

Université du 8 Mai Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique



**LE CALCUL DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE  
REPOSANT SUR UN MILIEU ELASTIQUE DE  
PROPRIETES DISTRIBUTIVES EN COORDONNEES  
POLAIRES**

***Sous La Direction:***

***Pr : GUENFOUD***

***Présenté Par :***

***SEDDIKI NADIA***

***Année Universitaire 2014/2015***

# Sommaire

Résumé.....	1
Introduction générale.....	2
CHAPITRE I	
1. Introduction.....	4
2. Synthèse des travaux effectués sur cette thématique.....	4
3. Problématique.....	9
3.1 Description de la méthode de calcul.....	9
3.2 Problème posé.....	13
4. Conclusion.....	13
CHAPITRE II	
1. Introduction .....	15
2. Fonction de Green.....	15
2.1 Formule générale.....	15
2.2 Procédure d'intégration.....	16
3. Remarque.....	18
4. Conclusion.....	20
CHAPITRE III	
1. Introduction.....	22
2. Solution de Clebsch.....	22
3. Application de la méthode de Ritz.....	24
4. Conclusion.....	28

## CHAPITRE IV

1. Introduction.....	30
2. Caractéristiques et géométriques.....	30
3. Discrétisation du étudié.....	30
3.1 Détermination des fréquences propres de la plaque.....	32
3.2 Détermination des modes propres de la plaque.....	33
4. Réponse de la plaque circulaire reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés distributives à une excitation harmonique.....	35
5. Conclusion.....	39
Conclusion générale .....	41
Références bibliographiques.....	43

Annexes

## Résumé

Ce travail est focalisé sur une approche semi-analytique permettant le calcul dynamique des plaques reposant sur milieu élastique de propriétés distributives en coordonnées polaires. Ce type d'études est associé à de grands challenges mathématiques et souvent amène à de processus de calcul irréalisable. C'est pourquoi, le calcul de poutres et plaques reposant sur milieux élastiques en statique ou en dynamique n'est pas réalisé complètement à nos jours. Pour accomplir ce travail, les déflexions de la plaque sont déterminées par la méthode de Ritz, et les déplacements verticaux de la surface du milieu élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq) sont déterminés par l'étude de la fonction de Green.

Le couplage de ses deux études est accompli par la méthode mixte, connue dans la théorie d'élasticité, et connue aussi par la méthode de Zhemochkin. Cette méthode permet la détermination des forces réactives dans la zone de contact entre la plaque et la surface du milieu élastique ce qui permettra après de déterminer les autres différentes entités physiques, à savoir les déplacements verticaux de la zone de contact, rotation de la plaque par rapport aux axes de coordonnées, fréquences et modes propres de la plaque, efforts internes dans les sections de la plaque etc. Les fréquences propres et modes propres de la plaque, ainsi que sa réponse à une excitation extérieure harmonique quelconque sont déterminés.

## Introduction Générale

L'étude dynamique ou statique de poutres et plaques reposant sur milieux élastiques de différents modèles est un sujet d'actualité et de grande importance que ce soit pour les chercheurs de ce domaine ou pour constructeurs vu la place qu'occupe dans le building moderne. Cependant, étudier le comportement dynamique de ce genre de constructions est lié à de très grandes difficultés mathématiques ce qui mène souvent soit à de processus de calcul non pratiqués, soit à de résultats non précis et donc au détriment de l'économie de réalisation. Pour ces raisons et d'autres, l'analyse dynamique de structures en interaction avec sol ou autre milieu n'est pas résolue complètement et d'une manière satisfaisante à nos jours. Dans ce contexte, la nécessité de développer les approches de calculs existants ou de proposer de nouvelles approches plus précises et plus efficaces est indispensable.

Dans ce contexte, ce travail est focalisé sur une approche semi-analytique permettant le calcul dynamique des plaques reposant sur milieu élastique de propriétés distributives en coordonnées polaires.

Pour accomplir cette tâche, le contenu de ce travail est détaillé comme suit dans les différentes parties de ce mémoire. Un sommaire ; un résumé ; une introduction générale ; chapitre 1 consacré à l'étude bibliographique des différents travaux de recherche effectué dans le domaine des problèmes de contact, ainsi qu'aux différentes théories dans le domaine du calcul dynamique des différentes structures. Dans ce chapitre aussi on trouve une description détaillée de la méthode de calcul utilisée ; Chapitre 2 est consacré à l'étude de la fonction de Green définissant les déplacements verticaux de la surface du milieu élastique dans la zone de contact avec la plaque. A noter que le modèle étudié est ce de Boussinesq, c'est-à-dire milieu élastique de propriétés distributives ; le troisième chapitre est consacré à la détermination des déflexions de la plaque circulaire en utilisant la méthode Ritz basant sur la variation de l'énergie de déformation de la plaque ; Le quatrième chapitre est consacré à un exemple de calcul dynamique d'une plaque circulaire reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés distributives. Modélisation de la structure, détermination des fréquences et modes propres de la plaque, ainsi que sa réponse à une excitation harmonique extérieure représentent l'ensemble de cette étude dynamique. Enfin, une conclusion générale, références bibliographique et annexes sont données dans ce mémoire.

# ***CHAPITRE I***

***CALCUL DYNAMIQUE DES PLAQUES REPOSANT***

***SUR MILIEUX ELASTIQUES DE DIFFERENTS TYPES***

## **1. Introduction :**

Ce travail est focalisé sur une approche semi-analytique permettant le calcul dynamique de poutres et plaques reposant sur la surface d'un milieu élastique de propriétés distributives en coordonnées polaires. Donc l'étude dynamique de poutres et plaques reposant sur milieux élastiques de différents types, faisant partie des problèmes de contact, est un sujet d'actualité et de grande importance que ce soit sur le plan recherche ou sur le plan construction vu la place importante qu'occupe dans le building.

## **2. Synthèse des travaux de recherche effectués sur cette thématique**

La consultation de la bibliographie de quelques travaux de recherche faits sur cette thématique nous a mené à faire la synthèse abrégée suivante :

Une procédure introduisant la méthode des éléments finis et la méthode des ressorts a été développée et appliqué pour le traitement de la réponse dynamique d'une plaque reposant sur milieu élastique et soumise à de charges mobiles est faite par Huang, M.H. and Thambiratnam dans leur travail [1]. Les résultats trouvés dans leur étude indiquent que l'épaisseur du milieu élastique et la vitesse et les fréquences d'excitation exercée sur la plaque ont un effet significatif sur la réponse dynamique de la plaque. Ont proposé quelques algorithmes pour des applications pratiques.

Une méthode mixte pour le calcul dynamique d'une fondation reposant sur sol est présentée dans le travail [2]. Dans ce travail, le semi-infini est modélisé analytiquement, par contre la fondation est modélisée par la méthode des éléments finis. Des résultats de calcul concernant l'application de leur méthode sur l'analyse dynamique d'une plaque élastique ont été présentés.

Dans le travail [3], est présentée une méthode systématique pour la dérivation du système interactif plaque-semi-infini par une formulation mixte en utilisant la différentiation Gâteaux au lieu du principe variationnel connu de Hellinger-Reissner et Hu-Washizu. Dans l'analyse dynamique, le problème est réduit à la solution standard de fréquences propres où la géométrie et les conditions aux limites de la plaque et du semi-infini sont formulées par la fonctionnelle adéquate. Les résultats de ce travail concernant la vibration libre du système étudié ont été comparés avec bonne concordance avec ceux de la littérature.

Les auteurs du travail [4], ont présenté une approche semi analytique pour l'étude dynamique d'une plaque reposant sur milieu élastique de propriétés inertielles. ce type de calcul est lié à de difficultés mathématiques majeures, c'est pourquoi les auteurs ont donné un détail de l'étude de la fonction de Green définissant les déplacement de la surface du semi infini élastique de propriétés inertielles (principe de Lamb) tenant compte du caractère ondulatoire des déplacements. Les résultats de leur étude présentés concernent les fréquences propres et modes propres du système plaque en interaction avec le semi-infini élastique, ainsi que la réponse de la plaque due à une excitation harmonique extérieure.

Dans le travail [5] est présenté un couple de méthode pour la solution numérique d'une plaque rectangulaire mince reposant sur milieu élastique et géométriquement non linéaire. Le modèle du milieu considéré est de type Winkler-Pasternak. L'étude est faite pour deux cas de conditions aux limites, cas où la plaque est considérée encastree et le cas où la plaque est considérée libre avec plusieurs type de chargement extérieur. Il est aussi étudié l'effet du modèle de Winkler, celui de Pasternak, effet de la masse de la fondation sur la réponse de la plaque et l'influence de l'encastrement sur l'analyse dynamique.

Le travail apporté dans la référence [6] est consacré à l'analyse de la réponse d'une plaque rectangulaire de contour libre reposant sur semi-infini élastique soumise à chargement mobile en utilisant la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière. La matrice de rigidité du système étudié est combinée de la matrice de la plaque et celle du semi-infini en se basant sur les deux méthodes utilisée. La gouvernance de l'équation différentielle du système étudié est résolue par la méthode d'intégration de Newmark. La formulation finale de cette étude est adaptée pour des applications d'ingénierie pour le calcul de n'importe quel type de forme de plaque reposant sur milieu élastique avec de petites modifications.

Dans le travail [7] une étude apportée sur l'effet de la variabilité de l'épaisseur de l'hétérogénéité du matériau d'une plaque circulaire reposant sur milieu élastique sur ses vibrations libres. Dans cette étude, une l'analyse de sensibilité concernant : les différentes conditions aux limites, la variabilité de l'épaisseur de la plaque, les coefficients du milieu élastique sur lequel se repose la plaque, facteur de l'hétérogénéité sur les fréquences propres et modes propres de la plaque a été accomplie.



Une solution concernant les vibrations libres d'une plaque rectangulaire reposant sur milieu élastique de deux différents modèles est donnée dans la référence [8]. Dans cette étude, la solution est donnée sous forme de double série de Fourier et une comparaison des résultats concernant les fréquences et modes propres de la plaque rectangulaire est faite avec ceux disponibles dans la littérature.

Dans la référence [9], une étude est apportée sur le problème de contact axialement symétrique d'une plaque circulaire épaisse reposant sur une surface lisse du semi infini élastique et sollicitée par une charge uniformément répartie sur une zone donnée de la plaque en utilisant la méthode variationnelle. Les résultats de calcul issus de cette étude illustrent la manière avec laquelle les déflexions de la plaque, les contraintes de contact et les moments de flexion peuvent être affectés par la variabilité de l'épaisseur de la plaque.

Un article paru dans [10], propose un modèle de prédiction de vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces comportant de faibles imperfections géométriques. Les équations locales, dans lesquelles a été injecté le défaut de forme, sont discrétisées en utilisant la base des modes propres de plaque circulaire parfaite. Les résultats du modèle, appliqué au cas d'un défaut sphérique, sont comparés au modèle de coque sphérique précédemment développé par d'autres auteurs. Les effets dans le domaine linéaire de l'injection de défauts simples, axisymétriques et asymétriques, par cette méthode sont ensuite présentés puis confrontés à une simulation numérique par la méthode des éléments finis.

Le travail [11] est consacré à la modélisation des vibrations non linéaires de plaques circulaires minces issues de fortes sollicitations causant de mouvements de grandes amplitudes. Cette étude s'enrichit d'une analyse détaillée de l'influence de défauts de formes typiques décrivant l'effet drastique d'imperfections d'amplitudes sur les caractéristiques vibratoires (fréquences propres et tendances de non linéarité) Le modèle est confronté à des analyses expérimentales effectuées sur des coques .La comparaison des résultats de cette études offre d'excellentes conclusions. Les travaux menés ont abouti à la définition d'un schéma numérique conservant l'énergie, adapté à la formulation modale de la dynamique de la plaque imparfaite.

Le travail illustré dans la référence [12] concerne le problème des déflexions des plaques circulaires et annulaires de conditions aux limites libres au niveau du contour. Dans ce travail, est présenté une solution exacte pour ce type de plaques et une comparaison est faite ente le type de

Kirchhoff et celui de Mindlin. Cette relation entre Kirchhoff et Mindlin est peut être utile pour la vérification de la convergence, validité et la concordance des solutions numériques pour ce type de plaques.

Le travail proposé dans la référence [13] concerne le comportement des grandes amplitudes de vibrations libres de plaque rectangulaires, minces et isotropes reposant sur milieu élastique de type Winkler. Cette étude est assumée sous forme d'une simple solution utilisant le principe de Rayleigh-Ritz. La certitude de la méthode de calcul proposée est justifiée par la comparaison de la solution avec celle de la méthode des éléments finis où une concordance des résultats est observée. Une nouvelle version de la méthode des quadratures différentielles est proposée dans la référence [14] pour obtenir les caractéristiques vibratoires d'une plaque rectangulaire reposant la surface d'un milieu élastique contenant n'importe quel nombre de masses. La certitude de cette technique de calcul proposée réside dans la comparaison des résultats de calcul avec d'autres déjà publiés. Les résultats aussi montrent l'efficacité de cette méthode lors du traitement des problèmes de vibrations de plaques rectangulaires reposant sur milieux élastiques.

La référence [15] montre l'utilisation de la méthode de Ritz dans le calcul des problèmes de contact. L'exemple de calcul donné concerne le cas des déplacements d'une plaque rectangulaire déformable reposant sur la surface d'un milieu de type quarter-infini élastique. La détermination des forces de réaction dans la zone de contact représente le grand challenge dans ce domaine et le travail proposé dans cette référence a pu surmonter ce déficit en donnant une solution analytique de la fonction de Green et l'application de la méthode de Ritz a permis de déterminer les déflexions de la plaque puis le couplage des deux solutions. Ce travail donné sous forme d'une solution analytique est le premier dans ce type de problèmes de contact.

Certains types de fondations de différentes constructions sont analysés comme étant de plaque de forme circulaire reposant sur semi-infini élastique. Dans ce contexte, le travail présenté dans la référence [16] présente une analyse de plaques de forme circulaire reposant sur milieu élastique de conditions aux limites particulières. Autrement dit, tenir en considération des contraintes dues à la rigidité de la construction qu'elle supporte et de l'effet de cisaillement transversal associé à la réponse de la plaque. Ces conditions aux limites particulières sont évaluées par l'utilisation de la méthode mixte de la fonctionnelle variationnelle. Les résultats de cette étude

concernant les déflexions de la plaque circulaire, les moments de flexion et de l'effort tranchant ont été présentés.

Le travail apporté dans la référence [17] est consacré à l'étude d'une plaque circulaire reposant sur la surface d'un semi-infini. Les déflexions verticales de la plaque sont dues à une charge uniformément réparties sur la plaque et parfois aussi à l'effet d'autres charges et moments appliqués au contour de la plaque. Les forces de frottement dans la zone de contact entre la plaque et la surface du semi-infini sont considérées et l'épaisseur de la plaque est considérée constante. Les résultats de cette étude peuvent être appliqués au différents cas de structures sous terraines comme le cas les réservoirs cylindriques.

Etude de l'interaction entre la plaque circulaire et la surface du semi-infini élastique (modèle de Boussinesq) est présentée dans la référence [18] pour déterminer la pression réactive dans la zone d'interaction. La plaque circulaire est modélisée par la méthode des éléments finis, tant que les déplacements de la surface du semi-infini élastique sont déterminés par l'évaluation de l'intégration de Boussinesq pour ce cas. Dans cette étude, l'intégration est évaluée analytiquement dans la direction radiale et dans la direction circonférentielle numériquement. Selon cette étude, la séparation de la rigidité relative de la plaque et de la surface du semi-infini élastique est possible, ce qui permet la détermination des pressions réactives dans la zone de contact.

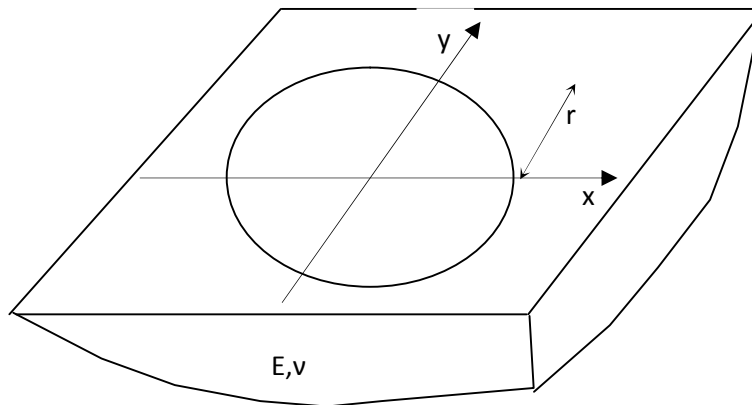
### 3. Problématique

#### 3.1. Description de la méthode de calcul

La méthode de calcul à utiliser pour l'analyse dynamique de plaques reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq) en coordonnées polaires se base sur une approche semi analytique.

La description de la méthode en bref est la suivante :

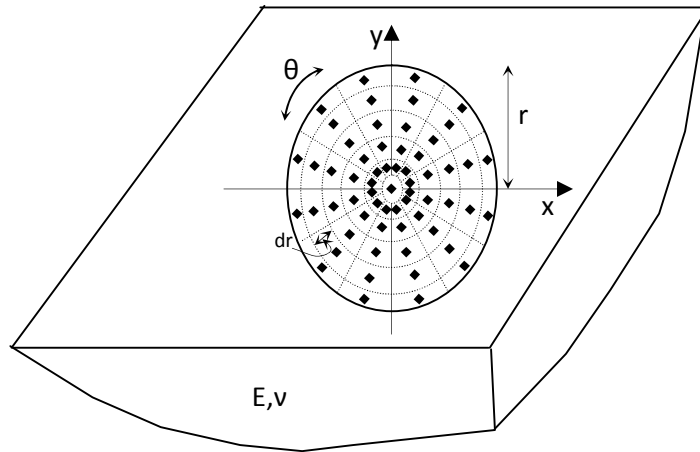
La plaque de masse  $M$  et de rigidité cylindrique  $D$  repose sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives de module d'élasticité  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ .



1. **Fig. 1** : Plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives en coordonnées polaires

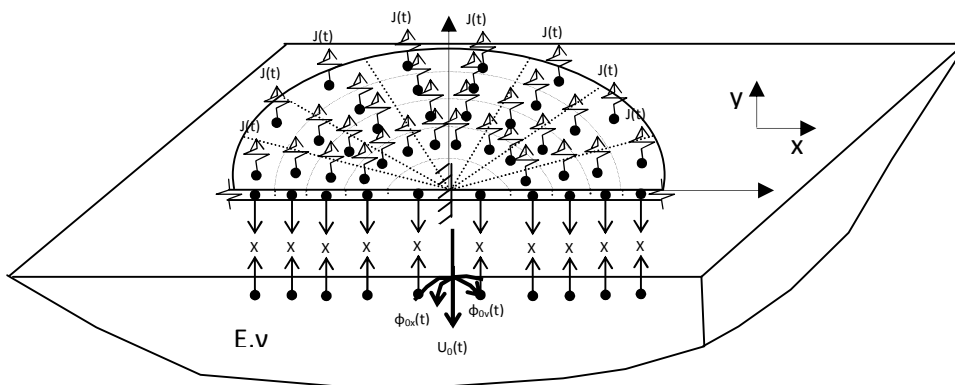
Les paramètres essentiels de la méthode utilisée pour l'analyse dynamique de la plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives en coordonnées polaires sont montrés dans la figure 2.

A noter que le contact parfait dans la zone de contact entre la plaque et la surface du semi-infini élastique est remplacé par un contact fini au niveau des points situant aux centres des éléments, figure 2. Donc les valeurs des forces de réaction et celles des déplacements verticaux de la plaque se déterminent aussi au niveau de ces points.



**Fig. 2 :** discrétisation du système étudié

A noter que les forces d'inertie du système étudié sont appliquées uniquement sur la plaque puisque la masse du semi-infini élastique n'est pas prise en compte, tandis que les efforts de liaison sont appliqués sur la plaque et sur la surface du semi-infini élastique Fig. 3. Pour la stabilité du système étudié, la méthode prévoit un encastrement fictif au centre de la plaque auquel une rotation de la plaque par rapport aux axes de coordonnées est possible.



**Fig. 3 :** Illustration de la méthode d'analyse

Le système d'équations canoniques permettant l'étude des vibrations de la plaque reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq) est [19]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \sum_{j=1}^n (v_{ij} + W_{ij}) X_j(t) - \sum_{j=1}^n W_{ij} J_j(t) + \ell_{ix} \{_{0x}(t) + \ell_{iy} \{_{0y}(t) + u_0(t) + \Delta_{ip} = 0; \quad i=1, \dots, n \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n [X_j(t) - J_j(t)] \ell_{jx} = I_{0x} \ddot{\{_{0x}}(t) \\ \sum_{j=1}^n [X_j(t) - J_j(t)] \ell_{jy} = I_{0y} \ddot{\{_{0y}}(t) \\ \sum_{j=1}^n [X_j(t) - J_j(t)] = M \ddot{u}_0(t). \end{array} \right. \quad (I.1)$$

Où

$v_{ij}$  Déplacement vertical de la surface du semi-infini élastique au point  $i$  du à la force  $X_j = 1$  appliquée au point  $j$  de la même surface;

$W_{ij}$  : Déflexion de la plaque au point  $i$  due à la force  $X_j = 1$  appliquée au point  $j$  de la plaque;

$X_k(t)$  : Effort de liaison appliqué au point  $k$  sur la plaque et sur la surface du semi-infini élastique (inconnue);

$\Delta_{ip}$  : Est une fonction caractérisant la déformation de la plaque au point  $i$  due à une charge extérieure appliquée au point  $p$ ;  $\Delta_{ip} = 0$  pour les vibrations libres (absence de charges extérieure) ;

$P_p$  : Charge extérieure appliquée au point  $p$  de la plaque;

$J_j(t)$  : La force d'inertie appliquée uniquement sur la plaque au point  $j$ ;

$\{_{0x}(t), \{_{0y}(t)$  : Angles de rotation de la plaque par rapport aux axes de coordonnées  $Ox$  et  $Oy$  (inconnues) ;

$u_0(t)$  : Déplacement vertical initial de la plaque au niveau de l'encastrement (inconnue) ;

$M$  : Masse totale de la plaque ;

$I_{Ox}$  : Moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe  $Ox$  ;

$I_{Oy}$  : Moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe  $Oy$  ;

$\ell_{ix}, \ell_{iy}$  : Bras de levier des centres des éléments par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$  ;

$$\ddot{\xi}_{0x}(t) = \frac{d^2 \xi_{0x}}{dt^2} ; \ddot{\xi}_{0y}(t) = \frac{d^2 \xi_{0y}}{dt^2} ; \ddot{u}_0(t) = \frac{d^2 u_0}{dt^2} .$$

La vibration libre de la plaque est supposée sous forme harmonique, alors on pourra écrire [4]:

$$X_k(t) = X_k e^{iSt} ; \xi_{0x}(t) = \xi_{0x} e^{iSt} ; \xi_{0y}(t) = \xi_{0y} e^{iSt} ; u_0(t) = u_0 e^{iSt} ; J_k(t) = J_k e^{iSt} . \quad (I.2)$$

Reportons (I.2) dans le système (I.1), ce dernier devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \sum_{j=1}^n (v_{ij} + W_{ij}) X_j - \sum_{j=1}^n W_{ij} J_j + \ell_{ix} \xi_{0x} + \ell_{iy} \xi_{0y} + u_0 = 0; \quad i = 1, \dots, n \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n [X_j - J_j] \ell_{jx} = I_{0x} \ddot{\xi}_{0x}; \\ \sum_{j=1}^n [X_j - J_j] \ell_{jy} = I_{0y} \ddot{\xi}_{0y}; \\ \sum_{j=1}^n [X_j - J_j] = M \ddot{u}_0, \end{array} \right. \quad (I.3)$$

Le premier grand challenge de cette étude est l'étude de la fonction de Green exprimée par le paramètre  $v_{ij}$ . Son détail est donné dans le chapitre 2.

Le second grand challenge de cette étude est la détermination des déflexions de la plaque en utilisant la méthode de Ritz. Son détail est donné dans le chapitre 3.

Enfin, le couplage de la plaque avec le milieu élastique de propriétés distributives et par conséquent la détermination des fréquences et mode propres de plaque est accompli par la méthode de Gemochkin [19] exprimée par le système d'équations (I.3). Détail de calcul est donné dans le chapitre 4.

### **3.2. Problème posé**

Le problème posé est de déterminer les fréquences propres et les modes propres d'une plaque reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives en coordonnées polaires, ensuite la détermination de la réponse dynamique de la plaque due à de charges extérieures harmoniques.

Le détail de ce calcul est donné dans le chapitre quatre.

## **4. Conclusion**

Ce chapitre a été consacré à l'étude bibliographique sur la thématique de ce travail qui est le calcul de plaques de différentes formes reposant sur la surface de milieux élastiques de différents modèles. Cette étude nous a permis non seulement de savoir les différents travaux de recherche effectués dans ce domaine, mais aussi de savoir les domaines de leur application, les différents challenges rencontrés et la nécessité de préciser les méthodes de calcul existantes et d'inventer de nouvelles méthodes plus efficaces, plus précises et plus proches de la réalité, en tenant compte de différents paramètres négligés auparavant et ayant de grandes influences sur les résultats de calcul. Nous avons aussi apporté un aperçu général sur la méthode de calcul utilisée pour mener cette étude.



***FONCTION DE GREEN POUR DETERMINER LES  
DEPLACEMENTS VERTICAUX DE  
SURFACE DU SEMI INFINI ELASTIQUE  
DE PROPRIETES DISTRIBUTIVES***

## 1.Introduction :

Ce chapitre est focalisé sur l'étude de la fonction de Green définissant les déplacements de la surface du milieu élastique sur lequel repose la plaque. Le type du milieu élastique considéré est celui de propriétés distributives (modèle de Boussinesq). Donc l'étude de cette fonction se base sur la détermination d'une intégrale de bornes définissant la forme de la plaque étudiée. Ce grand challenge mathématique a été surmonté grâce à l'utilisation du logiciel Mathematica.

## 2.Fonction de Green :

### 2. 1. Formule générale :

La fonction de Green définit les déplacements verticaux de la surface du semi-infini élastique de propriétés inertielles [20]. Cette fonction prend la forme suivante :

$$v_{ij} = \frac{1 - \epsilon_0^2}{f E_0} \frac{P}{\Omega} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dad\{\}}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\xi - \eta)}} \quad (\text{II.1})$$

Où

$P$  : Est la force exercée sur la surface du milieu élastique. Pour notre cas  $P = 1$  ;

$\epsilon_0$  : Le coefficient de Poisson du milieu élastique ;

$E_0$  : Module d'élasticité du milieu élastique ;

$\Omega$  : La surface de l'élément;

$a$  : Distance entre l'origine de coordonnées et le centre de l'élément où la charge est appliquée ;

$\xi$  : Angle que fait le centre de l'élément chargé avec l'axe des  $x$  ;

$r$  : Distance entre l'origine de coordonnées et le centre de l'élément où se détermine le déplacement ;

$\eta$  : Angle que fait le centre de l'élément où se détermine le déplacement avec l'axe des  $x$  ;

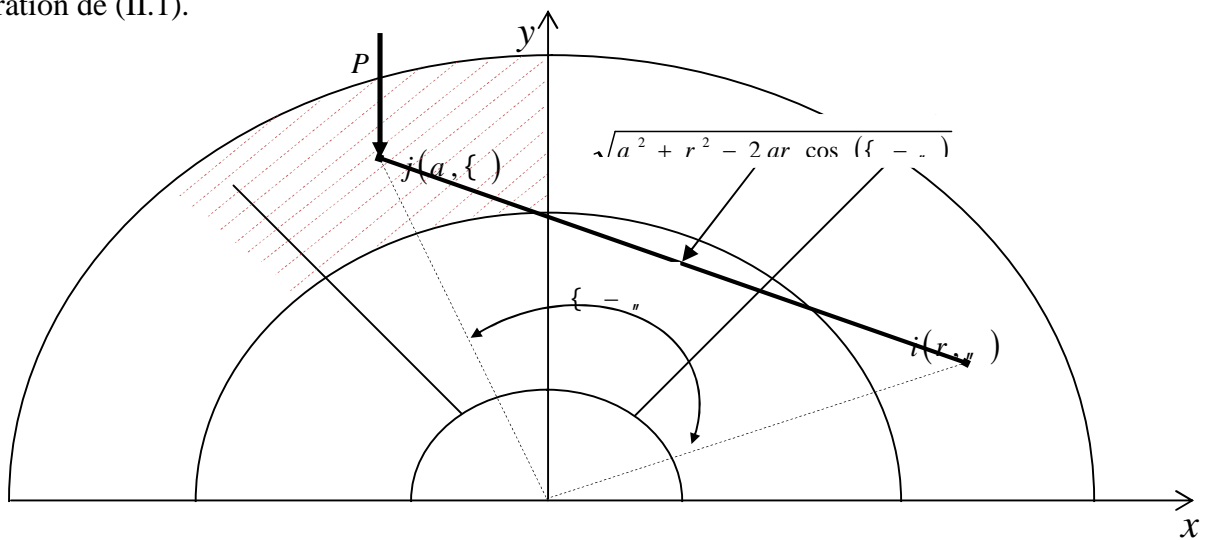
$\xi_1$  et  $\xi_2$  : Angles que fait les rayons de l'élément chargé avec l'axe des  $x$  ;

$r_1$  et  $r_2$  : Rayons définissant l'élément chargé.

$\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\xi - \eta)}$  : Distance entre le centre de l'élément chargé et l'élément où se détermine le déplacement (fig. II.1).

## 2.2 Procédure d'intégration :

La figure suivante illustre bien la forme géométrique des éléments sur lesquels on effectue l'intégration de (II.1).



**Fig. II.1 :** Géométrie de l'élément chargé

La détermination de cette intégrale n'est pas facile, c'est pourquoi on a recours à l'aide du logiciel Mathematica. La procédure suivie pour son évaluation à l'aide de Mathematica est la suivante :

**Etape 1 :**

$$\int_{a=r_1}^{a=r_2} \frac{ada}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\alpha - \theta)}} = -\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos[\alpha - \theta]} +$$

$$+\sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2 \cos[\alpha - \theta]} +$$

$$+ r \cos[\alpha - \theta] (-\ln[r_1 - r \cos[\alpha - \theta]] +$$

$$+\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos[\alpha - \theta]}) +$$

$$+\ln[r_2 - r \cos[\alpha - \theta] + \sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2 \cos[\alpha - \theta]})$$

**Etape 2 :**

$$\int_{\theta=1}^{\theta=2} \left\{ -\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos[\alpha - \theta]} + \sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2 \cos[\alpha - \theta]} + \right.$$

$$+ r \cos[\alpha - \theta] (-\ln[r_1 - r \cos[\alpha - \theta]] + \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos[\alpha - \theta]}) +$$

$$\left. + \ln[r_2 - r \cos[\alpha - \theta] + \sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2 \cos[\alpha - \theta]}) \right\} d\theta = F_{ij}$$

$F_{ij}$  : est donnée par cette expression :

$$\begin{aligned}
F_{ij} = & - \frac{\sqrt{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi1]} \operatorname{EllipticE}\left[\frac{\theta - \phi1}{2}, -\frac{4 r r1}{(r - r1)^2}\right]}{\sqrt{\frac{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi1]}{(r - r1)^2}}} + \frac{\sqrt{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi1]} \operatorname{EllipticE}\left[\frac{\theta - \phi1}{2}, -\frac{4 r r2}{(r - r2)^2}\right]}{\sqrt{\frac{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi1]}{(r - r2)^2}}} + \\
& - \frac{\sqrt{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi2]} \operatorname{EllipticE}\left[\frac{\theta - \phi2}{2}, -\frac{4 r r1}{(r - r1)^2}\right]}{\sqrt{\frac{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi2]}{(r - r1)^2}}} - \frac{\sqrt{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi2]} \operatorname{EllipticE}\left[\frac{\theta - \phi2}{2}, -\frac{4 r r2}{(r - r2)^2}\right]}{\sqrt{\frac{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi2]}{(r - r2)^2}}} + \\
& - \frac{2 r^2 \sqrt{\frac{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi1]}{(r - r1)^2}} \operatorname{EllipticF}\left[\frac{\theta - \phi1}{2}, -\frac{4 r r1}{(r - r1)^2}\right]}{\sqrt{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi1]}} - \frac{(r^2 + r1^2) \sqrt{\frac{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi1]}{(r - r1)^2}} \operatorname{EllipticF}\left[\frac{\theta - \phi1}{2}, -\frac{4 r r1}{(r - r1)^2}\right]}{\sqrt{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi1]}} \\
& - \frac{2 r^2 \sqrt{\frac{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi1]}{(r - r2)^2}} \operatorname{EllipticF}\left[\frac{\theta - \phi1}{2}, -\frac{4 r r2}{(r - r2)^2}\right]}{\sqrt{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi1]}} + \frac{(r^2 + r2^2) \sqrt{\frac{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi1]}{(r - r2)^2}} \operatorname{EllipticF}\left[\frac{\theta - \phi1}{2}, -\frac{4 r r2}{(r - r2)^2}\right]}{\sqrt{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi1]}} \\
& - \frac{2 r^2 \sqrt{\frac{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi2]}{(r - r1)^2}} \operatorname{EllipticF}\left[\frac{\theta - \phi2}{2}, -\frac{4 r r1}{(r - r1)^2}\right]}{\sqrt{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi2]}} + \frac{(r^2 + r1^2) \sqrt{\frac{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi2]}{(r - r1)^2}} \operatorname{EllipticF}\left[\frac{\theta - \phi2}{2}, -\frac{4 r r1}{(r - r1)^2}\right]}{\sqrt{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi2]}} \\
& - \frac{2 r^2 \sqrt{\frac{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi2]}{(r - r2)^2}} \operatorname{EllipticF}\left[\frac{\theta - \phi2}{2}, -\frac{4 r r2}{(r - r2)^2}\right]}{\sqrt{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi2]}} - \frac{(r^2 + r2^2) \sqrt{\frac{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi2]}{(r - r2)^2}} \operatorname{EllipticF}\left[\frac{\theta - \phi2}{2}, -\frac{4 r r2}{(r - r2)^2}\right]}{\sqrt{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi2]}} \\
& + r \operatorname{Log}\left[r1 - r \cos[\theta - \phi1] + \sqrt{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi1]}\right] \sin[\theta - \phi1] + \\
& + r \operatorname{Log}\left[r2 - r \cos[\theta - \phi1] + \sqrt{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi1]}\right] \sin[\theta - \phi1] + \\
& + r \operatorname{Log}\left[r1 - r \cos[\theta - \phi2] + \sqrt{r^2 + r1^2 - 2 r r1 \cos[\theta - \phi2]}\right] \sin[\theta - \phi2] - r \operatorname{Log}\left[r2 - r \cos[\theta - \phi2] + \sqrt{r^2 + r2^2 - 2 r r2 \cos[\theta - \phi2]}\right] \sin[\theta - \phi2]
\end{aligned}$$

## 2. Remarque :

On constate bien que le résultat final de cette intégrale est donné sous la forme simple suivante et bien adaptée au calcul numérique :

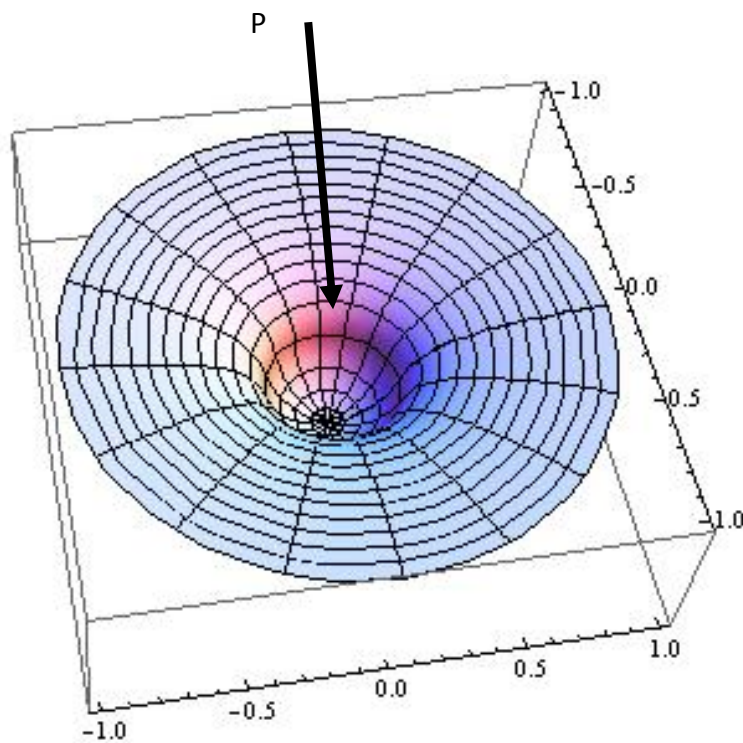
$$v_{ij} = \frac{1 - \epsilon_0^2}{f E_0} \frac{1}{\Omega} F_{ij}. \quad (\text{II.2})$$

On constate aussi la présence des fonctions spéciales dans l'expression de  $F_{ij}$ , ce qui témoigne la difficulté de résolution de ce problème de contact.

Dans le cas où  $r \rightarrow \infty$  et  $u \rightarrow 0$  ou  $u \rightarrow 2f$ , c'est-à-dire le déplacement se détermine au centre de la plaque circulaire, l'expression de  $F_{ij}$ , prend la forme suivante :

$$F_{ij} = \left( \sqrt{r_1^2 - r^2} \right) \left( 1 - \nu \right)$$

La figure suivante illustre la déformation de la surface du milieu élastique due à une charge verticale appliquée au centre dans la zone de contact avec une plaque circulaire.



**Fig. II.2 :** Déformation de la surface du milieu élastique en 3D due à une charge appliquée au centre de la zone de contact avec la plaque circulaire

#### **4.Conclusion :**

Le grand challenge de ce problème (étude de la fonction de Green) a été surmonté par l'évaluation de l'intégrale de l'expression (II.1) à l'aide du logiciel Mathematica. La formule finale trouvée est sous forme d'un algorithme simple à appliquer et à adapter à la méthode de calcul utilisée pour l'étude dynamique de la plaque circulaire reposant sur milieu élastique de propriétés distributives.

# ***CHAPITRE III***

## ***APPLICATION DE LA METHODE DE RITZ DANS LA DETERMINATION DES DEFLEXIONS DE LA PLAQUE CIRCULAIRE***

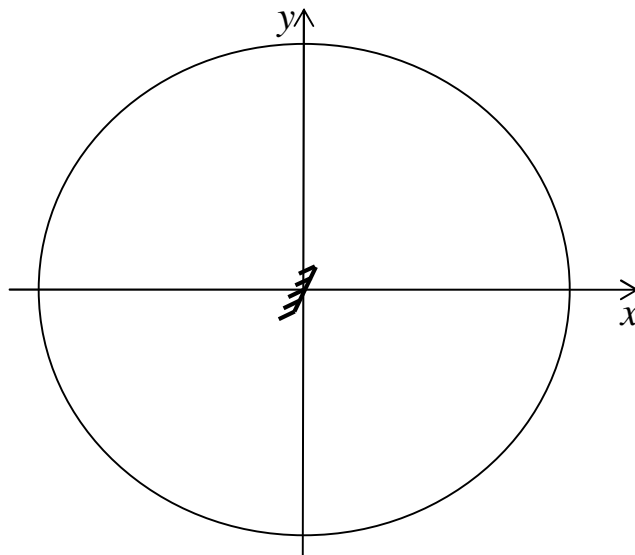


## 1. Introduction :

Ce chapitre est focalisé sur l'application de la méthode de la variation d'énergie de Ritz pour déterminer les déflexions de plaque circulaire reposant sur milieu élastique de propriétés distributives. La plaque étudiée (selon les hypothèses de la méthode de calcul) est supposée encadrée au un point situant au niveau de son centre et libre au niveau de tout son contour. La solution adoptée pour la résolution de l'équation différentielle aux dérivées partielles de cette plaque est celle de Clebsch en respectant ses conditions aux limites. Ce grand challenge mathématique a été surmonté grâce à l'utilisation du logiciel Mathematica.

## 2. Solution de Clebsch

La fonction  $W_{ij}$ , qui figure dans le système d'équations canoniques (I.3) pour étudier ce système (plaque reposant sur milieu élastique de propriétés distributives), définit les déflexions de la plaque circulaire de condition aux limites libres sur tout son contour et encadrée au niveau de son centre (fig. III.1), prend la forme suivante [20] :



**Fig. III.1** : Plaque circulaire encadrée au niveau de son centre et libre au niveau de tout son contour

$$\Delta \Delta W = \frac{q(r, \theta)}{D}$$

Où :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} : \text{Opérateur de Laplace en coordonnées polaires ;}$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\epsilon^2)} : \text{Rigidité cylindrique de la plaque ;}$$

$E$  et  $\epsilon$  : Module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau de la plaque;

$h$  : Epaisseur de la plaque ;

$q(r, \theta)$  : Charge appliquée sur la plaque.

La solution de cette équation différentielle aux dérivées partielles est connue sous le nom de la solution de Clebsch [20] et elle donnée sous la forme suivante :

$$W(x, y) = W_0(r, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(r, \theta). \quad (\text{III.2})$$

Où:

$W_0(r, \theta)$  : Solution particulière appropriée à la plaque étudiée, elle est donnée par la formule suivante [20] :

$$W_0(r, \theta) = \frac{P b^2}{16 f D} \left\{ \left( \frac{a^2 - 2 a r \cos [\theta - \theta_0] + r^2}{b^2} \right) \ln \left[ \left( \frac{a^2 - 2 a r \cos [\theta - \theta_0] + r^2}{b^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{4 a r \cos [\theta - \theta_0]}{b^2} \left( \ln \left[ \frac{a r}{b^2} \right] + 1 \right) - \left( \frac{a^2}{b^2} \right) \ln \left[ \frac{a^2}{b^2} \right] - \left( \frac{r^2}{b^2} \right) \ln \left[ \frac{r^2}{b^2} \right] \right\} \quad (\text{III.3})$$

D'après [20] et pour notre cas, les termes qui satisfont les conditions aux limites de la plaque étudiée sont :

$$\begin{aligned}
 W_1(r, \theta) &= B_{21} \frac{r^3}{b^3} \cos(\theta) \\
 W_2(r, \theta) &= C_{21} \frac{r^3}{b^3} \sin(\theta) \\
 W_3(r, \theta) &= B_{22} \frac{r^3}{b^3} \cos(3\theta) \\
 W_4(r, \theta) &= C_{22} \frac{r^3}{b^3} \sin(3\theta)
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

A noter que :

$r$  et  $\theta$  : Représentent les coordonnées du point où se détermine le déplacement de la plaque ;

$a$  et  $\{$  : Représentent les coordonnées du point où la charge est appliquée sur la plaque ;

$b$  : Certaine dimension introduite pour vérifier les unités de mesure, elle prise égale à 1.

### 3. Application de la méthode de Ritz

Pour déterminer les coefficients  $B_{21}$  ;  $C_{21}$  ;  $B_{22}$  et  $C_{21}$ , on utilise la méthode de Ritz [20] qui se base sur le principe de la variation de l'énergie de déformation de la plaque.

D'après [20], on peut écrire :

L'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

$$U = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \Psi(r, \theta) r dr d\theta \tag{III.5}$$

Où :

$$\Psi(r, \theta) = \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right]^2 - s \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{W}{r} \right)}{\partial r \partial \theta} \right)^2 \right] ;$$

$s = 2(1 - \nu)$ ,  $\nu$  : coefficient de Poisson du matériau de la plaque ;

$\Omega$  : Surface de la plaque ;

Le travail des forces extérieures agissant sur la plaque lors du passage de la plaque de l'état déformé à l'état initial, c'est-à-dire lorsque  $r \rightarrow a$  et  $\theta \rightarrow \{$ . Son expression pour notre cas est donnée par :

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{j=1}^4 \Pi_j \quad (\text{III.6})$$

Où :

$$\Pi_0 = \frac{P a^2}{8f D} \left( 2 + \ln \frac{a^2}{b^2} \right)$$

$$\Pi_1 = B_{21} \frac{P a^3}{b^3} \cos(\xi)$$

$$\Pi_2 = C_{21} \frac{P a^3}{b^3} \sin(\xi)$$

$$\Pi_3 = B_{22} \frac{P a^3}{b^3} \cos(3\xi)$$

$$\Pi_4 = C_{22} \frac{P a^3}{b^3} \sin(3\xi)$$

La fonctionnelle de l'énergie de déformation totale de la plaque est donnée par [20] :

$$= U + \Pi \quad (\text{III.7})$$

Enfin, les coefficients  $B_{21}$  ;  $C_{21}$  ;  $B_{22}$  et  $C_{21}$  se déterminent par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial B_{22}} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial C_{22}} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial B_{21}} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial C_{21}} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{III.8})$$

A l'aide de l'utilisation du logiciel Mathematica et après une suite de simplifications mathématiques importantes et très compliquées, on obtient le système matriciel final suivant donnant les expressions des coefficients  $B_{21}$  ;  $C_{21}$  ;  $B_{22}$  et  $C_{21}$  :

$$\begin{pmatrix} \frac{2Df(-8+s)}{b^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2Df(-8+s)}{b^6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{18DfS}{b^6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{18DfS}{b^6} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} B_{22} \\ C_{22} \\ B_{21} \\ C_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Pa^3 \cos(\xi)}{b^3} + \frac{P(2a^2-1)(s-8)\cos(\xi)}{16ab^3} \\ \frac{Pa^3 \sin(\xi)}{b^3} + \frac{P(2a^2-1)(s-8)\sin(\xi)}{16ab^3} \\ \frac{Pa^3 \cos(3\xi)}{b^3} - \frac{P(3a^2-2)S \cos(3\xi)}{16a^3b^3} \\ \frac{Pa^3 \cos(3\xi)}{b^3} - \frac{P(3a^2-2)S \sin(3\xi)}{16a^3b^3} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

La solution de ce système d'équations matriciel donne les expressions finales de ces coefficients :

$$B_{21} = \frac{-Pb^3}{32aDf(s-8)} \left( 8 + \frac{16a^4}{b^4} + \frac{2a^2(s-8)}{b^2} - s \right) \cos(\xi) ;$$

$$C_{21} = \frac{-Pb^3}{32aDf(s-8)} \left( 8 + \frac{16a^4}{b^4} + \frac{2a^2(s-8)}{b^2} - s \right) \sin(\xi) ;$$

$$B_{22} = \frac{P}{288a^3b^3DfS} (16a^6 - 3a^2b^4s + 2b^6s) \cos(3\xi) ;$$

$$C_{22} = \frac{P}{288a^3b^3DfS} (16a^6 - 3a^2b^4s + 2b^6s) \sin(3\xi) ;,$$

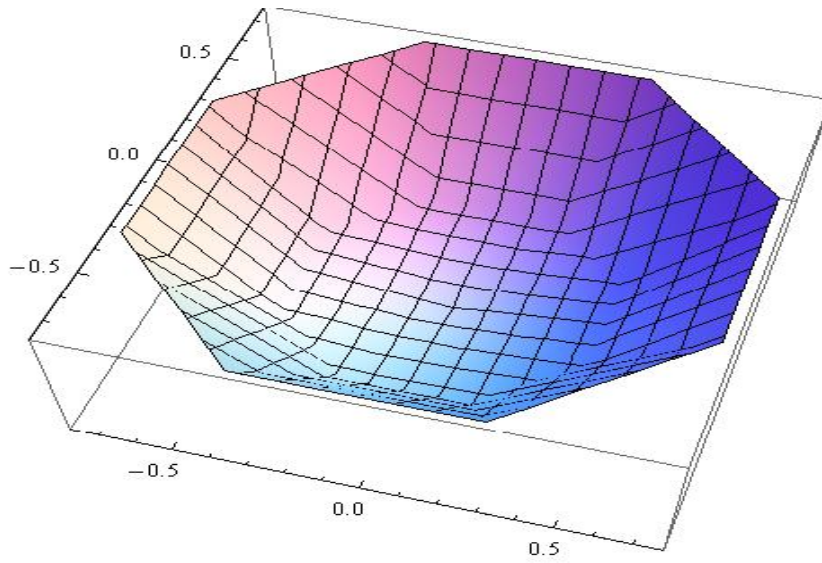
Finalement la solution finale de l'équation différentielle (solution de Clebsch) de la plaque étudiée est donnée sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{aligned} W(r, \theta) = & \frac{Pb^2}{16fD} \left\{ \left( \frac{a^2 - 2ar \cos[\xi - \theta] + r^2}{b^2} \right) \ln \left[ \left( \frac{a^2 - 2ar \cos[\xi - \theta] + r^2}{b^2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{4ar \cos[\xi - \theta]}{b^2} \left( \ln \left[ \frac{ar}{b^2} \right] + 1 \right) - \left( \frac{a^2}{b^2} \right) \ln \left[ \frac{a^2}{b^2} \right] - \left( \frac{r^2}{b^2} \right) \ln \left[ \frac{r^2}{b^2} \right] \right\} \\ & - \frac{Pb^3}{32aDf(s-8)} \left( 8 + \frac{16a^4}{b^4} + \frac{2a^2(s-8)}{b^2} - s \right) \cos(\xi) \frac{r^3}{b^3} \cos(\theta) - \\ & - \frac{Pb^3}{32aDf(s-8)} \left( 8 + \frac{16a^4}{b^4} + \frac{2a^2(s-8)}{b^2} - s \right) \sin(\xi) \frac{r^3}{b^3} \sin(\theta) + \\ & + \frac{P}{288a^3b^3DfS} (16a^6 - 3a^2b^4s + 2b^6s) \cos(3\xi) \frac{r^3}{b^3} \cos(3\theta) + \\ & + \frac{P}{288a^3b^3DfS} (16a^6 - 3a^2b^4s + 2b^6s) \sin(3\xi) \frac{r^3}{b^3} \sin(3\theta) \end{aligned}$$

Le détail de calcul issu de l'application de cette méthode est donné dans l'annexe 2.

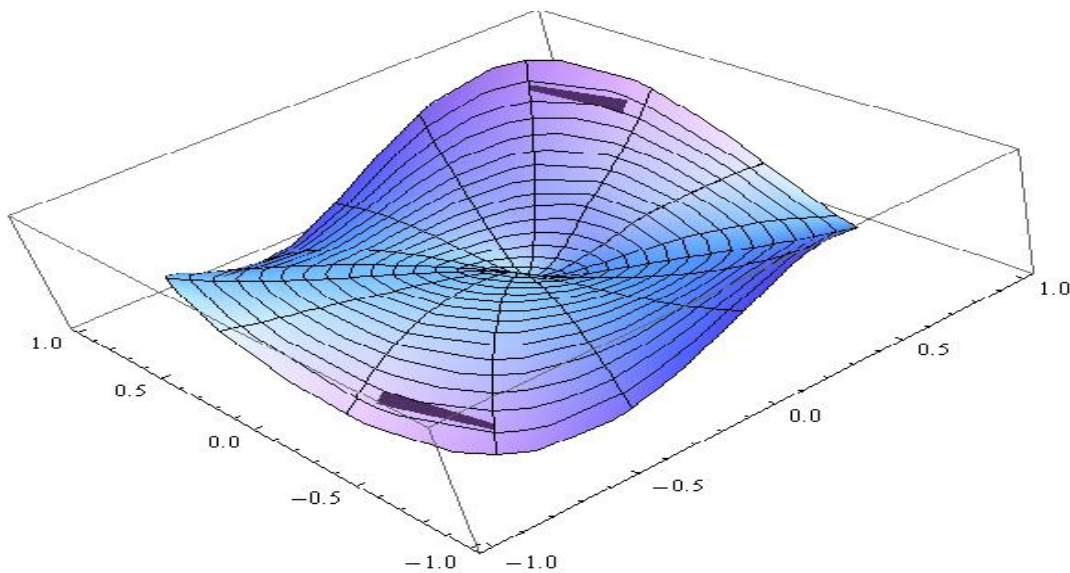
Les schémas suivants illustrent la déformation de la plaque due à deux types de charges issues de l'application de cette solution.

**a. Charge uniformément répartie :**



**Fig. III.2.** Déformation de la plaque circulaire due à une charge verticale uniformément répartie au niveau des centres des éléments de maillage choisi

**b. Charge concentrée au centre de la plaque**



**Fig. III.3.** Déformation de la plaque circulaire due à une charge verticale appliquée au niveau de son centre

#### **4. Conclusion :**

L'application de la méthode de Ritz basant sur la variation de l'énergie de déformation de la plaque circulaire étudiée dans ce chapitre a abouti à un algorithme simplifié adapté non seulement à la méthode de calcul utilisée, mais aussi pour d'autres différentes méthodes d'application de calcul numérique.

# ***CHAPITRE IV***

## ***EXEMPLE D'APPLICATION***





## 1. Introduction

Dans ce chapitre on va appliquer l'approche semi-analytique décrit dans les chapitres précédents en vue du calcul dynamique d'une plaque circulaire reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés distributives (modèle de Boussinesq).

## 2. Caractéristiques mécaniques et géométriques

Les valeurs représentant les caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque et du semi-infini élastique pises sont les suivantes :

Module d'élasticité du milieu élastique:  $E_0 = 100000000 \text{ N/m}^2$ ;

Le coefficient de Poisson du milieu élastique:  $\nu_0 = \frac{1}{3}$ ;

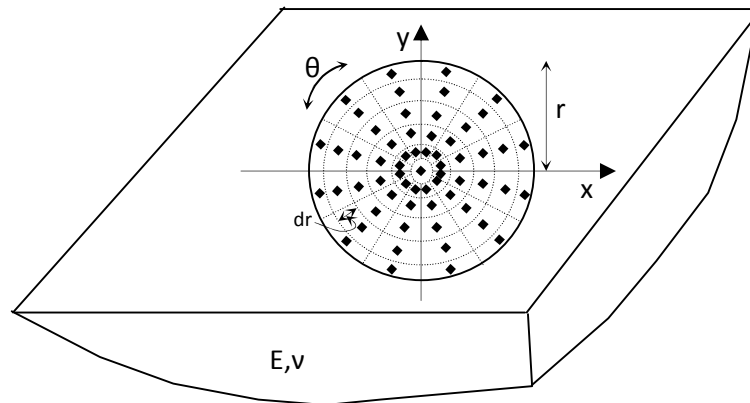
Le rayon de la plaque circulaire:  $r = 1 \text{ m}$ ;

Le coefficient de Poisson du matériau de la plaque :  $\nu = \frac{1}{3}$

Module d'élasticité du matériau de la plaque:  $E = 200000000000 \text{ N/m}^2$ ;

Epaisseur de la plaque:  $h = 0.01 \text{ m}$ .

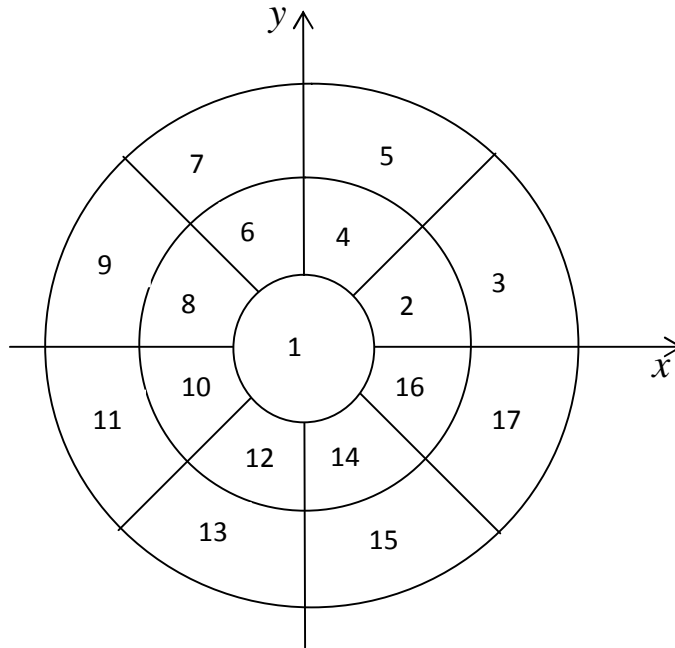
## 3. Discrétisation du Système étudié



**Fig. IV.1.** Discrétisation du système étudié

Le système étudié, plaque circulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives, est divisé en 17 éléments (fig. IV.2). Donc le contact infini dans la zone de contact entre la plaque et la surface du milieu élastique est remplacé par un contact fini au niveau des points situant aux centres des éléments. En outre, au niveau de ces points se déterminent les valeurs des forces de réaction dans la zone de contact et dès que ces dernières se déterminent, le

reste des autres entités physiques se déterminent par l'application des différentes formules de la théorie d'élasticité.



**Fig. IV.2.** Discrétisation de la plaque circulaire en 17 éléments

La discrétisation du système étudié, exprimée par le système d'équations canoniques (I.3), et après l'introduction des différentes formules de chaque paramètre, notamment la formule finale de la fonction de Green et celle des déflexions de la plaque, dans le système (I.3) et avec l'application des valeurs géométriques et mécaniques du système étudié, et après plusieurs transformations et simplifications mathématiques, permet d'aboutir au système d'équations sous la forme matricielle suivante:

$$[A] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \{0_x\} \\ \{0_y\} \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (IV.1)$$

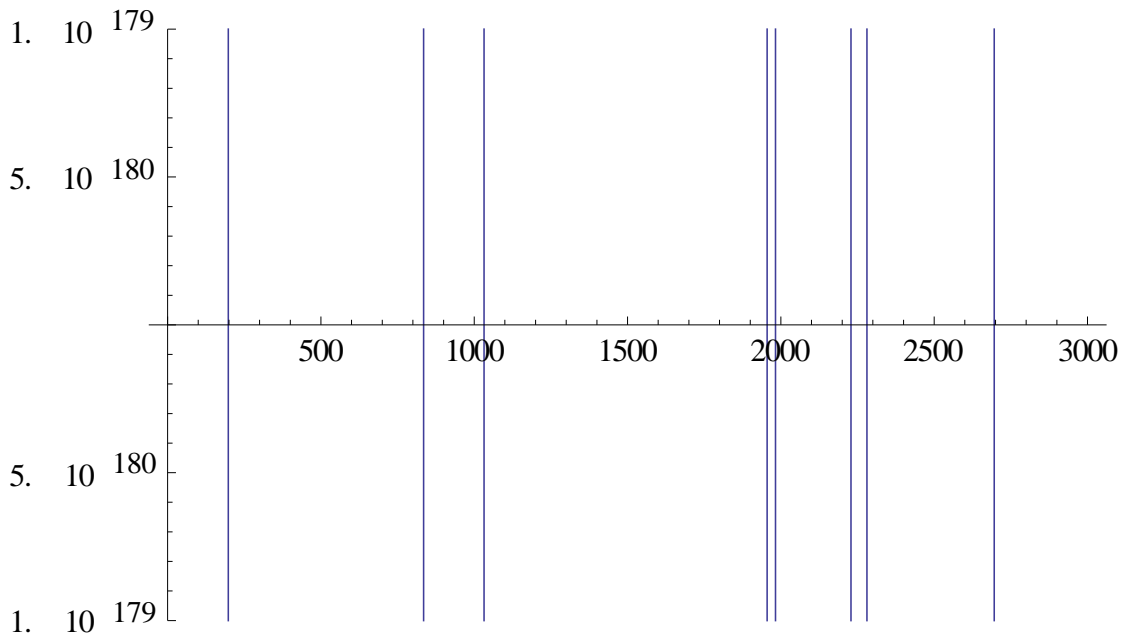
### 3.1. Détermination des fréquences propres de la plaque

La détermination des fréquences propres  $\omega$  de la plaque circulaire reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés distributives se fait par la détermination des racines de l'équation du déterminant de la matrice  $A$  du système (IV.1) qui est connue aussi comme l'équation des fréquences, c'est-à-dire :

$$\text{Det}[A]=0 \quad (IV.2)$$

L'expression du déterminant est trop compliquée et trop longue, et sans doute sa solution plus compliquée et plus difficile. C'est pourquoi, les racines de l'équation des fréquences se déterminent graphiquement à l'aide du logiciel «Mathematica ».

La figure IV.3 représente le graphe de l'équation des fréquences dans un intervalle de fréquences donné où l'on voit clairement les points d'intersection de l'équation des fréquences avec l'axe des coordonnées. Le zoom graphique de chaque racine de l'équation des fréquences permet de déterminer sa valeur numérique.



**Fig IV.3** Détermination des racines de l'équation de fréquences graphiquement

Cette opération de détermination graphique a donné toutes les valeurs des fréquences propres de la plaque circulaire étudiée. Les six premières valeurs des fréquences propres en (Hz) sont :

i	1	2	3	4	5	6
$\omega$ Hz	210.558595	833.6800977	1033.576714	2085.861191	2138.098729	2233.568528

### 3.2. Détermination des modes propres de la plaque

La détermination des modes propres de la plaque circulaire reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés distributives se fait de la manière suivante :

Remplaçons dans le système d'équations de forme matricielle (IV.1)  $\omega$  par l'une de ses valeurs propres ;

Supprimons la première équation du système (IV.1), ce dernier devient de taille  $(n + 2)(n + 2)$  et affectant la valeur de 1 à l'inconnue  $X_1$  ;

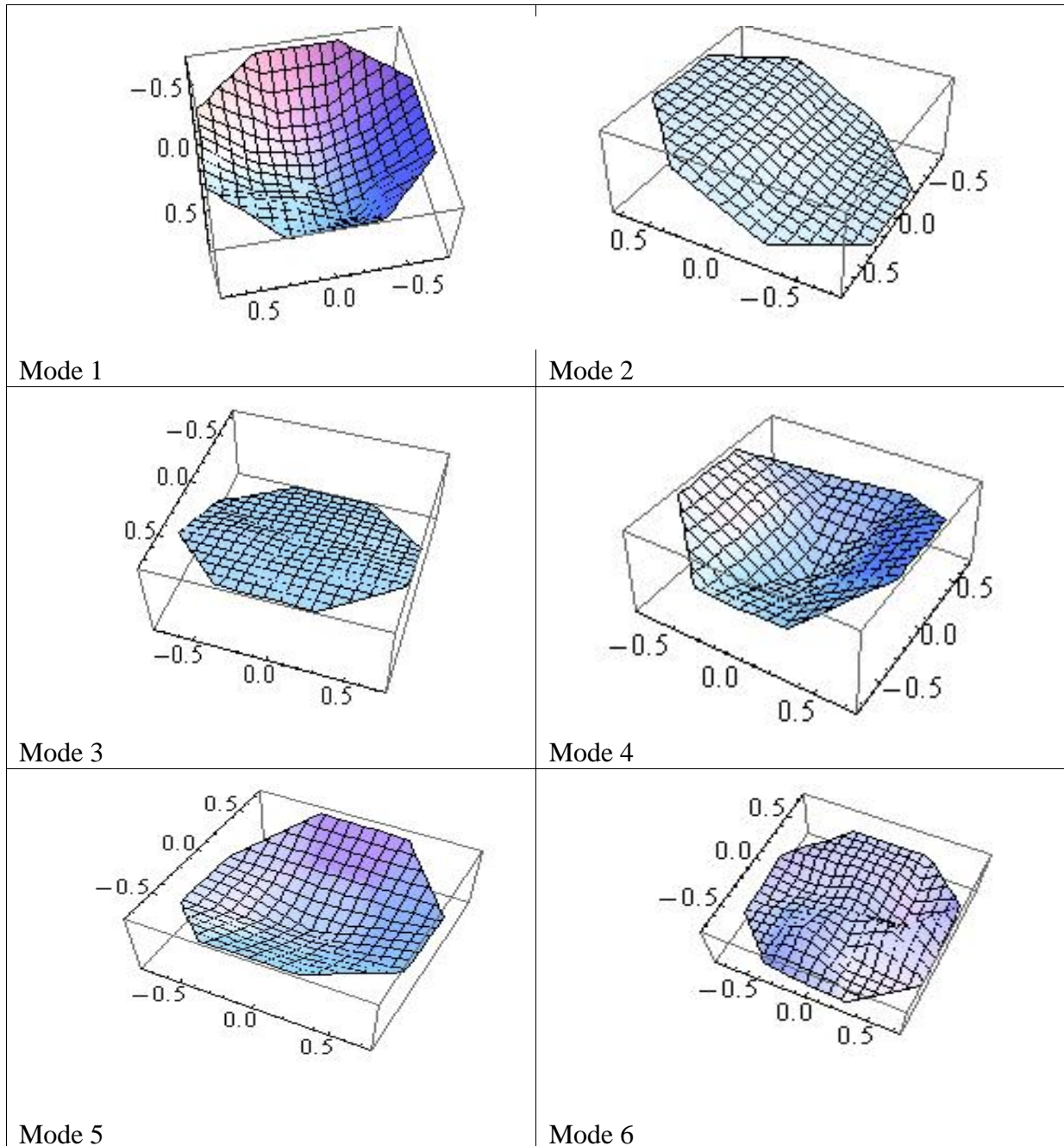
Transformons la première colonne du système de taille  $(n + 2)(n + 2)$  à l'autre côté du système et résolvons ainsi le système résultant ;

La résolution du système résultant permet de déterminer les valeurs des autres inconnues  $X_i$  du système (IV.1). Cependant, la détermination des déplacements verticaux de la plaque circulaire étudiée donnant la forme propre de la plaque étudiée se fait par l'application de la formule suivante [19] :

$$v_i = \frac{1 - \epsilon_0^2}{2fE_0} \sum_{j=1}^n X_j F_{ij} \quad (\text{IV.3})$$

Cette opération de détermination des modes propres de la plaque est répétée pour chaque valeur de fréquence propre ce qui a permis de déterminer le reste des autres modes propres appropriés à chaque fréquence propre.

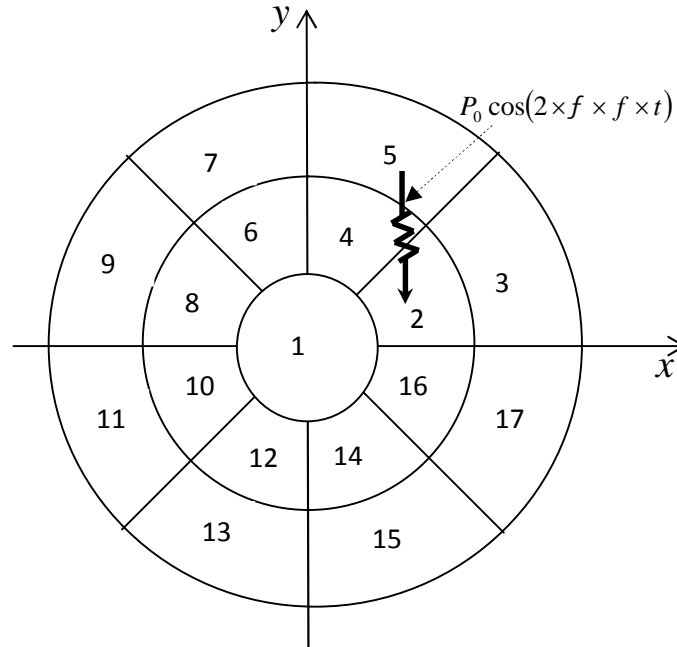
La figure IV.4 représente les modes propres correspondant aux six premières fréquences propres de la plaque.



**Fig. IV.4** Modes propres correspondant aux six premières fréquences propres de la plaque étudiée

#### 4. Réponse de la plaque circulaire reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés distributives à une excitation extérieure harmonique

Ce problème concerne la réaction de la plaque circulaire reposant sur la surface du semi-infini élastique de propriétés distributives due à une charge verticale externe harmonique.



**Fig. IV.5.** Excitation de la plaque au centre de l'élément 2

Le cas présenté est l'action d'une charge harmonique verticale appliquée sur la plaque circulaire étudiée au centre de l'élément 2 (fig. IV.8). Cette charge verticale harmonique externe varie selon la loi suivante :

$$P_p = P_2 = P_0 \cos(2 \times \pi \times f \times t)$$

où:  $P_0$  : amplitude de l'excitation ;

$f$  : fréquence de l'excitation;

$t$  : temps de l'excitation.

On considère les valeurs suivantes:  $P_0 = 100000 \text{ N}$ ,  $f = 150 \text{ Hz}$

L'obtention de la réponse de la plaque nécessite la résolution du système (I.1).

Dans ce cas, le paramètre  $\Delta_{ip}$  est déterminé par la formule suivante [19]:

$$\Delta_{ip} = \sum_{p=1}^n W_{ip} P_p = W_{i2} P_2$$

$W_{ip}$  : Déflexions de plaque au point  $i$  due à la charge externe  $P_p$  appliquée au point  $p$  de la plaque (dans notre cas,  $p = 2$ , c'est à dire la charge harmonique est appliquée au centre de l'élément 2). Ces déflexions sont déterminées par la même formule finale donnée dans le chapitre III.

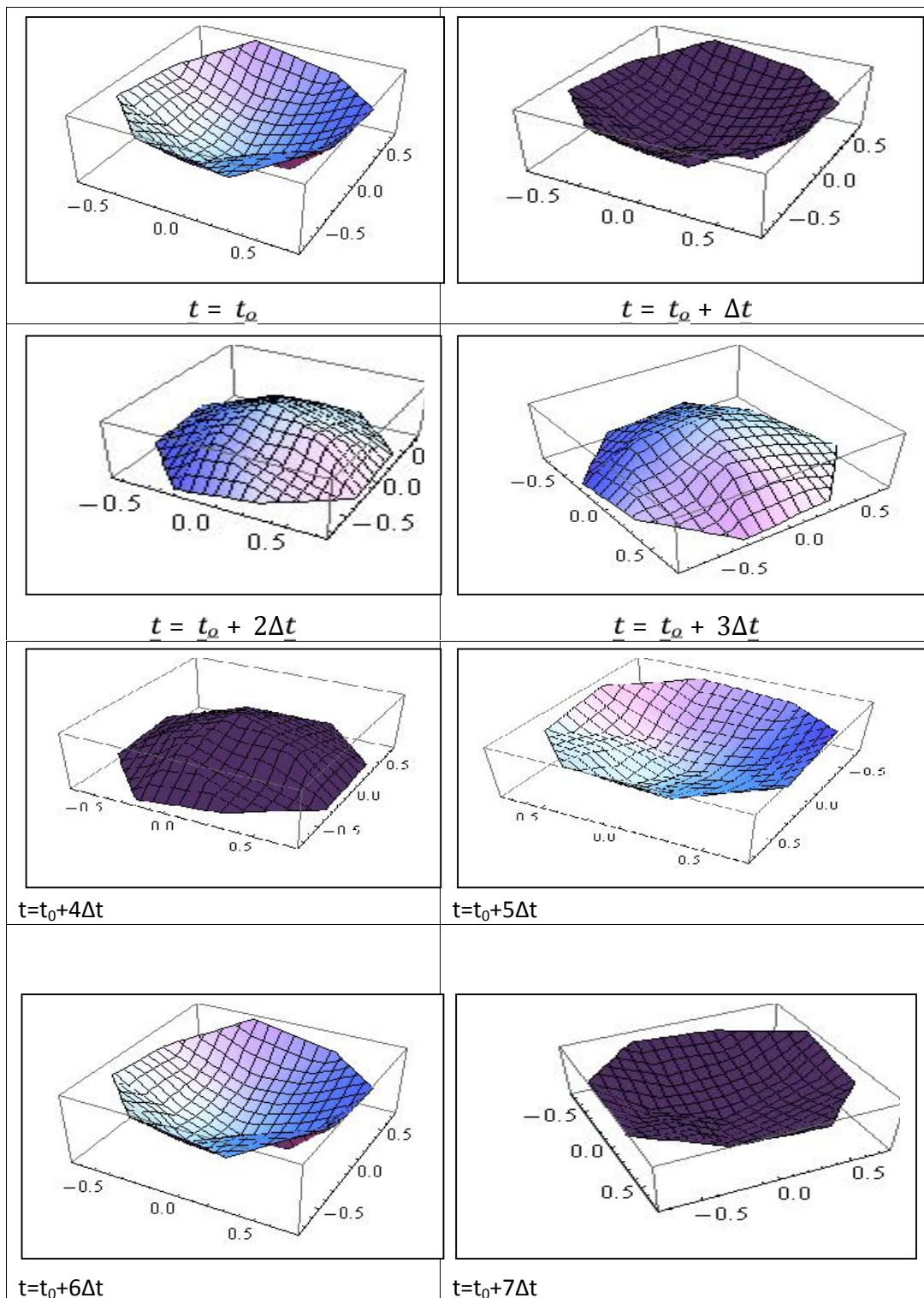
Enfin, la solution du système (I.1) pour les vibrations forcées donne les inconnues  $X_i$  qui varient avec le temps d'excitation. Ces inconnues représentent les efforts de réaction dans la zone de contact et les déplacements de la plaque pendant le temps d'excitation, représentant sa réponse, sont déterminés par :

$$v_i = \frac{1 - \epsilon_0^2}{fE_0} \sum_{j=1}^{17} X(t) F_{ij}$$

La figure IV.9 représente la réponse de la plaque due à cette charge harmonique en 3D pour différents instants. Ici,  $t_j = t_0 + \Delta t$ ,  $t_0 = 0$  s;  $\Delta t = 0.001$  s.

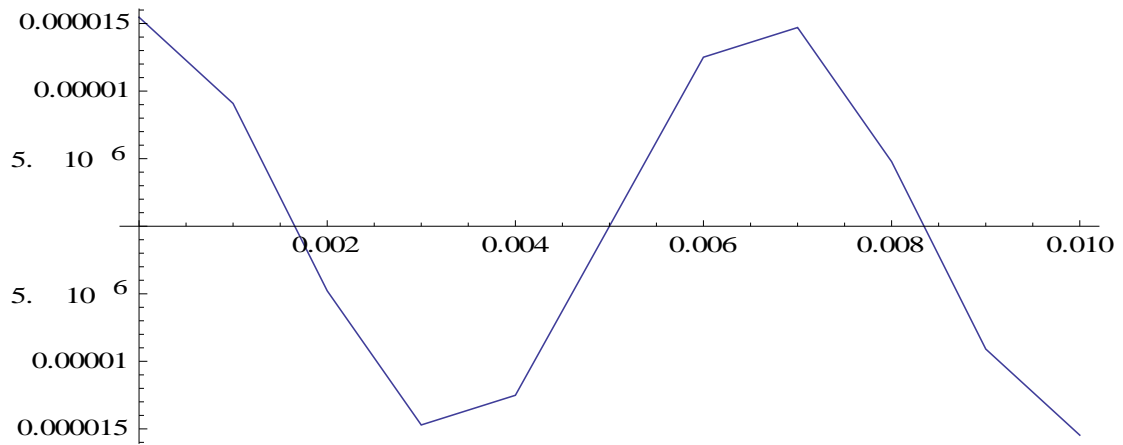
On remarque clairement que le déplacement maximal est obtenu au niveau du point d'application de l'excitation extérieure.





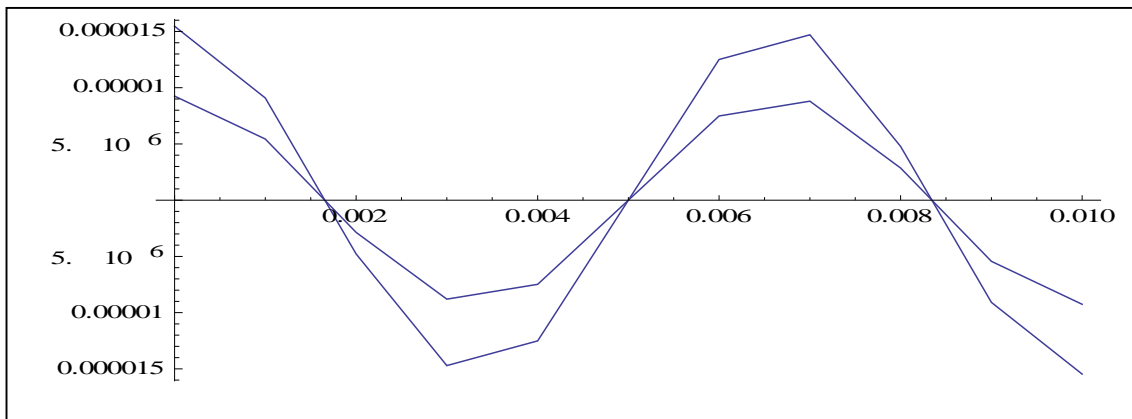
**Fig. IV.6.** Réponse de la plaque en fonction du temps de l'excitation en 3D due à l'excitation harmonique appliquée au centre de l'élément 2

La figure IV. 7 représente la variation du déplacement du point de la plaque où l'excitation extérieure est appliquée en fonction du temps d'excitation.



**Fig. IV.7.** Réponse de la plaque au point d'application de l'excitation en fonction du temps d'excitation

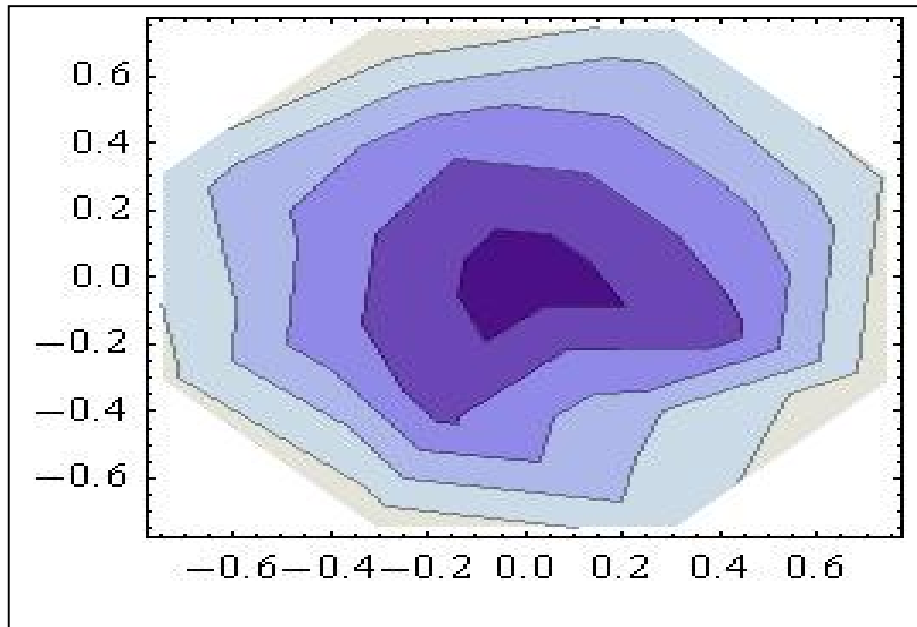
La figure IV. 8 représente la comparaison des déplacements de la plaque des points de l'application de l'excitation et du centre de la plaque en fonction du temps d'excitation.



**Fig. IV.8.** Comparaison de la réponse de deux points différents de la plaque

Sur la figure IV.8, on remarque clairement que le déplacement de la plaque au point d'application de l'excitation est plus important que le déplacement de son centre.

Enfin, la figure IV.9 représente la projection de la réponse (isovaleurs) de la plaque à un instant donné, où on remarque clairement que la distribution des déplacements au niveau de la plaque n'est pas la même. C'est-à-dire les déplacements maximaux se trouvent dans la zone centrale de la plaque (proche du point d'application de la charge) et plus en allant vers son contour, ces derniers deviennent minimaux (on s'éloigne du point d'application de la charge)



**Fig. IV.9.** Comparaison de la réponse de différents points de la plaque

## 5. Conclusion :

Le calcul statique ou dynamique des structures en interaction avec des milieux élastique comme le cas de ce travail, plaque circulaire reposant sur la surface du milieu élastique de propriétés distributives, qui font partie des problèmes de contact est lié à de très grandes difficultés mathématiques et associé aux challenges physiques, numériques et autres. L'approche semi-analytique proposée apportée dans ce travail pour résoudre ce problème est donnée sous forme d'algorithmes simplifiés et adaptés aux machines de calcul personnelles ce qui favorise ses applications dans le domaine d'ingénierie. Le déficit de cette approche proposée est de finir le maillage de façon à arriver aux résultats de calcul satisfaisants et d'économiser le temps de c

# ***CONCLUSION GENERALE***

Le calcul statique ou dynamique des structures en interaction avec des milieux élastiques (problèmes de contact) est lié à de très grandes difficultés mathématiques. Cette tâche se complique de plus en plus lors de la tenue en considération de certains paramètres comme la complexité des formes géométriques des structures, la variabilité de leurs dimensions géométriques ou mécaniques, la tenue en compte de l'inertie des milieux élastiques, la non-négligence de l'amortissement et des forces de frottement dans les zones de contact, la non-linéarité du calcul etc. C'est pourquoi, la tâche concernant l'étude des problèmes de contact n'est pas accomplie complètement à nos jours et que sa solution inévitablement se fait de façons numériques ou semi-numériques.

Dans ce contexte, l'étude dynamique d'une plaque flexible circulaire reposant sur la surface d'un milieu élastique de propriétés distributives, accomplie dans le cadre de ce travail de mémoire de Master, est considérée comme une petite contribution en vue de résoudre l'un des points non résolus de ce problème compliqué. Le travail est réalisé par une approche semi-analytique basant sur la méthode mixte du calcul des structures connue aussi sous le nom de méthode de Zhemochkin.

Les deux grands challenges de cette étude résident dans: (I) étude de la fonction de Green définissant les déplacements de la surface du milieu élastique de propriétés distributives et (II) application de la méthode de Ritz pour déterminer les déflexions de la plaque flexible. Ces deux tâches ont été étudiées et accomplies à l'aide du logiciel Mathematica et se sont données sous formes d'algorithmes simplifiés et adaptés pour le calcul d'ingénieur.

Les résultats de calcul trouvés, issus de cette étude dynamique, concernent les valeurs des fréquences propres et les modes propres de la plaque, ainsi que sa réponse due à une excitation harmonique extérieure sont très satisfaisants et représentent une base pour l'étude de telles structures de forme géométriques compliquées.

Enfin, le déficit de cette méthode est de surmonter le problème lié au temps de calcul énorme exigé pour le maillage fin.

***REFERENCES***  
***BIBLIOGRAPHIQUES***

- [1] Huang, M.H. and Thambiratnam, D.P. (2002), “Dynamic response of plates on elastic foundation to moving loads”. *Journal of Engineering Mechanics*. 128 (9), 1016-1022.
- [2] Savidis, S.A. and Richter, T. (1979), “Dynamic response of elastic plates on the surface of the half-space”. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 3(3), 245–254
- [3] Omurtag, M.H., Özütok, A., Aköz, A.Y. and Özçelikörs, Y. (1997), “Free vibration analysis of kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on gâteaux differential”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 40(2), 295-317
- [4] Guenfoud, S., Bosakov, S.V. and Laefer, D.F. (2009), “Dynamic analysis of a beam resting on an elastic half-space with inertial properties”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29(8), 1198-1207.
- [5] Civalek, Ö. (2007), “Nonlinear analysis of thin rectangular plates on Winkler-Pasternak elastic foundations by DSC-HDQ methods”. *Applied Mathematical Modelling*. 31(3), 606–624.
- [6] J.J Mandal ,S ,Roychowdhury The 12 International conference of International association for computer methods and advances in geomechanics(IACMAG) 1-6 October 2008 Goa,India
- Reponse of rectangular raft foundation under transient loading
- [7] Hsu, M.H. (2006), “Vibration Characteristics of Rectangular Plates Resting on Elastic Foundations and Carrying any Number of Sprung Masses”. *International Journal of Applied Science and Engineering*. 4(1), 83-89
- [8] M,Dehghany,A,Farajpour (2014) Free vibration of simply supported rectangular plates on pasternak foundation,an exact,three dimensional solution : 2(1),29-42
- [9] Selvadurai A.P.S A contact problem for a reissner plate and an isotropic elastic half space. Carleton university dep civil eng Ottawa K1S 5B6 Canada.
- [10] Camier, Cedric , Touzé ,Cyril ,Thomas,Olivier Effet des imperfections géométriques sur les vibrations non linéaire de plaques minces.http\hdl handle ,net 2042\16199.
- [11] Internatinal conference on structures under shock and impact N 4 Italie(07-1996) Modélisation et étude numérique des vibrations non linéaires de plaques circulaires minces imparfaite application aux cymbales.

- [12] C-M Wang(1997) Relationships between Midlin and Kirchhoff Bending. Solutions for tapered circular and annular plates. 19 (3) 255-258.
- [13] Gunda, J.B. (2013), “Large amplitude free vibration analysis of square plates resting on elastic foundation: A simple closed-form solutions”. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 93(8) 597–608
- [14] Hsu, M.H. (2006), “Vibration Characteristics of Rectangular Plates Resting on Elastic Foundations and Carrying any Number of Sprung Masses”. *International Journal of Applied Science and Engineering*. 4(1), 83-89.
- [15] Guenfoud, S., Bosakov, S.V. and Laefer, D.F. (2010), “A Ritz’s method based solution for the contact problem of a deformable rectangular plate on an elastic quarter-space”, *International Journal of Solids and Structures*, 47(14-15), 1822-1829.
- [16] Muhsaref Zamen,M,Omar Faruque,A Mahmood(1990) Analysis of moderately restrained circular plates resting on an isotropic elastic half space 14(7) 352-361
- [17] M Zmerli and R,H Plaut(1993)Charles,Via Dep of civil engeneerng, Virginia polytechnic institute and state university,Design of circular plates on an elastic halfspace for minimum differential settlement 52-58.
- [18] Sung Churl Kim,Hyun, Yung Cho, Jin Hwan(1997) The study of interaction analysis of circular plate under axisymmetric loading resting on elastic half space considering local separation between plate and soil foundation , Journal of Korean society of civil engineers 17(1-4).
- [19] Zhemochkin BN, Sinitsyn AP. Practical methods of the calculation of beams and plates resting on an elastic foundation. Moscow: Stroyizdat publishing company; 1962 (Russian Edition).
- [20] Guenfoud S. Calcul de plaques reposant sur milieu élastiques de différents types en coordonnées polaires. Thèse de Ph.D., Minsk; 2001 (Russian Edition).



# ***ANNEXES***

