentation est moins rapide que celle de la contrainte interne  $\sigma_i$ , ce qui entraîne une diminution de la vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}$  correspondant au stade de fluage primaire ; l'atteinte d'un minimum de  $\dot{\epsilon}$  correspond au stade de fluage secondaire ou stationnaire ; enfin,  $\dot{\epsilon}$  croît plus rapidement que  $\sigma_i$ , ce qui provoque une augmentation de  $\dot{\epsilon}$  (fluage tertiaire).

Dans le cas où la contrainte est constante, la courbe de fluage  $\epsilon = f(t)$  se situe au dessous de celle obtenue à charge constante. On notera que l'observation d'un stade de fluage tertiaire n'est pas prévue par le raisonnement précédent, une décroissance de  $\dot{\epsilon}_i$  étant peu vraisemblable. Toutefois, les effets d'endommagement, ainsi que le développement d'une striction le long de l'éprouvette peuvent conduire à un courbe  $\epsilon = f(t)$  de concavité dirigée vers le haut, et donnant l'apparence d'un stade de fluage tertiaire.

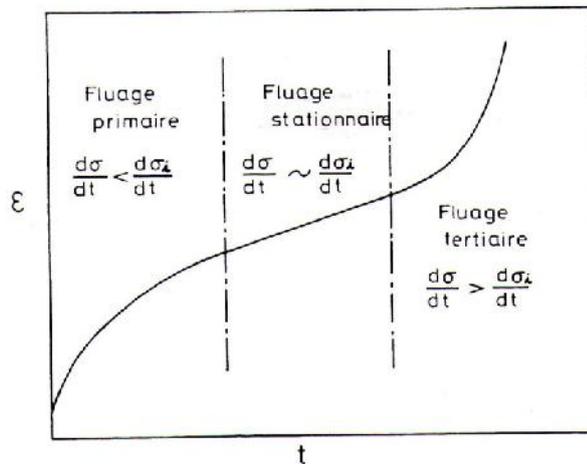


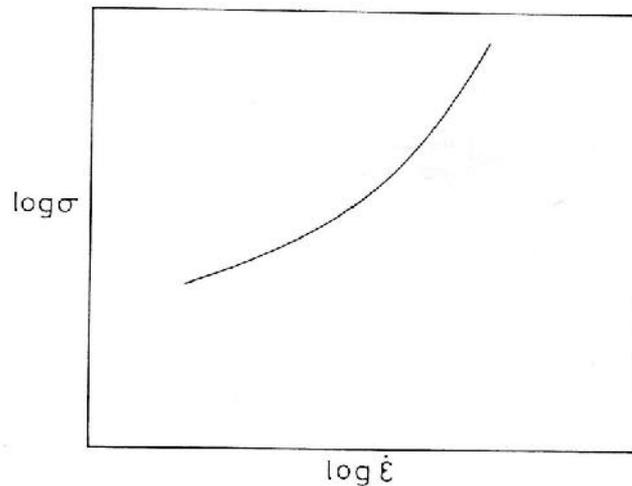
Fig. I-2 : Schéma d'une courbe de fluage à charge constante

(Issu de [1])

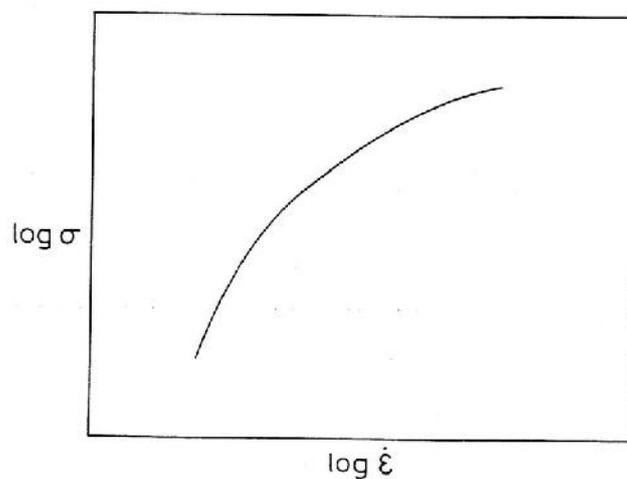
### ***I-3-3 Essai de relaxation de la charge***

Dans ces essais la traverse de la machine de traction est arrêtée au cours d'une traction. L'observation d'une décroissance de la charge en fonction du temps traduit une diminution simultanée de la contrainte et de la vitesse de déformation plastique. Les courbes de relaxation de la charge représentées dans les axes  $(\log \sigma, \log \dot{\epsilon})$  présentent une concavité vers le haut à basse température (fig. I-3 a). Dans ce cas, la restauration est négligeable et ne modifie donc pas  $\dot{\epsilon}_i$  au cours de la relaxation. Par contre, l'éprouvette subit une très faible déformation plastique entraînant une très légère augmentation de  $\dot{\epsilon}_i$ . il est néanmoins légitime de considérer que la relaxation se produit sans évolution appréciable de la microstructure, de sorte que l'équation de la courbe de relaxation peut être considérée comme représentant le comportement

plastique du matériau à état microstructural constant. Il est généralement possible d'ajuster cette courbe avec l'équation de BAILEY-OROWAN [1] (équation I-5), dans laquelle varient seulement  $\dot{\epsilon}$  et  $\dot{\nu}$ . Cet ajustement permet l'identification d'une contrainte interne  $\sigma_i$ , ce qui constitue un argument important en faveur de la proposition de BASINSKI S.[2] (équation I-2).



(a)



(b)

Fig. I- 3 : Schéma de courbes de relaxation

(a) à basse température, (b) à haute température.

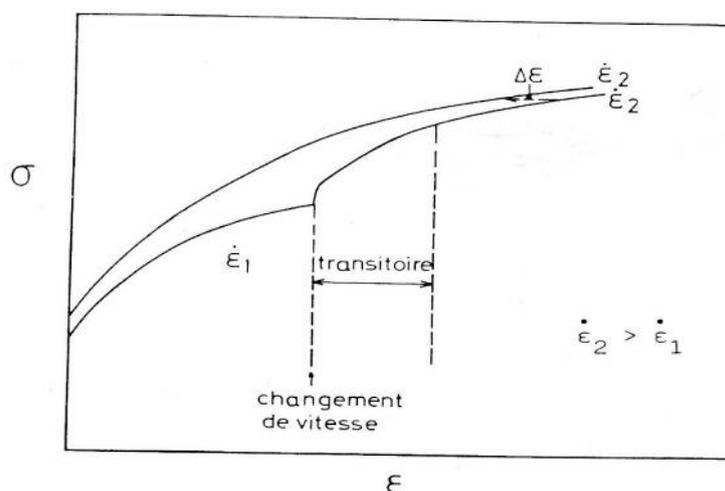
(Issu de [1])

A haute température la concavité des courbes de relaxation est au contraire dirigée vers le bas (fig. I-3 b). Certains auteurs GHOSH [3] considèrent que ce

comportement peut s'expliquer par une diminution de  $\sigma$  associée à la restauration. D'après [3] une concavité vers le haut peut aussi être observée à des valeurs de  $\dot{\epsilon}$  élevées, pour lesquelles les effets de la restauration sont négligeables. La courbe de relaxation ne serait donc pas associée à un état structural constant dans tout le domaine de la vitesse de déformation et de température. Par contre d'autres auteurs HART [4] considèrent que la concavité vers le bas des courbes de relaxation à haute température est une propriété intrinsèque du matériau et n'est pas attribuable seulement à une restauration éventuelle.

### ***I-3-4 Essai comportant une brusque modification des conditions expérimentales***

Si, au cours d'une traction, la vitesse de déformation passe brusquement de  $\dot{\epsilon}_1$  à  $\dot{\epsilon}_2$  (fig. I-4 a) il se produit une variation instantanée de la contrainte où la microstructure reste inchangée ; ensuite apparaît une transition au cours duquel le taux d'écroutissage  $d\sigma/d\epsilon$  est plus élevée que celui obtenu à la même contrainte pour une traction continue à vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_2$  (en supposant  $\dot{\epsilon}_2 > \dot{\epsilon}_1$ ) ; enfin, la courbe de traction devient parallèle à celle obtenue pour une traction continue à vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_2$ . Les deux courbes pouvant alors être superposées par translation le long de l'axe des déformations. Les résultats obtenus pour  $\dot{\epsilon}_2 < \dot{\epsilon}_1$  sont également illustrés sur la figure (fig. I-4 b). Enfin, l'effet d'une augmentation (respectivement diminution) de température est qualitativement le même que celui d'une diminution (respectivement augmentation) de vitesse de déformation.



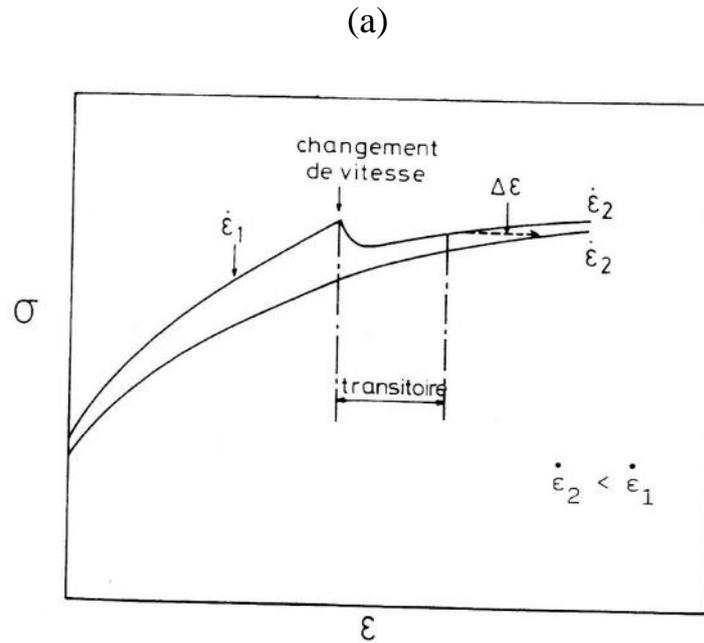


Fig. I-4 : Influence d'un changement de vitesse de déformation en cours de traction, représente la translation permettant de superposer les deux courbes à  $\dot{\epsilon}_2$  après le transitoire.

#### **1-4 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**

Beaucoup de travaux de recherches ont été effectués récemment pour caractériser le comportement plastique des matériaux sous sollicitation uniaxiale.

**1-4-1 MILIHA-TOUATI Med et FERRON G.**[5] ont étudiés le comportement plastique sous sollicitation uniaxiale, en utilisant différents essais : traction conventionnelle à deux vitesses de déformation, traction avec changement de vitesse ou de température, relaxation de la charge et traction après laminage. Le domaine de température exploré s'étend de 350°C à 800°C. L'analyse des résultats s'est appuyée

sur un formalisme à une variable interne et permet de formuler les conclusions générales suivantes :

(1) L'analyse des caractéristiques d'érouissage, effectuée à l'aide d'une loi de Voce [6] de la forme :  $\dot{\epsilon} = d/dt = (\sigma - \sigma_s)$ , ( $\sigma_s$  est une contrainte de saturation) a conduit à définir deux domaines :

- Un domaine des petites déformations ( $\epsilon < 0,1$ ), où la pente des taux d'érouissage  $\dot{\epsilon}/G$  en fonction de la  $\dot{\epsilon}/G$  augmente en valeur absolue quand T croît ou quand la vitesse de la déformation  $\dot{v}$  décroît ;
- Un domaine des grandes déformations ( $\epsilon > 0,1$ ), où  $\dot{\epsilon}/G$  est pratiquement constant entre 350°C et 700°C, puis augmente en valeur absolue quand T croît ou quand la vitesse de la déformation  $\dot{v}$  décroît pour T > 700°C.

(2) L'analyse des courbes de relaxation a permis de conclure que l'effet de la restauration est négligeable au cours de relaxations à basse et moyenne température (350°C et 700°C), mais ne l'est pas à 700°C.

(3) Enfin, les essais de traction après laminage montrent qu'à la température ambiante, le durcissement persiste en fait bien au-delà du domaine de déformation quasi-homogène en traction simple.

**1-4-2 ROBERT USCINOWICZ**[7], a étudié l'effet de la direction du laminage sur le processus de fluage sur un matériau bimétallique Al – Cu. La description du processus d'érouissage est effectuée à l'aide de la loi de Swift [8] :  $\sigma = K(\epsilon_0 + \epsilon)^n$  ( $\sigma$  la contrainte de Cauchy,  $K$  est le coefficient de résistance plastique,  $n$  l'exposant d'érouissage,  $\epsilon_0$  constante d'intégration,  $\epsilon$  la déformation élasto-plastique logarithmique).

L'analyse des résultats a permis de formuler les conclusions générales suivantes :

(1) Afin de déterminer les propriétés mécaniques de base, des essais de traction monotone uni-axiale ont été réalisés.

Au cours de ses essais, les échantillons bimétalliques Al-Cu, qui ont été découpés dans le sens longitudinal du laminage (RD) subissent un écrouissage plus rapidement avec l'augmentation de la déformation, que les échantillons correspondant découpés dans le sens transversal (TD).

La contrainte à la limite élastique pour les spécimens découpés dans la direction TD est plus élevée par rapport à la contrainte de la direction RD.

Il convient également de noter que la quantité d'énergie dissipée en matière de déformation plastique par unité de volume, de l'échantillon coupé dans la direction RD était presque deux fois plus petite que dans le cas d'un spécimen coupé dans la direction de TD.

(2) Sur la base des courbes de fluage obtenues, il peut être conclu que :

Les spécimens découpés dans la direction RD avaient un taux de fluage plus stable pour une contrainte  $\sigma < 120$  Mpa que ceux coupés dans la direction TD.

Pour les Contraintes plus élevées, le taux de fluage est plus grand dans la direction RD qu'en sens transversal.

(3) La relation entre la contrainte et le temps de rupture est décrite par une fonction exponentielle pour les échantillons coupés dans la direction RD, une diminution de  $t_R$  est observée avec une augmentation du temps. Dans le cas des échantillons découpés dans la direction transversale, les relations sont quasi-linéaires, et l'augmentation de la contrainte n'est pas significative avec l'augmentation du temps de rupture.

(4) Pour les spécimens coupés dans la direction longitudinale (RD) la valeur de l'allongement après rupture est sensible à une augmentation du rapport temps/contrainte. Dans le cas de spécimens coupés dans le sens transversal (TD) l'allongement à la rupture est indépendant du rapport temps/contrainte.

(5) Le taux de fluage dans les deux directions TD et RD est en bonne corrélation avec le rapport : temps de rupture/déformation de rupture. Cela montre que le temps

de rupture dans les essais de fluage à long terme est inversement Proportionnel à la fonction de la vitesse de fluage. Cette expression  $(\frac{t_R}{V_R} \cdot (V_{\min})^x = C)$  est utilisée dans le cas où la deuxième période de fluage est longue, et la troisième courte.

**1-4-3 P. DELOBELLE** [9], a étudié avec une approche microscopique le comportement et la modélisation viscoplastique des aciers austénitiques inoxydables sur une large plage de température (entre 20 et 700 °C), sous sollicitation uniaxiale et biaxiale monotone et cyclique de traction-torsion, en phase et hors phase d'austénite.

La synthèse des résultats expérimentaux a permis de formuler les conclusions générales suivantes :

Les phénomènes d'interaction entre fortes dislocations et configurations des défauts ponctuels est clairement montré et peut expliquer la sensibilité aux taux de déformation négative observée entre 200° et 550° C ;

Pour des charges cycliques, un écrouissage supplémentaire apparaît, qui est une fonction de la différence de phase entre les composantes de contrainte et les résultats de l'activation de systèmes de glissement secondaire.

Ce nouveau durcissement est une fonction fortement décroissante de la température. Au-dessus de 550 °C, et pour des intervalles de temps suffisamment longue, une précipitation intergranulaire de carbone apparaît et affecte le comportement de cet alliage thermomécaniquement.

**1-4-4 P. DELOBELLE, P. ROBINET and L. BOCHER**, [10], ont étudié expérimentalement et modélisé la viscoplasticité sous chargement cyclique uniaxiale et biaxiale d'un acier austénitique inoxydable avec une approche phénoménologique, utilisant le modèle *CHABOCHE & NOUAILHAS* [11] :

Pour mieux comprendre et modéliser le phénomène de la viscoplasticité cyclique uni et multidirectionnels, en particulier les effets des dislocations, un ensemble de base de données expérimentales a été obtenu pour un acier austénitique inoxydable, permettant l'établissement d'un modèle qui exprime la relation entre

les variables macroscopiques liées à l'écoulement (la contrainte, la vitesse de déformation plastique et la température) et les variables liées à l'état microstructural du matériau (densité de dislocation, contrainte interne), ainsi que des variables liées aux propriétés physiques ou mécaniques (énergie d'activation, module de cisaillement)

## *CONCLUSION*

Ce bref exposé de la revue bibliographique montre que la plus part des travaux sont actuellement conduits pour décrire les lois de comportement plastique des métaux en relation avec les mécanismes microstructuraux, et qui peuvent être appliquées dans un large domaine de conditions expérimentales. (Traction, fluage, sous sollicitation uniaxiale ou biaxiale avec chargement monotone ou cyclique).

Notre étude sera conduite dans le but d'obtenir une description du comportement plastique sous sollicitation uniaxiale, en utilisant différents essais : traction conventionnelle à deux vitesses de déformation, traction avec changement de température.



## ***CHAPITRE II***

### **CHOIX D'UN FORMALISME *PHENOMENOLOGIQUE***

« Un modèle devient une loi ... ou, sombre dans l'oubli ! »

## *Introduction*

La mécanique et la thermodynamique des milieux continus constituent les outils théoriques de base de la formulation des phénomènes physiques de déformation et de rupture. Pour des raisons fondamentales et pratiques, on modélise séparément chaque grande classe de phénomènes. Discerner d'un point de vue qualitatif et identifier le type de comportement, tel est l'objet de notre présent travail. La méthode phénoménologique utilisée repose sur l'observation des résultats expérimentaux, par conséquent les types d'essais, les machines, les appareils, et les techniques de mesure moderne qui sont utilisés jouent un rôle important dans l'identification et la classification rhéologique des solides réels.

Grâce au progrès de l'électronique, des asservissements, des mesures digitales, des microprocesseurs, les laboratoires de caractérisation des matériaux subissent une véritable mutation. De l'ère des mesures approximatives de quelques grandeurs on passe à l'ère de la mesure de l'évolution précise de toute variable mathématiquement bien définie. L'identification de modèles complexes devient possible mais elle nécessite des méthodes numériques de processus non linéaires qui restent encore inaccessible au non spécialistes.

La classification schématique qui en résulte permet d'associer à priori à chaque matériau une théorie des seuls phénomènes prépondérants, et ce dans un domaine limité des variables. Outre l'intérêt fondamental, ceci permet de guider le choix des

matériaux au niveau de la conception et de simplifier l'estimation de la résistance en service au niveau des calculs de structure.

## ***II-1 Méthode phénoménologique globale***

On distingue généralement trois grandes méthodes de formulation des lois de comportement des matériaux :

- l'approche microscopique qui tente de modéliser les mécanismes de déformation et de rupture aux échelles atomique et cristalline ou moléculaire, le comportement macroscopique étant le résultat d'une intégration ou d'une moyenne des variables microscopique à l'échelle de l'élément de volume de la mécanique ;
- l'approche thermodynamique qui introduit un milieu continu homogénéisé équivalent au milieu réel et qui représente les phénomènes physiques microscopiques par des «variables internes» macroscopiques ;
- l'approche fonctionnelle qui conduit à des lois héréditaires de type intégral faisant intervenir des fonctions caractéristiques des matériaux, exprimées elles aussi en termes de variables macroscopiques ;

Aucune de ces trois approches ne permet des identifications directes : les variables microscopiques (densité de dislocations, densité de cavités, texture, ...) sont difficilement mesurables, et difficilement utilisables dans les calculs pratiques, les potentiels thermodynamiques sont pratiquement inaccessibles aux mesures ; les variables internes, par définition, ne sont pas directement mesurables ; les fonctions héréditaires nécessitent la connaissance de toute l'histoire des variables observables ce qui pose des problèmes tant d'ordre théorique que d'ordre expérimental.

La méthode phénoménologique globale consiste à étudier l'élément volume de matière au travers des relations de cause à effet qui existent et les variables

physiquement accessibles constituant les entrées et les sorties du processus étudié. On détermine ainsi les réponses du matériau à des entrées spécifiques. Ces réponses sont suffisantes pour caractériser qualitativement les matériaux mais elles ne constituent pas (sauf pour les phénomènes linéaires) des lois de comportement.

Par élément de volume au sens de la mécanique physique des solides, il faut entendre un volume suffisamment important par rapport aux hétérogénéités de la matière et suffisamment petit pour que les dérivées partielles des équations de la mécanique des milieux continus aient un sens.

Les variables physiquement accessibles de l'élément de volume sont celles que l'on peut déduire simplement des 4 grandeurs mesurables classiques de la mécanique : déplacements, force, temps, température.

- *Les déformations et leurs vitesses*

- déformation totale tridimensionnelle  $v$  ou unidimensionnelle avec son expression en grandes déformations  $v_v = \ln(1+v)$ .

- déformation élastique réversible  $v_e$

- déformation permanente  $v_p$

- *La contrainte tridimensionnelle ou unidimensionnelle avec son expression approchée en grandes déformation :  $\dagger_v = \dagger(1+v)$*

- *La température  $T$ .*

- *Le temps  $t$  ou le nombre de cycles à rupture  $t_R$  ou  $N_R$*

La classification qui découle de la méthode phénoménologique globale ne doit pas être considérée comme intrinsèque ; il s'agit seulement de repères de caractéristiques d'ensemble. Le comportement d'un matériau donné ne peut être représenté par un modèle schématique qu'en fonction de l'utilisation souhaitée et de la précision désirée.

Tel acier à température ambiante pourra être considéré comme :

- élastique linéaire pour un calcul de déformation d'une structure,
- viscoélastique pour un problème d'amortissement de vibrations,
- rigide parfaitement plastique pour un calcul de charges limites,
- élastoplastique écrouissable pour un calcul précis de déformations permanentes,
- élastoviscoplastique pour les problèmes de relaxation des contraintes,
- endommageable par ductilité pour un calcul de limite de mise en forme,
- endommageable par fatigue pour un calcul de durée de vie,
- etc. ...

## ***II-2 Modélisation de la déformation plastique***

On peut d'ores et déjà noter que les essais classiques de caractérisation précédemment décrit, au-delà des résultats empiriques qu'ils fournissent, permettent de tester la nature des phénomènes mis en jeu. Au cours de ces dernières années, de nombreux travaux se sont fixés comme objectif la détermination de relations entre les variables macroscopiques liées à l'écoulement, comme la contrainte  $\sigma$ , la vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}$  et la température  $T$  et des variables liées à l'état microscopique du matériau, comme par exemple la densité de dislocations ou la contrainte interne, ainsi que des variables liées aux propriétés physiques ou mécaniques, comme l'énergie d'activation, le module de cisaillement... etc. La relation de proportionnalité entre la contrainte et la racine carrée de la densité de dislocations  $\rho$  est donnée par :

$$\tau = r.G.b.\sqrt{\dots}$$

II-1

où  $G$  est le module de cisaillement et  $r$  une constante de l'ordre de l'unité, se trouve vérifiée dans un large domaine de conditions expérimentales (MECKING et KOCKS [12]).

Alors que la plus part des études portent sur la modélisation du comportement observé dans des conditions expérimentales bien définies (traction, fluage, relaxation, ...), un effort particulier a été porté au cours des dernières années sur la recherche de lois s'appliquant dans un large domaine de conditions expérimentales. Les modèles proposés par HART [13] et par KOCKS et coll. [14], sont maintenant très utilisés.

### ***II-2-1 Modèle de HART***

Les travaux de HART ont pour objet de prendre en charge le fait que l'écoulement plastique, à un instant donné, dépend de l'histoire de déformation antérieurement subie par le matériau ; il est donc important de rechercher une ou plusieurs variables susceptibles de représenter cette histoire, de sorte que la réponse du matériau à une sollicitation ultérieure arbitraire puisse être prévue.

Le modèle initial de Hart se limite à des histoires de déformation isothermes. Les mécanismes conduisant à des processus de déformation non homogènes ou discontinus sont exclus.

HART a défini une variable caractéristique de l'état mécanique :  $y$  appelée « dureté » (ce terme n'ayant pas ici le sens habituel qui lui est donné) ; l'équation d'état mécanique, pour une valeur courante de  $y$ , s'écrit :

$$\tau = \tau(y, \dot{\nu})$$

II-2

est une contrainte interne,  $\dot{\nu}$  est la vitesse de déformation

L'existence d'une telle équation à une seule variable interne est en fait associée au postulat selon lequel une histoire de déformation isotherme quelconque peut être décrite de façon incrémentale sous la forme :

$$d \ln \tau = x dV + \hat{\tau} d \ln \dot{v} \quad \text{II-3}$$

Une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une équation d'état plastique est que  $x$  et  $\hat{\tau}$  soient fonctions seulement de  $\tau$  et de  $\dot{v}$ , l'équation (II-3) devient alors :

$$d \ln \tau = x(\tau, \dot{v}) dV + \hat{\tau}(\tau, \dot{v}) d \ln \dot{v} \quad \text{II-4}$$

$x$  est la loi d'écrouissage exprimée sous forme incrémentale,  $\hat{\tau}$  est la pente des courbes de « dureté »  $\tau$  dans les axes  $(\ln \tau, \ln \dot{v})$

Cette équation peut être intégrée pour toute histoire de déformation, une fois que les expressions  $x(\tau, \dot{v})$  et  $\hat{\tau}(\tau, \dot{v})$  ont été déterminées expérimentalement.

En plus des courbes de « dureté » constante, les courbes  $\tau = \text{constante}$  peuvent être représentées dans les axes  $(\log \tau, \log \dot{v})$ , en particulier la courbe  $\tau = 1$  correspondant au point de force maximum en traction.

Il existe beaucoup de choix possibles (et équivalents) pour donner à la variable d'état  $\tau$  une valeur explicite. Un choix analytiquement commode mais sans signification physique, consiste à prendre pour  $\tau$  la vitesse de déformation  $\dot{v}$  correspondant à l'intersection de la droite de dureté constante et de la droite  $\tau = 1$  (figure II-1). L'équation de la droite  $\tau = 1$  étant donnée par :

$$\tau_1 = r \dot{v} \quad \text{II-5}$$

où  $\sigma$  est une constante à température fixée, l'équation de la droite de « dureté »  $\sigma$  s'écrit :

$$\tau = r y^{\mu - \nu} \dot{\epsilon}^{\nu}$$

II-6

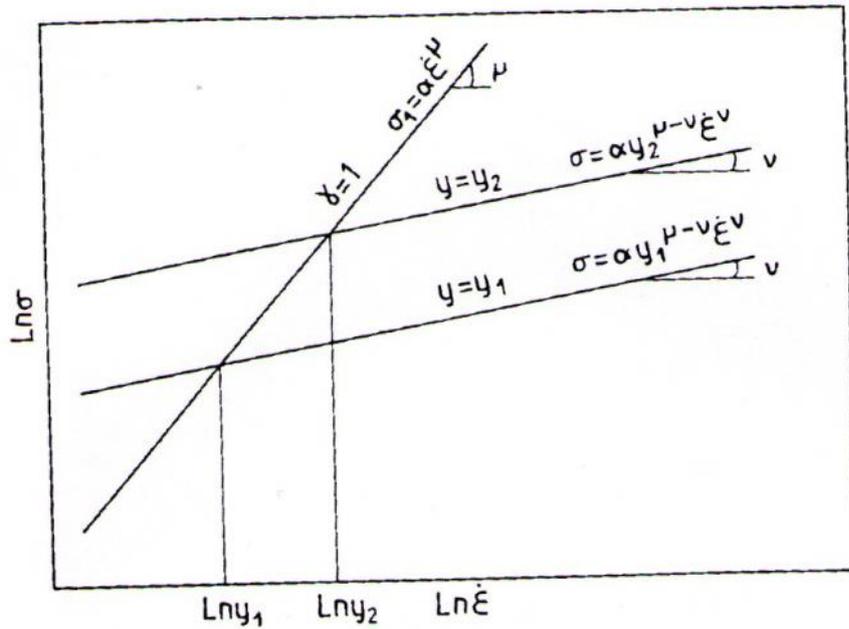


Figure II-1 : Schématisation des courbes de « dureté »  $y$  constante et de la courbe  $\sigma = 1$  dans les axes  $(\ln \tau, \ln \dot{\epsilon})$

Par définition de  $\sigma$  et en utilisant l'équation (II-6), on trouve :

$$\sigma = (\mu - \nu) \left( \frac{\partial \ln y}{\partial \ln \dot{\epsilon}} \right) \dot{\epsilon}^{\nu} \tag{II-7}$$

En fait, la dérivée partielle de (II-7) peut être remplacée par une dérivée totale :

$$\sigma = (\mu - \nu) \left( \frac{d \ln y}{d \ln \dot{\epsilon}} \right) \dot{\epsilon}^{\nu} \tag{II-8}$$

La courbe correspondant à  $dy = 0$  étant équivalente à celle où  $d = 0$  [ $(\partial \ln y / \partial \ln \dot{v})_v \equiv 0$ ]

HART a proposé de prendre pour  $\dot{\epsilon}$  et  $\dot{\gamma}$  les expressions suivantes :

$$\dot{\epsilon} = (\dot{\gamma}_1 / \dot{\gamma})^{1/n} \quad \text{II-9}$$

$$\dot{\gamma}_1 = \text{constante}$$

où  $n$  est une constante (coefficient d'écrouissage) et  $\dot{\gamma}_1$  est donnée par l'équation (II-5)

### **II-2-2 Modèle de KOCKS et de MECKING**

Une autre approche de la modélisation de la déformation plastique a été proposée par KOCKS. Cette approche est basée sur l'évolution de l'état structural vers un état stationnaire défini par un équilibre entre durcissement athermique (associé au stockage des dislocations) et un adoucissement dépendant de  $\dot{v}$  et de  $T$  (associé à la restauration dynamique). La loi d'écrouissage exprimée sous forme incrémentale est donnée par :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 (1 - \dot{\gamma} / \dot{\gamma}_s) \quad \text{II-10}$$

où  $\dot{\epsilon}_0 = (\partial \dot{\gamma} / \partial v)_{v,T}$  et  $\dot{\gamma}_s$  est contrainte de saturation.

Dans sa modélisation de la restauration dynamique, KOCKS a fait l'hypothèse selon laquelle la vitesse de restauration dynamique est proportionnelle à la densité d'obstacles aux mouvements des dislocations et à la déformation ; cette hypothèse se traduit par une expression de la forme :

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dx} = \dot{\epsilon}_0 (1 - \epsilon / \epsilon_s) \quad \text{II-11}$$

où  $\dot{\epsilon}_0$  est la composante de la cession due aux obstacles et  $d$  est l'incrément de cisaillement.

MECKING et KOCKS [12] ont généralisés le modèle initial de KOCKS ; en établissant une relation empirique donnant le taux d'écroissage sous la forme :

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dV} = \dot{\epsilon}_h - C\dot{\epsilon}^{1/n} \quad \text{II-12}$$

où  $n$  est l'exposant d'écroissage et  $C$  dépend de la structure à une température donnée. Le premier et le deuxième terme de l'équation (II-12) sont respectivement, associés à un écroissage athermique et à une restauration dynamique.

### **II-3 choix d'un formalisme phénoménologique**

#### **II-3-1 Introduction**

La présentation même de ces résultats expérimentaux est intimement liée à l'adoption d'un formalisme phénoménologique, dès lors que l'on s'efforce de dégager une compréhension des mécanismes mis en jeu à partir de l'étude de l'évolution des paramètres en fonction des conditions d'essai.

Nous allons choisir un formalisme à une variable interne, dans la ligne du modèle proposé par HART, le paramètre structural choisi est la densité de dislocation  $\rho$ . Nous exposons les implications d'un tel choix vis-à-vis de sa capacité à

décrire l'influence des conditions de sollicitations antérieures sur l'état actuel du matériau.

### II-3-2 Choix des lois d'érouissage

Une fois la courbe rationnelle obtenue, on peut tracer le diagramme de la contrainte en fonction de la déformation plastique,  $v_p = v - v_e = v - \frac{\dagger}{E}$

Différentes lois d'érouissage empiriques sont couramment utilisées pour décrire le comportement plastique à vitesse de déformation et température fixées. Parmi ces lois, nous avons choisi d'écarter celles qui ne respectent pas certaines prescriptions qui peuvent être déduites de l'examen du schéma donné dans la figure II-2. Ce schéma illustre d'une part l'existence d'une limite élastique non nulle, et d'autre part le fait qu'après une pré-déformation la nouvelle courbe de traction (dans les mêmes conditions d'essai) poursuit le même trajet. Il est donc logique que la forme analytique de la loi d'érouissage soit invariante par changement d'origine des déformations. En d'autres termes, la loi ( ) doit pouvoir être obtenue par intégration d'une équation du type :

$$n = \frac{d\dagger}{dv} = n(\dagger) \quad \text{II-13}$$

où  $x = \frac{d \ln \dagger}{dv} = x(\dagger) \quad \text{II-14}$

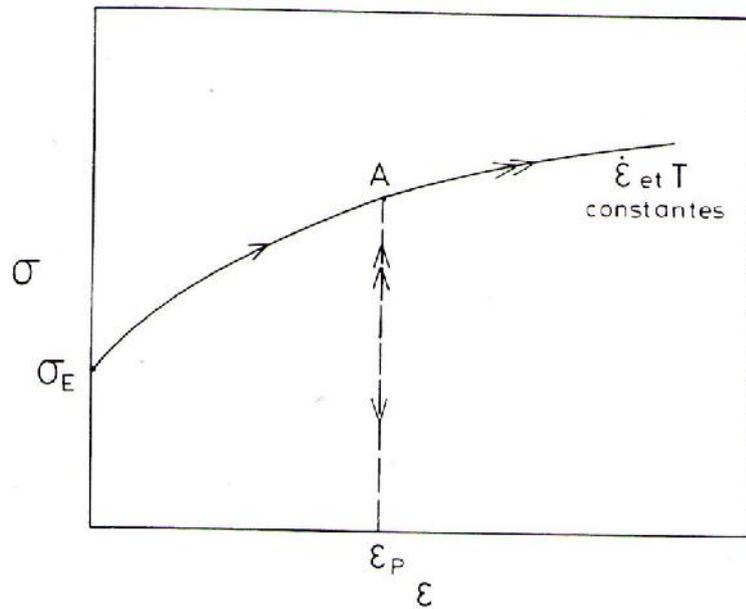
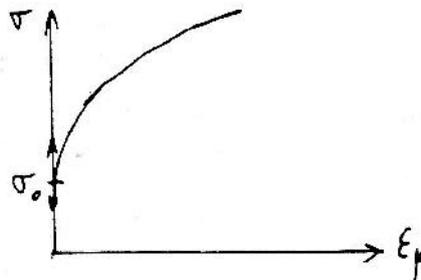


Figure II-2 : Schéma illustrant les caractéristiques générales du comportement plastique(existence d'une limite élastique  $\sigma_e$  non nulle, insensibilité du comportement plastique à une décharge élastique).

➤ **Loi de LUDWIK :**

$$\dagger = \dagger_0 + K v_p^n$$

II-15



K est le coefficient de résistance plastique, n l'exposant d'écrouissage,  $\dagger$  la contrainte de Cauchy,  $\dagger_0$  la limite élastique et  $v_p$  la déformation plastique.

K, n,  $\dagger_0$  sont des constantes.

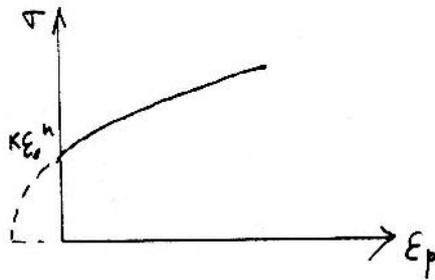
$$n = \frac{d\ddagger}{dV_p} = nKV_p^{n-1} = n \frac{\ddagger - \ddagger_0}{V_p} \quad \text{II-16}$$

$$x = \frac{n}{V_p} \cdot \frac{\ddagger - \ddagger_0}{\ddagger} \quad \text{II-17}$$

Remarque : cette loi n'est pas invariante par changement d'origine des déformations ;  $\ddagger_0$  qui représente la limite élastique et donc caractérise l'état initial, ne peut pas être éliminé lorsqu'on exprime cette loi d'érouissage sous forme incrémentale.

➤ **Loi de SWIFT**

$$\ddagger = K(v_0 - v_p)^n \quad \text{II-18}$$



$$n = \frac{d\ddagger}{dv_p} = nK(v_0 + v_p)^{n-1} \quad \text{II-19}$$

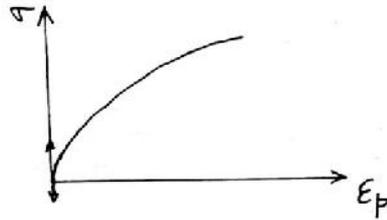
$$x = (\ddagger_1 / \ddagger)^{1/n} \quad \text{II-20}$$

Remarque :  $\ddagger_1 = Kn^n$  est la contrainte pour  $v_p = 1$ . Dans l'équation (II-18),  $v_0$  apparaît comme une constante d'intégration permettant de caractériser l'état initial (un changement d'origine sur  $v_p$  affecte seulement  $v_0$ ) ;  $\ddagger_0 = Kv_0^n$  représente la limite élastique.

➤ **Loi de HOLLOMON :**

$$\dagger = KV_p^n$$

II-21



$$n = \frac{d\dagger}{dV_p} = nKV_p^{n-1} = \frac{n\dagger}{V_p}$$

II-22

$$\chi = \frac{n}{V_p} \quad (\chi = 1 \text{ pour } V_p = n)$$

II-23

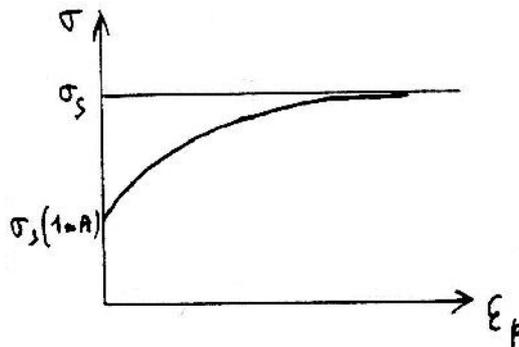
Remarque : ne prévoit pas l'existence d'une limite élastique. Elle n'est acceptable que si on la considère comme un cas particulier de la loi de SWIFT, s'appliquant à un matériau idéalement recuit.

➤ **Loi de voce**

$$\dagger = \dagger_s [1 - A \exp(-sV_p)]$$

II-24

où A et s sont des constantes (s < 0), l'asymptote définie par  $\dagger = \dagger_s$  est une contrainte de saturation.



$$\sigma = \frac{d\tau}{dV_p} = A s \exp(s V_p) = s(\tau - \tau_s) \quad \text{II-25}$$

$$\sigma = s \left[ 1 - \frac{\tau_s}{\tau} \right] \quad \text{II-26}$$

*Remarque* : A apparaît comme une constante d'intégration dans l'équation (II-24), et  $\tau_s(1 - A)$  représente la limite élastique.

**Conclusion** : parmi ces lois usuelles, deux ont été sélectionnées parce qu'elles respectent les prescriptions déduites de l'examen du schéma donné dans la figure II-2 (existence d'une limite élastique  $\sigma_E$  non nulle et insensibilité du comportement plastique à une décharge élastique) : la loi de SWIFT et la loi de VOCE.

#### **II-4 Relation entre contrainte-déformation à vitesse de déformation constante**

Le comportement viscoplastique des matériaux est souvent décrit à partir d'une extension des lois précédentes, sous la forme :

$$\tau(v, \dot{v}) = f(v) \dot{v}^m \quad \text{II-27}$$

où m est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

Nous détaillons ici une procédure plus générale, basé sur le modèle de HART. La formulation incrémentale donnée par l'équation (II-14) se prête à un tel traitement, cette équation apparait comme un cas particulier de l'équation (II-4 pour une histoire de déformation à  $\dot{\nu} = \text{constante}$ . Afin de comparer les relations contrainte-déformation pour différentes valeurs de  $\dot{\nu}$ , il convient toutefois de conserver l'élément majeur du modèle de HART, à savoir la définition de deux coefficients de sensibilité à la vitesse :  $\alpha = (\partial \ln \tau / \partial \ln \dot{\nu})_{X=\text{cste}}$  et  $\beta = (\partial \ln \tau / \partial \ln \dot{\nu})_{Y=\text{cste}}$

### II-4-1 Loi d'érouissage de SWIFT

Le coefficient d'érouissage est donné dans ce cas par l'équation(II-20). Son intégration conduit à :

$$\tau = \tau_1 \left[ \left( \tau_0 / \tau_1 \right)^{1/n} + (\dot{\nu} / n) \right]^n \quad \text{II-28}$$

où  $\tau_0$  est la valeur de  $\tau$  pour  $\dot{\nu} = 0$

La comparaison des équations (II-5) et (II-6) donne :

$$\tau_0 / \tau_1 = (y_0 / \dot{\nu})^{-\alpha} \quad \text{II-29}$$

Où  $y_0$  est la valeur initiale de la dureté.

La relation (II-28) s'écrit finalement, en utilisant (II-5) :

$$\tau = r \dot{\nu}^{-\alpha} \left[ \left( y_0 / \dot{\nu} \right)^{(-\alpha/n)} + (\dot{\nu} / n) \right]^n \quad \text{II-30}$$

On reconnaît dans cette expression une forme de la loi de SWIFT couramment utilisé,  $\tau = Kv^m(v_0 + v)^n$  elle n'est applicable que pour un essai effectué à  $\dot{v} =$  constante.

#### II-4-2 Loi d'érouissage de VOCE

Le coefficient d'érouissage est donné dans ce cas par l'équation (II-26). Son intégration conduit à :

$$\tau = \tau_s \{1 - [1 - (\tau_0 / \tau_s)] \exp(sv)\} \quad \text{II-31}$$

où  $\tau_0$  est la valeur de  $\tau$  pour  $v = 0$

Il convient ici de définir  $\mu$  par la pente de droite  $\ln \tau = 0$ , dont l'équation s'exprime donc sous forme :

$$\tau_s = r_s v^{-\mu} \quad \text{II-32}$$

où  $r_s$  est une constante.

La dureté  $y$  est de plus définie par la valeur de  $v$  correspondant à l'intersection de la droite de dureté  $y$  constante et de la droite  $\ln \tau = 0$ , ce qui conduit à :

$$\tau = \tau_s y^{-\epsilon} v^\epsilon \quad \text{II-33}$$

La comparaison des équations (II-32) et (II-33) donne :

$$\tau_0 / \tau_s = (y_0 / \dot{v})^{-\epsilon}$$

II-34

où  $y_0$  est la valeur initiale de la dureté.

La relation (II-31) s'écrit finalement, en utilisant (II-32) :

$$\tau = r \dot{v}^{-\mu} \left\{ 1 - \left[ 1 - (y_0 / \dot{v})^{-\epsilon} \right] \exp(sv) \right\}$$

II-35

Comme dans le cas de la relation (II-30), cette relation n'est applicable que pour un essai effectué à  $\dot{v} = \text{constante}$ .

$r$  : est une constante à température fixée ;

$\mu$  : mesure de la sensibilité à la vitesse de déformation, c'est la pente de la droite  $\ln \tau = 1$  ;

$s$  : mesure de la sensibilité à la vitesse de déformation, c'est la pente des courbes de dureté  $y = \text{constante}$  ;

$y_0$  : caractérise l'état initial.

# *Chapitre III*

## **CARACTERISATION EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT PLASTIQUE**

« L'expérience (d'un laboratoire), c'est l'ensemble des erreurs qu'on ne recommencera plus »

## ***Essais Expérimentaux***

### ***III- Conditions expérimentales***

#### ***III-1 Choix du type d'éprouvettes***

Les essais ont pour but de fournir des lois de comportement élastoplastique qui seront en particulier incorporées dans les calculs de la striction et de limite de formage s'appliquant aux tôles sollicité de façon biaxiale.

Ainsi nous avons choisi de prélever les éprouvettes dans des tôles d'acier inoxydable découpées dans le sens longitudinal du laminage d'épaisseur 1 mm.

D'obtenir une estimation précise et symétrique des inévitables variations de largeur ; les différences de section initiale ainsi mise en évidence seront incorporées dans les calculs visant à reconstituer les courbes de traction conventionnelles ;

Figure III-1: schéma d'une éprouvette de traction

### ***III-2 Choix du matériau et Conditions thermiques des essais***

L'acier inoxydable a été sélectionné en vue d'étudier l'importance d'une description réaliste des lois de comportement, en raison des effets thermiques qui modifient fortement la ductilité en traction simple.

Les éprouvettes ont subi un recuit de 30 mn à différente température, suivi d'une trempe à l'huile.

Nous avons choisi de réaliser les essais pour 6 températures comprises entre 400°C et 800°C en utilisant le four, le liquide de refroidissement utilisé était une huile qui permet en outre une régulation thermique d'excellente précision.

### ***III-3 Choix de l'essai de caractérisation du comportement plastique***

Parmi les essais classiques de caractérisation des lois de comportement, on a choisi l'essai de traction. Dans cet essai l'éprouvette est soumise une déformation à vitesse constante. La réponse est constituée par la variation de la contrainte en fonction de la déformation qui met en évidence le durcissement du matériau.

Ce type d'essai, dont le dépouillement est aisé, permet d'évaluer la capacité de mise en forme et la tenue à la sollicitation mécanique.

Pour étudier le comportement plastique du matériau, nous effectuerons des essais de traction avec une vitesse de déformation en cours d'essai.

#### ***III-3-1 Description de l'essai***

Cet essai permet une visualisation simple du comportement élastique puis élasto-plastique des matériaux, car la sollicitation appliquée est quasi uniforme le long de la partie utile de l'éprouvette, jusqu'au point de force maximum. Ainsi les résultats de

cet essai peuvent être immédiatement interprétés sous forme de loi de comportement en traction uniaxiale du matériau.

L'essai de traction fait apparaître plusieurs zones :

*Zone du domaine élastique* : le comportement est réversible et généralement linéaire ;

*Zone des déformations plastique réparties* : la déformation comporte une composante irréversible : en effet, si on impose un raccourcissement de l'éprouvette on observe un retour élastique et une déformation permanente (plastique). La déformation est élastoplastique, d'où l'idée de partition des déformations en partie élastique et plastique ( $v = v_e + v_p$ ) ;

*Zone des déformations localisées* : à partir de la charge maximale, l'éprouvette est l'objet d'une instabilité conduisant à la localisation de la déformation plastique sur une faible longueur de l'éprouvette (striction), conduisant ensuite à sa rupture.

La déformation plastique permanente, traduit le caractère irréversible du comportement, avec une *dissipation intrinsèque* et une *dissipation thermique*. L'irréversibilité se traduit aussi par le fait que la limite élastique augmente avec la déformation plastique (*écrouissage des métaux*).

### **III-3-2 Domaine de validité et d'emploi du comportement plastique**

La théorie de la plasticité est la théorie mathématique des déformations irréversibles indépendantes du temps.

Pour les métaux et alliages il s'agit essentiellement des mouvements de dislocations sans influence de phénomènes visqueux ni présence de décohésion endommageant la matière.

Ces deux limitations restreignent le domaine de validité :

- aux faibles températures d'emploi : une convention très schématique est de limiter la température au quart de la température absolue de fusion du matériau considéré ;
- aux sollicitations non endommageantes : pour les chargements monotones, les déformations doivent rester inférieures à environ la moitié ou les trois quarts de la déformation de rupture.

### ***III-4 Pilotage de la machine de traction***

La machine de traction utilisée pour tous nos essais est une machine universelle HOYTOM modèle DI-CP ayant une capacité de 100KN, composée d'un bâti et d'un pupitre de commande offrant diverses facilités de pilotage par micro-ordinateur.



Figure III-2 : Machine de traction  
HOYTOM modèle DI-CP

### ***III-5 Exploitation des résultats des essais de traction conventionnelle***

Les courbes d'érouissage caractérisant le comportement du matériau sont obtenues de la façon suivante :

- Enregistrement brut de l'essai de traction, établissant la relation Force-déplacement qui découle directement des expériences réalisées sur le matériau considéré dans l'état de référence de son utilisation, d'une manière générale, un matériau peut être caractérisé par : sa limite d'élasticité nominale :  $\dagger_e$ , sa résistance à la rupture (contrainte maximale) :  $\dagger_m$  et par son allongement à rupture : A%. (voir annexe 1)
- Reconstitution des courbes de traction conventionnelle, en divisant la force  $F$  par la section droite initiale  $S_0$  de l'éprouvette pour obtenir la contrainte conventionnelle  $\dagger_{conv}$  (contrainte nominale), et l'allongement de la partie utile  $l$  par la longueur de la base de mesure  $l_0$  pour obtenir la déformation conventionnelle  $v_{conv}$  ;
- Tracer des courbes rationnelles (vraies) des contraintes en fonction des déformations en tenant compte du fait que lors de la déformation plastique, l'aire de la section de l'éprouvette diminue ; la contrainte nominale est alors différente de la contrainte vraie.

La courbe de traction rationnelle s'obtient alors, en portant la contrainte de Cauchy (contrainte vraie) en fonction de la déformation logarithmique.

La déformation rationnelle ou vraie ou logarithmique est alors définie par l'expression :

$$v_v = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(1 + v_c)$$

et la contrainte vraie s'exprime par :

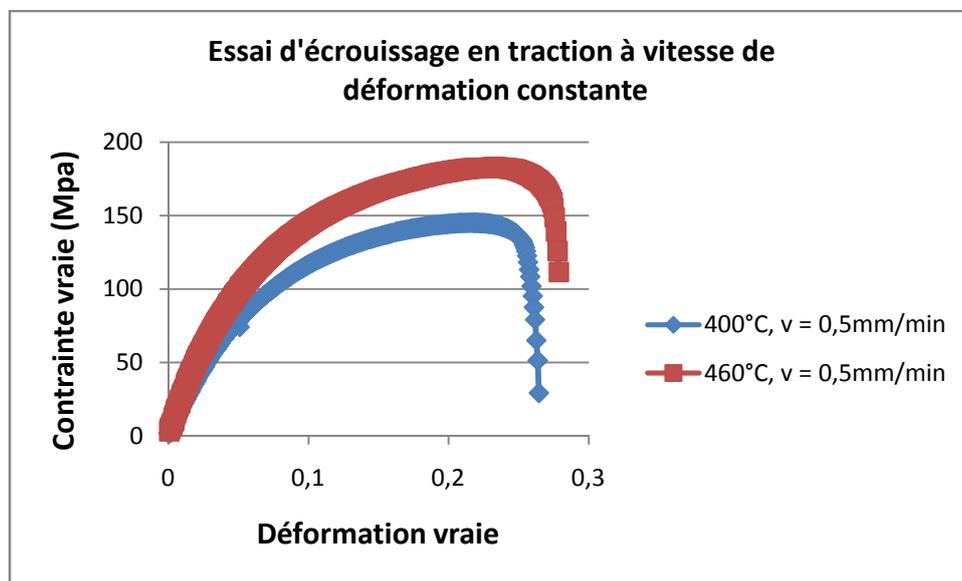
$$\dagger_v = \frac{F}{S_{act}} = \frac{F}{S_0} \frac{S_0}{S_{act}} = \dagger_c \left( \frac{l}{l_0} \right) = \dagger_c (1 + v_c)$$

où :  $S_{act}$  est la section droite actuelle de l'éprouvette

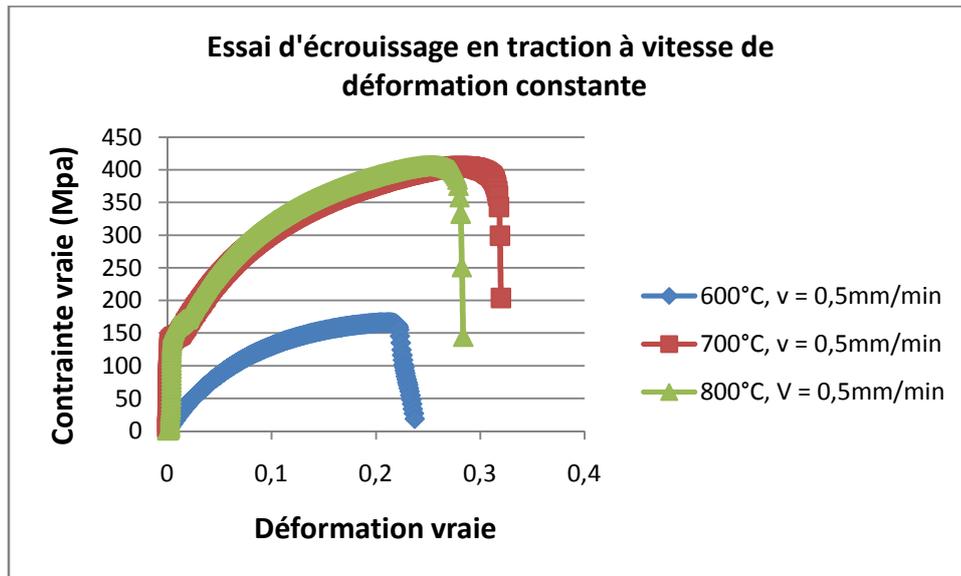
- Analyse des résultats des essais d'érouissage en traction effectués aux deux vitesses de déformations constantes,  $\dot{\epsilon} = 1,67.10^{-4} S^{-1}$  et  $\dot{\epsilon} = 1,67.10^{-2} S^{-1}$ , pour 6 températures comprises entre 400°C et 800°C.

### III-5-1 Influence de la température

Les figures (III-3 : a et b) et (III-4 : a et b) synthétisent l'influence de la température sur le comportement uniaxiale de l'acier inoxydable.



a



b

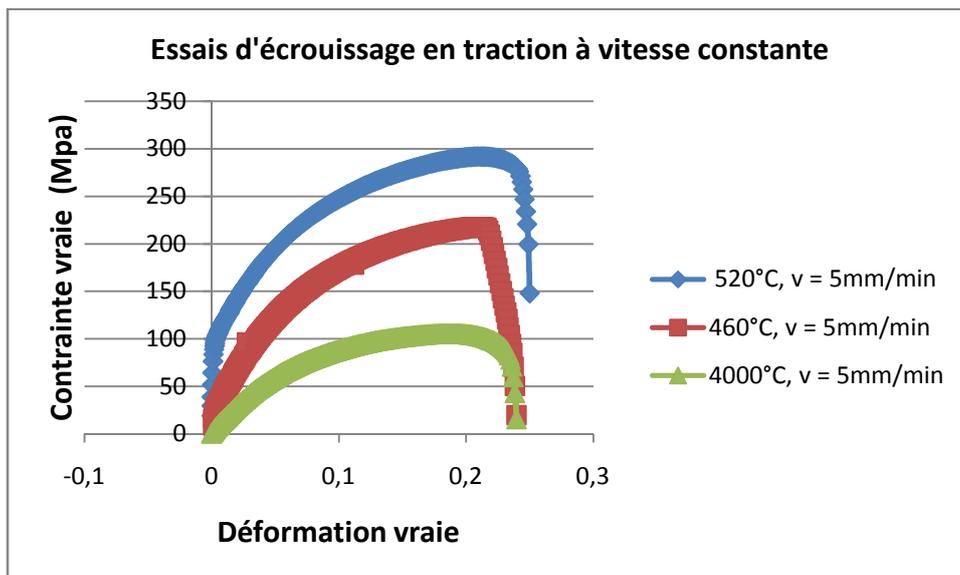
Figure III-3 : Influence de la température sur la contrainte

Essais d'érouissage effectué à vitesse de déformation constante :

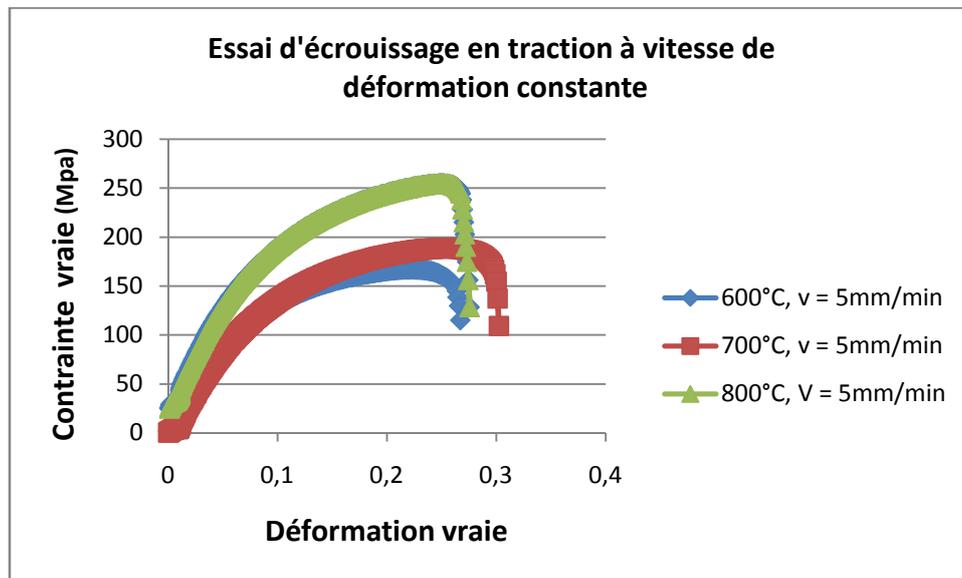
$$\dot{\epsilon} = 1,67 \cdot 10^{-4} S^{-1}$$

a- acier inoxydable, recuit d'adoucissement de 400°C à 460°C

b- acier inoxydable, recuit d'adoucissement de 600°C à 800°C



a



b

Figure III-4 : Influence de la température sur la contrainte

Essais d'érouissage effectué à vitesse de déformation constante :

$$\dot{\epsilon} = 1,67.10^{-2} S^{-1}$$

- a- acier inoxydable, recuit d'adoucissement de 400°C à 520°C
- b- acier inoxydable, recuit d'adoucissement de 600°C à 800°C

### *Discussion des résultats :*

L'analyse des résultats tirés des essais expérimentaux permet de constater que :

1. Inexistence de seuil de plasticité stricte sur l'ensemble des courbes d'érouissage obtenues à différentes températures et aux 2 vitesses de déformation, ce qui définit le comportement uniaxial des aciers inoxydables ;

2. La limite élastique est bien définie à haute température (700°C et 800°C pour  $\dot{\nu} = 1,67.10^{-4} S^{-1}$  ) mais difficile à observer pour  $\dot{\nu} = 1,67.10^{-2} S^{-1}$
3. La contrainte augmente avec l'évolution de la température, mais elle est relativement faible lorsque l'essai est effectué avec la grande vitesse de déformation qui permet de conclure que l'essai à grande vitesse de déformation provoque l'apparition prématuré de la striction.

### III-5-1-2 Influence de la vitesse de déformation

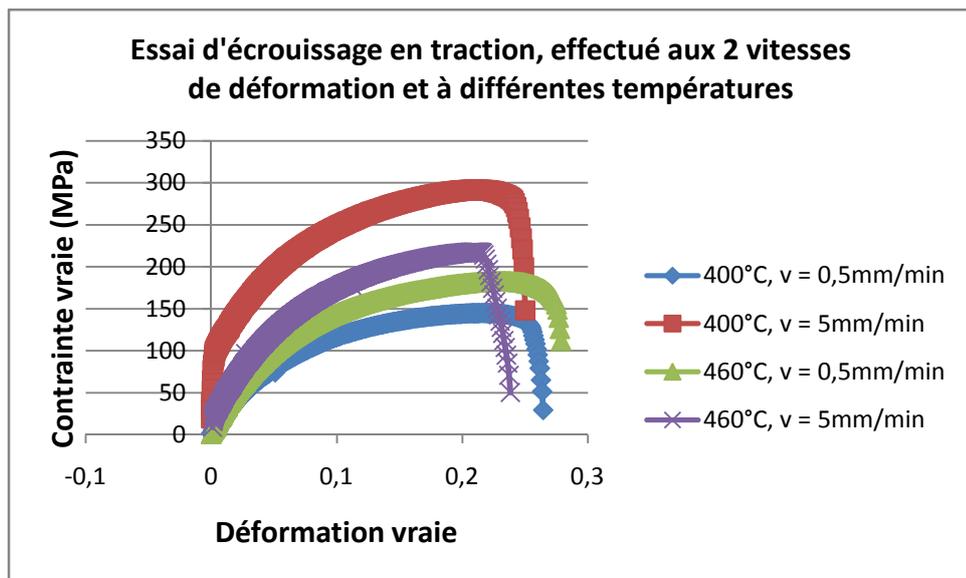


Figure III-5 : Influence de la vitesse de déformation sur la contrainte  
Acier inoxydable, recuit d'adoucissement à basses températures

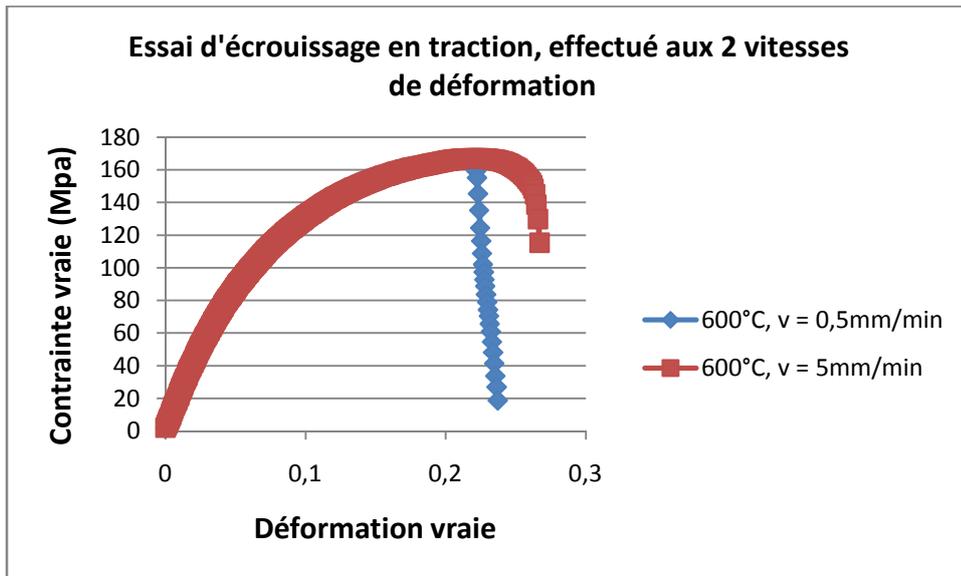


Figure III-6 : Influence de la vitesse de déformation sur la contrainte Acier inoxydable, recuit d'adoucissement à moyenne température

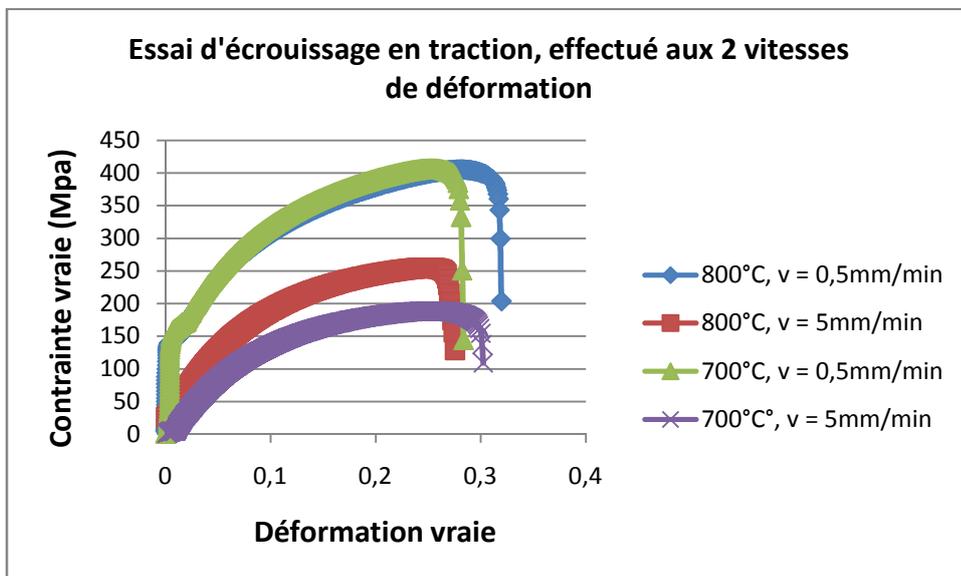


Figure III-7 : Influence de la vitesse de déformation sur la contrainte Acier inoxydable, recuit d'adoucissement à haute température

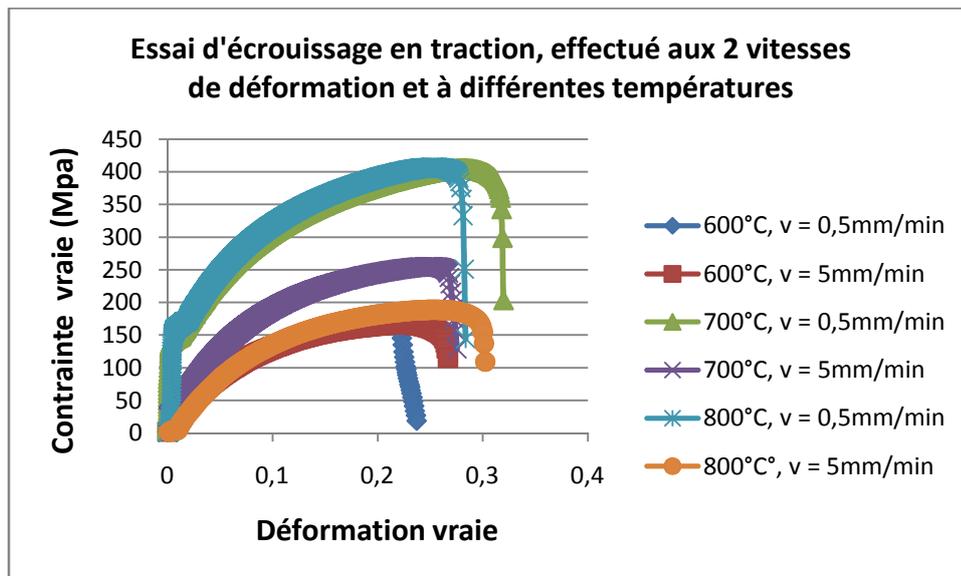


Figure III-8 : superposition des courbes

1. Les figures III-5 à III-8 montrent que plus la vitesse est élevée, plus la contrainte est faible ;

### ***III-6 Méthode originelle de dépouillement des essais de traction***

L'étude du comportement plastique des métaux peut-être abordée selon deux grands types d'approches :

Une approche microscopique s'intéressant aux mécanismes de la déformation plastique en termes de mouvements des dislocations

Une approche phénoménologique basé sur l'observation et faisant appel plus ou moins explicitement à un modèle rhéologique susceptible de décrire la loi de comportement de ce type de matériaux.

Pour choisir entre la loi d'écrouissage de Swift ou de Voce, il suffit de tracer la courbe de la contrainte en fonction de la déformation plastique.

La façon de procéder pour mesurer la déformation plastique est comme suit :

Le dépouillement des essais de traction s'appuiera sur une décomposition de l'allongement total (représenté par le déplacement de la traverse) en allongement élastique et en allongement plastique. L'allongement élastique incorpore les comportements du montage de traction (bâti, tiges de traction et cellule de mesure de la force) et de l'éprouvette, soit :

$$\Delta l = \Delta l_m + \Delta l_e + \Delta l_p \quad \text{III-1}$$

Les indices m, e et P désignent respectivement la machine, et les contributions élastique et plastique de l'éprouvette.

Le comportement élastique de la machine est caractérisé par une souplesse  $S_m$ , telle que  $l_m = S_m F = S_m A_0 \sigma_c$ , où F désigne la charge,  $A_0$  la section initiale et  $\sigma_c$  la contrainte de Cauchy. Cette souplesse peut être facilement déterminée à l'aide d'une éprouvette dont la déformation élastique est bien définie et dont le module de Young est connu.

La déformation plastique  $\epsilon_p$  de l'éprouvette étant définie sous forme logarithmique,  $l_p$  est donné par :

$$\Delta l_p = l_0 (e^{\epsilon_p} - 1) \quad \text{III-2}$$

où  $l_0$  désigne la longueur initiale de l'éprouvette.

Enfin, la déformation élastique  $\epsilon_e$  de l'éprouvette qui doit être exprimée sous forme logarithmique pour respecter l'additivité des déformations élastiques et plastique est utilisée sous forme conventionnelle dans la loi de Hooke :

$$\Delta l_e = \frac{l_p \epsilon_e}{E} \quad \text{III-3}$$

où  $l_p = l_0 + \Delta l_p$ , et  $\dagger$  est la contrainte définie dans la configuration déchargée (on considèrera qu'elle représente très sensiblement la contrainte de Cauchy en raison des faibles déformations élastiques).

Avec  $l_p = l_0 e^{v_p}$  et  $\dagger = \dagger_c e^{v_p}$  (cette dernière relation découlant de l'incompressibilité plastique), nous obtenons :

$$\Delta l_e = \frac{l_0 \dagger_c}{E} e^{2v_p} \quad \text{III-4}$$

La relation (III-1) peut être réécrite sous la forme d'une équation du second degré en  $e^{v_p}$  :

$$\frac{\dagger_c}{E} e^{2v_p} + e^{v_p} - \left( 1 + \frac{\Delta l}{l_0} - S_m \frac{A_0 \dagger_c}{l_0} \right) = 0 \quad \text{III-5}$$

Le déterminant est donné par :

$$\Delta = 1 - 4 \frac{\dagger_c}{E} \left[ -1 + \frac{S_m A_0 \dagger_c}{l_0} - \frac{\Delta l}{l_0} \right] > 0$$

Le couple ( $\sigma_p$ ,  $v_p$ ) est finalement obtenu à partir des valeurs expérimentales ( $\dagger_c$ ,  $\Delta l$ ) par les relations suivantes :

$$v_p = \ln \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\dagger_c}{E} \left( 1 + \frac{\Delta l}{l_0} - S_m \frac{A_0 \dagger_c}{l_0} \right)}}{2 \left( \frac{\dagger_c}{E} \right)} \right] \quad \text{III-6}$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_c e^{v_p} \quad \text{III-7}$$

La vitesse d'allongement plastique  $\dot{l}_p$  s'obtient par dérivation de l'équation (III-1). La vitesse de déformation plastique  $\dot{v}_p = \dot{l}_p / l_p$  est donnée par :

$$\dot{v}_p = \frac{\left( S_m A_0 + \frac{l_0}{E} e^{2v_p} \right) \dot{\epsilon}_c}{l_0 e^{v_p}} \quad \text{III-8}$$

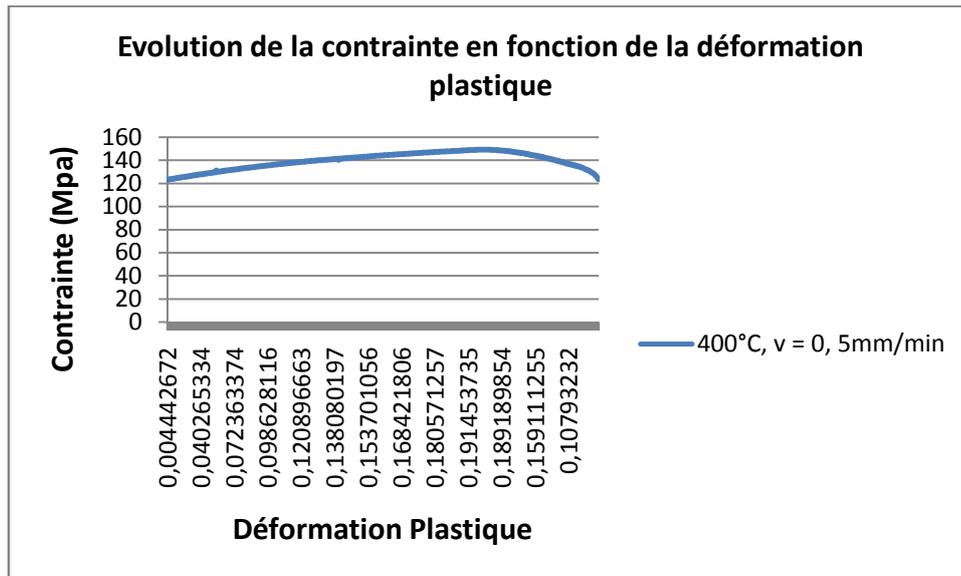
Dans tout le reste du texte  $\dot{v}$  désignera la vitesse de déformation plastique notée ci-dessus par  $\dot{v}_p$ . En dépit de l'évolution de  $\dot{v}$  mise en évidence au cours d'un essai de traction, les résultats des essais seront supposés correspondre à la vitesse de déformation nominale,  $\dot{v} = V / l_0$ ,  $V$  étant la vitesse imposée à la traverse et  $l_0$  la longueur initiale de l'éprouvette. Deux vitesses de traction seront ainsi utilisées au cours de cette étude :

$$\dot{v} = 1,67.10^{-4} S^{-1} \text{ et } \dot{v} = 1,67.10^{-2} S^{-1}$$

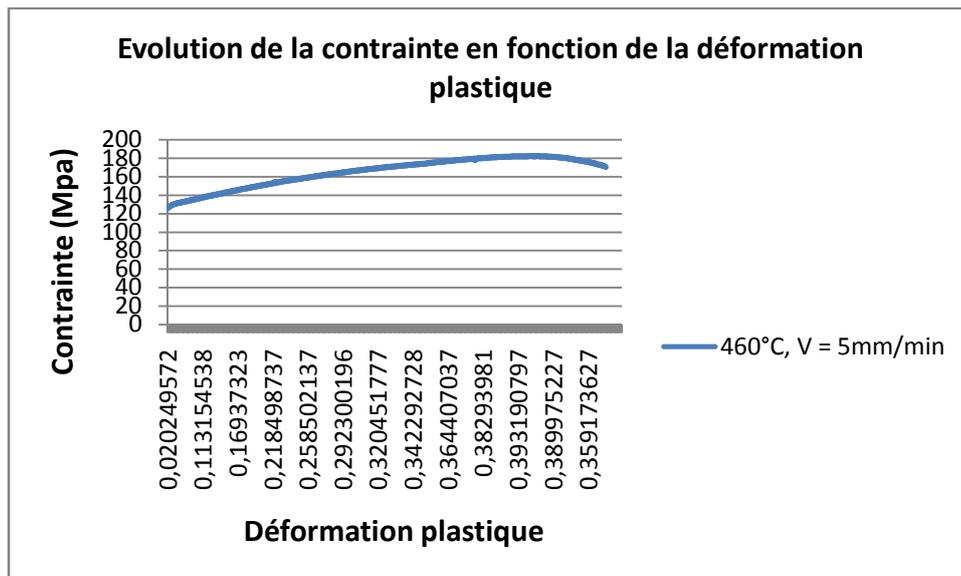
On notera également que le dépouillement des essais suppose que la déformation est homogène le long de l'éprouvette.

L'étude de l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation plastique, en faisant appel aux équations données par les relations III-6 et III-7, qui tiennent compte de la souplesse de la machine, nous a permis d'obtenir une description du comportement plastique sous sollicitation uniaxiale.

Les figures III-9, III-10 et III-11 récapitulent l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation plastique pour quelques températures.



a



b

Figure III-9 (a et b) : Comportement plastique de l'acier inoxydable à basse température

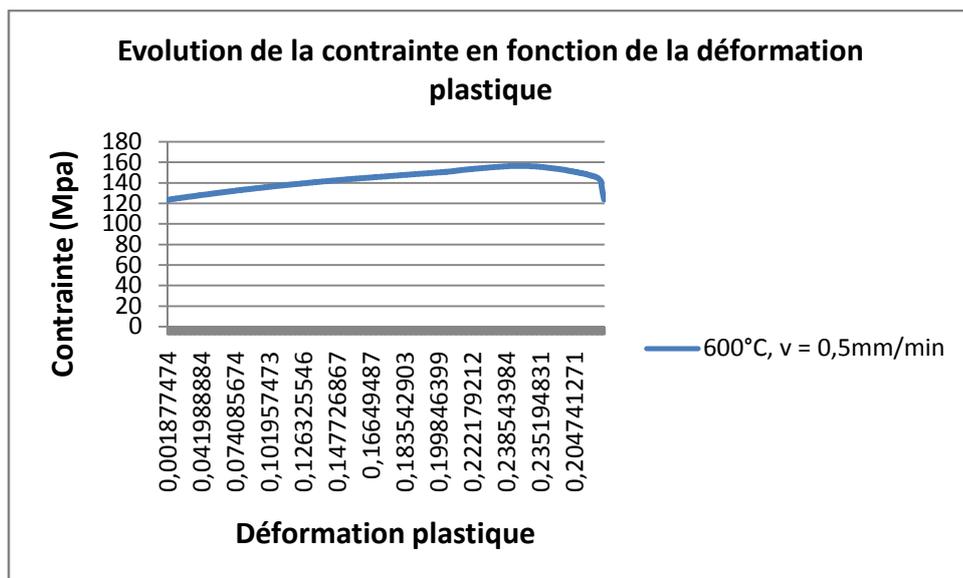
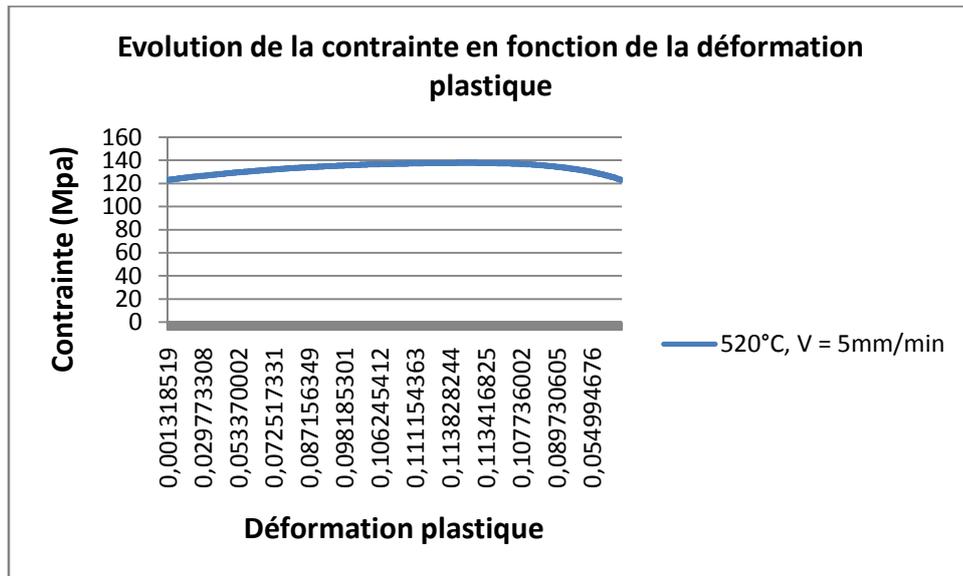
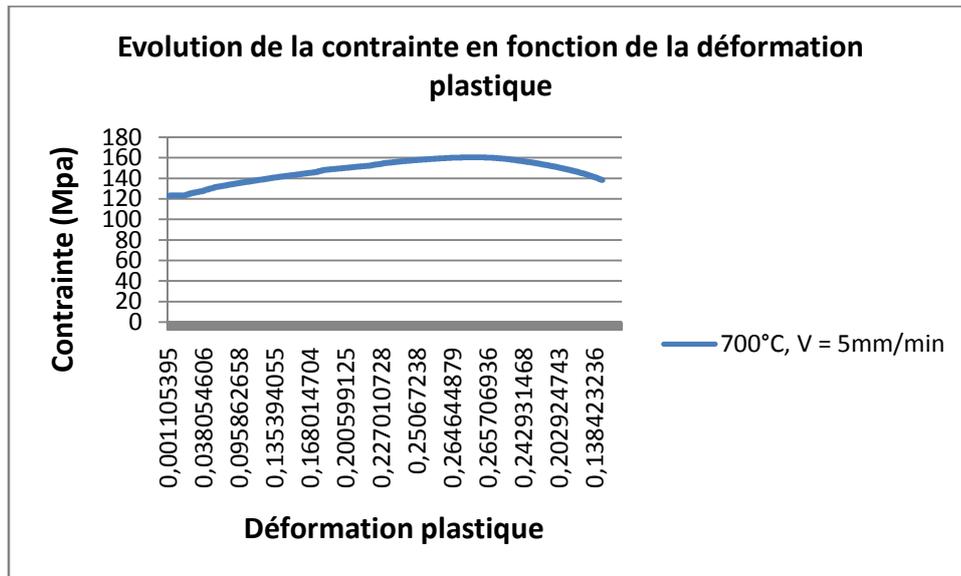
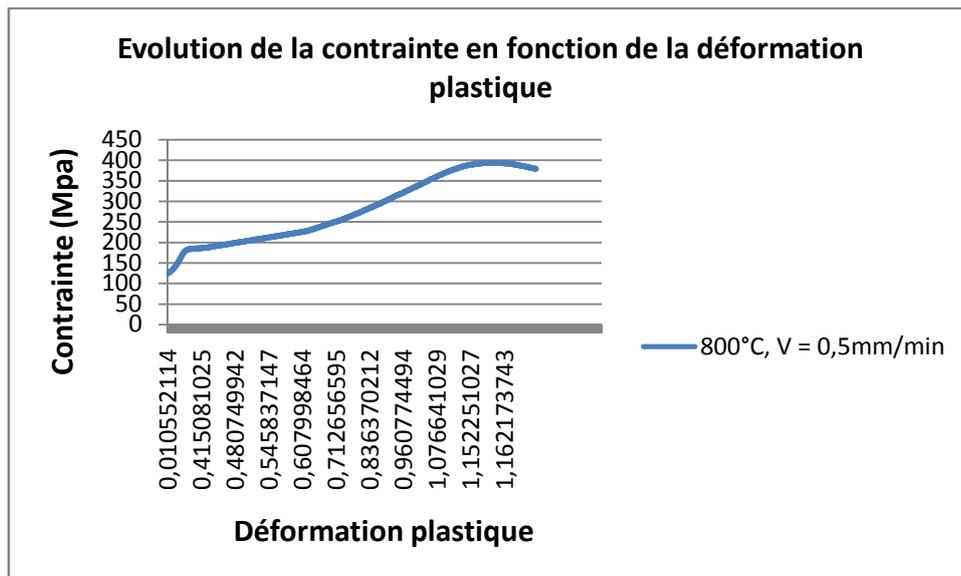


Figure III-10 (a et b) : Comportement plastique de l'acier inoxydable à moyenne température



a



b

Figure III-11 (a et b) : Comportement plastique de l'acier inoxydable à haute température

**III-6-1 Adoption d'une loi d'écroutissage**

L'observation de l'allure des courbes (figures III- 9, III-10 et III-11) illustrant l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation plastique, permet de confirmer l'existence d'une limite élastique  $\sigma_e$  non nulle et insensibilité du comportement plastique à une décharge élastique, en d'autre terme la loi ( ) doit pouvoir être obtenue par :

$$\sigma = \frac{d\tau}{dV} = \sigma(\tau)$$

où 
$$\chi = \frac{d \ln \tau}{dV} = \chi(\tau)$$

Compte tenu du choix effectué au chapitre II : nous disposons des lois d'écroutissage « type Swift » et « type Voce » pour décrire les courbes contraintes-déformation, la première s'appliquant lorsque l'écroutissage persiste en grandes déformations, tandis que la seconde implique que la contrainte tend vers une saturation.

### ***Discussion des résultats :***

Dans le domaine des basses et moyennes températures, l'étendue des déformations atteintes en traction simple n'est, en général, pas suffisante pour permettre de choisir entre les deux lois précédentes à cause de l'apparition précoce de la striction, donc, chacune de ces lois peut être utilisée indifféremment pour décrire l'écroutissage dans l'intervalle de déformation atteint en traction ;

Par contre, à hautes températures ( $> 700^\circ\text{C}$ ), l'écroutissage persiste en grandes déformations (figure III-11b), dans ce cas, l'utilisation d'une loi d'écroutissage du type-Swift s'impose.

Les courbes contrainte-déformation obtenus entre  $400^\circ\text{C}$  et  $700^\circ\text{C}$  sont donc ajustées suivant la loi de VOCE afin de permettre une comparaison entre les caractéristiques d'écroutissage aux basses moyennes et hautes températures.

La loi de Voce peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_s [1 - A \exp(-s \dot{\epsilon}_p)] \quad \text{III-9}$$

$\dot{\epsilon}_s$  est une contrainte de saturation (déterminée expérimentalement) ;

A apparaît comme une constante d'intégration ;

$s$  est la pente de la droite du taux d'érouissage ( $s < 0$ ) ;

$\dot{\epsilon}_s(1 - A)$  représente la limite élastique.

L'utilisation de la méthode des moindres carrés permet de calculer les valeurs de A et  $s$  pour les deux vitesses de déformation.

$$\text{ou} \quad \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_s} - 1 \right) = A s \exp(-s \dot{\epsilon}_p) = s (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_s) \quad \text{III-10}$$

### **III-6-2 Méthode d'identification**

La thermodynamique donne la formulation générale des modèles sans en préciser la forme analytique (sauf toutefois pour les comportements linéaires) ni les valeurs numériques. Les expériences fournissent, pour chaque matériau, les relations que doivent vérifier les modèles pour être représentatifs des phénomènes étudiés.

Il s'agit d'un travail qui n'obéit pas à des règles rigoureuses et où l'expérience et « l'art du faiseur de modèles » jouent un grand rôle pour évoluer entre la théorie et l'expérience.

Remarque : le phénomène de plasticité est fortement non linéaire, parmi les possibilités analytiques de traduire des non-linéarités on retient essentiellement :

- L'exponentielle ou le logarithme ;
- La fonction puissance.

Les raisons sont essentiellement de deux ordres :

- La facilité d'identification par la transformation logarithmique qui donne des relations linéaires ;
- Les commodités de résolution analytique des modèles pour étudier leurs propriétés.

### **III-6-3 Méthode numérique d'identification**

Connaissant un modèle mathématique par son expression analytique par exemple l'équation :  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_s [1 - A \exp(sV)]$  ou  $\dot{\epsilon} = r_s \dot{V} \left\{ 1 - \left[ 1 - (y_0 / \dot{V})^{-\epsilon} \right] \exp(sV) \right\}$  et un ensemble de résultats expérimentaux dans lesquels toutes les variables ont été excitées, il s'agit de calculer les coefficients inconnus caractéristiques de la fonction (A et  $\dot{\epsilon}_s$  pour l'équation III-9 et  $\mu$ ,  $\gamma_0$  et  $r_s$  pour l'équation III-16) qui conduisent à la meilleure représentation possible des expériences, en faisant appel à la méthode des moindres carrés linéaires.

Cette méthode consiste à minimiser l'écart entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées obtenues par un modèle : on aboutit généralement à un problème de minimisation d'une fonction écart  $h(c)$  qui dépend des coefficients caractéristiques inconnus.

### **III-6-4 Identification des paramètres A et $\dot{\epsilon}_s$ de la loi de plasticité de VOCE et**

#### ***Ajustement des courbes expérimentales***

La loi de plasticité de VOCE choisie, n'incorporant pas l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement du matériau est donnée par le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}_s (1 - A e^{sV}) = \dot{\epsilon}_s - A \dot{\epsilon}_s e^{sV}$$

$$\frac{t_s - t^*}{t_s} = Ae^{sv}$$

L'identification de cette expression, c'est-à-dire la détermination des paramètres inconnus (A et ) de ce modèle, s'effectue d'après les résultats des essais d'érouissage, à cet effet, on procède comme suit :

Linéarisation du modèle par transformation logarithmique

$$\ln\left(\frac{t_s - t^*}{t_s}\right) = \ln A + \ln(sv) \quad \text{III-12}$$

Ce modèle linéaire peut s'écrire sous l'expression suivante :

$$Y = C_0 + C_1 v_i$$

$$Y_i^E = \ln\left(\frac{t_s - t_i}{t_s}\right) \quad Y_i^C = \ln\left(\frac{t_s - t_i^*}{t_s}\right)$$

où :  $Y_i^E$  et  $Y_i^C$  représentent respectivement le modèle expérimentale et calculé ;

La méthode des moindres carrés linéaires s'applique lorsque la fonction écart choisie est la somme des carrés des écarts :

$$h(c) = \sum_{i=1}^n [Y_i^E - Y_i^C]^2 = \sum_{i=1}^n [Y_i^E - C_0 - C_1 v_i]^2 \quad \text{III-13}$$

Pour minimiser h, il suffit de dériver par rapport aux 2 inconnus :

$$\frac{\partial h}{\partial c_k} = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial h}{\partial C_0} = -2 \sum_{i=1}^n [Y_i^E - C_0 - C_1 v_i] = 0 \quad \text{III-14}$$

$$\frac{\partial h}{\partial C_1} = -2 \sum_{i=1}^n [Y_i^E - C_0 - C_1 v_i] v_i = 0 \quad \text{III-15}$$

Le système algébrique à résoudre est donc :

$$\begin{pmatrix} n \\ \sum_{i=1}^n v_i C_0 \\ \sum_{i=1}^n v_i^2 C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i^E \\ \sum_{i=1}^n v_i Y_i^E \end{pmatrix}$$

Les résultats du programme de calcul effectué sur MATLAB pour résoudre ce système d'équations algébriques linéaire, avec l'utilisation de la méthode d'élimination de Gauss sont donnés par le tableau (III-1).

$$C_0 = \ln A \Rightarrow A = e^{C_0}$$

T°C	400°C	400°C	460°C	460°C	520°C	600°C	600°C	700°C	700°C	800°C	800°C
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

	$\dot{V}_1$	$\dot{V}_2$	$\dot{V}_1$	$\dot{V}_2$	$\dot{V}_1$	$\dot{V}_1$	$\dot{V}_2$	$\dot{V}_1$	$\dot{V}_2$	$\dot{V}_1$	$\dot{V}_2$
A	1,1839	0,7385	0,991	0,9326	1,0151	1,0948	1,0323	0,7659	0,9423	0,7457	1,3406
-	19,7529	21,912	15,5139	17,1799	18,4665	33,9311	30,3115	13,509	55,5046	12,913	36,1814

Tableau III-1 : Paramètres A et de la loi de VOCE

Sur les figures (III-12, III-13et III-14) sont représentées respectivement les courbes obtenues à basses, moyennes et hautes températures correspondant à l'ajustement des courbes expérimentales suivant la loi de VOCE.

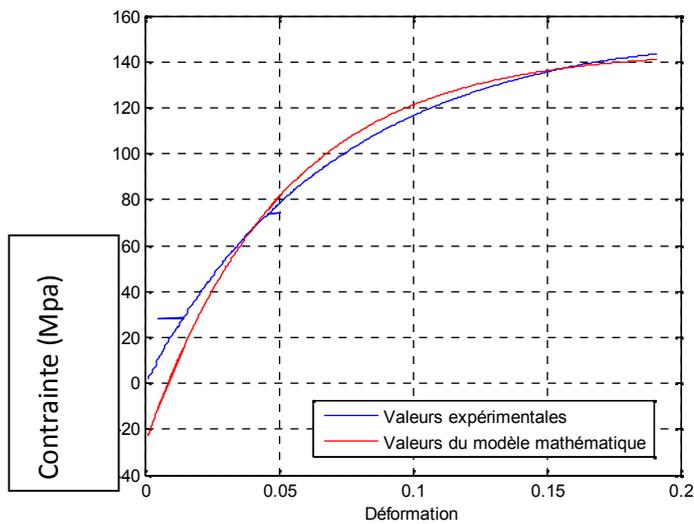


Figure III.12 :Identification des coefficients caractéristiques d'écrouissage

Température de 400°C,  $\dot{\nu} = 1,67.10^{-4} S^{-1}$

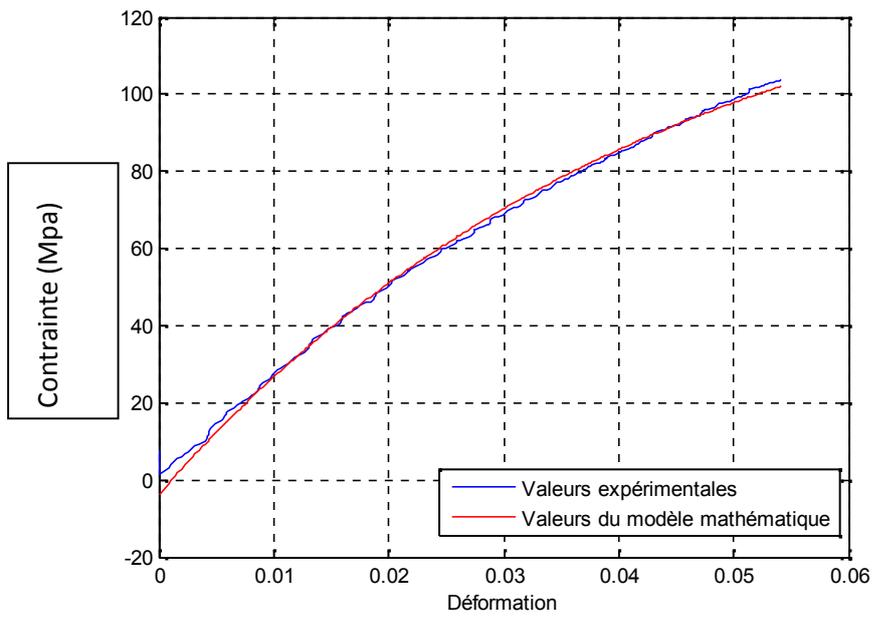


Figure III.13 :Identification des coefficients caractéristiques d'érouissage

Température de 520°C,  $\dot{\nu} = 1,67.10^{-2} S^{-1}$

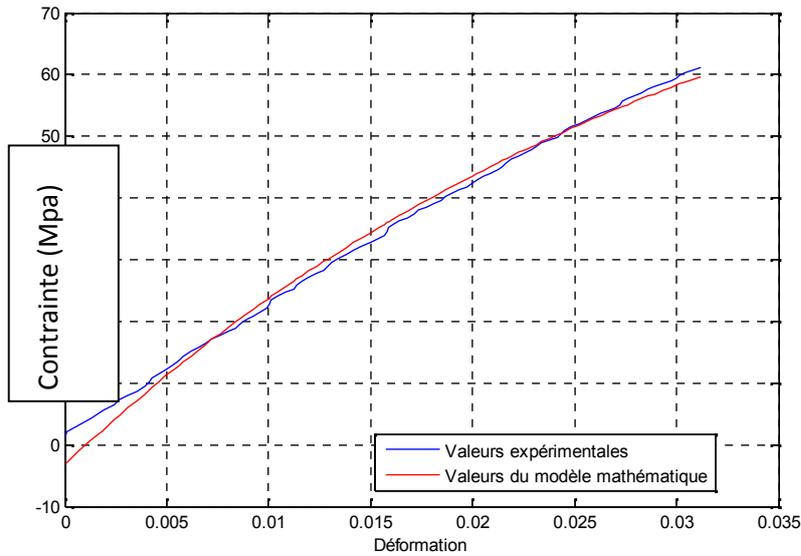


Figure III.14 :Identification des coefficients caractéristiques d'érouissage

Température de 700°C,  $\dot{\nu} = 1,67.10^{-2} S^{-1}$

A remarquer que pour les différentes températures, la convergence est correcte et assez rapide, il faut noter également que l'écart entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées obtenues par le modèle de VOCE est insignifiant et invariant par rapport à l'évolution de la température et la vitesse de déformation : ce qui témoigne du bon choix du formalisme que nous avons adopté.

### III-6-5 Influence de la température sur le taux d'érouissage.

Le Taux d'érouissage est obtenu en intégrant l'équation de voce (III-11), qui s'écrit alors sous la forme suivante :

$$n = \frac{d\dot{\nu}}{d\sigma_p} = AS \exp(S\sigma_p) \quad \text{III-16}$$

où  $n$  est le taux d'érouissage, et  $S$  représente la pente de la droite donnant le taux d'érouissage en fonction de la contrainte.

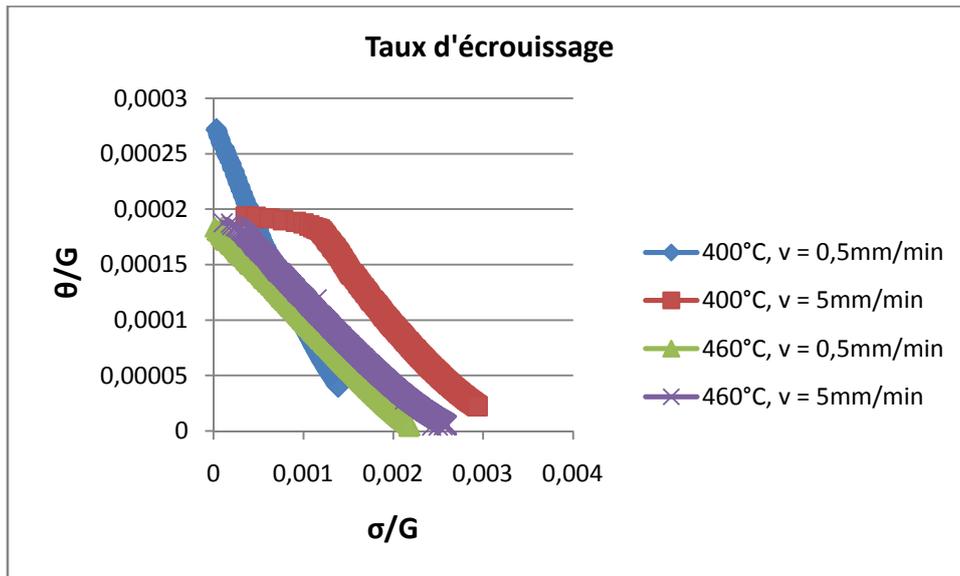


Figure III-15 : Evolution du taux d'écrouissage ( $\theta/G$ ) en fonction de ( $\sigma/G$ ) dans tout le domaine de déformation pour les basses températures.

$$\dot{\nu} = 1,67 \cdot 10^{-4} S^{-1} \text{ et } \dot{\nu} = 1,67 \cdot 10^{-2} S^{-1}$$

### **Discussion des résultats:**

Dans le domaine des moyennes et hautes températures,  $\beta$  (la pente de la droite  $\theta(\sigma)$ ) augmente en valeur absolue quand la température et la vitesse de déformation croient, mais elle est pratiquement constante pour les basses températures. La figure III- 15 montre que ( $\theta/G$ ) extrapolé à  $\sigma/G = 0$  tend vers une valeur moyenne égale  $19 \cdot 10^{-4}$

La figure (III-16) récapitule l'évolution de ( $\theta/G$ ) en fonction de ( $\sigma/G$ ) pour quelques températures. On remarque que ( $\theta/G$ ) chute très rapidement durant les premiers stades de la déformation, alors que sa diminution est moins rapide en grandes déformations et ceci particulièrement valable pour les hautes températures (700°C et 800°C°). Cette allure générale explique aussi que dans ce domaine de température les courbes puissent être ajustées avec une loi type-Swift, la concavité obtenue avec une telle loi dans les axes : ( $\theta/G$ ) - ( $\sigma/G$ ) étant dirigé vers le haut.

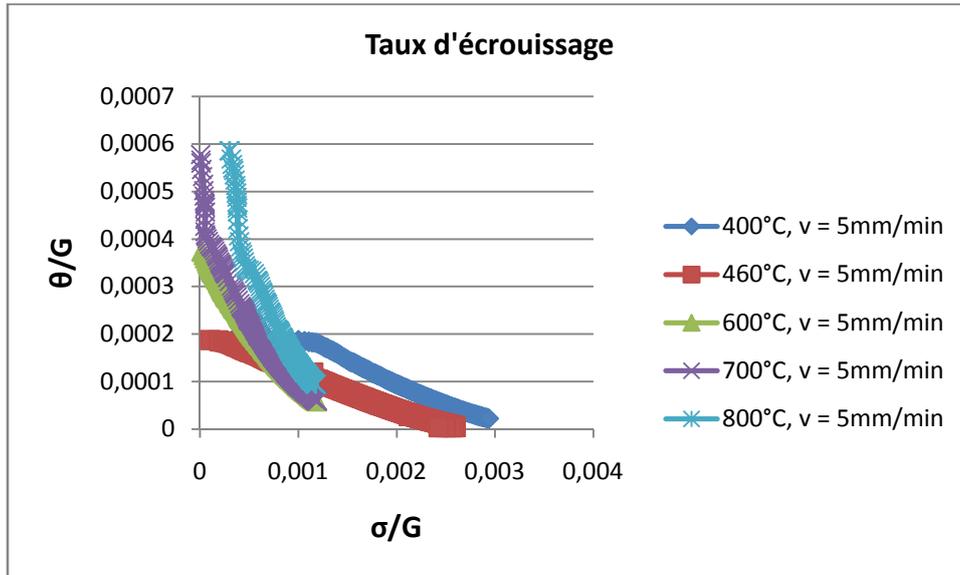


Figure III-16 : Evolution du taux d'écrouissage ( $\theta/G$ ) en fonction de ( $\sigma/G$ ) dans tout le domaine de déformation pour quelques températures

$$\dot{\nu} = 1,67.10^{-2} S^{-1}$$

En analysant les résultats du taux d'écrouissage ( $\theta/G$ ) en fonction de ( $\sigma/G$ ) dans tout le domaine de déformation, on remarque que, pour chaque température, le paramètre A de la loi de Voce a une valeur plus petite pour  $\dot{\nu} = 1,67.10^{-2} S^{-1}$ . Ceci traduit le fait que les courbes – aux 2 vitesses de déformations s'écartent progressivement l'une de l'autre ; cette tendance est compatible avec une formulation à une variable interne. En utilisant une telle formulation, la loi d'écrouissage de Voce s'écrit alors :

$$\dot{\epsilon} = r_s \dot{\nu}^{-\mu} \left\{ 1 - \left[ 1 - (y_0 / \dot{\nu})^{-\epsilon} \right] \exp(s\nu) \right\} \quad \text{III- 17}$$

où  $\mu$  : sensibilité à la vitesse de déformation ;

$\epsilon$  : sensibilité à la vitesse de déformation ;

$y_0$  : caractérise l'état initial de la dureté ;

$r_s$  : constante à température fixée.;

A chaque température, les deux paramètres  $\mu$  et  $\epsilon$  ont donc été calculés à l'aide des valeurs de  $r_s$  et  $y_0$  par la méthode des moindres carrés.

Sachant que :

$$\tau_s = r_s \dot{V}^{-\epsilon}$$

L'expression III-16 peut s'écrire :

$$\tau = \tau_s - \tau_s \left[ 1 - (y_0 / \dot{V})^{-\epsilon} \right] e^{sv} \quad \text{III-18}$$

$$\frac{\tau_s - \tau}{\tau_s \cdot e^{sv}} + 1 = (y_0 / \dot{V})^{-\epsilon}$$

Linéarisation du modèle par transformation logarithmique

$$\ln \left( \frac{\tau_s - \tau}{\tau_s \cdot e^{sv}} + 1 \right) = \ln (y_0 / \dot{V})^{-\epsilon} \quad \text{III-19}$$

$$\ln \left( \frac{\tau_s - \tau}{\tau_s \cdot e^{sv}} + 1 \right) = (-\epsilon) \ln (y_0 / \dot{V}) \quad \text{III-20}$$

La méthode des moindres carrés linéaires s'applique lorsque la fonction écart choisie est la somme des carrés des écarts

$$S = \sum \left[ \ln \left( \frac{\dagger_s - \dagger}{\dagger_s \cdot e^{sv}} + 1 \right) - (\sim - \epsilon) \ln \left( \frac{y_0}{\dot{v}} \right) \right]^2 \quad \text{III-21}$$

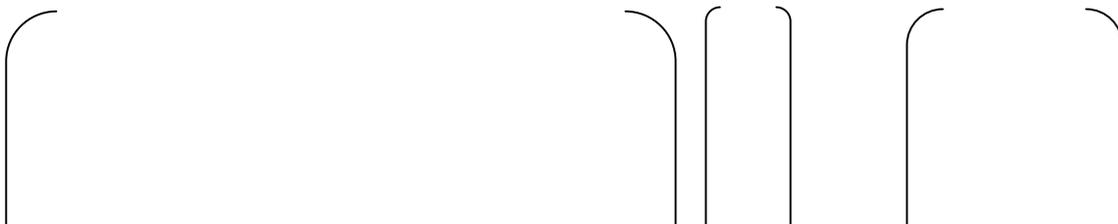
Pour minimiser S , il suffit de dériver par rapport aux 2 inconnus :

$$\frac{uS}{u\sim} = 2 \sum \left[ \ln \left( \frac{\dagger_s - \dagger}{\dagger_s \cdot e^{sv}} + 1 \right) - (\sim - \epsilon) \ln \left( \frac{y_0}{\dot{v}} \right) \right] \left[ - \ln \left( \frac{y_0}{\dot{v}} \right) \right] = 0 \quad \text{III-22}$$

$$\frac{uS}{u\epsilon} = 2 \sum \left[ \ln \left( \frac{\dagger_s - \dagger}{\dagger_s \cdot e^{sv}} + 1 \right) - (\sim - \epsilon) \ln \left( \frac{y_0}{\dot{v}} \right) \right] \left[ \ln \left( \frac{y_0}{\dot{v}} \right) \right] = 0 \quad \text{III-23}$$

$$\text{Soit : } \sum \ln \left( \frac{\dagger_s - \dagger}{\dagger_s} + 1 \right) = Y$$

Le système à résoudre est donc :



$$\sum \ln\left(\frac{y_0}{\dot{v}}\right) \ln\left(\frac{y_0}{\dot{v}}\right) - \sum -\ln\left(\frac{y_0}{\dot{v}}\right) \ln\left(\frac{y_0}{\dot{v}}\right) \mu = Y \cdot \ln\left(\frac{y_0}{\dot{v}}\right)$$

$$-\sum -\ln\left(\frac{y_0}{\dot{v}}\right) \ln\left(\frac{y_0}{\dot{v}}\right) \sum \ln\left(\frac{y_0}{\dot{v}}\right) \ln\left(\frac{y_0}{\dot{v}}\right) = -Y \cdot \ln\left(\frac{y_0}{\dot{v}}\right)$$

Les résultats du programme de calcul effectué sur MATLAB pour résoudre ce système d'équations algébriques linéaire, avec l'utilisation de la méthode d'élimination de Gauss sont donnés par le tableau (III-2).

T°C	400	460	520	600	700	800
$\mu$	0,03214	0,02785	0,01714	0,01928	0,045	0,09857
	0,02142	0,01285	0,01071	0,01285	0,03214	0,07071

Tableau III-1 : Paramètres  $\mu$  et  $\dot{v}$  de la loi de VOCE incorporant les variations des sensibilités à la vitesse en fonction de la température.

$$\dot{v} = 1,67 \cdot 10^{-4} S^{-1}$$

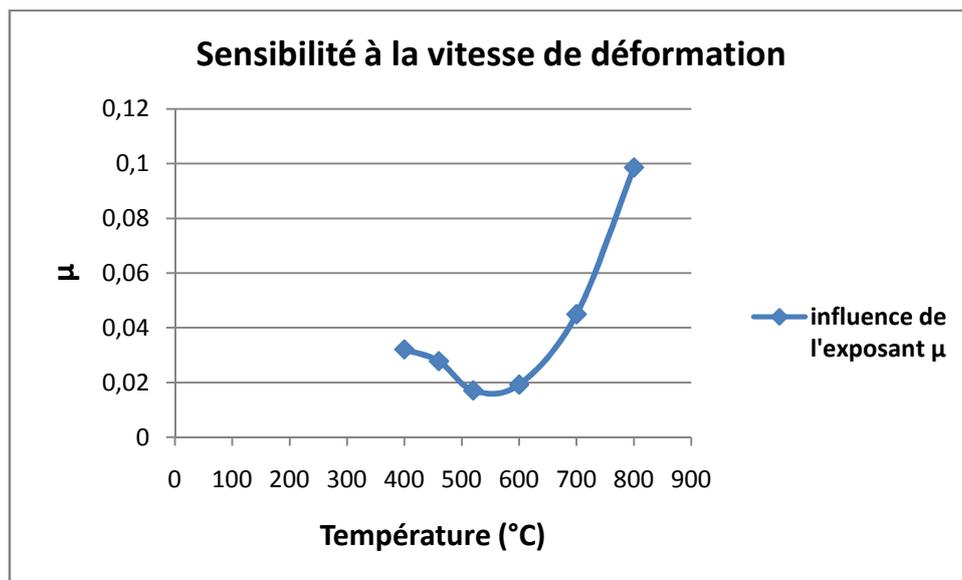


Figure III-17 : Variation de la sensibilité à la vitesse de déformation

à coefficient d'écroutissage constant, en fonction de la température.

$$(\dot{\nu} = 1,67.10^{-4} S^{-1})$$

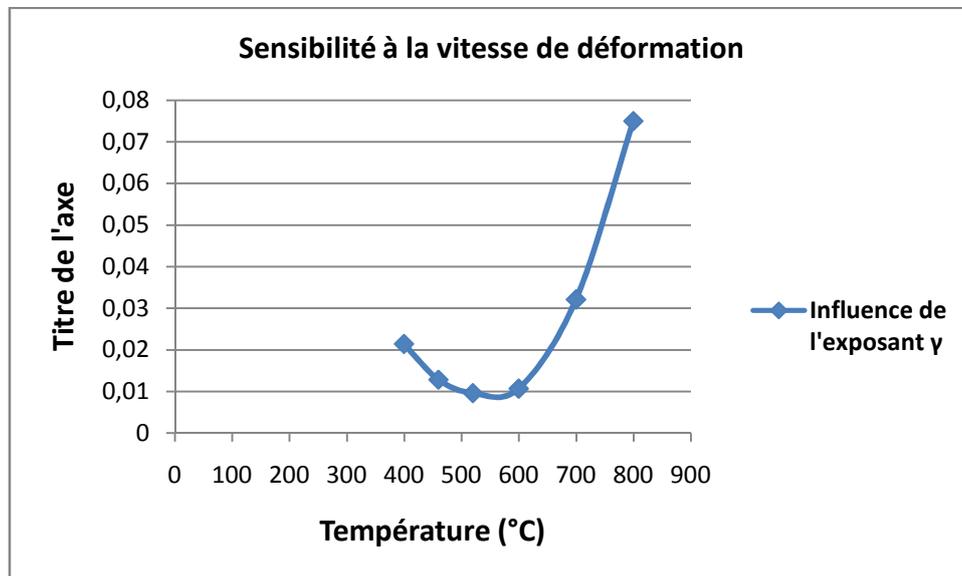


Figure III-18 : Variation de la sensibilité à la vitesse de déformation à état mécanique constant, en fonction de la température.

$$(\dot{\nu} = 1,67.10^{-4} S^{-1})$$

### ***Discussion des résultats :***

Les figures III-17 et III-18 montrent les variations de la sensibilité à la vitesse la sensibilité  $\mu$  et en fonction de la température. On remarque que  $\mu$  et passent par un minimum au voisinage de 520°C. Au-delà de 600°C, il y'a une forte augmentation de ces deux paramètres ; par contre quand la température diminue en dessous de 520°C, l'augmentation de  $\mu$  et est moins marquée.

***CONCLUSION***



L'étude expérimentale présentée ci-dessus a été conduite dans le but d'obtenir une description du comportement plastique suffisamment précise et fiable pour que les procédés de mise en forme, et les prévisions correspondantes s'en trouvent améliorées.

L'étude du comportement plastique sous sollicitation uniaxiale a été effectuée de manière détaillée sur un acier inoxydable, en utilisant l'essai de traction conventionnelle à deux vitesses de déformation. Le domaine de température exploré s'étend de 400°C à 800°C.

L'analyse des résultats des essais de traction montre que la contrainte augmente avec l'évolution de la température, mais elle est relativement faible lorsque l'essai est effectué avec une grande vitesse de déformation qui permet de conclure que l'essai à grande vitesse de déformation provoque l'apparition prématurée de la striction

Ce travail, par l'intermédiaire d'une méthode très originale de dépouillement des résultats expérimentaux, m'a permis d'enrichir mes connaissances sur les lois de comportement des matériaux et surtout m'orienter vers le choix d'un formalisme phénoménologique.

L'analyse des résultats caractéristiques d'érouissage, effectuée à l'aide d'une loi de Voce de la forme  $\dot{\epsilon} = d\dot{\epsilon} / dV = AS \exp(sV)$ , a permis de conclure que la pente des droites  $\ln \dot{\epsilon} / G$  en fonction de  $\ln \dot{\epsilon} / G$  augmente en valeur absolue quand la température augmente ou quand la vitesse de déformation croît, mais elle est pratiquement constante pour les basses températures.

Un résultat important est que nous avons dégagé une description du comportement plastique incorporant explicitement les variations des sensibilités à la vitesse en fonction de la température.

## ***REFERENCES BIBLIOGRAPHIES***

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIES**

[1] BAILEY-OROWAN, extrait de : Mécanique des matériaux solides, J. LEMAITRE & J. L. CHABOCHE. Publié avec le concours du GRECO « grandes déformations et endommagements », du CNRS et de l'ONERA. Ed. Dunod 19

[2] BASINSKI S., extrait de : Comportement mécanique des matériaux. « Elasticité et plasticité », D. FRANÇOIS, A. PINEAU et A. ZAOUI. Hermès, Paris 1992. Ed. Hermès

[3] GHOSH A. K. Mechanics of sheet metal forming

[4] HART E. W. Constitutive equations in plasticity. J. Eng. Technol., 98, pp 189-193 (1976)

[5] MILIHA-TOUATI Med & FERRON G. Etude des lois de comportement plastique des métaux sous sollicitation uniaxiale ou biaxiale des métaux. Application à l'analyse de la striction et la détermination des limites de formage des tôles. Res. Mechanica, (2012) pp 89-103.

[6] VOCE E. 1948 J. Metals, 74, pp. 537-546.

[7] Robert USCINOWICZ. The effect of rolling direction on the creep process of Al-Cu bimetallic sheet. Materials and Design 49 (2013) 693-700

[8] Swift HW. Plastic instability under plane stress. J Mech Phys Solids  
1952;1:1-18.

[9] P. DELOBELLE. Synthesis of the elastoviscoplastic behavior and modelization of an austenitic stainless steel over a large temperature range, under uniaxial and biaxial loadings, part I: behavior. International Journal of Plasticity, Vol. 9, pp 65-85, 1993

[10] P. DELOBELLE, P. ROBINET and L. BOCHER. Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel. International Journal of Plasticity, Vol. 11, No. 4, pp. 295-330, 1995.

[11] CHABOCHE, J.L., & NOUAILHAS, D. Constitutive Modeling of Ratchetting Effects: Part I. Experimental Facts and Properties of the Classical Models," J. Eng. Mat. Techn., 111, 384.

[12] MECKING & KOCKS, Acta. J. Sci., 29, p. 1865

[13] HART E. W. Constitutive equation in plasticity, J. Eng. Mater. Techno. , 98, p. 193.

[14] KOCKS & coll. Acta. Metall., 27, pp. 411-419

# ***ANNEXE***





0.3982353	3.808737E-03	1.638422E-02	9.970703E-03
1.875019	7.324219E-02	0.1108662	0.4509707
1.989933	5.994022E-02	0.0927655	0.4821707
2.52877	0.0716368	0.1086817	0.6426107
2.887261	7.732208E-02	0.116418	0.7469387
3.284878	9.266454E-02	0.1372953	0.8658924
3.704349	0.1104635	0.1615154	0.9883486
4.126567	0.1254406	0.1818956	1.113631
4.55958	0.1345153	0.1942441	1.240178
4.94489	0.1399408	0.2016269	1.355744
5.323902	0.1463563	0.2103568	1.470167
5.693895	0.156342	0.2239449	1.582165
6.058986	0.1687042	0.2407668	1.693449
6.414636	0.1805856	0.2569345	1.804105
6.764095	0.190561	0.2705085	1.914493
7.115342	0.2001769	0.2835935	2.024702
7.470059	0.2077877	0.2939499	2.134821
7.82473	0.2131964	0.3013099	2.244887
8.180201	0.2161508	0.30533	2.354924
8.542863	0.217911	0.3077253	2.464945
8.898388	0.2192938	0.3096069	2.574956
9.256354	0.2212117	0.3122167	2.684963
9.605009	0.2274079	0.3206482	2.794966
9.952734	0.233746	0.3292729	2.904968
10.2838	0.2422002	0.340777	3.014969
10.60693	0.2515745	0.3535331	3.12497
10.92969	0.2645155	0.3711426	3.23497
11.25908	0.2764208	0.3873428	3.34497
11.59241	0.2859319	0.4002851	3.454971
11.93032	0.2984478	0.4173162	3.564971
12.26959	0.3093566	0.4321605	3.674971
12.62529	0.3157707	0.4408885	3.784971

12.97086	0.3173613	0.4430529	3.894971
13.34752	0.3226834	0.4502949	4.016571
13.7093	0.3319176	0.4628605	4.139891
14.09499	0.3430901	0.4780635	4.265875
14.45306	0.3515363	0.4895567	4.381135
14.8102	0.3587412	0.4993609	4.495385
15.15321	0.3621343	0.5039781	4.607286
15.49201	0.3647224	0.5074999	4.718516
15.8268	0.3693161	0.5137508	4.829143
16.16616	0.3830871	0.5324897	4.939514
16.50643	0.4004125	0.5560653	5.049714
16.83814	0.4174428	0.5792395	5.159828
17.15149	0.4263346	0.591339	5.269891
17.46146	0.4318122	0.5987927	5.379926
17.78607	0.4350366	0.6031803	5.489946
18.12781	0.4372473	0.6061885	5.599957
18.47153	0.4395931	0.6093807	5.709963
18.80626	0.4471849	0.6197112	5.819966
19.12752	0.4615357	0.6392391	5.929968
19.44315	0.4788739	0.6628322	6.039969
19.7563	0.493151	0.6822599	6.14997
20.07047	0.501466	0.6935746	6.25997
20.38177	0.5071557	0.7013169	6.369971
20.69531	0.5116268	0.7074009	6.479971
21.0047	0.5175553	0.7154682	6.589971
21.32207	0.5296845	0.7319732	6.699971
21.64085	0.5462744	0.754548	6.809971
21.97213	0.5634444	0.7779121	6.919971
22.33089	0.5748259	0.7933995	7.041771
22.69367	0.5807705	0.8014887	7.165131

23.04731	0.583912	0.8057635	7.291163
23.35886	0.5877802	0.8110272	7.406241
23.64895	0.5948667	0.8206702	7.520463
23.93535	0.607048	0.8372459	7.632323
24.236	0.6225905	0.8583956	7.74354
24.53544	0.6367774	0.8777004	7.854155
24.84221	0.6470006	0.8916117	7.964521
25.14247	0.652351	0.8988923	8.074718
25.45032	0.6566083	0.9046856	8.18483
25.75211	0.6608742	0.9104903	8.294892
26.04525	0.666738	0.9184695	8.404927
26.33381	0.6768785	0.9322683	8.514946
26.62091	0.6913	0.9518924	8.624957
26.91284	0.7063493	0.9723709	8.734963
27.2166	0.7176043	0.9876862	8.844967
27.52082	0.7238916	0.9962417	8.954968
27.81821	0.7279866	1.001814	9.064969
28.11172	0.7326129	1.008109	9.17497
28.40435	0.7404797	1.018814	9.28497
28.69774	0.7513272	1.033575	9.394971
28.98726	0.7666429	1.054416	9.504971
29.26591	0.7797862	1.072301	9.61497
29.55403	0.7913378	1.088019	9.724971
29.84091	0.7969491	1.095655	9.83497
30.12638	0.8011434	1.101363	9.94497
30.43215	0.8033388	1.10435	10.06657
30.74356	0.8050566	1.106688	10.18989
31.05936	0.8071858	1.109585	10.31587
31.34955	0.8100938	1.113542	10.43114
31.63606	0.820682	1.12795	10.54538

31.92365	0.8365062	1.149483	10.65729
32.2069	0.8540053	1.173295	10.76852
32.48729	0.8652404	1.188583	10.87914
32.76906	0.8711053	1.196564	10.98951
33.04772	0.8748489	1.201658	11.09971
33.33381	0.8782351	1.206266	11.20983
33.61681	0.883527	1.213467	11.31989
33.897	0.895194	1.229342	11.42993
34.16174	0.9111832	1.2511	11.53995
34.42782	0.9273503	1.273099	11.64996
34.69257	0.938234	1.28791	11.75996
34.96423	0.9442003	1.296028	11.86997
35.23087	0.9478332	1.300972	11.97997
35.50618	0.950926	1.30518	12.08997
35.77564	0.9580718	1.314904	12.19997
36.04816	0.9704032	1.331684	12.30997
36.30389	0.9870123	1.354285	12.41997
36.55914	1.001619	1.374162	12.52997
36.80903	1.012024	1.388319	12.63997
37.0672	1.017906	1.396323	12.74997
37.33077	1.02131	1.400955	12.85997
37.59126	1.023635	1.40412	12.96997
37.87971	1.025543	1.406716	13.09177
38.16718	1.026887	1.408544	13.21513
38.46389	1.027741	1.409707	13.34116
38.73022	1.031959	1.415446	13.45624
38.99697	1.046157	1.434767	13.57046
39.25622	1.063845	1.458836	13.68232
39.51247	1.080243	1.481149	13.79354
39.77251	1.088056	1.491781	13.90416

40.02643	1.093397	1.499049	14.01452
40.28151	1.098458	1.505936	14.12472
40.51916	1.103176	1.512356	14.23483
40.75953	1.108324	1.51936	14.34489
40.99183	1.117886	1.532372	14.45493
41.23278	1.131784	1.551283	14.56495
41.48933	1.147228	1.572299	14.67496
41.75567	1.157726	1.586584	14.78496
42.02323	1.164057	1.595199	14.89497
42.2816	1.168361	1.601057	15.00497
42.54544	1.174032	1.608774	15.11497
42.79878	1.185403	1.624246	15.22497
43.04502	1.202374	1.64734	15.33497
43.27744	1.219204	1.670241	15.44497
43.51634	1.231034	1.686339	15.55497
43.75807	1.237146	1.694657	15.66497
44.00069	1.240765	1.699581	15.77497
44.23174	1.243384	1.703145	15.88497
44.46154	1.249789	1.711859	15.99497
44.72464	1.261026	1.72715	16.11657
44.99585	1.27223	1.742397	16.23989
45.26519	1.283399	1.757595	16.36588
45.50518	1.292151	1.769505	16.48114
45.74981	1.302142	1.783099	16.59538
45.99991	1.308701	1.792025	16.70729
46.24437	1.312862	1.797688	16.81852
46.48466	1.315387	1.801123	16.92934
46.7084	1.317399	1.80386	17.03975
46.93432	1.321762	1.809798	17.15
47.15719	1.328427	1.818867	17.25993

47.38637	1.338953	1.83319	17.36997
47.60992	1.351678	1.850507	17.47996
47.84327	1.365382	1.869154	17.58997
48.07506	1.376293	1.884002	17.69997
48.32256	1.383149	1.893331	17.80997
48.55286	1.38811	1.900081	17.91997
48.77575	1.396099	1.910952	18.02997
48.97784	1.409997	1.929864	18.13997
49.18708	1.42706	1.953082	18.24997
49.39327	1.442275	1.973786	18.35997
49.61137	1.452042	1.987077	18.46997
49.83015	1.45777	1.994871	18.58097
50.05907	1.461162	1.999487	18.69117
50.28129	1.463161	2.002207	18.80141
50.50182	1.464445	2.003954	18.9105
50.71526	1.464926	2.00461	19.02036
50.94607	1.465954	2.006007	19.14195
51.16978	1.471968	2.014192	19.26525
51.40791	1.486178	2.033528	19.39122
51.63057	1.503407	2.056972	19.50628
51.85217	1.518424	2.077407	19.62048
52.06853	1.52669	2.088655	19.73233
52.28284	1.532137	2.096067	19.84355
52.50548	1.535495	2.100636	19.95416
52.72989	1.538164	2.104269	20.06452
52.95633	1.541333	2.108581	20.17472
53.18457	1.551525	2.12245	20.28483
53.39662	1.566532	2.142871	20.39489
53.60317	1.583993	2.16663	20.50493
53.80515	1.595437	2.182203	20.61495

54.0173	1.603064	2.192581	20.72496
54.22526	1.610365	2.202516	20.83496
54.43287	1.617803	2.212637	20.94497
54.64664	1.625731	2.223425	21.05497
54.8688	1.633286	2.233707	21.16497
55.08726	1.642506	2.246252	21.27497
55.2995	1.654269	2.262259	21.38497
55.50612	1.66491	2.276738	21.49497
55.71095	1.673521	2.288456	21.60497
55.91517	1.678192	2.294813	21.71497
56.11409	1.681407	2.299187	21.82497
56.31587	1.68943	2.310105	21.93497
56.51185	1.702108	2.327356	22.04497
56.72768	1.719108	2.350489	22.16677
56.94435	1.733042	2.36945	22.29013
57.17341	1.74336	2.38349	22.41616
57.38793	1.749911	2.392404	22.53124
57.6072	1.753723	2.397591	22.64546
57.81295	1.756351	2.401168	22.75732
58.02422	1.760743	2.407145	22.86854
58.2284	1.770527	2.420457	22.97915
58.43208	1.786752	2.442535	23.08952
58.62624	1.803351	2.465123	23.19972
58.81974	1.815834	2.48211	23.30983
59.01279	1.822382	2.49102	23.41989
59.20621	1.826217	2.496238	23.52993
59.39344	1.828469	2.499302	23.63995
59.57751	1.829629	2.500881	23.74996
59.75513	1.830574	2.502167	23.85996
59.93281	1.835391	2.508721	23.96997

60.10977	1.842959	2.51902	24.07997
60.29125	1.855397	2.535945	24.18997
60.46689	1.869096	2.554586	24.30017
60.63959	1.882438	2.572741	24.41021
60.80653	1.89227	2.58612	24.52026
60.9834	1.897402	2.593103	24.63008
61.16105	1.900453	2.597256	24.74005
61.34641	1.902237	2.599682	24.85001
61.53095	1.90335	2.601198	24.95999
61.72136	1.904398	2.602624	25.06998
61.92311	1.909079	2.608993	25.19178
62.12913	1.923527	2.628653	25.31513
62.33942	1.941592	2.653235	25.44116
62.53642	1.958319	2.675996	25.55624
62.71835	1.966624	2.687297	25.67046
62.90293	1.972654	2.695504	25.78232
63.08736	1.976899	2.701279	25.89354
63.28152	1.984813	2.712049	26.00416
63.4697	1.996093	2.727398	26.11452
63.65724	2.01247	2.749683	26.22472
63.83965	2.026527	2.768812	26.33483
64.01253	2.037537	2.783793	26.44489
64.18934	2.043283	2.791613	26.55493
64.36769	2.04681	2.796411	26.66495
64.55261	2.048575	2.798813	26.77496
64.72832	2.050277	2.80113	26.88496
64.90753	2.053081	2.804944	26.99497
65.08632	2.062538	2.817813	27.10497
65.25657	2.077471	2.838134	27.21497
65.41505	2.094537	2.861357	27.32497

65.56606	2.107001	2.878317	27.43497
65.72034	2.114487	2.888504	27.54497
65.87006	2.11874	2.894291	27.65497
66.0106	2.121557	2.898124	27.76497
66.16026	2.124583	2.902242	27.87497
66.31963	2.130645	2.91049	27.98497
66.49659	2.14377	2.928351	28.09497
66.68868	2.160674	2.951352	28.21677
66.88805	2.176435	2.9728	28.34013
67.09081	2.18584	2.985598	28.46616
67.27724	2.191108	2.992766	28.58124
67.45877	2.197236	3.001104	28.69546
67.62907	2.209711	3.01808	28.80732
67.79143	2.226263	3.040604	28.91854
67.94611	2.242821	3.063134	29.02915
68.10426	2.253777	3.078043	29.13952
68.27107	2.260685	3.087444	29.24972
68.44221	2.264932	3.093223	29.35983
68.61978	2.267603	3.096858	29.46989
68.79245	2.270042	3.100176	29.57993
68.96082	2.27616	3.108501	29.68995
69.10983	2.289092	3.126098	29.79996
69.25734	2.3055	3.148425	29.90996
69.40747	2.320802	3.169248	30.01997
69.56541	2.330191	3.182024	30.12997
69.72188	2.336361	3.190419	30.23997
69.87881	2.340235	3.195691	30.34997
70.0369	2.344559	3.201575	30.45997
70.19511	2.351999	3.2117	30.56997
70.33832	2.361648	3.224829	30.67997

70.48966	2.37359	3.241079	30.78997
70.63269	2.384059	3.255325	30.89997
70.79131	2.394458	3.269476	31.00997
70.94329	2.402237	3.280061	31.11997
71.12493	2.408392	3.288436	31.24157
71.31024	2.411971	3.293306	31.36529
71.49333	2.414209	3.296352	31.49135
71.65366	2.415549	3.298176	31.60671
71.79884	2.422212	3.307242	31.72059
71.96126	2.435152	3.32485	31.83244
72.13879	2.45369	3.350076	31.96559
72.32579	2.468687	3.370483	32.10259
72.50182	2.478703	3.384113	32.24462
72.67021	2.484234	3.391639	32.36642
72.84289	2.490301	3.399894	32.48519
73.01021	2.499213	3.412022	32.5993
73.17423	2.51047	3.42734	32.71188
73.32522	2.522914	3.444273	32.82322
73.46741	2.533982	3.459334	32.934
73.59736	2.542815	3.471354	33.04443
73.73468	2.549549	3.480517	33.15467
73.87373	2.554332	3.487026	33.2648
74.019	2.558278	3.492394	33.37487
74.15136	2.560755	3.495765	33.48492
74.28682	2.56365	3.499705	33.59494
74.42021	2.572459	3.511691	33.70496
74.56768	2.584848	3.528551	33.81496
74.71603	2.600631	3.550026	33.92496
74.86049	2.613004	3.566864	34.03497
74.99315	2.622825	3.580228	34.14497

75.1367	2.628788	3.588341	34.26657
75.28513	2.632179	3.592956	34.38989
75.43762	2.634518	3.596138	34.51587
75.58571	2.636016	3.598177	34.63113
75.73795	2.63857	3.601653	34.74538
75.9116	2.649546	3.616588	34.87929
76.08769	2.664556	3.637013	35.01692
76.26067	2.682381	3.661269	35.15923
76.42476	2.693168	3.675948	35.28141
76.57898	2.701001	3.686606	35.40031
76.74977	2.706189	3.693666	35.53653
76.92244	2.711516	3.700915	35.67535
77.10339	2.716842	3.708162	35.81836
77.26632	2.72993	3.725972	35.94072
77.42199	2.745391	3.747011	36.0598
77.57202	2.762438	3.770207	36.17409
77.72005	2.771282	3.782242	36.28676
77.86401	2.776664	3.789565	36.39815
78.00833	2.78077	3.795152	36.53096
78.16454	2.784572	3.800326	36.66801
78.34113	2.790227	3.808021	36.83198
78.5134	2.802811	3.825145	36.98018
78.68422	2.819116	3.847332	37.13041
78.84576	2.835615	3.869783	37.2679
79.02917	2.845632	3.883414	37.42445
79.21315	2.85205	3.892147	37.58225
79.38911	2.856363	3.898016	37.73232
79.54227	2.86059	3.903769	37.8599
79.69833	2.875862	3.924549	38.00343
79.85445	2.893618	3.94871	38.14565

80.01836	2.912293	3.974123	38.2908
80.17284	2.920196	3.984878	38.41427
80.34795	2.925659	3.992311	38.556
80.5168	2.929152	3.997065	38.69704
80.68633	2.939468	4.011102	38.84159
80.825	2.954974	4.032201	38.96471
80.9659	2.973526	4.057446	39.08424
81.09652	2.985816	4.074171	39.19877
81.23298	2.993421	4.084518	39.31159
81.36354	2.997634	4.090251	39.42305
81.50102	3.000378	4.093986	39.53391
81.65435	3.00634	4.102098	39.66637
81.82718	3.021793	4.123126	39.82504
82.02233	3.040724	4.148887	40.01526
82.21601	3.057826	4.172157	40.20664
82.39549	3.066175	4.183519	40.38197
82.55384	3.071206	4.190365	40.5323
82.69682	3.074703	4.195123	40.66284
82.8302	3.080539	4.203065	40.78501
82.95325	3.089408	4.215133	40.90155
83.06876	3.104125	4.23516	41.01529
83.20485	3.119067	4.255493	41.14935
83.36331	3.13288	4.274288	41.30891
83.54652	3.141824	4.286459	41.47763
83.73034	3.156044	4.305809	41.65329
83.926	3.174564	4.331009	41.83217
84.11092	3.194295	4.35786	42.01307
84.29637	3.206808	4.374886	42.17303
84.45799	3.213609	4.38414	42.3072
84.6119	3.217618	4.389596	42.43203

84.7492	3.220865	4.394015	42.57183
84.87985	3.22428	4.398662	42.71275
85.00957	3.232145	4.409364	42.8569
85.13476	3.247847	4.430731	42.97991
85.25822	3.265217	4.454367	43.09934
85.39877	3.279977	4.474452	43.24743
85.55135	3.286783	4.483714	43.39994
85.71049	3.291506	4.49014	43.55906
85.85316	3.294224	4.493838	43.68678
85.99423	3.304384	4.507663	43.83215
86.12829	3.320583	4.529706	43.97477
86.26523	3.339946	4.556054	44.12037
86.39011	3.352741	4.573465	44.24401
86.51302	3.359904	4.583212	44.36386
86.62695	3.364569	4.589561	44.47855
86.74629	3.37007	4.597046	44.59146
86.86485	3.381185	4.612171	44.70299
86.9868	3.398454	4.63567	44.83587
87.10834	3.415644	4.659061	44.97276
87.2583	3.427927	4.675776	45.13671
87.4207	3.43391	4.683917	45.30687
87.58559	3.438208	4.689766	45.4837
87.73409	3.442285	4.695313	45.6411
87.88762	3.456148	4.714178	45.79594
88.05179	3.473798	4.738195	45.96839
88.24104	3.492728	4.763955	46.17745
88.43443	3.502652	4.777458	46.39695
88.63308	3.517621	4.797827	46.62566
88.80357	3.53631	4.823259	46.8247
88.964	3.556577	4.850836	46.99805

89.11559	3.569671	4.868655	47.16053
89.27092	3.577281	4.87901	47.3157
89.41505	3.582477	4.88608	47.46723
89.56358	3.592097	4.899171	47.61657
89.71245	3.608683	4.92174	47.78674
89.86333	3.628104	4.948167	47.96064
89.99782	3.643128	4.968612	48.11746
90.13653	3.651864	4.9805	48.2716
90.28625	3.660688	4.992507	48.44379
90.46901	3.674453	5.011237	48.64106
90.65611	3.692534	5.035841	48.84695
90.85197	3.709832	5.05938	49.05959
91.01982	3.721802	5.075668	49.26489
91.19677	3.73252	5.090252	49.46948
91.37114	3.751178	5.115642	49.67245
91.55717	3.771028	5.142652	49.88537
91.71992	3.788719	5.166726	50.07855
91.86176	3.796812	5.177739	50.24776
91.99855	3.802173	5.185033	50.40825
92.13249	3.807267	5.191965	50.56218
92.26991	3.822102	5.212152	50.71307
92.41439	3.840561	5.23727	50.86203
92.56334	3.859553	5.263113	51.032
92.72914	3.869182	5.276216	51.22779
92.88281	3.880765	5.291978	51.43294
93.03923	3.898778	5.31649	51.64553
93.18134	3.918731	5.34364	51.83908
93.32304	3.935318	5.366212	52.0303
93.45581	3.944794	5.379105	52.19486
93.58967	3.956803	5.395447	52.36561

93.72549	3.96444	5.405839	52.50968
93.87374	3.976543	5.422308	52.67164
94.03764	3.98685	5.436333	52.84225
94.20644	4.002581	5.457739	53.04076
94.36855	4.013004	5.471923	53.22458
94.52371	4.021867	5.483983	53.41105
94.67854	4.037735	5.505576	53.59511
94.84085	4.053814	5.527456	53.80122
94.99688	4.072803	5.553295	54.01125
95.15343	4.083041	5.567226	54.22647
95.30363	4.09952	5.58965	54.44353
95.44397	4.112568	5.607406	54.63998
95.58685	4.12902	5.629793	54.83268
95.73454	4.14245	5.648068	55.02052
95.89769	4.159882	5.671787	55.24022
96.07012	4.182635	5.70275	55.46473
96.24828	4.204147	5.732022	55.69658
96.41551	4.223372	5.758183	55.91924
96.57043	4.234097	5.772777	56.14215
96.7094	4.241758	5.783201	56.34126
96.85229	4.2498	5.794144	56.53566
96.99349	4.26633	5.816638	56.72437
97.14948	4.285512	5.84274	56.93299
97.29911	4.305339	5.86972	57.14445
97.46414	4.318415	5.887512	57.36047
97.61907	4.332584	5.906793	57.57796
97.78264	4.349225	5.929438	57.79667
97.93147	4.364907	5.950777	58.01591
98.0807	4.382299	5.974443	58.2471
98.23214	4.393688	5.989941	58.48018

98.3856	4.410608	6.012965	58.71604
98.541	4.425176	6.032789	58.94123
98.69328	4.442314	6.056109	59.16544
98.83849	4.455421	6.073945	59.38731
98.97632	4.470727	6.094772	59.58653
99.10358	4.490151	6.121204	59.78075
99.22025	4.508524	6.146205	59.96944
99.33875	4.52332	6.166338	60.17802
99.46609	4.531184	6.177039	60.38947
99.60384	4.546058	6.19728	60.60548
99.75135	4.563554	6.221087	60.82297
99.91367	4.584177	6.249151	61.06367
100.0956	4.599566	6.27009	61.34231
100.292	4.620801	6.298986	61.67718
100.4944	4.64295	6.329125	62.00888
100.6975	4.665189	6.359388	62.3622
100.904	4.69065	6.394034	62.6972
101.1168	4.717183	6.430139	63.05486
101.3474	4.753216	6.479171	63.41339
101.5925	4.780818	6.516731	63.83223
101.838	4.810363	6.556934	64.26271
102.0777	4.837789	6.594254	64.68557
102.3135	4.872121	6.640972	65.07564
102.5606	4.907792	6.689511	65.50222
102.8101	4.938901	6.731843	65.97356
103.0509	4.973118	6.778404	66.43914
103.2935	5.005402	6.822334	66.90212
103.5296	5.03877	6.867741	67.31883
103.7686	5.066315	6.905223	67.74777
103.9994	5.090305	6.937867	68.1583

104.2138	5.119802	6.978005	68.5682
104.4354	5.14547	7.012933	68.99628
104.6453	5.18495	7.066656	69.42788
104.8743	5.215791	7.108624	69.89742
105.0997	5.245968	7.149687	70.37464
105.3098	5.271678	7.184671	70.81699
105.5202	5.29815	7.220693	71.26431
105.7097	5.334367	7.269976	71.66224
105.9224	5.364189	7.310557	72.11729
106.1203	5.402854	7.363171	72.52989
106.3427	5.433193	7.404454	72.97922
106.5612	5.468294	7.452218	73.42661
106.8039	5.498345	7.493111	73.94695
107.0445	5.540117	7.549952	74.49169
107.2924	5.588905	7.61634	75.0787
107.529	5.636226	7.680733	75.63506
107.7663	5.682693	7.743964	76.20473
108.0081	5.718267	7.79237	76.77094
108.2432	5.761834	7.851654	77.33912
108.4811	5.801508	7.905642	77.93999
108.7115	5.847366	7.968043	78.5596
108.9515	5.890194	8.026321	79.18871
109.1812	5.930666	8.081394	79.77944
109.3881	5.972258	8.137991	80.28661
109.5818	6.009149	8.18819	80.81419
109.7572	6.050452	8.244393	81.30714
109.9501	6.085191	8.291665	81.85305
110.1543	6.129081	8.351389	82.40182
110.3764	6.164085	8.39902	83.00575
110.5719	6.208048	8.458843	83.5655

110.7661	6.249418	8.515138	84.17223
110.9536	6.294726	8.576792	84.76852
111.1555	6.340332	8.638849	85.41613
111.35	6.378292	8.690504	86.02792
111.5364	6.422748	8.750998	86.58779
111.7151	6.464838	8.808271	87.21812
111.8959	6.510651	8.870612	87.84116
112.0869	6.554102	8.929739	88.54284
112.297	6.601106	8.993699	89.21478
112.5057	6.650838	9.061373	89.9295
112.6961	6.704403	9.134261	90.59184
112.8964	6.748324	9.194027	91.23125
113.0772	6.7941	9.256317	91.8106
113.2746	6.833602	9.31007	92.42855
113.4318	6.880511	9.373902	93.08501
113.5754	6.927267	9.437525	93.69189
113.711	6.972073	9.498495	94.37337
113.8239	7.016226	9.558577	94.92804
113.9673	7.050745	9.605549	95.53826
114.0733	7.090035	9.659013	96.01324
114.21	7.12964	9.712905	96.58228
114.3371	7.17908	9.780181	97.22009
114.4994	7.230464	9.850101	98.02245
114.6351	7.271986	9.906603	98.71749
114.7512	7.313096	9.962543	99.32497
114.858	7.351713	10.01509	99.83928
114.9883	7.402493	10.08419	100.4706
115.1286	7.451573	10.15098	101.2278
115.2643	7.503918	10.22221	101.9337
115.413	7.558598	10.29661	102.6553

115.5766	7.61683	10.37585	103.3808
115.733	7.677822	10.45885	104.2202
115.8857	7.73811	10.54088	105.161
115.9946	7.788176	10.60901	105.9248
116.1107	7.83345	10.67062	106.6727
116.1923	7.874696	10.72675	107.2163
116.2917	7.926776	10.79761	107.8918
116.3902	7.983087	10.87424	108.5652
116.5086	8.042411	10.95496	109.418
116.6076	8.090586	11.02052	110.1302
116.701	8.136989	11.08366	110.8496
116.7881	8.179197	11.1411	111.433
116.8821	8.230435	11.21082	112.0565
116.9749	8.274496	11.27078	112.6939
117.049	8.32004	11.33275	113.2761
117.1292	8.366993	11.39664	113.96
117.1968	8.42308	11.47296	114.6422
117.2588	8.469997	11.53681	115.3004
117.3263	8.515559	11.5988	115.9755
117.4016	8.557112	11.65535	116.6162
117.4849	8.608136	11.72478	117.3193
117.575	8.661897	11.79793	118.0171
117.6878	8.71959	11.87644	118.7703
117.8	8.781725	11.96099	119.6435
117.924	8.845829	12.04822	120.5737
118.0091	8.898089	12.11933	121.3194
118.0865	8.946706	12.18549	122.0398
118.1058	8.98976	12.24408	122.707
118.1395	9.042107	12.31531	123.4025
118.1443	9.096195	12.38891	124.0819

118.1733	9.145374	12.45583	124.7859
118.1892	9.196585	12.52551	125.5575
118.2404	9.247747	12.59513	126.3147
118.291	9.31041	12.6804	127.0714
118.333	9.361564	12.75001	127.7152
118.3716	9.411133	12.81746	128.4023
118.4098	9.454364	12.87629	129.0865
118.4472	9.496011	12.93296	129.7787
118.4723	9.537303	12.98915	130.417
118.4879	9.578411	13.04509	131.0461
118.4993	9.619412	13.10088	131.6626
118.5016	9.659271	13.15512	132.1977
118.4868	9.698646	13.2087	132.692
118.4782	9.74877	13.2769	133.3269
118.4847	9.799101	13.34539	134.1138
118.5016	9.851858	13.41718	134.8051
118.5098	9.90643	13.49144	135.5188
118.5301	9.964458	13.5704	136.2068
118.5352	10.02234	13.64917	137.0701
118.5419	10.06852	13.71201	137.7874
118.5324	10.11052	13.76915	138.4775
118.5411	10.15153	13.82496	139.0009
118.543	10.20203	13.89368	139.6177
118.5398	10.25382	13.96415	140.2637
118.5458	10.30855	14.03863	141.0003
118.5469	10.36364	14.11359	141.7388
118.5489	10.41999	14.19028	142.4298
118.5216	10.47633	14.26693	143.1777
118.5016	10.52289	14.33029	143.8175
118.4806	10.56544	14.38819	144.535

118.4634	10.60301	14.43931	145.1263
118.442	10.65058	14.50405	145.817
118.407	10.70482	14.57785	146.5024
118.3783	10.75181	14.6418	147.1069
118.3479	10.79954	14.70675	147.7608
118.3202	10.84626	14.77032	148.3975
118.2927	10.89292	14.83381	149.0407
118.2494	10.93369	14.88929	149.7256
118.2222	10.96975	14.93835	150.2552
118.17	11.01426	14.99893	150.9382
118.1332	11.06873	15.07304	151.5877
118.0843	11.12766	15.15324	152.4151
118.056	11.19042	15.23864	153.2275
118.0093	11.24787	15.31681	154.0945
117.9585	11.30416	15.39341	154.8154
117.9039	11.35902	15.46806	155.584
117.8517	11.4218	15.55349	156.3439
117.8062	11.47433	15.62497	157.0676
117.7566	11.52762	15.69749	157.7713
117.7076	11.57258	15.75866	158.4637
117.6579	11.61602	15.81777	159.15
117.606	11.65617	15.87241	159.7997
117.5447	11.69448	15.92454	160.3425
117.4528	11.74547	15.99393	161.054
117.3551	11.7989	16.06663	161.7779
117.2562	11.86162	16.15198	162.6144
117.1617	11.91942	16.23063	163.4874
117.0712	11.9778	16.31007	164.3024
117.0022	12.02922	16.38004	165.1129
116.9354	12.0851	16.45609	165.856

116.8239	12.13985	16.53058	166.7278
116.7064	12.18476	16.5917	167.4137
116.5995	12.22553	16.64717	167.9563
116.5205	12.26382	16.69927	168.444
116.4492	12.30078	16.74957	168.892
116.3496	12.34152	16.80501	169.5082
116.2753	12.37183	16.84625	169.93
116.1671	12.41589	16.90621	170.5226
116.0743	12.455	16.95942	171.1215
115.9407	12.50825	17.03189	171.9648
115.8352	12.54826	17.08632	172.6823
115.7484	12.59052	17.14383	173.2474
115.6815	12.62906	17.19628	173.6799
115.5629	12.6805	17.26627	174.2754
115.44	12.72255	17.32349	174.8331
115.2847	12.76477	17.38094	175.4927
115.1815	12.79196	17.41795	175.9451
115.0408	12.8263	17.46467	176.5965
114.9504	12.84871	17.49517	177.0373
114.8485	12.88391	17.54306	177.5417
114.7621	12.92317	17.59649	177.9508
114.6144	12.97601	17.66839	178.5625
114.4716	13.01863	17.72638	179.1296
114.3001	13.06045	17.78329	179.7504
114.1311	13.10157	17.83924	180.362
113.9215	13.15299	17.90922	181.0925
113.7007	13.20736	17.9832	181.8339
113.4632	13.26595	18.06294	182.5792
113.199	13.32614	18.14483	183.3716
112.9002	13.38124	18.21981	184.2182

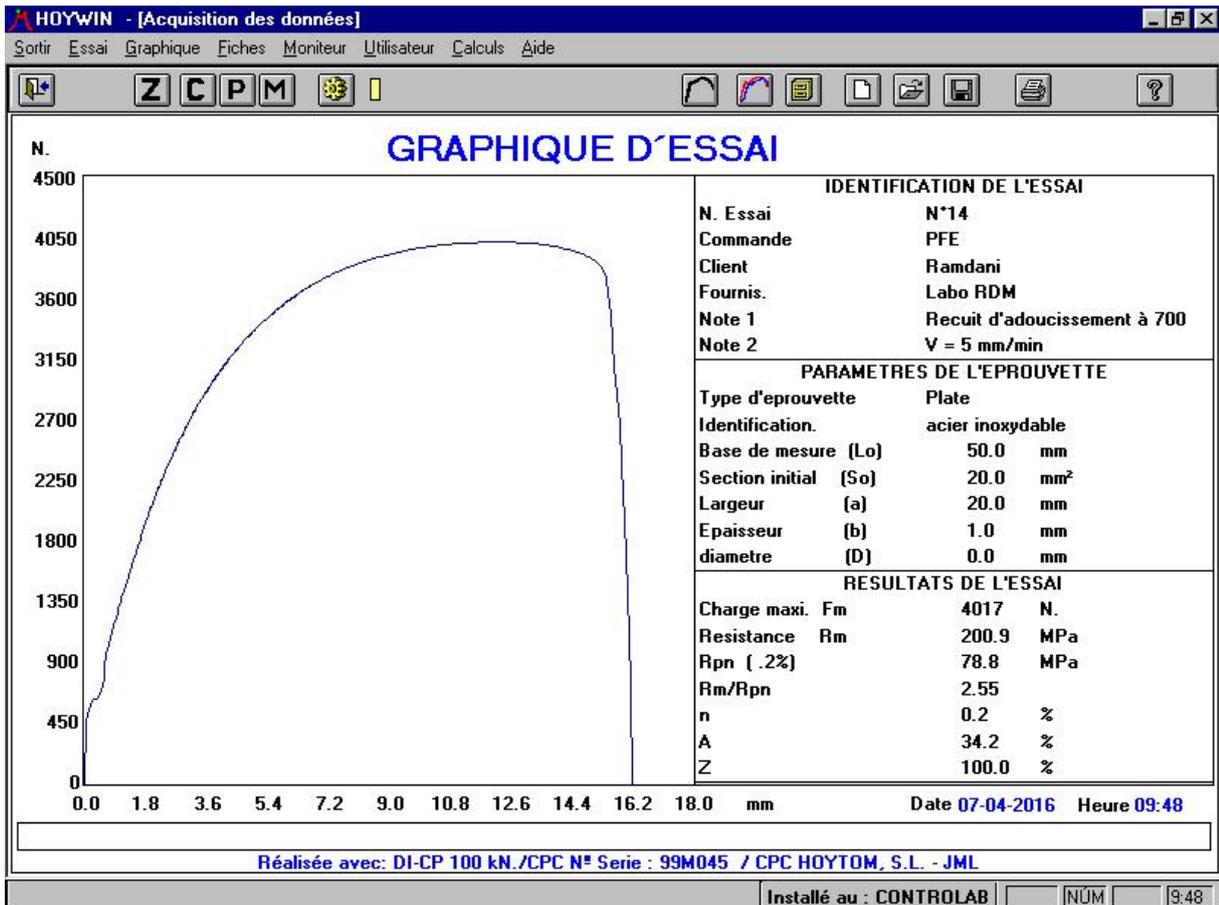
112.6066	13.43482	18.29273	184.9749
112.2884	13.48747	18.36436	185.7466
111.9704	13.54748	18.44602	186.4703
111.5976	13.60707	18.52711	187.3304
111.2891	13.65691	18.59494	188.0321
110.9682	13.70025	18.6539	188.7075
110.7123	13.74053	18.70872	189.2249
110.3576	13.79265	18.77964	189.8815
109.9765	13.84977	18.85737	190.5453
109.4645	13.91056	18.94008	191.3703
109.0304	13.95933	19.00645	192.0531
108.5777	14.00902	19.07406	192.7507
108.1318	14.05675	19.13901	193.4117
107.6835	14.10427	19.20368	194.0685
107.2123	14.14963	19.2654	194.717
106.6545	14.19149	19.32237	195.3741
105.9654	14.24354	19.39318	196.1412
105.2081	14.29645	19.46519	196.899
104.3012	14.3574	19.54813	197.677
103.4602	14.40883	19.61811	198.3472
102.3477	14.45852	19.68573	199.0548
100.934	14.50283	19.74602	199.7374
99.40572	14.54571	19.80437	200.4224
97.4697	14.59103	19.86605	201.0809
94.87586	14.63267	19.9227	201.7457
91.41891	14.68712	19.9968	202.5061
87.53764	14.7388	20.06713	203.2421
83.6776	14.79958	20.14983	203.9044
78.63533	14.85538	20.22576	204.6673
73.39848	14.9106	20.3009	205.3923

67.40071	14.96404	20.37361	206.1189
60.89339	15.02256	20.45325	206.7722
49.99368	15.08624	20.5399	207.5432
39.47532	15.13824	20.61067	208.2021
22.49357	15.18669	20.67659	208.818
-4.077179	15.23825	20.74675	209.326
-41.07131	15.30313	20.83504	209.9358
-75.71294	15.37227	20.92912	210.5553
-99.84677	15.44062	21.02212	211.2302
-115.2316	15.50673	21.11208	211.9621
-126.2525	15.57449	21.20429	212.7494
-134.6827	15.63736	21.28984	213.5593
-141.0717	15.70007	21.37518	214.2527
-147.2175	15.76222	21.45975	214.917
-154.3494	15.82651	21.54723	215.5515
-164.1143	15.89053	21.63434	216.2623
-177.1701	15.95223	21.7183	216.9707
-194.2455	16.00962	21.7964	217.6286
-213.2402	16.06763	21.87534	218.1658
-236.5462	16.12813	21.95766	218.5919
-255.3196	16.17919	22.02715	218.8835
-270.6134	16.21662	22.07808	219.1261
-277.0812	16.24572	22.11767	219.3649
-281.3453	16.28615	22.17269	219.7252
-283.5226	16.33893	22.24451	220.263
-284.8159	16.40527	22.33478	220.9656
-285.516	16.47527	22.43003	221.7999
-286.3821	16.55156	22.53385	222.55
-286.4167	16.62612	22.6353	223.636
-286.4167	16.62612	22.6353	223.636





## **Annexe 1 : Résultats expérimentaux**



23.56936	5.815923E-02	0.3355642	0.3621172
24.70942	5.859733E-02	0.3362865	0.4301172
25.80891	8.551955E-02	0.380674	0.5485172
26.71133	0.1039127	0.4109994	0.6517972
27.45717	0.1167845	0.4322215	0.7621332
28.07877	0.124738	0.4453347	0.8710564
28.66971	0.139859	0.4702652	0.9809083

29.24586	0.1586825	0.5013	1.090663
29.77296	0.1788592	0.534566	1.200385
30.25196	0.1911135	0.55477	1.31028
30.66357	0.2070625	0.5810657	1.420203
31.02458	0.223221	0.6077067	1.530167
31.32006	0.2429427	0.6402224	1.640144
31.54775	0.255569	0.6610398	1.750133
31.70843	0.2662568	0.6786611	1.860126
31.78236	0.2825514	0.7055266	1.992122
31.84373	0.3166887	0.7618098	2.19452
31.95922	0.3558377	0.826356	2.415399
32.29879	0.3893616	0.8816279	2.643854
32.82407	0.4160824	0.9256833	2.810721
33.50991	0.4427797	0.9697	2.966785
34.24073	0.4674091	1.010307	3.096571
35.00588	0.4811327	1.032934	3.219742
35.786	0.498647	1.06181	3.336333
36.56952	0.5194536	1.096115	3.450285
37.35202	0.5414729	1.132419	3.562394
38.12971	0.5549608	1.154657	3.673606
38.88936	0.5624432	1.166993	3.78427
39.64976	0.5667249	1.174052	3.894646
41.46689	0.5710393	1.181165	4.004854
43.49859	0.5862071	1.206173	4.11497
45.77393	0.6045463	1.23641	4.225035
47.06657	0.6239632	1.268423	4.335072
48.21046	0.6332132	1.283674	4.445091
49.12431	0.6466516	1.30583	4.555103
49.96633	0.6652817	1.336546	4.665109
50.74527	0.685523	1.369918	4.775113

51.49758	0.7003586	1.394378	4.885115
52.22963	0.7119445	1.41348	4.995116
52.95291	0.7303842	1.443882	5.105116
53.65961	0.7508911	1.477693	5.215117
54.36219	0.7692859	1.508021	5.325117
55.06167	0.7786773	1.523505	5.435317
55.76891	0.7863731	1.536193	5.545357
56.4655	0.802828	1.563323	5.655405
57.22753	0.8223065	1.595438	5.776823
57.99383	0.8420906	1.628056	5.900116
58.78566	0.8522856	1.644865	6.026058
59.50745	0.8670415	1.669194	6.141305
60.2228	0.8863279	1.700992	6.255543
60.91593	0.9070535	1.735163	6.36744
61.60436	0.9243417	1.763666	6.478667
62.28374	0.9466518	1.80045	6.589292
62.95144	0.9690143	1.837319	6.699662
63.62208	0.9886723	1.86973	6.809861
64.29622	0.9973983	1.884117	6.919975
64.97514	1.00334	1.893913	7.030037
65.64263	1.008617	1.902614	7.140073
66.2917	1.022874	1.92612	7.250093
66.94395	1.041106	1.956179	7.360103
67.60401	1.060258	1.987756	7.470109
68.27583	1.07046	2.004576	7.580113
68.94366	1.081253	2.022372	7.690114
69.60141	1.09726	2.048761	7.800116
70.26166	1.11636	2.080252	7.910116
70.91729	1.1334	2.108347	8.020117
71.55956	1.144789	2.127124	8.130116

72.19624	1.16149	2.15466	8.240117
72.82896	1.181463	2.18759	8.350117
73.47633	1.202566	2.222384	8.460117
74.11533	1.218311	2.248343	8.570117
74.75075	1.23661	2.278513	8.680118
75.45285	1.257277	2.312587	8.801917
76.16383	1.276672	2.344564	8.925278
76.88926	1.288609	2.364245	9.05131
77.54408	1.296458	2.377186	9.166388
78.19683	1.310434	2.400229	9.28061
78.8251	1.329388	2.431479	9.39247
79.45473	1.349597	2.464797	9.503686
80.06984	1.362409	2.485922	9.614302
80.68897	1.374111	2.505215	9.724669
81.30362	1.391554	2.533974	9.834865
81.92033	1.411447	2.566772	9.944977
82.54151	1.428436	2.594783	10.05524
83.15617	1.440265	2.614285	10.16531
83.7654	1.458215	2.643879	10.27538
84.36635	1.477764	2.676111	10.38521
84.95592	1.497275	2.708279	10.49519
85.53982	1.507696	2.72546	10.60515
86.11251	1.514796	2.737166	10.71514
86.68646	1.521113	2.747581	10.82513
87.26212	1.534255	2.769249	10.93512
87.84573	1.552795	2.799818	11.04512
88.43234	1.571202	2.830165	11.15512
89.01424	1.584714	2.852443	11.26512
89.59174	1.60343	2.883301	11.37512
90.16225	1.623734	2.916776	11.48512

90.73055	1.644194	2.95051	11.59512
91.30389	1.654692	2.967817	11.70512
91.93011	1.662875	2.981309	11.82672
92.56885	1.675956	3.002876	11.95004
93.21489	1.694358	3.033217	12.07602
93.808	1.714132	3.065819	12.19128
94.38856	1.72713	3.087249	12.30553
94.93867	1.735239	3.100617	12.41743
95.48997	1.749098	3.123467	12.52866
96.04053	1.76805	3.154715	12.63929
96.60239	1.788294	3.188091	12.74966
97.16041	1.80126	3.209468	12.85986
97.72212	1.813967	3.230419	12.96997
98.27662	1.833487	3.262602	13.08004
98.82486	1.854434	3.297139	13.19007
99.35246	1.8712	3.324781	13.30009
99.87968	1.87889	3.337459	13.4101
100.4068	1.884192	3.346201	13.52011
100.9341	1.895813	3.365361	13.63011
101.457	1.913903	3.395188	13.74012
101.9645	1.934054	3.428411	13.85012
102.4839	1.94809	3.451552	13.96012
102.9947	1.964508	3.478621	14.07012
103.5121	1.984632	3.5118	14.18012
104.0195	2.005768	3.546648	14.29012
104.5312	2.019	3.568464	14.40012
105.0417	2.032171	3.59018	14.51012
105.556	2.049347	3.618498	14.62012
106.0663	2.06983	3.652269	14.73012
106.6203	2.086503	3.679758	14.85192

107.1704	2.097216	3.697421	14.97528
107.7363	2.108552	3.716111	15.10131
108.2522	2.12433	3.742124	15.21639
108.7741	2.143873	3.774346	15.33061
109.2679	2.160254	3.801353	15.44247
109.7549	2.174528	3.824888	15.55369
110.227	2.192613	3.854705	15.6643
110.7064	2.212913	3.888174	15.77467
111.1856	2.231195	3.918316	15.88486
111.664	2.241665	3.935579	15.99498
112.1322	2.250082	3.949456	16.10504
112.5929	2.265813	3.975392	16.21507
113.0487	2.285291	4.007506	16.32509
113.5084	2.304873	4.039791	16.4351
113.9689	2.315557	4.057405	16.54511
114.4268	2.323659	4.070765	16.65511
114.8789	2.339398	4.096714	16.76511
115.3294	2.358726	4.12858	16.87512
115.7806	2.378338	4.160916	16.98512
116.2377	2.388968	4.178441	17.09512
116.6832	2.397067	4.191795	17.20512
117.1734	2.415109	4.221541	17.32692
117.662	2.434927	4.254215	17.45028
118.1619	2.45542	4.288003	17.57631
118.6118	2.47025	4.312454	17.69139
119.0512	2.490821	4.346369	17.80561
119.4868	2.511991	4.381274	17.91747
119.9104	2.528629	4.408705	18.02869
120.3405	2.538829	4.425521	18.1393
120.7609	2.552019	4.447269	18.24967

121.1921	2.570321	4.477444	18.35986
121.623	2.589657	4.509323	18.46998
122.0575	2.604215	4.533327	18.58004
122.4813	2.612019	4.546192	18.69007
122.8971	2.624987	4.567573	18.80009
123.3094	2.643028	4.597317	18.9101
123.7207	2.663731	4.631452	19.02011
124.1283	2.677544	4.654225	19.13011
124.5395	2.685414	4.667202	19.24011
124.951	2.700006	4.691259	19.35012
125.3595	2.718943	4.722481	19.46012
125.7628	2.740091	4.757349	19.57012
126.1738	2.752561	4.777908	19.68012
126.5812	2.760134	4.790394	19.79012
126.9857	2.767833	4.803088	19.90012
127.3768	2.784715	4.830923	20.01012
127.7623	2.803665	4.862165	20.12012
128.1438	2.822052	4.89248	20.23012
128.5205	2.838953	4.920347	20.34012
128.9089	2.860219	4.955409	20.45012
129.3024	2.88221	4.991665	20.56012
129.6905	2.897073	5.016171	20.67012
130.0746	2.904825	5.028951	20.78012
130.4935	2.911252	5.039548	20.90172
130.9229	2.925836	5.063592	21.02504
131.3538	2.944658	5.094625	21.15102
131.7517	2.964259	5.126942	21.26628
132.1514	2.976424	5.146999	21.38053
132.5501	2.992562	5.173606	21.49243
132.9441	3.012022	5.20569	21.60366

133.319	3.031828	5.238346	21.71429
133.6725	3.044749	5.259648	21.82466
134.0183	3.056978	5.279809	21.93486
134.3665	3.076656	5.312253	22.04498
134.7302	3.097539	5.346684	22.15504
135.0991	3.115291	5.375953	22.26507
135.473	3.124014	5.390335	22.37509
135.8432	3.138216	5.41375	22.4851
136.2152	3.156569	5.44401	22.59511
136.5847	3.176733	5.477254	22.70511
136.9514	3.190325	5.499663	22.81511
137.3001	3.198043	5.512389	22.92512
137.6526	3.205293	5.524342	23.03512
137.9984	3.221412	5.550917	23.14512
138.3509	3.240616	5.58258	23.25512
138.6942	3.259663	5.613983	23.36512
139.0323	3.269071	5.629494	23.47512
139.3699	3.279538	5.646751	23.58512
139.7051	3.297603	5.676537	23.69512
140.0342	3.317667	5.709616	23.80512
140.3906	3.335253	5.73861	23.92692
140.7523	3.344131	5.753248	24.05028
141.1219	3.358943	5.77767	24.17631
141.4535	3.378243	5.80949	24.29139
141.782	3.398982	5.843683	24.40561
142.1075	3.414257	5.868867	24.51747
142.4387	3.431362	5.897069	24.62869
142.7664	3.45023	5.928177	24.7393
143.0858	3.469845	5.960517	24.84967
143.3968	3.482493	5.98137	24.95987

143.6957	3.491494	5.99621	25.06998
144.001	3.500952	6.011804	25.18004
144.3133	3.518237	6.040303	25.29007
144.6388	3.537796	6.07255	25.40009
144.9619	3.555125	6.101121	25.5101
145.2816	3.571087	6.127439	25.62011
145.5949	3.592042	6.161987	25.73011
145.9019	3.613693	6.197683	25.84011
146.2017	3.629214	6.223274	25.95012
146.5027	3.637439	6.236835	26.06012
146.8056	3.647024	6.252637	26.17012
147.1055	3.664824	6.281986	26.28012
147.3909	3.684482	6.314395	26.39012
147.6698	3.701845	6.343023	26.50012
147.9441	3.71051	6.357309	26.61012
148.2258	3.71929	6.371785	26.72012
148.5083	3.736432	6.400047	26.83012
148.8257	3.755297	6.431151	26.95172
149.1474	3.774275	6.462441	27.07504
149.4747	3.792743	6.492888	27.20102
149.7764	3.813416	6.526973	27.31628
150.0759	3.834927	6.562438	27.43053
150.3722	3.84808	6.584126	27.54243
150.6549	3.856653	6.59826	27.65366
150.9296	3.865158	6.612282	27.76429
151.1987	3.88199	6.640033	27.87466
151.4682	3.901471	6.672153	27.98486
151.7299	3.919516	6.701904	28.09497
151.995	3.929834	6.718916	28.20504
152.2667	3.942656	6.740056	28.31507

152.55	3.95868	6.766474	28.42509
152.8325	3.977164	6.79695	28.5351
153.111	3.991653	6.820838	28.64511
153.3858	4.006334	6.845043	28.75511
153.6579	4.025555	6.876734	28.86511
153.9314	4.046019	6.910472	28.97512
154.2092	4.063858	6.939885	29.08512
154.4757	4.073219	6.955319	29.19512
154.7399	4.080651	6.967573	29.30512
154.9926	4.092271	6.986731	29.41512
155.2483	4.110085	7.0161	29.52512
155.4976	4.129593	7.048265	29.63512
155.7465	4.143533	7.071247	29.74512
155.9943	4.157108	7.093629	29.85532
156.2669	4.176439	7.1255	29.97716
156.5413	4.197375	7.160019	30.10056
156.8348	4.213778	7.187062	30.22641
157.0985	4.222418	7.201308	30.34147
157.3657	4.233052	7.218841	30.45565
157.6145	4.249358	7.245725	30.56749
157.8715	4.269014	7.278132	30.6787
158.13	4.285463	7.305253	30.78931
158.4245	4.308856	7.343822	30.92167
158.7212	4.331414	7.381013	31.05827
159.0171	4.355136	7.420125	31.20006
159.2826	4.365154	7.436641	31.32174
159.591	4.385555	7.470276	31.46243
159.935	4.406228	7.504361	31.6249
160.2901	4.431641	7.546259	31.79554
160.6012	4.453427	7.582179	31.95016

160.8683	4.477397	7.621699	32.08121
161.1178	4.498384	7.656301	32.20435
161.3975	4.512561	7.679675	32.34338
161.678	4.530199	7.708756	32.48382
161.9716	4.550918	7.742915	32.62771
162.224	4.571274	7.776478	32.75037
162.4766	4.584001	7.79746	32.86969
162.7337	4.597707	7.820059	32.99588
163.0004	4.615913	7.850075	33.12198
163.2625	4.636593	7.884171	33.24944
163.5023	4.65231	7.910084	33.36536
163.7328	4.661494	7.925226	33.48003
163.9566	4.671132	7.941116	33.59215
164.1845	4.687435	7.967995	33.70351
164.4451	4.706978	8.000216	33.8362
164.7174	4.724372	8.028894	33.97301
164.991	4.736301	8.048563	34.11491
165.2509	4.75661	8.082047	34.25866
165.5078	4.777647	8.116732	34.40378
165.7702	4.809295	8.16891	34.54956
166.0148	4.834362	8.210238	34.67374
166.2822	4.860266	8.252948	34.81573
166.5404	4.875676	8.278355	34.95696
166.8363	4.897885	8.314971	35.12361
167.144	4.920232	8.351816	35.29519
167.5017	4.954397	8.408145	35.49483
167.833	4.981491	8.452815	35.67907
168.1828	5.008391	8.497166	35.87765
168.4939	5.023027	8.521297	36.05322
168.79	5.044372	8.556488	36.22704

169.0278	5.065923	8.59202	36.36212
169.2527	5.087774	8.628047	36.4899
169.4988	5.106561	8.659021	36.63047
169.7481	5.128899	8.69585	36.77215
170.034	5.151713	8.733465	36.93859
170.3303	5.168244	8.760721	37.11022
170.6589	5.191201	8.79857	37.30983
170.9945	5.214742	8.837383	37.51608
171.3435	5.251522	8.898024	37.72925
171.6814	5.279671	8.944433	37.94514
171.9767	5.318263	9.00806	38.14095
172.238	5.346493	9.054605	38.31129
172.4885	5.373129	9.098521	38.47252
172.7681	5.398574	9.140473	38.64883
173.0425	5.42314	9.180976	38.82634
173.3088	5.44785	9.221715	38.99691
173.5682	5.470361	9.258831	39.16552
173.8599	5.495158	9.299714	39.35436
174.167	5.521816	9.343666	39.55725
174.4571	5.544178	9.380534	39.74559
174.736	5.568218	9.420171	39.93384
175.0217	5.594463	9.463442	40.11895
175.3259	5.626436	9.516155	40.32563
175.6415	5.653577	9.560904	40.53599
175.9635	5.685291	9.613192	40.7514
176.2884	5.712238	9.65762	40.96855
176.599	5.752564	9.724107	41.18706
176.8988	5.785181	9.777884	41.40619
177.1876	5.814183	9.825701	41.62572
177.4937	5.8372	9.863649	41.85725

177.806	5.862809	9.905871	42.09047
178.1249	5.901419	9.969529	42.32642
178.4259	5.933073	10.02172	42.55145
178.7299	5.963326	10.0716	42.77564
178.9871	5.988247	10.11269	42.97549
179.2388	6.014106	10.15532	43.1703
179.4667	6.039322	10.19689	43.35923
179.7029	6.066206	10.24122	43.54597
179.9198	6.091539	10.28299	43.73111
180.1259	6.12205	10.33329	43.91549
180.3481	6.147985	10.37605	44.12139
180.5967	6.175123	10.42079	44.33144
180.823	6.205248	10.47046	44.52464
181.0518	6.231584	10.51388	44.71529
181.2896	6.260895	10.56221	44.91365
181.571	6.288402	10.60756	45.13446
181.868	6.314735	10.65098	45.36129
182.1516	6.349057	10.70756	45.58222
182.4248	6.376246	10.75239	45.80377
182.6858	6.412922	10.81286	46.02427
182.9335	6.441105	10.85933	46.24468
183.1816	6.473708	10.91308	46.46486
183.4211	6.505202	10.965	46.68498
183.674	6.538119	11.01928	46.92704
183.9179	6.574936	11.07998	47.17347
184.1715	6.604028	11.12794	47.42517
184.4078	6.636429	11.18136	47.6568
184.648	6.663523	11.22603	47.89726
184.884	6.691566	11.27227	48.13468
185.0985	6.719526	11.31837	48.35126

185.3141	6.745581	11.36132	48.55126
185.5181	6.779646	11.41749	48.74457
185.738	6.808601	11.46523	48.95524
185.9452	6.846459	11.52765	49.16803
186.1718	6.878426	11.58035	49.40673
186.4046	6.918291	11.64608	49.65102
186.6481	6.951055	11.7001	49.90162
186.8862	6.989808	11.76399	50.1546
187.1373	7.022335	11.81762	50.43131
187.3861	7.065478	11.88875	50.71325
187.6536	7.103757	11.95186	51.01198
187.9052	7.149367	12.02706	51.29312
188.1624	7.187034	12.08916	51.59609
188.3901	7.2295	12.15918	51.86691
188.6157	7.260468	12.21024	52.13567
188.8348	7.291414	12.26126	52.37558
189.0659	7.318651	12.30616	52.63132
189.3158	7.358764	12.3723	52.90645
189.5675	7.3986	12.43798	53.21062
189.8143	7.443681	12.51231	53.52449
190.0448	7.487442	12.58445	53.83589
190.2685	7.53023	12.655	54.12615
190.4711	7.574903	12.72865	54.38948
190.6653	7.610179	12.78681	54.6534
190.8429	7.654616	12.86008	54.91265
191.0397	7.687784	12.91477	55.19328
191.2305	7.731284	12.98648	55.45526
191.4368	7.767478	13.04616	55.73978
191.6373	7.812186	13.11987	56.02508
191.852	7.851745	13.18509	56.33704

192.0867	7.892591	13.25244	56.6545
192.3163	7.93715	13.3259	56.96738
192.5346	7.988364	13.41034	57.30244
192.737	8.03661	13.48988	57.64103
192.9407	8.083044	13.56644	57.97377
193.1548	8.118767	13.62534	58.26203
193.3368	8.161772	13.69624	58.54023
193.5187	8.209919	13.77563	58.85152
193.6946	8.257943	13.8548	59.18942
193.8922	8.305008	13.9324	59.53926
194.0902	8.340579	13.99105	59.8858
194.2563	8.383093	14.06114	60.19008
194.4172	8.425927	14.13176	60.49685
194.5769	8.470712	14.2056	60.80606
194.7695	8.520051	14.28695	61.16025
194.969	8.573271	14.37469	61.53433
195.172	8.623432	14.4574	61.89999
195.3579	8.673815	14.54046	62.26793
195.5254	8.721229	14.61864	62.61266
195.6754	8.780162	14.7158	62.97519
195.8427	8.830759	14.79922	63.35864
196.0113	8.884891	14.88847	63.74984
196.2008	8.938209	14.97638	64.14677
196.3983	9.003145	15.08344	64.56839
196.6067	9.070507	15.1945	65.0401
196.7946	9.142027	15.31242	65.53857
196.9749	9.211581	15.4271	66.0296
197.161	9.280431	15.54061	66.50251
197.3629	9.340016	15.63885	66.9585
197.535	9.395821	15.73086	67.36427

197.6978	9.451155	15.82209	67.75662
197.8577	9.514427	15.92641	68.18024
198.0393	9.580862	16.03594	68.66264
198.2237	9.650953	16.1515	69.18485
198.3976	9.720387	16.26598	69.68277
198.5674	9.791474	16.38318	70.1946
198.7225	9.863993	16.50275	70.70454
198.891	9.938594	16.62575	71.2389
199.0302	10.01539	16.75236	71.76676
199.1678	10.08774	16.87165	72.2982
199.2589	10.15665	16.98527	72.80707
199.3646	10.22513	17.09817	73.32313
199.4647	10.29099	17.20675	73.83611
199.5856	10.36303	17.32553	74.34992
199.6896	10.43406	17.44263	74.87428
199.79	10.51113	17.5697	75.42291
199.8725	10.58505	17.69157	75.97851
199.9665	10.66127	17.81724	76.52975
200.045	10.7336	17.9365	77.03712
200.1164	10.80386	18.05233	77.53484
200.1796	10.8748	18.1693	78.03246
200.2464	10.9444	18.28406	78.55053
200.3368	11.02217	18.41228	79.11667
200.4115	11.097	18.53564	79.66351
200.4869	11.17261	18.6603	80.19411
200.5299	11.24558	18.78062	80.68539
200.5797	11.3191	18.90183	81.20877
200.6203	11.3939	19.02515	81.7527
200.6638	11.4673	19.14617	82.29536
200.6968	11.53772	19.26227	82.84268

200.7352	11.60955	19.3807	83.39068
200.7719	11.67653	19.49113	83.92875
200.7907	11.74428	19.60284	84.42096
200.8162	11.80618	19.70489	84.88001
200.8381	11.8692	19.80879	85.29026
200.867	11.93244	19.91306	85.70612
200.869	12.00111	20.02628	86.11335
200.8551	12.07097	20.14146	86.60816
200.8433	12.14174	20.25815	87.10757
200.8279	12.21388	20.37707	87.62542
200.8179	12.28614	20.49621	88.14767
200.8157	12.35673	20.61261	88.66369
200.8078	12.4214	20.71922	89.17934
200.8041	12.49187	20.83541	89.70547
200.7962	12.5648	20.95566	90.23283
200.7831	12.64449	21.08704	90.76254
200.7464	12.71916	21.21016	91.25914
200.6837	12.79559	21.33617	91.7724
200.6146	12.87041	21.45952	92.32638
200.5515	12.94545	21.58324	92.85963
200.4969	13.01749	21.70202	93.37408
200.4507	13.09065	21.82264	93.85861
200.4093	13.1636	21.94292	94.36561
200.347	13.23446	22.05974	94.89391
200.2673	13.29911	22.16633	95.43097
200.1842	13.35966	22.26617	95.94185
200.1169	13.41807	22.36247	96.36044
200.0629	13.47817	22.46155	96.75533
199.9713	13.53937	22.56245	97.15922
199.8399	13.60532	22.67118	97.64919

199.6607	13.67484	22.78581	98.14695
199.4925	13.745	22.90148	98.6415
199.3351	13.81867	23.02294	99.15876
199.1926	13.88947	23.13968	99.66912
199.0408	13.96179	23.25891	100.1826
198.8675	14.03497	23.37957	100.6954
198.6745	14.11127	23.50537	101.2527
198.4604	14.18918	23.63383	101.8303
198.2517	14.2616	23.75322	102.3763
198.0258	14.3308	23.86732	102.898
197.7833	14.40067	23.98251	103.4189
197.4926	14.47088	24.09826	103.9575
197.1864	14.53967	24.21169	104.4773
196.8755	14.60181	24.31413	104.953
196.6159	14.66016	24.41034	105.34
196.3259	14.72047	24.50978	105.7435
196.0254	14.78373	24.61407	106.1326
195.6182	14.84799	24.72002	106.6203
195.1827	14.90959	24.82158	107.0816
194.6622	14.96865	24.91896	107.5795
194.1773	15.02792	25.01667	107.9913
193.6103	15.0875	25.11491	108.4042
192.9242	15.14543	25.21042	108.8004
192.0063	15.20561	25.30964	109.2372
190.8328	15.267	25.41085	109.6678
189.0728	15.33019	25.51503	110.1271
187.1935	15.39131	25.61582	110.525
182.0247	15.44925	25.71134	110.9165
174.4587	15.5108	25.81282	111.2834
164.3313	15.57275	25.91496	111.71

154.554	15.63979	26.02548	112.1658
144.6883	15.70517	26.13327	112.6282
132.8797	15.78011	26.25683	113.1199
118.6305	15.85698	26.38357	113.5967
97.59721	15.93931	26.51932	114.0882
70.89342	16.01569	26.64524	114.5348
37.97661	16.09278	26.77234	114.9535
-3.124063	16.16739	26.89536	115.3017
-55.71194	16.24794	27.02817	115.5871
-109.279	16.33086	27.16488	115.8238
-150.9544	16.40548	27.2879	116.0163
-174.2604	16.4611	27.3796	116.1903
-186.5935	16.50765	27.45636	116.3956
-193.6557	16.55885	27.54077	116.6694
-197.605	16.62044	27.64232	117.0291
-199.8245	16.68744	27.75278	117.4308
-201.0577	16.75722	27.86783	117.88
-201.7526	16.84467	28.012	118.443
-202.5972	16.9021	28.1067	118.8451
-202.6515	17.04829	28.34772	119.7641
-202.7199	17.12344	28.47162	120.2241



