

Université 8 mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme de Master

Option : Maintenance Industrielle

Présenté par : Hamel Reda

=====

Comportement dynamique non linéaire d'un rotor flexible tournant à grande vitesse monté dans des paliers à film comprimé (SFDB)

=====

Sous la Direction de :

Pr. LAHMAR Mustapha

Année universitaire 2014/2015

Sommer

Introduction générale

- I. Paliers fluides
- II. Principe d'amortisseur squeeze film
- III. Théorie de la Lubrification hydro dynamique par fluide à couple de contrainte péizo-visqueux
- IV. Formulation intégrale de l'équation de Reynolds modifié en régime transitoire
- V. Réponse dynamique non linéaire d'un rotor flexible

Table des matières

Introduction générale	(1)
I. PALIERS FLUIDES	
1.1. Introduction	(4)
1.2. Les différents régimes de lubrification	(4)
1.2.1. Contacts à basse pression ($0.1 < P < 50$ MPa)	(5)
1.2.2. Contacts à haute pression (jusqu'à 3 GPa)	(7)
1.3. Différentes classes de paliers	(8)
1.3.1. Paliers de roulements	(8)
1.3.2. Paliers secs	(9)
1.3.3. Paliers poreux	(9)
1.3.4. Paliers magnétiques	(10)
1.3.4.1. Principaux paliers magnétiques	(11)
1.3.4.2. Composants des paliers magnétiques actifs	(11)
1.3.5. Paliers fluides	(13)
1.3.5.1. Paliers hydrodynamiques	(13)
1.3.5.2 Paliers hybrides	(25)
II. PRINCIPE D'AMORTISSEUR SQUEEZE FILM	
2. Introduction	(28)
2.1 Principe et architecture d'un amortisseur squeeze film	(28)
2.2 Applications de l'amortisseur squeeze film	(30)
2.3 Problématique de l'amortisseur fluide	(31)
2.4 Quelques exemples où on peut trouver les SFDB	(33)
2.5 Organisation et objectifs du travail	(35)

III. THEORIE DE LA LUBRIFICATION HYDRO DYNAMIQUE PAR FLUIDE A COUPLE DE CONTRAINTE PEIZO-VISQUEUX

3. Introduction	(36)
3.1 Théorie classique de la lubrification: l'équation de Reynolds	(36)
3.2 Formulations alternatives à l'équation de Reynolds	(43)
3.2.1 Fluides non newtoniens	(43)
3.2.1.1 Fluide à couples de contraintes en écoulement laminaire	(44)
3.2.1.2 écoulements turbulents ou non laminaires	(46)
3.3 Conditions aux limites	(49)

IV. FORMULATION INTEGRALE DE L'EQUATION DE REYNOLDS MODIFIE EN REGIME TRANSITOIRE

4. Formulation intégrale de l'équation de Reynolds modifié en régime transitoire	(50)
--	------

V. REPONSE DYNAMIQUE NON LINEAIRE D'UN ROTOR FLEXIBLE

5.1 Introduction	(60)
5.2 Equations de mouvement du rotor	(60)
5.2.1 Bilan des forces extérieures	(60)
5.2.2 Application du principe fondamental de la dynamique	(61)
5.3 La méthode de Newmark et Wilson	(62)
5.4 Structure générale du programme de calcul	(65)
5.5 Validation du programme	(66)
5.6 Etude paramétrique	(67)
5.6.1 Données	(67)
5.6.2 Effet des couples de contrainte sur la réponse dynamique non linéaire d'un rotor rigide monté dans des SFDB	(69)
5.6.3 Effets de la piézo-viscosité dynamique du lubrifiant sur la réponse dynamique non linéaire du système rotor-SFDB	(70)
5.7 Conclusion générale	(74)

Table des illustrations

I. Paliers fluides

Figure I. 1: Schéma d'un contact lubrifié

Figure I. 2: Courbe de Stribeck

Figure I. 3 : Régime limite

Figure I. 4 : Régime mixte

Figure I. 5: Régime hydrodynamique

Figure I. 6 : Répartition des pressions dans un contact hertzien

Figure I. 7: Coupe schématique d'un palier poreux

Figure I. 8: Palier radial: schéma de principe

Figure I. 9: Palier radial: dispositions standards

Figure I. 10 : Butée axiale à double effet

Figure I. 11: Coussinets (Doc. LE COUSSINET MODERNE)

Figure I.12 : Section droite d'un palier lisse

Figure I. 13 : Phases de travail d'un palier lisse

Figure I.14 : Schématisation d'un palier à arc partiel

Figure I. 15 : Schématisation d'un palier à trois lobes

Figure I. 16: Carte de stabilité de différents paliers à géométrie fixe, ($L/D=1$)

Figure I. 17 a: Schéma de principe d'un palier à film amortisseur (SFDB)

Figure I. 17 b : Amortisseur à film fluide (1, rotor, 2, roulement, 3, cage d'écureuil, 4, stator, 5, segments)

Figure I.18.a: Photographie d'un palier à quatre patins oscillants

Figure I.18.b Palier à patins oscillants de grand groupe turboalternateur (DOCUMENT EDF)

Figure I.18.c Paliers à patins oscillants de compresseurs grande vitesse (DOCUMENT ALSTOM)

Figure I. 19 : Schématisation d'un palier à trois patins oscillants

Figure I. 20 : Comparaison des cartes de stabilité d'un palier à quatre lobes asymétriques et d'un palier à quatre patins oscillants

(palier chargé, $m=1/2$, $\alpha/\beta =1/2$, $L/D =1$)

Figure I. 21 : Palier hydrostatique à alvéoles découplées et non découplées

Figure I.22 : Schéma d'un palier hydrostatique à trois alvéoles découplées

Tableau I.1. Comparaison de différents types de palier

II. Principe d'amortisseur squeeze film

Figure. 2.1: Schéma d'un amortisseur squeeze film

Figure 2.2 : Salle des machines de la centrale nucléaire de Flamanville (Manche)

Figure 2.3 : Opération de maintenance sur un GTA de la centrale nucléaire de Bugey

Figure 2.4 : Rotor de la centrale thermique classique de Porcheville (Yvelines)

Figure2.5: Arbre de transmission arrière d'un hélicoptère

Figure2.6 Skoda Power, Czech Republic

Figure 2.7: Turbine réelle de centrale électrique

Figure 2.8: Banc EURoPE (EDF R&D)

Figure 2.9: Banc d'essais Turbine aéronautique

III. Théorie de la Lubrification hydro dynamique par fluide à couple de contrainte péizo-visqueux

Figure 3.1: Géométrie et système de repérage d'un SqF

Figure 3.2 : balance des forces et couples agissant sur le volume élémentaire selon la théorie VK Stokes

IV. Formulation intégrale de l'équation de Reynolds modifié en régime transitoire

Figure4.1 : Représentation du domaine d'intégration de l'équation de Reynolds et des conditions limites.

Figure 4.2 : maillage du film par éléments finis quadrilatéraux

Figure 4.3 : représentation de l'élément réel (D^e) dans l'espace physique

Figure 4.4 : Représentation des éléments parents et réels

Figure 4.5 : Représentation des points d'intégration sur l'élément parent iso périmétrique.

Figure 4.6 : représentation de l'élément réelle dans l'espace physique

V. Réponse dynamique non linéaire d'un rotor flexible

Figure 5.1 : Schéma d'un rotor flexible de type Jeffcott

Figure 5.2 : Schéma d'un rotor flexible de Jeffcott

Figure 5.3 : Représentation générale du schéma de calcul

Figure 5.4 : Réponse dynamique d'un rotor rigide équilibré (sans balourd, $\varepsilon_b = 0$)

Tableau 5.1 : Caractéristiques géométriques et élastiques du palier

Tableau 5.2 : Conditions de fonctionnement du palier

Tableau 5.3 : Données relatives aux caractéristiques du maillage par éléments finis

Tableau 5.4 : Données relatives aux méthodes de calcul

Figure 5.5 : orbites non linéaires calculées pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel

Figure 5.6 : variation des déplacements du centre du rotor en fonction du temps correspondant aux 13 dernières révolutions du rotor

Figure 5.7 : orbites dynamiques non linéaires calculées pour un rotor rigide déséquilibré avec un faible balourd pour différentes valeurs du coefficient de piézo-viscosité

Figure 5.8 : orbites dynamiques non linéaires calculées pour un rotor rigide déséquilibré avec un grand balourd pour différentes valeurs du coefficient de piézo-viscosité

Figure 5.9 : orbites dynamiques non linéaires calculées pour un rotor flexible déséquilibré avec un faible balourd pour différentes valeurs du coefficient de piézo-viscosité

Figure 5.10 : orbites dynamiques non linéaires calculées pour un rotor flexible déséquilibré avec un grand balourd pour différentes valeurs du coefficient de piézo-viscosité

Figure 5.11 : réponse dynamiques d'un rotor déséquilibré soumis à un faible balourd (résiduel) et un grand balourd perte d'une ailette

AVANT PROPOS

Ce travail de recherche a été effectué au sein du Laboratoire de Mécanique et des Structures (LMS) de l'Université 8 mai 1945 Guelma en vue d'obtenir le diplôme de Magister en génie mécanique, option : Mécanique & Maintenance Industrielle

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur Monsieur le Professeur [Mustapha LAHMAR](#) de m'avoir permis de découvrir le domaine de la tribologie. Grâce à sa compétence, son disponibilité et sa patience, il a sut me transmettre les connaissances nécessaires à la réalisation de ce travail. Son lecture attentive et ses commentaires pertinents ont également permis d'enrichir ce document.

Je tiens surtout à exprimer ma plus profonde gratitude aux enseignants qui avoir accepté de faire partie du jury de soutenance de ce mémoire.

Mes sincères remerciements s'adressent également à tout le corps des enseignants et le personnel du département de génie mécanique.

Introduction générale

La recherche accrue d'efficacité des machines tournantes engendre une tendance à l'assouplissement et à l'augmentation des vitesses des rotors figure 1. Le système rotor-palier devient ainsi plus susceptible à des problèmes vibratoires aigus, qui englobent des surtensions excessives au voisinage des résonances, l'apparition de plages de fonctionnement instables et l'amplification des charges dynamiques transmises au milieu environnant.

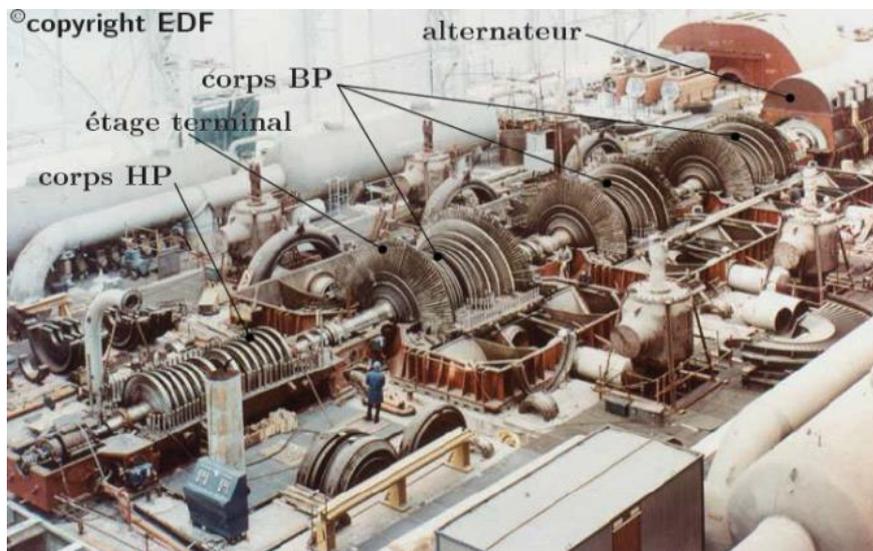


Figure 1 : Photographie d'un rotor complet d'un groupe turbo-alternateur

Pour remédier à ces problèmes, les constructeurs s'intéressent au comportement dynamique des organes de supportage en utilisant les paliers fluides notamment les paliers à film amortisseur ou à film comprimé, traduction du terme anglais Squeeze Film Damper Bearings (SFDB) au lieu des paliers à roulement classique figure 2. L'utilisation de ce type de support constitue l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées ces dernières décennies, du fait de la forte capacité d'amortissement et de la relative simplicité de construction. La conception de ce type d'amortisseur reste toutefois problématique et délicate, à cause de la difficulté de compréhension et de maîtrise numérique de nombreux phénomènes intervenant dans le comportement hydrodynamique du film.

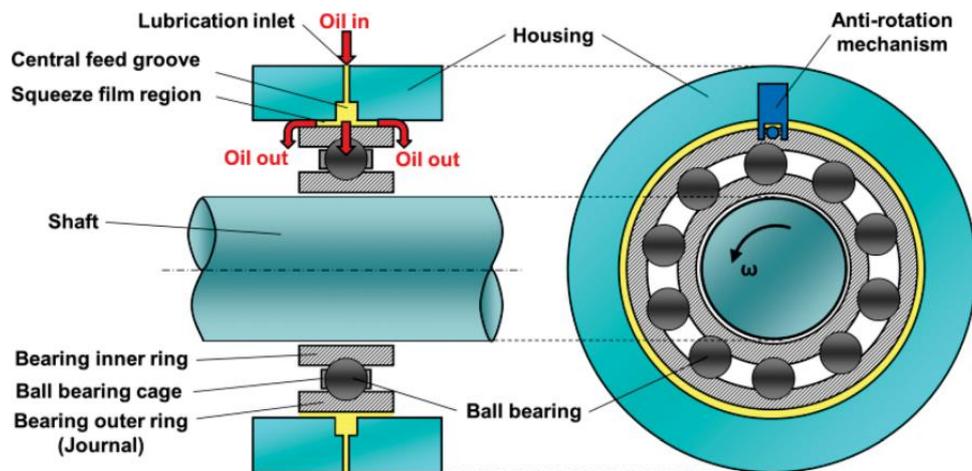


Figure 2 : Schématisation d'un palier SFDB

L'étude d'un système mécanique comportant des amortisseurs à film écrasé comprend deux parties principales. La première concerne la modélisation du champ de pression du film d'huile en fonction des variables décrivant la cinématique du système au niveau du palier qui l'incorpore. La deuxième consiste à simuler la dynamique de la machine, ce qui nécessite l'emploi d'outils de calcul non linéaire capables de déterminer les réponses transitoires et stationnaires ainsi que d'analyser leur stabilité.

Outre la recherche dans le sens d'une meilleure compréhension et modélisation des (SFDB), des solutions pour l'optimisation de leurs applications se sont développées depuis le début des années 80.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de la réponse dynamique non linéaire d'un rotor flexible de type Jeffcott monté dans des paliers hydrodynamiques revêtus lubrifiés par un fluide non newtonien à couple de contrainte dont la viscosité varie avec la pression hydrodynamique. Pour cela, on utilise la loi exponentielle de Barus pour mettre en évidence les effets de la piézoviscosité du fluide lubrifiant sur le comportement dynamique du système.

La détermination de la réponse dynamique non linéaire du système rotor-palier repose sur la résolution numérique des équations non linéaires de la dynamique des rotors rigides ou flexibles à l'aide du schéma explicite d'Euler. Le caractère non linéaire de ces équations provient du fait que les composantes de la portance hydrodynamique

résultant de l'action du fluide sur la surface du rotor sont des fonctions non linéaires des déplacements et des vitesses de déplacement du centre géométrique du rotor. Le calcul de ces composantes nécessite tout d'abord la détermination du champ de pression hydrodynamique engendré dans le film par la résolution de l'équation de Reynolds modifiée transitoire par la méthode des éléments finis puis par intégration de ce champ sur la surface du rotor.

Le mémoire présentant ce travail comprend cinq chapitres.

Le premier chapitre est dévolu à l'étude bibliographique sur les différents régimes de lubrification rencontrés dans la pratique étendue à la description de quelques organes de supportage en l'occurrence les paliers à film amortisseur.

Dans le deuxième chapitre, on présente en détails les caractéristiques géométriques et les conditions de fonctionnement des SFDB ainsi que leurs applications industrielles.

Le troisième chapitre est réservé à la présentation de la théorie de la lubrification hydrodynamique pour un SFDB fonctionnant en régime isotherme. Dans ce chapitre, on dérive plusieurs formes de l'équation de Reynolds dans le cas de fluides newtonien et non newtonien piézo-visqueux pouvant décrire le comportement d'un palier fonctionnant en régimes d'écoulement laminaire et turbulent.

Dans le quatrième chapitre, on présente tout d'abord la formulation intégrale de l'équation de Reynolds modifiée en appliquant le théorème des résidus pondérés de Galerkin puis la discrétisation de la forme intégrale faible par éléments finis de classe C^0 de la famille de Lagrange.

I. PALIERS FLUIDES

1.1. Introduction

L'objet essentiel de ce chapitre est de présenter les différents supports utilisés pour le guidage des lignes d'arbres de machines tournantes.

Le choix d'un type de support est une décision qui doit être prise dans la première phase du processus de conception.

Le palier est un support ou guide qui détermine la position d'une pièce mobile par rapport aux autres pièces d'un mécanisme.

Dans la pratique, les principaux supports sont :

- paliers de roulements,
- paliers secs,
- paliers poreux,
- paliers magnétiques,
- paliers et butées fluides (hydrodynamique, hydrostatique et hybride). Nous avons jugé utile de présenter dans la première partie de ce chapitre, une description des différents régimes de lubrification rencontrés dans les différents systèmes lubrifiés.

1.2. Les différents régimes de lubrification

La lubrification concerne tous les contacts pour lesquels un film mince visqueux est intercalé entre deux corps solides en mouvement relatif (figure I.1).

Les différents régimes de lubrification ont été présentés pour la première fois par Richard Stribeck en 1902.

La courbe de Stribeck (figure I.2) représente la variation du coefficient de frottement en fonction de $\mu N / p$, cette courbe prend la même allure quel que soit le type de contact lubrifié.

On distingue en général, trois zones correspondant chacune à un type de lubrification dont la nature dépend aussi de la pression régnant dans le contact.

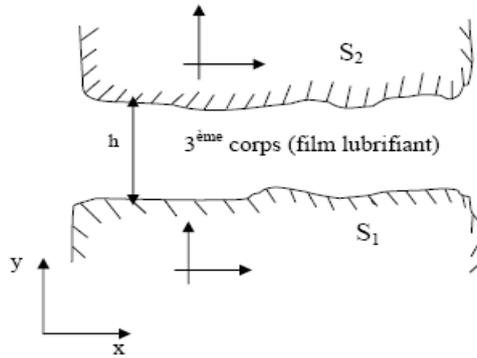
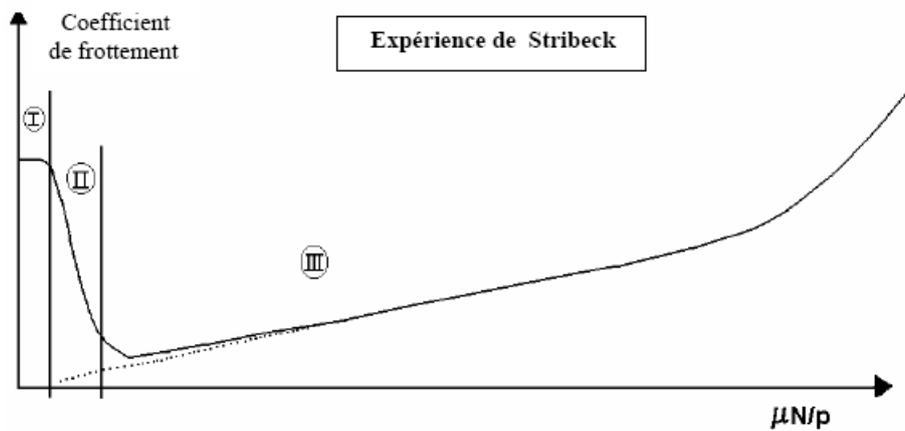


Figure I. 1: Schéma d'un contact lubrifié



p : Rapport de la charge appliquée sur le palier rapportée à la surface projetée,
μ : Viscosité du film lubrifiant, **N** : Vitesse de rotation de l'arbre.

Figure I. 2: Courbe de Stribeck

1.2.1. Contacts à basse pression ($0.1 < P < 50 \text{ MPa}$)

La zone (I)

Elle correspond à la lubrification limite ou onctueuse, la séparation des surfaces métalliques est assurée par des molécules d'huile adsorbées (figure I.3) par les surfaces métalliques.

L'épaisseur de la couche moléculaire (empilement) est de l'ordre de 100 \AA à 500 \AA et la valeur du coefficient de frottement varie entre 0.05 et 0.15. Ce type de lubrification est rencontré à chaque démarrage du moteur, c'est à ce moment qu'il se produit l'usure la plus importante car les surfaces ne se sont pas complètement séparées.

Dans ces conditions, l'onctuosité est la propriété prédominante du lubrifiant.

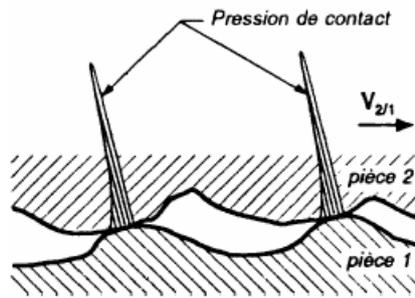


Figure I. 3 : Régime limite

Zone (II) : Lubrification mixte

Ce régime de lubrification peut être considéré comme un régime de transition entre le régime onctueux et le régime hydrodynamique.

L'effet hydrodynamique prend progressivement de l'importance et tend à séparer les surfaces qui restent encore en contact sur une partie de leurs aspérités (figure I.4).

Dans cette zone, le coefficient de frottement varie de 0.001 à 0.20

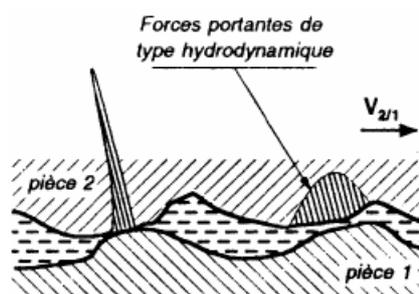


Figure I. 4 : Régime mixte

Zone (III) Lubrification hydrodynamique pure

L'étude du contact s'effectue à l'aide de l'équation de Reynolds, car le milieu est continu et les surfaces du contact sont totalement séparées par un film fluide (figure I.5).

Dans cette zone, le coefficient de frottement varie de 0.002 à 0.001.

Les régimes de lubrification (I) et (II) peuvent être supprimés si l'on injecte du lubrifiant sous pression dans le contact, on parle alors de lubrification hydrostatique.

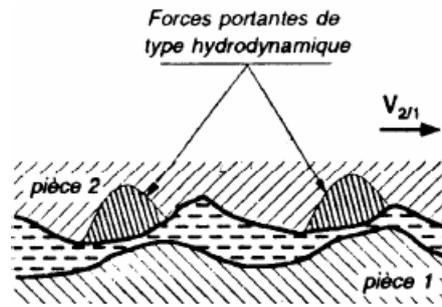


Figure I. 5: Régime hydrodynamique

1.2.2. Contacts à haute pression (jusqu'à 3 GPa)

Ces contacts hertziens lubrifiés sont rencontrés dans certains éléments de machines tels que les roulements et les engrenages.

Zone (I) Lubrification EP (Extrême Pression)

Les surfaces sont protégées par des films formés par réaction chimique des additifs EP contenus dans l'huile et activés par les pressions. Les contraintes de cisaillement et les températures existent dans le contact.

Le coefficient de frottement varie de 0.02 à 0.2.

Zone (II) : Lubrification mixte

Comme pour les contacts faiblement chargés cette zone est une zone de lubrification mixte. Mais les phénomènes sont différents, c'est ici la transition entre la lubrification extrême pression et la lubrification élasto-hydrodynamique qui correspond à la zone (III) du diagramme de Stribeck.

La zone (III) : Lubrification élasto-hydrodynamique (E.H.D)

La lubrification EHD concerne les contacts lourdement chargés pour lesquels la pression engendrée dans le film lubrifiant est suffisamment élevée pour déformer élastiquement les surfaces et modifier le comportement rhéologique du lubrifiant.

Ce type de contact correspond au contact entre les bagues et les éléments roulants d'un palier de roulement à billes ou à rouleaux.

Dans ce type de lubrification, on a une présence simultanée de deux effets (figure I.6):

effet hydrodynamique;

effet des déformations élastiques des solides formant le contact.

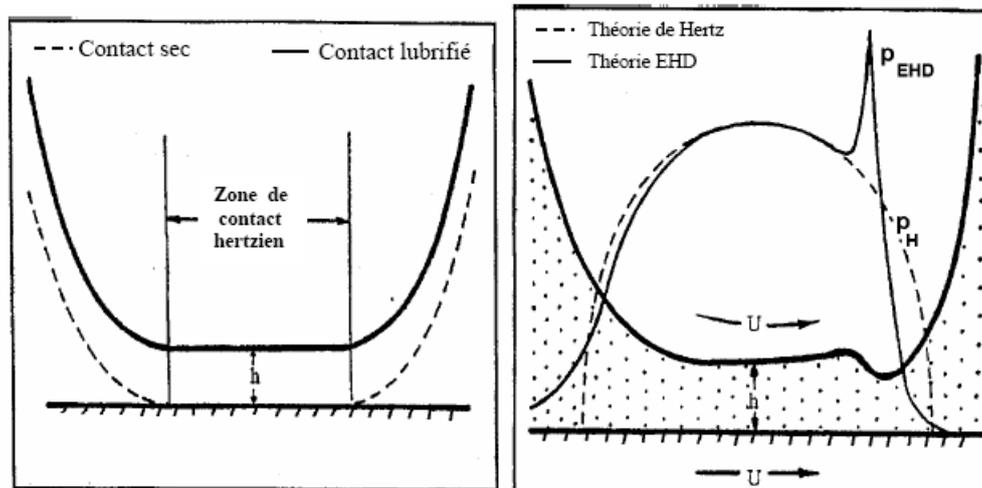
Le coefficient de frottement varie de 10^{-2} à 8×10^{-2} .

Le problème élasto-hydrodynamique en régime isotherme est gouverné par les équations suivantes :

équation de Reynolds pour déterminer la pression dans le film lubrifiant;

équations de l'élasticité linéaire pour calculer les déformations élastiques des surfaces;

lois de variation viscosité-pression pour déterminer la variation de la viscosité de fluide en fonction de la pression



a) Contact hertzien statique

b) Contact hertzien lubrifié (dynamique)

Figure I. 6 : Répartition des pressions dans un contact hertzien

Où P_{EHD} : Pression élasto-hydrodynamique

P_H : Pression de Hertz

U : Vitesse de glissement

h : Epaisseur du film

1.3. Différentes classes de paliers

1.3.1. Paliers de roulements

Dans un palier à roulements le glissement de l'arbre sur le coussinet est remplacé par le roulement de corps intermédiaires (billes, rouleaux et aiguilles).

Ils supportent de plus fortes charges tout en réduisant l'usure et le frottement à cause de leur coefficient de frottement très faible au démarrage. Les avantages et inconvénients des paliers à roulements sont:

a) Avantages

- Installation simple et facile à remplacer,
- Durée de vie plus grande,
- Possibilité de graissage à vie,
- Possibilité de supporter des charges combinées,
- Faible coût,
- Supportent mieux les interruptions temporaires de lubrification,
- Assurent un meilleur alignement radial et axial,
- Pas de phénomène de fouettement (whirl),
- présentent un faible couple au démarrage même à basse température.

b) Inconvénients:

- Problèmes de fatigue plus importants,
- Faible capacité d'amortissement,
- Encombrement radial important,
- Générateur de bruits,
- Fréquence de rotation limitée,
- Diamètre nominal limité.

1.3.2. Paliers secs

Ces paliers sont généralement constitués d'une matrice (résine, métal, carbone) imprégnée de graphite. Ils sont utilisés sans apport extérieur de lubrifiant.

Le frottement à sec est particulièrement dangereux pour les organes qui y sont soumis. Le dégagement de chaleur peut provoquer une amorce de fusion entre les surfaces en contact et aboutir au grippage. Ils ne sont utilisés que pour des systèmes fonctionnant rarement ou à vitesse réduite et faible charge, et doivent être envisagés dans toute application où la présence et le maintien du film lubrifiant est impossible (vide spatial, par exemple).

1.3.3. Paliers poreux

Les paliers à coussinets poreux sont dits autolubrifiants car c'est le coussinet imbibé d'huile qui joue le rôle de réservoir de lubrifiant. La couche auto-lubrifiée est constituée par une poudre frittée à haute température (bronze, fer, cuivre). Ces paliers comportent des pores remplis d'huile avec un volume qui représente de 16 à 36% du volume total. Dans un palier poreux, l'huile circule

d'une part dans le jeu, circonférentielle ment et axialement, et d'autre part dans le coussinet, de la zone de pression élevée vers la zone de basse pression (figure I.7). L'huile filtre au travers de la surface interne du coussinet, du film vers le coussinet dans la zone de pression élevée, du coussinet vers le film dans la zone de pression basse. L'utilisation de ces paliers est limitée par la température de fonctionnement.

Les avantages et les inconvénients de ce type de palier sont :

a) Avantages :

- L'absence de l'alimentation du lubrifiant permet d'avoir un montage simple,
- Faible coût de fabrication du coussinet.

b) Inconvénients:

- Ils ne supportent pas les grandes vitesses et les grandes charges,
- Un couple de démarrage faible,
- Ils nécessitent un grand couple au démarrage à des basses températures.

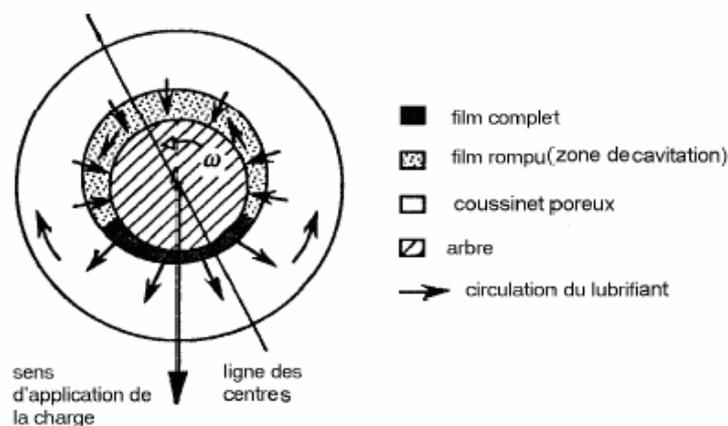


Figure I. 7: Coupe schématique d'un palier poreux

1.3.4. Paliers magnétiques

Les paliers magnétiques permettent de supprimer tout contact entre un arbre et un bâti, d'éliminer les lubrifiants et tous les problèmes de frottement.

Ces paliers ont une très grande précision de guidage. Ils peuvent fonctionner dans le vide et sont utilisables dans une large gamme de températures (-200°C à 450°C) avec une dissipation d'énergie mécanique pratiquement nulle.

1.3.4.1. Principaux paliers magnétiques

Le palier magnétique passif

Ce palier est réalisé à partir d'aimants permanents ou d'électroaimants à courant d'excitation constante en utilisant soit les forces de répulsion, soit les forces d'alignement.

Le palier magnétique actif

Ce palier travaille toujours en attraction avec des électroaimants à excitation variable commandée par des détecteurs de déplacement.

1.3.4.2. Composants des paliers magnétiques actifs

a. Palier radial

Un rotor ferromagnétique cylindrique flotte dans les champs magnétiques créés par les électroaimants montés deux à deux en opposition (figure I.8).

Le courant est transmis aux bobinages des électroaimants par l'influence des forces électromagnétiques. Sa position est déterminée au moyen de quatre détecteurs qui enregistrent en permanence les éventuels déplacements.

Ces détecteurs inductifs développent une tension électrique en fonction des variations du champ magnétique lié aux déplacements.

Les signaux d'erreur émis par les détecteurs modifient automatiquement, grâce à un système d'asservissement électronique, le courant traversant les électroaimants et par suite les champs magnétiques. Ces champs magnétiques tendent à amener le rotor à sa position nominale.

Le rotor peut être soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du stator (figure I.9).

b. Palier axial

Un palier de type axial est basé sur le même principe que le palier radial. Le rotor est constitué par un disque dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation et en face duquel se trouvent les électroaimants. Ce palier sert de butée axiale. Le détecteur de position est souvent situé à l'extrémité de l'arbre (figure I.10).

Les paliers magnétiques, qui ne sont pas encore d'un emploi courant, sont utilisés dans le cas où la présence d'un fluide lubrifiant ne se justifie pas, les pressions diamétrales sont faibles et les vitesses de rotation élevées (50000 rpm).

Les avantages et les inconvénients de ce type de palier sont

a) Avantages

- Grande rigidité statique,
- Rigidité dynamique réglable permettant d'influencer la vitesse critique du rotor,
- Amortissement élevé utile pour éviter certains phénomènes d'instabilité (fonctionnement en supercritique),
- Position de l'axe de rotation réglable (position nominale),
- Diagnostic permanent de la machine en fonctionnement,
- Réduction importante des pertes.

b) Inconvénients:

- Mise en œuvre coûteuse,
- Nécessité d'un système électronique.

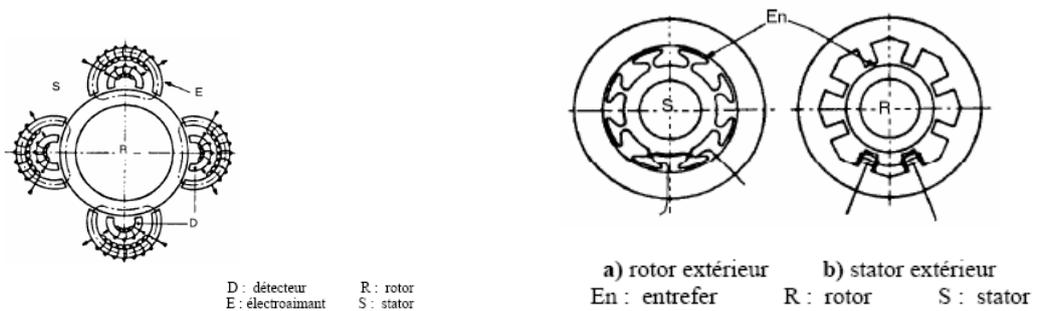


Figure I. 8: Palier radial: schéma de principe Figure I. 9: Palier radial: dispositions standards

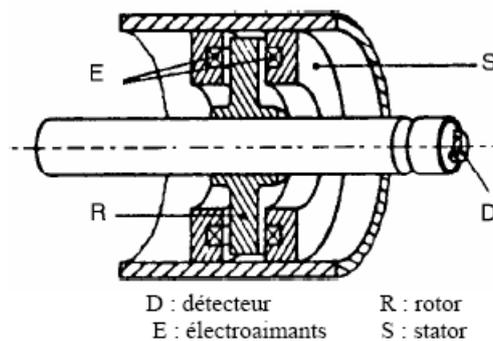


Figure I. 10 : Butée axiale à double effet

1.3.5. Paliers fluides

Il existe deux grandes classes de paliers fluides :

- les paliers hydrodynamiques où la portance résulte de la géométrie du film lubrifiant et de la cinématique des surfaces
- les paliers hydrostatiques où la portance est principalement due à l'existence d'une source extérieure de fluide sous pression.

1.3.5.1. Paliers hydrodynamiques

Dans ce cas, un fluide visqueux sépare totalement les surfaces en présence. Ce fluide peut être un liquide pratiquement incompressible ou un gaz compressible. La pression dans le film est créée par le déplacement relatif des surfaces et la géométrie du contact. Les paliers hydrodynamiques sont fréquemment utilisés pour supporter des charges radiales, pour le guidage des rotors de dimensions importantes. Ces paliers sont conçus pour fonctionner dans des conditions sévères (charges et fréquences de rotations élevées). Par conséquent, pour remplir leur fonction dans de parfaites conditions, les paliers hydrodynamiques doivent être soigneusement conçus. Il existe deux types de configuration de paliers hydrodynamiques

- Paliers à géométrie fixe;
- Paliers à géométrie variable.

A. Paliers à géométrie fixe

A.1. Paliers lisses cylindriques

Les paliers lisses sont fréquemment utilisés, les plus simples sont constitués d'un arbre qui tourne à l'intérieur d'un coussinet complet (amplitude angulaire 360°). Ces deux éléments sont totalement séparés par un film lubrifiant (figure I.11). Dans certains mécanismes, ils correspondent à la meilleure solution technologique existant actuellement. On les rencontre dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs,etc.



Figure I. 11: Coussinets (Doc. LE COUSSINET MODERNE)

Caractéristiques géométriques

Un palier lisse est constitué de deux éléments, l'arbre de rayon a R et le coussinet de rayon c R et de longueur L (figure II.12).

Ainsi, un palier lisse peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins et caractérisé par trois grandeurs

- Le jeu radial ($C = R_c R_a$),
- Le jeu relatif (C/R) est de l'ordre de 0.001,
- Le rapport (L/D) de la longueur au diamètre du palier.

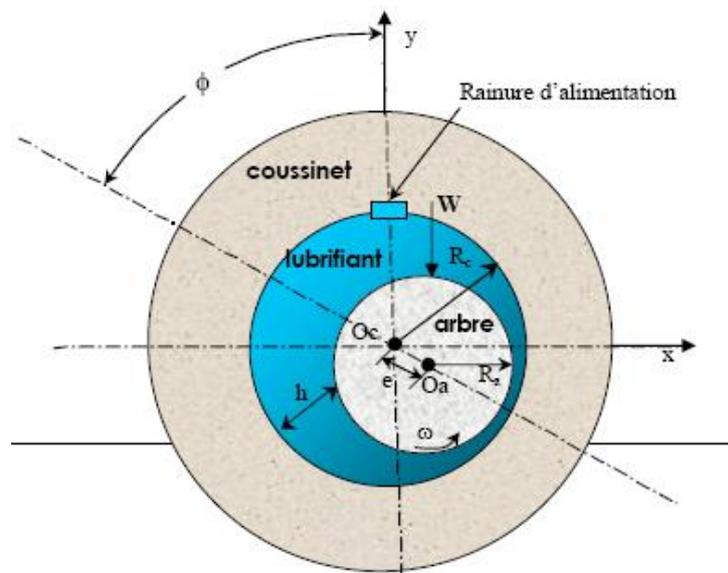


Figure I.12 : Section droite d'un palier lisse

Phases de travail d'un palier lisse

Lors de la mise en route sous charge d'un palier, on observe les trois phases représentées dans la figure I.13. Les points O_a et O_c représentent respectivement les centres de l'arbre et du coussinet, tandis que \vec{W} désigne la charge extérieure appliquée à l'arbre.

A l'arrêt, l'arbre et le coussinet sont en contact. La génératrice commune est opposée à la charge et la distance $O_a O_c$ est égale au jeu radial C (figure I.13 (a)).

Au démarrage l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet et le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent formé par l'arbre et le coussinet.

Dès que la vitesse de rotation devient suffisante il y a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge (figure I.13 (c)).

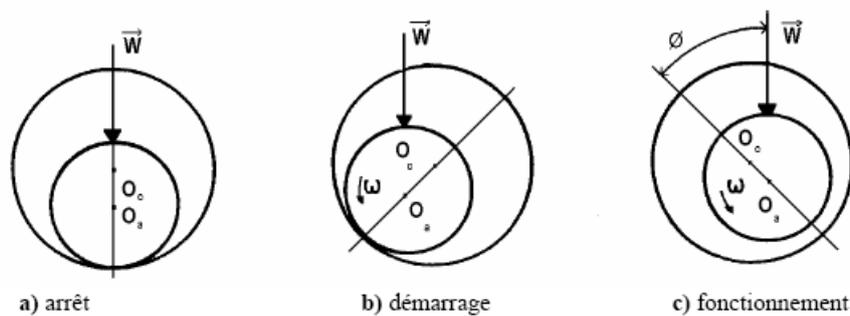


Figure I. 13 : Phases de travail d'un palier lisse

Pour une vitesse de rotation stable et une charge \vec{W} constante, le centre de l'arbre occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet appelée point de fonctionnement.

Si le torseur des forces se réduit à une force unique \vec{W} qui agit dans le plan de la section médiane du palier, les axes de l'arbre et du coussinet sont alors parallèles.

Deux paramètres sont alors nécessaires pour positionner O_a par rapport à O_c :

- La distance $e = |\overline{O_a O_c}|$ appelée excentricité,
- L'angle φ que fait la direction de la charge \vec{W} avec la ligne des centres $\overline{O_a O_c}$ appelés angle de calage.

A.2. Palier à arc partiel

Le calcul de ce type de palier est similaire à celui d'un palier circulaire complet, la pression d'entrée du palier est imposée. La figure I.14 représente la section droite d'un palier à arc partiel, O_a et O indiquent respectivement le centre de l'arbre et le centre géométrique du palier.

O représente aussi dans ce cas le centre de courbure de l'arc partiel ou du lobe.

Comme pour le palier lisse, deux paramètres sont nécessaires pour repérer le centre de l'arbre O_a vis-à-vis du centre de coussinet O qui sont e et ϕ .

Le début du lobe est repéré par l'angle α_1 , et sa fin par l'angle $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta$ où β représente l'amplitude circonférentielle de l'arc.

Les paliers lisses cylindriques ou à arc partiel faiblement chargés à vitesse élevée présentent de grands risques d'instabilités.

L'idée d'améliorer la stabilité du palier en modifiant son profil de manière à augmenter l'excentricité de fonctionnement, c'est-à-dire du pré chargé, date des années 1934.

En effet, Newkirk et Grobel ont vérifié expérimentalement que l'existence d'une discontinuité dans la géométrie à la surface du coussinet pouvait améliorer la stabilité du palier.

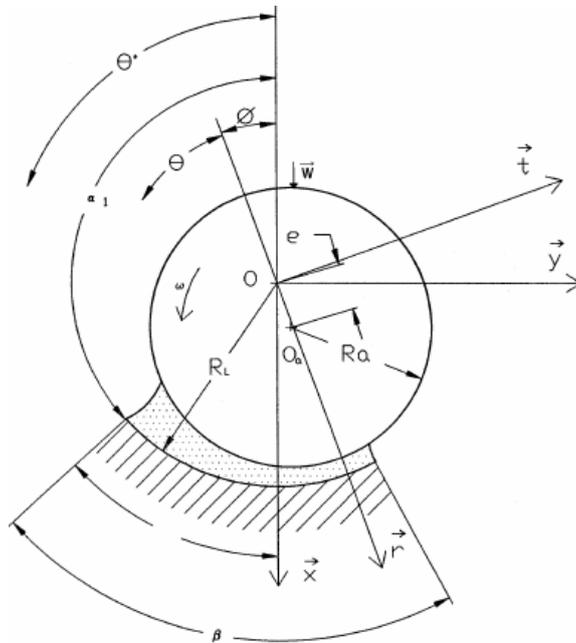


Figure I.14 : Schématisation d'un palier à arc partiel

A. 3. Paliers multilobes

La figure I.15 représente un palier à trois lobes pour deux conditions de fonctionnement différentes : positions centrée (figures I.15 (a) et I.15 (b)) et excentrée (figure I.15 (c)).

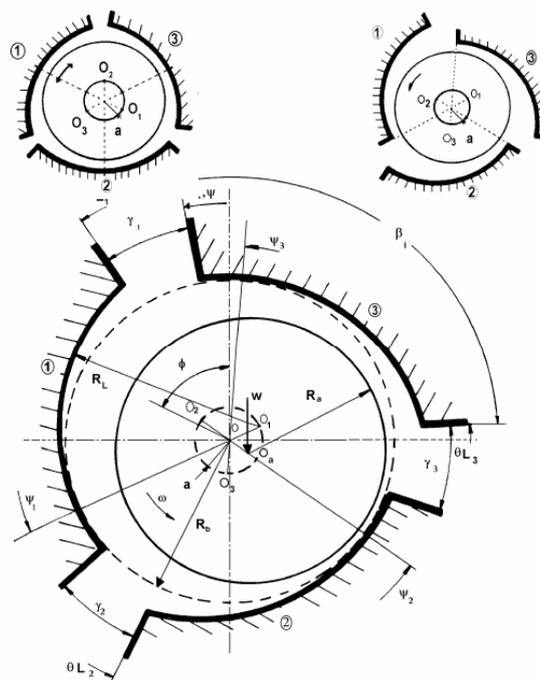
Le coussinet est constitué de trois lobes d'amplitude circonférentielle β_i de longueur axiale L , de rayon de courbure R_L et de centre de courbure O_i .

Les centres de courbure O_i des lobes sont situés sur un cercle de rayon a et de centre O , centre géométrique du palier. Le palier est dit préchargé géométriquement d'une valeur a . Le rôle de ce préchargé géométrique apparaît clairement sur les figures (I.15 (a) et I.15 (b)) en position centrée.

Il existe toujours une suite d'espaces convergent-divergents répartis autour de l'arbre, ce qui entraîne une succession de coins d'huile qui vont opposer une certaine résistance à tout déplacement du centre de l'arbre.

L'arbre étant en position centrée, on définit deux types de paliers à lobe selon le lieu de la ligne des centres $O_i O$ vis-à-vis des lobes.

Si cette ligne des centres est l'axe de symétrie du lobe, le palier est dit à lobes symétriques (figure I.15 (a)), dans le cas contraire il est dit à lobes asymétriques (figure I.15 (b)).



a) Lobes symétriques (palier centré) b) Lobes asymétriques (palier centré)

c) Cas général : Palier excentré

Figure I. 15 : Schématisation d'un palier à trois lobes

Caractéristiques géométriques

La caractérisation géométrique d'un palier à lobes impose la définition des grandeurs suivantes (figure I.15 (c)) :

- Le nombre de lobes n ,
- Les amplitudes circonférentielle β_i et axiale L des lobes,
- Les rayons de courbure des lobes R_L , de l'arbre R_a et du cercle inscrit au coussinet R_b ,
- La pré charge géométrique a qui correspond à la distance entre le centre géométrique du palier et le centre de courbure du lobe,
- La position des lobes vis-à-vis d'une direction fixe arbitraire (Ox) (direction de la charge, par exemple) caractérisée par les coordonnées θ_{Li} et ψ_i où θ_{Li} positionne le début du lobe (i) et ψ_i repère sa ligne des centres en position centrée $O_i O$,
- L'amplitude circonférentielle γ_i (et éventuellement axiale) des rainures de découplages.

La connaissance de ces grandeurs permet de définir:

- Le jeu radial d'usinage : $C_L = R_L - R_a$
- Le jeu radial d'assemblage : $C_b = R_b - R_a$,
- Le coefficient de précharge géométrique : $m = a/C_L$,
- Les coefficients d'asymétrie $\alpha_i = (\psi_i - \theta_{Li}) / \beta_i$ qui caractérisent le rapport de l'amplitude de la région convergente à celle du lobe.

Si $m = 0$, le palier n'est pas pré chargé, c'est un palier circulaire à n rainures axiales, tandis que la valeur $m=1$ représente le cas limite où il y a contact permanent entre l'arbre et chacun des lobes.

Si $\alpha_i = 0.5$, le lobe est symétrique.

Si $\alpha_i = 1$, toute la région est convergente.

Cartes de stabilité

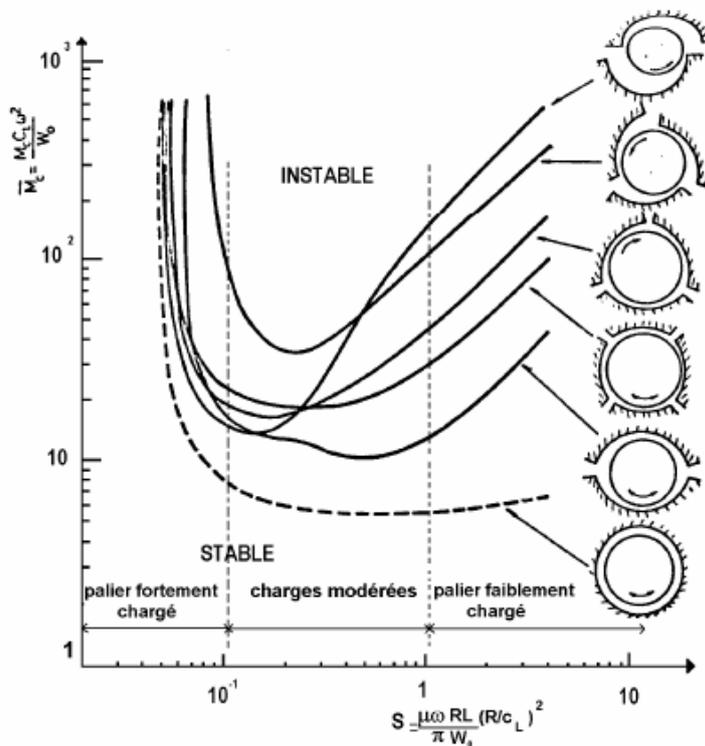
Les cartes de stabilité des différents paliers à géométrie fixe sont représentées sur la figure I.16.

Pour des faibles excentricités de fonctionnement, c'est-à-dire aux faibles charges et aux grandes vitesses de rotation, le palier à deux lobes asymétriques ($\alpha=1$) est le plus stable.

La pré charge géométrique m a un effet stabilisant. Dans le cas des charges modérées ($S \rightarrow \infty$), le palier à deux lobes décalés est moins stable que le palier à trois lobes décalés.

On remarque qu'il n'y a pas de type de palier à stabilité optimale quelles que soient les conditions de fonctionnement. Cependant le comportement du palier à trois lobes décalés ($\alpha=1$) est remarquablement stable quelque soit le nombre de Sommerfeld (S) surtout vis-à-vis du palier circulaire classique qui est le palier le moins stable (courbe en trait discontinu).

On peut conclure que les paliers à lobes sont plus stables que les paliers cylindriques ou circulaires. L'effet stabilisant est dû à l'existence de la pré charge géométrique et de l'asymétrie des lobes à faibles charges.



\bar{M}_c : Masse critique sans dimension

S : Nombre de Sommerfeld

Figure I. 16: Carte de stabilité de différents paliers à géométrie fixe, ($L/D=1$)

A.4. Paliers à films amortisseurs (Squeeze Film Damper Bearing)

L'ensemble rotor-roulement à billes est monté dans un palier fluide (figure I.17).

Le guidage en rotation de l'arbre est assuré par le roulement alors que le palier fluide joue le rôle d'un amortisseur visqueux.

La bague intermédiaire (fixe en rotation) permet de réduire le mouvement de la bague extérieure du roulement dans le palier à une translation.

Deux technologies de paliers à film amortisseur peuvent être envisagées :

- Montage d'un ressort en parallèle avec le film amortisseur permettant de donner une certaine raideur au palier,
- Film amortisseur libre (sans ressort).

Ce type de palier est surtout utilisé pour le guidage des rotors de turbines tournant à grande vitesse tels que les turbo réacteurs d'avion qui utilisent fréquemment des paliers de roulement au lieu des paliers à film d'huile.

A cause de leur faible amortissement, les paliers de roulement ne permettent pas d'atténuer les amplitudes de vibration surtout lors du passage des vitesses critiques.

En effet, O. Bonneau et al ont montré expérimentalement que pour un rotor monté dans deux paliers de roulement rigides, le passage de la vitesse critique est très délicat car les amplitudes de vibration sont trop importantes. Celles-ci peuvent être atténuées si le rotor est monté dans des paliers à film amortisseur.

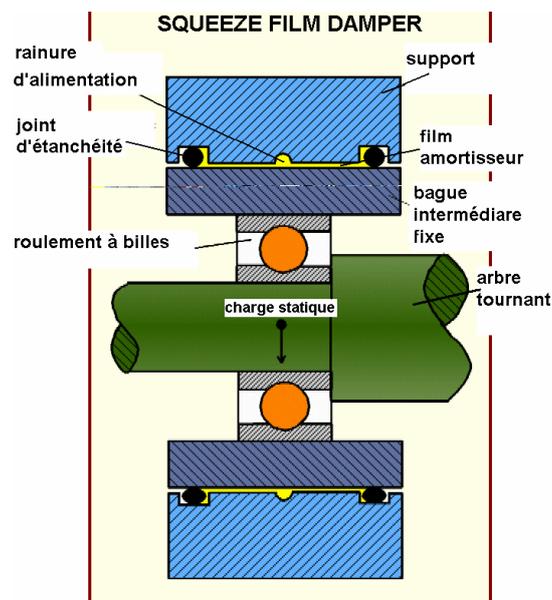


Figure I. 17 a: Schéma de principe d'un palier à film amortisseur (SFDB)

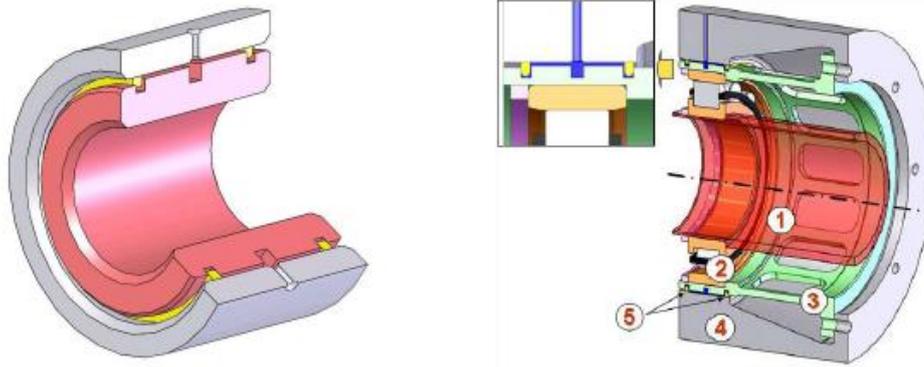


Figure I. 17 b : Amortisseur à film fluide (1, rotor, 2, roulement, 3, cage d'écureuil, 4, stator, 5, segments)

B. Paliers à géométrie variable (Paliers à patins oscillants)

géométriques Les paliers à patins oscillants sont des paliers réglables par leur mode de fonctionnement (figure I.18). Ils sont composés de n patins, identiques ou non, individuellement articulés autour de pivots situés généralement sur un cercle appelé cercle des pivots.

Nous avons schématisé sur la figure I.19 (a) un palier à trois patins oscillants non chargé.

Caractéristiques

Les principaux paramètres sont

- Le nombre de patins n ,
- Le rayon de l'arbre R_a ,
- Le rayon de cercle des pivots R_b ,
- L'amplitude angulaire β , la largeur L , le rayon de courbure R_p , la masse équivalente de chaque patin ($M = I - R_p$) où I est le moment d'inertie du patin par rapport à son pivot,
- La position des pivots ψ_i ,
- Le jeu d'usinage du patin $C_p = R_p - R_a$
- Le rapport α/β qui définit la position angulaire du pivot,
- La distance a qui sépare le centre géométrique du palier du centre de courbure du patin,
- Le coefficient de pré charge géométrique $m = a / C_p$.

Sous charge nulle, les centres de l'arbre O_a et du palier O sont confondus (figure I.19 (a)).

Si le coefficient de pré charge géométrique m est nul, il n'y a pas de génération de pression hydrodynamique. Les patins sont alors en position d'équilibre.

Il y a alors un risque de contact entre l'extrémité du patin et l'arbre.

Par contre, lorsque le coefficient de pré charge géométrique m est différent de zéro, tous les patins sont hydro dynamiquement chargés.

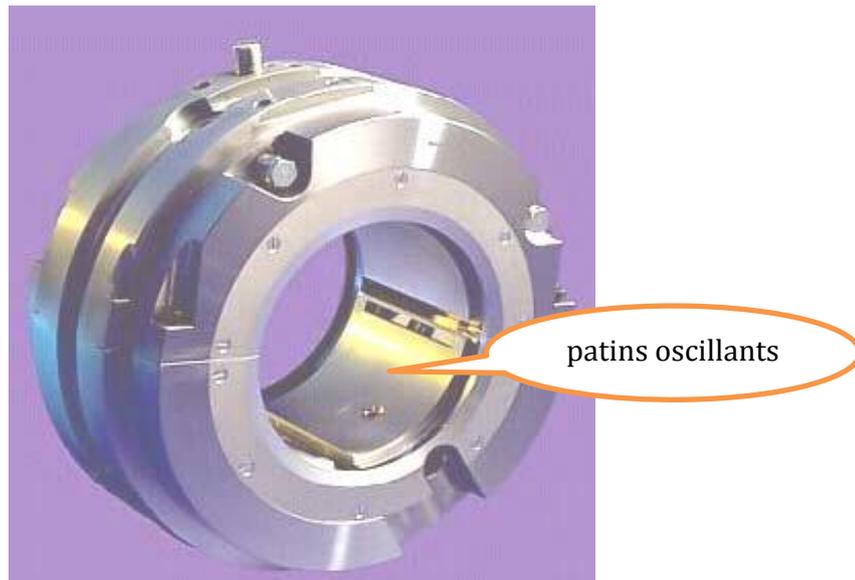


Figure I.18.a: Photographie d'un palier à quatre patins oscillants

Le paramètre de précharge géométrique est donc très important puisqu'il assure, comme dans le cas des paliers à géométrie fixe, une bonne rigidité du système sous charge nulle.

Lorsque le palier est chargé, l'arbre est excentré (figure I.19 (b)).

Les patins quant à eux tournent autour de leurs pivots

Ils occupent alors une position d'équilibre statique telle que l'action hydrodynamique exercée sur chaque patin passe par son pivot et que la résultante de toutes les forces \vec{F}_i soit égale et opposée à la charge statique extérieure \vec{W}_0 supportée par le palier.

En régime dynamique, les patins peuvent suivre le mouvement de l'arbre, ce qui est à l'origine du palier.

Stabilité d'un palier à patins oscillants

Les résultats présentés sur la figure I.20 dans le cas d'une pré charge géométrique $m=0.5$ montrent l'évolution de la masse critique adimensionnée \vec{M}_c du rotor et de la fréquence de

fouettement γ_c en fonction du nombre de Sommerfeld S et ce pour différentes valeurs de la masse équivalente adimensionnée \overline{M}_p du patin.

Il existe deux régions où la stabilité du palier est infinie.

La zone instable correspond au cas où la masse équivalente critique du patin \overline{M}_p est voisine de la masse équivalente critique du patin \overline{M}_{pc} qui est-elle même fonction de la fréquence de fouettement γ_c et du nombre de Sommerfeld.

On observe les mêmes tendances que dans le cas du palier non chargé, c'est-à-dire

- Le palier devient infiniment stable lorsque la masse équivalente du patin est faible,
- La frontière de stabilité tend vers celle correspondant à un palier à lobes fixes lorsque la masse équivalente devient très grande,
- La fréquence de fouettement γ_c est voisine de $1/2$.

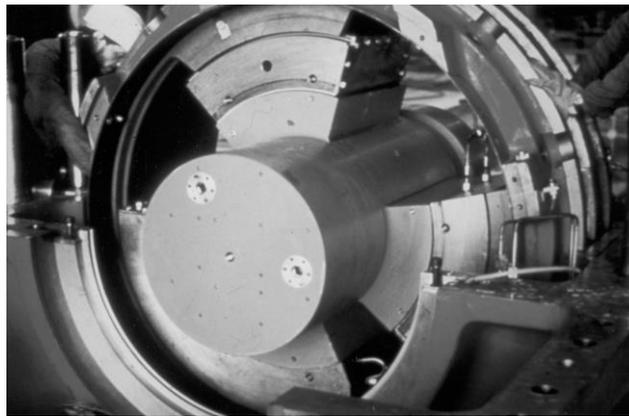


Figure I.18.b Palier à patins oscillants de grand groupe turboalternateur (DOCUMENT EDF)

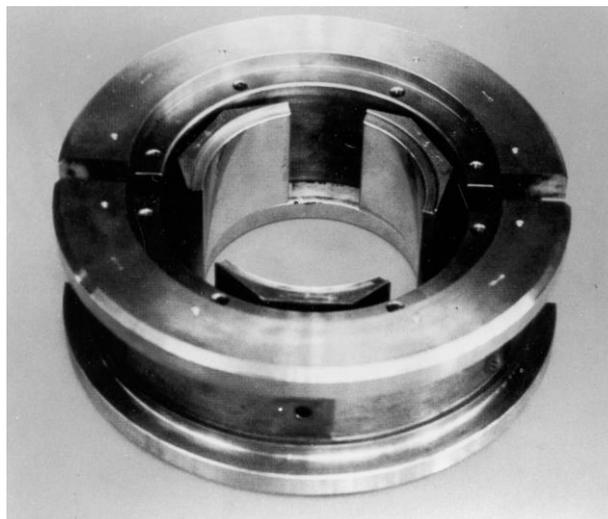
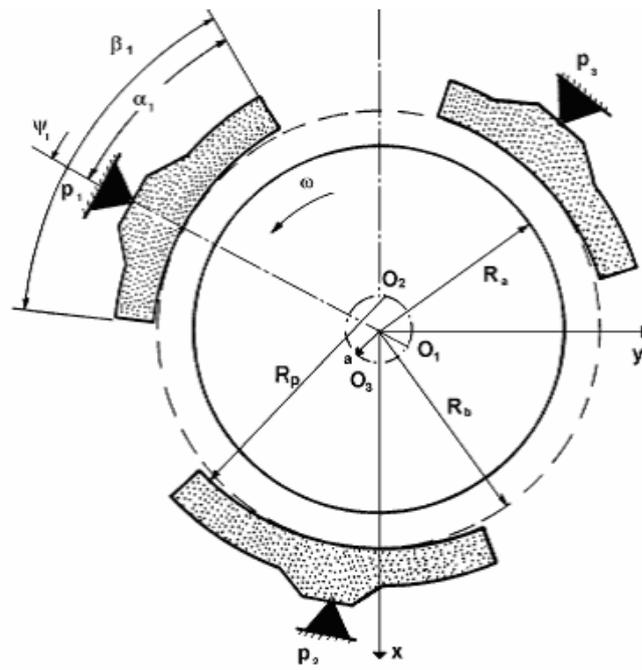
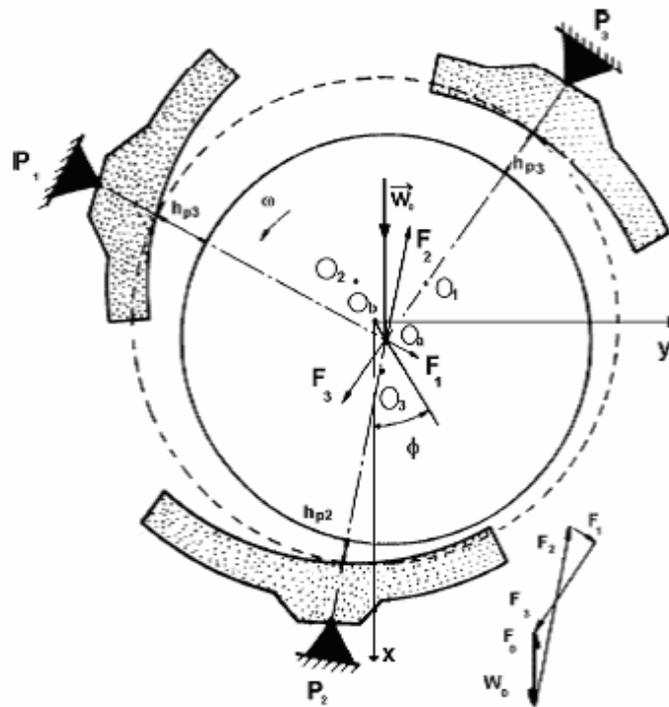


Figure I.18.c Paliers à patins oscillants de compresseurs grande vitesse (DOCUMENT ALSTOM)



a) palier non chargé



b) palier chargé

Figure I. 19 : Schématisation d'un palier à trois patins oscillants

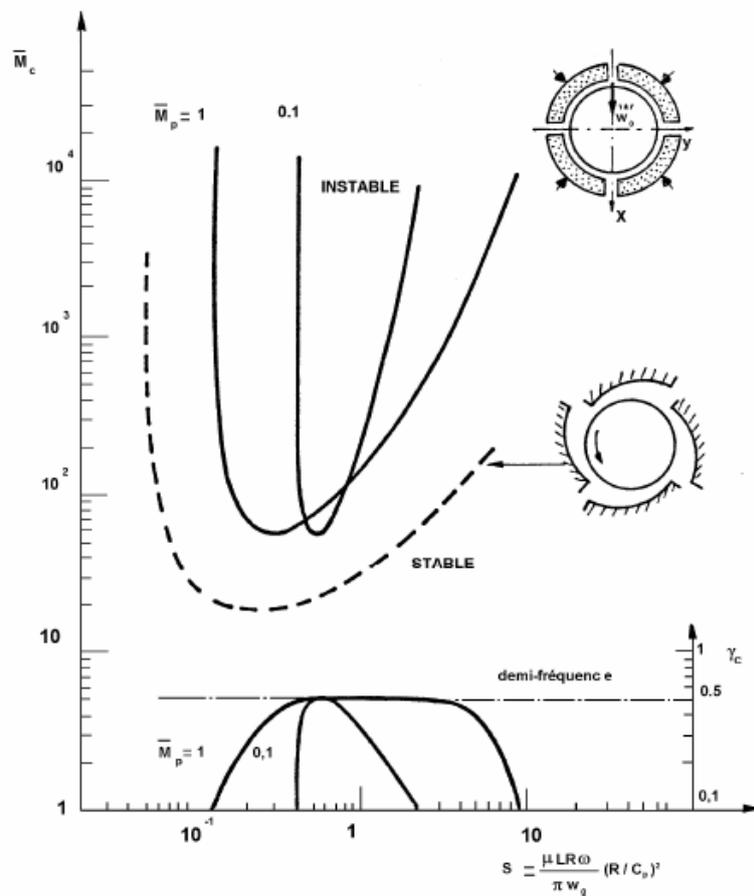


Figure I. 20 : Comparaison des cartes de stabilité d'un palier à quatre lobes asymétriques et d'un palier à quatre patins oscillants (palier chargé, $m=1/2$, $\alpha/\beta = 1/2$, $L/D = 1$)

1.3.5.2 Paliers hybrides

Un palier hybride est un palier où interviennent simultanément des effets hydrostatique et hydrodynamique. Le palier est alimenté sous pression constante au moyen de résistances hydrauliques (capillaires ou orifices en paroi mince). Un palier hybride est généralement constitué de n alvéoles réparties régulièrement sur la périphérie du coussinet.

On trouve deux types de paliers suivant que les alvéoles sont découplées ou non par des rainures axiales (figure I.21). Chaque alvéole doit être alimentée au travers d'un système de régulation. Le système le plus utilisé est l'orifice.

Il est nécessaire de connaître la position de chaque alvéole ainsi que son amplitude angulaire γ . De même, les rainures de découplage sont caractérisées par leurs amplitudes δ .

Si les axes de l'arbre et du coussinet sont supposés parallèles, deux paramètres sont nécessaires pour positionner l'arbre à l'intérieur du coussinet (figure I.22)

$$\text{l'excentricité } e = \overline{O_a O_c} \text{ ou } e = \varepsilon C$$

(ε et C étant l'excentricité relative et le jeu radial du palier),
l'angle \varnothing que fait la direction de la charge avec la ligne des centres.

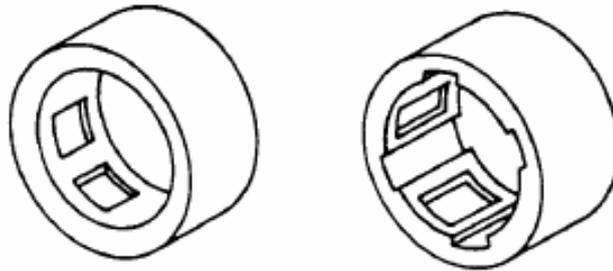


Figure I. 21 : Palier hydrostatique à alvéoles découplées et non découplées

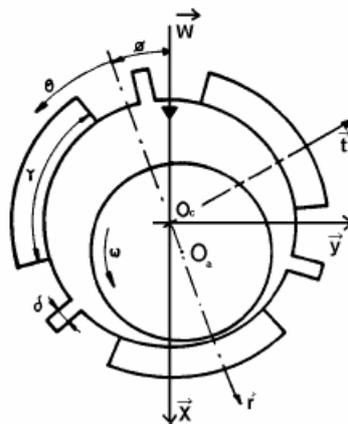
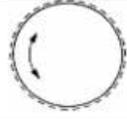
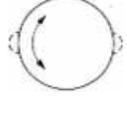
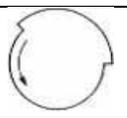
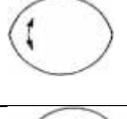
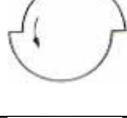
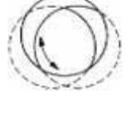
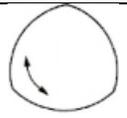
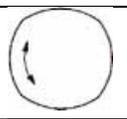
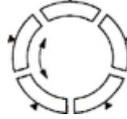
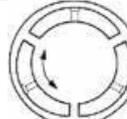


Figure I.22 : Schéma d'un palier hydrostatique à trois alvéoles découplées

Tableau I.1. Comparaison de différents types de palier

Type de palier	Configuration géométrique	Capacité de charge	Rigidité	Amortissement	Stabilité	Aptitude à supporter une charge tournante	Réalisation	Remarques
Palier circulaire avec rainure axiale		élevée	faible	faible	mauvaise	mauvaise	simple	plusieurs rainures peuvent exister. Instable à faible charge
Palier circulaire avec rainure circonférentielle		moyenne	faible	faible	mauvaise	bonne	simple	idéal pour les charges dynamiques
Palier à poches (Pocket bearing)		moyenne	très moyenne	moyen	moyenne	mauvais	e assez simple	
Palier à saut (step bearing)		élevée	très moyenne	Très moyen	moyenne	mauvaise	assez simple	plusieurs sauts peuvent exister
Palier à deux lobes (citron)		assez élevée	moyenne	Très moyen	moyenne	mauvaise	simple	très faible rigidité dans la direction horizontale
Palier à deux lobes décalés (offset halves)		assez élevée	élevée	élevé	très bonne	à faible charge mauvaise	assez simple	
Palier cylindrique composé (camella bearing)		moyenne	élevé	élevée	bonne	bonne	simple	
Palier à trois lobes symétriques		moyenne	élevée	élevé	bonne	mauvaise	Moyennement difficile	
Palier à trois lobes asymétriques (tilted lobes)		assez élevée	très élevée	très élevé	très bonne	mauvaise	difficile	
Palier à quatre lobes symétriques		faible	élevée	élevé	bonne	mauvaise	Moyennement difficile	
Palier à patins oscillants		assez élevée	élevée	élevé	excellente	mauvaise	difficile	risque de détérioration des pivots à charges dynamiques
Palier à pivots hydrostatiques		assez élevée	élevée	très élevé	excellente	moyenne Rateau	difficile	de conception très récente Mechanical Technology Incorporated

II. Principe d'amortisseur squeeze film

2. Introduction

Comme dans tous les domaines de la mécanique de nos jours, la recherche accrue d'efficacité correspond à l'un des principaux défis des constructeurs de machines tournantes. Il en résulte une tendance au développement de rotors plus légers, et par conséquent plus flexibles, qui doivent atteindre de vitesses plus élevées, afin de minimiser le rapport poids/puissance et ainsi d'améliorer leur rendement. A cet objectif s'ajoute le besoin de réduire les nuisances vibratoires au minimum au niveau du stator, car le confort est indéniablement devenu un facteur majeur dans l'appréciation de la qualité de tels produits.

L'assouplissement des rotors et l'augmentation des vitesses de fonctionnement rendent le système mécanique susceptible à des problèmes vibratoires aigus qui englobent des surtensions excessives au voisinage des résonances ainsi que l'apparition de plages de fonctionnement instables. De plus, ces tendances d'évolution amènent l'amplitude des charges dynamiques synchrones transmises au milieu environnant à s'accroître.

2.1 Principe et architecture d'un amortisseur squeeze film

Pour remédier à ces problèmes, l'amortisseur à film écrasé, appelé également film fluide amortisseur, traduction du terme anglais squeeze film damper (SFDB), constitue l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées ces trente dernières années, du fait de la relative simplicité de construction et de la forte capacité d'amortissement.

Il consiste en une lame fluide interposée entre des paliers de la machine et le bâti, comme illustré dans la figure 2.1. Les forces hydrodynamiques générées par l'action d'écrasement du fluide, généralement une huile, s'avèrent capables d'atténuer les vibrations du rotor, d'améliorer la stabilité du système et de réduire la transmissibilité.

La structure du SqF ressemble à celle des paliers hydrodynamiques, la différence étant que ceux-ci assurent la portance du rotor outre la fonction d'amortissement. L'écoulement dans ces derniers est induit par l'entraînement du fluide adhérant aux surfaces, effet dit de Couette, ainsi que par l'écrasement du film, effet dit de Poiseuille. Les frontières solides délimitant le SqF, par contre, ne subissent pas de mouvements relatifs tangentiels, si bien que l'effet de Couette est absent. Le SqF est alors incorporé au système mécanique dans le but spécifique de dissiper de l'énergie, la portance du rotor devant être fournie par ailleurs.

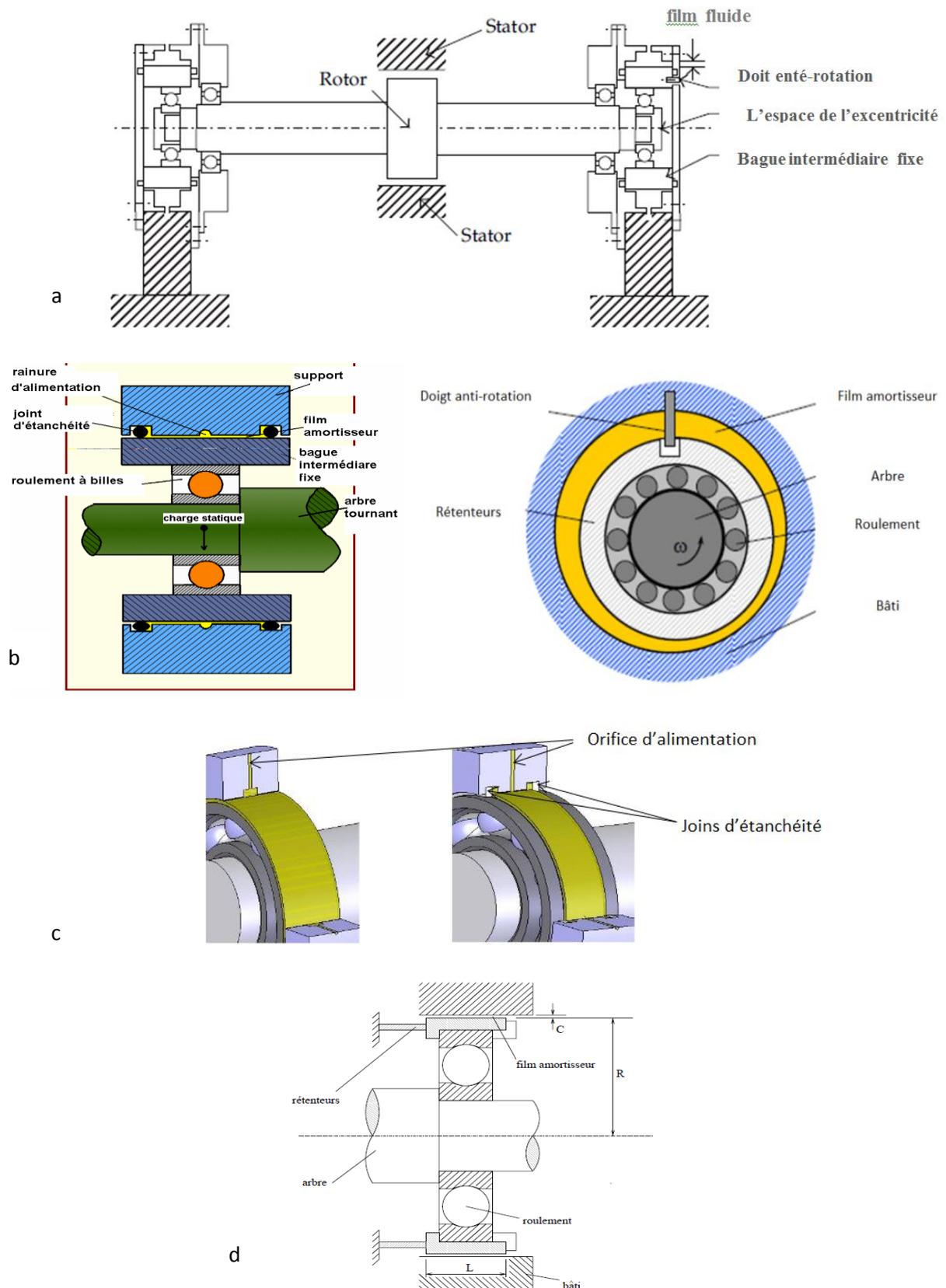


Figure. 2.1: Schéma d'un amortisseur squeeze film

L'un des éléments de construction les plus importants du SFDB est le système de blocage en rotation et de centrage. La piste intérieure de l'amortisseur est généralement en liaison avec le bâti de la machine par l'intermédiaire de rétenteurs, un dispositif mécanique relativement souple dont les fonctions sont d'empêcher la piste de tourner autour de son axe et de compenser la pesanteur. Ce faisant, on évite qu'un éventuel contact entre les pistes du SFDB ne se produise, surtout pendant les phases de démarrage du rotor.

En modifiant les rétenteurs, il est possible d'altérer la vitesse critique du mode de suspension de la machine. Cependant, leur influence peut diminuer considérablement vis-à-vis de la raideur dynamique du SFDB lorsque celui-ci engendre un amortissement excessif. Il existe également des configurations où le palier reste libre dans la cavité annulaire qui comporte le fluide et est bloqué en rotation par des crans, la portance étant générée par effet hydrodynamique au cours de la montée en vitesse. La valeur de l'excentration statique du palier altère sensiblement la performance du SFDB.

2.2 Applications de l'amortisseur squeeze film

Bien que l'invention de l'amortisseur squeeze film soit normalement attribuée à COOPER en 1963, et la première application industrielle à Rolls Royce, CHILDS situe le développement de ce type d'amortisseur beaucoup plus tôt. Il cite PARSONS comme le pionnier du SFDB, qui aurait utilisé cette technologie pour atténuer les vibrations d'un compresseur de vapeur en 1889.

L'objectif visé par l'utilisation du SFDB dépend de l'application à laquelle la machine tournante est destinée. Dans le cas de compresseurs de vapeur, par exemple, l'isolation vibratoire est un critère de conception secondaire, du fait de la contrainte faible introduite par le poids des bâtis, qui peuvent être très solides et ainsi bien supporter les charges dynamiques.

L'utilisation de paliers hydrodynamiques dans ce type de machine est très répandue et vise principalement à garantir la dissipation énergétique nécessaire au passage des vitesses critiques, limitant ainsi les sollicitations de l'arbre.

Les paliers hydrodynamiques lisses possèdent toutefois des seuils de vitesse supercritiques au-delà des quels ils rendent le système instable, ce qui découle des termes de raideur croisés du film d'huile. Cette instabilité, dénommée oil whip, apparaît à une vitesse d'environ le double de la première vitesse critique du rotor, et est caractérisée par un régime sous-synchrone qui dégrade dangereusement la performance de l'ensemble mécanique. L'exigence d'étendre la plage de fonctionnement stable des compresseurs conduit à la recherche

de solutions permettant d'apporter de l'amortissement de nature stabilisatrice, donc dans les parties non tournantes de la machine.

L'emploi du SFDB en série avec le palier hydrodynamique a fait preuve d'efficacité dans la suppression de cette instabilité. Le SFDB s'est avéré également capable d'atténuer, voire de supprimer, des vibrations sous-synchrones excitées par des forces déstabilisatrices telles que celles de joints à la byrinthe ou celles engendrées par la non axi symétrie du jeu rotor /stator (forces d'Alford). Dans le domaine aéronautique, la problématique est sensiblement déférente. Pour une question de fiabilité et de sécurité, le guidage du rotor est communément assuré par des roulements à billes ou à rouleaux, les quels ne fournissent qu'un amortissement très faible.

Il en résulte des pics de vibration d'amplitude dangereusement importante lorsque des vitesses critiques sont traversées. L'introduction d'une source de dissipation d'énergie devient ainsi fondamentale pour le passage des résonances sans risque de casse pour le système mécanique.

Outre l'exigence d'atténuation des vibrations du rotor, la conception de moteurs aéronautiques s'appuie également sur le souhait de minimiser les charges dynamiques transmises à travers les paliers, ce qui permet de réduire la sollicitation des supports, dont le poids constitue une contrainte forte de conception, et d'augmenter le confort vibratoire dans l'avion. Les applications de l'amortisseur fluide dans le domaine des machines tournantes ne se restreignent pas qu'aux paliers de compresseurs et de moteurs à réaction.

Il peut être utilisé, entre autres, dans des pompes centrifuges, au niveau du support de trains d'engrenage ou encore allié à des paliers magnétiques dans des systèmes de stockage d'énergie. L'action hydrodynamique de film fluide cylindriques est également un phénomène important dans le comportement vibratoire des tubes d'échangeurs de chaleur.

2.3 Problématique de l'amortisseur fluide

L'étude théorique de la dynamique d'un système mécanique comportant un SFDB comprend deux étapes principales. La première concerne le développement d'un modèle de comportement qui exprime le champ de pression du film d'huile en fonction des variables décrivant la cinématique du système au niveau du palier qui l'incorpore. La deuxième phase de l'étude consiste à modéliser et simuler la dynamique de l'ensemble mécanique, ce qui nécessite l'emploi d'outils de calcul capables de déterminer les réponses transitoires et stationnaires ainsi que d'analyser leur stabilité.

Le lien entre ces deux étapes correspond aux forces hydrodynamiques obtenues en intégrant le champ de pression du SFDB, qui sont ensuite reportées dans la simulation du fonctionnement de la machine. A partir d'un cahier des charges prédéfini pour celle-ci, le modèle du SFDB doit permettre également de remonter à la définition des différents paramètres de l'amortisseur influant sur la performance système mécanique. Sachant que la taille des modèles éléments finis industriels ne cesse d'augmenter, il est intéressant d'avoir des expressions permettant une estimation rapide des forces de l'amortisseur, pour que l'analyse de la dynamique du système soit menée de manière efficace. Cependant, la déduction de telles expressions exige très souvent des hypothèses simplificatrices qui peuvent pénaliser la précision du calcul.

Or, les efforts dirigés vers une performance superlative des machines tournantes, alliés à l'évolution remarquable des moyens de calcul des trente dernières années, conduisent à l'adoption de critères de conception précis et dans des marges de sécurité plus étroites, au lieu des critères surdimensionnés de jadis. Afin d'améliorer les études prédictives des applications du SFDB, la modélisation des forces hydrodynamiques doit être fiable, sans pour autant rendre le temps de calcul prohibitif dans l'optique industrielle.

Des nombreux travaux théoriques et expérimentaux sur le SFDB furent réalisés depuis les années 60, à mesure que ses applications dans le domaine des machines tournantes se répandaient. Ces travaux ont permis de mettre en relief un certain nombre de facteurs d'influence dans le comportement d'un tel amortisseur, dont les principaux sont:

- les effets d'inertie de l'écoulement;
- la cavitation;
- la présence et les caractéristiques des joints d'étanchéité;
- le système d'alimentation;
- les effets thermiques;
- la turbulence;
- la non linéarité de l'équation constitutive du fluide.

La pertinence de ces facteurs dépend de la configuration de l'amortisseur (extrémités ouvertes, extrémités étanches,...), du type de fluide utilisé et des conditions d'opération du système mécanique (vitesse, excentration statique, ...). On peut s'attendre, par exemple, à une transition d'écoulement laminaire à turbulent pour des rotors à très haute vitesse, montés sur des

amortisseurs ayant un jeu radial relativement important. En dépit du progrès dans la compréhension de la phénoménologie du comportement du SFDB, le développement de modèles à la fois robustes et expéditifs pose encore beaucoup de difficulté.

Les difficultés persistent lors de la simulation de la dynamique d'ensemble, à cause du comportement non linéaire du SFDB, dont les forces sont fonctions de la cinématique du système. Il est fondamental d'employer des méthodes de calcul efficaces et aptes à prendre en compte cette non linéarité dans le cadre d'applications industrielles, surtout pour la réalisation d'études paramétriques d'avant-projet. Des problèmes de convergence et le coût temporel élevé motivent la recherche d'algorithmes répondant au mieux au compromis entre temps et précision de calcul.

2.4 Quelques exemples où on peut trouver les SFDB



Figure 2.2 - Salle des machines de la centrale nucléaire de Flamanville (Manche)

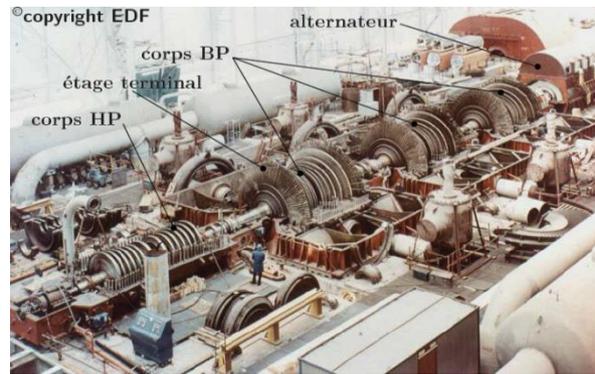


Figure 2.3 - Opération de maintenance sur un GTA de la centrale nucléaire de Bugey



Figure 2.4 - Rotor de la centrale thermique classique de Porcheville (Yvelines)

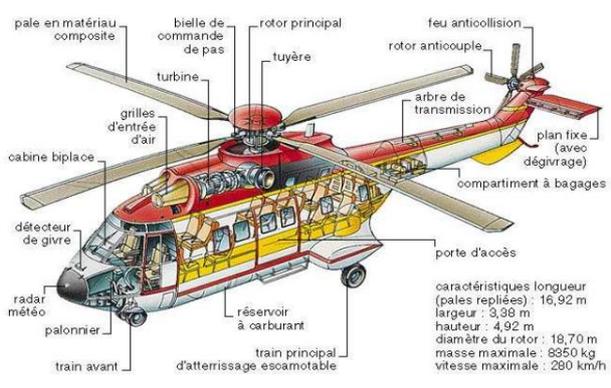


Figure 2.5: Arbre de transmission arrière d'un hélicoptère

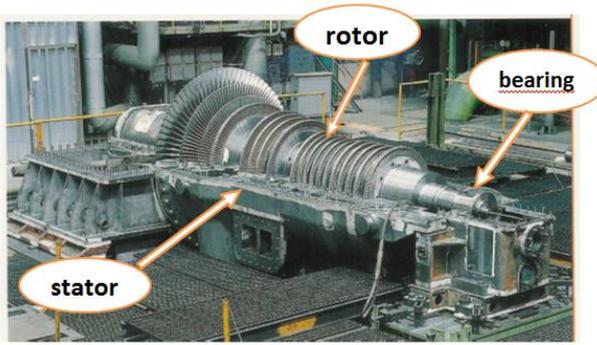


Figure 2.6 Skoda Power, Czech Republic



Figure 2.7: Turbine réelle de centrale électrique

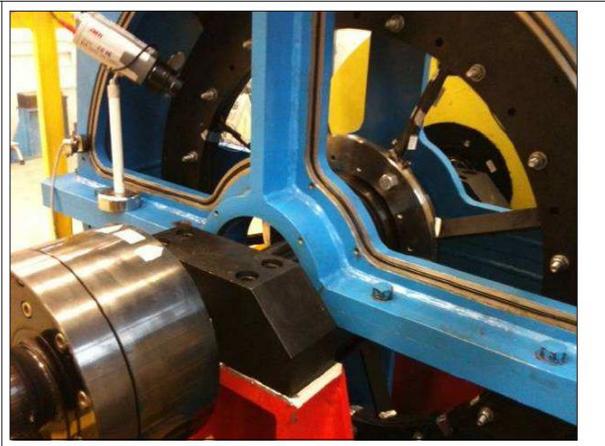
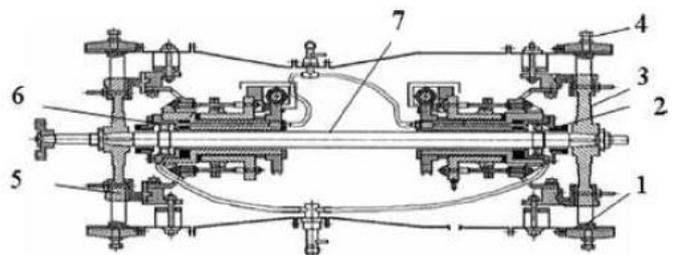


Figure 2.8: Banc EUROPE (EDF R&D)



(a) Photo of the aero-engine rotor tester



(b) Section drawing of the aero-engine rotor tester

Figure 2.9: Banc d'essais Turbine aéronautique

2.5 Organisation et objectifs du travail

Nous entreprenons ce mémoire, après ce bref chapitre introductif, par la présentation des aspects théoriques associés à la mécanique des lames fluides, dans le but de circonscrire la phénoménologie pertinente concernant le comportement dynamique du film d'huile.

Nous exposerons également des méthodes proposées pour la résolution du champ de pression du SFDB donné par l'équation de Reynolds.

III. Théorie de la Lubrification hydro dynamique par fluide à couple de contrainte péizo-visqueux

3. Introduction

Comme souligné dans le chapitre précédent, l'étude de la dynamique d'un système comportant des SFDB comprend deux parties principales: la modélisation du comportement du fluide amortisseur et la simulation de la dynamique de l'ensemble mécanique. Dans ce chapitre, les points les plus pertinents dans le cadre de la première de ces deux parties sont abordés. Nous exposons ainsi la phénoménologie intervenant dans le comportement du SFDB et les modèles d'enveloppes jusqu'à présent pour en tenir compte. Nous présentons également la justification physique des différentes hypothèses que l'on doit effectuer lors de la modélisation.

3.1 Théorie classique de la lubrification: l'équation de Reynolds

L'application de la loi de Newton du mouvement à un élément fluide infinitésimal satisfaisant l'hypothèse du continuum aboutit à l'équation de mouvement de Cauchy,

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.1)$$

ou la dérivée matérielle $\frac{Du_i}{Dt}$ comprend les termes suivants,

$$\underbrace{\frac{Du_i}{Dt}}_{\text{accélération totale}} = \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{partie convective}} + \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\text{partie instationnaire}} \quad (3.2)$$

avec,

ρ : masse volumique du fluide,

$\{V\} : \equiv V = \{u_1, u_2, u_3\}$: Vecteur vitesse de la particule fluide,

$\{f\} : \equiv f = \{f_1, f_2, f_3\}^t$: Vecteur des forces de volume par unité de masse (N/kg)

$[\sigma]$: Tenseur des contraintes de Cauchy,

$\{x\} : = \{x_1, x_2, x_3\}$: Système de coordonnées spatiales dans la configuration actuelle de l'élément fluide.

t : variable temporelle

La partie instationnaire correspond à l'accélération locale d'une particule fluide et est nulle pour des écoulements en régime permanent. L'accélération convective représente le changement de vitesse résultant du transport de la particule d'un emplacement à un autre où la vitesse est différente.

Pour un fluide dit newtonien, l'équation constitutive exprime une relation linéaire entre les contraintes et le taux de déformation :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \delta_{ij} = -p\delta_{ij} + K_{ijmn} D_{mn} \quad (3.3)$$

Le terme $-p\delta_{ij}$, ou δ_{ij} est le symbole de Kronecker, correspond à la partie sphérique des contraintes.

La grandeur p est approchée par la pression thermodynamique, laquelle est liée à la masse volumique et à la température par une équation d'état. Bien que des quantités thermodynamiques ne soient définies que pour des états d'équilibre, ce qui n'est pas obligatoirement le cas d'un fluide en mouvement, les erreurs dues à cette approximation sont négligeables, pourvu que le temps de relaxation des molécules du fluide soit faible devant l'échelle temporelle de l'écoulement.

Dans la partie anisotropique, $[\delta]$, du tenseur de Cauchy, on a identifié le tenseur taux de déformation :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4)$$

Puisque $[\delta]$ est un tenseur symétrique, K_{ijmn} doit l'être également. Si l'on suppose en plus que le milieu est isotropique, on démontre que deux termes seulement de K_{ijmn} sont non nuls et que l'équation constitutive peut s'écrire :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + \lambda D_{mm} \delta_{ij} \quad (3.5)$$

Où μ et λ sont deux constantes scalaires appelées les coefficients de Lamé, et $D_{mm} = \nabla \cdot \mathbf{V}$ est le taux de déformation volumétrique.

En définissant la pression moyenne, $-\bar{p}$, comme la moyenne des termes diagonaux de $[\tau]$, lorsque l'on pose $i = j$, la somme sur les indices répétés de 2.5 fournit :

$$p - \bar{p} = \kappa \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3.6)$$

Où $\kappa = \frac{2}{3}\mu + \lambda$ est une constante de proportionnalité appelée coefficient de viscosité volumique. Dans la majorité des problèmes de la mécanique des fluides, l'hypothèse de Stokes,

$$\frac{2}{3}\mu + \lambda = 0 \quad (3.7)$$

L'équation constitutive d'un fluide newtonien 2.5 devient donc :

$$\sigma_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{V}\right) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (3.8)$$

ou la constante μ est appelée la viscosité dynamique du fluide.

En reportant l'équation constitutive d'un fluide newtonien 3.8 dans l'équation de mouvement de Cauchy 3.1, on obtient l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial X_i} + f_i + \frac{\partial}{\partial X_j} \left[2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{V}) \delta_{ij} \right] \quad (3.9)$$

Bien que la viscosité soit une fonction de la pression et de la température qui caractérisent l'état thermodynamique du fluide, dans la théorie classique de la lubrification, cette propriété est supposée constante.

Sous cette hypothèse, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial X_i} + f_i + \mu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial X_i} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] \quad (3.10)$$

Où $\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_3^2}$ est le laplacien de u_i .

Pour des fluides incompressibles, le taux de déformation volumétrique $\nabla \cdot \mathbf{V}$ est nul.

Si l'on suppose encore que le vecteur des forces de volume, \vec{f} , est négligeable, l'équation précédente se ramène à :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i \quad (3.11)$$

L'écoulement d'un fluide newtonien , incompressible et iso visqueux est entièrement décrit par l'équation de Navier-Stokes simplifiée, équation 3.11, et par l'équation de continuité :

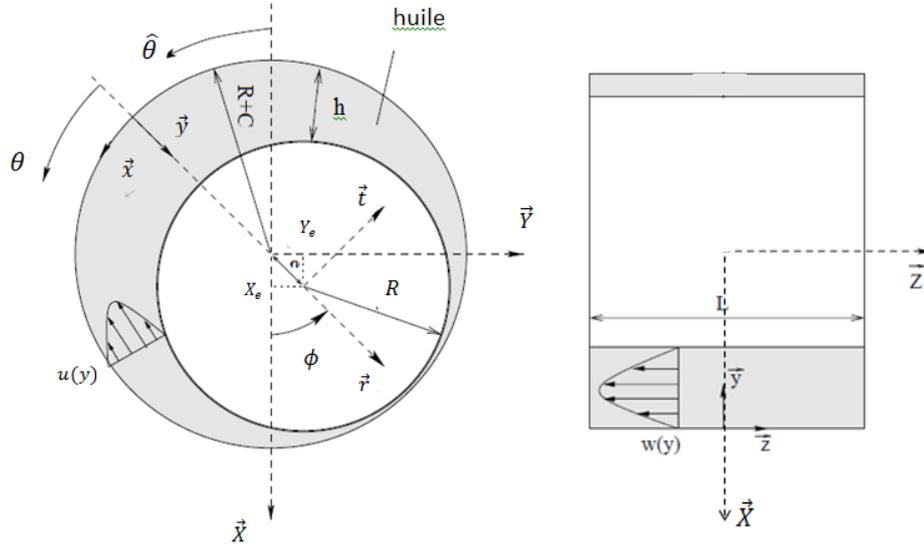


Figure 3.1: Géométrie et système de repérage d'un SFDB

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \xrightarrow{\text{incompr.}} \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.12)$$

Les équations 3.11 et 3.12 peuvent être simplifiées davantage pour le cas d'un SFDB cylindrique ou d'un palier hydrodynamique, au travers d'une analyse dimensionnelle. Pour ce faire, nous adopterons le système de repérage de la figure 3.1, qui présente une vue en coupe de l'amortisseur. Afin d'uniformiser notre notation par rapport à celle communément utilisée dans la littérature scientifique consacrée au SFDB, nous désignerons désormais

$\{u_1, u_2, u_3\} \equiv \{u, v, w\}$ $\{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}$, on définit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\hat{x} = \frac{x}{R}; \hat{y} = \frac{y}{C}; \hat{z} = \frac{z}{R}; \hat{u} = \frac{u}{V_c}; \hat{v} = \frac{v}{V_c} \frac{R}{C}; \hat{w} = \frac{w}{V_c}; \hat{p} = R_e \frac{C}{R} \frac{p}{\rho V_c^2}; \hat{t} = \omega t$$

ou,

R : Rayon du SFDB,

C : Jeu radial du SFDB,

V_c : vitesse caractéristique du système,

$R_e = \rho V_c C / \mu$: nombre de Reynolds,

ω : Fréquence caractéristique d'oscillation du SFDB.

Il convient de préciser que, lorsque le palier décrit des orbites circulaires et centrées, la vitesse caractéristique du système devient $Vc = e\omega$, où e correspond à l'excentricité du SFDB (voir figure 3.1). En notant $\varepsilon = e/C$ l'excentricité adimensionnelle, le nombre de Reynolds s'écrit dans ce cas :

$Re = \rho\varepsilon\omega C^2/\mu$ En supposant que l'amplitude des orbites n'est pas très faible, on a $\varepsilon = O(C)$ et le nombre de Reynolds se ramène à $Re = \rho\omega C^2/\mu$.

L'introduction des variables adimensionnelles dans l'équation de Navier-Stokes simplifiée 3.11.

$$\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{V} \cdot \nabla \hat{u}) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2}\right) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2}$$

$$\left(\frac{C}{R}\right)^2 \left[\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{V} \cdot \nabla \hat{u}) - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} - \left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2}\right) \right] = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \quad (3.13)$$

$$\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{V} \cdot \nabla \hat{w}) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2}\right) + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2}$$

Dans les applications des SFDB et des paliers hydrodynamiques, le rapport $\frac{C}{R}$ est de l'ordre de 10^{-3} . Cela permet, en supposant que toutes les quantités des équations ci-dessus sont de l'ordre de l'unité, d'en enlever tous les termes multipliés par $\left(\frac{C}{R}\right)^2$:

$$\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{V} \cdot \nabla \hat{u}) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\rho C^2 \omega}{\mu} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + Re \frac{C}{R} (\hat{V} \cdot \nabla \hat{w}) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2}$$

Dans la théorie classique de la lubrification, les termes d'inertie sont considérés comme négligeables.

Pour $\frac{C}{R} \rightarrow 0$, on conclut à la lumière de l'équation 3.14, que cette approximation est raisonnable si l'on admet que $\omega = O(Vc = R)$ et que Re est borné. Dans ce cas, en reprenant l'utilisation des variables dimensionnelles, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.17)$$

La variable h étant l'épaisseur du film d'huile illustrée dans la figure 3.1, la double intégration des équations 3.15 et 3.17 suivant y , avec les conditions aux limites,

$$\begin{aligned} u &= U_1 & w &= W_1 & \text{en} & y = h \\ u &= U_2 & w &= W_2 & \text{en} & y = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Fournit les profils de vitesse classiques de la lubrification :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \frac{y}{h} (U_1 - U_2) + U_2 \quad (3.19)$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy) + \frac{y}{h} (W_1 - W_2) + W_2$$

On identifie dans ces expressions l'écoulement dû à l'effet de Poiseuille, induit par les différentiels $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial z}$ et l'écoulement dû à l'effet de Couette, associé aux vitesses U_1, U_2, W_1 et W_2 des surfaces.

En intégrant l'équation de continuité 3.12 suivant y , après l'introduction des profils de vitesse 3.19, on arrive à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\mu \left[\frac{(U_1 - U_2)}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{(W_1 - W_2)}{2} \frac{\partial h}{\partial z} + v \right]_{y=0}^{y=h} \quad (3.20)$$

Sachant que,

$$v \Big|_{y=0}^{y=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + (U_2 - U_1) \frac{\partial h}{\partial x} + (W_2 - W_1) \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3.21)$$

l'équation 3.20 devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\mu \left[\frac{(U_2 - U_1)}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{(W_2 - W_1)}{2} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} \right] \quad (3.22)$$

1. Le signe des termes U_2 et W_2 dépend du système de repérage adopté et du sens de ces vitesses par rapport à U_1 et

W_1 . Nous définissons ici U_2 et W_2 dans le même sens de U_1 et W_1 , contrairement à d'autres références ce qui correspond à l'équation de Reynolds pour un fluide incompressible et iso visqueux.

Il est intéressant de remarquer que la suppression des effets d'inertie rend le problème stationnaire d'un point de vue hydrodynamique, puisque la prise en compte d'un éventuel déphasage temporel entre les variations de l'épaisseur et du champ de pression n'est pas possible.

Une forme plus générale de l'équation de Reynolds peut être obtenue si l'on revient sur les hypothèses d'incompressibilité et d'iso viscosité faite auparavant :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \left[\frac{(U_2 - U_1)}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \frac{(W_2 - W_1)}{2} \frac{\partial(\rho h)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \right] \quad (3.23)$$

Compte tenu du fait que les vitesses relatives des surfaces dans le plan du film d'huile, $U_2 - U_1$ et $W_2 - W_1$, sont nulles dans le cas d'un amortisseur squeeze film, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (3.24)$$

Pour un SFDB ou un palier lisse cylindrique, délimité par des surfaces rigides et aligné, c'est à dire dont l'axe est parallèle à celui de l'arbre, l'épaisseur h du film d'huile s'écrit :

a. Dans le repère (\vec{r}, \vec{t})

$$h = C + e \cos \left(\frac{x}{R} \right) = C(1 + \varepsilon \cos \theta) + Cp \quad (3.25.a)$$

b. Dans le repère (\vec{X}, \vec{Y}) en remplaçant θ par $\hat{\theta} - \emptyset$ on trouve :

$$h = c + X \cos \hat{\theta} + Y \sin \hat{\theta} + Cp \quad (3.25.b)$$

Cependant, la déflexion de la structure, notamment dans des rotors montés en porte-à-faux, peut rendre l'épaisseur du film fonction de la coordonnée axiale, z , également .

L'effet du désalignement devient plus important lorsque le balourd, l'amplitude de l'orbite et le rapport de la longueur, L , sur le jeu radial, C , du SFDB augmentent .

Le désalignement peut engendrer une élévation des efforts transmis au bâti, les forces hydrodynamiques calculées par le modèle de SFDB aligné étant dans ce cas sous-estimées .

où

$$C = \sigma_0 \frac{t_h}{E} \implies \sigma_0 = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma}$$

L'opérateur de compliance du revêtement de surface caractérisé par l'épaisseur t_h le module d'Yong et le coefficient de poisson.

Pour un fluide incompressible et iso visqueux, en négligeant pour l'instant le phénomène de cavitation, l'équation de Reynolds donnée par l'expression 3.24 est linéaire. Elle ne possède tout de même pas de solutions analytiques.

Par conséquent, le calcul du champ de pression doit s'exécuter soit en faisant des hypothèses supplémentaires afin de la simplifier soit à l'aide de méthodes semi-analytiques ou numériques.

Les simplifications les plus courantes s'appuient sur les approximations palier court et palier long. Elles consistent à négliger l'écoulement du fluide dans les directions circonférentielle et axiale, respectivement, de manière à réduire le nombre de variables indépendantes du problème.

Il est important de souligner que ces approximations peuvent s'appliquer directement à l'équation de Navier-Stokes simplifiée 3.14. Lorsque l'amortisseur n'est ni long ni court, il est dit fini. Ces simplifications ainsi que d'autres techniques de résolution de l'équation de Reynolds sont exposées en détails à la fin de ce chapitre.

La validité de l'équation de Reynolds 3.24 est restreinte aux hypothèses explicitées plus haut. Cependant, il existe des SFDB auxquels ces hypothèses, ou une partie d'entre elles, ne s'appliquent pas.

Ainsi, nous présentons ci-après d'autres formulations afin de situer clairement l'état de l'art de la modélisation du SFDB et d'analyser d'autres phénomènes pouvant être observés lors de l'application de tels amortisseurs.

3.2 Formulations alternatives à l'équation de Reynolds

3.2.1 Fluides non newtoniens

L'hypothèse que le fluide est newtonien peut être mise en défaut dans le cas de quelques lubrifiants modernes auxquels sont ajoutés des chaînes de polymères afin d'améliorer leurs propriétés sous différentes conditions d'opération.

Le comportement non linéaire qui en résulte change sensiblement les caractéristiques du fluide, d'où la nécessité de théories tenant compte des effets non newtoniens.

Outre la non linéarité engendrée par l'ajout d'additifs, des fluides ayant un comportement non Newtonien peuvent être utilisés à dessein comme des fluides intelligents.

Il est le cas des fluides électro-rhéologiques, dont les propriétés changent lors de l'application d'un champ électrique.

Cette caractéristique permet l'utilisation du SFDB en tant qu'un amortisseur actif, ce qui explique l'intérêt porté sur ce type de fluide.

3.2.1.1 Fluide à couples de contraintes en écoulement laminaire

Dans la dérivation de l'équation de mouvement de Cauchy 3.1, les efforts extérieurs exercés sur l'élément fluide sont schématisés, suivant le postulat de Cauchy, par une répartition surfacique de forces.

Lors de l'application de la loi de Newton, la densité de forces massiques est également prise en compte.

Une schématisation différente fondée sur la théorie du micro continuum de Stokes permet d'introduire, outre les forces massiques et surfaciques, des couples de volume et (Figure 3.2) de contraintes.

Pour un fluide incompressible, cela conduit à l'équation suivante [la théorie VK Stokes]:

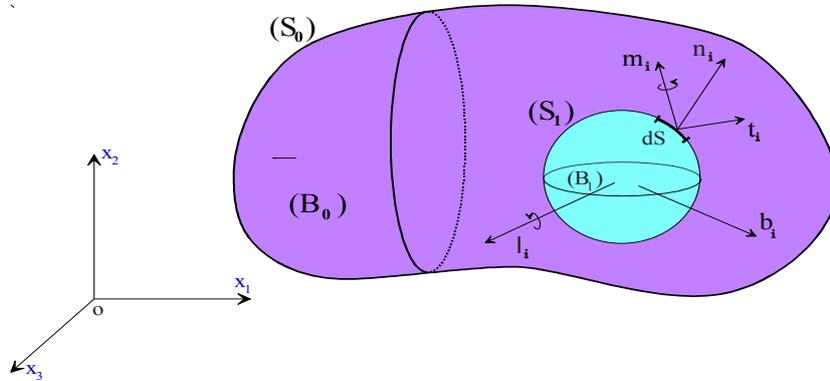


Figure 3.2 : balance des forces et couples agissant sur le volume élémentaire selon la théorie VK Stokes

$$\rho \frac{DV}{Dt} = f - \nabla p + \frac{1}{2} \nabla \times (\rho \boldsymbol{\psi}) + (\mu - \eta \nabla^2) \nabla^2 \mathbf{V} \quad (3.26)$$

où $\boldsymbol{\psi}$ est le vecteur densité de couple de volume et η est propriété constante du fluide associée aux couples de contraintes.

En négligeant le vecteur densité de couple et les forces de volume, l'application à l'équation 3.26 d'une procédure analogue à celle menée lors de la simplification de l'équation de Navier-Stokes dans le cas newtonien conduit aux équation de mouvements suivants:

$$u(x, h, z) = U_j \quad \text{pour un palier lisse}$$

$$u(x, h, z) = 0 \quad \text{pour un SFDB}$$

$$\begin{cases} \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (3.27.a)$$

Aux puettes sont associées les conditions limites suivants :

$$u(x, 0, z) = 0 \quad (3.27.b)$$

$$w(x, 0, z) = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0 \quad (3.27.c)$$

$$u(x, h, z) = U_j$$

$$w(x, h, z) = 0 \quad (3.27.d)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=h} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=h} = 0 \quad (3.27.e)$$

compte tenu des conditions au limites (3.27.b a 3.27.e), l'intégration par rapport à y des équations (3.27.a) fournit les profils de vitesses suivants :

a. Cas du palier lisse

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= U_j \frac{y}{h} + \frac{e^{-2\alpha p}}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ \frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \left[1 - \frac{\text{Cosh}\left(\frac{2y-h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)}{\text{Cosh}\left(\frac{h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)} \right] \right\} \\ w(x, y, z) &= \frac{e^{-2\alpha p}}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ \frac{y(y-h)}{e^{-\alpha p}} + 2\ell^2 \left[1 - \frac{\text{Cosh}\left(\frac{2y-h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)}{\text{Cosh}\left(\frac{h}{2\ell e^{-\frac{1}{2}\alpha p}}\right)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.27.f)$$

b. cas du palier SFDB

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \left\{ y^2 - hy + 2l^2 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\} \frac{\partial p}{\partial x} \\ w = \frac{1}{2\mu} \left\{ y^2 - hy + 2l^2 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right] \right\} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (3.27.g)$$

Ces profils de vitesse, lorsque reportés dans l'équation de continuité 3.12, conduisent à la déduction d'une équation de Reynolds modifiée donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(h, l) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[f(h, l) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.28)$$

Ou

$$f(h, l) = h^3 - 12hl^2 + 24l^3 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right)$$

$$l = \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{1/2}$$

3.2.1.2 écoulements turbulents ou non laminaires

Si ce nombre de Reynolds s'accroît davantage, l'écoulement peut perdre sa stabilité et devenir instable ou turbulent. C'est de palier lisse ou SFDB, les amortisseurs squeeze film ayant un jeu radial important, opérant avec un fluide de faible viscosité et incorporés dans des machines à très haute vitesse sont particulièrement susceptibles de développer des écoulements turbulents. Les écoulements turbulents sont caractérisés par des fluctuations aléatoires, par la non linéarité, par l'importante diffusivité de moment et de chaleur, par la formation de vortex et par la forte capacité dissipative. L'écoulement turbulent instantané obéit ou en compte Jon jours $U_i = \bar{U}_i + v_i$; $i = 1,2,3$ à l'équation de Navier-Stokes, mais il est difficile, voire impossible, de prédire son évolution de manière précise [15]. Il est ainsi plus convenable de le décrire en utilisant la décomposition de Reynolds, selon laquelle les vitesses et la pression sont représentées par la somme des moyennes temporelles locales et des termes de fluctuation stochastique :

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{v}}$$

$$p = \bar{p} + \hat{p} \quad (3.55)$$

avec,

$$\bar{V} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} V(t + \sigma) d\sigma \quad (3.56)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} p(t + \sigma) d\sigma \quad (3.57)$$

où t_0 doit être compris entre deux échelles de temps distinctes, l'une associée aux fluctuations lentes de l'écoulement et l'autre à des variations très rapides de nature stochastique. Ce paramètre ne doit être ni trop grand, de manière à ce que la moyenne ne soit pas locale, ni trop faible, ce qui pénaliserait la précision des moyennes.

Sachant que la moyenne des termes aléatoires est nulle, en négligeant les forces massiques, l'équation du mouvement pour l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible et isovisqueux devient:

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.58)$$

Avec l'équation constitutive donnée par :

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{p\hat{v}_i\hat{v}_j} \quad (3.59)$$

Où $\overline{\hat{v}_i\hat{v}_j}$ est la corrélation entre \hat{v}_i et \hat{v}_j . Par rapport à l'équation constitutive d'un fluide newtonien, équation 3.5, on constate l'existence de contraintes supplémentaires associées au terme $-\overline{p\hat{v}_i\hat{v}_j}$, qui correspond au tenseur de contraintes de Reynolds. Dans un écoulement turbulent, ces contraintes peuvent être considérablement plus importantes que celles relatives à la contribution visqueuse, à part au voisinage des parois, où les fluctuations sont plus faibles. Sous l'hypothèse d'incompressibilité, l'équation de continuité s'écrit:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0 \quad ;j=1,2,3 \quad (3.60)$$

pour le flux moyen et :

$$\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad ;j=1,2,3 \quad (3.60)$$

pour le champ turbulent. L'équation 3.58 peut être simplifiée compte tenu des dimensions caractéristiques de l'amortisseur squeeze film. En supposant que $\left(\frac{V}{\bar{V}}\right)^2 = 0(1)$ et que $C/R \rightarrow 0$, on obtient au travers d'une analyse d'ordre de grandeur similaire à celle réalisée précédemment:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\delta}{\delta y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - p \overline{\hat{u}\hat{v}} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{\delta}{\delta y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - p \overline{\hat{v}\hat{w}} \right)$$

Il est important d'observer dans l'équation 2.62, que les effets d'inertie sont négligés devant les contraintes visqueuses et turbulentes. Pour des jeux radiaux plus importants néanmoins, en admettant que $\left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2 = O(C/R)$ et que $\left(\frac{c}{R}\right)^2 \rightarrow 0$, une forme alternative à l'équation 3.62 est obtenue :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\delta}{\delta y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - p \overline{\hat{u}\hat{v}} \right) + \rho \frac{D\bar{u}}{Dt}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{\delta}{\delta y} \left(\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - p \overline{\hat{v}\hat{w}} \right) + \rho \frac{D\bar{w}}{Dt}$$

L'inspection de cette équation conduit à la conclusion que les effets d'inertie ne peuvent pas être négligés dans un écoulement turbulent. Les premières tentatives de modélisation d'écoulements turbulents dans le domaine de la lubrification utilisent l'équation 3.62 comme point de départ. Le noyau du problème concerne la définition des contraintes de Reynolds. NG et PAN [12] emploient le concept de viscosité turbulente de Boussinesq, selon lequel les contraintes de Reynolds s'écrivent:

$$-\overline{\hat{u}\hat{v}} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad -\overline{\hat{v}\hat{w}} = \mu_t \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad (3.64)$$

où la viscosité turbulente μ_t n'est pas une propriété du fluide, mais une fonction des conditions de l'écoulement. La description des contraintes turbulentes en fonction des vitesses moyennes de l'écoulement permet d'arriver, en partant de l'équation 3.62, à une forme modifiée de l'équation de Reynolds qui s'écrit [14]:

- Cas du SFDB

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu k_x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu k_z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.65)$$

Où les coefficients k_x et k_z dépendent dans le cas du SFDB des nombres de Reynolds locaux de Poiseuille, définis par $Re_{lx} = hp \frac{\bar{v}_x}{\mu}$ et $Re_{lz} = hp \frac{\bar{v}_z}{\mu}$. La limite inférieure $k_x = k_z = 12$ représentant le cas d'un écoulement laminaire, il en résulte qu'un SFDB en régime turbulent génère un champ de pression plus important et, par conséquent, des forces hydrodynamiques plus élevées [14]. L'allure des fonctions k_x et k_z doit être déterminée expérimentalement. Pour des écoulements avec $2000 < Re_i < 10^5$, CONSTANTINESCU [17] en déduit les expressions suivantes :

$$k_x = \frac{Re_{lx}^{0,681}}{6,8} \quad k_z = \frac{Re_{lz}^{0,681}}{6,8} \quad (3.66)$$

SAN ANDRES et VANCE [16] et KU et TICHY [13] appliquent la méthode du *momentum* à des formes simplifiées de l'équation 3.63, pour tenir compte à la fois des effets d'inertie et de la turbulence dans la modélisation du comportement d'un SqF décrivant des orbites circulaires et centrées. Les premiers décrivent les contraintes de cisaillement au niveau des parois avec une contribution explicite de l'inertie du fluide et utilisent une formulation hybride théorico-empirique pour la définition des coefficients turbulents. KU et TICHY [13] emploient le modèle de turbulence $k - \epsilon$ pour prédire les contraintes de Reynolds et recourent à la similarité entre l'écoulement du SFDB et celui entre deux plaques stationnaires pour développer des expressions pour les débits locaux et pour les termes inertiels. Ce qu'il faut retenir des résultats de ces deux travaux est l'amplification de la force tangentielle engendrée par la turbulence, ce qui augmente la capacité d'amortissement du SFDB par rapport à son équivalent laminaire.

La modélisation d'amortisseurs *squeeze film* en régime turbulent reste un domaine très ouvert. La définition de la transition d'écoulement laminaire à écoulement turbulent, par exemple, n'est pas encore consensuelle [12].

3.3 Conditions aux limites

A l'exception de l'application de l'équation de Lagrange pour la prise en compte des effets d'inertie du SFDB, l'analyse théorique présentée jusqu'ici cherche à décrire le comportement d'une particule fluide, ce que conduit à la déduction de l'équation différentielle régissant la dynamique du film.

Bien évidemment, la résolution du problème nécessite encore la définition de conditions aux limites

IV. Formulation intégrale de l'équation de Reynolds modifié en régime transitoire

Équation de Reynolds : cas d'un palier compliant fluide non newtonien non laminaire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \omega R \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$R(p) = \frac{\partial}{R \partial \theta} \left(\Phi \frac{\partial p}{R \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \omega R \frac{\partial h}{R \partial \theta} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

avec

$$\Phi = \frac{G(h, l, \alpha, p)}{\mu_0 k_x (Re_h)} \quad \text{et} \quad \Psi = \frac{G(h, l, \alpha, p)}{\mu_0 k_z (Re_h)}$$

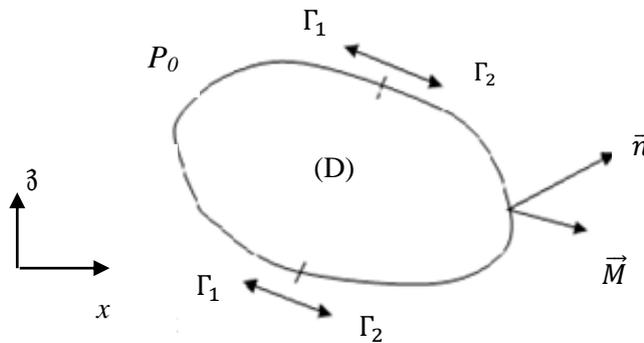


Figure 4.1 : Représentation du domaine d'intégration de l'équation de Reynolds et des conditions limites.

$$w(p) = \int_{(D)} \delta p R \partial \theta dz = 0 \quad (4.2)$$

Ou encore

$$w(p) = \int_{(D)} \delta p \left[\frac{\partial}{R \partial \theta} \left(\Phi \frac{\partial p}{R \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \omega R \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial t} \right] R \partial \theta dz = 0$$

Ou sous forme développée

$$w(p) = \underbrace{\int_{(D)} \delta p \frac{\partial}{R \partial \theta} \left(\Phi \frac{\partial p}{R \partial \theta} \right) R \partial \theta dz}_{I1} + \underbrace{\int_{(D)} \delta p \frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi \frac{\partial p}{\partial z} \right) R \partial \theta dz}_{I2} - \underbrace{\int_{(D)} \delta p \frac{\partial h}{R \partial \theta} R \partial \theta dz}_{I3} - \underbrace{\int_{(D)} \delta p \frac{\partial h}{\partial t} R \partial \theta dz}_{I4} = 0 \quad (4.3)$$

La formulation intégral faible s'obtient en intégrant par partes les différents intégrales de l'équation 4.3

$$I_1 = \int_{(D)} \delta p \frac{\partial}{R\partial\theta} \left(\Phi \frac{\partial p}{R\partial\theta} \right) R\partial\theta dz = - \int_{(D)} \frac{\partial\delta p}{R\partial\theta} \Phi \frac{\partial p}{R\partial\theta} R\partial\theta dz + \oint_{(\partial D)} \delta p \Phi \frac{\partial p}{R\partial\theta} n_\theta ds$$

$$I_2 = \int_{(D)} \delta p \frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi \frac{\partial p}{\partial z} \right) R\partial\theta dz = - \int_{(D)} \frac{\partial\delta p}{\partial z} \Psi \frac{\partial p}{\partial z} R\partial\theta dz + \oint_{(\partial D)} \delta p \Psi \frac{\partial p}{\partial z} n_z ds$$

$$I_3 = \int_{(D)} \Lambda \delta p \frac{\partial h}{R\partial\theta} R\partial\theta dz = - \int_{(D)} \Lambda \frac{\partial\delta p}{R\partial\theta} h R\partial\theta dz + \oint_{(\partial D)} \Lambda \delta p h n_\theta ds$$

L'intégrale I_4 peut écrire aussi :

$$I_4 = \int_{(D)} \delta p \frac{\partial h}{\partial t} R\partial\theta dz \approx \int_{(D)} \delta p \left(\frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t} \right) R\partial\theta dz$$

Compte tenu de l'équation (3) on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{(D)} \frac{\partial\delta p}{R\partial\theta} \frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_x} \frac{\partial p}{R\partial\theta} R\partial\theta dz + \oint_{(\partial D=\Gamma_1+\Gamma_2)} \delta p \frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_x} \frac{\partial p}{\partial x} n_\theta ds - \\ & \int_{(D)} \frac{\partial\delta p}{\partial z} \frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_z} \frac{\partial p}{\partial z} R\partial\theta dz + \oint_{(\partial D=\Gamma_1+\Gamma_2)} \delta p \frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_z} \frac{\partial p}{\partial z} n_z ds + \int_{(D)} \Lambda \frac{\partial\delta p}{R\partial\theta} h R\partial\theta dz - \\ & \oint_{(\partial D=\Gamma_1+\Gamma_2)} \Lambda \delta p h n_\theta ds - \int_{(D)} \delta p \left(\frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t} \right) R\partial\theta dz = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Comme la pression est imposée sur (Γ_1) , la forme intégrale faible (4) devient ($\delta p = 0$) sur Γ_1 :

$$\begin{aligned} & - \int_{(D)} \left[\frac{\partial\delta p}{R\partial\theta} \frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_x} \frac{\partial p}{R\partial\theta} + \frac{\partial\delta p}{\partial z} \frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_z} \frac{\partial p}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial\delta p}{R\partial\theta} h + \delta p \left(\frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t} \right) \right] R\partial\theta dz + \\ & \oint_{\Gamma_2} \delta p \left[\left(\frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_x} \frac{\partial p}{R\partial\theta} - \Lambda h \right) n_\theta + \frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_z} \frac{\partial p}{\partial z} n_z \right] ds = 0 \end{aligned}$$

En multipliant l'équation ci-dessus par -1 , il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{(D)} \left[\frac{\partial\delta p}{R\partial\theta} \frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_x} \frac{\partial p}{R\partial\theta} + \frac{\partial\delta p}{\partial z} \frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_z} \frac{\partial p}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial\delta p}{R\partial\theta} h + \delta p \left(\frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t} \right) \right] R\partial\theta dz + \\ & \oint_{\Gamma_2} \delta p \left[\left(\underbrace{-\frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_x} \frac{\partial p}{R\partial\theta} + \Lambda h}_{Q_\theta} \right) n_\theta + \underbrace{\frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_z} \frac{\partial p}{\partial z}}_{Q_z} n_z \right] ds = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\text{avec } \Lambda = \frac{U}{2} = \frac{\omega R}{2}$$

$$(D) = (0, 2\pi) \times \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \text{ et } dD = dx dz = R\partial\theta dz$$

L'intégrale de contour s'écrit aussi :

$$\oint_{\Gamma_2} \delta p \vec{Q} \cdot \vec{n} ds \text{ avec } \vec{Q} = \begin{Bmatrix} Q_\theta \\ Q_z \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{n} = \begin{Bmatrix} n_\theta \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Où \vec{Q} est le vecteur débit volumique par unité de longueur

Comme le débit n'est pas imposé sur Γ_2 , l'équation (4.5) se réduit à :

$$\int_{(D)} \left[\frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_x} \frac{\partial \delta p}{R \partial \theta} \frac{\partial p}{R \partial \theta} + \frac{G(h,l,\alpha,p)}{\mu_0 k_z} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right] dD - \int_{(D)} \Lambda \frac{\partial \delta p}{R \partial \theta} h dD + \int_{(D)} \delta p \left(\frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t} \right) dD = 0 \quad (4.6)$$

Le domaine (D) étant subdivisé en plusieurs sous-domaines D^e appelés éléments finis (figure 4.2)

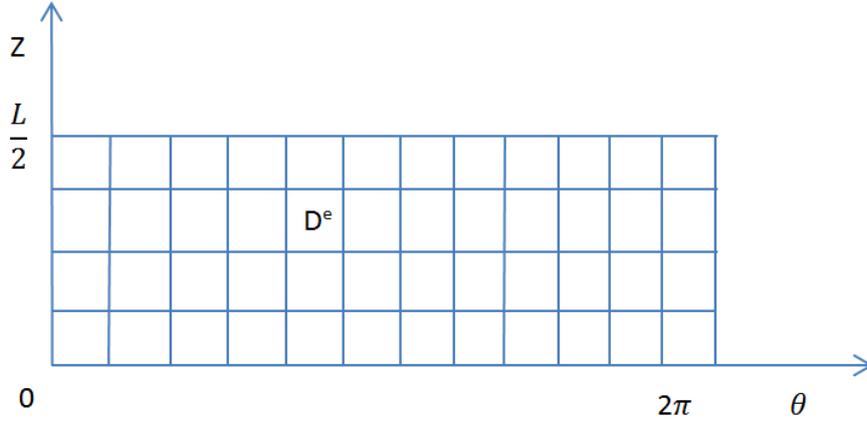


Figure 4.2 : maillage du film par éléments finis quadrilatéraux

L'équation (4.6) d'écrit alors :

$$\sum_{e \geq 1} \int_{(D^e)} \left[\frac{\Phi^e}{\mu_0 k_x^e} \frac{\partial \delta p^e}{R \partial \theta} \frac{\partial p^e}{R \partial \theta} + \frac{\Psi^e}{\mu_0 k_z^e} \frac{\partial \delta p^e}{\partial z} \frac{\partial p^e}{\partial z} \right] dD^e - \sum_{e \geq 1} \int_{(D^e)} \Lambda \frac{\partial \delta p^e}{R \partial \theta} h^e dD^e + \sum_{e \geq 1} \int_{(D^e)} \delta p^e \left(\frac{h_{t+\Delta t}^e - h_t^e}{\Delta t} \right) dD^e = 0 \quad (4.7)$$

L'équation (4.7) peut d'écrire aussi sous la forme :

$$W = \sum_{e \geq 1} W^e = 0 \quad (4.8)$$

$$\text{Avec } W^e = \int_{(D^e)} \left[\frac{\Phi^e}{\mu_0 k_x^e} \frac{\partial \delta p^e}{R \partial \theta} \frac{\partial p^e}{R \partial \theta} + \frac{\Psi^e}{\mu_0 k_z^e} \frac{\partial \delta p^e}{\partial z} \frac{\partial p^e}{\partial z} \right] dD^e - \int_{(D^e)} \Lambda \frac{\partial \delta p^e}{R \partial \theta} h^e dD^e + \int_{(D^e)} \delta p^e \left(\frac{h_{t+\Delta t}^e - h_t^e}{\Delta t} \right) dD^e = 0$$

Où W^e et W sont les formulations intégrales élémentaire et globale. Discrétisation par éléments finis de W^e : L'élément fini bilinéaire de classe C^0 (famille de LaGrange) iso paramétrique choisi est l'élément quadrilatéral a quatre nœuds (figure 4.3)

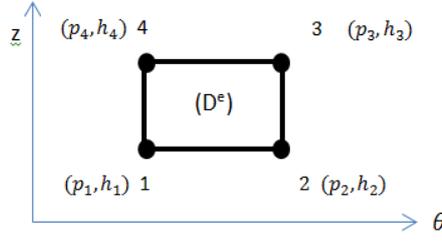


Figure 4.3 : représentation de l'élément réel (D^e) dans l'espace physique

Un point de l'élément réel (D^e) , la pression et l'épaisseur du film sont liées à leurs valeurs nodales par la relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 p^e(\theta, z, t) &\approx \tilde{p}^e(\theta, z, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(\theta, z) P_i(t) \\
 &= \langle N(\theta, z) \rangle \{P_n(t)\} \\
 h^e(\theta, z, t) &\approx \tilde{h}^e(\theta, z, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(\theta, z) h_i(t) \\
 &= \langle N(\theta, z) \rangle \{h_n(t)\}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Où :

$N_i(\theta, z)$ sont les fonctions d'interpolations ou de forme qui dépendent des deux variables d'espace θ et z .

$P_i(t)$ Sont les variables nodales aux degrés de liberté qui dépendent du temps. De même, nous avant :

$$\delta p^e(\theta, z, t) \approx \delta \tilde{p}^e(\theta, z, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(\theta, z) \delta P_i(t)$$

Et

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p^e}{\partial \theta} &\approx \frac{\partial \tilde{p}^e}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \theta} P_i \\
 \frac{\partial p^e}{\partial z} &\approx \frac{\partial \tilde{p}^e}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial z} P_i \\
 \frac{\partial \delta p^e}{\partial \theta} &\approx \frac{\partial \delta \tilde{p}^e}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \delta P_i \\
 \frac{\partial \delta p^e}{\partial z} &\approx \frac{\partial \delta \tilde{p}^e}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial z} \delta P_i
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$W^e = \int_{(D^e)} \left[\Phi^e \frac{\partial \delta p^e}{R \partial \theta} \frac{\partial p^e}{R \partial \theta} + \Psi^e \frac{\partial \delta p^e}{\partial z} \frac{\partial p^e}{\partial z} \right] dD^e - \int_{(D^e)} \Lambda \frac{\partial \delta p^e}{R \partial \theta} h^e dD^e + \int_{(D^e)} \delta p^e \left(\frac{h^e_{t+\Delta t} - h^e_t}{\Delta t} \right) dD^e$$

Soit :

$$\begin{aligned}
W^e &= \tilde{W}^e = \int_{(D^e)} \left[\tilde{\Phi}^e \frac{\partial}{R\partial\theta} (N_i \delta p_i) \frac{\partial}{R\partial\theta} (N_j p_j) + \tilde{\Psi}^e \frac{\partial}{\partial z} (N_i \delta p_i) \frac{\partial}{\partial z} (N_j p_j) \right] dD^e - \\
&\int_{(D^e)} \wedge \underbrace{\tilde{h}^e}_{=\sum_{k=1}^4 N_k h_k} \frac{\partial}{R\partial\theta} (N_i \delta p_i) dD^e + \int_{(D^e)} N_i \delta p_i \left(\frac{\tilde{h}^e_{t+\Delta t} - \tilde{h}^e_t}{\Delta t} \right) dD^e \quad ; i,j=1,2,3,4 \\
\tilde{W}^e &= \int_{(D^e)} \left[\tilde{\Phi}^e \delta p_i p_j \frac{\partial N_i}{R\partial\theta} \frac{\partial N_j}{R\partial\theta} + \tilde{\Psi}^e \delta p_i p_j \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] dD^e \\
&\quad - \int_{(D^e)} \delta p_i \wedge \left(\sum_{k=1}^4 N_k h_k \right) \frac{\partial N_i}{R\partial\theta} dD^e + \int_{(D^e)} \delta p_i N_i \left(\frac{\tilde{h}^e_{t+\Delta t} - \tilde{h}^e_t}{\Delta t} \right) dD^e \\
\tilde{W}^e &= \delta p_i \underbrace{\left(\int_{(D^e)} \left[\tilde{\Phi}^e \frac{\partial N_i}{R\partial\theta} \frac{\partial N_j}{R\partial\theta} + \tilde{\Psi}^e \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] p_j dD^e \right)}_{k_{eij}=k_{eji}} - \delta p_i \int_{(D^e)} \wedge \left(\sum_{k=1}^4 N_k h_k \right) \frac{\partial N_i}{R\partial\theta} dD^e \\
&\quad + \delta p_i \int_{(D^e)} N_i \left(\frac{\tilde{h}^e_{t+\Delta t} - \tilde{h}^e_t}{\Delta t} \right) dD^e
\end{aligned}$$

Soit par conséquent :

$$\tilde{W}^e = \delta p_i (k_{eij} p_j - F_{ei}) \quad (4.11)$$

Avec

$$\begin{aligned}
k_{eij} p_j &= \int_{(D^e)} \left[\tilde{\Phi}^e \frac{\partial N_i}{R\partial\theta} \frac{\partial N_j}{R\partial\theta} + \tilde{\Psi}^e \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] dD^e \\
F_{ei} &= \int_{(D^e)} \left[\wedge \left(\sum_{k=1}^4 N_k h_k \right) \frac{\partial N_i}{R\partial\theta} - N_i \left(\frac{\tilde{h}^e_{t+\Delta t} - \tilde{h}^e_t}{\Delta t} \right) \right] dD^e
\end{aligned} \quad (4.12)$$

Formulation globale :

$$\tilde{W} = \sum_{e \geq 1} \tilde{W}^e = \delta P_I (K_{IJ} P_J - F_I) = 0$$

Ou encore

$$K_{IJ} P_J = F_I \quad (4.13)$$

Avec $K_{IJ} = \wedge_{e \geq 1} k_{eij}$ et $F_I = \wedge_{e \geq 1} F_{ei}$

\wedge Etant l'opérateur d'assemblage

Méthode de calcul des coefficients k_{eij} et F_{ei} (éq 4.12)

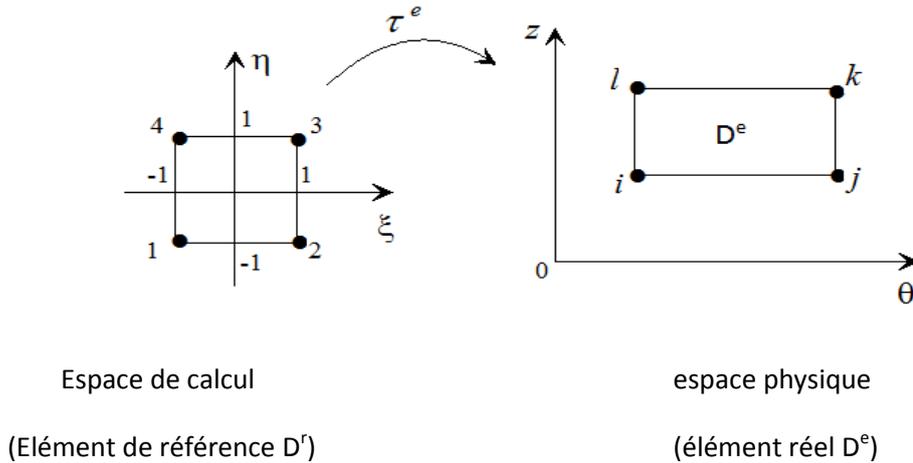


Figure 4.4 : Représentation des éléments parents et réels

Pour évaluer numériquement les coefficients k_{eij} et F_{eij} , on utilise le concept de l'élément de référence (D^r) appelé aussi élément parent pour cela, ou doit transformer les opérateurs de dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{R\partial\theta}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$

Ainsi que l'intégrale de domaine.

Transformation des opérateurs de dérivations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{R\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

Où encore :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Où $[J]^{-1}$ est la matrice jacobéenne inverse volée aussi $[j]$

Les termes de la matrice jacobéenne $[J]$ sont obtenus par la relation suivante :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} \end{pmatrix} \langle x : z \rangle \quad (4.15)$$

Comme $x = x(\xi, \eta) = \langle \bar{N}(\xi, \eta) \rangle \{x_n\}$

Et $z = z(\xi, \eta) = \langle \bar{N}(\xi, \eta) \rangle \{z_n\}$

$$\left. \begin{aligned} & \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Ou encore :

$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle \bar{N}(\xi, \eta) \rangle \{x_n\} \\ \langle \bar{N}(\xi, \eta) \rangle \{z_n\} \end{Bmatrix}$$

Soit

$$\langle x : z \rangle = \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix}^T = \langle \langle \bar{N}(\xi, \eta) \rangle \{x_n\} : \langle \bar{N}(\xi, \eta) \rangle \{z_n\} \rangle$$

Il vient :

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \langle \overbrace{\langle \bar{N}(\xi, \eta) \rangle \{x_n\}}^{\sum_{i=1}^4 \bar{N}_i x_i} : \overbrace{\langle \bar{N}(\xi, \eta) \rangle \{z_n\}}^{\sum_{i=1}^4 \bar{N}_i z_i} \rangle \\ &= \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \rangle \{x_n\} & \langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \rangle \{z_n\} \\ \langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \rangle \{x_n\} & \langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \rangle \{z_n\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \rangle \end{bmatrix} [\{x_n\} : \{z_n\}] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$\bar{N}_i(\xi, \eta)$ sont les fonctions de transformation géométriques et $\{x_n\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$ et $\{z_n\} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix}$ sont

Les coordonnées globales des nœuds géométriques de l'élément réel (D^e) (espaces physique)

Comme l'élément choisi est iso paramétrique, c.-à-d. les nœuds d'interpolation est les nœuds géométriques de l'élément se confondus, on peut écrire : $\bar{N}_i(\xi, \eta) \equiv N_i(\xi, \eta)$

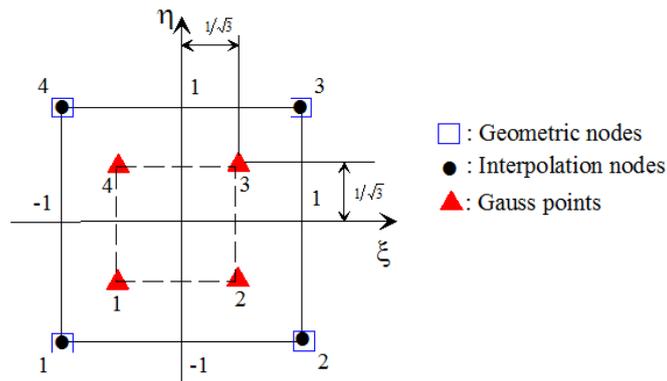


Figure 4.5 : Représentation des points d'intégration sur l'élément parent isopérimétrique.

- Transformation de l'intégrale de domaine

$$\iint_{D^e} f(x, z) dx dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) \det J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.19)$$

Pression de la matrice jacobéenne :

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \\ x_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$[J(\xi, \eta)] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + \eta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & -z_1 + z_2 + z_3 - z_4 + \eta(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + \xi(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & -z_1 - z_2 + z_3 + z_4 + \xi(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) \end{bmatrix}$$

Et $\det J(\xi, \eta) = A_0 + A_1\xi + A_2\eta$

avec $A_0 = \frac{1}{2} [z_{42}x_{31} - z_{31}x_{42}]$

$$A_1 = \frac{1}{8} [z_{34}x_{21} - z_{21}x_{34}]$$

$$A_2 = \frac{1}{8} [z_{41}x_{32} - z_{32}x_{41}]$$

$$z_{ij} = z_i - z_j \text{ et } x_{ij} = x_i - x_j$$

Dans le cas particulier où l'élément réel est rectangulaire de cotés $x_2 - x_1 = 2a$ et $y_4 - y_1 = 2b$:

$$x_4 = x_1 ; x_2 = x_3 ; y_2 = y_1 ; y_3 = y_4$$

$$[J] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{ et } \det J = a \times b = [j] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

$$dD^e = dx dz = ab d\xi d\eta$$

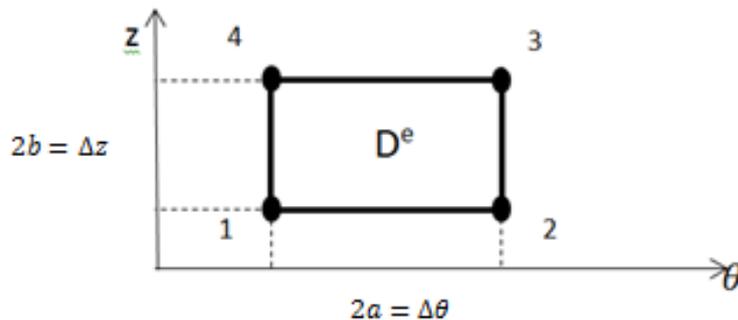


Figure 4.6 : représentation de l'élément réelle dans l'espace physique

En remarque que $\det(J)$ correspond au quart de l'aire de l'élément réel D^e ; c.-à-d. $\det J = \frac{1}{4} D^e$

expression des fonctions d'interpolation $N_i(\xi, \eta)$ sur l'élément de référence (d^r) :

L'approximation de la première sur l'élément s'écrit :

$$p^e(\xi, \eta) \approx \tilde{p}^e(\xi, \eta) = a_1 p_1(\xi, \eta) + a_2 p_2(\xi, \eta) + a_3 p_3(\xi, \eta) + a_4 p_4(\xi, \eta) \quad (4.21)$$

$$= \langle p_1(\xi, \eta) : p_2(\xi, \eta) : p_3(\xi, \eta) : p_4(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Avec $p_1(\xi, \eta) = 1; p_2(\xi, \eta) = \xi; p_3(\xi, \eta) = \eta; p_4(\xi, \eta) = \xi\eta$

Soit
$$\tilde{p}^e(\xi, \eta) = \langle 1 : \xi : \eta : \xi\eta \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Ecrire cette relation en chaque nœud de l'éléments :

- Nœud 1 $p_1 = \langle 1 : -1 : -1 : 1 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$
- Nœud 2 $p_1 = \langle 1 : 1 : -1 : -1 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$
- Nœud 3 $p_1 = \langle 1 : 1 : 1 : 1 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$
- Nœud 4 $p_1 = \langle 1 : -1 : 1 : -1 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$

Soit sous la forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{[P_n]} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

L'inversion de ce système donne :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Compte tenu de la relation (21) , on peut écrire :

$$\tilde{p}^e(\xi, \eta) = \langle 1 : \xi : \eta : \xi\eta \rangle \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Par identification avec la relation suivante,

$$\tilde{p}^e(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) : N_2(\xi, \eta) : N_3(\xi, \eta) : N_4(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

On trouve

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi - \eta + \xi\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi - \eta - \xi\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi + \eta + \xi\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi + \eta - \xi\eta) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Les fonctions d'interpolation ou de forme $N_i(\xi, \eta)$ vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^4 N_i = 1 \end{cases}$$

Expression de k_{eij} et F_{ei} sur l'élément de référence (D^r)

$$k_{eij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\tilde{\Phi}^e(\xi, \eta) \left(j_{11}^2 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + j_{11} j_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} + j_{11} j_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + j_{12}^2 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) + \tilde{\Psi}^e(\xi, \eta) \left(j_{21}^2 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + j_{21} j_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} + j_{22} j_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + j_{22}^2 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] (A_0 + A_1 \xi + A_2 \eta) d\xi d\eta$$

$$F_{ei} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\Lambda(\sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) h_k) \left(j_{11} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + j_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) - N_i(\xi, \eta) \left(\frac{\tilde{h}_{t+\Delta t}^e - \tilde{h}_t^e}{\Delta t} \right) \right] (A_0 + A_1 \xi + A_2 \eta) d\xi d\eta$$

Pour le cas particulier d'un élément réel rectangulaire, on a :

$$k_{eij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\tilde{\Phi}^e(\xi, \eta) \left(j_{11}^2 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \tilde{\Psi}^e(\xi, \eta) j_{22}^2 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \right] J_{11} J_{22} d\xi d\eta$$

Où encore puisque $j_{ii} = J_{ii}^{-1} \implies j_{11} = J_{11}^{-1}$ et $j_{22} = J_{22}^{-1}$

$$k_{eij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\tilde{\Phi}^e(\xi, \eta) \frac{J_{22}}{J_{11}} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + \tilde{\Psi}^e(\xi, \eta) \frac{J_{11}}{J_{22}} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta$$

$$\text{De même on a : } F_{ei} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\Lambda(\sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) h_k) J_{22} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - N_i(\xi, \eta) \left(\frac{\tilde{h}_{t+\Delta t}^e - \tilde{h}_t^e}{\Delta t} \right) \right] d\xi d\eta$$

Ces intégrales sont évaluées numériquement par la méthode d'intégrale de Gauss-Legendre.

V. Réponse dynamique non linéaire d'un rotor flexible

5.1 Introduction

Le rotor d'une machine tournante est un élément très important dont le rôle est de transmettre ou de transformer de la puissance. Il est souvent de réalisation fort complexe et comporte divers éléments tels que des engrenages ou des roues de turbines, par exemple. Dans un grand nombre d'applications, il est supporté par des paliers qui ne doivent pas être considérés comme des éléments passifs mais comme des éléments qui interviennent de façon non négligeable sur le comportement dynamique de la ligne d'arbre ; c'est-à-dire sur ses vitesses critiques et sa stabilité.

5.2 Équations de mouvement du rotor

5.2.1 Bilan des forces extérieures

Les forces extérieures agissant sur le rotor sont :

- le poids du rotor ;
- les forces dynamiques d'amplitudes plus ou moins importantes (balourds, par exemple) ;
- les forces hydrodynamiques engendrées dans le film d'huile.

On schématise la ligne d'arbre par un rotor flexible (Jeffcott rotor system) de masse $2m$, de raideur $2K_r$ et d'amortissement $2B_r$ supporté de façon symétrique par 2 paliers SFDB. A chaque palier sont attribués une masse m du rotor, une raideur K_r du rotor, un amortissement B_r du rotor, une charge statique $\vec{W}_0 = W_0 \vec{X}$, une charge dynamique $\vec{W}(t)$ et une excitation synchrone due à un balourd caractérisé par son excentricité e_b dont le module est $Me_b \omega^2$. Lorsque l'équilibrage est parfait, le centre d'inertie G de l'arbre est confondu avec son centre géométrique.

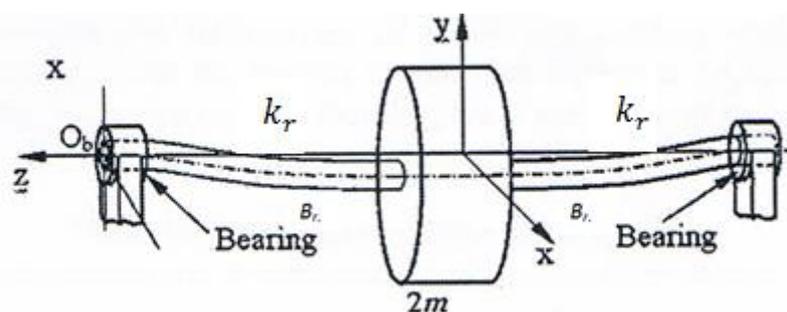


Figure 5.1 : Schéma d'un rotor flexible de type Jeffcott

5.2.2 Application du principe fondamental de la dynamique

L'application du principe fondamental de la dynamique au système rotor-palier donne :

$$\begin{cases} m\ddot{X}(t) + B_r\dot{X}(t) + K_r X(t) = W_0 + W_x(t) + me_b\omega^2 \cos(\omega t) + F_x(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) \\ m\ddot{Y}(t) + B_r\dot{Y}(t) + K_r Y(t) = W_y(t) + me_b\omega^2 \sin(\omega t) + F_y(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) \end{cases} \quad (5.1)$$

Où $X(t)$ et $Y(t)$ représentent les coordonnées instantanées du centre de l'arbre, i.e.

$$\overrightarrow{OO_a} = \begin{Bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C\varepsilon(t)\cos\phi(t) \\ C\varepsilon(t)\sin\phi(t) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} p(\hat{\theta}, z, t) \begin{Bmatrix} \cos\hat{\theta} \\ \sin\hat{\theta} \end{Bmatrix} R d\hat{\theta} dz \quad \text{sont les}$$

composantes de l'action hydrodynamique calculées à partir du champ de pression obtenu par intégration de l'équation de Reynolds incompressible.

Pour des raisons de stabilité numérique, il convient d'écrire les équations (5.1) sous la forme adimensionnelle suivante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{U''\} + \begin{bmatrix} \hat{B}_r & 0 \\ 0 & \hat{B}_r \end{bmatrix} \{U'\} + \begin{bmatrix} \hat{K}_r & 0 \\ 0 & \hat{K}_r \end{bmatrix} \{U\} = \begin{Bmatrix} \hat{W}_0 + \hat{W}_x(\hat{t}) + \varepsilon_b \cos(\hat{t}) + \hat{F}_x(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{X}', \hat{Y}') \\ \hat{W}_y(\hat{t}) + \varepsilon_b \sin(\hat{t}) + \hat{F}_y(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{X}', \hat{Y}') \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\text{Avec } \hat{B}_r = \frac{B_r}{m\omega}, \hat{K}_r = \frac{K_r}{m\omega^2}, \hat{W}_0 = \frac{W_0}{mC\omega^2} = \frac{g}{C\omega^2}, \varepsilon_b = \frac{e_b}{C}, \hat{t} = \omega t, (\hat{F}_x \hat{F}_y) = \frac{\mu_0 \omega R L (\frac{R}{C})^2}{mC\omega^2} (\hat{F}_x, \hat{F}_y)$$

$$(\quad)' = \frac{d}{d\hat{t}}(\quad) = \frac{d(\quad)}{d\hat{t}} \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}(\quad)$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{Bmatrix}, \quad \{U'\} = \begin{Bmatrix} \hat{X}' \\ \hat{Y}' \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{U''\} = \begin{Bmatrix} \hat{X}'' \\ \hat{Y}'' \end{Bmatrix}$$

La figure 5.2 illustre un rotor de type Jeffcott. Il se compose d'un arbre sans masse élastique avec appui simple muni d'un disque rigide au milieu. La distance entre le centre de rotation du disque C et le centre de gravité G, est mesuré par une distance, e qui représente l'excentricité de balourd. La vitesse angulaire du rotor ou de l'arbre est ω et ν représente la pulsation de vibration de l'arbre autour de l'axe de palier. Pour cette étude, la pulsation ν est égale à la vitesse angulaire de l'arbre $\nu = \omega$ correspondant à un état vibratoire synchrone. Selon la théorie des poutres, la rigidité de l'arbre k_r peut être exprimée par la relation suivant :

$$k_r = \frac{\text{charge}}{\text{déformée}} = \frac{48E_r I_{Gy}}{L_r^3} \quad (5.3)$$

où E_r est le module d'Young du matériau constituant le rotor, $I_{Gy} = \int_S x^2 ds = \frac{\pi D^4}{64}$ est le moment quadratique de la section droite de l'arbre et L_r représente la longueur du rotor.

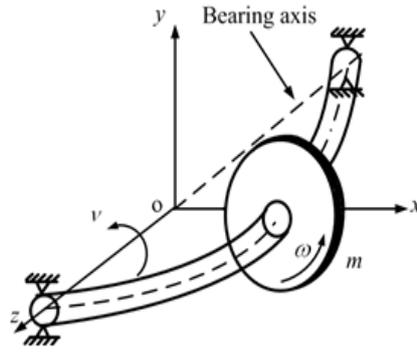


Figure 5.2 : Schéma d'un rotor flexible de type Jeffcott

La méthode des éléments finis est utilisée pour approcher l'équation de pression transitoire non linéaire appelée dans la présente étude équation de Reynolds modifiée dérivée à partir de principes de la conservation de masse et de la quantité de mouvement (chapitre III) pour un fluide à couple de contrainte incompressible et piézo-visqueux en utilisant la théorie des milieux continus (continuum) de V.K Stokes [10]. Le système d'équations algébriques non linéaire résultant de la discrétisation de l'équation de pression ou l'équation de Reynolds modifiée est résolu par la méthode des substitutions successives relaxée afin de déterminer les forces hydrodynamiques instantanées agissant sur le rotor (arbre) à chaque pas de temps. Les trajectoires non linéaires du centre de l'arbre sont obtenues en résolvant les équations de la dynamique des rotors à l'aide du schéma explicite d'Euler ou du schéma implicite de Newmark.

5.3 La méthode de Newmark et Wilson

Ces méthodes d'intégration directe permettent de construire la solution au temps $\hat{t} + \tau$ à partir des vecteurs connus $\{U_{\hat{t}}\}, \{U'_{\hat{t}}\}, \{U''_{\hat{t}}\}$ où $\tau = \hat{\beta} \Delta \hat{t}$ avec $\hat{\beta} \geq 1$. Elles utilisent les séries suivantes :

$$\{U'_{\hat{t}+\tau}\} = \{U'_{\hat{t}}\} + \tau \left((1-a)\{U''_{\hat{t}}\} + a\{U''_{\hat{t}+\tau}\} \right) \quad (5.4)$$

$$\{U_{\hat{t}+\tau}\} = \{U_{\hat{t}}\} + \tau\{U'_{\hat{t}}\} + \frac{\tau^2}{2} \left((1-b)\{U''_{\hat{t}}\} + b\{U''_{\hat{t}+\tau}\} \right) \quad (5.5)$$

$$\{U''_{\hat{t}+\tau}\} = \frac{2}{b\tau^2} [\{U_{\hat{t}+\tau}\} - \{U_{\hat{t}}\}] - \frac{2}{b\tau} \{U'_{\hat{t}}\} - \left(\frac{1}{b} - 1 \right) \{U''_{\hat{t}}\} \quad (5.6)$$

Lorsque $b = \frac{1}{2}$, ces approximations supposent que l'accélération est constante et égale à sa valeur moyenne. Si $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$, l'accélération est supposée être linéaire dans l'intervalle de temps $(\hat{t}, \hat{t} + \tau)$. L'expression (5.1) écrite au temps $(\hat{t} + \tau)$ donne:

$$[\bar{K}]\{U_{\hat{t}+\tau}\} = \{R_{\hat{t}+\tau}\} \quad (5.7)$$

où

$$[\bar{K}] = [M] + \tau a[B] + \frac{\tau^2}{2} b[K]$$

$$\{R_{\hat{t}+\tau}\} = \frac{\tau^2}{2} b \{F_{\hat{t}+\tau}\} + [M] \left(\{U_{\hat{t}}\} + \tau \{U'_{\hat{t}}\} + \frac{\tau^2}{2} (1-b) \{U''_{\hat{t}}\} \right) + [B] \left(\tau a \{U_{\hat{t}}\} + \frac{\tau^2}{2} (2a-b) \{U'_{\hat{t}}\} + \frac{\tau^3}{2} (a-b) \{U''_{\hat{t}}\} \right)$$

$$Et [M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_r \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} K_r & 0 \\ 0 & K_r \end{bmatrix}$$

Lorsque $\tau = \Delta\hat{t}$, c.-à-d. $\hat{\beta} = 1$, on obtient la méthode de Newmark [11] qui est inconditionnellement stable si $a \geq \frac{1}{2}$, $b \geq \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$.

Lorsque $b=0$, la méthode est explicite et est conditionnellement stable par rapport au pas de temps. Les valeurs des paramètres a et b sont souvent égales à $\frac{1}{2}$.

Après avoir résolu l'équation (5.7), on calcule $\{U''_{\hat{t}+\Delta\hat{t}}\}$ à l'aide de (5.6).

En appliquant maintenant le schéma de Newmark aux équations (5.2), nous obtenons:

$$[\bar{K}]\{U_{\hat{t}+\Delta\hat{t}}\} = \{R_{\hat{t}+\Delta\hat{t}}\} \quad (5.8)$$

$$Où [\bar{K}] = \begin{bmatrix} 1 + \Delta\hat{t} \cdot a \cdot B_r + \frac{\Delta\hat{t}^2}{2} \cdot b \cdot K_r & 0 \\ 0 & 1 + \Delta\hat{t} \cdot a \cdot B_r + \frac{\Delta\hat{t}^2}{2} \cdot b \cdot K_r \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \{R_{\hat{t}+\Delta\hat{t}}\} = \frac{\Delta\hat{t}^2}{2} \cdot b \cdot \left\{ \begin{array}{l} \widehat{W}_0 + \varepsilon \cos(\hat{t} + \Delta\hat{t}) + \widehat{F}_X(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \\ \varepsilon \sin(\hat{t} + \Delta\hat{t}) + \widehat{F}_Y(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \end{array} \right\} +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{X}(\hat{t}) + \Delta\hat{t} \cdot \widehat{X}'(\hat{t}) + \frac{\Delta\hat{t}^2}{2} (1-b) \widehat{X}''(\hat{t}) \\ \widehat{Y}(\hat{t}) + \Delta\hat{t} \cdot \widehat{Y}'(\hat{t}) + \frac{\Delta\hat{t}^2}{2} (1-b) \widehat{Y}''(\hat{t}) \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_r \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta\hat{t} \cdot a \cdot \widehat{X}(\hat{t}) + \frac{\Delta\hat{t}^2}{2} (2a-b) \widehat{X}'(\hat{t}) + \frac{\Delta\hat{t}^3}{2} (a-b) \widehat{X}''(\hat{t}) \\ \Delta\hat{t} \cdot a \cdot \widehat{Y}(\hat{t}) + \frac{\Delta\hat{t}^2}{2} (2a-b) \widehat{Y}'(\hat{t}) + \frac{\Delta\hat{t}^3}{2} (a-b) \widehat{Y}''(\hat{t}) \end{array} \right\}$$

Ainsi, la solution de l'équation (5.2) peut être écrite comme

$$\widehat{X}(\hat{t} + \Delta\hat{t}) = \frac{R_X(\hat{t}+\Delta\hat{t})}{\bar{K}} \quad \text{et} \quad \widehat{Y}(\hat{t} + \Delta\hat{t}) = \frac{R_Y(\hat{t}+\Delta\hat{t})}{\bar{K}} \quad (5.9)$$

où $\bar{K}_{11} = \bar{K}_{22} = \bar{K}$, et R_X et R_Y sont les deux composantes de $\{R_{\hat{t}+\Delta\hat{t}}\}$.

La détermination de $\widehat{X}(\hat{t} + \Delta\hat{t})$ et $\widehat{Y}(\hat{t} + \Delta\hat{t})$ permet de calculer :

$$\widehat{X}''(\hat{t} + \Delta\hat{t}) = \frac{2}{b\Delta\hat{t}^2} \left(\widehat{X}(\hat{t} + \Delta\hat{t}) - \widehat{X}^*(\hat{t}) \right) - \frac{2}{b\Delta\hat{t}^2} \widehat{X}'(\hat{t}) - \left(\frac{1}{b} - 1 \right) \widehat{X}''(\hat{t}) \quad (5.10)$$

$$\widehat{X}'(\hat{t} + \Delta\hat{t}) = \widehat{X}'(\hat{t}) + \Delta\hat{t} \left[(1-a) \widehat{X}''(\hat{t}) + a \cdot \widehat{X}''(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \right] \quad (5.11)$$

et des relations similaires pour $\widehat{Y}''(\hat{t} + \Delta\hat{t})$ et $\widehat{Y}'(\hat{t} + \Delta\hat{t})$. Notons que les coefficients de la matrice de l'équation (5.8) se simplifient sensiblement dans le cas d'un rotor rigide. Les différentes étapes de la procédure de calcul de Newmark sont décrites ci-dessous:

Étape 1 : à l'instant $\hat{t} = 0$, pour une position initiale du centre de l'arbre $\{U_0\} = \begin{Bmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_0 \end{Bmatrix}$ et des

vitesse initiales $\{U'_0\} = \begin{Bmatrix} X_0^{*'} \\ Y_0^{*'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ on résout le système d'équations algébriques non linéaires résultant de la discrétisation de l'équation de Reynolds stationnaire (21) ; c'est à dire, sans le terme transitoire, par la méthode des éléments finis en utilisant la méthode des substitutions successives avec coefficient de sous-relaxation afin d'obtenir le champ de pression hydrodynamique \hat{p}_0 et la distribution d'épaisseur de film \hat{h}_0 . L'intégration du champ de pression p_0^* sur la surface de l'arbre permet de calculer les composantes de la force hydrodynamique stationnaires:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{X_0} \\ \hat{F}_{Y_0} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \hat{p}_0(\theta, \hat{z}) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta d\hat{z}$$

Étape 2 : les composantes de l'accélération du centre de l'arbre $\{U_0''\} = \begin{Bmatrix} \hat{X}_0'' \\ \hat{Y}_0'' \end{Bmatrix}$ sont alors

déterminées à partir des équations dynamiques (5.2).

Étape 3: La nouvelle position ainsi que les nouvelles composantes de la vitesse du centre de l'arbre au temps $(\hat{t} + \Delta\hat{t})$ sont mis à jour par l'intermédiaire du schéma explicite d'Euler :

$$\{U'(\hat{t} + \Delta\hat{t})\} = \begin{Bmatrix} \hat{X}'(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \\ \hat{Y}'(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{X}'_0 \\ \hat{Y}'_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{X}_0'' \\ \hat{Y}_0'' \end{Bmatrix} \Delta\hat{t}$$

$$\{U(\hat{t} + \Delta\hat{t})\} = \begin{Bmatrix} \hat{X}(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \\ \hat{Y}(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{X}'(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \\ \hat{Y}'(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \end{Bmatrix} \Delta\hat{t} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \hat{X}_0'' \\ \hat{Y}_0'' \end{Bmatrix} \Delta\hat{t}^2$$

Étape 4 : Les nouvelles coordonnées de la position et les nouvelles vitesses du centre de l'arbre nous permettent de calculer de nouvelles distributions de pression et d'épaisseur du film $\hat{p}_{\hat{t}+\Delta\hat{t}}$ et $\hat{h}_{\hat{t}+\Delta\hat{t}}$ en résolvant de nouveau le système d'équations algébrique non linéaire résultant de la discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée transitoire (prise en considération cette fois-ci de la vitesse d'écrasement du film) à l'aide de la méthode des substitutions successives avec coefficient de sous-relaxation . Ainsi, de nouvelles composantes de la force hydrodynamique

(portance) $\begin{Bmatrix} \hat{F}_X(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \\ \hat{F}_Y(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \end{Bmatrix}$ peuvent être calculées grâce à l'intégration de $\hat{p}_{\hat{t}+\Delta\hat{t}}$

Étape 5: Calculer $\{U(\hat{t} + \Delta\hat{t})\} = \begin{Bmatrix} \hat{X}(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \\ \hat{Y}(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \end{Bmatrix}$, $\{U''(\hat{t} + \Delta\hat{t})\} = \begin{Bmatrix} \hat{X}''(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \\ \hat{Y}''(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \end{Bmatrix}$, et

$\{U'(\hat{t} + \Delta\hat{t})\} = \begin{Bmatrix} \hat{X}'(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \\ \hat{Y}'(\hat{t} + \Delta\hat{t}) \end{Bmatrix}$ en utilisant respectivement les équations (36), (37), et (38).

Étape 6 : tant que $\hat{t} < \hat{t}_{\max}$, revenir à l'étape 4 en posant $\hat{t} = \hat{t} + \Delta\hat{t}$.

5.4 Structure générale du programme de calcul

La figure 5.3 représente l'organigramme du programme de calcul développé en langage MS-Fortran 90.

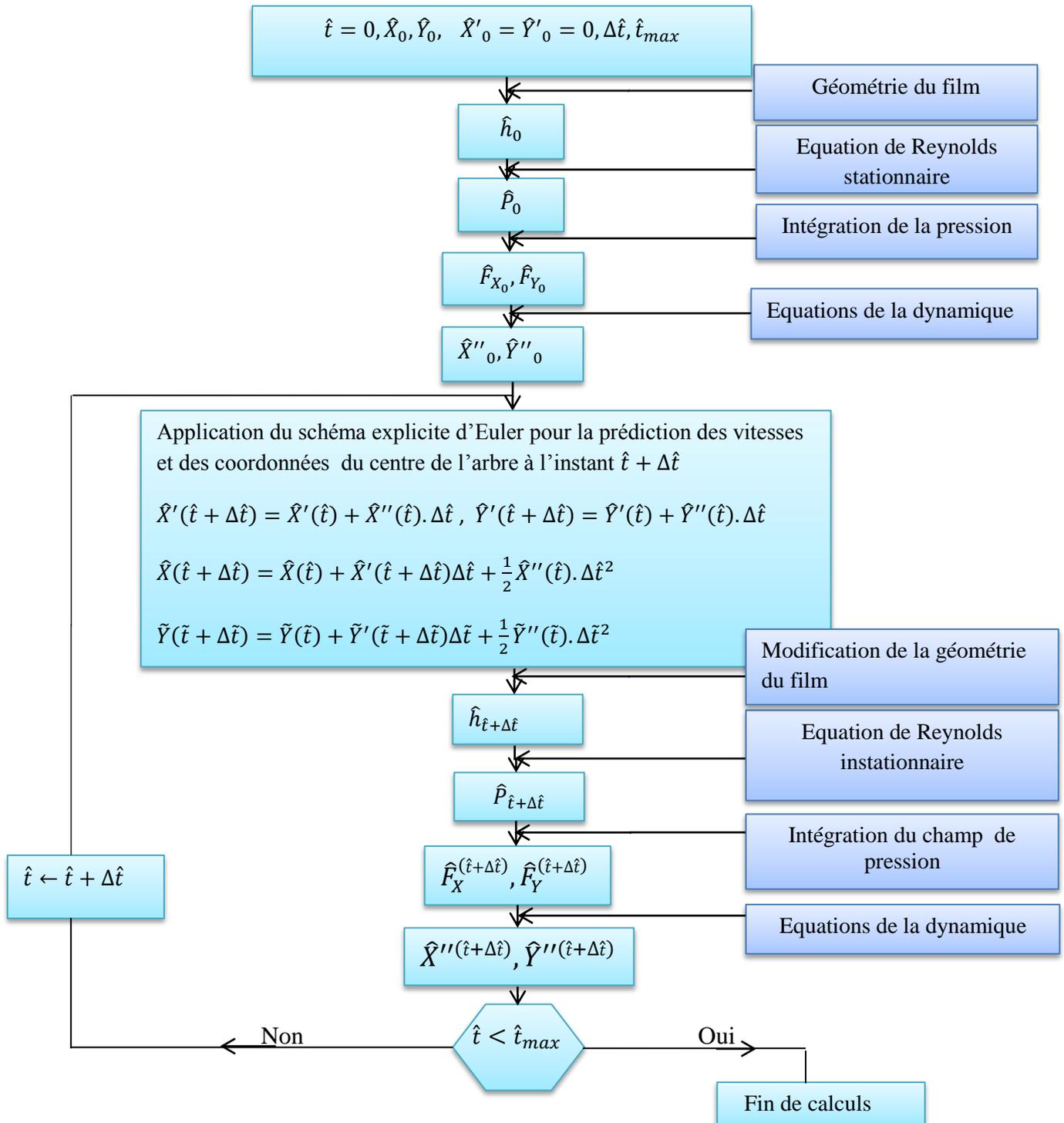


Figure 5.3 : Représentation générale du schéma de calcul

5.5 Validation du programme

Un programme de calcul écrit en MS-fortran a été développé pour l'étude de la réponse dynamique non linéaire d'un rotor flexible monté dans des paliers compliants fonctionnant en régime de lubrification hydrodynamique isotherme. Ce programme est basé sur une discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée par éléments finis.

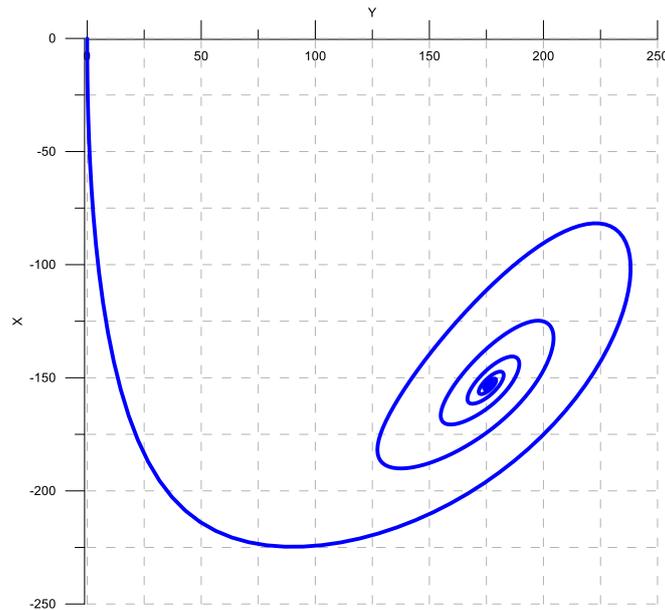


Figure 5.4 : Réponse dynamique d'un rotor rigide équilibré (sans balourd, $\varepsilon_b = 0$)

La figure 5.4 montre les lieux de centre de l'arbre calculé à chaque pas de temps pour 20 révolutions de rotor. La position initiale de centre de l'arbre à t_0 est choisie de façon arbitraire. En régime établi la solution des équations du rotor converge vers le point d'équilibre ou le point de fonctionnement dans les coordonnées

$$\hat{X} = \frac{X}{c} = \frac{153.220228}{350} = 0.437772$$

et $\hat{Y} = \frac{Y}{c} = \frac{176.1497078}{350} = 0.5032858$ ces valeurs sont en bonne concordance avec celle publiées par LAHMAR et al [21]. L'erreur relative est de l'ordre de 0.3%

5.6 Etude paramétrique

Nous présenterons dans ce paragraphe les résultats obtenus par l'exécution du programme portant sur l'influence de certains paramètres clés tels que le paramètre des couples de contraintes $\hat{\lambda}$, le coefficient de piézo-viscosité du fluide $\hat{\alpha}$, l'excentricité de balourd ε_b et la flexibilité du rotor caractérisé par la raideur k_r .

5.6.1 Données

- Données relatives aux caractéristiques géométriques, élastiques et condition de fonctionnement du palier

Les caractéristiques géométriques et élastiques ainsi que les conditions de fonctionnement du palier SFDB sont reportées dans les tableaux 5.1 et 5.2. Les différents calculs ont été effectués en utilisant les données relatives au maillage par éléments finis et aux méthodes de calcul employées et qui sont indiquées dans les tableaux 5.3 et 5.4.

Tableau 5.1 Caractéristiques géométriques et élastiques du palier

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité (SI)
Rayon du palier	R	250×10^{-3}	m
Longueur du palier	L	320×10^{-3}	m
Jeu radial du palier	C	3.50×10^{-4}	m
Epaisseur de revêtement	th	0.010	m
Viscosité dynamique de le lubrifiant à la pression atmosphérique	ν_0	15×10^{-3}	$Pa.s$
La masse volumique de le lubrifiant	ρ_0	870	kg/m^3

Tableau 5.2 Conditions de fonctionnement du palier

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité (SI)
Masse du rotor affectée au palier	m	34×10^4	kg
Vitesse de rotation du rotor	N	3000	rpm
Coefficient de piézo-viscosité du fluide	α	0 17×10^{-9} 42.5×10^{-9}	Pa^{-1}
Pression atmosphérique	Pa	$1,013 \times 10^5$	Pa
Excentricité relative du balourd	e_b	0.5	<i>SANS DIM</i>
Raideur du rotor par palier	K_r	2×10^9	N/m
Module se Yong de revêtement	E	0.9×10^{30}	GPa
Coefficient de poisson	σ	0.35	<i>SANS DIM</i>
Amortissement du rotor par palier	B_r	0	$N.s/m$

Tableau 5.3 Données relatives aux caractéristiques du maillage par éléments finis

Paramètre	Valeur (indication)
Type d'élément utilisé	Quadrilatéral bilinéaire de classe C^0 à 4 nœuds iso paramétrique
Nombre d'éléments suivant les directions circonférentielle et axiale (demi-palier)	$N_\theta = 30$, $N_z = 10$
Nombre de points d'intégration de Gauss choisis sur l'élément de référence pour l'évaluation des différents matrices élémentaires	$4=2 \times 2$

Tableau 5.4 Données relatives aux méthodes de calcul

Méthodes de calcul	Paramètres
Substitution successive (résolution de l'équation de Reynolds incompressible non linéaire)	- Facteur de relaxation : $\Omega = 0,10$ - Test d'arrêt du processus itératif : $\ n\ < \varepsilon$ Ou $\ n\ =$ norme des moindres carrés relative des vecteurs pression calculés aux itérations (k) et ($k + 1$) , $\varepsilon = 10^{-5}$
Implicite d'Euler (Résolution de l'équation de Reynolds compressible transitoire)	- Pas de temps sans dimension : $\Delta \hat{t} = \omega \Delta t = 2\pi/50$
Explicite d'Euler (Résolution des équations de mouvement du rotor flexible)	- Temps maximale sans dimension $\hat{t}_{max} = 20 \times 2\pi$ correspondant à 20 révolutions de rotor

5.6.2 Effet des couples de contrainte sur la réponse dynamique non linéaire d'un rotor rigide monté dans des SFDB

La figure 5.5 représente les réponses dynamiques non linéaires d'un rotor rigide calculées en régime établi pour différentes valeurs du paramètre de couples de contraintes $\hat{l} = \frac{l}{c}$. La valeur nulle de \hat{l} correspond au cas de fluide newtonien ce paramètre représente physiquement la longueur caractéristique des chaînes moléculaires des additifs ou dopes rajoutés à la base de lubrifiant en vue d'améliorer ces performances. On observe clairement que la taille de l'orbite diminue lorsque \hat{l} augmente. Les couples de contrainte dus à la présence des additifs dans le fluide lubrifiant permettent de réduire les amplitudes de vibrations dus à un balourd d'excentricité relative $\varepsilon_b = \frac{e_b}{c} = 0.5$ qui peut être considérée comme une excitation dynamique synchrone. La diminution de la taille de l'orbite entraîne une augmentation de l'épaisseur de film ce qui évite tout risque de contacts métal-métal entre la surface de la bague intermédiaire de SFDB et le logement. Ce qui est clairement illustré sur la figure 5.6 représentant l'évolution temporelle des déplacements du centre du rotor déséquilibré.

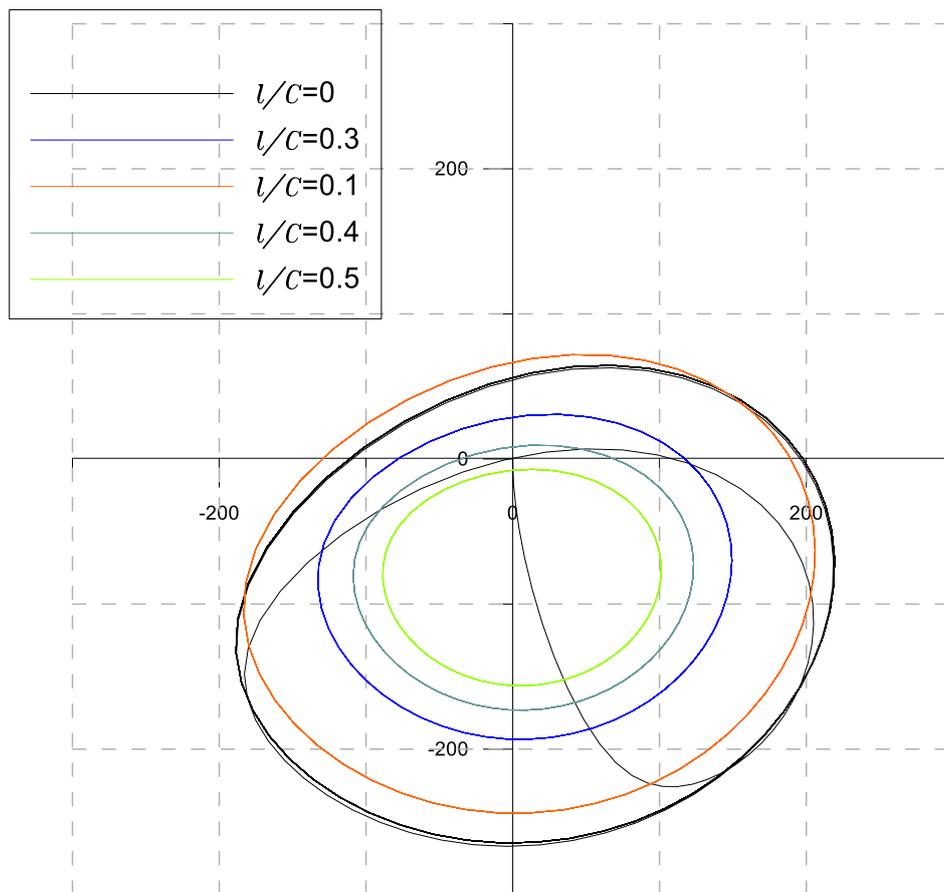


Figure 5.5 : orbites non linéaires calculées pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel

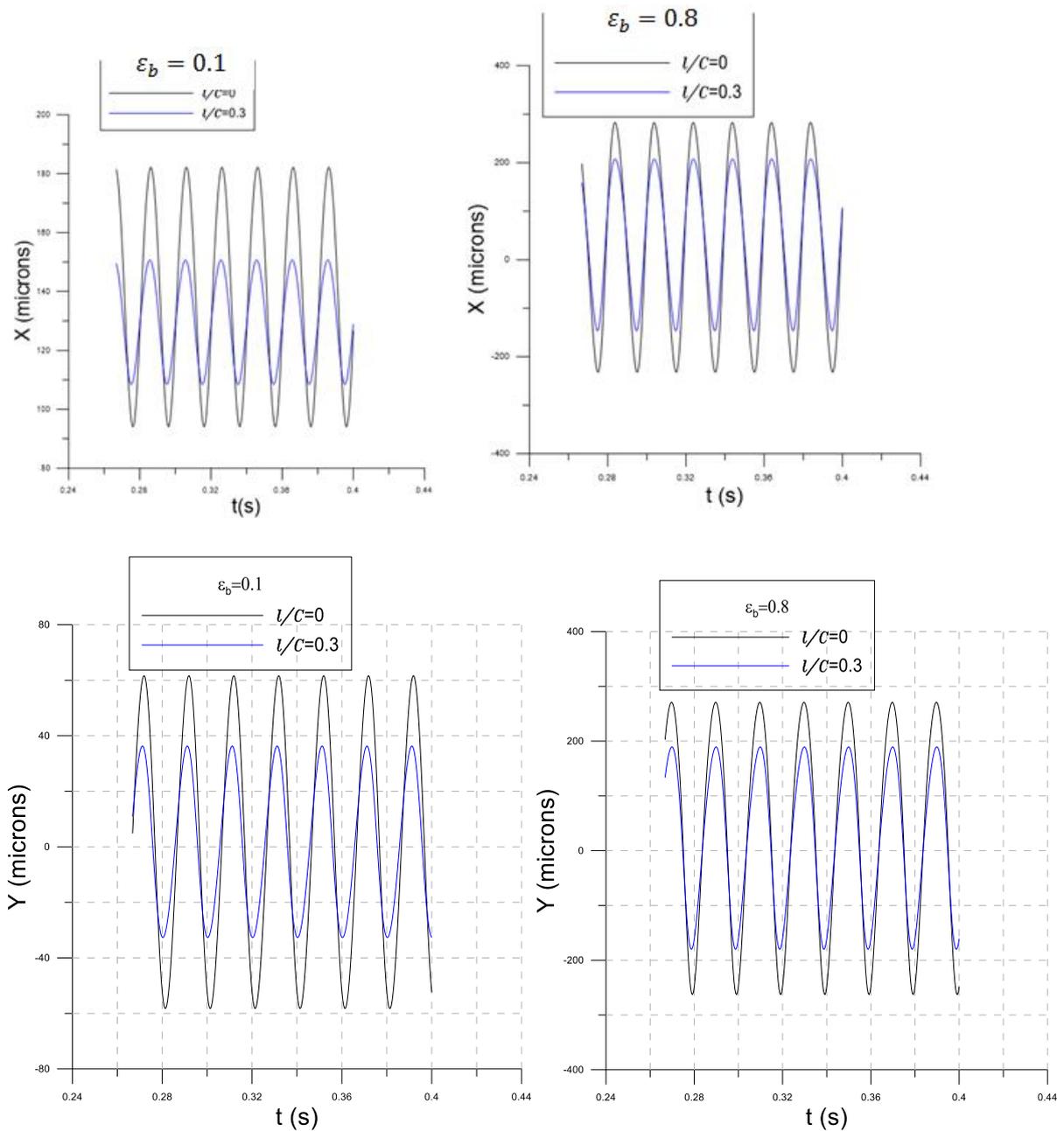


Figure 5.6 : variation des déplacements du centre du rotor en fonction du temps correspondant aux 13 dernières révolutions du rotor

5.6.3 Effets de la piézo-viscosité dynamique du lubrifiant sur la réponse dynamique non linéaire du système rotor rigide-SFDB

La figure 5.7 montre les réponses dynamiques non linéaires du système rotor- rigide SFDB calculé en régime établi pour un faible balourd $\varepsilon_b = 0.1$ avec ou sans prise en considération des couples de contrainte. Les calculs des orbites ont été effectués pour 3 valeurs de coefficient de piézo-viscosité $\alpha = 0\text{Pa}^{-1}$, $\alpha = 17 * 10^{-9}\text{Pa}^{-1}$, $\alpha = 42.5 * 10^{-9} \text{Pa}^{-1}$. La valeur nul de α correspond au cas de fluide iso-visqueux tons disque les valeurs différentes de 0 correspond au

cas piézo-visqueux. On observe que dans le cas d'un rotor rigide déséquilibré fonctionnant avec un faible balourd l'augmentation de la viscosité de lubrifiant avec la pression n'affecte pas la taille des orbites aussi bien dans le cas newtonien que non newtonien (polaire). En revanche figure 5.8, les orbites calculé dans le cas d'un rotor fonctionnant a grande balourd $\epsilon_b = 0.8$ sans sensiblement affecté par la piézo-viscosité du lubrifiant. La taille de l'orbite calculé dans le cas piézo-visqueux est plus faible que celle calculé dans le cas iso-visqueux aussi bien dans le cas newtonien que non newtonien. En conséquence, la piézo-viscosité du fluide joue un roll positif vis-à-vis de la réponse dynamique de système rotor- rigide SFDB.

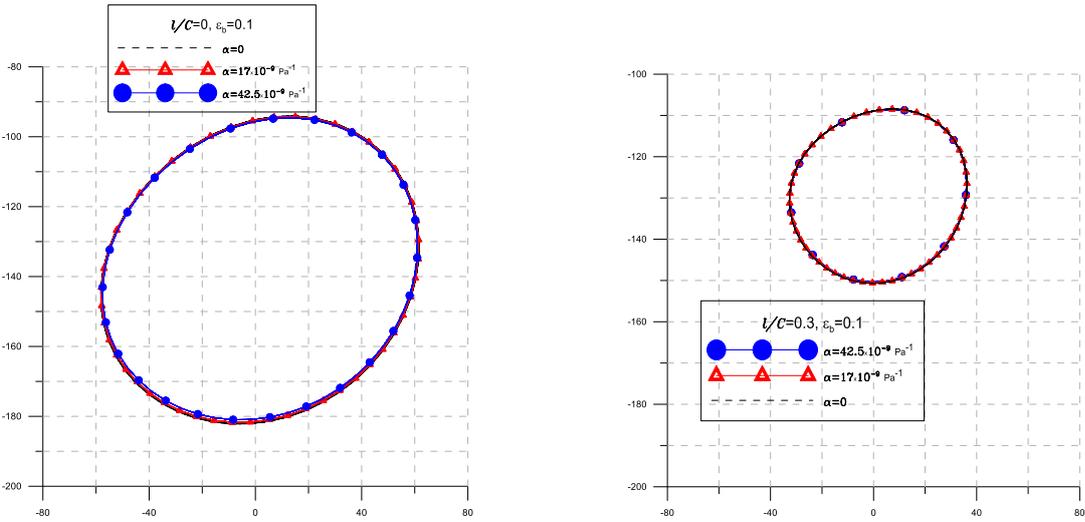


Figure 5.7 : orbites dynamiques non linéaires calculées pour un rotor rigide déséquilibre avec un faible balourd pour différentes valeurs du coefficient de piézo-viscosité

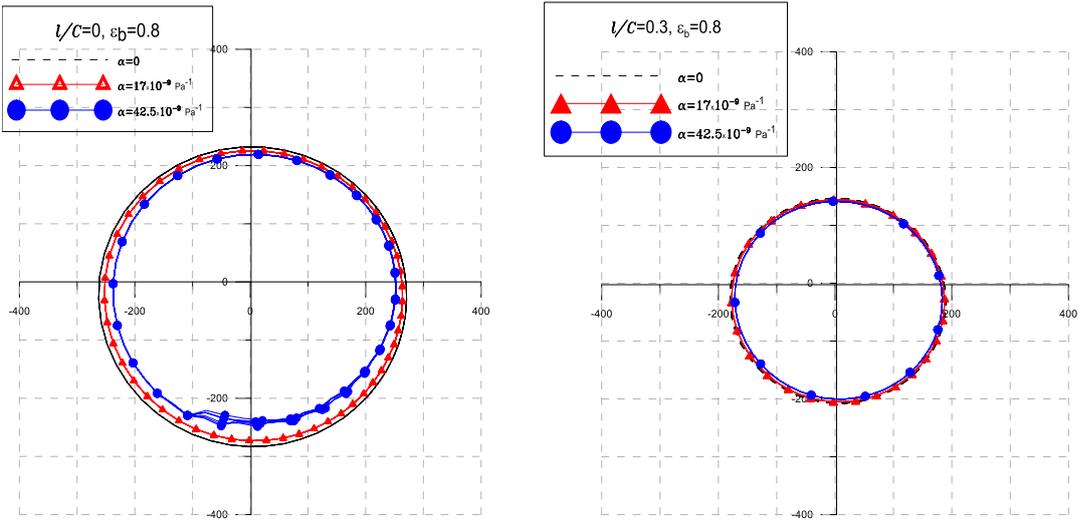


Figure 5.8 : orbites dynamiques non linéaires calculées pour un rotor rigide déséquilibre avec un grand balourd pour différentes valeurs du coefficient de piézo-viscosité

5.6.4 Effets de la piézo-viscosité dynamique du lubrifiant sur la réponse dynamique non linéaire du système rotor flexible-SFDB

La même tendance sont observé Dans le cas du rotor flexible figures 5.9 et 5.10; c-à-dire les orbites sont sensiblement seulement affecté par la piézo-viscosité du fluide dans le cas d'un rotor flexible déséquilibré soumis à un grand balourd.

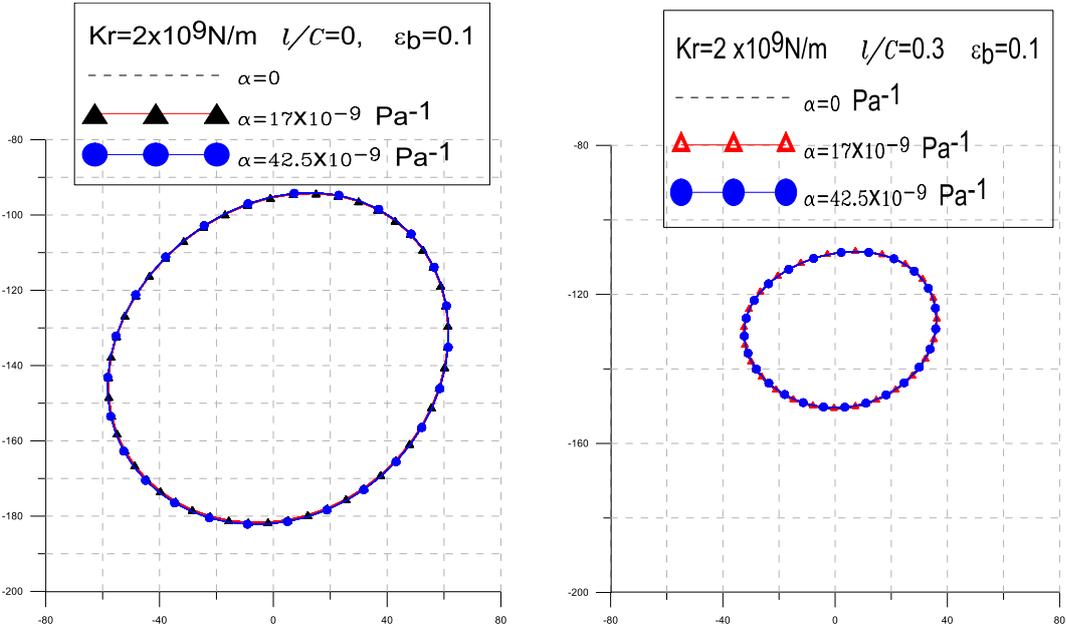


Figure 5.9 : orbites dynamiques non linéaires calculées pour un rotor flexible déséquilibré avec un faible balourd pour différentes valeurs du coefficient de piézo-viscosité

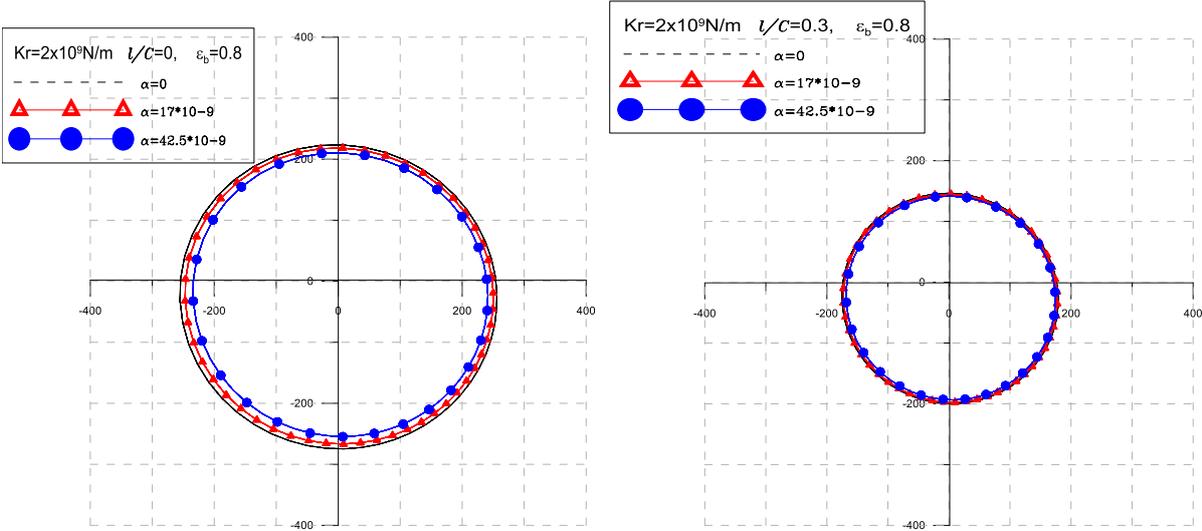


Figure 5.10 : orbites dynamiques non linéaires calculées pour un rotor flexible déséquilibré avec un grand balourd pour différentes valeurs du coefficient de piézo-viscosité

La figure 5.11 montre les réponses dynamiques d'un rotor flexible déséquilibré soumis à un faible balourd et un grand balourd. On remarque que l'orbite calculé dans le cas d'un faible balourd est de forme elliptique possédant un caractère linéaire figure 5.11.a car le module de la charge dynamique du au balourd $|\vec{W}| = m C \varepsilon_b \omega^2$ est faible devant la charge statique W_0 ($\frac{|\vec{W}|}{W_0} = \frac{1}{3}$). En revanche, l'orbite calculé dans le cas d'un grand balourd ($\varepsilon_b = 0.8$) figure 5.11.b est circulaire et a un caractère non linéaire car dans cette situation le module de la charge dynamique est environ 3 fois plus grand que la charge statique. On peut affirmer que l'orbite elliptique calculé par la théorie coïncide avec celle prédite par la proche dynamique linéaire basée sur la linéarisation des équations différentielles de la dynamique des rotors.

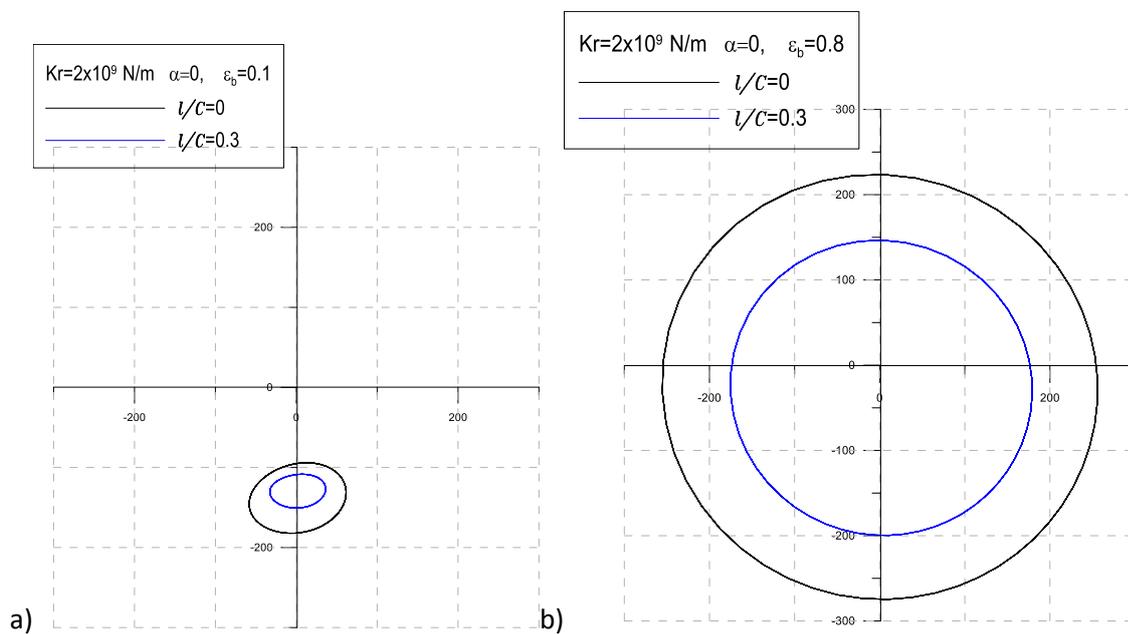


Figure 5.11 : réponse dynamiques d'un rotor déséquilibré soumis a un faible balourd (résiduel) et un grand balourd perte d'une ailette

5.7 Conclusion générale

Dans ce travail d'initiation à la recherche effectué dans le cadre de la préparation du mémoire de Master, on s'est intéressé à l'analyse du comportement dynamique non linéaire d'un rotor flexible de type Jeffcott monté dans des paliers à film amortisseur (en anglais Squeeze Film Damper Bearings SFDB). Le fluide amortisseur est modélisé comme un fluide à couple de contrainte dont le comportement rhéologique est non newtonien.

L'étude de la réponse dynamique non linéaire rotor-SFDB repose sur la résolution des équations de la dynamique des rotors flexible et déséquilibrés à l'aide du schéma explicite d'Euler. Le caractère non linéarité des équations de mouvements du rotor obtenues à partir de l'application du principe fondamentale de la dynamique provient du fait que les composantes de les forces hydro dynamiques dus à la présence de film amortisseur sont des fonctions non linéaires des déplacements et des vitesses de déplacement du centre du rotor.

Ces forces se calculent par intégration du champ de la pression engendrée dans le film amortisseur. Ce dernier est déterminé à partir de la résolution de l'équation de Reynolds modifié non linéaire par la méthode des éléments finis.

L'étude du problème d'interaction fluide)solide comprend deux partie essentielle la première partie concerne la formulation mathématique du problème de lubrification hydrodynamique par effet d'écrasement et de la dynamique des rotors flexibles. La seconde partie concerne le traitement numérique des équations de la dynamique des rotors couplé avec l'équation de Reynolds.

Les conclusions de cette étude sont :

- Le comportement dynamique d'un SFDB est non linéaire et ne peut être pas étudié par l'approche linéaire
- Les couples de contraintes dus à la présence des additifs dans le film amortisseur permettent de réduire la taille des orbites et d'augmenté ainsi l'épaisseur du film
- La piézo-viscosité du film amortisseur a un effet positif sur la réponse du rotor soumis à un grand balourd aussi bien dans le cas d'un rotor rigide que flexible

Les prolongements possibles de la présente étude sont :

- Prise en considération des déformations élastiques des surfaces contiguës au film amortisseur
- Prise en compte des forces et de fennomane de turbulence dans le film amortisseur
- Modélisation de la structure de rotor par éléments finis de type poutre

ANNEXE A

Equations géométrique du film pour un palier compliant

La figure (A.1) montre un bel exemple de palier compliant d'ordre d'hélice marine dont le coussinet est muni d'une couche en élastomère

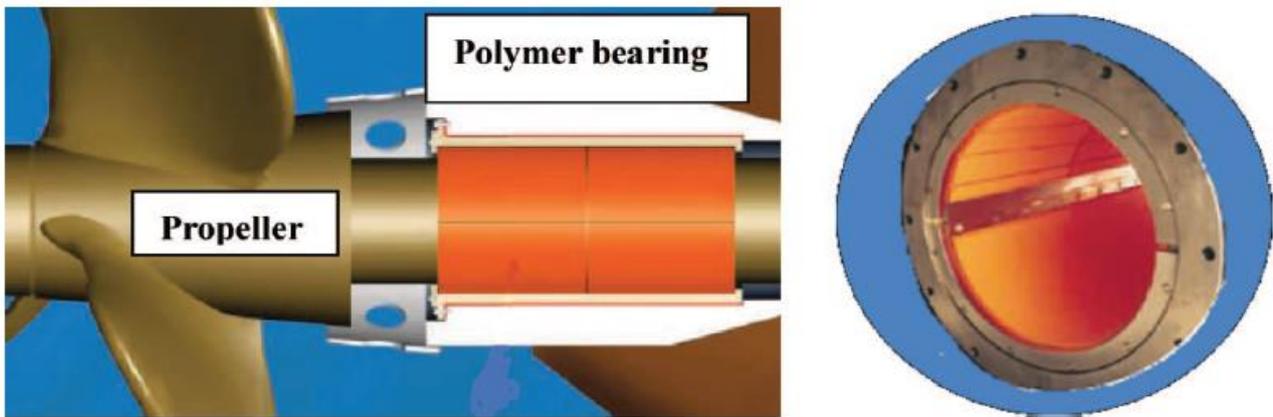


Figure A.1 : vue d'un palier compliant d'hélice marine

La figure (A.2) montre schématiquement un palier lisse compliant aligné (les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles) où le centre de l'arbre O_{j0} occupe la position d'équilibre définie par les coordonnées (ε_0, ϕ_0) . La configuration du palier rigide est représentée par le cercle de centre O_b et de rayon $(R + C)$. L'origine du système de coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) liée à la charge statique \vec{W}_0 est située au centre du coussinet rigide O_b . la coordonnée circonférentielle θ est mesurée à partir de la ligne des centres ou l'axe $O_b\vec{r}$. l'arbre de rayon r , supposé rigide, tourne avec une vitesse angulaire constante W autour de l'axe $O_b\vec{z}$.

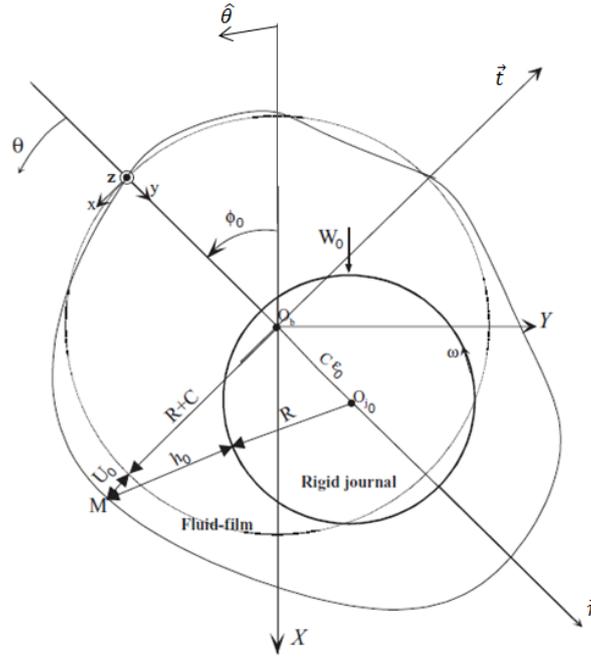


Figure A.2 : Schéma d'un palier lisse revêtu

L'équation géométrique du film peut être obtenue en appliquant la règle de cosinus au triangle de sommets O_b, O_{j0} et M :

$$(R + h_0)^2 = (R + C + U_0)^2 + e_0^2 - 2e_0(R + C + U_0) \underbrace{\cos(\theta - \pi)}_{= -\cos \theta} \quad (\text{A.1})$$

Où :

$C = R_{\text{coussinet}} - R_{\text{arbre}}$ est le jeu radial du palier, h_0 : l'épaisseur du film, U_0 : le déplacement élastique radial de la couche et $e_0 = C \epsilon_0$ l'excentricité

En divisant les deux membres de l'équation (A.1) par R^2 et en négligeant les termes en $\left(\frac{h_0}{R}\right)^2$, $\left(\frac{C}{R}\right)^2$, $\left(\frac{U_0}{R}\right)^2$ et $\left(\frac{e_0}{R}\right)^2$, l'équation (A.1) se réduit à

$$h_0 = C(1 + \epsilon_0 \cos \theta) + U_0 \quad (\text{A.2})$$

Ou encore en utilisant la coordonnée $\hat{\theta}$:

$$\begin{aligned} h_0 &= C[1 + \epsilon_0 \cos(\hat{\theta} - \phi_0)] + U_0 \\ &= C + X \cos \hat{\theta} + Y \sin \hat{\theta} + U_0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Avec $X = C \epsilon_0 \cos \phi_0$ et $Y = C \epsilon_0 \sin \phi_0$

Dans les équations (A.2) et (A.3), le champ de déplacement radial se calcule par la relation suivante :

$$U_0 = \alpha_0 p_0 \quad (A.4)$$

Où l_0 est l'opérateur de compliance de la structure défini par

$$l_0 = \frac{X - 1}{X + 1} \frac{th}{G}$$

th : est l'épaisseur de la couche élastique,

$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ est le module de cisaillement de coulomb (E : module d'élasticité d'Young et σ : le coéf de poisson)

χ : étant le paramètres d'élasticité qui s'exprime par :

-Hypothèse de déformation planes :

$$\chi = 3 - 4\sigma$$

-Hypothèse de contrainte

$$\chi = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}$$

Dans le cas d'un palier , on utilise l'hypothèse de déformation planes .dans ce cas l_0 s'exprime par :

$$l_0 = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma} \frac{th}{E}$$

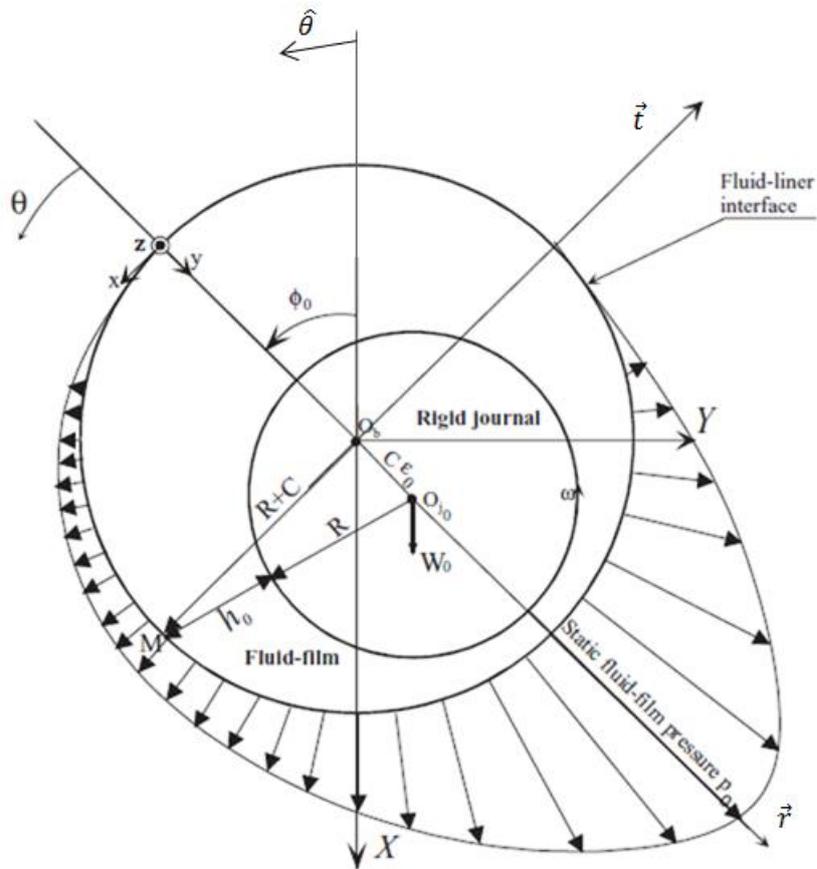


Figure A.3 : Schéma d'un palier lisse rigide (non revêtu)

Lorsque le palier est rigide (non revêtu), le module d'élasticité $E \rightarrow \infty$ ce qui conduit à l'annulation de α_0 .

Dans ces conditions, les équations (A.2) et (A.3) se simplifient et s'écrivent :

$$h_0 = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \tag{A.5}$$

Ou

$$h_0 = C + X \cos \hat{\theta} + Y \sin \hat{\theta} \tag{A.6}$$

ANNEXE B

Épaisseur du film lubrifiant et équation de Reynolds stationnaire

Considérons une section droite du palier (figure .a). Un point M appartenant à la surface du coussinet sera repère par la coordonnée angulaire $\theta =: (\overrightarrow{O_c A}, \overrightarrow{O_c M})$; l'épaisseur du film d'huile est donnée par :

$$h = O_c M - O_c M' = R_c - O_c M' = R_a + C - O_c M'$$

En appliquant la règle des sinus au triangle $O_a M' O_c$ il vient :

$$\frac{O_a M'}{\sin(O_a O_c M')} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{R_a}{\sin(M' O_a O_c)} = \frac{R_a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{R_a}{\sin \theta}$$

D'où

$$\sin \alpha = \frac{e}{R_a} \sin \theta \quad \text{et} \quad O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(O_c O_a M')$$

$$(O_c O_a M') = \theta - \alpha = \theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)$$

$$O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right]$$

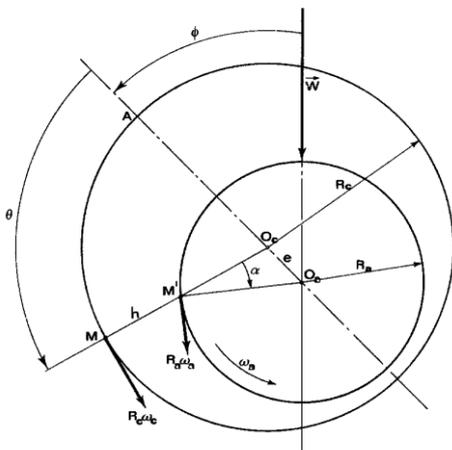


Figure. a : Section droite du palier

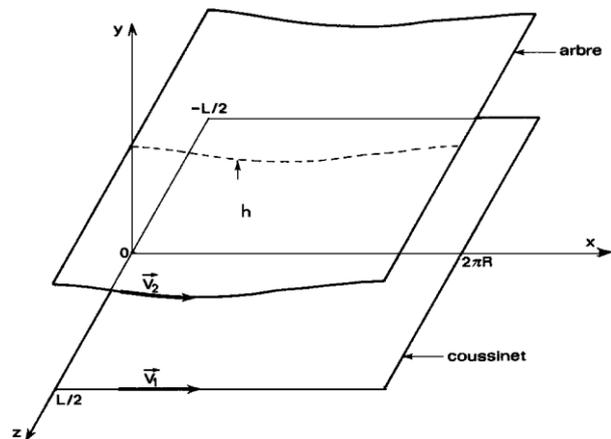


Figure. b : Palier développé

en développant le sinus il vient :

$$O_c M' = R_a \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2} - e \cos \theta$$

la quantité $e/R_a < C/R$ est très petite devant l'unité (de l'ordre de 10^{-3}) on peut donc négliger le terme $\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2$ devant 1. L'épaisseur du film s'écrit alors :

$$h = C(1 - \varepsilon \cos \theta)$$

où l'excentricité relative : $\varepsilon = e/C$ varie de 0 à 1. Il faut remarquer que cette relation n'est valable que si $C/R \ll 1$.

Équation de Reynolds

Les rayons R_a et R_c étant très voisins, on peut négliger la courbure du film, développer le coussinet (ou l'arbre) et l'assimiler à un plan (figure .b). Les conditions cinématiques relatives aux surfaces s'écrivent ;

$$U_1 = R_c \omega_c ; \quad V_1 = W_1 = 0$$

$$U_2 = R_a \omega_a \cos \alpha ; \quad V_2 = R_a \omega_a \sin \alpha ; W_2 = 0$$

où α , angle entre $O_c M'$ et $O_a M'$, est la pente de la courbe $h(x)$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{R d\theta} = -\frac{e}{R} \sin \theta$$

la quantité e/R_a étant très petite, on peut effectuer un développement et se limiter au 1^{er} ordre :

$$\cos \alpha \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin \alpha \approx \alpha \approx dh/dx$$

dans ces conditions les vitesses des surfaces s'écrit :

$$U_1 = R_c \omega_c$$

$$U_2 = R_a \omega_a \quad ; \quad V_2 = R_a \omega_a \frac{dh}{dx}$$

Si on reporte les vitesses des surfaces du contact dans l'équation de Reynolds écrite en coordonnées cartésiennes et si on pose $R = R_a = R_c$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu R (\omega_a - \omega_c) \frac{dh}{dx}$$

Remarque :

a) On a développé le coussinet et choisi ce dernier comme plan de référence ; un résultat identique aurait été obtenu en développant l'arbre.

b) Les vitesses angulaires ω_a et ω_c s'ajoutent. ainsi la portance est proportionnelle à la somme des vitesses. Si celles-ci sont égales et opposées, la portance de l'écoulement est nulle au second ordre près.

ANNEXE C

Analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \overline{\nabla^2} u_i \quad ; i=1,2,3 \quad (C.1)$$

ou

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V} \quad (C.2)$$

avec

$$\Delta \vec{V} = \underbrace{\overline{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V}))}_{=0} - \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{V})) = -\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{V})) \quad (C.3)$$

$$\text{et } \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \overline{\text{grad}} \vec{V}$$

Compte tenu de l'éq. (3), l'éq. (2) devient :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p - \mu \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\vec{V})) \quad (C.4)$$

En notation indicielle, l'éq (4) s'écrit :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (C.5)$$

$$\text{avec } \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_3}$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3 \partial x_3} = \overbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}}^{\Delta u_i}$$

Soit :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right)$$

Soit par conséquent :

$$\rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \underbrace{u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j}}_{u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} - \mu \left(\cancel{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \cancel{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \underbrace{u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j}}_{u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \cancel{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \cancel{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + \underbrace{u_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j}}_{u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_3} - \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \cancel{\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \cancel{\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}} \right)$$

Le passage à la notation classique nécessite le changement de variables suivant :

$$(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow (x, y, z) ; (u_1, u_2, u_3) \Leftrightarrow (u, v, w)$$

Soit :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (C.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (C.7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (C.8)$$

L'analyse dimensionnelle des équations (C.6) à (C.8) est basée sur l'utilisation des variables réduites suivantes :

- pour les variables d'espace : $\hat{x} = \frac{x}{R}$; $\hat{y} = \frac{y}{c}$; $\hat{z} = \frac{z}{R}$
- pour les composantes de la vitesse d'écoulement du fluide: $\hat{u} = \frac{u}{V}$; $\hat{v} = \frac{v}{V} \frac{R}{c}$; $\hat{w} = \frac{w}{V}$

Il est à noter que l'adimensionnement de la composante v provient de l'écriture de l'équation de continuité

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \text{ ou encore } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ en variables réduites. Soit :}$$

$$\frac{V}{R} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{c \partial \hat{y}} + \frac{V}{R} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0$$

$$\rightarrow \frac{V}{R} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{R}{CV} \frac{\partial v}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0$$

avec $\hat{v} = v \frac{R}{VC}$

- pour la variable temporelle : $\hat{t} = \omega t$
- pour les constantes physiques du fluide : $\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$ et $\hat{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$

Ce changement de variables permet d'adimensionner la pression p par la relation suivante :

$$\hat{p} = \frac{C}{R} R_e \frac{p}{\rho_0 V^2} \quad \text{où } R_e = \frac{\rho_0 V C}{\mu_0} \text{ est le nombre de Reynolds moyen.}$$

En variables réduites, les équations (C.6) à (C.8) deviennent :

$$\hat{\rho} \frac{C}{R} R_e \left[\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\nabla} \hat{u} \right] = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \hat{\mu} \left(\left(\frac{C}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \left(\frac{C}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x} \partial \hat{z}} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} - \left(\frac{C}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} \right) \quad (\text{C.9})$$

Analyse dimensionnelle de la 2^{ème} équation

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \hat{\rho} \left(\frac{\omega V C}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \frac{V^2 C}{R} \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{V C}{R} \right)^2 \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \frac{V C}{R} \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \right) \\ = - \frac{\rho_0 \frac{V}{\hat{V}^2} R}{C^2 R_e} \frac{\partial \hat{p}}{R \partial \hat{y}} - \mu_0 \hat{\mu} \left(\frac{1}{\hat{V}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{R C \partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{\hat{V}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{R C \partial \hat{y} \partial \hat{z}} - \frac{1}{\hat{V} C} \frac{\partial^2 \hat{v}}{R R^2 \partial \hat{x}^2} - \frac{1}{\hat{V} C} \frac{\partial^2 \hat{v}}{R R^2 \partial \hat{z}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \hat{\rho} \left(\frac{\omega V C}{R} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \frac{V^2 C}{R} \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{V C}{R} \right)^2 \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \frac{V C}{R} \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \right) \\ = - \frac{\rho_0 \frac{V}{\hat{V}^2} R}{C^2 R_e} \frac{\partial \hat{p}}{R \partial \hat{y}} - \mu_0 \hat{\mu} \left(\frac{1}{\hat{V}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{R C \partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{\hat{V}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{R C \partial \hat{y} \partial \hat{z}} - \frac{1}{\hat{V} C} \frac{\partial^2 \hat{v}}{R R^2 \partial \hat{x}^2} - \frac{1}{\hat{V} C} \frac{\partial^2 \hat{v}}{R R^2 \partial \hat{z}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{C}{R} \hat{\rho} \frac{\rho_0 C R}{\mu_0} \frac{V}{R} \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \frac{1}{\hat{V}} \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{V}} \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{\hat{V}} \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \right) \\ = - \frac{\rho_0 V R}{\mu_0 C^2 R_e} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} - \frac{\mu_0}{\mu_0} \hat{\mu} \left(\frac{1}{R C} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y} \partial \hat{z}} - \frac{\partial^2 \hat{v}}{R^2 \partial \hat{x}^2} \right) - \left(\frac{C}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{z}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{C}{R} \hat{\rho} R_e \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \right) \\ = - \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} - \hat{\mu} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y} \partial \hat{z}} - \left(\frac{C}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{R^2 \partial \hat{x}^2} - \left(\frac{C}{R} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{z}^2} \right) \end{aligned}$$

Multiplions les deux membre par $\left(\frac{C}{R}\right)^2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{C}{R}\right)^3 \hat{\rho} R_e \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \right) \\ = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} - \hat{\mu} \left(\frac{\overset{0}{\left(\frac{C}{R}\right)^2} \partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\overset{0}{\left(\frac{C}{R}\right)^2} \partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y} \partial \hat{z}} - \frac{\overset{0}{\left(\frac{C}{R}\right)^4} \partial^2 \hat{v}}{R^2 \partial \hat{x}^2} - \frac{\overset{0}{\left(\frac{C}{R}\right)^4} \partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{z}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{C}{R}\right)^3 \hat{\rho} R_e \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} \right) = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \iff \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (\text{C.10})$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \hat{\rho} \left(\omega V \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \frac{V^2}{R} \hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \frac{V^2}{R} \hat{v} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} + \frac{V^2}{R} \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) \\ = - \frac{\partial \hat{p}}{R \partial \hat{z}} - \mu_0 \hat{\mu} \left(\frac{V}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{z}} + \frac{V}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y} \partial \hat{z}} - \frac{V}{R^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{V}{C^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \hat{\rho} \frac{V^2}{R} \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) \\ = - \frac{R \rho_0 V^2}{C \rho_0 V C} \frac{\partial \hat{p}}{R \partial \hat{z}} - \mu_0 \hat{\mu} \frac{V}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y} \partial \hat{z}} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{R^2}{C^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\rho_0 \hat{\rho} \frac{V^2}{R} \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) = - \frac{\mu_0 V}{C^2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} - \mu_0 \hat{\mu} \frac{V}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y} \partial \hat{z}} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} - \frac{R^2}{C^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z}^2} \right)$$

Divisons les deux membre par $\frac{\mu_0 V}{C^2}$

$$\frac{C}{R} \hat{\rho} R_e \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} - \hat{\mu} \left[\left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y} \partial \hat{z}} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) - \frac{\partial^2 \hat{w}}{R^2 \partial \hat{z}^2} \right]$$

Ou encore

$$\frac{C}{R} R_e \hat{\rho} \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{V}} \hat{w} \right) = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} - \hat{\mu} \left[\left(\frac{C}{R}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{z}} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y} \partial \hat{z}} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) - \frac{\partial^2 \hat{w}}{R^2 \partial \hat{z}^2} \right] \quad (\text{C.11})$$

Dans les applications des SFDB et des palier hydrodynamique, le jeu relatif C/R et de 10^{-3} cela permet, en supposant que chaque terme des équations C.9 - C.11 et de l'ordre de l'unité, de négliger les termes multipliés par $(C/R)^2$:

$$\frac{C}{R} Re \hat{\rho} \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla} \hat{u} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \hat{\mu} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \quad (C.12)$$

$$\left(\frac{C}{R}\right)^3 Re \hat{\rho} \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla} \hat{v} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \quad (C.13)$$

$$\frac{C}{R} Re \hat{\rho} \left(\frac{\omega R}{V} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla} \hat{w} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \hat{\mu} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2} \quad (C.14)$$

Dans la théorie classique de la lubrification hydrodynamique les termes d'inertie sont considéré comme négligeable dans ce cas en revenant aux variables dimensionnelles, on obtient les équations de mouvement suivants :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} = \hat{\mu} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \quad (C.15)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (C.16)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} = \hat{\mu} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2} \quad (C.17)$$

Il est intéressant de remarque pour la suppression des effets d'inertie rend stationnaire le Pb de lubrification hydrodynamique

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (C.18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (C.19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (C.20)$$

Les condition aux limites(condition de non glissement) associées à ces équations sont :

- pour $y = 0$ (surface de coussinet) : $u = 0, w = 0$
- pour $y = h$ (surface de l'arbre) : $u = U_a = \omega R, w = 0$

après deux intégrations par rapport à y , on trouve les profils de vitesse d'écoulement :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + C_{1(x,z)} \rightarrow u_{(x,y,z)} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_{1(x,z)} y + C_{2(x,z)}$$

Détermination des constantes d'intégration C_1 et C_2

$$C_2 = 0$$

$$\omega R = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + C_1 h \rightarrow C_1 = \frac{1}{h} \left(\omega R - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 \right)$$

$$C_1 = \frac{\omega R}{h} - \frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Soit :

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \frac{\omega R}{h} y - \frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \omega R \frac{y}{h} \quad (C.21)$$

Et

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + C_3(x, z)y + C_4(x, z)$$

$$C_4 = 0$$

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} h^2 + C_3 h \rightarrow C_3 = -\frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Soit

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - hy) \quad (C.22)$$

On identifie ces éprissions l'écl du à l'effet de poiseuille induit par les dérivées partielles de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial z}$, et l'écoulement du à l'effet de couette (écoulement de cisaillement) associé à la vitesse tangentielle $U_a = \omega R$

En intégrant l'équation de continuité suivant y , on trouve

$$\int_0^{h(x,z,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy = 0$$

Soit

$$\int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dy + [v]_0^h + \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial w}{\partial z} dy = 0$$

Pour calculer les deux intervalles, on doit utiliser la règle d'intégration de Leibnitz :

$$\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\int_0^{h(x,z,t)} u(x,y,z) dy}_{Q_x} - \underbrace{u(x,h,z)}_{\omega R} \frac{\partial h}{\partial x} + \underbrace{v(h)}_{\frac{\partial h}{\partial t}} - \underbrace{v(0)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\int_0^{h(x,z,t)} w(x,y,z) dy}_{Q_z} - \underbrace{w(x,h,z)}_{=0} \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

Soit

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} - \omega R \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(x, z, t) &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} \\ &= \underbrace{U_a}_{=\omega R} \frac{\partial h}{\partial x} + \underbrace{W_a}_{=0} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned}$$

Soit par conséquent :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{C.23})$$

Ou

$$Q_x = \int_0^h u dy = \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{y^3}{3} - h \frac{y^2}{2} \right) + \omega R \frac{y^2}{2h} \right]_0^h$$

$$\rightarrow Q_x = \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\omega R h}{2} \quad (\text{C.24})$$

$$Q_z = \int_0^h w dy = \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{C.25})$$

En remplaçant (C.24) et (C.25) dans l'équation (C.23), on trouve l'équation de Reynolds incompressible :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\omega R h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = -\frac{\partial h}{\partial t}$$

Ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\omega R}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{C.26})$$

Dans le cas d'un SFDB, l'équation (C.26) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{C.27})$$

Résumé

La recherche accrue d'efficacité des machines tournantes telles que les turbos machines moderne engendre une tendance à l'assouplissement et à l'augmentation des vitesses des rotors et des charges appliquées. Le système mécanique devient ainsi plus susceptible à des problèmes vibratoires aigus du a la présence inévitable de charges dynamique additionnelle résultant en l'occurrence d'un mouvée équilibrage du rotor ou d'avaries pouvant survenir pendant le fonctionnement (balourd résiduelle, mésalignement perte d'ailette ...).

est l'apparition de plages de fonctionnement instables et l'amplification des charges dynamiques transmises au milieu environnant impose l'utilisation de la proche dynamique non linéaire.

Pour remédier à ces problèmes, les constructeur recourent aux organes du suportages fluides, parmi l'équilles on peut citer le palier à film comprimé, traduction du terme anglais squeeze film damper, constitue l'une des solutions techniques les plus intéressantes proposées ces dernières décennies, du fait de la forte capacité d'amortissement et de la relatives simplicité de construction. La conception de ce type d'amortisseur reste toutefois problématique et délicate, à cause de la difficulté de compréhension et de maîtrisent numérique de nombreux phénomènes intervenant dans le comportement hydrodynamique du film amortisseur.

L'étude d'un système mécanique comportant des amortisseurs à film comprimé comprend deux parties principales. La première concerne la modélisation du comportement du film amortisseur. La deuxième consiste à simuler la dynamique de la machine, ce qui nécessite l'emploi d'outils de calcul non linéaire capables de déterminer les réponses transitoires et stationnaires ainsi que d'analyser leur stabilité.

Mots-clés

Palier à film amortisseur, rotor flexible, lubrification hydrodynamique, fluide non newtonien, piézo-viscosité, couple de contrainte, réponse dynamique, dynamique non linéaire, méthode des éléments finis

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Nassim ZERROUNI : étude de l'interaction fluide visqueux-structure d'un palier fluide soumis à des sollicitations temporelles .mémoire de magister. Université de Boumerdes Mai 2009
- [2] Fabiano ASSIS RODRIGUES. Étude de la dynamique non linéaire d'amortisseurs du type squeeze film Thèse de Doctorat .ECL/ UCBL/INSA 2003
- [3] Jean FRÊNE . Butées et paliers hydrodynamiques Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique B 5 320 p26
- [4] M. Lahmar, Cours de tribologie, Master 1.Université de Guelma
- [5] J. Frêne et al. Lubrification hydrodynamique :Paliers et Butées ,ED. Eynolles
- [6] Techniques de l'ingénieur
- [7] Cours de la mécanique des fluides. département de génie mécanique M. Lahmar .Université de Guelma
- [8] Cours de la mécanique des contacts. département de génie mécanique .Université de Guelma
- [9] Cours de la mécanique des milieux continus. département de génie mécanique M.Boukercha .Université de Guelma
- [10] V. K. Stokes, Couple-stresses in fluids, The physics of fluids, 1966, 9, 1709-1715.
- [11] Newmark N. M., A method of computation for structural dynamics, ASCE J. of the Eng. Mech. Division, 85, EM3, 1959.
- [12] Ng C.W. and Pan C.H.T. A Linearized Turbulent Lubrication Theory. Journal of Basic Engineering, 87: p675-688, 1965.
- [13] Ku C. and Tichy J.A. Application of the k-Turbulence Model to the Squeeze Film Damper. Journal of Basic Engineering, 87: p675-688, 1965.
- [14] Szeri A.Z. Some Extensions of the Lubrication Theory of Osborne Reynolds. Journal of Tribology, 109: p21-36, 1987.
- [15] Kundu P.K. Fluid Mechanics. Academic Press, 1990
- [16] San Andres L.A. and Vance J.M. Effects of Fluid Inertia and Turbulence on the Force Coefficients for Squeeze Film Dampers. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 108: p332-339, 1986.

[17] Constantinescu V.N. On the Possibilities of Improving the Accuracy of the Evaluation of Inertia Forces in Laminar and Turbulent Films. Journal of Lubrication Technology, 96: p69-79,1974.

[18] Cours M. Guenfoud Salah, méthodes numérique, Master 1.Université de Guelma

[19] Sekfali Fadia .Comportement dynamique d'un rotor de micro-turbine supporté par des paliers à air tournant à grande vitesse .Université de Guelma mai 2013.

[20] Yousfi Salim – Kadjouh Laakri .étude de l'influence des additifs de viscosité sur le comportement dynamique non linéaire des paliers fluides. Université de Guelma mai 2005.

[21] M. LAHMAR, B. BOU-SAÏD. Nonlinear dynamic response of an unbalanced flexible rotor supported by elastic bearings lubricated with piezo-viscous couple stress fluids. Lubricants. vol 3, pp281-310. **2015** <http://www.mdpi.com/journal/lubricants>

[22] M. Lahmar a , S. Ellagoune a & B. Bou-Saïd. Elastohydrodynamic Lubrication Analysis of a Compliant Journal Bearing Considering Static and Dynamic Deformations of the Bearing Liner. Tribology Transactions . vol 53.pp349-368.2010
<http://www.tandfonline.com/loi/utrb20>