

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 08 Mai 45-Guelma



Faculté des Sciences et de l'Ingénierie
Département de Mathématique

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
MAGISTER en Mathématiques

Option : Mathématiques

Etude d'un Problème de Cauchy Mal Posé avec des Conditions de Dirichlet

Par : MEZIANI Mohamed Seyf-Eddine

Sous la direction : Dr. BOUSSETILA Nadjib

Jury :

Président	Dr. REBBANI Faouzia	Prof	Univ. BM-Annaba
Rapporteur	Dr. BOUSSETILA Nadjib	M.C. A	Univ. 08 Mai 45-Guelma
Examineur	Dr. HITTA Amara	M.C. A	Univ. 08 Mai 45-Guelma
Examineur	Dr. SAADI Samira	M.C. A	Univ. BM-Annaba

— Année 2010 —

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université 08 Mai 45 - Guelma

جامعة 08 ماي 45 - قالمة

Numéro d'ordre :

Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

كلية العلوم و الهندسة

Département de Mathématiques

قسم الرياضيات

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER en Mathématiques

Option : Mathématiques

Étude d'un Problème de Cauchy Mal Posé avec des Conditions de Dirichlet

Par : MEZIANI Mohamed Seyf Eddine

Sous la direction du Docteur BOUSSETILA Nadjib



Soutenu le / / 2010

Devant le jury :

Président	Dr. REBBANI Faouzia	Prof	Univ. BM-Annaba
Rapporteur	Dr. BOUSSETILA Nadjib	MC.A	Univ. 08 Mai 45-Guelma
Examineur	Dr. HITTA Amara	MC.A	Univ. 08 Mai 45-Guelma
Examineur	Dr. SAADI Samira	MC.A	Univ. BM-Annaba

Année universitaire 2009 / 2010

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة مسألة عكسية مولدة بمعادلة زائدية مقرونة بمعطيات Cauchy جزئية، بغية إنشاء الشروط الحدية الناقصة، حيث يتطلب هذا الإجراء إلى حل مسألة معتلة بمفهوم Hadamard.

نقترح في هذه الإشكالية طريقة حل تركز على تعديل طيفي مدعوما بتقريبات تكرارية من نوع Krylov. نقوم بدراسة تحليلية لهذه المقاربة، نبين من خلالها مشروعية المعالجة المقترحة و تقاربها و ذلك بتقدير الخطأ بين الحل الأصلي و الحل التقريبي المعدل، زيادة على ذلك نقترح خوارزمية من أجل محاكاة عددية.

التصنيف الرياضي (MSC 2010) :

35J15, 35J25, 34K30; 31A25, 35R25, 47A52; 46E40, 47A56; 15A16, 15A18; 34A55, 65F50, 65F60.

الكلمات الإستدلالية :

مؤثر تفاضلي زائدي، مسائل Cauchy العكسية المعتلة، طرق التعديل الطيفية، طرق الإسقاط من نوع Krylov .




Résumé

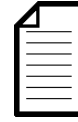
Dans ce travail, on étudie un problème inverse du type « complétion de données » engendré par une équation elliptique : $u_{zz}(z, x) - Au(z, x) = 0$ dans un domaine cylindrique ($0 \leq z \leq z_1$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) avec un opérateur $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ densément défini, auto-adjoint et défini positif, où H est un espace de Hilbert séparable.

Les conditions de Dirichlet sont données sur la face supérieure du cylindre alors qu'il n'y a pas de conditions sur l'autre face. Notre objectif est de reconstruire les données manquantes à partir des mesures internes effectuées sur la solution. Ce problème de Cauchy est mal posé, et donc une procédure de régularisation est nécessaire pour le stabiliser.

En utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur A , on peut expliciter la solution formelle du problème sous la forme d'une série de Fourier dont les coefficients de Fourier sont des quotients de deux fonctions sinus-hyperboliques. On propose dans notre étude une méthode de régularisation basée sur la troncature spectrale, qui nous permet de construire une solution approchée et stable. Ensuite, la solution stabilisée sera projetée sur un sous espace de Krylov engendré par l'opérateur A^{-1} . Cet algorithme nous fournit une méthode pratique et simple pour calculer numériquement la solution stabilisée.

2010 Mathematics Subject Classification : 35J15, 35J25, 34K30; 31A25, 35R25, 47A52; 46E40, 47A56; 15A16, 15A18; 34A55, 65F50, 65F60.

 **Mots clés :** *Problèmes de Cauchy mal posés, problèmes inverses, opérateurs différentiels elliptiques, complétion de données, régularisation, stabilisation, logarithmique convexité, méthodes de projection de Krylov.*




Abstract

In this work, we consider the data completion problem for a Cauchy problem governed by an elliptic equation : $u_{zz}(z, x) - Au(z, x) = 0$ in a cylindrical domain ($0 \leq z \leq z_1$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) with linear densely defined selfadjoint and positive definite operators $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ where H denotes a separable Hilbert space. Cauchy data are given on the upper boundary and the boundary values on the lower boundary are sought from interior measurements. The problem is ill-posed, and for a stable numerical approximation of the solution $u(z, x)$ some regularization technique has to be applied.

The formal solution is written as a quotient of two hyperbolic sine function in terms of the two-dimensional elliptic operator A (via its spectral eigenfunction expansion), and it is shown that the solution is stabilized (regularized) if the large eigenvalues are cut off. We suggest a numerical procedure based on the rational Krylov method, where the solution is projected onto a subspace generated using the operator A^{-1} . This algorithm provides us a practical and simple method to calculate numerically the stabilized solution.

2010 Mathematics Subject Classification : 35J15, 35J25, 34K30; 31A25, 35R25, 47A52; 46E40, 47A56; 15A16, 15A18; 34A55, 65F50, 65F60.

 **Key words :** *Ill-posed Cauchy problems, inverse problems, elliptic partial differential equations, stabilization, regularization, logarithmic convexity, data completion, Krylov subspace method.*

Remerciements



Nes premiers remerciements vont à monsieur **BOUSSETILA Nadjib** qui a accepté de me prendre sous sa direction. Sans ses conseils précieux, sa grande disponibilité et sa patience, ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Je le prie de croire à l'expression de ma très profonde gratitude.



Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait le Professeur **REBBANI Faouzia** en acceptant de présider mon jury de soutenance et d'examiner mon mémoire.



Je tiens à remercier vivement les Docteurs **HITTA Amara** et **SAADI Samira** qui ont accepté de faire partie du jury.



Je suis très reconnaissant au Professeur **LARS ELDÉN** de l'université Linköping (Suède), pour sa générosité scientifique et l'aide qui m' a accordée.

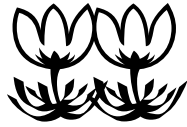


Mes sincères remerciements à tous mes enseignants et les responsables de l'école doctorale, qui m'ont donné la chance d'approfondir mes connaissances et de m'orienter vers plusieurs axes de recherches.

Je remercie également tous les membres du département de Mathématiques de l'université de Guelma, pour toute l'aide qui m'a été accordée.




Dedication




*To my parents and my family, for their
love, support, and encouragement.*

 *Mohamed Seyf Eddine*

 *Un mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes ; un meilleur mathématicien est celui qui peut voir des analogies entre les démonstrations. Les très bons mathématiciens sont ceux qui peuvent déceler des analogies entre les théories. Mais on peut supposer que le meilleur des mathématiciens, est celui qui peut voir des analogies entre les analogies.*


Stefan Banach



 *Dans les mathématiques vous ne comprenez pas des choses. Vous vous habituez juste à elles.*

John Von Neumann



 *Dans la mesure où les lois des mathématiques se rapportent à la réalité, elles ne sont pas sûres ; et jusque elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité.*

Albert Einstein



Mémoire de Magister

Etude d'un Problème de Cauchy Mal Posé avec des Conditions de Dirichlet

© 2010 *MEZIANI Mohamed Seyf Eddine*, Email: mmsemath@gmail.com

Sous la direction du Docteur *BOUSSETILA Nadjib*

Département de Mathématiques, Univ. Guelma

W-G. IIPP, Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Univ. BM-Annaba

Email: n.boussetila@gmail.com

Année universitaire 2009 / 2010



This document is typeset using \LaTeX , MikTeX V8. compiler.

Font : garamond, 12pt.

Mathematics : `package[urw-garamond]{mathdesign}`.

Class : niceLaTeX-Thesis.cls, © *Boussetila Nadjib* (2009).

Meziani Mohamed Seyf Eddine

Table des matières

Table des matières	i
§ Introduction	1
0.1 Problématique	1
0.2 Contenu du mémoire	3
1 Rappels et notations	5
1.1 Éléments de théorie spectrale	5
1.1.1 Opérateurs linéaires	5
1.1.2 Opérateurs bornés	6
1.1.3 Opérateurs non-bornés	7
1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné	9
1.2 Théorie de Riesz-Fredholm	10
1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts	10
1.2.2 Famille spectrale et résolution de l'identité	11
1.2.2.1 Fonctions d'un opérateur auto-adjoint	13
1.3 Problèmes inverses	14
1.3.1 Exemples de problèmes mal posés	16
1.3.2 Outils d'analyse des problèmes mal posés	18
1.3.3 Méthodes de régularisation	20
1.3.4 Convexité logarithmique	23
1.4 Méthodes de projection de Krylov	24
1.4.1 Sous espaces de Krylov	25
1.4.2 Approximation de $f(A)b$ par la méthode de Krylov	26
1.4.3 Algorithme d'Arnoldi	26
1.4.4 Méthode de Lanczos	28

2	Problème elliptique à données manquantes	30
2.1	Problème direct	30
2.2	Formulation du problème inverse	32
2.3	Propriétés spectrales et topologiques de l'opérateur K	34
3	Stabilisation et approximation	37
3.1	Stabilité conditionnelle	37
3.2	Régularisation par troncature spectrale	41
4	Approximation numérique du problème par La méthode de Krylov	44
4.1	Discrétisation et projection de la solution	44
4.1.1	Stratégie de discrétisation	44
4.1.1.1	Accélération de la convergence par la méthode Shift-Inverted . . .	50
4.2	Estimation d'erreur discrete	51
4.3	Exécution	53
	Conclusion et perspectives	55
	Bibliographie	56

§ Introduction

0.1 Problématique

En 1923, le mathématicien français J. HADAMARD écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique¹. Cet ouvrage fût le point de départ au développement du concept de problème bien posé en physique mathématique. Il s'agit d'un problème dont *la solution existe, elle est unique et elle dépend continûment des données* (stabilité). Dans ce même livre HADAMARD laissait entendre (et c'était aussi une opinion partagée avec I.G. PETROVSKY²) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique.



La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes pratiques est reconnu et manifeste dans une classe de problèmes très larges, dite "Problèmes inverses"³, et motive de nombreuses recherches en mathématiques.






Les problèmes inverses est un domaine trop vaste pour que nous puissions en donner un exposé exhaustif. Cette thématique a connu un essor considérable ces dernières décennies, parallèlement au développement de techniques numériques et de moyens de calcul permettant leur résolution. On peut les classer en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues, et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en pratique. Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique.

1. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in linear PDEs*, Yale University Press, New Haven (1923).

2. I.G. PETROVSKY, *Lecture on Partial Differential Equations*, New York : International Publishers (1954).

3. *Un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.*



Dans ce travail, on étudie un problème inverse du type « complétion de données » ; Il s'agit de reconstituer une donnée au bord, inaccessible à la mesure, à partir d'une mesure interne. Le modèle mathématique est donné par un problème de Cauchy du type elliptique à données manquantes, occupant un domaine cylindrique. Ce problème est qualifié de mal posé au sens d' Hadamard et de nature extrêmement instable ; les solutions, lorsqu'elles existent, ne dépendent pas de manière continue des données, de sorte qu'une petite erreur sur ces dernières peut induire des erreurs importantes sur les solutions calculées.





Les problèmes inverses elliptiques intervenant dans la reconstitution de sources et/ou de conditions aux limites sur le bord ou une partie du bord, ont été largement étudiés et expérimentés dans plusieurs applications : la détection des fissures, le contrôle non destructif, la corrosion, l'électro-cardiologie, et d'autres domaines pratiques. Pour plus de détails, on peut consulter   [7, 51, 114, 135, 195]  [13, 36, 50, 62, 87, 108], ainsi que les références qui y sont citées.



Lorsqu'il s'agit d'identifier ou de calculer une grandeur physique à partir des observations (mesures), on est amené souvent à inverser un opérateur (la résolvante qui donne la solution du problème direct). Cette inversion, qui est souvent mal posée, nécessite un traitement particulier des instabilités, par des techniques dites de régularisation qui consistent à perturber légèrement le problème, ou d'éliminer les hautes fréquences responsables de cette instabilité, de manière de rendre le problème en question bien posé et numériquement réalisable.








Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de régularisation ont été utilisées pour résoudre certains problèmes de Cauchy avec des données sur-déterminées. Parmi elles, on cite :



 La méthode *itérative alternative* initialement proposée par KOZLOV et al.  ¹⁹⁹² [119] . Cette méthode consiste à résoudre une suite de problèmes elliptiques bien posés dont la solution converge, pour des données compatibles, vers la solution du problème original.

 La méthode de *quasi-réversibilité* initialement introduite par LATTÈS & LIONS  ¹⁹⁶⁷ [126] consiste à transformer le problème de Cauchy mal posé d'ordre 2 en un problème bien posé d'ordre plus élevé (d'ordre 4) en introduisant un certain paramètre (terme de correction), la convergence au problème d'origine est assurée quand ce paramètre tend vers 0. Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre quelques problèmes inverses elliptiques, notamment KLIBANOV & SANTOSA  ¹⁹⁹² [116], BOURGEOIS  ²⁰⁰⁵ [28, 29]. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux

 [126],  [41].

 La régularisation par les conditions non locales (*A.B.C.-method*⁴ ou *Q.B.V.-method*⁵) introduite par ABDULKERIMOV  1977 [1] et qui a été ensuite développée récemment par HAO et al.  2009 [93]. Le principe de cette approche consiste à perturber légèrement le problème original par un problème nonlocal bien posé, sans modifier l'opérateur différentiel. Dans le livre  [169], on trouve un bon exposé accompagné d'une série d'expérimentations justifiant l'efficacité de cette méthode.


Dans le même contexte, d'autres approches d'aspect numérique ont été développées pour améliorer le calcul des solutions de certains problèmes elliptiques à données manquantes, par exemple : ANDRIEUX et al  2006 [12]), ELDEN & SIMONCINI 2009 [61].


L'étude intensive des problèmes inverses est dictée par la richesse du sujet aussi bien sur l'aspect théorique, que sur l'aspect pratique (cf.  [8],  [178]). Toute problématique directe génère une variété de problèmes inverses, qui donne naissance à des questions théoriques et des défis numériques, ce qui souligne l'intérêt et l'actualité du sujet que nous traitons dans ce mémoire.

0.2 Contenu du mémoire


Le présent travail porte sur l'étude d'une classe de problèmes inverses elliptiques du type « complétion de données ». Les ingrédients mathématiques utilisés est un mélange entre la théorie spectrale et l'analyse numérique matricielle.


Le mémoire est composé de quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré au vocabulaire lié à cette thématique, et les autres constituent la contribution principale de la problématique étudiée dans ce projet de recherche.

 *Dans le Chapitre 1, on rappelle quelques résultats d'analyse fonctionnelle, ainsi que les outils d'analyse des problèmes mal posés. Un aperçu non exhaustif sur les méthodes de Krylov est donné pour faciliter la lecture et comprendre l'intérêt de ces approches dans l'approximation numériques des problèmes inverses.*


 *Le chapitre 2 traite un problème elliptique à données manquantes, et le cadre fonctionnel convenable pour ce type de problèmes.*

4. Auxiliary Boundary Conditions Method
5. Quasi Boundary Value Method

 Le chapitre 3 est consacré à l'analyse théorique du problème. En premier lieu, on établit un résultat de convexité logarithmique, par lequel on démontre que notre problème est conditionnellement stable sur une classe de correction maximale, qu'on donne sa caractérisation. Ensuite, moyennant une troncature spectrale, la solution stabilisée sera tronquée pour construire une approximation stable du problème original.

 Quant au chapitre 4, il traite la question de l'approximation numérique de la solution stabilisée dans le cas discret. Cette dernière peut être calculée numériquement grâce à une procédure de projection sur un espace de Krylov bien approprié. On justifie théoriquement la convergence de cette approximation projetée, et on donne des estimations d'erreur qui vont préciser le critère d'arrêt.



Motivation. On note ici que les problèmes inverses du type complétion de données à partir des mesures internes⁶, se distinguent par la rareté des résultats, et les études qui ont été faites dans cette direction, traitent des problèmes occupant des domaines simples dans \mathbb{R}^2 (cf.  [109, 153, 160, 132, 193]), ce qui nous a motivé d'aborder et d'explorer cet axe de recherche⁷.



6. En géologie, ces mesures sont connues sous le nom : mesures du puits (borehole measurements).

7.  Les résultats exposés dans le chapitre 3 sont originaux.

Chapitre 1



Rappels et notations

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

On se place dans un un cadre hilbertien $(H_1 \longrightarrow H_2)$, où H_i est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , muni de la norme $|\cdot|_i$ et le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_i$, ($i = 1, 2$).

1.1 Éléments de théorie spectrale



Références

- H. Brezis ; Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson (1993).
 - R. Dautray, J.-L. Lions ; Analyse mathématique et calcul numérique. Tome 5 (spectre des opérateurs), Edt. Masson, (1988). [§3. page 136-180].
 - E.B. Davies ; Linear Operator and their Spectra, Cambridge University Press (2007).
 - I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek ; Basic Classes of Linear Operators, Birkhäuser (2003).
 - D. Huet ; Décomposition Spectrale et Opérateurs, PUF (1976).
 - P. Lévy-Bruhl ; Introduction à la Théorie Spectrale : Cours et Exercices Corrigés, Dunod (2003).
-

1.1.1 Opérateurs linéaires

De manière générale, un opérateur linéaire est une application $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ linéaire, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A , qui est un sous-espace vectoriel de H_1 ,

que l'on suppose en général dense dans H_1 . L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) = H_1 \longrightarrow H_2$ est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \{ |Au|_{H_2}, u \in \mathcal{D}(A), |u|_{H_1} = 1 \}$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $\mathcal{D}(A)$, et lorsque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H_1 , A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur H_1 .

• Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $H_1 \times H_2$ défini par $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), v \in \mathcal{D}(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{b \in \mathcal{D}(A), Ab = 0\} \text{ (noyau de } A),$$

$$\mathbf{R}(A) = \{b_2 = Ab_1, b_1 \in \mathcal{D}(A)\} \text{ (image de } A).$$

1.1.2 Opérateurs bornés

On note $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ (resp. $\mathcal{L}(H_1)$) l'espace vectoriel des *opérateurs linéaires continus* de H_1 dans H_2 (resp. des *endomorphismes continus* de H_1) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \quad \|B\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{|Bu|_2}{|u|_1}.$$

Définition 1.1.1. On dit qu'une application linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est *inversible* ssi il existe une application $S' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ telle que

$$S' \circ S = I_{H_1}, \quad S \circ S' = I_{H_2}.$$

L'application S' si elle existe est unique. On notera $S' = S^{-1}$ et

$$\text{Inv}(H_1, H_2) := \{S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), S \text{ inversible}\}.$$

Théorème 1.1.1. [Théorème des isomorphismes de Banach]

Toute bijection linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible.

Définition 1.1.2. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On appelle *ensemble résolvant* de A , l'ensemble

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; A_\lambda = (\lambda I - A) \text{ est inversible } (\iff \text{bijectif}) \right\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de A et sera noté $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

On appelle *rayon spectral* (noté $\text{spr}(A)$) la borne supérieure du spectre en module, i.e.,

$$\text{spr}(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

► Le spectre d'un opérateur borné est un compact non vide.

Le spectre ponctuel de A (noté $\sigma_p(A)$) est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que A_λ soit non injectif :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \iff \mathbf{N}(A_\lambda) \neq \{0\}.$$

Un élément $\lambda \in \sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A , il lui correspond un $0 \neq h \in H$ tel que $Ah = \lambda h$ que l'on appelle vecteur propre correspondant à λ .

Définition et Proposition 1.1.1. Soit $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un unique opérateur $S^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, appelé adjoint de S , qui vérifie la relation suivante :

$$(Sh_1, h_2)_2 = (h_1, S^*h_2)_1, \quad \forall h_1 \in H_1, \quad \forall h_2 \in H_2.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\|S\| = \|S^*\|, \quad S^{**} = (S^*)^* = S.$$

Si S est bijectif (\implies inversible), alors S^* l'est aussi, et $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$.

Définition 1.1.3. Soit H un espace de Hilbert. On dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est *auto-adjoint* si $A = A^*$.

$$A = A^* \iff (Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H.$$

1.1.3 Opérateurs non-bornés

Définition 1.1.4. On dit qu'un opérateur A est fermée si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans H_1 et $Au_n \longrightarrow v$ dans H_2 , alors $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v = Au$.

► L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe $\|u\|_G := \|u\|_{H_1} + \|Au\|_{H_2}$ dans H_1 .

Théorème 1.1.2. [Théorème du graphe fermé] *Si l'opérateur fermé A est défini sur tout l'espace H_1 , alors A est borné*

$$(A \text{ fermé et } \mathcal{D}(A) = H_1 \implies A \text{ borné}).$$

Définition et Proposition 1.1.2. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné A^* adjoint de l'opérateur A , comme suit :

$$A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset H_2 \longrightarrow H_1$$

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{ v \in H_2 : \exists c > 0 \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c |u|_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \right\}.$$

Dans ce cas la fonctionnelle $u \longmapsto g(u) = \langle v, Au \rangle$ elle se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire $f : H_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(u)| \leq c |u|_{H_1}$, $\forall u \in H_1$. Par suite $f \in H'_1 \simeq H_1$. On a par conséquent la relation fondamentale qui lie A et A^*

$$\langle v, Au \rangle_{H_2} = \langle A^*v, u \rangle_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

► Si $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur non-borné à domaine dense, alors A^* est fermé.

Définition 1.1.5. On dit qu'un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est symétrique lorsque

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(A), \quad (Au, v) = (u, Av)$$

Définition 1.1.6. L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, i.e.,

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \text{ et } (v, Au) = (Av, u), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 1.1.3. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur fermé symétrique. A est auto-adjoint si et seulement si $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Théorème 1.1.4. [Caractérisation des opérateurs à image fermé]

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathbf{R}(A)$ est fermé, (ii) $\mathbf{R}(A^*)$ est fermé, (iii) $\mathbf{R}(A) = \mathbf{N}(A^*)^\perp$, (iv) $\mathbf{R}(A^*) = \mathbf{N}(A)^\perp$.

Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

Théorème 1.1.5. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) A est surjectif, i.e., $\mathbf{R}(A) = H_2$,
 (b) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k|A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

- (c) $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ et $\mathbf{R}(A^*)$ est fermé.

Corollaire 1.1.1. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_2$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur H_2 si et seulement s'il existe deux constantes m_1 et m_2 telles que

$$|u| \leq m_1|Au|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

$$|v| \leq m_2|A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné que l'on suppose fermé^{1 2 3} et à domaine dense.

Définition 1.1.7. On appelle *ensemble résolvant* de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de A et sera noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

- On note que si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e., $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Cet opérateur est appelé la *résolvante* de A .
- L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application $\rho(A) \ni \lambda \longmapsto R(\lambda; A)$ est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante* :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1; A)R(\lambda_2; A).$$

- Le spectre de A est donc un fermé de \mathbb{C} , et si de plus l'opérateur A est borné, alors $\sigma(A)$ est un compact non vide.

1. L'hypothèse de fermeture est nécessaire pour faire une théorie spectrale raisonnable.
 2. Si A n'est pas fermé, alors $\rho(A) = \emptyset$.
 3. Si $A = A^*$, alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Examinons à présent de plus près la structure du spectre.

- Le premier sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel* :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un élément λ de $\sigma_p(A)$ est dit *valeur propre* de A , il lui correspond un $0 \neq \vartheta \in \mathcal{D}(A)$ tel que $A_\lambda \vartheta = 0$, que l'on appelle *vecteur propre* (fonction propre quand H est un espace de fonctions) correspondant à λ .

- Si $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ donc A_λ est injectif mais non surjectif. Deux cas se présentent :
 - Si $\mathbf{R}(A_\lambda)$ n'est pas dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre *résiduel* de A .
 - Si $\mathbf{R}(A_\lambda)$ est dense, on dit alors que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre *continu* de A .

1.2 Théorie de Riesz-Fredholm

1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Définition 1.2.1. On dit qu'un opérateur $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est *compact* si $K(B_{H_1}(0, 1))$ est relativement compact pour la topologie forte. On désigne par $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_1 dans H_2 et on pose $\mathcal{K}(H_1, H_1) = \mathcal{K}(H_1)$.

- La compacité d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est caractérisée comme suit :

$$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2) \iff \forall (x_n) \subset H_1, x_n \rightarrow 0 \text{ (faiblement)} \implies T x_n \rightarrow 0 \text{ (fortement)}.$$

- Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $S_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{K}(F, G)$ (resp. $S_1 \in \mathcal{K}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{L}(F, G)$), alors $S_2 S_1 \in \mathcal{K}(E, G)$.

- [Théorème de Shauder] Si K est compact, alors K^* est compact. Et réciproquement.

Théorème 1.2.1. Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ avec $\dim(H) = \infty$. Alors on a :

- $0 \in \sigma(K)$,
- $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$,
- l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(K) = \{0\}$,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est fini,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Théorème 1.2.2. *On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T :*

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad x_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Tx = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k.$$

1.2.2 Famille spectrale et résolution de l'identité

- Version discrète

Définition 1.2.2. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné. Alors A est dit à *résolvante compacte* si

$$\forall \lambda \in \rho(A), \quad R(\lambda; A) \in \mathcal{K}(H).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1.2.3. *Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est à résolvante compacte ssi il existe $\mu \in \rho(A)$ tel que $R(\mu; A) \in \mathcal{K}(H)$.*

Théorème 1.2.4. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint. Alors*

- (1) $\sigma_r(A) = \emptyset$,
- (2) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$,
- (3) $A \geq \theta \iff \sigma(A) \subset [\theta, \infty[$.

Théorème 1.2.5. *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et à résolvante compacte. Alors A est diagonalisable, i.e., il existe une base hilbertienne dans H , $(e_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{D}(A)$, et une suite de réels $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ telles que*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \longrightarrow +\infty, \quad Ae_m = \lambda_m e_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

De plus, les valeurs propres (λ_m) admettent la caractérisation (formule de min-max de COURANT-FISHER) suivante :

$$\lambda_m = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(\mathcal{D}(A))} \max_{0 \neq u \in V_m} \frac{\langle Au, u \rangle}{|u|^2},$$

$$\lambda_m = \max_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(H)} \min_{0 \neq u \in V_{m-1}^\perp \cap \mathcal{D}(A)} \frac{\langle Au, u \rangle}{|u|^2},$$

où

$$\mathcal{V}_m(\mathcal{D}(A)) := \{V \text{ s.e.v. de } \mathcal{D}(A) \text{ tq. } \dim(V) = m\},$$

$$\mathcal{V}_{m-1}(H) := \{V \text{ s.e.v. de } H \text{ tq. } \dim(V) = m - 1\}.$$

Remarque 1.2.1. Si $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur auto-adjoint avec $A \geq \theta > 0 \implies 0 \in \varrho(A)$, et l'injection $H^1 := (D(A), |\cdot|_G) \hookrightarrow H$ est compacte, alors A est à résolvante compacte et donc diagonalisable.

- **Version continue**

Définition 1.2.3. Une famille $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de projections orthogonales dans H est appelée *famille spectrale* ou encore *résolution de l'identité* si elle satisfait aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad E_\lambda E_\mu = E_{\inf(\lambda, \mu)}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ (ii) \quad E_{-\infty} = 0, \quad E_{+\infty} = I, \\ \text{où } E_{-\infty} b = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda b, \quad E_{+\infty} b = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda b, \quad b \in H, \\ (iii) \quad E_{\lambda+0} = E_\lambda \text{ où } E_{\lambda+0} b = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} E_{\lambda+\varepsilon} b, \quad b \in H. \end{array} \right.$$

Les limites sont prises au sens de la norme de H .

Théorème 1.2.6. Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur auto-adjoint dans H . Alors il existe une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E_\lambda x, y), \quad Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x.$$

On note symboliquement $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$.

Théorème 1.2.7. Soit $\lambda \longmapsto f(\lambda)$ une fonction continue à valeurs réelles. Soit $\mathcal{D} \subset H$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ b \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda b|^2 < \infty \right\}.$$

Alors \mathcal{D} est dense dans H et on définit un opérateur auto-adjoint S dans H par :

$$(Sx, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E_\lambda x, y), \quad x \in \mathcal{D}, y \in H,$$

de domaine $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}$.

1.2.2.1 Fonctions d'un opérateur auto-adjoint

Soit A un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert H , $A = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$, $\lambda_0 = \inf \sigma(A) > 0$, sa décomposition spectrale.

Définition 1.2.4. On définit :

- Les puissances de A .

$$A^r = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^r dE_\lambda, \quad r \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathcal{D}(A^r) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2r} d|E_\lambda b|^2 < \infty.$$

On note ici, que pour tout $r \leq 0$, $A^r \in \mathcal{L}(H)$, et si $r = 0$, $A^0 = I$.

Pour tout $r \geq 0$ et pour tout $b \in \mathcal{D}(A^r)$, on a $(A^r b, b) \geq \lambda_0^r |b|^2$.

Pour tout $r \geq 0$, $\mathcal{D}(A^r)$ muni de la norme $|b|_r^2 = |A^r b|^2$, $b \in \mathcal{D}(A^r)$, est un espace de Hilbert.

Si $0 \leq r_1 \leq r_2$, $\mathcal{D}(A^{r_2}) \hookrightarrow \mathcal{D}(A^{r_1})$ et $\mathcal{D}(A^{r_2})$ est dense dans $\mathcal{D}(A^{r_1})$.

- $f(A)$ pour une fonction f continue sur \mathbb{R} .

$$f(A) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda, \quad b \in \mathcal{D}(f(A)) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda b|^2 < \infty.$$

1.3 Problèmes inverses



- K.A. Ames and B. Straughan ; Non-Standard and Improperly Posed Problems, Academic Press (1997).
- A. Ben-Israel and N.E. Greville Thomas ; Generalized inverses, Springer-Verlag (2003).
- H.W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer ; Regularization of Inverse Problems, Kluwer Academic (2000).
- J.N. Flavin and S. Rionero ; Qualitative Estimates for Partial Differential Equations, CRC Press, Boca Raton (1995).
- G.B. Folland ; Introduction To Partial Differential Equations, Princeton University Press (1995).
- C.W. Groetsch ; The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind, Pitman, Boston (1984).
- P.C. Hansen ; Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems. Numerical Aspects of Linear Inversion, SIAM (1987).
- M.T. Nair ; Linear Operator Equations : Approximation and Regularization, World Scientific (2009).
- A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky and I.A. Vasin ; Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics, p. cm. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 222, Marcel Dekker (2000).
- V. Isakov ; Inverse Problems for Partial Differential Equations, Springer-Verlag (2006).
- N.N. Tarkhanov ; The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations, Mathematical Topics vol 7, Berlin-Akademie (1995).
- A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich ; Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics, Walter de Gruyter. Berlin. New York (2007).

□ Problèmes directs en EDP

Étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on s'intéresse aux solutions u :

$\Omega \times [0, \infty[\ni (x, t) \longrightarrow u(x, t) \in E$ de

$$\begin{cases} u_t + F(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1} u, \dots, \partial_{x_p}^{\alpha_p} u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \{B_i\}_{i=1}^q u = g_i, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

□ Problèmes inverses en EDP

A partir d'une connaissance partielle de la solution u de l'EDP (mesures internes, mesures frontières), retrouver :

- $f, g_1, \dots, g_q \longrightarrow$ Identification de sources.
- $u_0 \longrightarrow$ Identification de données initiales.
- $F \longrightarrow$ Identification de coefficients.
- $\Omega \longrightarrow$ Identification géométrique.

► Toute problématique directe génère une famille de problèmes inverses.

On peut classer les problèmes inverses en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues, et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en pratique. Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif fixé est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique.

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé⁴.

□ Formulation abstraite

On peut toujours écrire un problème inverse sous une formulation vectorielle abstraite (input-output).

Définition 1.3.1. [Hadamard 1923] Soient X, Y deux espaces de Banach, et $A : X \supseteq D(A) \rightarrow Y$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse $Ax = y$ est *bien posé* au sens de HADAMARD si



Existence : Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $Ax = y$.

Unicité : Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$.

Stabilité : La solution x dépend continûment de la donnée y .

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit *mal posé*. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

Remarque 1.3.1. La définition donnée par Hadamard est très contraignante dans la pratique. Il faut donc relaxer la définition d'un problème bien posé.

4. Alors que les mêmes causes provoquent les mêmes effets, des effets identiques peuvent avoir de multiples causes : les problèmes inverses sont mal posés.

Définition 1.3.2. [Lavrentiev 1959] (**Stabilité conditionnelle**) Soit $A : X \supseteq D(A) \longrightarrow Y$ un opérateur fermé, densément défini. On dit que le problème $Ax = y$ est **conditionnellement stable** (ou **correct** au sens de TIKHONOV) sur $M \subset \mathcal{D}(A)$ s'il existe une fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en } 0 \text{ avec } \omega(0) = 0,$$

telle que l'on ait

$$\|x_2 - x_1\| \leq \omega(\|Ax_2 - Ax_1\|), \quad \forall x_2, x_1 \in M.$$

L'ensemble M est appelée ensemble des contraintes (ou ensemble des informations a priori). L'appartenance de u à M signifie certaine régularité ou certaine bornitude vérifiée par la solution u .

1.3.1 Exemples de problèmes mal posés

Exemple 1.3.1. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. On vérifie aisément que $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh(y/\varepsilon) \sin(x/\varepsilon)$ est une solution du problème (1.3.1). On remarque que $(\varphi_\varepsilon \longrightarrow 0, \varepsilon \longrightarrow 0)$ mais $(u_\varepsilon(x, y) \longrightarrow \infty, \varepsilon \longrightarrow 0)$ pour tout $x > 0$ fixé. Ce qui prouve que les solutions de (1.3.1) ne dépendent pas continûment des données initiales.

Exemple 1.3.2. Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur. Trouver $u(x, 0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température $u(x, t)$ vérifié :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (BCP)$$

où $\psi \in L_2(0, \pi)$ est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (BCP) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

où ψ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de ψ :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx) dx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit $\varphi(x) = u_0(x, 0)$ la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (BCP) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} e_k(x).$$

On remarque que $\|\psi_k - \psi\| = \frac{1}{k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$ mais $\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = \frac{1}{k} e^{k^2 T} \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow +\infty$. On voit très clair que le problème (BCP) est instable donc mal posé. C'est pour cela, qu'on dit que les phénomènes de la chaleur sont **irréversibles**.

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initial $u(x, 0) = \varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \varphi_n e_n(x) = \int_0^\pi \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx) \sin(n\xi) \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Ainsi, u est solution du problème (BCP) ssi φ satisfait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\mathcal{K} \varphi = \psi, \quad u(x, T) = \int_0^\pi K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

où $K(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \sin(nx) \sin(n\xi)$.

L'opérateur intégral \mathcal{K} est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où \mathcal{K}^{-1} n'est pas borné. Ce qui montre le caractère mal posé du problème (BCP).

Exemple 1.3.3. Equation hyperbolique avec conditions de Dirichlet. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \quad u(T) = \psi, \end{cases} \quad (HCP)$$

où φ, ψ sont des fonctions données dans H , et $A : \mathcal{D}(A) : H \longrightarrow H$ tel que $A = A^*$ et $A \geq \delta > 0$.

Si $\lambda_k = (k\pi)^2/T^2$, $k = 1, 2, \dots$, ne sont pas des valeurs propres de A , alors l'opérateur $\left(\sin(T\sqrt{A}) \right)$ est injectif, et la solution formelle du problème (HCP) est donnée par :


$$u(t) = \sin((T-t)\sqrt{A}) \left(\sin(T\sqrt{A}) \right)^{-1} \psi + \sin(t\sqrt{A}) \left(\sin(T\sqrt{A}) \right)^{-1} \varphi.$$

Inversement, si $\{\lambda_k = (k\pi)^2/T^2, k = 1, 2, \dots\} \cap \sigma_p(A) \neq \emptyset$, alors la solution du problème (HCP) **n'est pas unique**. Cependant, le problème (HCP) est mal posé au sens d'HADAMARD dans les deux cas : les valeurs $\lambda_k = (k\pi/T)^2$, $k = 1, 2, \dots$, peuvent être proches des valeurs propres de A :

$$[\delta, +\infty[\ni \lambda \longmapsto \frac{1}{\sin(T\sqrt{\lambda})} \text{ n'est pas bornée au voisinage des } \lambda_k.$$

► On remarque d'après les exemples donnés, qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

1 La non unicité. Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité.

2 L'instabilité. Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique. Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergeant et stable quel que soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on régularise par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de mal position (Pour une bonne référence sur les méthodes de régularisation, on cite le livre de H.W. ENGEL  [62]).

1.3.2 Outils d'analyse des problèmes mal posés


Dans l'étude des équations de la forme :

$$B : D(B) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2, u \longmapsto Bu = v,$$

la fermeture de $\mathbf{R}(B)$ est une propriété cruciale, pour que l'inverse de B soit borné. Le Théorème de Banach nous fournit une caractérisation topologique sur cette question :

Théorème 1.3.1. [Théorème de Banach sur l'inversion bornée] *On suppose que B est injectif. Alors $B^{-1} : \mathbf{R}(B) \longrightarrow H_1$ est borné ssi $\mathbf{R}(B)$ est fermée.*

Dans des situations pratiques, la vérification de la fermeture de l'image est souvent une tâche très difficile, et en général, on n'a pas beaucoup d'outils pour étudier cette question. Si la carte spectrale de l'opérateur est bien connue, cette information peut être exploitée pour étudier la fermeture de son image. On a dans cette direction la caractérisation spectrale suivante :

Théorème 1.3.2. (cf. KULKARNI et al^{2000, 20008}  [122, 123]) Soit $B : D(B) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur fermé densément défini. Alors $\mathbf{R}(B)$ est fermée ssi il existe $r > 0$ tel que $\sigma(B^*B) \subseteq \{0\} \cup [r, +\infty[$. Si de plus, $H_1 = H_2$ et $B = B^*$, alors $\mathbf{R}(B)$ est fermée ssi 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(T)$.

• Considérons maintenant un opérateur compact $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, où H_1, H_2 sont deux espaces de Hilbert séparables. Une des approches les plus pratiques pour étudier le problème inverse $Th_1 = h_2$, consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières (SVD)⁵ de l'opérateur T . Cette représentation propose des bases pour les espaces de Hilbert H_1 et H_2 permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.


Définition 1.3.3. Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. On appelle valeur singulière de l'opérateur T , le réel positif $s = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur $K = T^*T : H_1 \longrightarrow H_1$.

Théorème 1.3.3. [Décomposition en valeurs singulières (SVD)] Soit $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ et Pr_0 la projection orthogonale sur $\mathbf{N}(T)$. Alors il existe une suite de valeurs singulières (s_n) et deux systèmes orthonormés $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_1$, $\{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset H_2$ tels que :

1. (s_n) est décroissante, $s_n \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$.
2. $T\varphi_k = s_k\psi_k, \quad T^*\psi_k = s_k\varphi_k$.
3. $\forall h \in H_1, \quad h = \sum_{k \geq 1} (h, \varphi_k)\varphi_k + \text{Pr}_0 h$.
4. $\forall h \in H_1, \quad Th = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \varphi_k)\psi_k$.
5. $\forall \tilde{h} \in H_2, \quad T^*\tilde{h} = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \psi_k)\varphi_k$.

Le système $\{(s_k; \varphi_k, \psi_k)\}_{k \geq 1}$ est appelé le **système singulier** de T .

La famille (φ_n) est une base hilbertienne de $\mathbf{N}(T)^\perp$, la famille (ψ_n) est une base hilbertienne de $\overline{\mathbf{R}(T)}$.

Remarque 1.3.2. Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le caractère mal posé d'un problème donné (cf.  [62]).

5. La notion de *valeurs singulières* généralise la notion de valeurs propres liée aux opérateurs auto-adjoints.

Théorème 1.3.4. [Théorème de PICARD]

Soit $K \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ un opérateur compact, et $\{(\sigma_n, \varphi_n, \psi_n), n \in \mathbb{N}\}$ son système singulier. Alors le problème :

$$Kf = g$$

est résoluble ssi

$$g \in \mathbf{N}(K^*)^\perp = \overline{\mathbf{R}(K)} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, la solution est donnée par la formule :


$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n} \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + f_0, \quad f_0 \in \mathbf{N}(K).$$

► Afin de proposer une stratégie de régularisation efficace, on doit mesurer tout d'abord la complexité du problème posé. En général, on ne dispose pas d'un cadre théorique permettant de donner des réponses à ce type de questions, mais dans des cas particuliers, on a des critères qui caractérisent que tels problèmes sont fortement mal posés ou faiblement mal posés.


► Pour les opérateurs compacts, on utilise le critère suivant :

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables, $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, et soit le problème inverse :

$$T : H_1 \longrightarrow H_2, \quad u \longrightarrow Tu = v. \quad (E)$$

Définition 1.3.4. (cf. ENGEL  [62]) On dit que le problème (E) est *faiblement* mal posé (resp. *fortement* mal posé), si les valeurs singulières s_n de $K = T^*T$ sont équivalentes à $\frac{C}{n^p}$ (resp. Ce^{-n^p}), où C et p sont des constantes positives.

1.3.3 Méthodes de régularisation

La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à TIKHONOV  [181], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (*quasi-solution, solution approchée, ...*), de façon que la « solution régularisée » obtenue par « inversion régularisée » dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre « proche dans un sens » du premier et qui est bien posé.

Considérons un opérateur inverse $Kh_1 = h_2$ où $K : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur compact injectif.⁶ On suppose que $h_2 \in \mathbf{R}(K)$, i.e., le problème inverse possède une solution unique.⁷

Définition 1.3.5. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_2 \longrightarrow H_1, (\alpha > 0)$ est dite "*famille régularisante*" pour l'opérateur K si

$$\forall h_1 \in H_1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R_\alpha K)h_1 = h_1, \text{ i.e., } R_\alpha K \longrightarrow I \text{ simplement.}$$

Remarque 1.3.3. Si R_α est une famille régularisante pour l'opérateur $K : H_1 \longrightarrow H_2$, où H_1 est de dimension infinie, alors les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés, i.e., il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$.

La donnée initiale $h_2 \in H_2$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons h_2^η la donnée perturbée où le nombre $\eta > 0$ est le niveau du bruit, i.e., $|h_2 - h_2^\eta| \leq \eta$.


Notons $h_1^{\alpha,\eta} = R_\alpha h_2^\eta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kh_1 = h_2$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $|h_1 - h_1^{\alpha,\eta}|$ on obtient

$$|h_1 - h_1^{\alpha,\eta}| = |(h_1 - R_\alpha h_2) + (R_\alpha h_2 - h_1^{\alpha,\eta})| \leq \eta \|R_\alpha\| + |(h_1 - R_\alpha h_2)|. \quad (1.3.2)$$

Le premier terme de droite de l'équation (1.3.2) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par la Remarque (1.3.3), nous avons vu que $\|R_\alpha\| \longrightarrow +\infty$ quand $\alpha \longrightarrow 0$. Il ne faut donc pas choisir α **trop petit** sinon l'erreur peut devenir **très grande**. Par contre le second terme de droite de (1.3.2) tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α . Nous allons faire tendre le niveau de bruit η vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution h_1 .

Définition 1.3.6. Une stratégie de régularisation $\eta \longmapsto \alpha(\eta)$ est *admissible* si pour tout $h_1 \in H_1$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \alpha(\eta) = 0 \text{ et } \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\sup_{h_2^\eta \in H_2} \{ |R_{\alpha(\eta)} h_2^\eta - h_1| \text{ tel que } |Kh_1 - h_2^\eta| \leq \eta \} \right) = 0. \quad (1.3.3)$$

Les stratégies de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon son degré de complexité, pour plus de détails (cf.  [23, 62, 87, 149]). Parmi les méthodes les plus

6. Le fait de choisir K injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace H_1 au complément orthogonal de $\mathbf{N}(K)$, où \mathbf{N} désigne le noyau.

7. Il faut noter que notre problème $Kh_1 = h_2$ inverse est toujours mal posé à cause de la non continuité de K^{-1} .

connues en problèmes inverses et en calcul matriciel mal conditionné, on a la méthode de Tikhonov et la méthode de la troncature spectrale.

► Le principe de la régularisation de Tikhonov pour stabiliser le problème inverse mal posé $Kf = g$ est de choisir comme solution l'élément f_α qui minimise la fonctionnelle


$$|Kf - g|^2 + \alpha|f|^2, \quad \alpha > 0. \quad (1.3.4)$$




L'existence et l'unicité du minimum est assurée grâce à la coercivité et stricte convexité de $f \mapsto |f|^2$. Le paramètre α est appelé le paramètre de régularisation et le terme $|f|^2$ est appelé le terme de correction. Le choix du paramètre α est basé sur un critère d'équilibre entre l'erreur due au terme de correction et le gain de la stabilité.

On a le Théorème suivant :


Théorème 1.3.5. Soit $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un unique minimum f_α . L'élément f_α est la solution de l'équation normale

$$S_\alpha f_\alpha = (\alpha I + K^* K) f_\alpha = K^* g. \quad (1.3.5)$$

La famille d'opérateurs $R_\alpha = (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* : H_2 \rightarrow H_1$ ⁸ est appelée famille régularisante de Tikhonov. On a $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ et tout choix de $\alpha(\eta) \rightarrow 0$ avec $\eta^2 \alpha(\eta) \rightarrow 0$ est admissible. Pour les résultats de la vitesse de convergence, on peut consulter les références  [62, 149] pour plus de détails.

► Le paramètre de régularisation $\alpha > 0$ est choisi via le *principe d'écart* (en anglais : *discrepancy principle*) de MOROZOV  [146], ce principe consiste à fixer le paramètre α tel que la solution correspondante ait une erreur égale au niveau de bruit (cf.  [147],  ²⁰⁰⁹ [192]).

Le choix optimal est extrêmement difficile et les critères qui existent sont d'application délicate, et nécessitent des méthodes itératives pour être mis en oeuvre. ^{9 10}

► Dans la pratique nous supposons qu'un paramètre α est valable si l'erreur appartient à un petit intervalle contenant la valeur du niveau de bruit $\eta > 0$ (cf.  [149], page 172).



8. $(S_\alpha = S_\alpha^*, \langle S_\alpha h, h \rangle = |Sh|^2 + \alpha|h|^2 \geq \alpha|h|^2, \forall h \in H_1) \implies (\sigma(S_\alpha) \subset [\alpha, \|S_\alpha\|] \implies 0 \in \rho(S_\alpha))$, i.e., S_α^{-1} existe et $S_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$.

9. **Méthodes a priori** : utilisent l'information sur le niveau d'erreur η et sur l'opérateur K .

10. **Méthodes a posteriori** : utilisent aussi les données g_η .

$\alpha_{opt} := \max \{ \alpha : |Kf_\alpha - g_\eta| \leq \eta \}$, où $f_\alpha = \inf_f \{ |Kf - g_\eta|^2 + \alpha|f|^2 \}$.

1.3.4 Convexité logarithmique

Pour finir cette revue de méthodes d'analyse des problèmes mal posés en EDP, on cite ici la méthode de la convexité logarithmique (cf.  [10, 117, 155],  [68, 112, 127, 131]), qui trouve sa place dans la stabilisation des problèmes mal posés, qui sont conditionnellement stables.

Définition 1.3.7. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive. On dit que f est log-convexe si la fonction $\hat{f}(t) = \log(f(t))$ est convexe.

Si la fonction f est strictement positive ($f > 0$) et log-convexe sur l'intervalle $[a, b]$, alors on a l'inégalité suivante :

$$\log(f(t)) \leq (1 - \theta(t))\log(f(a)) + \theta(t)\log(f(b)), \quad t \in [a, b], \quad (1.3.6)$$

où $\theta(t) = \frac{b-t}{b-a}$. Cette dernière inégalité nous donne l'inégalité d'interpolation :

$$f(t) \leq f(a)^{1-\theta(t)} f(b)^{\theta(t)}, \quad t \in [a, b]. \quad (1.3.7)$$

► Une fonction $f \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R}_+^*)$ est log-convexe ssi $ff'' - (f')^2 \geq 0$. Cette propriété découle du fait qu'une fonction est convexe si sa dérivée seconde est positive :



$$\hat{f}'' = \log(f(t))'' \geq 0 \iff \frac{ff'' - (f')^2}{f^2} \geq 0 \iff ff'' - (f')^2 \geq 0 \text{ et } f^2 > 0.$$

Théorème 1.3.6. Soit f une fonction continue, positive et log-convexe sur un intervalle I . Alors $f(t) > 0, \forall t \in I$ ou $f(t) = 0, \forall t \in I$

Théorème 1.3.7. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur symétrique, et $u(t)$ une solution du problème $u'(t) = Au(t), 0 \leq t \leq T$. Alors $\log(|u(t)|)$ est convexe sur $[0, T]$. En conséquence

$$|u(t)| \leq |u(0)|^{1-t/T} |u(T)|^{t/T}. \quad (1.3.8)$$

Cette inégalité montre que la dépendance continue peut être récupérée si on impose une contrainte de bornitude sur la solution.

Pour plus de détails et d'autres versions généralisées (cf. Ames & Straughan [10], p. 17-20, Isakov  [108], p. 43-46 et Fattorini  [65], p. 375).

1.4 Méthodes de projection de Krylov







Références




- Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, and H. van der Vorst (Editors); Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems : A Practical Guide, SIAM (2000).
- N.J. Higham ; Functions of Matrices : Theory and Computation, SIAM (2008).
- L. Komzsik ; The Lanczos Method : Evolution and Application, SIAM (2003).
- B. N. Parlett ; The Symmetric Eigenvalue Problem, SIAM (1998).
- Y. Saad ; Iterative Methods for Sparse Linear Systems, SIAM (2003).

La modélisation des problèmes que l'on rencontre en ingénierie et dans les domaines appliqués, conduit éventuellement après une étape de discrétisation, à la résolution de systèmes d'équations en dimension finie. Le traitement numérique de ces systèmes complexes nécessite des méthodes rapides et stables, d'où le recours à des techniques itératives de projections orthogonales qui permettent de réduire la taille du système à étudier. Ces méthodes de projection consistent en général à construire une matrice dite projetée, de taille plus petite que celle de la matrice de départ. Parmi les approches de projection qui ont été largement étudiées et exploitées avec succès, il y a les **méthodes de type Krylov** qui sont basés sur des techniques de projection orthogonale sur un sous-espace \mathcal{K}_m , appelé « *sous-espace de Krylov* » de taille m , où m croît avec les itérations. La terminaison des méthodes de type Krylov est assurée pour $m = N$ (en arithmétique exacte), bien qu'on espère qu'elle se produise pour $m \ll N$ (N étant la taille de la matrice du problème discret). On note ici que ces méthodes sont connues sous le nom « *méthodes polynômiales* », leur convergence est super-linéaire, de plus elle possèdent un effet régularisant remarquable pour les problèmes mal posés et les systèmes linéaires mal conditionnés.

Dans la littérature mathématique, on remarque que ces dernières années, un nombre de travaux a été consacré à ces approches. Cet effort scientifique est un témoignage sur la popularité et l'efficacité de ces outils mathématiques dans le traitement numérique de l'analyse spectrale de grande échelle.

Notre choix de cette stratégie numérique est basé sur trois aspects fondamentaux :

- ▶ Le fondement théorique solide développé par des grands spécialistes reconnus dans le domaine du développement de logiciels industriels   [17, 33, 70, 82, 83, 97, 92, 118, 138, 154, 168, 171, 186, 190],  [90, 101],  [38, 98, 61].
- ▶ Le type de convergence est super-linéaire  [168].
- ▶ L'effet régularisant constaté dans le traitement numérique de certains problèmes inverses très complexes  [38, 39, 40, 163, 98].

✦ Dans cette partie, on expose une méthode itérative pour calculer numériquement le vecteur $y = f(A)b$, où $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est une matrice carrée arbitraire, $b \in \mathbb{R}^N$ est un vecteur donné et f est une fonction régulière définie sur une partie contenant le spectre de la matrice A . On note ici que ce calcul est très complexe du fait que la matrice $f(A)$ peut ne pas être sympathique, même si A est une matrice creuse. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter la référence de base ²⁰⁰⁸ [97], il peut aussi regarder quelques développements récents dans les travaux ²⁰¹⁰ [25], ²⁰¹⁰ [90].

1.4.1 Sous espaces de Krylov

Définition 1.4.1. On appelle sous espace de Krylov d'ordre m associé au couple (A, b) , $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$ ($m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \ll N$), le sous-espace défini par

$$\mathcal{K}_m(A, b) := \text{Vect}\{b, Ab, \dots, A^{m-1}b\}, \quad (1.4.1)$$

où $\text{Vect}\{\dots\}$ désigne l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\tilde{b} = b$, $\tilde{b}_1 = Ab$, \dots , $\tilde{b}_{m-1} = A^{m-1}b$.

Quelques propriétés de base de ces sous-espaces sont résumés dans le Lemme suivant :

Lemme 1.4.1. Soit $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ une matrice carrée et $b \in \mathbb{R}^N$ un vecteur non nul. Alors on a les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{K}_1(A, b) \subsetneq \mathcal{K}_2(A, b) \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{K}_{m-1}(A, b) \subsetneq \mathcal{K}_m(A, b)$;
2. $\mathcal{K}_m(A, b) = \{p(A)b \mid p \text{ est un polynôme de degré } \leq (m-1)\}$;
3. $\dim(\mathcal{K}_m(A, b)) \leq m$;
4. $\dim(A\mathcal{K}_m(A, b)) \leq \dim(\mathcal{K}_m(A, b))$;
5. $\dim(\mathcal{K}_m(A, b)) \leq \dim(\mathcal{K}_{m+1}(A, b))$;
6. $\mathcal{K}_m(\tau A, \sigma b) = \mathcal{K}_m(A, b)$ pour tout réel $\tau \neq 0$, $\sigma \neq 0$;
7. $\mathcal{K}_m(A - \sigma I, b) = \mathcal{K}_m(A, b)$ pour tout réel σ ;
8. $\mathcal{K}_m(PAP^*, Pb) = P\mathcal{K}_m(A, b)$ où P est une transformation unitaire $P^{-1} = P^*$.

On rappelle ici seulement l'algorithme d'ARNOLDI (cas non symétrique) et l'algorithme de LANCZOS (cas symétrique) qui génèrent les bases du sous espace de Krylov, qui vont être exploitées pour calculer $f(A)b$.

1.4.2 Approximation de $f(A)b$ par la méthode de Krylov

1.4.3 Algorithme d'Arnoldi

Définition 1.4.2. $H = (h_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est une matrice sous forme Hessenberg supérieure (resp. inférieure) si la condition (H_+) (resp. (H_-)) est vérifiée.

$$\forall i > j + 1, \quad h_{ij} = 0 \quad (H_+),$$

$$\forall j > i + 1, \quad h_{ij} = 0 \quad (H_-).$$


La méthode d'Arnoldi est une méthode de projection orthogonale sur un sous-espace de Krylov, généralement appliquée aux matrices non symétriques. Cette méthode a été introduite par Arnoldi en ¹⁹⁵⁰, dans le but de factoriser une matrice sous forme Hessenberg supérieure et voici l'algorithme d'Arnoldi.


```

v1 =  $\frac{b}{\|b\|}$ ;
Pour j de 1 à m faire
    wj = Avj;
    Pour i de 1 à j faire
        hi,j = vi⊤wj;
        wj = wj - hi,jvi;
    Fin Pour
    hj+1,j =  $\|w_j\|$ ;
    Si (hj+1,j = 0) Alors
        | Stop;
    Sinon
        | vj+1 =  $\frac{w_j}{h_{j+1,j}}$ ;
    Fin Si
Fin Pour

```

Algorithme 1: Méthode d'Arnoldi

H_m est une matrice de Hessenberg supérieure de taille $m \times m$ avec $m \ll N$ et les vecteur v_1, \dots, v_m sont les colonnes de la matrice orthonormale V_m de taille $N \times m$. Ces vecteurs forment une base orthonormale du sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_m(A, v_1) = \text{Vect}\{v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1\}$. Pour plus de détails (cf.  [17, 60, 168]).

Proposition 1.4.1. [cf. SAAD  [168] Chap. 6.3, page 147] Dans l'algorithme d'Arnoldi, on a, à l'étape $m \leq N$, la relation suivante :

$$AV_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^\top, \quad (1.4.2)$$

i.e.,

$$V_m^\top AV_m \approx H_m \quad (1.4.3)$$





où e_m est le $m^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m , $H_m = [h_{m+1,m}]$ est une matrice de Heisenberg supérieure et $V_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ est une matrice réelle orthogonale ($V_m V_m^\top = I_m$).


► Pour $m = N$, la méthode d'Arnoldi nous fournit une formule très pratique pour calculer $f(A)b$: on pose $v_1 = \frac{b}{\|b\|}$, et on calcule

$$\begin{aligned} f(A)b &= V_N f(H_N) V_N^\top b, \\ &= \|b\| V_N f(H_N) e_1. \end{aligned}$$

► Pour $m \ll N$, on projette le vecteur $f(A)b$ sur un sous espace de Krylov de dimension $m \ll N$, pour obtenir l'approximation :


$$f(A)b \approx \|b\| V_m f(H_m) e_1. \quad (1.4.4)$$

Cette méthode originale a été introduite par VAN DER VORST ¹⁹⁸⁷  [185] pour résoudre l'équation $f(A)x = y$, en suite elle a été développée par V. Druskin & L.A. Knizhnerman dans l'article  ¹⁹⁸⁹ [52], pour calculer le produit $f(A)b$, où f est une fonctions polynomiale (resp. exponentielles) ¹¹. Après le succès qu'elle a eu, elle a été généralisée pour certaines classes de fonctions rationnelles, racines carrées, trigonométriques, complètement monotones, et du type Markov (cf.  [71, 72, 86, 142, 144],  [90, 136, 158, 172])



Définition 1.4.3. (cf.  [118]) Soient $(y_k)_{k=1}^m$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\theta_k)_{k=1}^m$ de la matrice H_m . Alors $(\theta_k, V_m y_k)_{k=1}^m$ sont appelées valeurs de Ritz et vecteurs de Ritz associés à la matrice A par rapport au sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_m(A)$.

Remarque 1.4.1. Dans des situations pratiques, le calcul des couple propres d'une matrice carrée A est une tache très complexe, c'est pour cela, il est commode de calculer les couples de Ritz qui

11. $f(A)b = \exp(\sigma(A))b$, où $\sigma(A)$ est négatif.

peuvent être considérés comme des bonnes approximations à une certaine précision. Cette approche est bien justifiée théoriquement et numériquement, pour plus de détails, on renvoie aux  [17, 154].


Le théorème qui suit précise la proximité entre les valeurs propres et les valeurs de Ritz :

Théorème 1.4.1. (cf.  [89],  [118]) Soient $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $(\lambda_i)_{i=1}^N$ les valeurs propres de A et $(\theta_i)_{i=1}^m$ les valeurs propres de H_m (matrice de Heissenberg à l'itération- m du processus d'Arnoldi). Si $A = A^\top$ et $m < N$, alors on a la localisation suivante :

$$\lambda_{\min} \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m \leq \lambda_{\max}.$$

Chaque intervalle $(-\infty, \theta_1], [\theta_1, \theta_2], \dots, [\theta_{m-1}, \theta_m], [\theta_m, +\infty)$ contient au moins une valeurs propres de A .

1.4.4 Méthode de Lanczos

Dans la méthode de Lanczos, on profite de la symétrie de la matrice A pour obtenir une récurrence simple à trois termes (cf. SAAD  [168] Chap. 6.6, page 172). L'algorithme suivant nous donne une procédure de construction de la base orthonormée du sous espace de Krylov de taille m .

```

1.  $q_1 = \frac{b}{\|b\|}$  et  $q_0 = 0$ ;
Pour  $j$  de 1 à  $m$  faire
     $\alpha_j = q_j^\top A q_j$ ;
     $\beta_{j+1} = \|A q_j - q_{j-1} \beta_{j-1} - q_j \alpha_j\|$ ;
    Si  $(\beta_{j+1} = 0)$  Alors
        | Stop;
    Sinon
        |  $q_{j+1} = \frac{(A q_j - q_{j-1} \beta_{j-1} - q_j \alpha_j)}{\beta_{j+1}}$ ;
    Fin Si
Fin Pour

```

Algorithme 2: Méthode de Lanczos

où $\|q\| = \sqrt{q^\top q}$.

Les vecteurs $(q_i)_{i=1,m}$ sont les vecteurs de base du sous espace de Krylov $\mathcal{K}_m(A, b)$ construit par la méthode Lanczos.

Comme dans la méthode d'Arnoldi, on a la proposition suivante :

Proposition 1.4.2. *Dans l'Algorithme de Lanczos, on a, à l'étape $m \leq N$, la relation suivante :*

$$AQ_m = Q_m T_m + \beta_{m+1} q_{m+1} e_m^\top, \quad (1.4.5)$$

i.e.,

$$Q_m^\top A Q_m \approx T_m \quad (1.4.6)$$

ou e_m est le $m^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^m , et

$$T_m = \text{Tridiag} [\beta_{j+1}, \alpha_j, \beta_{j+1}], j = 0, m$$

est une matrice tridiagonale et $Q_m = [q_1, q_2, \dots, q_m]$ est une matrice orthogonale ($Q_m Q_m^\top = I_m$), de plus, on a la relation :

$$\beta_{j+1} q_{j+1} = A q_j - \beta_j q_j - \beta_{j-1} q_{j-1}. \quad (1.4.7)$$

Dans ce cas, l'approximation de $f(A)b$ par projection sur le sous-espace de Krylov engendré par le processus de Lanczos, prend la forme :

$$f(A)b \approx \|b\| Q_m f(T_m) e_1. \quad (1.4.8)$$

Notation. On note par \mathbf{K}_m le triplet de Krylov :

$$\mathbf{K}_m := (\mathcal{K}_m(A, b), V_m, H_m), \quad m \leq N,$$

$$\mathbf{K}_m := (\mathcal{K}_m(A, b), Q_m, T_m), \quad m \leq N,$$

où $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$, V_m (resp. Q_m) := la matrice dont ses colonnes sont les vecteurs de base de l'espace de Krylov $\mathcal{K}_m(A, b)$ et $H_m = V_m^\top A V_m$ (resp. $T_m = Q_m^\top A Q_m$).





2.1 Problème direct

On commence notre investigation par cette illustration.

Soit Ω un ouvert borné, régulier de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ . Soit $z_1 > 0$, on note Q le cylindre de \mathbb{R}^3 défini par $Q = \Omega \times (0, z_1)$. Le point générique w de Q est noté par $w = (x, y, z)$, $(x, y) \in \Omega$ et $z \in (0, z_1)$.

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(x, y, z) = u_{zz}(x, y, z) + \Delta_{xy} u(x, y, z) = 0 & \text{dans } Q, \\ u(x, y, z) = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, z_1], \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & \text{dans } \Omega, \\ u(x, y, z_1) = u_1(x, y) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Le problème (2.1.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{zz}(x, y, z) - Au(x, y, z) = 0 & \text{dans } Q, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & \text{dans } \Omega, \\ u(x, y, z_1) = u_1(x, y) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.1.2)$$

où $A = -\Delta_{xy}$ avec $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset H = L^2(\Omega)$.

On sait bien que l'opérateur A est auto-adjoint, défini positif et à résolvante compacte, i.e., A^{-1} est un opérateur compact sur $L^2(\Omega)$,¹ et donc il est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit

1. La compacité de A^{-1} découle de l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

$(v_n)_{n=1}^{\infty}$ la base hilbertienne formée par les vecteurs propres $(v_n)_{n=1}^{\infty}$, i.e.,

$$Av_n = \mu_n v_n, \quad \langle v_m, v_n \rangle = \delta_{mn}, \quad 0 < c \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \longrightarrow \infty, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Sous des conditions de régularité « très raisonnables » sur les données u_0 et u_1 , on peut montrer l'existence et l'unicité de notre problème direct (2.1.1).²

Considérons maintenant la version abstraite de notre problème direct.

Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné à domaine dense dans H .

Soit le problème de *Cauchy avec les conditions de Dirichlet* :

$$\begin{cases} u_{zz}(z) - Au(z) = 0, & 0 < z < z_1, \\ u(0) = \varphi, \quad u(z_1) = \psi, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

où φ, ψ sont des conditions aux limites données.

On fait les hypothèses suivantes :

- H1** L'opérateur A est auto-adjoint, i.e., $A = A^*$.
- H2** L'opérateur A est strictement positif, i.e., $A \geq \gamma I$ où $0 < \gamma = \inf \sigma(A)$.
- H3** L'injection $H^1 := (D(A), |\cdot|_G) \hookrightarrow H$ est compacte.

- Sous les hypothèses **(H1, H2)** l'opérateur $L = \partial_{zz}^2 - A$ est *elliptique* au sens de la définition :

⌋ Soit $G : D(G) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur fermé à domaine dense. On dit que l'opérateur G est elliptique si il vérifie la condition suivante :

⌋ $(-\infty, 0] \subset \rho(G), \quad \exists M > 0, \forall \lambda \leq 0, \quad \|(G - \lambda I)^{-1}\| \leq M/(1 + |\lambda|).$

- Sous les hypothèses **(H1, H2 et H3)** l'opérateur A est diagonalisable.^{3 4} Soit alors $(\xi_k, \lambda_k^2)_{k \geq 1}$ les couples propres (valeur propres, vecteurs propres) de l'opérateur A :

$$A\xi_k = \lambda_k^2 \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \langle \xi_m, \xi_n \rangle = \delta_{mn},$$

$$0 < \gamma \leq \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \dots \lambda_k^2 \longrightarrow \infty, \quad k \longrightarrow \infty,$$


$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \xi_k, \quad h_k = \langle h, \xi_k \rangle \text{ le coefficient de Fourier d'ordre } k \text{ de } h.$$

2. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution recherchée sous la forme d'une série de Fourier.

3. $H2 \implies 0 \in \rho(A)$, $H3 \implies A^{-1}$ est compact.

4. $(H1, H2, H3) \implies A^{-1}$ est auto-adjoint compact, et donc diagonalisable d'après le Théorème de la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts. En conséquence A est diagonalisable.

Définition 2.1.1. On dit que $u \in \mathcal{C}^1([0, z_1]; H)$ est une solution *classique* du problème (2.1.3) si u est deux fois continûment dérivable sur $(0, z_1)$, pour tout $z \in (0, z_1)$, $u(z) \in D(A)$ et si elle vérifie l'équation et les conditions aux limites (2.1.3).

Théorème 2.1.1. (cf. PRILEPKO  [159], p. 366-373.) *Le problème (2.1.3) admet une solution classique ssi $\varphi, \psi \in D(A^{1/2})$.*




Si $\varphi, \psi \in D(A)$, alors $u \in \mathcal{C}^1([0, z_1]; H) \cap \mathcal{C}([0, z_1]; D(A))$.

Dans la suite du travail, et pour des raisons de simplicité, on suppose que $\psi = 0$

Soit la famille (hyperbolic sine family) d'opérateurs bornés : $R(z) := \frac{\sinh((z_1 - z)\sqrt{A})}{\sinh(z_1\sqrt{A})} \in \mathcal{L}(H)$.

Alors la solution du problème (2.1.3) est donnée par la formule :

$$u(z) = \frac{\sinh((z_1 - z)\sqrt{A})}{\sinh(z_1\sqrt{A})} \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh(z_1\lambda_k)} \langle \varphi, \xi_k \rangle \xi_k. \quad (2.1.4)$$

Mentionnons avant de continuer qu'il existe une littérature très abondante qui traite les problèmes elliptiques directs (existence, unicité, régularité des solutions, approximation numérique des solutions). Les références   [49, 66, 80, 85, 88, 120, 124, 166, 175, 194, 178],  [4, 6, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 84, 94, 95, 96, 139, 140, 141, 151] dressent un large panorama de ce sujet et en donne de très nombreuses illustrations.


2.2 Formulation du problème inverse

Soit $u(z; \varphi)$ la solution du problème :

$$\begin{cases} u_{zz}(z) - Au(z) = 0, & 0 < z < z_1, \\ u(0) = \varphi, & u(z_1) = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

pour une condition donnée φ .

Notre problème inverse se formule comme suit :

 Soit $u(z = \tau; \varphi) = h$ une mesure interne effectuée sur la solution $u(z; \varphi)$ au point $z = \tau$, $0 < \tau < z_1$. Notre objectif est de déterminer la donnée $u(0) = \varphi$ à partir de l'information h .

On peut schématiser notre problème inverse comme suit :

$$\varphi \longrightarrow u(z) = R(z)\varphi \longrightarrow \Phi(u) = u(z = \tau) = h, \quad (2.2.2)$$

on obtient donc une équation de Fredholm du première espèce

$$K\varphi = h, \quad K = R(\tau). \quad (2.2.3)$$


Il est naturel de se demander si l'opérateur K est inversible et quelle est la stratégie de reconstruction. Plus précisément, on va traiter les questions suivantes :

1. Injectivité de K (unicité).
2. Continuité de K et son inverse s'il existe (stabilité).
3. Image de K (ensemble admissible maximale).
4. Algorithme de reconstruction de φ à partir de h .

Une première réflexion qui nous semble pratique est de résoudre le problème :

$$\begin{cases} u_{zz}(z) - Au(z) = 0, & 0 < z < z_1, \\ u(\tau) = h, \quad u(z_1) = 0, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

et de poser $u(0) = \varphi$.

 Mais la solution du problème (2.2.4) n'existe que si h vérifie des conditions extrêmement restrictives, et de nature très instables. En effet, soit le problème :

$$v_{zz}(z) - Av(z) = 0, \quad \tau < z < z_1, \quad v(\tau) = h, \quad v(z_1) = 0. \quad (2.2.5)$$

On sait bien que le problème (2.2.5) est bien posé (problème classique bien traité), et sa solution est donnée par :


$$v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh(z_1 - \tau)\lambda_k} < h, \quad \xi_k > \xi_k. \quad (2.2.6)$$

Soit donc $v'(\tau) = h'$, et considérons le problème :

$$w_{zz}(z) - Aw(z) = 0, \quad 0 < z < \tau, \quad w(\tau) = h, \quad w'(\tau) = h'. \quad (2.2.7)$$

On vérifie aisément que la solution formelle (unique) du problème (2.2.7) est donnée par

$$w(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh(z_1 - \tau)\lambda_k} < h, \quad \xi_k > \xi_k. \quad (2.2.8)$$

 On remarque que sur l'intervalle $\tau \leq z \leq z_1$, $u = v$, donc le problème (2.2.4) est bien posé. Par contre sur la partie complémentaire $0 \leq z < \tau$ où $u = w$, le problème est instable, ceci découle du comportement des hautes fréquences $\omega_k = \frac{\sinh((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh((z_1 - \tau)\lambda_k)} \approx \exp((\tau - z)\lambda_k) \rightarrow \infty$ quand $k \rightarrow \infty$.

2.3 Propriétés spectrales et topologiques de l'opérateur K

Les propriétés qualitative de notre problème inverse reposent sur les propriétés spectrales et topologiques de l'opérateur K . Avant de donner ces propriétés, on rappelle la version généralisée du Théorème de Picard :

Théorème 2.3.1. [Théorème de Picard] Soient $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $Z(\phi) := \{t \in \mathbb{R} : \phi(t) = 0\}$. Soit $B = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_{\lambda}$ un opérateur auto-adjoint. On suppose que $Z(\phi) = \emptyset$ ou bien $Z(\phi)$ est au plus dénombrable. Alors le problème inverse

$$\phi(B)x = y, \quad (2.3.1)$$

est soluble ssi

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(\lambda)|^{-2} d|dE_{\lambda}y|^2 < \infty. \quad (2.3.2)$$

De plus, $\phi(B)$ est injectif $\iff Z(\phi) \cap \sigma_p(B) = \emptyset$.

Notons $\phi(t) := \frac{\sinh((z_1 - \tau)\sqrt{t})}{\sinh(z_1\sqrt{t})}$, $t \geq \gamma$.

Proposition 2.3.1. L'opérateur $K : H \longrightarrow H$ possède les propriétés suivantes :

1. $K \in \mathcal{K}(H)$, $\|K\| = \sup_{k \geq 1} \left\{ \nu_k = \frac{\sinh((z_1 - \tau)\lambda_k)}{\sinh(z_1\lambda_k)} \right\} = \nu_1 < 1$.
2. K est auto-adjoint.
3. K est injectif.
4. $\mathbf{R}(K)$ est dense mais n'est pas fermée.

Preuve. - D'après le calcul fonctionnel des opérateurs aut-adjoints (cf. Rappels, Thm. 1.2.7), la représentation spectrale de l'opérateur $K = \phi(A)$ nous assure que K est auto-adjoint (car ϕ est continue et à valeurs réelles). La fonction ϕ est bornée, décroissante, donc la norme $\|K\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \phi(\lambda) = \phi(\lambda_1^2) = \nu_1$. La compacité de l'opérateur K résulte de la limite $\nu_k \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$.
- L'injectivité de K découle immédiatement de $Z(\phi) \cap \sigma_p(A) = \emptyset$. Ce qui implique que $\overline{\mathbf{R}(K)} = \mathbf{N}(K)^\perp = 0^\perp = H$. \square

Théorème 2.3.2. *D'après le Théorème de Picard, le problème inverse $K\varphi = h$ est uniquement solvable ssi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh(z_1 \lambda_k)}{\sinh((z_1 - \tau) \lambda_k)} \right)^2 | \langle h, \xi_k \rangle |^2 < \infty$$

ou encore

$$h \in C_1(A) := \left\{ \zeta \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh(z_1 \lambda_k)}{\sinh((z_1 - \tau) \lambda_k)} \right)^2 | \langle \zeta, \xi_k \rangle |^2 < \infty \right\}.$$

Remarque 2.3.1. On montre que l'ensemble

$$C_1(A) = \mathbf{R}(K) = \mathcal{D}(K^{-1}) = \left\{ \zeta \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \exp(2\tau \lambda_k) | \langle \zeta, \xi_k \rangle |^2 < \infty \right\}.$$

En effet, il existe deux constantes

$$0 < k_- := \inf_{s \geq \sqrt{\gamma}} \frac{1 - \exp(-2\tau s)}{1 - \exp(-2(z_1 - \tau)s)}, \quad k_+ := \sup_{s \geq \sqrt{\gamma}} \frac{1 - \exp(-2\tau s)}{1 - \exp(-2(z_1 - \tau)s)}$$

telles que

$$k_- \exp(\tau \lambda_k) \leq \frac{1 - \exp(-2\tau s)}{1 - \exp(-2(z_1 - \tau)s)} \leq k_+ \exp(\tau \lambda_k).$$

En d'autres termes

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(2\tau \lambda_k) | \langle \zeta, \xi_k \rangle |^2 < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh(z_1 \lambda_k)}{\sinh((z_1 - \tau) \lambda_k)} \right)^2 | \langle \zeta, \xi_k \rangle |^2 < \infty.$$

□

En conclusion, le problème (2.2.4) admet une solution unique $u(z; h) \in H$ ssi $u(0) \in H$ ($u(0) \in H \iff h \in C_1(A)$). Dans ce cas, la solution est donnée par :

$$u(z; h) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh((z_1 - z) \lambda_k)}{\sinh((z_1 - \tau) \lambda_k)} \langle h, \xi_k \rangle \xi_k \quad (2.3.3)$$

Remarque 2.3.2.

• On note ici que l'ensemble des vecteurs propres $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ de l'opérateur A est inclus dans les ensembles

$$C_{\theta}(A) = \left\{ \zeta \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \exp(2\theta \tau \lambda_k) | \langle \zeta, \xi_k \rangle |^2 < \infty \right\}, \quad \theta \geq 1.$$

- La suite $\{C_\theta(A), \theta \geq 1\}$ est décroissante au sens de l'inclusions. Dans la terminologie des problèmes inverses, ces ensembles sont appelés les *classes admissibles* (en anglais : *correctness classes*), et pour $\theta = 1$, on trouve $C_1(A) = \mathbf{R}(K)$ la *classe admissible maximale*.
- On note aussi que les ensembles $C_\theta(A)$ sont denses dans H mais ne sont pas fermés, et dans des situations particulières, ils coïncident avec certains espaces de Sobolev.






Stabilisation et approximation

Puisque le problème (2.2.4) est stable sur $\tau \leq z \leq z_1$, et instable sur $0 \leq z \leq \tau$, alors on va l'étudier uniquement sur le domaine d'instabilité.

3.1 Stabilité conditionnelle

On suppose que $\|u(0)\| \leq M$ où $u(z)$ est la solution du problème (2.2.4). Sous cette condition, la solution du problème (2.2.4) est stable ; on dit alors que la solution $u(z; h)$ est conditionnellement stable sur l'ensemble $E_M := \{u(z; h) : \|u(0)\| \leq M\}$.

 Nous voulons maintenant aborder la question de stabilisation dans le cas de données entachées de bruit, parce que les données qu'on dispose viennent de l'expérimental, ce qui implique l'existence d'erreurs de mesure. Cette cause d'incertitude induit une image floue à cause de la sensibilité des problèmes inverses aux incertitudes, et l'interprétation des réponses devient presque impossible et engendre un grand risque.

On suppose maintenant que la donnée $u(\tau) = h$ est entachée de bruit (inexacte), i.e., on dispose une approximation h_ε de h : $\|h_\varepsilon - h\| \leq \varepsilon$, ε est le niveau de bruit. Dans le cas d'un bruit additif, on a $h_\varepsilon = h + \varepsilon$.

Considérons alors le problème :

$$u_{zz} - Au = 0, \quad z \in (0, z_1), \quad (3.1.1)$$

$$u(z_1) = 0, \quad (3.1.2)$$

$$\|u(\tau) - b\| = \|h_\varepsilon - b\| \leq \varepsilon, \quad (3.1.3)$$

$$\|u(0)\| \leq M. \quad (3.1.4)$$

Notations. On note par $(SP_\varepsilon) :=$ le problème (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) et (3.1.4), $(SP_0) :=$ (3.1.1), (3.1.2), (3.1.4) avec la donnée exacte $u(\tau) = b$.

Remarque 3.1.1. La solution du problème (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) et (3.1.4) est stable, mais en général n'est pas unique. En effet, soit la famille de fonctions $U^\mu(z) = e^{-\frac{\mu}{\|b\|}z} u(z)$, $0 < \mu \leq \varepsilon$ où $u(z; b)$ est la solution du problème (SP_0) . On remarque que les fonctions $U^\mu(z)$ vérifient les conditions du problème (SP_ε) :

$$U_{zz}^\mu - AU^\mu = e^{-\frac{\mu}{\|b\|}z} (u_{zz} - Au) = 0,$$

$$U^\mu(z_1) = e^{-\frac{\mu}{\|b\|}z_1} u(z_1) = 0,$$

$$\|U^\mu(0)\| = e^{-\frac{\mu}{\|b\|} \cdot 0} \|u(0)\| \leq e^{-\frac{\mu}{\|b\|} \cdot 0} M \leq M,$$

$$\|U^\mu(\tau) - b\| = \|e^{-\frac{\mu}{\|b\|}\tau} b - b\| = (1 - e^{-\frac{\mu}{\|b\|}\tau}) \|b\| \leq \left(\frac{\mu}{\|b\|} \right) \|b\| = \mu \leq \varepsilon.$$

□

Notons $B(h, \varepsilon) := \{\tilde{b} \in H : \|\tilde{b} - b\| \leq \varepsilon\}$, \mathcal{F}_ε l'ensemble de toutes les solutions du problème (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) et (3.1.4).

Théorème 3.1.1. Soient u_1^ε et u_2^ε deux solutions du problème (SP_ε) . Alors on a la continuité hölderienne suivante :

$$\left\| u_1^\varepsilon(z) - u_2^\varepsilon(z) \right\| \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right) \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1 - \frac{z}{\tau}}, \quad 0 \leq z \leq \tau. \quad (3.1.5)$$

Preuve. Soit u la solution du problème (SP_0) , alors on a

$$u(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh((z_1 - \tau)\lambda_k)} \langle b, \xi_k \rangle \xi_k.$$

Soient les fonctions de la variable réelle $\lambda \geq 0$,

$$F(\lambda) = \frac{\sinh((z_1 - z)\lambda)}{\sinh((z_1 - \tau)\lambda)} = \theta(z, \lambda) e^{(\tau - z)\lambda} \text{ où } \theta(t, \lambda) = \frac{1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda}}{1 - e^{-2(z_1 - \tau)\lambda}}.$$

$$M(z, \lambda) = 1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda} - \beta + \beta e^{-2(z_1 - \tau)\lambda}.$$

Il est clair que

$$\theta(z, \lambda) = \frac{1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda}}{1 - e^{-2(z_1 - \tau)\lambda}} \geq 1. \quad (3.1.6)$$

Une application directe du Théorème des accroissements finis, donne

$$M(z, \lambda) - M(z, 0) = (\lambda - 0)M'(z, \eta) \text{ avec } 0 < \eta < \lambda.$$

$$\text{On a } M(z, 0) = 1 - 1 - \beta + \beta = 0, \quad M'(z, \eta) = 2(z_1 - z)e^{-2(z_1 - z)\eta} - 2\beta(z_1 - \tau)e^{-2(z_1 - \tau)\eta}.$$

Pour $\beta = \frac{z_1 - z}{z_1 - \tau}$, on obtient $M'(z, \eta) \leq 0$, ce qui implique que $M(z, \lambda) = \lambda M'(z, \eta) \leq 0$, donc $M(z, \lambda) \leq 0$.

$M(z, \lambda) = 1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda} - \beta + \beta e^{-2(z_1 - \tau)\lambda} \leq 0 \implies 1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda} \leq \beta - \beta e^{-2(z_1 - \tau)\lambda} = \beta(1 - e^{-2(z_1 - \tau)\lambda})$,
ce qui donne

$$\theta(z, \lambda) = \frac{1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda}}{1 - e^{-2(z_1 - \tau)\lambda}} \leq \beta = \frac{z_1 - z}{z_1 - \tau}. \quad (3.1.7)$$

D'après (3.1.6) et (3.1.7) on obtient donc

$$1 \leq \theta(z, \lambda) \leq \frac{z_1 - z}{z_1 - \tau}. \quad (3.1.8)$$

D'autre part, on a $\|u(z)\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\sinh((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh((z_1 - \tau)\lambda_k)} \right)^2 |b_k|^2$ où $b_k^2 = \langle b, \xi_k \rangle^2$, qui peut être estimée comme suit

$$\begin{aligned} \|u(z)\|^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} (\theta(z, \lambda_k) e^{(\tau - z)\lambda_k})^2 |b_k|^2 \leq \\ &\left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} e^{2(\tau - z)\lambda_k} |b_k|^2 = \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right)^2 \|\hat{u}(z)\|^2. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

La fonction $\hat{u}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{(\tau - z)\lambda_k} \langle b, \xi_k \rangle \xi_k$ vérifie le problème parabolique (*rétrograde*) suivant :

$$\hat{u}_z + \sqrt{A}\hat{u} = 0, \quad \hat{u}(\tau) = b.$$

En vertu du Théorème de la convexité logarithmique (cf. Rappels, Thm. 1.3.7), on peut écrire :

$$\|\widehat{u}(z)\| \leq \|\widehat{u}(\tau)\|^{\frac{z}{\tau}} \|\widehat{u}(0)\|^{1-\frac{z}{\tau}}. \quad (3.1.10)$$

En combinant les inégalités (3.1.9) et (3.1.10), on obtient

$$\|u(z)\| \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right) \|\widehat{u}(\tau)\|^{\frac{z}{\tau}} \|\widehat{u}(0)\|^{1-\frac{z}{\tau}}. \quad (3.1.11)$$

Puisque $\widehat{u}(\tau) = h = u(\tau)$, il vient donc

$$\|u(z)\| \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right) \|u(\tau)\|^{\frac{z}{\tau}} \|\widehat{u}(0)\|^{1-\frac{z}{\tau}}. \quad (3.1.12)$$

D'autre part et grâce à l'inégalité (3.1.8) $\left(\frac{1}{\theta(z, \lambda)} \leq 1 \right)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}(z)\|^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{2(\tau-z)\lambda_k} |b_k|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\theta(z, \lambda_k)} \right)^2 \theta^2(z, \lambda_k) e^{2(\tau-z)\lambda_k} |b_k|^2 \\ &\leq \sup_{k \geq 1} \left(\frac{1}{\theta(z, \lambda_k)} \right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (\theta(z, \lambda_k) e^{(\tau-z)\lambda_k})^2 |b_k|^2, \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} (\theta(z, \lambda_k) e^{(\tau-z)\lambda_k})^2 |b_k|^2 = \|u(z)\|^2. \end{aligned}$$

En particulier, pour $z = 0$,

$$\|\widehat{u}(0)\| \leq \|u(0)\|. \quad (3.1.13)$$

Ainsi, de (3.1.12) et (3.1.13) découle

$$\|u(z)\| \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right) \|u(\tau)\|^{\frac{z}{\tau}} \|u(0)\|^{1-\frac{z}{\tau}} \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right) \|u(\tau)\|^{\frac{z}{\tau}} M^{1-\frac{z}{\tau}}. \quad (3.1.14)$$

Soient maintenant u_1^ε et u_2^ε deux solutions différentes du problème (SP_ε) telles que

$$\|u_1^\varepsilon(\tau) - u_2^\varepsilon(\tau)\| \leq \varepsilon.$$

Alors une application directe du résultat (3.1.14) donne

$$\|u_1^\varepsilon(z) - u_2^\varepsilon(z)\| \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right) \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1-\frac{z}{\tau}}.$$

□

Remarque 3.1.2. Ce Théorème montre que le problème (SP_ε) est stable, i.e.,

$$\|h_1^\varepsilon - h_2^\varepsilon\| \leq \varepsilon \implies \|u(z; h_1^\varepsilon) - u(z; h_2^\varepsilon)\| \approx O(\varepsilon^{z/\tau}) \longrightarrow 0, \varepsilon \longrightarrow 0.$$

3.2 Régularisation par troncature spectrale

Définition 3.2.1. Pour $\lambda_c > 0$, on définit la solution régularisée du problème (SP_ε) comme suit :

$$v_c(z) = \sum_{\lambda_k \leq \lambda_c} \frac{\sinh((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh((z_1 - \tau)\lambda_k)} \langle \xi_k, h_\varepsilon \rangle \xi_k. \quad (3.2.1)$$

La quantité λ_c est appelée fréquence de coupure. Cette technique est connue sous le nom « *troncature spectrale* » qui élimine les hautes fréquences responsables de l'instabilité.

Théorème 3.2.1. Soit $u(z; h)$ (resp. $v_c(z, h_\varepsilon)$) la solution régularisée du problème (SP_0) (resp. (SP_ε)). Alors pour $\lambda_c = \left(\frac{1}{\tau}\right) \ln\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)$, on a l'estimation suivante :

$$\|u - v_c\| \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} + 1\right) \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1 - \frac{z}{\tau}}, \quad 0 \leq z \leq \tau. \quad (3.2.2)$$

Avant de donner la preuve du Théorème 3.2.1, on introduit les deux Lemmes techniques suivants.

Lemme 3.2.1. Supposons que $v_1(z; h_1)$ et $v_2(z; h_2)$ sont deux solutions régularisées définies par la procédure (3.2.1), telles que $\|h_1 - h_2\| \leq \varepsilon$. Si $\lambda_c = \left(\frac{1}{\tau}\right) \ln\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)$, alors on a l'estimation suivante :

$$\|v_1(z) - v_2(z)\| \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau}\right) \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1 - \frac{z}{\tau}}, \quad 0 \leq z \leq \tau. \quad (3.2.3)$$

Preuve. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|^2 &= \sum_{\lambda_k \leq \lambda_c} \left(\frac{\sinh((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh((z_1 - \tau)\lambda_k)} \right)^2 |\langle h_1 - h_2, \xi_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{\lambda_k \leq \lambda_c} \left(\frac{e^{(z_1 - z)\lambda_k} (1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda_k})}{e^{(z_1 - \tau)\lambda_k} (1 - e^{-2(z_1 - \tau)\lambda_k})} \right)^2 |\langle h_1 - h_2, \xi_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{\lambda_k \leq \lambda_c} e^{2(\tau - z)\lambda_k} \left(\frac{1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda_k}}{1 - e^{-2(z_1 - \tau)\lambda_k}} \right)^2 |\langle h_1 - h_2, \xi_k \rangle|^2 \\ &\leq \sup_{\lambda_k \leq \lambda_c} \left(e^{2(\tau - z)\lambda_k} \right) \left(\sup_{\lambda_k \leq \lambda_c} \frac{1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda_k}}{1 - e^{-2(z_1 - \tau)\lambda_k}} \right)^2 \sum_{\lambda_k \leq \lambda_c} |\langle h_1 - h_2, \xi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

En utilisant les estimations

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda_k \leq \lambda_c} \left(e^{2(\tau-z)\lambda_k} \right) &= e^{2(\tau-z)\lambda_c}, \\ \sup_{\lambda_k \leq \lambda_c} \frac{1 - e^{-2(z_1-z)\lambda_k}}{1 - e^{-2(z_1-\tau)\lambda_k}} &= \sup_{\lambda_k \leq \lambda_c} \theta(z, \lambda_k) \leq \frac{z_1 - z}{z_1 - \tau}, \\ \sum_{\lambda_k \leq \lambda_c} |\langle b_1 - b_2, \xi_k \rangle|^2 &\leq \|b_1 - b_2\|^2, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|^2 &\leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right)^2 e^{2(\tau-z)\lambda_c} \|b_1 - b_2\|^2 \\ &\leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right)^2 e^{2(\tau-z)\lambda_c} \varepsilon^2 = \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right)^2 \varepsilon^2 \exp \left(2(\tau - z) \left(\frac{1}{\tau} \right) \ln \left(\frac{M}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right)^2 \varepsilon^2 \exp \left(2 \left(\frac{\tau - z}{\tau} \right) (\ln(M) + \ln(\varepsilon^{-1})) \right). \end{aligned}$$

Enfin on trouve

$$\|v_1 - v_2\| \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right) \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1 - \frac{z}{\tau}} \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \tau.$$

Lemme 3.2.2. Soient $u(z; h)$ la solution définie par (2.3.3) et $u_c(z; h)$ la solution régularisée définie par (3.2.1). On suppose que $\|u(0)\| \leq M$. Si $\lambda_c = \left(\frac{1}{\tau} \right) \ln \left(\frac{M}{\varepsilon} \right)$, alors on a l'estimation suivante :

$$\|u - u_c\| \leq \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1 - \frac{z}{\tau}}, \quad 0 \leq z \leq \tau \quad (3.2.4)$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \|u(z; h) - u_c(z; h)\|^2 &\leq \sum_{\lambda_k > \lambda_c} \frac{\sinh^2((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh^2((z_1 - \tau)\lambda_k)} |\langle h, \xi_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{\lambda_k > \lambda_c} \frac{\sinh^2((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh^2(z_1\lambda_k)} \frac{\sinh^2(z_1\lambda_k)}{\sinh^2((z_1 - \tau)\lambda_k)} |\langle h, \xi_k \rangle|^2 \\ &\leq \sup_{\lambda_k \geq \lambda_c} \left(\frac{\sinh^2((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh^2(z_1\lambda_k)} \right) \sum_{\lambda_k > \lambda_c} \frac{\sinh^2(z_1\lambda_k)}{\sinh^2((z_1 - \tau)\lambda_k)} |\langle h, \xi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

De

$$\sum_{\lambda_k > \lambda_c} \frac{\sinh^2(z_1\lambda_k)}{\sinh^2((z_1 - \tau)\lambda_k)} |\langle h, \xi_k \rangle|^2 \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\sinh^2(z_1\lambda_k)}{\sinh^2((z_1 - \tau)\lambda_k)} |\langle h, \xi_k \rangle|^2 = \|u(0)\|^2 \leq M^2,$$

et

$$\frac{\sinh((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh(z_1\lambda_k)} = \frac{e^{(z_1 - z)\lambda_k} (1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda_k})}{e^{z_1\lambda_k} (1 - e^{-2z_1\lambda_k})} = e^{-z\lambda_k} \frac{(1 - e^{-2(z_1 - z)\lambda_k})}{(1 - e^{-2z_1\lambda_k})} \leq e^{-z\lambda_k}$$

$$\sup_{\lambda_k \geq \lambda_c} \left(\frac{\sinh((z_1 - z)\lambda_k)}{\sinh(z_1\lambda_k)} \right) \leq \sup_{\lambda_k \geq \lambda_c} (e^{-z\lambda_k}) = e^{-z\lambda_c},$$

il en résulte que

$$\|u(z; h) - u_c(z; h)\| \leq e^{-z\lambda_c} M = e^{z(\frac{1}{\tau} \ln(\frac{M}{\varepsilon}))} M = \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1 - \frac{z}{\tau}}.$$

□

Revenons maintenant à la démonstration du Théorème (3.2.1). Soient $u(z; h)$ (resp. $u_c(z; h)$) la solution exacte (resp. régularisée) du problème (SP_0) et $v_c(z; h_\varepsilon)$ la solution régularisée du problème (SP_ε) . En appliquant les Lemmes 3.2.1 et 3.2.2, on obtient pour $0 \leq z \leq \tau$:

$$\|u(z; h) - v_c(z; h_\varepsilon)\| \leq \|u(z; h) - u_c(z; h)\| + \|u_c(z; h) - v_c(z; h_\varepsilon)\| \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} + 1 \right) \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1 - \frac{z}{\tau}}.$$

Remarque 3.2.1. Le Théorème (3.2.1) nous donne seulement la continuité à l'intérieur de l'intervalle $]0, \tau]$.





Approximation numérique du problème par la méthode de Krylov

4.1 Discrétisation et projection de la solution

4.1.1 Stratégie de discrétisation

La discrétisation par éléments finis ou différences finies d'une EDP intervenant dans un problème inverse est une source d'erreur et son influence sur la convergence est certaine. Pour remédier à ce phénomène, on propose une **semi-discrétisation** du problème, ce qui va nous permettre d'une part de diminuer les erreurs, et d'autre part de transformer le problème semi-discrétisé en une EDO, dont l'étude repose en général sur des méthodes spectrales en dimension finie.

Par un calcul opérationnel, on transforme notre problème en un problème de calcul matriciel de la forme : $u = f(A)v$, où $u :=$ est la solution recherchée, $v :=$ les données du problème, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est une matrice symétrique définie positive, et $f :=$ une fonction analytique sur une partie contenant le spectre de A .

Pour calculer numériquement le vecteur u , il y a toute une théorie bien développée et un ensemble de logiciel pour certaines classes de fonctions. Dans notre étude, on choisit la méthode de projection de Krylov à cause de son effet régularisant dans le traitement numérique de certains problèmes inverses, et la disponibilité des packages (Matlab, Fortran) qui peuvent être adapter après une modification pour une classe très large de problèmes inverses.

Notons $A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ l'opérateur discret de A , qui est une matrice symétrique, définie positive. On suppose que les erreurs de la discrétisation sont petites par rapport à l'incertitude ε , et que A_N est de

taille suffisamment grande de façon que A_N soit une bonne approximation de l'opérateur différentiel A .

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes :

$$E_N := \mathbb{R}^N, \quad N \geq 1.$$

$h_N \in E_N$:= l'analogue discret de h .

$h_N^\varepsilon \in E_N$:= l'analogue discret de h_ε .

$\sigma(A_N) = \{\alpha_k^2\}_{k=1}^N$:= l'ensemble des valeurs propres de A_N ($0 < \alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots \leq \alpha_N^2$).

$\{\zeta_k\}_{k=1}^N$:= l'ensemble des vecteurs propres normalisés de A_N .

Les analogues discrets de (2.3.3) et (3.2.1) sont notés respectivement par :

$$U_N(z; h_N) = \sum_{k=1}^N \left(\left(\frac{\sinh((z_1 - z)\alpha_k)}{\sinh((z_1 - \tau)\alpha_k)} \right) \zeta_k^\top h_N \right) \zeta_k, \quad (4.1.1)$$

$$V_c(z; h_N^\varepsilon) = \sum_{\lambda_k \leq \lambda_c} \left(\frac{\sinh((z_1 - z)\alpha_k)}{\sinh((z_1 - \tau)\alpha_k)} \zeta_k^\top h_N^\varepsilon \right) \zeta_k \quad (4.1.2)$$

Maintenant, la question qui se pose est comment calculer numériquement des approximations de (4.1.1) et (4.1.2). Il est clair, si on arrive à calculer de manière précise les couples propres de la matrice A_N , alors le problème sera résolu. Or, ce n'est pas assez facile comme on peut imaginer ; c'est une tâche très complexe et très sensible aux perturbations. Pour montrer la dangerosité de ce calcul, prenons l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$










Par un simple calcul exact, on trouve les couples propres suivants :

$$\left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = 1, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \lambda_1(\varepsilon) = 1 + \varepsilon, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2(\varepsilon) = 1 - \varepsilon, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cet exemple montre que les vecteurs propres sont sensibles aux perturbation additives (erreurs d'arrondi, erreurs de troncature) : deux matrices proches avec deux configurations spectrales divergentes !

Dans les problèmes inverses, la situation est plus critiques, et les méthodes standards sont limitées et ne répondent pas à la spécificité et le de degré de complexité de cette catégorie de problèmes mal posés.

Dans notre travail, on va adapter une nouvelle stratégie d'approximation introduite et justifiée numériquement par LARS ELDÉN et VALERIA SIMONCINI dans un article récent ²⁰⁰⁹ [61]. Le principe de cette méthode est basé sur une procédure de projection sur un espace de Krylov bien approprié. Cette approche a été exploitée avec succès dans l'approximation de certaines équations aux dérivées partielles (cf.  [52, 53, 73, 86, 99, 100, 142, 143],  [125]), et récemment pour des problèmes de Cauchy mal posés ²⁰⁰⁹ [61], ²⁰¹⁰ [46, 162]. Pour les questions liées à l'accélération de la méthode, on renvoie à la liste des travaux (cf.  [54, 70, 102, 142], ^{1995,1996} [130, 163], ^{2005,2008,2010} [180, 58, 158, 89],  [25, 167]).

L'approche standard consiste à générer l'espace de Krylov $\mathcal{K}_m(A_N, h_N) = \text{vect} \{h_N, A_N h_N, \dots, A_N^{m-1} h_N\}$ par une procédure itérative (cf. Algorithme 2).

Soient $(q_i)_{i=1}^m$ la base orthonormée de $\mathcal{K}_m(A, h_N)$ avec $q_1 = \frac{h_N}{\|h_N\|}$, $Q_m = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ et $T_m = Q_m^T A Q_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la représentation symétrique de A sur l'espace \mathcal{K}_m . L'approximation de (4.1.1) dans le triplet de Krylov $\mathbf{K}_m = (\mathcal{K}_m(A, h_N), Q_m, T_m)$ est donnée par :

$$U_{\mathcal{K}_m}^m(z; h_N) = \|h_N\| Q_m \frac{\sinh((z_1 - z) \sqrt{T_m})}{\sinh((z_1 - \tau) \sqrt{T_m})} e_1, \quad (4.1.3)$$

où $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$.

Remarque 4.1.1. L'approximation (4.1.3) converge vers la solution (4.1.1), et le type de convergence est super-linéaire.

Pour l'estimation d'erreur entre $U_N(0)$ et $U_{\mathcal{K}_m}^m(0)$, on remarque que le choix $\tau = \frac{1}{2} z_1$ facilite les calculs, et nous permet d'établir l'estimation d'erreur $\|\Delta_m(0)\| = \|U_N(0) - U_{\mathcal{K}_m}^m(0)\|$.

Pour $\tau = \frac{1}{2} z_1$, on a la formule simplifiée suivante :

$$\frac{\sinh(z_1 \sqrt{\lambda})}{\sinh\left(\frac{z_1}{2} \sqrt{\lambda}\right)} = \frac{2 \cosh\left(\frac{z_1}{2} \sqrt{\lambda}\right) \sinh\left(\frac{z_1}{2} \sqrt{\lambda}\right)}{\sinh\left(\frac{z_1}{2} \sqrt{\lambda}\right)} = 2 \cosh\left(\frac{z_1}{2} \sqrt{\lambda}\right), \quad \lambda \geq 0.$$

En s'inspirant de la note de ELDÉN & SIMONCINI ²⁰¹⁰ [174] et l'article de DRUSKIN & KNIZHNERMAN  [52], on montre le résultat suivant :

Théorème 4.1.1. Soient $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ une matrice symétrique définie positive, $\psi \in \mathbb{R}^N$ avec $\|\psi\| = 1$, $\lambda_{\min} = \min \sigma(A)$, $\lambda_{\max} = \max \sigma(A)$, $a = \tau \sqrt{\lambda_{\max}}$ où $\tau > 0$.

Soit $Y_m = Q_m \cosh\left(\tau\sqrt{T_m}\right) e_1$ l'approximation de $Y = \cosh\left(\tau\sqrt{A}\right) \psi$ dans le triplet de Krylov $\mathbf{K}_m = \left(\mathcal{K}(A, \psi), Q_m, T_m\right)$. Si $m \leq \frac{a}{2}$ et a est suffisamment grande, alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\Delta_m\| = \|y_m - y\| \approx \frac{a}{2m} \exp\left(-a \left(\frac{m}{a}\right)^2 + O\left(\left(\frac{2m}{a}\right)^4\right)\right). \quad (4.1.4)$$


Preuve. La preuve repose sur le développement de la fonction $\cosh\left(\tau\sqrt{A}\right)$ en série de Chebychev de la forme :

$$\cosh\left(\tau\sqrt{A}\right) = I_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_{2k}(a) \mathcal{T}_k(B), \quad (4.1.5)$$

où les \mathcal{T}_k sont les polynômes de Chebychev du degré k , et les I_j sont les fonctions de Bessel modifiées.

Pour justifier cette étape, introduisons les variables suivantes :

$$B = I - \frac{2A}{\lambda_{\max}}, \quad a = \tau\sqrt{\lambda_{\max}}, \quad \tau > 0.$$

Soit θ tel que $B = \cos(2\theta)$. En utilisant la formule (no 9.6.35, p. 376) donnée dans le livre de ABRAMOWITZ  [2] :

$$e^{a \sin \theta} = I_0(a) + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_{2k+1}(a) \sin((2k+1)\theta) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_{2k}(a) \cos(2k\theta),$$

et la propriété $I_k(a) = (-1)^k I_k(-a)$ pour $(k = 0, 1, \dots)$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \cosh(a \sin \theta) &= \frac{1}{2} \left(e^{a \sin \theta} + e^{-a \sin \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} (I_0(a) + I_0(-a)) \\ &\quad + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_{2k+1}(a) \sin((2k+1)\theta) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_{2k}(a) \cos(2k\theta) \\ &\quad + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_{2k+1}(-a) \sin((2k+1)\theta) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_{2k}(-a) \cos(2k\theta) \\ &= I_0(a) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_{2k}(a) \cos(2k\theta). \end{aligned}$$

De l'égalité $\theta = \frac{1}{2} \arg \cos(B)$, il s'ensuit

$$\cos(2k\theta) = \mathcal{T}_k(B), \quad \cosh(a \sin \theta) = \cosh\left(a \sqrt{1 - \cos^2 \theta}\right) = \cosh\left(a \sqrt{\frac{(I-B)}{2}}\right).$$

En tenant compte de $a \sqrt{\frac{(I-B)}{2}} = \tau \sqrt{A}$, on arrive enfin à montrer l'existence du développement en série de Chebyshev de la fonction $\cosh(\tau \sqrt{A})$.

En se basant sur le Thm. 2 (DRUSKIN & KNIZHNERMAN [52]) et le développement (4.1.5), on peut écrire

$$Y = I_0(a)Q_m e_1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k I_{2k}(a) Q_m \mathcal{T}_k\left(\sqrt{T_m}\right) e_1 + 2 \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(a) \mathcal{T}_k(B) \psi \quad (4.1.6)$$

$$Y_m = I_0(a)Q_m e_1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(a) Q_m \mathcal{T}_k\left(\sqrt{T_m}\right) e_1, \quad (4.1.7)$$

d'où

$$Y - Y_m = 2 \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(a) \left(\mathcal{T}_k(B) \psi - Q_m \mathcal{T}_k\left(\sqrt{T_m}\right) e_1 \right).$$

En utilisant les propriétés $\|B\| \leq 1$, $\|\mathcal{T}_k(B)\| \leq 1$, $\|\mathcal{T}_k(\sqrt{T_m})\| \leq 1$ et $\|Q_m\| = \|\psi\| = \|e_1\|$, on obtient l'estimation suivante

$$\|\Delta_m\| \leq 2 \sum_{k=m}^{+\infty} |I_{2k}| \left(\|\mathcal{T}_k(B)\| \|\psi\| + \|Q_m\| \|\mathcal{T}_k(\sqrt{T_m})\| \|e_1\| \right) \leq 2 \sum_{k=m}^{+\infty} |I_{2k}|. \quad (4.1.8)$$

En vertu du comportement asymptotique ([52], preuve du Thm. 4) :

$$I_k(a) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (k^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\left(k^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}} - k \operatorname{argsinh}\left(\frac{k}{a}\right)\right) (1 + O(a^{-1})), \quad \left(\frac{2m}{a} \leq 1\right),$$

l'inégalité (4.1.8) prend la forme

$$\|\Delta_m\| \leq c(a) \sum_m^{+\infty} \exp\left(\left((2k)^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}} - 2k \operatorname{argsinh}\left(\frac{2k}{a}\right)\right). \quad (4.1.9)$$

Notons $t \mapsto (t^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - t \operatorname{argsinh}\left(\frac{t}{a}\right) = G(t)$, $t > 0$. On voit que

$$\begin{aligned} \frac{dG(t)}{dt} &= \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)}} - \frac{t}{\sqrt{(t^2 + a^2)}} - \operatorname{argsinh}\left(\frac{t}{a}\right) \\ &= -\operatorname{argsinh}\left(\frac{t}{a}\right) \leq 0, \end{aligned}$$

donc $G(t)$ est décroissante.

Une application directe du Théorème des accroissements finis sur la fonction $G(t)$ dans l'intervalle $[2m, 2k]$, ($k \geq m$), donne

$$G(2k) - G(2m) = (2k - 2m)G'(c) = -2(k - m) \arg \sinh \left(\frac{c}{a} \right), \quad (c \in]2m, 2k[),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} G(2k) - G(2m) &= (2k - 2m)G'(c) \leq -2(k - m) \arg \sinh \left(\frac{2m}{a} \right), \\ \frac{\exp(G(2k))}{\exp(G(2m))} &= \exp(G(2k) - G(2m)) \leq \exp \left(-2(k - m) \arg \sinh \left(\frac{2m}{a} \right) \right) \\ &= \left(\exp \left(\log \left(\frac{2m}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{2m}{a} \right)^2} \right) \right) \right)^{-2(k-m)} = \left(\frac{2m}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{2m}{a} \right)^2} \right)^{-2(k-m)} \\ &\leq \left(1 + \frac{2m}{a} \right)^{-2(k-m)}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{+\infty} \exp(G(2k)) &= \sum_{k=m}^{+\infty} \exp \left(\left((2k)^2 + a^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 2k \arg \sinh \left(\frac{2k}{a} \right) \right) = \exp(G(2m)) \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{\exp(G(2k))}{\exp(G(2m))} \\ &= \exp \left(\left((2m)^2 + a^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 2m \arg \sinh \left(\frac{2m}{a} \right) \right) \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{\exp \left(\left((2k)^2 + a^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 2k \arg \sinh \left(\frac{2k}{a} \right) \right)}{\exp \left(\left((2m)^2 + a^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 2m \arg \sinh \left(\frac{2m}{a} \right) \right)} \\ &\leq \exp \left(\left((2m)^2 + a^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 2m \arg \sinh \left(\frac{2m}{a} \right) \right) \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{2m}{a} \right)^2} \right)^j, \end{aligned}$$

et par un calcul élémentaire, cette dernière inégalité peut se simplifier comme suit

$$\sum_{k=m}^{+\infty} \exp(G(2k)) \leq \left(\frac{a}{m} \right) \exp(G(2m)). \quad (4.1.10)$$

D'autre part, le développement de Maclaurin : $\arg \sinh(z) = z - \frac{z^3}{6} + \dots$, nous permet de simplifier le terme $G(2m)$:

$$G(2m) = \left((2m)^2 + a^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 2m \arg \sinh \left(\frac{2m}{a} \right) \approx -a \left(\left(\frac{m}{a} \right)^2 + O \left(\left(\frac{2m}{a} \right)^4 \right) \right). \quad (4.1.11)$$

En combinant (4.1.9), (4.1.10) et (4.1.11), on trouve

$$\|\Delta_m\| \approx c(a) \left(\frac{a}{m}\right) \exp\left(-a \left(\frac{m}{a}\right)^2 + O\left(\left(\frac{2m}{a}\right)^4\right)\right).$$

Ce qui achève la démonstration du Thm. 4.1.1. □

4.1.1.1 Accélération de la convergence par la méthode Shift-Inverted

En général, les méthodes de Krylov convergent trop lentement en arithmétique flottante. Pour remédier à ce phénomène, les procédures de préconditionnement ou les transformations spectrales « *décalage-inversion* » (en anglais *shift-invert*) sont souvent recommandées pour améliorer la convergence de la méthode de calcul utilisée (cf. [17], section 4.4.3).

Pour des raisons de simplicité, on choisit comme espace de projection, le sous-espace de Krylov

$$\mathcal{K}_m(A_N^{-1}, h_N^\varepsilon) = \text{vect} \{h_N^\varepsilon, A^{-1}h_N^\varepsilon, \dots, A^{-(m-1)}h_N^\varepsilon\}.$$

Remarque 4.1.2.

1. Dans la version générale « shift-invert », le sous-espace de projection est $\mathcal{K}_m((A_N - sI)^{-1}, h_N^\varepsilon)$.
2. Le choix $s = \lambda_c/2$ permet un calcul rapide des valeurs propres dans l'intervalle $\in [0, \lambda_c]$.

Schéma d'approximation

On procède par l'algorithme d'Arnoldi (cf.  [17]), on construit le triplet de Krylov

$$\mathbf{K}_m = (\mathcal{K}_m(A_N^{-1}, h_N^\varepsilon), Q_m, T_m^{-1})$$

suivant la relation de récurrence :

$$A^{-1}Q_m = Q_m T_m + \beta_{m+1} q_{m+1} e_m^\top, \quad q_{m+1}^\top Q_m = 0.$$

Soit $\left(\left(\theta_j^{(m)}\right)^2\right)_{j=1, \dots, m}$ les valeurs propres de T_m^{-1} , et $\left(y_j^{(m)}\right)_{j=1, \dots, m}$ les vecteurs propres de T_m^{-1} .

Puisque $\left(\left(\theta_j^{(m)}\right)^2, Q_m y_j^{(m)}\right)_{j=1, \dots, m}$ approchent les couples propres de A_N , alors d'après la représentation

$$\sinh\left((z_1 - z) T_m^{-\frac{1}{2}}\right) \left(\sinh(z_1 - \tau) T_m^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} (\cdot) = \sum_{j=1}^m y_j^{(m)} \frac{\sinh\left((z_1 - z)\theta_j^{(m)}\right)}{\sinh\left((z_1 - \tau)\theta_j^{(m)}\right)} \left(y_j^{(m)}\right)^\top (\cdot),$$

l'approximation du vecteur $V_c(z, h_N^\varepsilon)$ (formule (4.1.2)) dans le triplet de Krylov $\mathbf{K}(A_N^{-1}, h_N^\varepsilon)$ prend la forme :

$$V_c^m(z; h_N^\varepsilon) = \left\| h_N^\varepsilon \right\| Q_m \sum_{\theta_j \leq \lambda_c} y_j^{(m)} \frac{\sinh\left((z_1 - z)\theta_j^{(m)}\right)}{\sinh\left((z_1 - \tau)\theta_j^{(m)}\right)} \left(y_j^{(m)}\right)^\top e_1. \quad (4.1.12)$$



4.2 Estimation d'erreur discrete

Notre objectif ici est d'établir une estimation d'erreur similaire à l'estimation (3.2.2) dans le cas discret. Pour ce faire, introduisons les notations suivantes :

Soit $\mathcal{V}_\lambda := N(A - I\lambda) = \{\xi \in \mathbb{R}^N : A\xi = \lambda\xi\}$ le sous espace associé à la valeur propre λ de A_N .

Notons $X(\lambda_c) := \bigoplus_{\lambda \leq \lambda_c} \mathcal{V}_\lambda$ le sous espace invariant des valeurs propres $\lambda \leq \lambda_c$.

Soit matrice $G(\lambda_c) :=$ la matrice dont ses colonnes sont formées par les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda \leq \lambda_c$,

$E^c :=$ le projecteur orthogonal sur le sous espace $X(\lambda_c)$. Il est bien connu que la matrice associée à E^c est donnée par $G(\lambda_c) G^\top(\lambda_c)$ (cf.  [154],  [184]).

Soit $F(z, \lambda) = \frac{\sinh\left((z_1 - z)\sqrt{\lambda}\right)}{\sinh\left((z_1 - \tau)\sqrt{\lambda}\right)}$, et soit A_N^c la restriction de A_N sur le sous-espace invariant $X(\lambda_c)$.

Posons $T_m^{-1} = S_m$, et soit S_m^c la restriction de S_m sur le sous-espace invariant $X(\lambda_c)$.

D'après (4.1.1), on a $U_N(z) = F(z, A_N) h_N$, et $V_c^m(z; h_N^\varepsilon) = Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top h_N^\varepsilon$.

On souhaite estimer l'écart $\delta_m = \|U_N(z; h_N) - V_c^m(z; h_N^\varepsilon)\|$ qui va nous permettre de fixer un critère d'arrêt à partir du seuil de saturation de l'algorithme du calcul proposé.

On a

$$\begin{aligned} \delta_m &= \left\| F(z, A_N) h_N - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top h_N^\varepsilon \right\| \\ &\leq \left\| (F(z, A_N) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top) h_N \right\| + \left\| Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top (h_N - h_N^\varepsilon) \right\| \\ &= \alpha^{(1)} + \beta^{(1)}. \end{aligned}$$

Comme dans le lemme (3.2.1), $\beta^{(1)}$ peut être estimé comme suit :

$$\beta^{(1)} \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} \right) \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1 - \frac{z}{\tau}}. \quad (4.2.1)$$

Pour le terme $\alpha^{(1)}$, on le décompose en deux termes moyennant l'opérateur de projection E^c et $h_N = F(0, A_N)^{-1} \varphi_N$:

$$\alpha^{(1)} = \left\| \left(F(z, A_N) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top \right) h_N \right\| \leq \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)},$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= \left\| (I - E^c) \left(F(z, A_N) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top \right) h \right\| \\ &= \left\| (I - E^c) \left(F(z, A_N) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top \right) \left(F(0, A_N)^{-1} \right) \varphi_N \right\|, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &\leq \left\| (I - E^c) \left(F(z, A_N) \right) \left(F(0, A_N)^{-1} \right) \varphi \right\| \\ &\quad + \left\| (I - E^c) \left(F(z, A_N^c) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top \right) \left(F(0, A_N)^{-1} \right) \varphi_N \right\|. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Puisque $(I - E^c) F(z, A_N^c) = 0$, alors on a

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &\leq \left\| (I - E^c) \left(F(z, A_N) \right) \left(F(0, A_N)^{-1} \right) \varphi_N \right\| \\ &\quad + \left\| (I - E^c) \left(F(z, A_N^c) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top \right) \left(F(0, A_N)^{-1} \right) \varphi_N \right\|. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

En vertu du Lemme (3.2.2), le premier terme du côté droit de (4.2.4) peut être estimé comme suit :

$$\left\| (I - E^c) \left(F(z, A_N) \right) \left(F(0, A_N)^{-1} \right) \varphi_N \right\| \leq \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1-\frac{z}{\tau}},$$

et le second terme est dominé par $\left\| \left(F(z, A_N) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top \right) h_N \right\|$ car $\|I - E^c\| \leq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \alpha_2^{(1)} &= \left\| E^c \left(F(z, A_N) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top \right) h_N \right\| \\ &= \left\| E^c \left(F(z, A_N^c) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top \right) h_N \right\| \leq \left\| \left(F(z, A_N^c) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top \right) h_N \right\|. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on peut formuler le théorème suivant :

Théorème 4.2.1. *Soit $U_N(z, h_N)$ (resp. $V_c^m(z, h_N^\varepsilon)$) le vecteur défini par la formule (4.1.1) (resp. (4.1.12)), et supposons que les hypothèses du Théorème 3.2.1 sont vérifiées. Alors on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\left\| U_N(z, h_N) - V_c^m(z, h_N^\varepsilon) \right\| \leq \left(\frac{z_1 - z}{z_1 - \tau} + 1 \right) \varepsilon^{\frac{z}{\tau}} M^{1-\frac{z}{\tau}} + 2 \left\| \left(F(z, A_N^c) - Q_m F(z, S_m^c) Q_m^\top \right) h_N \right\|. \quad (4.2.5)$$


► Les deux termes du côté droit de la formule (4.2.5) nous fournissent le bilan d'erreur, et la convergence sera guidée par le second terme. Pour avoir une bonne convergence, il faut que les valeurs et les vecteurs de Ritz soient suffisamment proches aux couples propres de la matrice A_N .

4.3 Exécution

On commence tout d'abord par la construction de la matrice $Q_m = [q_1, q_2, \dots, q_m]$, où les colonnes q_1, \dots, q_m forment la base du sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_m(A_N^{-1}, h_N^\varepsilon)$. Cette construction intervient l'algorithme de Lanczos (1.4.7), plus précisément, on pose :

$q_0 = 0$, $q_1 = \frac{h_N^\varepsilon}{\|h_N^\varepsilon\|}$, et les autres colonnes seront calculées par la relation de récurrence :

$$A^{-1}q_j = \beta_{j+1}q_{j+1} + \alpha_j q_j + \beta_{j-1}q_{j-1}, \quad j = 1, m$$

avec $\alpha_j = q_j^\top A^{-1}q_j$ et $\beta_j = q_{j+1}^\top A^{-1}q_j$ (cf.  [17, 82, 168]).

- L'expression (4.1.12) se calcule par l'algorithme suivant :

donner $A_N, z, h_N^\varepsilon, \text{tol}, \text{maxit}, \lambda_c$.

$$q_0 = 0, q_1 = \frac{h_N^\varepsilon}{\|h_N^\varepsilon\|}, Q_1 = q_1, \beta_0 = 0.$$

Pour j de 1 à maxit faire

calculer $\tilde{q} = A^{-1}q_j - q_{j-1}\beta_{j-1}$

calculer $\alpha_j = q_j^\top \tilde{q}$

calculer $\tilde{q} = \tilde{q} - q_j\alpha_j$

calculer $\beta_j = \|\tilde{q}\|$ et $q_{j+1} = \frac{\tilde{q}}{\beta_j}$

evaluer T_j

calculer les valeurs et les vecteur propres $((\theta_i^{(j)})^2, y_i^{(j)})$ de T_j^{-1}

$$\text{calculer } w_j = \sum_{\theta_i^{(j)} \leq \lambda_c} y_i^{(j)} \frac{\sinh((z_1 - z)\theta_i^{(j)})}{\sinh((z_1 - \tau)\theta_i^{(j)})} (y_i^{(j)})^\top e_1 \|h_N^\varepsilon\|$$

Si $(j > p)$ Alors

calculer le résidu $r_{j-p}^{(j)}$

Si $(j > p + 1)$ et $\frac{\|r_{j-p-1}^{(j-1)}\| - \|r_{j-p}^{(j)}\|}{\|r_{j-p}^{(j)}\|} \leq \text{tol}$ Alors

calculer $v_{j-p} = Q_{j-p} w_{j-1}$ et stop

Fin Si

Fin Si

evaluer $Q_{j+1} = [Q_j, q_{j+1}]$.

Fin Pour

Algorithme 3: Calcul de l'approximation $V_c^m(z; h_N^\varepsilon)$



Conclusion et perspectives

- Dans ce travail, on a étudié un problème inverse elliptique du type « complétion de données », où des résultats de stabilisation et de régularisation ont été établis dans le cas continu et discret. Des estimations d'erreurs sont aussi démontrées, et la convergence de la méthode est justifiée théoriquement.
- La réalisation d'une expérimentation numérique nécessite un travail de calcul parallèle très complexe, ce qui est impossible pour le moment, vu le manque de logiciels du calcul numérique parallèle et le temps de réalisation d'un projet de Magister.
- On doit mentionner ici que le travail réalisé dans ce mémoire, rentre dans le cadre d'un projet de recherche de l'équipe **WG-IIPP**. du Laboratoire de Mathématiques Appliquées (Annaba), dont l'objectif principal est de construire un package "produit maison" contient toutes les variantes de la méthode de Krylov.
- Dans le futur prochain, on projette de programmer d'autres sous-espaces de Krylov très sophistiqués dont le but est d'améliorer la vitesse de convergence. On souhaite aussi introduire une méthode pratique pour calculer le résidu approximatif par lequel on peut fixer un critère d'arrêt d'avance, où on est sûr qu'on est dans la marge de convergence.
- La résolution des problèmes inverses par les méthodes de Krylov est un sujet très ambitieux et plein de problèmes ouverts, qui méritent un effort très sérieux. Pour cela on a choisit ce sujet, malgré le degré de difficulté, et le niveau très élevé de la compétition avec les spécialistes de ce domaine.



Bibliographie

- [1] L.S. ABDULKERIMOV ; *Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space*, Azerbaidzan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Fiz. Mat., **1** (1977), 32-36 (MR0492645) (in Russian).
- [2] M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN ; **Handbook of Mathematical Functions**, Dover (1965).
- [3] M. AFANASJEW, M. EIERMANN, O.G. ERNST, & S. GÜTTEL ; *Implementation of a restarted Krylov subspace method for the evaluation of matrix functions*, Linear Algebra and its Applications, **429** (2008), 2293-2314.
- [4] S. AGMON & L. NIRENBERG ; *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space*, Commun. Pure Appl. Math., **16**, No. 2 (1963), 121-239.
- [5] S. AGMON & L. NIRENBERG ; *Lower bounds and uniqueness theorems for solutions of differential equations in Hilbert space*, Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), 207-229.
- [6] M. S. AGRANOVICH ; *Elliptic boundary problems*, Encycl. Math. Sci., **79**. Part. Different. Equat., Springer, Berlin (1997), 1-144.
- [7] G. ALESSANDRINI ; *Stable determination of a crack from boundary measurements*, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A **123** (1993) 497-516.
- [8] G. ALESSANDRINI, L. RONDI, E. ROSSET, & S. VESSELLA ; *The stability for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems, **25** (2009), 123004 (47pp).
- [9] F. O. ALPAK, C. TORRES-VERDYN, K. SEPEHRNOORI, S. FANG, & L. KNIZHNERMAN ; *An extended Krylov subspace method to simulate single-phase fluid flow phenomena in axisymmetric and anisotropic porous media*, J. of Petroleum Science and Engineering, (2003), **40**, 121-144.
- [10] K.A. AMES & B. STRAUGHAN ; **Non-Standard and Improperly Posed Problems**, Academic Press (1997).
- [11] R.S. ANDERSON AND V.A. SAULL ; *Surface temperature history determination from borehole measurements*, J. Int. Assoc. Math. Geology, **5** (1973), 269-283.
- [12] S. ANDRIEUX, T. N. BARANGER, & A. BEN ABDA ; *Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional*, Inverse Problems **22** (2006), 115-133.
- [13] D.D. ANG, R. GORENFLO, V.K. LE, & D.D. TRONG ; **Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2002).
- [14] P. ARBENZ & D. KRESSNER ; **Lecture Notes on Solving Large Scale Eigenvalue Problems**, Springer (2010).
- [15] M.E. ARGENTATI ; *Principal angles between subspaces as related to Rayleigh quotient and Ritz inequalities with application to eigenvalue accuracy and eigenvalue solver*, Ph.D. Thesis, Denver-Colorado University (2003).
- [16] M. AZAÏEZ, F. B. BELGACEM, & H. EL. FEKIH ; *On Cauchy's problem : II. Completion, regularization and approximation*, Inverse Problems **22** (2006), 1307-1036.

- [17] Z. BAI, J. DEMMEL, DONGARRA J, A. RUHE, & H. VAN DER VORST ; **Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems : A Practical Guide** , SIAM, Philadelphia (2000).
- [18] J. BAUMEISTER & A. LEITAO ; *On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations*, J. Inv. Ill-Posed Problems., Vol. **9.1** (2001), 1-17.
- [19] J. BAGLAMA & L. REICHEL ; *Decomposition methods for large linear discrete ill-posed problems*, J. Comput. Appl. Math., **198** (2007), 332-342.
- [20] J.V. BECK, B. BLACKWELL, & C.R.ST. CLAIR ; **Inverse Heat Conduction, Ill-Posed Problem**, Wiley-New York (1985).
- [21] F. B. BELGACEM ; *Why is the Cauchy problem severely ill-posed ?*, Inverse Problems **23** (2007), 823-836.
- [22] A.BEN ABDA, J.HENRY, & F. JDAY ; *Missing boundary data reconstruction by the factorization method*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **347** (2009).
- [23] A. BEN-ISRAEL & N.E. GREVILLE THOMAS ; **Generalized inverses**, Springer-Verlag (2003).
- [24] M. BENZI & N. RAZOUK ; *Decay bounds and $O(n)$ algorithms for approximating functions of sparse matrices*, Electron. Trans. Numer. Anal., **28** (2007), 16-39.
- [25] N.S. BERNARD, Y. SAAD, & B.S. ROGER ; *Computing $\exp(-\tau A)$ with Laguerre Polynomials*, ETNA (2010), Vol. **37**, 147-165.
- [26] F. BERNTSSON & L. ELDÉN ; *Numerical solution of a Cauchy problem for the Laplace equation*, Inverse Problems **17** (2001), 839-854.
- [27] A. A. BJÖRCK, E. GRIMME, & P. VAN DOOREN ; *An implicit shift bidiagonalization algorithm for ill-posed systems*, BIT **34** (1994), 510-34.
- [28] L. BOURGEOIS, *Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **21** (2005), No. **3**, 1087-1104.
- [29] L. BOURGEOIS, *A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **22** (2006), 413-430.
- [30] JU. M. BEREZANSKII ; **Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1968).
- [31] C. BREZINSKI ; **Biorthogonality and its Application to Numerical Analysis**, Marcel Dekker, New York (1992).
- [32] C. BREZINSKI ; **Projection Methods for Systems of Equations**, North-Holland, Amsterdam (1997).
- [33] C. BREZINSKI & M. REDIVO-ZAGLIA ; **Méthodes Numériques Itératives**, Ellipse (2006).
- [34] P. BRIANZI, P. FAVATI, O. MENCHI, & F. ROMANI ; *A framework for studying the regularizing properties of Krylov subspace methods*, Inverse Problems, (2006), **22**, 1007-1021.
- [35] C.G. BROYDEN & M.T. VESPUCCI ; **Krylov Solvers for Linear Algebraic Systems**, Elsevier B.V. (2004).
- [36] H.D. BUI ; **Fracture Mechanics, Inverse Problems and Solutions**, Springer (2006).
- [37] G. CAIN & G. MEYER ; **Separation of Variables for Partial Differential Equations : An Eigenfunction Approach** , Studies in Advanced Mathematics vol. 46, London : Chapman and Hall (2006).
- [38] D. CALVETTI & L. REICHEL ; *Lanczos-based exponential filtering for discrete ill-posed problems*, Numer. Algorithms, **29** (2002), 45-65.
- [39] D. CALVETTI, B. LEWIS, & L. REICHEL ; *On the regularizing properties of the GMRES method*, Numer. Math., **91** (2002), 605-625.

- [40] D. CALVETTI, L. REICHEL, & A. SHUIBI ; *Enriched Krylov subspace methods for ill-posed problems*, Linear Algebra Appl., **362** (2003), 257-273.
- [41] H.CAO, M.V. KLIBANOV, & S.V. PEREVERZEV, *A Carleman estimate and the balancing principle in the quasi-reversibility method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation*, Inverse Problems **25** (2009), 035005 (21pp).
- [42] J.R. CANNON ; **The One-Dimensional Heat Equation**, in The Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 23, Addison-Wesley, Reading, MA., (1984).
- [43] A. S. CARASSO ; *Overcoming Hölder continuity in ill-posed continuation problems*, SIAM J. Numer. Anal., **31(6)** (1994), 1535-1557.
- [44] A. S. CARASSO ; *Logarithmic convexity and the "slow evolution" constraint in ill-posed initial value problems*, SIAM J. Math. Anal., **30(3)** (1999), 479-496.
- [45] K. CHEN ; **Matrix preconditioning technic and application**, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics (2005).
- [46] I. CHERLENYAK ; *Regularization of the Cauchy problem for the Laplace equation by the conjugate gradient method*, Ph.D. Thesis, Universität Siegen, Department of Mathematics (2010).
- [47] J. CHEN, M. ANTESCU, & Y. SAAD ; *Computing $f(A)b$ via least squares polynomial approximations*, Preprint ANL/MCS-P1693-1109 (june 2010).
- [48] HAO CHENG, CHU-LI FU, & XIAO-LI FENG ; *Determining surface heat flux in the steady state for the Cauchy problem for the Laplace equation*, Applied Mathematics and Computation **211** (2009), 374-382.
- [49] M. CHIPOT, **Elliptic Equations : An Introductory Course** , Birkhäuser Verlag AG (2009).
- [50] M. CHOULLI ; **Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques** , Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009).
- [51] A. M. DENISOV, E. V. ZAKHAROV, A. V. KALININ, & V. V. KALININ ; *Numerical Methods for Some Inverse Problems of Heart Electrophysiology*, Differential Equations (2009) Vol. **45**, No. 7, 1034-1043.
- [52] V. DRUSKIN & L.A. KNIZHNERMAN ; *Two polynomial methods of calculating functions of symmetric matrices*, USSR Comput. Math. Math. Phys., Pergamon Press, Inc., Vol. **29(6)** (1989), 112-121.
- [53] V. DRUSKIN & L. KNIZHNERMAN ; *Krylov subspace approximation of eigenpairs and matrix functions in exact and computer arithmetic*, Numer Linear Algebra Appl. **2** (1995), 205-217.
- [54] V. DRUSKIN & L. KNIZHNERMAN ; *Extended Krylov subspaces : approximation of the matrix square root and related functions*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **19** (1998), 755-771.
- [55] V. DRUSKIN, C.LIEBERMAN, & M. ZASLAVSKY ; *On adaptive choice of shifts in rational Krylov subspace reduction of evolutionary problem*, Preprint (2010), Massachusetts Institute of Technology.
- [56] N. DUNFORD & J. T. SCHWARTZ ; **Linear Operators Part II : Spectral Theory. Self Adjoint Operators in Hilbert Space** , New York Interscience (1963).
- [57] C. DYLYN ; *A discrepancy principle for parameter selection in local regularization of linear Volterra inverse problems*, Ph.D. Thesis, Michigan State University (2007).
- [58] A.N. DYWAYNE, *Restarting the Lanczos Algorithm for Large Eigenvalue Problems and Linear Equations*, Ph.D. Thesis, Graduate Faculty of Baylor University (2008).
- [59] M. EIERMANN & O. ERNST ; *A restarted Krylov subspace method for the evaluation of matrix functions*, SIAM J. Numer. Anal., (2006), **44(6)** : 2481-2504.

- [60] L. ELDÉN ; **Matrix Methods in Data Mining and Pattern Recognition** , SIAM (2007).
- [61] L. ELDÉN & V. SIMONCINI ; *Numerical Solution of a Cauchy Problem for an Elliptic Equation by Krylov Subspaces*, Inverse Problems, Vol. **25**, (2009) 065002(6).
- [62] H.W. ENGL, M. HANKE, & A. NEUBAUER ; *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic (2000).
- [63] O.G. ERNST ; *Minimal and Orthogonal Residual Methods and their Generalizations for Solving Linear Operator Equations*, Fakultät für Mathematik und Informatik der TU Bergakademie Freiberg (2000).
- [64] L. C. EVANS, **Partial Differential Equations** , Providence, RI : American Mathematical Society (1998).
- [65] H.O. FATTORINI ; **The Cauchy Problem** , Encyclopedia of Mathematics and Applications, **18**, Cambridge University Press (1983).
- [66] G. FICHERA ; **Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems**, Book Series Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin-Heidelberg (1965).
- [67] C.M. DA FONSECA ; *On the eigenvalues of some tridiagonal matrices*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **200** (2007), 283-286.
- [68] D. FOX & C.PUCCI ; *The Dirichlet problem for the wave equation*, Ann. Mat Pura Appl **46** (1958), 155-182.
- [69] M.A. FREITAG ; *Inner-outer Iterative Methods for Eigenvalue Problems Convergence and Preconditioning*, Ph.D. Thesis, University of Bath (2007).
- [70] A. FROMMER & V. SIMONCINI ; **Matrix Functions Schilders** , H.A. Vand der Vorst (ed.) Model Order Reduction : Theory, Research Aspects and Applications, Springer(2008).
- [71] A. FROMMER & V. SIMONCINI ; *Stopping criteria for rational matrix functions of Hermitian and symmetric matrices*, SIAM J. Sci. Comput., (2008), **30(3)** : 1387-1412.
- [72] A.FROMMER ; *Monotone convergence of the Lanczos approximations to matrix functions of hermitian type*, Elect. Trans. Numerical Anal., (2009), Vol. **35**, 118-128.
- [73] E. GALLOPOULOS & Y. SAAD ; *Efficient solution of parabolic equations by Krylov approximation methods*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. **13** (1992), 1236-64.
- [74] I.P.GAVRILYUK & V. L.MAKAROV ; *Explicit and approximate solutions of second order elliptic differential equations in Hilbert and Banach spaces*, Numer. Func. Anal. Optimiz., **20** (1999), No. 7-8, 695-717.
- [75] I.P.GAVRILYUK, V. L.MAKAROV, & V.B. VASYLYK ; *Exponentially convergent approximation to the elliptic solution operator*, Computational Methods in Applied Mathematics, Vol. **6** (2006), No.4, 386-404.
- [76] I.P.GAVRILYUK, W.HACKBUSCH, & B.N.KHOROMSKIJ ; *H-matrix approximation for elliptic solution operators in cylindric domains*, East-West Journal of Numerical Analysis, **9** (2001), No. 1, 25-58.
- [77] I.P.GAVRILYUK, W.HACKBUSCH, & B.N.KHOROMSKIJ ; *H-matrix approximation for the operator exponential with applications*, Numer. Math., **92** (2002), 83-111.
- [78] I.P.GAVRILYUK, W.HACKBUSCH, & B.N.KHOROMSKIJ ; *Data- sparse approximation to the operator-valued functions of elliptic operator*, Math. Comp., **73** (2004), 1297-1324.
- [79] I.P.GAVRILYUK, W.HACKBUSCH, & B.N.KHOROMSKIJ ; *Data-sparse approximation of a class of operator-valued functions*, Math. Comp., **74** (2005), 681-708.
- [80] D. GILBARD & N. TRUDINGER ; **Elliptic partial differentials equations of second order**, Springer-Classic in Mathematics (1998).

- [81] M. S. GOCKENBACH ; **Understanding and Implementing the Finite Element Method** , SIAM Philadelphia (2006).
- [82] G.H. GOLUB & C.F.V. LOAN ; **Matrix Computations** , JH (1996).
- [83] G.H. GOLUB & G. MEURANT ; **Matrices, Moments and Quadrature with Applications**, Princeton University Press (2010).
- [84] V. I. GORBACHUK & M. L. GORBACHUK ; *Boundary-Value Problems for Operator Differential Equations*, Kluwer, Dordrecht (1991).
- [85] M. L. GORBACHUK ; *Phragmén-Lindelöf theorem for solutions of elliptic differential equations in Banach spaces*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. **59**, No. 5, 2007.
- [86] V. GRIMM & M. HOCHBRUCK *Rational approximation to trigonometric operators*, BIT (2008), vol. **48**, no. **2**, 215-229.
- [87] C. W. GROETSCH ; **Stable Approximate Evaluation of Unbounded Operators** , Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007).
- [88] G. GRUBB ; **Distributions and Operators** , Springer (2009).
- [89] S. GÜTTEL ; *Convergence Estimates of Krylov Subspace Methods for the Approximation of Matrix Functions Using Tools from Potential Theory*, Ph.D. Thesis, Technische Universität (Freiberg) (2006).
- [90] S. GÜTTEL ; *Rational Krylov Methods for Operator Functions*, Ph.D. Thesis, Technischen Universität Bergakademie (Freiberg) (2010).
- [91] J. HADAMARD ; **Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Equation** , Dover, New York (1953).
- [92] P. C. HANSEN ; **Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems. Numerical Aspects of Linear Inversion** , SIAM Philadelphia (1997).
- [93] D.N. HÀO, N.V. DUC, & D. LESNIC ; *A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems, **25** (2009), 055002(27pp).
- [94] J. HENRY, A. RAMOS ; *Factorization of second order elliptic boundary value problems by dynamic programming*, Nonlinear Analysis **59** (2004), 629-647.
- [95] J. HENRY, B. LOUROB, & M.C. SOARES ; *A factorization method for elliptic problems in a circular domain*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **339** (2004), 175-180.
- [96] J. HENRY & A. RAMOS ; *Study of the initial value problems appearing in a method of factorization of second-order elliptic boundary value problems*, Nonlinear Analysis **68** (2008), 2984-3008.
- [97] N.J. HIGHAM ; **Functions of Matrices : Theory and Computation** , SIAM (2008).
- [98] I. HNETYNKOVA, M. PLESINGER, & Z. STRAKOS ; *The regularizing effect of the Golub-Kahan iterative bidiagonalization and revealing the noise level in the data*, BIT Numerical Analysis (2009), No. 4, 669-696.
- [99] M. HOCHBRUCK, C. LUBICH, & H. SELHOFER ; *Exponential integrators for large systems of differential equations*, SIAM J. Scient. Comput., **19** (1998), 1552-15574.
- [100] M. HOCHBRUCK & C. LUBICH ; *Exponential integrators for quantum-classical molecular dynamics*, BIT, Numer. Math. **39** (1999), 620-645.
- [101] M.E. HOCHSTENBACH, *Subspace methods for eigenvalue problems*, Ph.D. Thesis, Utrecht University (2003).
- [102] M. HOCHBRUCK & M. HOCHSTENBACH ; *Subspace extraction for matrix functions* Preprint (2005), Dept. of Math., Case Western Reserve University.

- [103] M. HOCHBRUCK & J. VAN DEN ESHOF ; *Preconditioning Lanczos approximations to the matrix exponential*, SIAM J. Scient. Comput., **27** (2006), 1438-1457.
- [104] M. HOCHBRUCK & J. NIEHOFF ; *Approximation of matrix operators applied to multiple vectors*, Math. Comput. Simul., (2008), vol. **79**, no. **4**, 1270-1283.
- [105] M. HOCHBRUCK, M. HÖNIG, & A. OSTERMANN ; *Regularization of nonlinear ill-posed problems by exponential integrators*, M2NA, Vol. **43**, (2009), 709-720.
- [106] L. HÖRMANDER ; **Linear Partial Differential Operators**, Springer, Berlin (1963).
- [107] M. ILIC, D. P. SIMPSON, & I. W. TURNER ; *A Restarted Lanczos Approximation to Functions of a Symmetric Matrix*, (2009), IMA Journal of Numerical Analysis, doi : 10.1093/imanum/drp003.
- [108] V. ISAKOV ; **Inverse Problems for Partial Differential Equations** , Springer-Verlag (2006).
- [109] D.YU. IVANOV ; *Inverse boundary value problem for an abstract elliptic equation*, Differential Equations, (2000), Vol. **36**, No. **4**, 579-586.
- [110] K. JBILOU, L. REICHEL, & H. SADOK ; *Vector extrapolation enhanced TSVD for linear discrete ill-posed problems*, Numer. Algorithms, **51** (2009), 195-208.
- [111] T. K. JENSEN ; *Stabilization Algorithms for Large-Scale Problems*, Ph.D. Thesis, Technical University of Denmark, Informatics and Mathematical Modelling, Denmark (2006).
- [112] F. JOHN ; *Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound*, Comm. Pure Appl. Math., **13** (1960), 551-585.
- [113] T. SH. KAL'MENOV & U. A. ISKAKOVA ; *Criterion for the Strong Solvability of the Mixed Cauchy Problem for the Laplace Equation*, Differential Equations (2009), Vol. **45**, No. **10**, 1460-1466.
- [114] P.G. KAUP & F. SANTOSA ; *Nondestructive evaluation of corrosion damage using electrostatic boundary measurements*, J. Nondestruct. Eval., **14** (1995) 127-136.
- [115] J. B. KELLER ; *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly, **83** (1976), 107-118.
- [116] M.V. KLIBANOV & F. SANTOSA, *A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation*, SIAM J. Appl. Math. **51**, 1653-1675, 1991.
- [117] R.J. KNOPS, ed. ; **Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity**, Lecture Notes in Math. 316, Springer, New York (1973).
- [118] L. KOMZSIK ; **The Lanczos Method : Evolution and Application** , SIAM (2003).
- [119] V.A. KOZLOV & V.G. MAZ'YA ; *On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations*, Leningrad Math. J., **1** (1990), No. **5**, 1207-1228.
- [120] S.G. KREIN ; **Linear Differential Equations in Banach Space**, American Mathematical Society, Providence, RI (1971).
- [121] R. KRESS ; **Linear Integral Equations**, vol. 82 of Applied Mathematical Sciences, Springer (1989).
- [122] S.H. KULKARNI & M. T. NAIR ; *A characterization of closed range operators*, Indian J. Pure Appl. Math., **31(4)** (2000), 353-361.
- [123] S.H. KULKARNI, M.T. NAIR, & G. RAMESH ; *Some properties of unbounded operators with closed range*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. **118**, No. **4**, (2008), 613-625.
- [124] O.A. LADYZHENSKAYA & N. URAL'STSEVA ; **Equations aux Dérivées Partielles de Type Elliptique**, DUNOD, Paris (1968).

- [125] J. LAMBERS; *Krylov subspace methods for variables coefficient initial boundary value problems*, Ph.D. Thesis, Stanford University (2003).
- [126] R. LATTÈS & J.-L. LIONS; **The method of quasi-reversibility. Applications to partial differential equations**, Elsevier, New York (1969).
- [127] M.M. LAVRENTIEV; *On the Cauchy problem for the Laplace equation*, (In Russian). Izvest. Akad. Nauk SSSR (Ser. Matem.) 20 (1956), 819-842.
- [128] M.M. LAVRENTIEV; **Some Improperly Posed Problems in Mathematical Physics**, Springer-Verlag, New York (1967).
- [129] P. D. LAX; *A Phragmén-Lindelöf theorem in harmonic analysis and its applications to some questions in the theory of elliptic equations*, Commun. Pure Appl. Math., 10 (1957), 361-389.
- [130] R.B. LEHOUCQ; *Analysis and Implementation of an Implicit Restarted Arnoldi Iteration*, Ph.D. thesis, Rice University, Houston, TX (1995).
- [131] H.A. LEVINE; *Logarithmic convexity and the Cauchy problem for some abstract second order differential inequalities*, J. Differential Equations, 8 (1970), 34-55.
- [132] H.A. LEVINE & S. VESSELLA; *Estimates and regularization for solutions of some ill-posed problems of elliptic and parabolic type*, Rend. Circolo Matem. Palermo 34 (1985), 141-160.
- [133] B. LEWIS & L. REICHEL; *Arnoldi-Tikhonov regularization methods*, J. Comput. Appl. Math., 226 (2009), 92-102.
- [134] J.L. LIONS & E. MAGENES; **Problèmes aux limites Non homogènes et Applications**, vol. 1, Dunod (1968).
- [135] L. MARIN, *An alternating iterative MFS algorithm for the Cauchy problem for the modified Helmholtz equation*, Comput Mech (2010) 45, 665-677.
- [136] I.P. MARTINES; *An efficient method for approximating product of functions of matrices with vectors*, Ph.D. Thesis, Texas Tech University (2004).
- [137] G. MEURANT; **Computer Solution of Large Systems**, Elsevier, North Holland (1999).
- [138] G. MEURANT; **The Lanczos and Conjugate Gradient Algorithms**, SIAM (2006).
- [139] V. A. MIKHAILETS & A. A. MURACH; *Improved scales of spaces and elliptic boundary value problems I*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 58, No. 2, 2006.
- [140] V. A. MIKHAILETS & A. A. MURACH; *Improved scales of spaces and elliptic boundary value problems I*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 58, No. 3, 2006.
- [141] V. A. MIKHAILETS & A. A. MURACH; *Improved scales of spaces and elliptic boundary value problems I*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 58, No. 5, 2007.
- [142] I. MORET & P. NOVATI; *RD-rational approximations of the matrix exponential*, BIT, Numer. Math., 44 (2004), 595-615.
- [143] I. MORET & P. NOVATI; *A rational Krylov method for solving time-periodic differential equations*, Appl. Numer. Math., Vol. 58(3) (2008), 212-222.
- [144] I. MORET; *Rational Lanczos approximations to the matrix square root and related functions*, Numer. Linear Algebra Appl., 16 (2009), 431-445.
- [145] S. MORIGI, L. REICHEL, & F. SGALLARI; *Orthogonal projection regularization operators*, Numer. Algorithms, 44 (2007), 99-114.

- [146] V.A. MOROZOV ; *On the solution of functional equations by the method of regularization*, Soviet Math. Doklady, **7** (1966), 414-417.
- [147] V.A. MOROZOV ; **Methods for Solving Incorrectly Posed Problems**, Springer-Verlag, (1984).
- [148] A.A. MURACH ; *Extension of some Lions-Mgagenes theorems*, Methods of Functional Analysis and Topology, Vol. **15** (2009), No. 2, pp. 152-167.
- [149] M. T. NAIR ; **Linear Operator Equations : Approximation and Regularization** , World Scientific (2009).
- [150] A. NEUMAN ; *Regularization methods for ill-posed problems*, Master Thesis, Kent State University (2010).
- [151] L. NIRENBERG ; *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Commun. Pure Appl. Math., **8**, No. 4 (1955), 648-674.
- [152] D. P. O'LEARY & J. A. SIMMONS ; *A bidiagonalization-regularization procedure for large scale discretizations of ill-posed problems*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., **2** (1981), 474-89.
- [153] D. G. ORLOVSKII ; *Inverse Dirichlet Problem for an Equation of Elliptic Type*, Differential Equations (2008), Vol. **44**, No. 1, 124-133,
- [154] B. N. PARLETT ; **The Symmetric Eigenvalue Problem** , SIAM Philadelphia (1998).
- [155] L. E. PAYNE ; **Improperly posed Problems in Partial Differential Equations**, SIAM, Philadelphia, PA, (1975).
- [156] B. PHILIPPE & Y. SAAD ; **Calcul des valeurs propres**, Mathématiques pour l'ingénieur, **AF 1224**, (2008).
- [157] M. POPOLIZIO ; *Acceleration techniques for approximating the matrix exponential*, Ph.D. Thesis, Università degli Studi di Bari, Italy (2008).
- [158] M. POPOLIZIO & V. SIMONCINI ; *Acceleration techniques for approximating the matrix exponential operator*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **30** (2008), 657-683.
- [159] A.I. PRILEPKO, D.G. ORLOVSKY, & I.A. VASIN ; **Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics**, p. cm. Monograph and textbooks in pure and applied mathematics **222**, Marcel Dekker (2000).
- [160] P.H. QUAN, D.D. TRONG, & A.P. NGOC DINH ; *A Nonlinearly Ill-Posed Problem of Reconstructing the Temperature from Interior Data*, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. **29**, Issue 3 & 4, (2008), 445-469.
- [161] A. QUARTENORI, R. SACCO, & F. SALERI ; **Méthodes Numériques pour le Calcul Scientifique**, Springer-Verlage France, Paris (2000).
- [162] Z. RANJBAR ; *Numerical Solution of Ill-posed Cauchy Problems for Parabolic Equations*, Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Scientific Computing Linköping University (2010).
- [163] R.J. RADKE ; *A Matlab implementation of the implicitly restarted Arnoldi method for large scale eigenvalue problems*, Ph.D. Thesis, Rice University (1996).
- [164] J.M. RASMUSSEN ; *Compact linear operators and Krylov subspace methods*, Master Thesis, IMM, Technical University of Denmark (2001).
- [165] L. REICHEL, G. RODRIGUEZ, & S. SEATZU ; *Error estimates for large-scale ill-posed problems*, Numer. Algorithms, **51** (2009), 341-361.

- [166] Y. ROITBERG ; **Elliptic boundary values problems in the spaces of distributions**, Kluwer Academic Publishers (1996).
- [167] Y. SAAD ; *Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator* SIAM J. Numer. Anal., Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. **29(1)** (1992), 209-228.
- [168] Y. SAAD ; **Iterative Methods for Sparse Linear Systems** , SIAM (2003).
- [169] A.A. SAMARSKII & P.N. VABISHCHEVICH ; **Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics** , Walter de Gruyter. Berlin. New York (2007).
- [170] T.SCHMELZER ; *The fast evaluation of matrix functions for exponential integrators*, Ph.D. Thesis, University of Oxford (2007).
- [171] R.B. SIDJE ; *Expokit : a software package for computing matrix exponentials*, ACM Trans. Math. Softw., ACM, Vol. **24(1)** (1998), 130-156.
- [172] D.P. SIMPSON ; *Krylov subspace methods for approximating functions of symmetric positive definite matrices with applications to statistics and anomalous diffusion*, Ph.D. Thesis, Queensland University of Technology (2008).
- [173] V. SIMONCINI & D.B. SZYLD ; *Recent computational developments in Krylov Subspace Methods for linear systems*, Numerical Linear Algebra w/Appl., (2007), Vol. **14**, No.1 , 1-59.
- [174] V. SIMONCINI & L. ELDÈN ; *An error estimate for the approximation of $\cosh(\sqrt{A})v$ in the Krylov subspace*, (Version of 14 Jan 2010). Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italy, Department of Mathematics, Linköping University, Sweden.
- [175] O. STEINBACH ; **Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems**, Springer (2008).
- [176] D.E. STEWART & T.S. LEYK ; *Error estimates for Krylov subspace approximations of matrix exponentials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **72** (1996), 359-369.
- [177] G.W. STEWART ; **Matrix Algorithms, Volume II, Eigensystems**, SIAM (2001).
- [178] N.N. TARKHANOV ; **The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations** , Mathematical Topics vol 7, Berlin : Akademie, (1995).
- [179] U. TAUTENHAHN ; *Optimal stable solution of Cauchy problems of elliptic equations*, J. Analysis and its Applications, **15** (1996), 961-984.
- [180] A. TOUHAMI ; *Utilisation des filtres de Tchebyshev et construction de préconditionneurs spectraux pour l'accélération des méthodes de Krylov*, Thèse de Doctorat, I.R.I.T. Toulouse (2005).
- [181] A.N. TIKHONOV & V.Y. ARSEININ ; **Solutions to ill-posed problems**, Winston-Wiley, New York (1977).
- [182] F. TRÖLTZSCH & I. YOUSEPT, *A regularization method for the numerical solution of elliptic boundary control problems with pointwise state constraints*, Comput Optim Appl, (2009) **42**, 43-66.
- [183] L.N. TREFETHEN & D. BAU ; **Numerical Linear Algebra (III)**, SIAM, Philadelphia, PA (1997).
- [184] N. TRUHAR & I. SLAPNIČAR ; *Relative perturbation bound for invariant subspaces of hermitian matrix*, Glasnik Matematički, Vol. **35(55)**, (2000), 221-231.
- [185] H. A. VAN DER VORST ; *An iterative solution method for solving $f(A)x = b$, using Krylov subspace information obtained for the symmetric positive definite matrix A* , J. Comput. Appl. Math., **18** (1987), 249-263.

- [186] H.A. VAN DER VORST ; **Iterative Methods for Large Linear Systems** , Mathematical Institute Utrecht University (2000).
- [187] H.A. VAN DER VORST ; **Computational methods for Large eigenvalue problems** , Mathematical Institute Utrecht University (2000).
- [188] H.A. VAN DER VORST ; **Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems** , Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [189] D.S. WATKINS ; **Fondamental of matrix computations**, Wiley-Interscience (2002).
- [190] D.S. WATKINS ; **The Matrix Eigenvalue Problem : GR and Krylov Subspaces Methods**, SIAM (2007).
- [191] D.S. WATKINS ; *The QR Algorithm Revisited*, SIAM Review, (2008) Vol. 50, No. 1, 133-145.
- [192] M. L. WHITNEY ; *Theoretical and Numerical Study of Tikhonov's Regularization and Morozov's Discrepancy Principle*, Ph.D. Thesis, Georgia State University (2009).
- [193] P. WIKSTRÖM, W. LODZIMIERZ BLASIAK, & F. BERNTSSON ; *Estimation of the transient surface temperature and heat flux of a steel slab using an inverse method*, Applied Thermal Engineering, **27** (2007), 2463-2472.
- [194] J.T. WLOKA, B. ROWLEY, & B. LAWURUK ; **Boundary Value Problems for Elliptic Systems**, Cambridge University Press (1995).
- [195] F. YANG, L. YAN, & T. WEI ; *Reconstruction of the corrosion boundary for the Laplace equation by using a boundary collocation method*, Mathematics and Computers in Simulation, **79** (2009), 2148-2156.
- [196] P. ZINGLER ; *Classical and extended Krylov subspace methods for matrix functions*, Ph.D. Thesis, Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften (2009).
- [197] **Ressources Internet**
 N. J. Higham, The Matrix Function Toolbox. <http://www.ma.man.ac.uk/higham/mftoolbox>
<http://www.comlab.ox.ac.uk/nick.trefethen/>
http://www.dm.unibo.it/simoncin/list_bysub.html
<http://www.guettel.com/>
<http://www-users.cs.umn.edu/saad/software/>
<http://www-users.cs.umn.edu/saad/books.html>
 Linear Algebra PACKage, www.netlib.org/
 A Survey of Software for Sparse Eigenvalue Problems, SLEPc Technical Report STR-6.
<http://www.grycap.upv.es/slepc>
 French-Czech Workshop on Krylov Methods for Inverse Problems, July 19-20, 2010.
<http://www.cs.cas.cz/krylov/>

