الجمـــهورية الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالــي
و البحث العلمـي
جامعة 8 مــاي 1945 قالمــة
كليــة الرياضيـات و الإعلام الآلـي
وعلـوم المـادة
قسم الرياضيـات

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

Option
Mathématique du développement

Par

M^{me}. REBEI Ghania

Intitulé

Comportement asymptotique des polynômes extrémaux associés à des mesures variables

Dirigé par : Dr. Fateh ELLAGGOUNE

Devant le jury

PRESIDENT:	Mohamed Zine AISSAOUI	M.C	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Fateh ELLAGGOUNE	M.C.A	Univ-Guelma
EXAMINATEURS :	Amar GUESMIA	M.C	Univ-Skikda
	Amar DEBBOUCHE	M.C.A	Univ-Guelma

Soutenu le 04/06/2013

Table des matières

ملـــــــــــخـــص

الغرض من هذه الرسالة هو المساهمة في دراسة السلوك التقاربي لكثيرات الحدود الحدية المرفقة بقياس بوريلي موجب σ، منته ذو حامل يشمل عدد غير منته من النقاط في المستوي المركب.

أين المجموعة هي إما دائرة الوحدة أو محيط جوردان قابل للتعديل من مجموعة غير منتهية من النقاط موجودة خارج قياس مركز و مستمر مطلقا بالنسبة لقياس بطول القوس.

ذكرنا حالة خاصة من كثيرات الحدود المتعامدة أو الناظمية.

لحل هذه المسالة و التي لا تتعلق سوى بالقياس و حامله، نبحث في إيجاد مكافئة لكثيرات الحدود الحدية.

طرق الحل المستخدمة تعتمد أساسا على دراسة معمقة للمسائل الحدية في فضاءات هاردي مع دوال هلومرفية وعلى اللوغرتمي العقدي.

الكلمات المفتاحية: السلوك التقاربي، كثيرات الحدود الحدية، قياسات متغيرة.

Abstract

The asymptotic behavior of L_p- extremal polynomials is a meeting place for various mathematical displines privilege.

The L_p-extremal polynomials form a rather special class of polynomials, this particularity it must be the fact that solution of certain extremal problems posed in $L_p\,(p>0)$.

The aim of this work is the study of asymptotic behavior a class of the extremal polynomials $(0<p<\infty)$ noted $T_{n,p}$ associated with variable measure concentrated on the unit circle. Also, we present a density theorem and a generalization of the main result to rectifiable Jordan curves and to unit cercle with the possible addition of a finite number of mass points.

Key words : Asymptotic behavior, Extremal polynomials, Varying measures.

Résumé

Le comportement asymptotique des polynômes L_p- extrémaux constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines mathématiques. Les polynômes L_p- extrémaux forment une classe assez particulière de polynômes, ils doivent cette particularité au fait qu'ils soient solutions de certains problèmes extrémaux posés dans L^p $(p > 0)$.

Le but de ce travail, est l'étude du comportement asymptotique d'une classe de polynômes extrémaux $(0 < p < \infty)$ notés $T_{n,p}$ associés à des mesures variables concentrées sur le cercle d'unité. Ainsi nous présentons le théorème de densité et une généralisation des résultats essentiels sur un contour de Jordan rectifiable et sur le cercle unité plus un nombre fini de points masses.

Mots clés : Comportement asymptotique, Polynômes extrémaux, Mesures variables.

0.1 Introduction

Les polynômes orthogonaux sont apparus au $18^{ème}$ siècle mais leur théorie n'a connue de développement important qu'au $20^{ème}$ siècle, ceci est dû à leur rapport avec d'autres branches de mathématiques, telles que la théorie des opérateurs, théorie des nombres, théorie de l'approximation, interpolation, fractions continues, approximants de Padé, analyse numériques,....

Les polynômes orthogonaux les plus connus sont les polynômes orthogonaux classiques. Parmi ces polynômes orthogonaux on peut citer ceux de Tchebychev, Hermite, Jacobi, Laguerre. Ces polynômes appartiennent à une classe très vaste de polynômes dit polynômes orthogonaux relativement à une mesure qui sont définis comme suit :

Soit σ une mesure de Borel positive sur le plan complexe dont le support contient un ensemble infini de points et tels que les moments de la mesure σ existent i.e. $z^m \in L^2(\sigma)$, pour tout $m > 0$. Alors il existe un unique système de polynômes

$$p_n(z) = p_n(\sigma, z) = k_n z^n + ..., k_n > 0,\ n = 0, 1, ...$$

orthonormés dans $L^2(\sigma)$ i.e.

$$\int p_n p_m d\sigma = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}.$$

Parfois, il est plus commode de travailler avec les polynômes orthogonaux, $Q_n(z) = \frac{1}{k_n} p_n(z) = z^n + ...$ appelés polynômes orthogonaux normalisés (monic orthogonal polynomials).

La théorie des polynômes orthogonaux comporte deux parties essentielles qui sont proches. La première traite l'aspect algébrique et l'autre analytique.

1) La partie algébrique de cette théorie est en relation avec les fonctions spéciales, les systèmes orthogonaux concrets comme ceux de Jacobie, Hahn, Askey -Wilson, les polynômes discrets, les polynômes q-orthogonaux,....

Cette partie englobe aussi la théorie des polynômes orthogonaux à plusieurs variables.

2) La deuxième partie analytique traite les questions d'analyse et ceux en rapport avec d'autres parties d'analyse mathématique. Son rôle essentiel est dans l'étude des polynômes orthogonaux sur le cercle et la droite réelle.

L'un des outils les plus importants dans l'étude des polynômes orthogonaux est le fait qu'ils minimisent la norme $L^2(\sigma)$ dans l'ensemble de tout les polynômes normalisés de degré n i.e. ils résolvent le problème extrémal suivant :

$$\|T_{n,2}\|^2_{L^2(\sigma)} = \min_{Q \in P_{n-1}} \|z^n + Q\|^2_{L^2(\sigma)} = \frac{1}{k_n^2},$$

où k_n est le cœfficient dominant du polynôme orthonormé $p_n(z)$ et P_n désigne l'ensemble des polynômes orthogonaux normalisés de degré n.

Par conséquent on voit que la propriété extrémale est complètement équivalente à celle de l'orthogonalité. Cette caractérisation de polynômes orthogonaux nous permet de définir une classe plus large de polynômes notés $T_{n,p}(z)$, dit polynômes extrémaux associés à la mesure σ, ils minimisent la norme $L^p(\sigma)$ $(0 < p < \infty)$ dans l'ensemble de tous les polynômes normalisés de degré n i.e. ils résolvent le problème extrémal suivant :

$$\|T_{n,p}\|_{L^p(\sigma)} := \min_{Q \in P_{n-1}} \|z^n + Q\|^2_{L^p(\sigma)} = m_{n,p}(\sigma).$$

L'un des plus intéressants et difficiles problèmes des polynômes extrémaux et qui rentre dans la partie (b) est celui de leur comportement asymptotique, qui consiste a trouver un équivalent de $T_{n,p}(z)$ pour n assez grand et z appartenant à l'extérieur du support de la mesure σ.

Il existe différents types de comportement asymptotique de polynômes extrémaux, dans ce contexte on peut mentionner les plus fréquents :

a) Le comportement asymptotique faible (nths-root or weak asymptotic) des polynômes orthogonaux est l'étude de la limite $(n \to \infty)$ de $\sqrt[n]{|T_n(z)|}$, $n \in \mathbb{N}$, il exige des conditions faibles et dépendent des propriétés de la régularité de la mesure σ. L'outil principal dans l'étude de ce cas est la capacité logarithmique. Parmi les applications on peut citer la distribution des zéros et leur comportement asymptotique. Nous ne traiterons pas ce type d'asymptotique, le lecteur intéressé peut consulter la monographie excellente récente ([27]) par H. Stahl and V. Totik.

b) Le Ratio asymptotique (Ratio asymptotic) est l'étude du comportement asymptotique du rapport $\dfrac{T_{n+1}(z)}{T_n(z)}$. La meilleure condition pour établir cette asymptotique de polynômes orthogonaux est que la densité de la mesure soit strictement positive. Cette condition est connue sous le nom de condition de Rakhmanov ([20, 21]).

c) Le comportement asymptotique fort (Szegö or strong asymptotics) est l'asymptotique uniforme de $T_n(z)$ sur ou à l'extérieur du support de la mesure. La condition essentielle imposée sur la mesure pour obtenir l'asymptotique fort, est la condition de Szegő, cette dernière nous permet de construire l'espace de Hardy associé et obtenir l'asymptotique à partir de la propriété extrémale des polynômes orthogonaux.

A. A. Gonchar et G. Lopez ([10]) ont été les premières personnes qui ont travaillé sur les mesures variables et c'était en 1978. Ils les a utilisés pour étudier la vitesse de la meilleure approximation sur un intervalle $E \subset \mathbb{R}$ de la transformation de Cauchy avec des mesures positives finies et dont les supports se situent dans un intervalle $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$, avec E et $\mathcal{F}$ vérifiant $E \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Les mesures variables ont été également utilisées dans d'autres travaux. Gonchar et Lopez-Lagomasino ([5]) ont étudiés les résultats généraux de la convergence de Padé multipoint utilisant la transformation de Cauchy. Par ailleurs, dans([10]) L'opez-Lagomasino a présenté les polynômes orthogonaux par rapport à des mesures variables de façon à joint les polynômes orthogonaux à l'égard des mesures à support borné et non borné, ainsi, il a prouvé des résultats asymptotique pour les polynômes orthogonaux associés à des mesures avec support non borné utilisant des polynômes orthogonaux par rapport à des mesures variables sur $|z| = 1$.

Ce mémoire se compose de trois chapitres qui présente une étude bibliographique détaillée poussée du problème de comportements asymptotiques des polynômes orthogonaux pour des mesure α et des support $\mathcal{F}$ de la forme suivante : $\alpha = \beta + \gamma$, et $\mathcal{F} = \mathbb{T} \cup \{z_k\}$ ou $\mathcal{F} = E$ avec $\mathbb{T}$ le cercle unité et E est un contour de Jordan rectifiable assez régulier ; β est concentrée sur $\mathbb{T}$ ou E et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue longueur d'arc sur $\mathbb{T}$ ou E, γ est une mesure discrète concentrée sur un nombre fini de points.

Dans le premier chapitre de ce mémoire on introduit les outils fonctionnels de base concernant les fonctions harmoniques ainsi que leurs propriétés. Pour définir la convergence sur les sous ensembles compacts de $\mathbb{C}$ qui intervient d'ailleurs en rapport avec les opérations de limites sur les fonctions holomorphes, on décrit alors la topologie de l'espace $H(\mathbb{D})$ (étant $\mathbb{D}$ le disque unité) et on donne la notion de famille normales (ou Mentel) ainsi on cité la formule de poisson.

On introduit aussi la théorie avancée des fonctions harmoniques tel que on a donné quelques rappels sur les mesures complexes et réelles ainsi que la notion de la limite radiale de l'intégrale de poisson par rapport à $\mu \in M(\mathbb{T})$ et les fonctions sous harmoniques.

Dans le chapitre 2 on définit dans ce chapitre, le système des polynômes orthogonaux associés à une mesure donné. On insistera sur une propriété extrémale que possèdent ces polynômes que est le point de départ de toutes les techniques utilisées pour trouver la formule asymptotique de ces polynômes. On a définit l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ $(0 < p \leq \infty)$ et ses propriétés fondamentles ainsi que la notion du produit de Blaschke $B(z)$. On citera la formule de Jensen et le théorème de factorisation ensuite on a étudié un cas particulier de l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ comme étant l'espace fonctionnel de base pour étudier le comportment asymptotique des polynômes orthogonaux. Enfin, on construit la fonction de Szegö associé au disque unité, à l'extérieur du cercle unité et à l'extérieur d'un contour de Jordan rectifiable.

Le troixième chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique des polynômes L_p- extrémaux $T_{n,p}$ par rapport à des mesures variables, on donne

- Le premier résultat qui conserne le comprtement asymptotique des polynômes L_p-

extrémaux associés à une mesure concentrée sur le cercle unité $\mathbb{T}$. La formule dans ce cas est comme suit :

$$T_{n,p}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{P^*_{n,p}(z)}{W^*_n(z)}}{\left\| \dfrac{P^*_{n,p}}{W^*_n} \right\|}$$

Ce problème a été étudié par M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros ([3]).

• Le deuxième resultat conserne le comportement asymptotique des polynômes L_p- extrémaux associés à une mesure concentrée sur le cercle unité plus un nombre fini de point $z_k \in int(\mathbb{T})$ et aussi a été étudié par M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros ([3]). La formule asymptotique, s'écrit sous la forme suivante :

$$T_{n,p}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{T^*_{n,p}(z,\beta_n)}{W_n(z)}}{\left\| \dfrac{T^*_{n,p}(.,\beta_n)}{W^*_n} \right\|_{p,\beta}}.$$

• Le troisième résultat conserne le comportement asymptotique des polynômes L_p- extrémaux associés à une mesure concentrée sur contour de Jordan rectifiable de même ce résultat a été trouvé par M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros ([3]) en 2003. La formule asymtotique est donnée sous cette forme :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{p_{np}(x)}{Y_n(x)}}{\left\| \dfrac{p_{np}}{Y_n x} \right\|} = T_{n,p}(x).$$

Nous allons résumer dans ce mémoire selon la mesure σ et son support $\mathcal{F}$, le comportement asymptotique d'une classe assez large de polynômes orthogonaux relativement à la mesure σ et qui s'avèrent la plus intéressante pour notre étude.

a) $\mathcal{F} = [-\pi, \pi]$; σ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]$; c'est à dire :

$$d\sigma = \rho(\theta)\, d\theta;\ \ \rho \in L^1([-\pi,\pi], d\theta);\ \ \rho \geq 0.$$

Ce cas correspond au comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle avec fonction poids. Ce problème a été étudié profondément par Szegö en 1921 ([28]) . La formule asymptotique des polynômes orthogonaux $\{T_n(z)\}$ associés à σ est :

$$T_n(z) \approx \frac{z^n}{\overline{D}_\rho(\frac{1}{z})}; \; |z| > 1, \tag{$*$}$$

où D_ρ est une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, construite par Szegö et porte son nom. Szegö a utilisé la propriété extrémale des polynômes orthogonaux pour trouver la formule $(*)$. Sa méthode a été reprise et développée pour trouver la formule asymptotique d'autres types de polynômes orthogonaux.

Krein ([16]) , et Gueronimus ([8]) , ont généralisé cette étude dans le cas où σ est non absolument continue.

b) $\mathcal{F} = [-1, +1]$; $d\sigma = \rho(x)\, dx$; $\rho \geq 0$; $\rho \in L^1([-1, +1], dx)$.

Ce cas correspond au comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment avec fonction poids. Szegö dans ([29]) a établi une relation entre les polynômes orthogonaux sur le cercle et ceux du segment, en utilisant cette relation, il a déduit la formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment de celle du cercle. Cette formule a la même forme que la formule $(*)$.

c) $\mathcal{F} = E$, E est un contour de Jordan rectifiable ; σ est absolument continue par rapport à la mesure longueur d'arc, c'est à dire :

$$d\sigma = \rho(\xi)\, |d\xi| \,; \; \xi \in C; \; \rho \in L^1(E, |d\xi|); \; \rho \geq 0.$$

La formule asymptotique a toujours la forme suivante :

$$T_n(z) = [C(E)\, \Phi(z)]^n\, \varphi(z)\, [1 + \varepsilon_n(z)]$$

où, $C(E)$ est une constante qui dépend de E, Φ est l'application conforme du domaine $\Omega = ext\,(E)$ vers l'extérieur du cercle unité ; φ est une fonction holomorphe dans Ω, solution d'un problème extrémal, et enfin $\varepsilon_n \to 0$ uniformément sur les compacts de Ω.

Szegö ([29]) en 1921, avait étudié ce problème mais dans le cas où $\rho \equiv 1$, et E est analytique. Cette théorie s'est développée en considérant des classes de fonctions poids et de contours de plus en plus larges. On peut citer par exemple : Smirnov ([24], [25]), Korovkine ([15]), Geronimus (([7]), pour $0 < p < \infty$); Souétine ([26]).

d) $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{S} E_i$ où tout E_i est un contour de Jordan rectifiable ou un arc. σ est absolument continue sur chaque E_i.

Ce cas a été profondément étudié en 1969 par H. Widom ([33]).

e) $\mathcal{F} = \mathbb{T} \cup \{z_k\}_{k=1}^{\ell}$; $\mathbb{T}$ étant le cercle unité, $z_k \in ext(\mathbb{T})$, $\sigma = \alpha + \gamma$, α est concentrée sur $\mathbb{T}$ assez générale, et $\gamma = \sum_{k=1}^{\ell} A_k \delta_{z_k}$; $A_k > 0$.

Ce problème a été étudié en 1994 par X. Li et K. Pan [17], et a été appliqué à l'étude de la distribution des zéros des polynômes orthogonaux associés à σ.

f) $\mathcal{F} = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{\ell}$; E est un arc rectifiable, deux fois lisse dont la dérivée seconde vérifie une condition de Lipchitz, $(E \in C^{2+})$; $z_k \in ext(E)$; $\sigma = \alpha + \gamma$; α concentrée sur E et $d\alpha = \rho(\xi) |d\xi|$; $|d\xi|$ étant la mesure de Lebesgue longueur d'arc sur E, $\gamma = \sum_{k=1}^{\ell} A_k \delta_{z_k}$, $A_k > 0$.

Ce problème a été étudié par Gon

char en 1975 ([9]) dans le cas où $E = [-1, +1]$ et a été appliqué au problème de la convergence des approximants de Padé de fonctions méromorphes; et par Kaliaguine en 1995 ([12]) dans un cas assez général.

g) $\mathcal{F} = [-1, +1] \cup \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\sigma = \alpha + \gamma$, α concentrée sur $[-1, +1]$ et non absolument continue, γ étant une mesure discrète concentrée sur les points z_k avec les masses A_k.

Ce problème a été étudié profondément et dans sa forme la plus générale en 2001 par F. Peherstorfer et P. Yuditskii ([19]).

h) $\mathcal{F} = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{\ell}$ E est un contour de Jordan rectifiable possédant quelques propriétés de régularité; $z_k \in ext(E)$; $\sigma = \alpha + \gamma$; α est concentrée sur E et absolument continue par rapport à la mesure longueur d'arc; $\gamma = \sum_{k=1}^{\ell} A_k \delta_{z_k}$, $A_k > 0$.

Pour $p > 0$, ce cas a été étudie en 1993 par V. Kaliaguine ([13]), C'est une généralisation du résultat de Ya. L. Geronimus ([7]) .

i) $\mathcal{F} = \mathbb{T}$, μ une mesure positive finie de Borel dans $[0, 2\pi]$ Les formules asymptotiques des $T_{n,p}$ à l'infini sont donnés par la formule suivante :

$$T_{n,p}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{P^*_{n,p}(z)}{W^*_n(z)}}{\left\| \dfrac{P^*_{n,p}}{W^*_n} \right\|}.$$

Ce cas a été étudie en 2003 par M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros ([3]) .

j) $\mathcal{F} = \mathbb{T} \cup \{z_k\}_{k=1}^{\ell}$, $z_k \in int(\mathbb{T})$ et $\beta_n = \mu_n + \eta$ une mesure variable où η une mesure discrète avec une masse $A_K > 0$ au point z_k, $k = 1, ..., N$, et $d\mu_n = \dfrac{d\mu}{|W^*_n|^p}$, la mesure variable μ et W.

Ce problème a été étudié par M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros en 2003 ([3]). Dans ce cas, les formules asymptotiques des $T^N_{n,p}$ à l'infini sont donnés par la formule suivante :

$$T^N_{n,p}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{T^*_{n,p}(z, \beta_n)}{W_n(z)}}{\left\| \dfrac{T^*_{n,p}(., \beta_n)}{W^*_n} \right\|_{p,\beta}}.$$

k) $\mathcal{F} = E$, E est un contour de Jordan analytique, la mesure étant variable de la forme :

$$d\sigma_n = \frac{d\sigma}{|Y_n|^p},$$

où σ est une mesure de Borel positive concentrée E, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de polynômes tel que, pour tout n, Y_n est de degré n, de zéros $w_{n,i}$, $i = 1, ..., n$ appartient à l'extérieur du contour $|\Phi(z)| = R > 1$, où Φ est la transformation conforme de l'extérieur de E vers l'extérieur du cercle unité.

Ce cas a été étudié en 2005 par M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros ([2]) .

l) $\mathcal{F} = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{N}$, E est un contour de Jordan analytique et les points $z_k \in ext(E)$, la mesure étant variable de la forme :

$$\alpha_n = \sigma_n + \gamma = \frac{\sigma}{|Y_n|^p} + \sum_{k=1}^{N} A_k \delta_{z_k};\ \ A_k > 0,$$

où σ et $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont les même citées dans la partie (**k**).

Ce problème a été étudie en 2007 par R. Khaldi et F. Aggoune ([14]). Dans ce cas, les formules asymptotiques des $T_{n,p}^N$ à l'infini sont donnés par la formule suivante :

$$T_{n,p}^N(z) = \left[\frac{\Delta_p(\sigma,\omega)}{\Delta_p(\sigma,z)} + \varepsilon_n(z)\right],$$

$\varepsilon_n(z) \to 0$ *uniformément sur les compacts de* $int(B)$.

Chapitre 1

Notions préliminaires

On désignera par $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ et par $\mathbb{T}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ est noté $Hol(\mathbb{D})$.

1.1 Définitions et premières propriétés des fonctions harmoniques

Définition 1.1.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est harmonique sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f \equiv 0$ sur Ω, où Δf est le Laplacien de f définir par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.

Pour toute fonction f de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, on a :

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z},$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\ \ et\ \ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

en effet,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right), \qquad (1.2)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)-i\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right),\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-i\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right),\\
&= \frac{1}{4}\Delta f,
\end{aligned}$$

car $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ puisque f est par hypothèse de classe C^2. Via un calcule analogue, on montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}\partial z}=\frac{1}{4}\Delta f$.

Proposition 1.1.

Toute fonction holomorphe ou anti-holomorphe sur un ouvert Ω *est harmonique sur* Ω.

Remarque 1.2.

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$. *Une fonction* $f:\Omega\to\mathbb{C}$ *est harmonique si et seulement si* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont harmoniques sur* Ω.

La remarque ci-dessus est une conséquence immédiate du fait que $\mathrm{Re}(\Delta f)=\Delta(\mathrm{Re}(f))$ et $\mathrm{Im}(\Delta f)=\Delta(\mathrm{Im}(f))$.

Corollaire 1.1.

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$. *Si une fonction* $f:\Omega\to\mathbb{C}$ *est holomorphe, alors* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont harmoniques sur* Ω.

Le corollaire ci-dessus admet une réciproque à condition d'imposer une condition supplémentaire sur l'ouvert Ω.

Théorème 1.1. ([30])

Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si f est une fonction harmonique sur Ω alors il existe une fonction φ holomorphe sur Ω telle que $\mathrm{Re}(\varphi) = f$.

Corollaire 1.2.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est harmonique sur Ω.

2. Pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et ϕ holomorphe sur $D(z_0, r)$ tels que $f = \mathrm{Re}(\phi)$ sur $D(z_0, r)$.

3. Pour tout ouvert simplement connexe U de Ω, il existe Ψ holomorphe sur U tel que $f = \mathrm{Re}(\Psi)$ sur U.

Les fonctions harmoniques sur un disque ouvert $D(a, r)$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), continues sur le disque fermé $\overline{D(a, r)}$ et à valeurs complexes ont la propriété suivante.

Corollaire 1.3. (*Principe du Maximum*)

Soit Ω un ouvert connexe et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Si f admet un maximum relatif sur Ω, alors f est constante.

Corollaire 1.4.

Soit K un compact non vide de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction (à valeurs complexes) continue sur K et harmonique sur l'intérieur de K, K^0. Alors

$$\sup_{z \in K} |f(z)| = \sup_{z \in Fr(K)} |f(z)| \tag{1.3}$$

où $Fr(K)$ désigne la frontière de K.

1.1.1 Compacité et convergence dans $Hol(\Omega)$

La convergence sur les sous-ensembles compacts, est la convergence qui intervient le plus naturellement en rapport avec les opérations de limite sur les fonctions holomorphes.

Pour définir cette notion, on commence par énoncer une propriété des sous ensembles ouverts du plan complexe, qui nous permet de construire une métrique sur $Hol\,(\Omega)$.

Théorème 1.2. ([30])

Tout ouvert Ω *du plan est la réunion d'une suite* $\{K_n\}$, $n = 1, 2, ...,$ *de compacts tels que :*

(a) K_n *soit inclus dans l'intérieur de* K_{n+1} *pour* $n = 1, 2, ...$

(b) Tout sous-ensemble compact de Ω *soit inclus dans l'un des* K_n.

(c) Toute composante de $S^2 - K_n$ *contienne une composante de* $S^2 - \Omega$, *pour* $n = 1, 2, ...$

S^2 étant la sphère de Riemann.

Ceci étant, pour f et g deux fonctions quelconques de $Hol\,(\Omega)$, définissons :

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{d_n\,(f,g)}{1 + d_n\,(f,g)}, \text{ où } d_n\,(f,g) = \sup_{z \in K_n} \{|f(z) - g(z)|\}. \qquad (1.4)$$

On montre que$(Hol\,(\Omega)\,, d)$ est un espace métrique complet et qu'une suite de fonctions de $Hol(\Omega)$ converge au sens de la métrique d si et seulement si elle converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact de Ω. Cette dernière caractérisation de la convergence au sens de la métrique d, nous permet de donner et justifier la définition suivante :

Définition 1.2.

Soient $\{f_n\}$ *une suite de* $Hol\,(\Omega)$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$. *On dit que* $\{f_n\}$ *converge vers* f *dans le sens de* $Hol\,(\Omega)$, *si* $\{f_n\}$ *converge uniformément vers* f *sur chaque sous-ensemble compact de* Ω.

Théorème 1.3. ([30])

Soit $\{f_n\}$ *une suite de* $Hol\,(\Omega)$. *Si* $f_n \to f$ *au sens de* $Hol\,(\Omega)$). *Alors* $f \in Hol(\Omega)$, *et* $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ *au sens de* $Hol\,(\Omega)$ *pour chaque* $k \geq 1$.

1.1.2 Familles normales

Définition 1.3.

Supposons $\mathcal{F} \subset Hol\,(\Omega)$, pour un ouvert connexe non vide Ω du plan complexe. Nous appelons $\mathcal{F}$ une famille normale, si toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de Ω. On n'exige pas que la fonction limite appartient à $\mathcal{F}$.

Le théorème suivant nous donne une propriété très utile de compacité des familles normales.

Théorème 1.4. ([30])

Supposons que $\mathcal{F} \subset Hol\,(\Omega)$ et que $\mathcal{F}$ soit uniformément bornée sur tout compact inclut dans Ω. Alors $\mathcal{F}$ est une famille normale.

1.1.3 Formule de Poisson

Définition 1.4.

Pour $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}$, *on pose*

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \tag{1.6}$$

Pour r fixé, $0 \leq r < 1$, P_r est appelé un noyau de Poisson et $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ est appelée la famille des noyaux de Poisson.

Remarque 1.3.

1. Pour r fixé, $0 \leq r < 1$, la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}$ converge normalement, donc uniformément en t. La fonction P_r est continue sur $[0, 2\pi]$.

2. Pour r fixé, $0 \leq r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r\,(t)\,dt = 1.$$

Pour voir ceci, on peut inverser l'intégrale et la série qui définit $P_r(t)$ ou encore remarquer *que* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)\,dt = \hat{P}_r(0)$, *le* 0*-ième coefficient de Fourier de la fonction* P_r.

Proposition 1.2.

Pour $z = re^{i\theta}$avec $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P_r(\theta - t) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(\theta - t)) \\ &= R\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2\cos(\theta - t)\,r^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Remarque 1.4.

Il résulte de la proposition précédente qu'un noyau de Poisson est une fonction uniformément continue sur $[0, 2\pi]$, 2π*-périodique, positive et paire.*

La proposition suivante nous montre comment construire des fonctions harmoniques dans $\mathbb{D}$ à partir de mesures complexes sur $\mathbb{T}$.

Proposition 1.3.

Soit μ *une mesure complexe (finie) sur* $[-\pi, \pi]$. *Pour* $z = re^{i\theta}$*avec* $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, *on pose :*

$$P(\mu)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t), \tag{1.8}$$

alors P_μ *est une fonction harmonique sur* $\mathbb{D}$.

Théorème 1.5. ([4])

Soit f *une fonction continue sur* $\mathbb{T}$. *Alors il existe une unique fonction* g *continue sur* $\mathbb{D}$, *harmonique dans* $\mathbb{D}$ *et vérifiant* $g|_T = f$. *De plus, pour* $z = re^{i\theta}$ *avec* $0 \leq r < 1$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$,*on a* $g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt$. *On notera* $P(f)$ *la fonction définie par :*

$$re^{i\theta} \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Pr(\theta - t)f(e^{it})dt.$$

Remarque 1.5.

Si f est une fonction harmonique réelle sur $D(0,r)$ avec $r \geq 1$, on a :

$$f(z) = Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(e^{it})dt\right) \text{ pour } |z| \leq 1, \tag{1.9}$$

et la fonction $z \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(e^{it})dt$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$. On a ainsi redémontré le résultat annoncé par le Théorème 1.1 de façon constructive.

Si l'on souhaite trouver une solution au problème de Dirichlet en remplaçant le disque unité $\mathbb{D}$ par un disque quelconque de $\mathbb{C}$, il suffit de faire un changement de variable. C'est ce que nous dit le corollaire suivant.

Corollaire 1.5.

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Pour toute fonction f continue sur $\Gamma(a,R)$ où $\Gamma(a,R)$ $= \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}$, il existe une fonction unique g continue sur $D(a,R) :=$ $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq R\}$, harmonique sur $D(a,R) := \{z \in C : |z-a| < R\}$ et telle que $g|_{\Gamma(a,R)} = f$. De plus, si $z = a + re^{i\theta}$ avec $0 \leq r < R$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{r/R}(\theta - t) f(a + Re^{it})dt. \tag{1.10}$$

Théorème 1.6. ([4])

Soit f une fonction continue sur Ω vérifiant la propriété suivante dite "propriété de la moyenne faible" sur Ω : pour tout $a \in \Omega$, il existe une suite $(r_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs tels que $D(a, r_n) \subset \Omega$, $\lim\limits_{n\to 1} r_n = 0$ et $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r_n e^{it})dt$ pour tout $n \geq 1$. Alors f est harmonique sur Ω.

Remarque 1.6.

Soit f est une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. *La fonction f est harmonique sur Ω.*
2. *La fonction f vérifie la "propriété de la moyenne faible" sur Ω.*

3. La fonction f vérifie la "propriété de la moyenne" sur Ω.

1.2 Théorie avancée des fonctions harmoniques

Théorème 1.7. (*Conséquence de la théorie d'Hahn-Banach*) ([30])

Soit X un espace vectoriel normé et soit X^* son dual topologique. Pour $M \subset X$, on pose $M^{\perp} := \{\ell \in X^* : M \subset ker\ell\}$. Soit E un sous-espace vectoriel de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est dense dans X.

2. $E^{\perp} = \{0\}$.

1.2.1 Mesures complexes

Soit (X, M) un espace mesurable. Autrement dit X est un ensemble et M est une tribu sur X (i.e.$M \subset P(X)$), l'ensemble des parties de X.

Définition 1.5.

Une mesure complexe est une application $\mu : M \to \mathbb{C}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall E \in M, \forall (E_i)_{i\geq 1} \in P\left(E\right), \text{ on } a : \mu(E) = \sum_{i\geq 1} \mu(E_i).A \ A \in M.$$

Remarque 1.7.

- *Toute mesure complexe μ on associe sa variation totale $|\mu|$ définie par la formule :*

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{i\geq 1} |\mu(E_i)| : (E_i)_{i\geq 1} \text{ partition dénombrable de } E\}, \tag{1.11}$$

- $|\mu| = \mu$ *si μ est une mesure positive finie* (i.e. $\mu(X) < \infty$).
- *On démontre qu'il existe $h : X \to \mathbb{C}$ mesurable (i.e. l'image réciproque par h de tout*

ouvert de $\mathbb{C}$ est un élément de M) telle que $|h(x)| = 1$, $|\mu|$-presque partout vérifiant :

$$\mu(E) = \int_E hd|\mu| \text{ pour tout } E \in M.$$

Si f est mesurable et si $f \in L^1(X, M, |\mu|)$, on pose alors :

$$\int_X fd\mu = \int_X fhd|\mu|.$$

Définition 1.6.

Soit m une mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ si :

$$m(E) = \int\limits_E dx \ \forall E \in B(\mathbb{R}).$$

Définition 1.7. (*Mesure étrangère à la mesure de Lebesgue*)

On dit que μ est étrangère à m et on note $\mu \perp m$ s'il existe un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que $m(A) = 0$ et tel que $\mu(E) = \mu(E \cap A)$ pour tout borélien E. Autrement dit, μ est portée par un borélien de mesure de Lebesgue nulle.

Définition 1.8.

On dit que μ est absolument continue par rapport a la mesure de Lebesgue et on note $\mu \ll m$ si $m(E) = 0$ implique $\mu(E) = 0$ ($\geq$).

Remarque 1.8.

Si μ est absolument continue par rapport à m, il existe une unique fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mu(E) = \int\limits_E f(x)dx$. On écrit aussi $d\mu(x) = f(x)dx$.

Théorème 1.8. (*de Radon-Nikodym*) ([30])

Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure complexe définie sur $\mathbb{R}$, i.e. $\mu \in M(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique couple (ν, ρ) de mesures de $M(\mathbb{R})$ tel que

$$\mu = \nu + \rho \text{ avec } \nu \perp m \text{ et } \rho \ll \mu.$$

Remarque 1.9.

Si f est la dérivée de Radon-Nikodym de μ, i.e. la fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\rho(E) = \int\limits_E f(x)dx$ pour tout borélien E de $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{s\to 0}\frac{\mu\left(]x-s,x+s[\right)}{2s} = f(x) \quad m - \text{p.p.}$$

Définition 1.9.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $s > 0$, on pose $I_{x,s} =]x-s, x+s[$. Soit μ une mesure à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}$. On appelle dérivée supérieure de μ en x la quantité

$$\overline{D}(\mu)(x) := \lim_{s\to 0}\sup\frac{\mu\left(I_{x,s}\right)}{2s}. \tag{1.13}$$

On appelle dérivée inférieure de μ en x la quantité

$$\underline{D}(\mu)(x) := \lim_{s\to 0}\inf\frac{\mu\left(I_{x,s}\right)}{2s}. \tag{1.14}$$

1.2.2 Limite radiale de l'intégrale de Poisson par rapport à $\mu \in \mathbf{M}(\mathbb{T})$

Proposition 1.4. ([31])

Soit $\mu \in M(\mathbb{T})$ à valeurs réelles. L'intégrale de Poisson par rapport à μ est la fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ définie par :

$$P(\mu)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t), \tag{1.15}$$

$n \to \infty$ pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\lim_{r\to 1^-}\sup P(\mu)(r^{ei\theta}) \leq \overline{D}(\mu)(\theta) := \lim_{s\to 0}\sup\frac{\mu(]\theta-s,\theta+s[)}{2s}. \tag{1.16}$$

Théorème 1.9. ([31])

Soit $\mu \in M(\mathbb{T})$. *Pour presque tout* $t \in \mathbb{R}$ *(par rapport à la mesure de Lebesgue),* $\lim\limits_{r \to 1^-} P(\mu)(re^{i\theta})$ *existe et si on pose* $\phi(e^{it}) = \lim\limits_{r \to 1^-} P(\mu)(re^{it})$, *alors* $\phi \in L^1(\mathbb{T})$ *et* ϕ *est la dérivée de Radon-Nikodym de* μ *par rapport à la mesure de Lebesgue. Autrement dit, si l'on pose*

$$\nu(E) := \mu(E) - \int\limits_E \phi(e^{it})dt, \tag{1.17}$$

pour tout borélien E *de* $\mathbb{T}$, *alors*

$$\nu \perp m.$$

1.3 Fonctions sous-harmoniques

Définition 1.10.

Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *continue sur* $\mathbb{D}$ *est dite sous-harmonique si elle a la propriété suivante : pour tout domaine (ouvert connexe)* Ω *de* $\mathbb{D}$ *dont la fermeture de* Ω *est inclus dans* $\mathbb{D}$ *et pour toute fonction* U *harmonique dans* Ω *et continue dans* Ω *vérifiant* $f(z) \leq U(z)$ *sur la frontière* $Fr(\Omega)$ *de* Ω, *on a* $f(z) \leq U(z)$ *pour tout* $z \in \Omega$.

En pratique, les fonctions continues à valeurs réelles sous-harmoniques sur $\mathbb{D}$ sont caractérisées par la propriété locale de majoration par la valeur moyenne avec laquelle il est souvent plus facile de travailler.

Théorème 1.12. ([31])

Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *continue sur* $\mathbb{D}$. *Alors* f *est sous-harmonique si et seulement si pour tout* $z_0 \in \mathbb{D}$ *il existe* $\rho_0 > 0$ *tel que* $D(z_{0,}\rho_0) \subset \mathbb{D}$ *avec de plus*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + \rho e^{it})dt \tag{1.19}$$

pour tout $\rho < \rho_0$.

Proposition 1.5. ([31])

Soit f une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$ et soit

$$m(r) = \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right| dt \text{ pour } 0 \leq r < 1. \tag{1.20}$$

Alors $r \mapsto m(r)$ est une fonction croissante sur $[0, 1[$.

Chapitre 2

Polynômes orthogonaux, espaces de Hardy et fonctions de Szegö

2.1 Système de polynômes orthogonaux

Soit α une mesure de Borel positive, finie, dont le support noté $\mathcal{F} = supp\,(\alpha)$, est un sous ensemble infini du plan complexe $\mathbb{C}$. On désigne par $L^2(\mathbb{C}, \alpha)$, l'espace vectoriel :

$$L^2(\mathbb{C}, \alpha) = \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, d\alpha(z) < +\infty \right\}. \tag{2.1}$$

$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, d\alpha(z)$, Étant l'intégrale de Lebesgue relativement à la mesure α.
On note par $\langle f, g \rangle_\alpha$ le produit scalaire complexe

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} d\alpha(z), \tag{2.2}$$

pour $f,\ g \in L^2(\mathbb{C}, \alpha)$.

L'espace $(L^2(\mathbb{C}, \alpha), \langle ., . \rangle_\alpha)$ devient un espace de Hilbert complexe. ([7]).

Définition 2.1.

Soit α une mesure de Borel positive, finie, dont le support $\mathcal{F}$ contient un nombre infini de points dans le plan complexe. On appelle système de polynômes orthogonaux associés à la mesure α, le système de polynômes $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $L_n(z)$ est un polynôme normalisé de degré n, c'est à dire : $L_n(z) = z^n + ...$

2) Le système $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonal dans l'espace $L^2(\mathbb{C}, \alpha)$; c'est à dire :

$$\int_{\mathcal{F}} L_n(z)\,\overline{L_m(z)}d\alpha(z) = 0; \ si \quad n \neq m. \tag{2.3}$$

Proposition 2.1.

Si α vérifie les conditions de la définition 2.1. et si les moments de la mesure α existent ; c'est à dire :

$$z^n \in L^2(\mathbb{C}, \alpha) ; \ n = 0, \ 1, \ 2...; \tag{2.4}$$

alors le système de polynômes orthogonaux associés à la mesure α existe et il est unique.

Preuve

Il suffit d'appliquer le procédé d'orthogonalité au système libre $\{1, \ z, \ z^2, ...\}$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{C}, \alpha)$ ([7]).

2.1.1 Propriété extrémale

Les polynômes orthogonaux $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possèdent une propriété extrémale qui nous sera très utile par la suite.

Théorème 2.1. (propriété extrémale)

Soit $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ le système de polynômes orthogonaux relativement à la mesure α; α vérifiant les conditions de la proposition 2.1. Notons par $P_{n,1}$ l'ensemble des polynômes *normalisés de degré n. Dans ce cas L_n est la solution du problème extrémal suivant :*

$$\|L_n\|_\alpha^2 = \min_{Q \in P_{n,1}} \|Q\| \tag{2.5}$$

avec : $\|f\|_\alpha^2 = \langle f, f \rangle_\alpha \,;\ \forall\ f \in L^2(\mathbb{C}, \alpha)\,.$

Preuve

Soit $Q \in P_{n,1}$, alors :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k \text{ avec } a_n = 1.$$

D'autre part

$$\|Q\|_\alpha^2 = \|L_n\|_\alpha^2 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \|L_k\|_\alpha^2\,.$$

Cette expression est minimale si et seulement si $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$.

2.1.2 Comportement asymptotique

Définition 2.2.

On appelle problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux relativement à la mesure α l'étude du problème suivant :

$$\textit{Etudier}:\ \lim_{n\to\infty} L_n(z)\,;\ z \in \mathcal{F} \textit{ ou } z \in K;\ K \textit{ compact de } \mathbb{C}\backslash\mathcal{F};\ \textit{avec } \mathcal{F} = \textit{supp}(\alpha)\,.$$

La solution de ce problème dépend en général de α et de son support $\mathcal{F}$.

2.2 Espaces de Hardy

Les espaces H^p ainsi dénommés en références à G. H. Hardy, ont un grand nombre de propriétés intéressantes, en ce qui concerne les problèmes de factorisation, les valeurs frontières et la représentation du type de Cauchy à partir de mesures sur la frontière. Les espaces de Hardy ont été introduis en analyse en 1915 dans le disque unité ouvert, constituent l'outil fonctionnel de base pour étudier les comportements asymptotiques des polynômes extrémaux. Utilisant les propriétés de la transformation conforme entre le disque unité ouvert et l'intérieur d'un contour de Jordan rectifiable, V.J.Smirnov ([23, 24, 25]) a étudié ces espaces à l'intérieur d'un contour de Jordan rectifiable. En 1951, W.Rudin ([22]) a généralisé l'étude de ces espaces dans un ouvert connexe quelconque en se basant sur une caractérisation des espaces de Hardy dans le disque unité ouvert. Cette caractérisation se résume dans le fait qu'une fonction appartenant à l'espace de Hardy dans le disque unité ouvert si et seulement si elle admet un majorant harmonique dans le disque.

2.2.1 Espaces de Hardy dans le disque unité ouvert

Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, le disque unité ouvert. Notons par $Hol(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$.

Théorème 2.2. ([24])

Soit $f \in H(\mathbb{D})$, définissons pour $r : 0 \leq r < 1$;

$$M_p(f,r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \ (0 < p < \infty).$$

Les fonctions M_p sont croissantes par rapport à la variable r dans $[0,1[$.

Ce théorème suggère la définition suivante :

Définition 2.3.

Soit $f \in Hol(\mathbb{D})$ et $0 < p < \infty$. Posons :

$$\|f\|_p = \lim_{r \to 1^-} M_p(f,r)$$

où $M_p(f,r)$ est définie au théorème 2.2. La classe $H^p(\mathbb{D})$ est définie comme l'ensemble des fonctions $f \in Hol(\mathbb{D})$ pour lesquelles $\|f\|_p < \infty$.

Remarque 2.1.

Comme les fonctions M_p sont croissantes par rapport à la variable r dans $[0,1[$, si

$f \in Hol(\mathbb{D})$ alors $\|f\|_p$ existe toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$ et

$$\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \{M_p(f,r)\}. \tag{2.6}$$

Théorème 2.3. ([22])

Pour $1 \leq p < \infty$; l'espace $\left(H^p(\mathbb{D}), \|.\|_p\right)$ est un espace de Banach.

2.3 Produit de Blaschke

On sait que si $Z(f)$ est l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe non constante définie sur un domaine Ω. On sait aussi que tout sous-ensemble A inclus dans Ω et sans point d'accumulation dans Ω est un $Z(f)$ pour au moins une fonction f appartenant à $Hol(\Omega)$. Cependant, on ne peut rien dire de plus, en général au sujet de $Z(f)$ si l'on n'impose aucune condition sur la fonction f. Mais la situation est bien différente si l'on remplace $Hol(\Omega)$ certains sous-ensembles de $Hol(\Omega)$ définis par des conditions de croissance comme l'espace de Hardy H^p. Dans ce cas, la distribution des zéros doit satisfaire certaines conditions quantatives et c'est la formule de Jensen qui rend possible la détermination explicite des conditions que les zéros d'une fonction non constante $f \in H^p$ doivent satisfaire.

2.3.1 La formule de Jensen

La formule de Jensen procure une inégalité où interviennent les valeurs frontières des fonctions holomorphes bornées sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$, elle est donnée par le théorème 2.4 suivant :

Théorème 2.4. ([31])

Soit $\Omega = D(0,R)$ (le disque ouvert de rayon R) et $f \in Hol(\Omega)$ telle que $f(0) \neq 0$. On prend $0 < R < r$ et on note $z_1, ..., z_N$ les zéros de f appartenant à $\overline{\mathbb{D}}$, rangés avec *leur ordre de multiplicité. On a*

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{r}{|z_n|} = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \right\}. \tag{2.7}$$

Remarque 2.3.

L'hypothèse $f(0) \neq 0$ ne peut être génante puisque si f a un zéro d'ordre k en zéro, il suffira d'appliquer cette formule à $f(z)/z^k$.

Théorème 2.5. ([31])

Soit $\{z_k\}$ une suite dans $\mathbb{D}$ telle que $z_k \neq 0$ pour laquelle

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty. \tag{2.8}$$

Si k est un entier non négatif, et si l'on pose

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - z\overline{z_k}} \frac{|z_k|}{z_k} \qquad (z \in \mathbb{D}), \tag{2.9}$$

la fonction B est une fonction holomorphe bornée dans $\mathbb{D}$ et ne possède pas d'autres zéros que les points z_k (outre l'origine si $k > 0$). Certains des z_k peuvent être répétés, ce qui fournit un zéro multiple pour B en ce point.

Définition 2.4.

La fonction B définie dans le théorème 2.5 est appelée un produit de Blaschke.

Remarque 2.4.

Le terme "produit de Blaschke" pourra être utilisé pour le cas d'un nombre fini de facteurs du tout et éventuellement s'il n'ya pas de facteurs du tout, en posant $B(z) = 1$.

Les propriétés décrivant les comportement du produit de Blaschke au voisinage de la frontière de $\mathbb{D}$ sont données dans le théorème suivant :

Théorème 2.6.

Pour tout θ, *si* $B(z)$ *est le produit de Blaschke défini ci dessus alors* $B(z)$ *admet en presque partout sur le cercle* $\mathbb{T}$ *une limite radiale* $B^*\left(e^{i\theta}\right)$ *donnée par*

$$B^*\left(e^{i\theta}\right) = \lim_{r\to 1} B\left(re^{i\theta}\right),$$

de plus, $\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right| = 1.$

Remarque 2.5.

Le produit de Blasche ainsi que ses propriétés peuvent être introduit d'une autre façon que dans les théorèmes 2.4, 2.5 *c'est l'objet du théorème suivant :*

Théorème 2.7.

Soit $\{z_k\}$ *une suite dans* $ext(\mathbb{T})$ *pour laquelle*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty.$$

Si k *est un entier non négatif, et si l'on pose*

$$B_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{z\overline{z_k} - 1} \frac{|z_k|^2}{z_k} \qquad (z \in D), \tag{2.10}$$

alors B_1 *défini par* (2.10) *est appelée "produit de blaschke" et possède les propriétés suivantes :*

1) $B_1 \in Hol(\mathbb{D})$, B_1 *est bornée dans* $\mathbb{D}$ *et ne possède pas d'autres zéros que les points* z_k.

2) $B_1(z)$ *admet en presque partout sur le cercle* $\mathbb{T}$ *une limite radiale* $B_1^*\left(e^{i\theta}\right)$ *donnée par*

$$B_1^*\left(e^{i\theta}\right) = \lim_{r\to 1} B\left(re^{i\theta}\right),$$

3) $\left|B\left(e^{i\theta}\right)\right| = \prod_{k=1}^{\infty} |z_k|.$

2.4 Théorème de factorisation

Toute fonction $f \in H^p(\mathbb{D})$, sauf $f \equiv 0$, peut se factoriser en un produit de Blaschke formé sur les zéros de f et une fonction $g \in H^p(\mathbb{D})$ n'ayant pas de zéros dans $\mathbb{D}$.

Théorème 2.8.

Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$ et soit $B(z)$ le produit de Blaschke formé sur les zéros de f telle que

$$f(z) = B(z) \cdot g(z), \ \forall z \in \mathbb{D}, \tag{2.11}$$

alors $g \in H^p(\mathbb{D})$ et g n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$

Remarque 2.6.

Comme $|B(z)| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$ alors il vient du théorème de factorisation ci-dessus que

$$\sup_{r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta = \sup_{r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| g\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \tag{2.12}$$

et donc

$$\|f\|_p = \|g\|_p \tag{2.13}$$

Corollaire 2.1.

Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors on peut écrire

$$f(z) = B(z) \cdot [g(z)]^{\frac{1}{p}} \tag{2.14}$$

où $B(z)$ est le produit de Blaschke construit sur les zéros de f et $g \in H^1(\mathbb{D})$ n'ayant pas de zéros dans $\mathbb{D}$.

Remarque 2.7.

La factorisation 2.11 *rend possible l'application à $H^p(\mathbb{D})$ de résultats de $H^1(\mathbb{D})$.*

Définition 2.5.

Une fonction intérieure est une fonction $U \in H^1(\mathbb{D})$ telle que $|U^*(e^{it})| = 1$ m-presque *partout avec* $U^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} U(re^{it})$

Le résultat suivant donne une description complète de toute fonction intérieure.

Théorème 2.9.

Soit $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, *soit* B *un produit de Blaschke et soit* ν *une mesure de Borel positive finie sur* $\mathbb{T}$ *telle que* $\nu \perp m$. *Pour* $z \in \mathbb{D}$, *on pose*

$$U(z) = cB(z)e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}. \tag{2.15}$$

La fonction U *est une fonction intérieure et toute fonction intérieure peut s'obtenir de cette façon.*

Définition 2.6.

Les fonctions intérieures singulières sont les fonctions intérieures qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$, *i.e. les fonctions de la forme*

$$S_\nu(z) = ce^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}. \tag{2.16}$$

Définition 2.7.

Une fonction extérieure est une fonction $Q \in Hol(\mathbb{D})$ *de la forme*

$$Q(z) = ce^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\log\phi\left(e^{it}\right)dt} \tag{2.17}$$

où $|c| = 1$ *et où* ϕ *est une fonction positive mesurable telle que* $\log\phi \in L^1(\mathbb{T})$.

Proposition 2.2.

Soit Q *une fonction extérieure reliée à* ϕ, *alors*

1. $\log|Q|$ *est l'intégrale de Poisson de la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la dérivée de Radon-Nikodym est* $\log\phi$.

2. $\lim_{r\to 1^-}|Q(re^{it})| = \phi(e^{it})$ *m-presque partout.*

3. Pour $p \in]0,\infty]$, $Q \in H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si $\phi \in L^p(\mathbb{T})$. Dans ce cas $\|Q\|_p = \|\phi\|_p$.

Propsition 2.3.

Soit $p \in]0,1]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. Alors la limite radiale de f, notée f^*, est telle que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Corollaire 2.2.

Soit $p \in]0,\infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. Dans ce cas, la fonction extérieure Q_f définie par

$$Q_f(z) = e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\log|f^*|\left(e^{it}\right)dt} \tag{2.18}$$

appartient à $H^p(\mathbb{D})$.

Remarque 2.8.

La fonction Q_f est appelée le facteur extérieur de f. Notons que Q_f ne dépend que de f^*, c'est à dire des limites radiales de f.

2.5 Etude particulière de $H^2(\mathbb{D})$

L'importance particulière de l'espace $H^2(\mathbb{D})$ est due au fait qu'il s'agit d'un espace de Hilbert et qu'on peut l'identifier à un sous ensemble de $L^2(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T}$ est le cercle unité. D'autre part $H^2(\mathbb{D})$ est l'espace fonctionnel de base qu'on utilisera pour étudier le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux. Avant de donner les propriétés fondamentales de $H^2(\mathbb{D})$, définissons les espaces $L^p(\mathbb{T})$.

2.5.1 Espace $L^p(\mathbb{T})$

Soit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité du plan complexe. Si F est une fonction définie sur $\mathbb{T}$ et à valeurs complexe et si on définit la fonction f par :

$$f(\theta) = F\left(e^{i\theta}\right), \tag{2.19}$$

alors f est définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π.

Réciproquement, si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π, alors il existe une fonction F définie sur $\mathbb{T}$ vérifiant (2.19).

On peut ainsi identifier les fonctions définies sur $\mathbb{T}$ avec les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π. Cette identification nous permet de

donner la définition suivante :

Définition 2.8.

Pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\mathbb{T})$ *désigne la classe de toutes les fonctions à valeurs complexes, mesurables au sens de Lebesgue, périodique, de période* 2π, *définies sur* $\mathbb{R}$, *pour lesquelles la norme :*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \text{ est finie.} \tag{2.20}$$

Théorème 2.10. ([4])

$L^2(\mathbb{T})$ *est un espace de Hilbert complexe pour le produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \,.\overline{g(t)} dt \tag{2.21}$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ *et tout* $g \in L^2(\mathbb{T})$.

Les propriétés fondamentales de l'espace $H^2(\mathbb{D})$ sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 2.11. ([22])

a) Une fonction $f \in Hol(\mathbb{D})$ *de la forme*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in \mathbb{D})$$

appartient à $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Dans ce cas

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 .$$

b) Si $f \in H^2(\mathbb{D})$ *alors* $\lim_{r \to 1^-} f\left(re^{i\theta}\right)$ *existe en presque tous les points de* $\mathbb{T}$. *Cette limite sera notée* $f^*\left(e^{i\theta}\right)$, *on l'appellera limite non tangentielle de* f; $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ *et* $\|f\|_2 = \|f^*\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$. *De plus* f *est l'intégrale de Cauchy de* f^*, *c'est-à-dire :*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi, \;\; z = re^{i\theta}, \;\; 0 \leq r < 1;$$

où C_1 *est le cercle unité orienté positivement.*

2.5.2 Espace de Hardy à l'exterieure du disque unité

Notons par : $\mathbb{G} = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\} \cup \{\infty\}$, $Hol(\mathbb{G})$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{G}$ (∞ y compris) et par $C_r = \{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$.

Définition 2.9.

Soit $f \in Hol(\mathbb{G})$, *on dit que* $f \in H^2(\mathbb{G})$ *s'il existe une constante c positive, indépendante de* r, *telle que :*

$$\int_{C_r} |f(w)|^2 |dw| \leq c; \; \forall r : 1 < r \leq 2.$$

Si $f \in H^2(\mathbb{G})$, *on note par :*

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{G})}^2 = \sup_{1<r\leq 2} \int_{C_r} |f(w)|^2 |dw| . \tag{2.22}$$

Remarque 2.9.

La définition de l'espace de Hardy dans le disque unité ouvert est équivalente à celle donnée dans la définition 2.5.

En effet d'après la remarque 2.1., *on a :*

$$f \in H^2(U) \Longleftrightarrow \sup_{0\leq r<1} \int_{C_r} |f(z)|^2 |dz| < +\infty.$$

Proposition 2.4. ([4])

Soit $f \in Hol(\mathbb{D})$, *définissons* g *par :*

$$\begin{aligned} g(w) &= f\left(\frac{1}{w}\right), \text{ pour } w \in \mathbb{G}\setminus\{\infty\}, \\ g(\infty) &= f(0); \end{aligned}$$

alors $f \in H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si* $g \in H^2(\mathbb{G})$.

Notons par :

$$L^2(C_r, |dz|) = \left\{ f : C_r \to \mathbb{C} : \int_{C_r} |f(z)|^2 |dz| < \infty \right\};\ r > 0,$$

où $|dz|$ est la mesure longueur d'arc.

Ceci étant les propriétés de l'espace $H^2(\mathbb{G})$ sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 2.12.

Soit $f \in H^2(\mathbb{G})$ *alors :*

a) $\lim_{r\to 1^+} f(re^{i\theta})$ *existe en presque tous les points du cercle unité, Cette limite est appelée limite non tangentielle et elle se note* f_1.

b) $f_1 \in L^2(C_1, |dw|)$ *et* $\int_{C_1} |f_1(w)|^2 |dw| = \|f\|^2_{H^2(\mathbb{G})} = \lim_{r\to 1^+} \int_{C_r} |f(w)|^2 |dw|$.

c) L'espace $H^2(\mathbb{G})$ est un espace de Hilbert complexe pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{G})} = \int_{C_1} f_1(w) . \overline{g_1(w)}\, |dw|$$

d) $\forall w \in \mathbb{G}\backslash\{\infty\}, \ f(w) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{C_1} \frac{f_1(\xi)}{\xi - w} \frac{d\xi}{w}.$

Preuve

a) Soit $f \in H^2(\mathbb{G})$, alors : $\exists\, c > 0$ tel que : $\int_{C_r} |f(w)|^2 |dw| \leq c; \forall r : 1 < r \leq 2.$

En effectuant le changement de variables $w = \dfrac{1}{w'}$, on a : $dw = -\dfrac{1}{w'^2} dw'$, ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{C_r} |f(w)|^2 |dw| &= \int_{C_{r'}} \left| f\left(\frac{1}{w'}\right)\right|^2 \frac{1}{|w'|^2} |dw'|, \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^2 \frac{1}{r'^2} r' d\theta, \\ &= \frac{1}{r'} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^2 d\theta;\ \frac{1}{2} \leq r' < 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^2 d\theta \leq r'c \leq c.$$

Posons :

$$f_1(r'e^{i\theta}) = f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right);$$

alors $f_1 \in H^2(\mathbb{D})$, ce qui implique que $\lim_{r' \to 1^-} f_1(r'e^{i\theta})$ existe presque partout pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$;

or

$$\lim_{r' \to 1^-} f_1(r'e^{i\theta}) = \lim_{r' \to 1^-} f_1\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right) = \lim_{r \to 1^+} f(re^{i\theta});$$

ce qui donne le point a).

Les points b) et c) sont une conséquence immédiate de a) et du théorème 2.5.

2.5.3 Espace de Hardy à l'exterieur d'un contour de Jordan rectifiable

Définition 2.10. (contour de Jordan)

On appelle contour de Jordan, l'image d'une application $Z : t \to Z(t)$ *, de l'intervalle* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{C}$ *tel que,* Z *continue,* $Z(a) = Z(b)$ *et* $Z\big|_{]a,b[}$ *est injective.*

Définition 2.11. (contour de Jordan rectifiable)

Un contour de Jordan est dit rectifiable, si l'application Z *définie ci-dessus est à variation bornée.*

Par exemple si $Z(t)$ est une application continument différentiable par morceau alors elle est à variation bornée et sa variation totale est égale à $\displaystyle\int_a^b |Z'(t)|\, dt$.

2.5.4 Transformation conforme

La transformation conforme représente l'un des outils fonctionnels fondamentaux dans cette étude, elle permettra le passage de l'extérieur du contour E vers l'extérieur du cercle $\mathbb{T}$.

Il est connu que tout contour de Jordan E partage le plan $\mathbb{C}$ en deux parties, l'une bornée, ouverte et simplement connexe appelée l'intérieur de E et notée $int(E)$ et l'autre ouverte, non bornée et connexe appelée l'exterieur de E notée $ext(E)$.

Notons par $\Omega = ext(E) \cup \{\infty\}$ et par $\mathbb{G} = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\} \cup \{\infty\}$

L'application du théorème de la représentation conforme de Riemann nous donne le théorème suivant :

Théorème 1.12. ([6])

Soit E *un contour de Jordan, alors il existe* $\Phi : \Omega \to \mathbb{G}$*, unique possédant les propriétés suivantes :*

a) Φ *est bijective.*

b) $\Phi\big|_{\Omega\setminus\{\infty\}}$ *est holomorphe.*

c) $\Phi(\infty) = \infty$.

d) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\Phi(z)}{z} > 0$.

Notons par $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\Phi(z)}{z} = \dfrac{1}{C(E)}$. La constante $C(E)$ s'appelle capacité logarithmique de E. Si le contour de Jordan est rectifiable, on obtient le théorème de Caratéodory suivant :

Théorème 1.13. ([6])

Soit E un contour de Jordan rectifiable et $\Phi : \Omega \to \mathbb{G}$, l'application conforme définie dans le théorème 2.12., *alors Φ admet un prolongement continu unique sur E qui réalise une bijection de E sur $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$.*

Si l'on note par Ψ l'application inverse de Φ, $\Psi : \mathbb{G} \to \Omega$, on montre dans ([14]) que leurs dérivées $\Phi'(z)$ et $\Psi'(z)$ n'ont pas de zéros dans Ω et $\mathbb{G}$ et ont des valeurs limites sur E et $\mathbb{T}$ presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Notons par $Hol(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphe dans Ω (∞ y compris), et $E_r = \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = r\}$, pour $r > 1$.

Définition 2.12.

S*oit $f \in Hol(\Omega)$. On dit que $f \in H^2(\Omega)$, si $\exists c > 0$; c indépendante de r tel que :*

$$\int\limits_{E_r} |f(z)|^2 \, |dz| \leq c, \ \textit{pour } 1 < r \leq 2$$

Proposition 2.5.

$f \in H^2(\Omega)$ si et seulement si:

$$f(\Psi(w))\sqrt{\Psi'(w)} \in H^2(\mathbb{G}).$$

Preuve

Posons $z = \Psi(w)$, alors $dz = \Psi'(w)dw$, d'ou :

$$\begin{aligned}\int\limits_{E_r} |f(z)|^2 |dz| &= \int\limits_{C_r} |f(\Psi(w))|^2 |\Psi'(w)| |dw| \\ &= \int\limits_{C_r} \left| f(\Psi(w)).\sqrt{\Psi'(w)} \right|^2 |dw|.\end{aligned}$$

Ceci donne le résultat cherché.

Les propriétés de l'espace $H^2(\Omega)$ découlent à partir des propriétés de l'espace $H^2(\mathbb{G})$ en utilisant la proposition 2.3. et le théorème 2.6. On obtient alors :

Théorème 2.14. ([23], [24], [25])

Soit E un contour de Jordan rectifiable et $f \in H^2(\Omega)$, alors f admet en presque tous les points de E une limite non tangentielle notée $\tilde{f}$; $\tilde{f}(\xi) = \lim_{z \to \xi} f(z)$. $\tilde{f}$ vérifie aussi :

1) $\tilde{f} \in L^2(E, |d\xi|)$ et $\int\limits_E \left|\tilde{f}(\xi)\right|^2 |d\xi| = \lim_{r \to 1^+} \int\limits_{E_r} |f(z)|^2 |dz|$.

2) Pour tout $f \in H^2(\Omega)$ et pour tout $g \in H^2(\Omega)$ notons :

$$\|f\|^2_{H^2(\Omega)} = \int\limits_E \left|\tilde{f}(\xi)\right|^2 |d\xi|,$$

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\Omega)} = \int\limits_E \tilde{f}(\xi).\overline{\tilde{g}(\xi)} |d\xi|.$$

Alors $\left(H^2(\Omega), \langle .,. \rangle_{H^2(\Omega)}\right)$ est un espace de Hilbert complexe.

3) $\forall z \in \Omega \backslash \{\infty\}$, $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int\limits_E \frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi - z} \frac{d\xi}{z}$.

2.6 Fonctions de Szegö

Les fonctions de Szegö rentrent dans le cadre général de la représentation des fonctions positives.

2.6.1 Fonction de Szegö associée au disque unité

Soient $F \in H^2(\mathbb{D})$ et F^* sa limite non tangentielle. Si l'on pose $f(\theta) = \left|F^*(e^{i\theta})\right|$, alors $f \in L^2(\mathbb{T})$, et on montre que $\log(f) \in L^1(\mathbb{T})$.

Réciproquement étant donnée une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$, f presque partout positive et $\log(f) \in L^1(\mathbb{T})$, on montre qu'il existe une infinité de fonctions F de la classe $H^2(\mathbb{D})$ tel que $f(\theta) = \left|F^*(e^{i\theta})\right|$ presque partout pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$. On s'intérèsse à une fonction particulière F de la classe décrite auparavant, dite fonction de Szegö, qui est l'objet du théorème suivant :

Théorème 2.15.

Soit f une fonction non négative intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et vérifiant la condition de Szegö

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\theta) d\theta > -\infty.$$

Alors la fonction définie par :

$$D_f(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\theta))\frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}d\theta\right\} \ (|z| < 1)$$

dite fonction de Szegö associée à $\mathbb{D}$ et à la fonction poids f, possède les propriétés suivantes :

1) $D_f \in H^2(\mathbb{D})$.

2) $D_f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}$.

3) $\left|D_f^*(e^{ix})\right|^2 = f(x)$ presque partout sur $[-\pi, \pi]$.

où D_f^* est la limite non tangentielle de D_f.

4) $D_f(0) > 0$.

Preuve

Construction de D_f

Considérons l'intégrale de Poisson associée à la fonction $\log(f)$ qu'on note par :

$$u(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\theta))\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta.$$

La fonction u est harmonique dans le disque unité puisque $\log(f) \in L^1([-\pi,\pi],\ d\theta)$ ([18]).

Considérons maintenant la fonction holomorphe $h(z)$ dont $u(r,x)$ est la partie réelle et exigeons que $h(0)$ soit réelle pour avoir l'unicité de h. La fonction cherchée sera donc

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}h(z)\right\}.$$

On montre facilement que :

$$\operatorname{Re} D_f(z) = \operatorname{Re} g(z);\ \ (z = re^{ix},\ 0 \leq r < 1).$$

Alors

$$D_f(z) = g(z).$$

1) Montrons que :

$$\exists c > 0 \text{ tel que} : \forall r : 0 \leq r < 1;\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|D_f(re^{ix})\right|^2 dx \leq c.$$

En effet

$$\begin{aligned} |D_f(z)| &= \left|\exp\left\{\frac{1}{2}(\operatorname{Re} h(z) + \operatorname{Im} h(z))\right\}\right|, \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{Re} h(z)\right\}, \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}u(r,x)\right\}. \end{aligned}$$

Par suit, pour $z = re^{ix},\ 0 \leq r < 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|D_f(re^{ix})\right|^2 &= \exp\left\{u\left(r,x\right)\right\}, \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(f\left(\theta\right)\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\}, \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\theta\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta \text{ (inégalité de Jensen [25]).}
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_f(re^{ix})\right|^2 dx &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\theta\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\theta\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\theta\right)d\theta = C. \quad \forall r:\ 0 \leq r < 1.
\end{aligned}$$

Ce qui donne le point 1).

2) est évident.

3) $D_f \in H^2\left(\mathbb{D}\right)$, notons par D_f^* la limite non tangentielle de D_f; et comme :

$$\left|D_f\left(re^{ix}\right)\right|^2 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(f\left(\theta\right))\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\},$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\left|D_f^*\left(e^{ix}\right)\right|^2 &= \lim_{r\to 1^-}\left|D_f\left(re^{ix}\right)\right|^2, \\
&= \exp\left\{\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(f\left(\theta\right)\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\}, \\
&= \exp\left\{\log f\left(x\right)\right\},\ \text{p.p } sur\ \left[-\pi,\pi\right];\ (\left[18\right],\ \left[26\right],\ \left[28\right]).
\end{aligned}$$

4) $D_f(0) = \exp\left\{\frac{1}{2}h\left(0\right)\right\} > 0$. ($h(0)$ est réel par construction).

2.6.2 Fonction de Szegö associée à l'extérieur du cercle unité

Théorème 2.16.

Soit f une fonction non négative intégrable de Lebesgue sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ et vérifiant la condition de Szegö

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(t)dt > -\infty.$$

Alors il existe une fonction unique notée D_f^θ et appelée fonction de Szegö associée à l'extérieur de $\mathbb{T}$ et à la fonction poids f, possédant les propriétés suivantes :

1) $D_f^\theta \in H^2(\mathbb{G})$.

2) $D_f^\theta(w) \neq 0 \quad \forall w \in \mathbb{G}$.

3) $\left|\left(D_f^\theta\right)^*(e^{ix})\right|^2 = f(x)$ *presque partout sur* $[-\pi,\pi]$, *où* $\left(D_f^\theta\right)^*$ *est la limite non tangentielle de* D_f^θ.

4) $D_f^\theta(\infty) > 0$.

Preuve

Considérons la fonction de Szegö D_f introduite dans le théorème 2.15. et construisons la fonction D_f^θ de la façon suivante :

$D_f^\theta(w) = D_f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ pour $w \in \mathbb{G}\backslash\{\infty\}$.

$D_f^\theta(\infty) = D_f(0)$.

Alors les propriétés de D_f et la proposition 2.4. nous donne les propriétés de D_f^θ.

Notons que la forme explicite de D_f^θ est exactement la fonction :

$$D_f^\theta(w) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\theta))\frac{w+e^{-i\theta}}{w-e^{-i\theta}}d\theta\right\} \ (|w|>1).$$

2.6.3 Fonction de Szegö associée à l'extérieur d'un contour de Jordan rectifiable

Soit E un contour de Jordan rectifiable. Désignons par :

$$L^2(E, |d\xi|) = \left\{ f : E \to \mathbb{C} : \int_E |f(\xi)|^2 |d\xi| < \infty \right\}.$$

$|d\xi|$ Étant la mesure de Lebesgue longueur d'arc.

Théorème .2.17.

Soit ρ une fonction non négative intégrable au sens de la mesure de Lebesgue longueur d'arc $|d\xi|$ sur E et qui vérifie la condition de Szegö :

$$\int_E (\log \rho(\xi)) |\Phi'(\xi)| |d\xi| > -\infty. \tag{2.23}$$

Alors il existe une fonction notée $D(z)$ dite fonction de Szegö associée à l'extérieur du contour E et à la fonction poids ρ possédant les propriétés suivantes :

1) $D(z)\sqrt{\Phi'(z)} \in H^2(\Omega)$.

2) $D(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$.

3) $\left|\tilde{D}(\xi)\right|^2 |\Phi'(\xi)| = \rho(\xi)$ *presque partout sur E, où $\tilde{D}$ est la limite non tangentielle de $\mathbb{D}$.*

4) $D(\infty) > 0$.

Preuve

Considérons la fonction poids $\delta(w)$ définie sur le cercle unité par :

$$\delta\left(e^{i\theta}\right) = \rho(\xi) / |\Phi'(\xi)|, \; \xi = \Psi\left(e^{i\theta}\right).$$

Comme

$$\Phi(\xi) = e^{i\theta},$$

alors on a

$$d(\Phi(\xi)) = \Phi'(\xi)\, d\xi = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} d\theta,$$

d'où

$$\left|\Phi'(\xi)\right|\left|d\xi\right| = d\theta,$$

par suite, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \log(\delta\left(e^{i\theta}\right))d\theta &= \int\limits_E \left(\log\frac{\rho(\xi)}{\left|\Phi'(\xi)\right|}\right)\left|\Phi'(\xi)\right|\left|d\xi\right|, \\
&= \int\limits_E \log(\rho(\xi))\left|\Phi'(\xi)\right|\left|d\xi\right| + \int\limits_E \left(\log\frac{1}{\left|\Phi'(\xi)\right|}\right)\left|\Phi'(\xi)\right|\left|d\xi\right|, \\
&= \int\limits_E \log(\rho(\xi))\left|\Phi'(\xi)\right|\left|d\xi\right| + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\log\left|\Psi'\left(e^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta.
\end{aligned}$$

Comme $\log\left|\Psi'\left(e^{i\theta}\right)\right| \in L^1\left[-\pi,\pi\right]$, car $\Psi' \in H^1(G)$ (*voir* [14]), ceci avec la condition (2.6), entrainent

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log(\delta\left(e^{i\theta}\right))d\theta > -\infty \tag{2.24}$$

qui est la condition usuelle de Szegö.

D'autre part

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\delta\left(e^{i\theta}\right))d\theta = \int\limits_E \frac{\rho(\xi)}{\left|\Phi'(\xi)\right|}\left|\Phi'(\xi)\right|\left|d\xi\right| = \int\limits_E \rho(\xi)\left|d\xi\right| < +\infty. \tag{2.25}$$

D'après le théorème 2.16., en utilisant (2.24) et (2.25), on peut alors associer à la fonction poids $\delta\left(e^{i\theta}\right)$, la fonction de Szegö associée à l'extérieur du cercle unité suivante :

$$D_\delta^\theta(w) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(\delta\left(e^{i\theta}\right))\frac{w+e^{-i\theta}}{w-e^{-i\theta}}d\theta\right\} \;(|w|>1).$$

Finalement la fonction cherchée est exactement la fonction définie par :

$$D(z) = D_\delta^\theta (w), \ \ avec \ w = \Phi (z).$$

Montrons maintenant qu'elle vérifie les propriétés 1), 2), 3) et 4).
En effet, d'après la proposition 2.4.

1) $D(z)\sqrt{\Phi'(z)} \in H^2(\Omega) \Leftrightarrow D_\delta^\theta (\Phi (z)) \sqrt{\Phi'(z)} \in H^2(\Omega)$

$\Leftrightarrow D_\delta^\theta (\Phi (\Psi (w))) \sqrt{\Phi'(\Psi (w))}\sqrt{\Psi'(w)} \in H^2(\mathbb{G})$

$\Leftrightarrow D_\delta^\theta (w) \in H^2(\mathbb{G}).$

(Puisque $\sqrt{\Phi'(\Psi (w))}\sqrt{\Psi'(w)} = \sqrt{(\Phi o \Psi)' (w))} = 1$ car $\Phi o \Psi = Id_E$.)

2) $D(z) = D_\delta^\theta (\Phi (z)) \neq 0$ car $\Phi (z) \in \mathbb{G}$ pour $z \in \Omega$.

3) $\left|\tilde{D} (\xi)\right|^2 |\Phi' (\xi)| = \left|(D^\theta)^* (\Phi (\xi))\right|^2 |\Phi' (\xi)| = \delta \left(e^{i\theta}\right) |\Phi' (\xi)| = \rho (\xi).$

4) $D(\infty) = D_\delta^\theta (\Phi (\infty)) = D_\delta^\theta (\infty) > 0.$

Chapitre 3

Comportement asymptôtique des polynômes extrémaux par rapport à des mesures variables

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons démontrer un théorème de type Szegö pour les polynômes L^p- extrémaux par rapport au mesures variables sur le cercle d'unité $\mathbb{T}$. On présente aussi un théorème de densité et une généralisation du résultat principal., tout d'abort pour un cercle d'unité plus un nombre fini des points et le second pour un contour de Jordan rectifiables.

3.2 Comportement asymptôtique des polynômes extrémaux par rapport à des mesures variables sur le cercle unité

3.2.1 Notations et définitions

Soit μ une mesure positive finie de Borel dans $[0, 2\pi]$ dont le support contient un ensemble infini de points. On considère $\{W_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ a un degré n ($\deg W_n = n$) tous ses zéros $\{w_{n,i} : 1 \leq i \leq n\}$ se situent dans $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, et ils satisfont à :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (1 - |w_{n,i}|) = +\infty.$$

Nous voulons étudier le comportement asymptotique des polynômes qui résolvent le problème extrémal :

$$\tau_{n,p} = \underset{Q_n(z)=z^n+\dots}{inf} \left\| \frac{Q_n}{W_n} \right\|_p = \underset{Q_n \in \Pi_n . Q_n(0)=1}{inf} \left\| \frac{Q_n}{W_n^*} \right\|_p,$$

où $\underset{n}{\Pi}$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n, $W_n^*(z) = z^n \overline{W_n\left(\frac{1}{z}\right)}$, et $\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p}$.

Notons que les zéros de $W_n^*(z)$ sont $\left\{ \frac{1}{w_{n,i}} \right\}_{i=1\dots n} \subset \mathbb{E} = \{|Z| > 1\}$. A partir de maintenant, $P_{n,p}$ désigne un polynôme tel que

$$\left\| \frac{P_{n,p}}{W_n} \right\|_p = \tau_{n,p}.$$

Soit $\acute{\mu}$ la dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue. Supposons que $\log \acute{\mu} \in L^1$, soit $D_p(\mu, z)$ la fonction de Szegö

$$D_p(\mu, z) = \exp\left\{\frac{1}{2p\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\log \acute{\mu}(\theta)\, d\theta\right\},\ \zeta = e^{i\theta},\ z \in D.$$

Définissons

$$K_p(\mu, z) = \begin{cases} \frac{D_p(\mu,0)}{D_p(\mu,z)} & \text{si } z \in \mathbb{T}_a \cup \mathbb{D} \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{T}_s, \end{cases}$$

où $\mathbb{T}_a$ et $\mathbb{T}_s$ donne une décomposition disjointe du cercle unité tel que $\acute{\mu}$ et μ_s appartiennent respectivement à ces ensembles. Ci-après, μ_s dénote la partie singulière de μ par rapport à la mesure de Lebesgue. H^p, $0 < p < 1$, est définie comme la classe de toutes les fonctions f analytiques dans $\mathbb{D}$ tel que

$$\sup_{0<r<1}\left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p} < \infty.$$

Il est bien connu que H^p peut être identifié avec la fermeture en L^p de l'ensemble des polynômes en $e^{i\theta}$.

La fonction $D_p(\mu, z)$ satisfait les propriétés suivantes :

(1) $D_p(\mu, z)$ est analytique en $\mathbb{D}$; plus précisément, $D_p(\mu, z) \in H^p$,

(2) $D_p(\mu, z) \neq 0$ en $\mathbb{D}$, et $D_p(\mu, 0) > 0$,

(3) $\left|D_p\left(\mu, e^{i\theta}\right)\right|^p = \acute{\mu}(\theta)$ presque partout dans $[0, 2\pi]$.

$H^p(\mu)$ est défini comme la fermeture des polynômes $L^p(\mu)$ en $e^{i\theta}$.

$$L_s^p(\mu) = \{f \in L^p(\mu) : f = 0,\ \acute{\mu} \text{ p.p.}\}$$

et

$$L_a^p(\mu) = \{f \in L^p(\mu) : f = 0,\ \mu_s \text{ p.p.}\}$$

Théorème 3.1.

Si $\mu \in \mathbb{T}$, alors $H^p(\mu) = K_p H^p \oplus L^p_s(\mu)$. C'est à dire il existe des fonctions uniques $\tilde{f}$, f_s tel que $f = K_p\tilde{f} + f_s$, $f \in H^p$, et $f_s \in L^p_s$.

Preuve

Soit $g \in H^P(\mu)$. Alors $g \in L^p(\mu)$ et $g = g_1 + g_2$ avec $g_1 \in L^P_a(\mu)$ et $g_2 \in L^p_s(\mu)$. Nous devons prouver que ce soit $g_1 \in K_pH^p$ ou $g_1/K_p \in H^p$. Il suffit de prouver qu'il n'y existe $\{j_n\}$, $j_n \in H^p$ tel que $\|j_n - g_1/K_p\|_p \to 0$. Étant donné que $g \in H^P(\mu)$ il existe une suite des polynômes $\{h_n\}$ tel que $\|h_n - g\|_{p,\mu} \to 0$. D'où, avec $z = e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}
\int \left|\frac{h_n(z)}{K_p(z)} - \frac{g_1(z)}{K_p(z)}\right|^p dm(\theta) &= \int |h_n(z) - g_1(z)|^p \frac{\acute{\mu}(\theta)}{|D_p(\mu,0)|} dm(\theta) \\
&= \int |h_n(z) - g(z)|^p \frac{\acute{\mu}(\theta)}{|D_p(\mu,0)|} dm(\theta) \\
&\leq \left\|\frac{h_n - g}{D_p(\mu,0)}\right\|^p_{p,\mu} \to 0,
\end{aligned}$$

et $j_n = h_n/K_p \in H^P$ pour tout n. L'unicité de la représentation s'ensuit immédiatement du fait $H^P_a(\mu) \cap L^p_s(\mu) = 0$. D'ou, par conséquent. Nous avons prouvé une des inclusions. Nous allons voir que $K_pH^p \subset H^P(\mu)$. Considérons $f = K_p\tilde{f}$ avec $\tilde{f} \in H^p$. Alors il existe des polynômes h_n tel que

$$\left\|\tilde{f} - h_n\right\|_p \to 0 \Longrightarrow \left\|K_p\tilde{f} - K_ph_n\right\|_{p,u} \to 0,$$

et puisque $K_ph_n \in H^P(\mu)$, on obtient $f \in H^P(\mu)$.

Maintenant, soit $f \in L^p_s(\mu)$. comme $\mu \notin \mathbb{T}$, il existe des polynômes Q_n tel que

$$\|f - Q_n\|_{\mu_s,p} \to 0. \tag{3.1}$$

En outre, en raison de $Q_n/K_p \in H^P$, il existe une suite des polynômes $\{h_n\}$ tel que

$$\left\| \frac{Q_n}{K_p} - h_n \right\|_p \to 0 \Leftrightarrow \|Q_n - K_p h_n\|_{\mu_a,p} \to 0. \tag{3.2}$$

En combinant (3.1) et (3.2) avec

$$\|f - Q_n + K_p h_n\|_{\mu,p} = \|f - Q_n\|_{\mu_s,p} + \|Q_n - K_p h_n\|_{\mu_a,p}.$$

La preuve est conclue.

3.2.2 Résultats auxiliaires

Avant de prouver le théorème, nous avons besoin d'établir plusieurs résultats auxiliaires.

Soit K un ensemble compact et $\{\alpha_{n,1}, ...\alpha_{n,n}\} \subset \mathbb{C} \backslash K$ un ensemble donné de points. Soit F_n un ensemble des fonctions de cette forme

$$\pi_n(z) = \frac{b_{n,0}z^n + b_{n,1}z^{n-1} + ...b_{n,n}}{(z - \alpha_{n,1})(z - \alpha_{n,2})...(z - \alpha_{n,n})}.$$

Soit f une fonction continue dans K. Notons par $r_n(f)$ la meilleure approximation pour $f(z)$ dans k dans la classe F_n dans le sens de Tchebycheff ; qui est, $\|f - r_n(f)\| = \min\{\|f - \pi_n\| : \pi_n \in F_n\}$ avec $\|.\|$ la norme supremum sur K.

Théorème 3.2. ([33])

Soient les points $\alpha_{n,k}$ tel que $|\alpha_{n,k}| > 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\lim_{n\to\infty} r_n(f) = f(z), \text{ uniformément dans } |z| \leq 1,$$

pour chaque telle fonction f analytique dans $\{|z| \leq 1\}$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{|\alpha_{n,k}|}\right) = +\infty.$$

Théorème 3.3. ([33])

Supposons que $\mu \in \mathbb{T}$. *Si* f_n *et* f *sont dans* $H_a^p(\mu)$, $0 < p < 1$, *tel que*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{p,\mu} = \|f\|_{p,\mu}$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, *vérifié uniformément sur tout compact de* $\mathbb{D}$,

alors

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{p,u} = 0.$$

Lemme 3.1. ([1])

Soit φ_n, $\varphi \in L^P$, $0 < P < \infty$. *Si* $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ *p.s et* $\|\varphi_n\|_p \to \|\varphi\|_p$, *alors* $\|\varphi_n - \varphi\|_p \to 0$.

Théorème 3.4.

Soit $\{z_i\}_{i=1,\ldots,\Lambda}$ *un ensemble des point dans* $\mathbb{D}$, *où* Λ *peut être fini ou infini. Soit* μ *une mesure finie positive de Borel sur* $[0, 2\pi)$ *satisfait la condition de Szegö et* $\{f_n\} \subset H^P(\mu)$ $\left(\text{de } (4),\ f_n = K_P(\mu, .)\tilde{f}_n + f_{n,s}\right)$, $0 < p < \infty$ *de telle sorte que*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n(0) = 1$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n(z_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$;

(iii) $\sum\limits_{\substack{i=1\\ n\to\infty}}^{\Lambda} (1 - |z_i|) < +\infty$;

(iv) $\|f_n\| = \dfrac{D_p(\mu, 0)}{\prod\limits_{i=1}^{\Lambda} |z_i|}$.

Alors

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n(z) = \prod\limits_{i=1}^{\Lambda} \dfrac{z - z_i}{\overline{z}_i z - 1} \dfrac{\overline{z}_i}{|z_i|^2}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| f_n - K_p(\mu, z) \prod\limits_{i=1}^{\Lambda} \dfrac{z - z_i}{\overline{z}_i z - 1} \dfrac{\overline{z}_i^p}{|z_i|^2} \right\|_{\mu,p} = 0.$

Si Λ *est un ensemble vide, puis le côté de droite de* (a) *est égal à* 1, *c'est-à dire*

$$\prod_{i=1}^{\Lambda} \frac{z - z_i}{\overline{z}_i z - 1} \frac{\overline{z}_i}{|z_i|^2} \equiv 1.$$

Découle immédiatement de la formule de Cauchy et inégalité de Hölder.

Preuve

Tout d'abord, nous allons prouver pour la mesure de Lebesgue et $\Lambda = \emptyset$ en deux étapes : $p = 2$ et $p \neq 2$. Deuxièmement, nous considérons en général $\mu \in \mathbb{T}$ et encore $\Lambda = \emptyset$. Enfin, nous prouvons le cas général.

(A) Soit $\mu = m$, $p = 2$, et $\Lambda = \emptyset$. Notons que dans ce cas, $D(\mu, z) \equiv 1$. De la monotonie des moyens et de l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$|f_n(0) + 1| \leq \|f_n + 1\|_2 \leq \|f_n\|_2 + \|1\|_2 .$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n + 1\| = 2.$$

Maintenant, en utilisant le lau parallélogramme, on obtien $\|f_n - 1\| = 0$, c'est (b).

L'énoncé (a) découle immédiatement de la formule de Cauchy et inégalité de Hölder.

(B) Considérons maintenant et encore $p \neq 2$ et encore $\mu = m$, et $\Lambda = \emptyset$. En utilisant encore le théorème de factorisation pour H^p, nous obtenons qu'il existe $\beta_n \in H^\infty$, plus précisément, les produits de Blaschke, et $h_n \in H^2$, telle que

$$f_n(z) = \beta_n(z)\, h_n(z)^{2/p} = \frac{\beta_n(z)}{\beta_n(0)} \left(\beta_n(0)^p\, h_n(z)\right)^{2/p}$$

et

$$\|f_n\|_p^p = \|h_n\|_2^2 .$$

Nous allons voir que $\bar{h}_n(z) = \beta_n(0)^p\, h_n(z) \in H^2$ vérifient les conditions étudiées dans (A).

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to\infty} |f_n(0)|^{p/2} = \lim_{n\to\infty} |\beta_n(0)^p\, h_n(z)| \leq \|\beta_n(0)^p\, h_n\|_2 \\ &= \lim_{n\to\infty} |\beta_n(0)|^{p/2}\, \|h_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} |\beta_n(0)|^{p/2} \leq 1, \end{aligned}$$

puisque $|\beta_n(z)| = 1$ si $|z| = 1$ et du principe du maximum l'inégalité suit, donc

$$\lim_{n\to\infty} |\beta_n(0)|^{p/2} = 1,$$

et nous obtenons $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\bar{h}_n\right\|_2 = 1$. Puis, à partir du cas précédent, nous avons (a) et (b) pour $\bar{h}_n$. De même pour $\left\{\bar{\beta}_n(z) = \dfrac{\beta_n(z)}{\beta_n(0)}\right\}$, $\bar{\beta}_n \in H^\infty \subset H^2$. Donc $\{\bar{\beta}_n\}$ vérifie (a) et (b). Alors, nous avons (a) pour f_n. Il reste à voir que (b) est vérifié pour $\bar{h}_n$ et $\bar{\beta}_n$, il existe $\{n_j\} \subset \Gamma \subset \mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \bar{h}_{n_j}(z) = 1, \text{ p.s} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \bar{\beta}_{n_j}(z) = 1 \text{ p.s.}$$

En utilisant le lemme 3.1 la preuve en découle.

(C) Dans cette étape nous considérons $\mu \in \mathbb{T}$ et encore $\Lambda = \emptyset$. Nous appliquons l'argument précédent à $\tilde{f}_n$. en fait,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\tilde{f}_n\right\|_{p,\mu}^p = \lim_{n\to\infty} \left\|K_p \tilde{f}_n\right\|_{p,\mu_a}^p + \|f_{n,s}\|_{p,\mu_s}^p = D_p(\mu, 0)^p,$$

et cela donne

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\|K_p \tilde{f}_n\right\|_{p,\mu}^p \leq D_p(\mu, 0)^p.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sup \int \left|K_p\left(e^{i\theta}\right) \tilde{f}_n\left(e^{i\theta}\right) \acute{\mu}(\theta)\, dm(\theta)\right| \\
= \;& D_p(\mu, 0)^p \lim_{n\to\infty} \sup \int \left|\tilde{f}_n\left(e^{i\theta}\right)\right| dm(\theta) \leq D_p(\mu, 0)^p,
\end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\tilde{f}_n\right\|_p^p \leq 1$. A partir du cas analysé ci-dessus, nous obtenons $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}(z) = 1$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\tilde{f}_n - 1\right\|_p = 0$. donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\tilde{f}_n\right\|_p = 1$ et

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|K_p\tilde{f}_n\right\|_{p,\mu_a}^p = D_p(\mu,0)$. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_{n,s}\|_{p,\mu_s}=0$ et par conséquent

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|f_n-K_p\|_{p,\mu}^p &= \lim_{n\to\infty}\left(\|f_n-K_p\|_{p,\mu_a}^p+\|f_n-K_p\|_{p,\mu_s}^p\right),\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left\|K_p\tilde{f}_n-K_p\right\|_{p,\mu_a}^p+\|f_{n,s}\|_{p,\mu_s}^p\right),\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(D_p(\mu,0)^p\left\|\tilde{f}_n-1\right\|_p^p+\|f_{n,s}\|_{p,\mu_s}^p\right).
\end{aligned}$$

(D) Enfin, nous prouvons le cas général.

Soit $f_n = K_p\tilde{f}_n + f_{n,s}$ avec $\tilde{f}_n \in H^p$ et $\|f_n\|_{\mu,p} \geq \left\|K_p\tilde{f}_n\right\|_{\mu,p}$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\left\|\tilde{f}_n\right\|_p \leq 1/\prod\limits_{i=1}^{\Lambda}|z_i|^p$ de (iv). Nous allons voir que toutes les sous-suites convergentes de f_n, converge vers la même limite, uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$. Soit $\tilde{f}$ une fonction de limite. Du (ii), $\tilde{f}$ est nulle sur est nulle sur z_i, $\tilde{f}\in H^p$ et $\|f\|_p \leq 1/\prod\limits_{i=1}^{\Lambda}|z_i|^p$.

$$\tilde{f}(z) = \Pi\frac{z-z_i}{z\bar{z}_{i-1}}\frac{z_i}{|z_i|^2}\Pi\frac{z-w_i}{z\bar{w}_i-1}\frac{w_i}{|w_i|^2}h(z),$$

où $\{z_i\}$, $\{w_i\}$ sont des zéros de $\tilde{f}$, h est une fonction a un zéro libre en H^p, $h(0)=1$, et $\left\|\tilde{f}_n\right\|_p = \Pi\left(1/\prod\limits_{i=1}^{\Lambda}|z_i|^p\right)\left(1/\prod\limits_{i=1}^{\Lambda}|w_i|^p\right)\|h\|_p$. Alors $\|h\|_p \leq 1$ et, comme conséquence $h\equiv 1$. Donc, l'ensemble $\{w_i\}$ est vide et $\tilde{f}(z) = \Pi\frac{z-z_i}{z\bar{z}_{i-1}}\frac{z_i}{|z_i|^2}$. De plus, nous avons $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n(z)=\tilde{f}(z)$ uniformément sur chaque un sous ensemble compacte de D et $\left\|\tilde{f}_n\right\|_p \leq \left\|\tilde{f}\right\|_p$. Alors à partir de théorème 3.3, nous obtenons $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\tilde{f}_n-\tilde{f}\right\|_p=0$ de même que $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|K_p\tilde{f}_n-K_p\tilde{f}\right\|_{p,u_a}=0$. En particulier $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|K_p\tilde{f}_n\right\|_{p,u_a}=\left\|K_p\tilde{f}\right\|_{p,u_a}=\left(1/\prod\limits_{i=1}^{\Lambda}|z_i|\right)\times D_p(\mu,0)$, et alors $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_{p,\mu_a}=0$. D'où nous obtenons (b).

Remarque 3.1.

Théorèmes Newman et Keldysh ne sont pas applicables dans le cas H^∞ comme il est montré dans l'exemple ci-dessous.

On pose

$$f_n(z) = (nz+n-1)/(n+(n-1)z).$$

Il est facile de vérifier que $f_n \in H^\infty$, $\|f_n\|_\infty = 1$, *et* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 1$, *uniformément sur chaque sous ense*

$\|f_n - 1\| \nrightarrow 0$.

Théorème 3.5.

Pour $0 < p < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{P_{n,p}}{W_n} \right\|_p = D_p(\mu, 0),$$

où 0 *remplace* $D_p(\mu, 0)$ *si* $\log \acute{\mu}(\theta)$ *est non intégrable.*

Preuve

Soit $\Lambda \subset N$ une suite indexée de telle sorte que

$$\lim_{n\in\Lambda} \left\| \frac{P^*_{n,p}}{W^*_n} \right\|_p = \lim_{n\to\infty} \sup \left\| \frac{P^*_{n,p}}{W^*_n} \right\|_p.$$

D'un résultat dû à Szegö ([29]) , nous savons que si $T_{n,2}$ sont des polynômes extrémaux de telle sorte que

$$\|T_{n,2}\|_2 = \min \{\|Q_n\|_2 : \text{monic de deree } n\},$$

alors

$$\lim_n \|T_{n,2}\|_2^2 = \lim_n \left\|T^*_{n,2}\right\|_2^2 = D_2(\mu, 0)^2,$$

avec $D_2(\mu, 0) = 0$ si $\log \acute{\mu}(\theta)$ est non intégrable. Étant donné que les zéros de $T^*_{n,2}$ se trouvent dans $\mathbb{E}$, $Q_n(z) = \left(T^*_{n,2}(z)\right)^{2/p}$ est analytique dans $\{|z| \leq 1\}$, de sorte que (1) vérifié, d'après le théorème 2, il existe une suite $\left\{\dfrac{R_{m_n}}{W^*_{m_n}}\right\}_{m_{n\in\acute{\Lambda}\subset\Lambda}}$ telle que

$$\lim_{n\in\Lambda} \sup_{|z|\leq 1} \left| \frac{R_{m_n}(z)}{W^*_{m_n}(z)} - Q_n(z) \right| = 0.$$

En Particulier, puisque $Q_n(0) = \left(T^*_{n,2}(0)\right)^{2/p} = 1 = W^*_{m_n}(0)$, nous avons $\lim\limits_{n\in\Lambda} R_{m,n}(0) = 1$, d'où

$$\lim_{n\in\Lambda} \left\| \frac{R_{m_n}}{W^*_{m_n}} \right\|_p^p = \lim_{n\in\Lambda} \|Q_n\|_p^p = \lim_{n\in\Lambda} \left\|T^*_{n,2}\right\|_2^2 = D_p(\mu, 0)^2,$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\|\frac{P_{n,p}^*}{W_n^*}\right\|_p \leq D_p(\mu,0)\,. \tag{3.3}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_{n,p}^*(e^{i\theta})}{W_n^*(e^{i\theta})}\right|^p d\mu(\theta) &\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_{n,p}^*(e^{i\theta})}{W_n^*(e^{i\theta})}\right|^p \acute{\mu}(\theta)\,d\theta \\
&\geq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{P_{n,p}^*(e^{i\theta})}{W_n^*(e^{i\theta})}\right|^p d\theta\right\}\times\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\acute{\mu}(\theta)\,d\theta\right\} \\
&\geq \left|\frac{P_{n,p}^*(0)}{W_n^*(0)}\right|^p D_p(\mu,0)^p \\
&= D_p(\mu,0)^p\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty}\inf\left\|\frac{P_{n,p}^*}{W_n^*}\right\|_p \geq D_p(\mu,0) \tag{3.4}$$

avec (3.3) et (3.4) le théorème est démontré.

Remarque 3.2.

Nous avons également prouvé que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{P_{n,p}^*}{W_n^*}\right\|_p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_{n,p}^*(z)}{W_n^*(z)}\right|^p \acute{\mu}(\theta)\,d\theta\right)^{1/p} = D_p(\mu,0)\,.$$

Thèorème 3.6.

Pour $o < p < \infty$, les énoncés suivantes sont équivalentes :

(i) *satisfait la condition Szegö ; qui est,* $\log\acute{\mu}\in L^1$

(ii) *la limite suivante existe et est positive*

$$\lim_{n\to\infty}\tau_{n,p} > 0.$$

(iii) Il existe une fonction $S \in H^p(\mu)$ *avec* $\|S\|_p \neq 0$*, tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{P^*_{n,p}}{W^*_n} - S \right\|_p = 0.$$

(iv) Il existe une fonction $T_{n,p}$ *analytique en* $\mathbb{D}$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{P^*_{n,p}(z)}{W^*_n(z)}}{\left\| \dfrac{P^*_{n,p}}{W^*_n} \right\|} = T_{n,p}(z)$$

uniformément sur chaque sous-ensemble de $\mathbb{D}$ *compact.*

En outre, si i) est vérifié, alors

$$\lim_{n\to\infty} \tau_{n,p} = D_p(\mu, 0),$$

et les fonctions dans (iiii) et (iv) sont $S(z) = K_p(\mu, z)$ *et* $T_{n,p}(z) = \dfrac{1}{D_p(\mu, z)}$.

Preuve

$(i) \Longleftrightarrow (ii)$: Il résulte de Théorème 3.5.

$(i) \Longleftrightarrow (iii)$: On considère la fonction

$$h_n(z) = \frac{P^*_{n,p}(z)\, D_p(\mu, z)}{W^*_n(z)\, D_p(\mu, 0)}, \tag{3.5}$$

qui appartient à H^p puisque $h_n(0) = 1$ et $\left|D_p\left(\mu, e^{i\theta}\right)\right| = \acute{\mu}(\theta)$, d'après le théorème 3.5, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|h_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \right\} = 1 \tag{3.6}$$

Nous appliquons le théorème 3.4 (ici $\Lambda = \emptyset$ et β est la measure de Lebesgue) il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|h_n\left(e^{i\theta} - 1\right)\right|^p d\theta = 0 \right\}.$$

Donc
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_{n,p}^*\left(e^{i\theta}\right)D_p\left(\mu,e^{i\theta}\right)}{W_n^*\left(e^{i\theta}\right)D_p\left(\mu,0\right)}-1\right|^p d\theta\right\}=1.$$
Puis
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_{n,p}^*\left(e^{i\theta}\right)}{W_n^*\left(e^{i\theta}\right)}-\frac{D_p\left(\mu,0\right)}{D_p\left(\mu,e^{i\theta}\right)}\right|^p \acute{\mu}\left(\theta\right)d\theta\right\}=0.$$

Par conséquent, utilisant (3.6) et encore théorème 3.5, nous obtenons (iii) où $S\left(z\right)=K_p\left(\mu,z\right).$

$(iii)\Longrightarrow(i)$ Il résulte de la relation

$$\liminf_{n\to\infty}\left\|\frac{P_{n,p}^*}{W_n^*}-\Psi\right\|_p=0,$$

où $\Psi\left(\zeta\right)$ est tel que $\left\|\Psi\right\|_p\neq0.$

En effet, selon 1, nous avons l'existence d'une sous-suite $\{n_\nu\}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{P_{n,p}^*}{W_{n_\nu}^*}-\Psi\right\|_p=0,$$

si (i) n'est pas vérifié, d'après le théorème 3.5

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|\frac{P_{n,p}^*}{W_n^*}\right\|_p=0,$$

et on obtient $\left\|\Psi\right\|_p=0$,qui est une contradiction.

$(iii)\Longrightarrow(iv)$. La suite des fonctions $\{h_n\}$ dans (3.6) satisfait l'hypothèse du théorème 3.4, donc $\lim\limits_{n\to\infty}h_n\left(z\right)=1$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Maintenant, puisque (i) est équivalent à (iii), en utilisant à nouveau théorème 3.5, nous obtenons
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{P_{n,p}^*\left(z\right)}{W_{n_\nu}^*\left(z\right)}}{\left\|\dfrac{P_{n,p}^*\left(z\right)}{W_{n_\nu}^*\left(z\right)}\right\|_p}=\frac{1}{D_p\left(\mu,z\right)}.$$

$(iv) \Longrightarrow (i)$, à partir de (iv) et le théorème 3.5, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{P_{n,p}^*(0)}{W_{n_\nu}^*(0)}}{\left\| \dfrac{P_{n,p}^*(z)}{W_{n_\nu}^*(z)} \right\|_p} = T_{n,p}(0) = \frac{1}{D(\mu,0)} < \infty,$$

mais cela est vrai si et seulement si (i) est vérifiée.

3.2.3 Théorème de densité

Dans cette partie nous donnons un théorème de densité qui peut être considéré comme "application" du résultat principal. nous introduisons la notation :

$$R_{n,k} = \left\{ \frac{h}{W_n^*} : h \in \Pi_{n-k} \right\}.$$

Théorème 3.7.

Supposons que u est une mesure absolument continue μ_a et satisfait à la condition Szegö, puis les instructions suivantes sont équivalentes :
(i) *Pour chaque $j \in \mathbb{Z}_+$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{P_{n,n-jp}^*\left(e^{i\theta}\right)}{W_n^*\left(e^{i\theta}\right)} \right|^p d\mu_a(\theta) = D_p(\mu_a, 0)^p,$$

où $P_{n,n-j,p}$ est le polynôme monic extrémal c'est

$$\left\| \frac{P_{n,n-j,p}}{W_n} \right\| = \min \left\{ \left\| \frac{Qn}{W_n} \right\| : Q_{n-j}, \text{monic} \right\}.$$

(ii) *Pour chaque $k \in \mathbb{Z}_+$ est dense dans $H^p(\mu_a)$.*

Preuve

$(ii) \Longrightarrow (i)$: ici, nous utilisons la même technique que dans la preuve du théorème 3.5. Il est bien connu que $(ii) \Leftrightarrow (i)$ est vrai lorsque $p = 2$ et $W_n(z) = z^n$ ([16]). $T_{n-k,2}$

désignent les polynômes extrémaux dans ce cas, étant donné $k \geq o$ il existe R_{m_n-k} polynômes de degré $m_n - k$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \left(T_{n-k}^*(z)\right)^{2/p} - \frac{R_{m_n-k}(z)}{W_{m_n}^*(z)} \right|^p \acute{\mu}(\theta)\, d\theta = 0.$$

Notons que les fonctions $\left\{ \left(T_{n-k}^*(z)\right)^{2/p} \right\}_n$ sont analytiques dans un ensemble ouvert contenant $\{|z| \leq 1\}$ parce que T_{n-k}^* n'a pas des zéros dans $\{|z| \leq 1\}$. Alors

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} R_{m_n-k}(0) = 1$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{R_{m_n-k}(z)}{W_{m_n}^*(z)} \right|^p \acute{\mu}(\theta)\, d\theta = D_p(\mu_a, 0)^p$. Donnons $\Lambda \subset \mathbb{N}$ une suite indexée, à partir de (ii) nous observons que la suite $\{m_n\}$ peut être choisie dans Λ. Par conséquent, (i) résulte de (a) et (b).

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Définir $i,\, j \in z$, en utilisant (i) et le théorème, 3.4 nous avons

$$\frac{P_{n,n-(i+j),p}^*(z)}{W_n^*(z)} \to K_p(\mu_a, z),$$

dans $L^P(\mu_a)$. Alors

$$\frac{z^i P_{n,n-(i+j),p}^*(z)}{W_n^*(z)} \to z^i K_p(\mu_a, z),$$

dans $H^p(\mu_a)$. Comme $H^p(\mu_a) = H^p.K_p(\mu_a, .)$ et H^p est la fermeture des polynômes en L^p, $R_{n,j}$ satisfait (ii).

3.3 Comportement asymptotique des polynômes extrémaux sur le cercle unité plus une partie discrète finie

On représente dans ce paragraphe une étude du problème de comportement asymptotique des polynômes L^P-extrémaux sur un ensemble de la forme $F = \mathbb{T} \cup \{z_1,\ z_2, ...,\ z_N\}$ avec $z_k, \in \mathbb{D}$.

Soit β_n une mesure variable tel que $\beta_n = \mu_n + \eta$, où η une mesure discrète avec une masse $A_K > 0$ au point z_k, $k = 1,..., N$, et $d\mu_n = \dfrac{d\mu}{|W_n^*|^p}$.

Ici, nous étudions le comportement asymptotique des polynômes $T_{n,p}^*(z, \beta_n)$, qui résolvent le problème extrémal

$$\lambda_{n,p} = \min_{P_n(0)=1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int \left| \frac{P_n(z)}{W_n^*(z)} \right|^p d\mu(\theta) + \sum_{K=1}^{N} |P_n(z_K)|^P A_K \right\}^{1/p}.$$

Théorème 3.8.

Pour $0 < p < \infty$ *les propositions suivantes sont équivalentes*

(i) μ *satisfait la condition Szegö*

(ii) *Les limites suivantes existes et sont positives* :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,p} > 0.$$

(iii) *IL existe une fonction* $S \in H^p(\mu)$ *avec*$\|S\|_{p,\mu} \neq 0$ *de sorte que*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{T_{n,p}^*(z, \beta_n)}{W_n^*(z)} - S(z) \right\|_{p,\beta} = 0.$$

(iv) Il existe une fonction analytique $T_{n,p}$ dans $\mathbb{D}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{T^*_{n,p}(z,\beta_n)}{W_n(z)}}{\left\|\dfrac{T^*_{n,p}(.,\beta_n)}{W^*_n}\right\|_{p,\beta}} = T_{n,p}(z)$$

vérifié uniformemnt sur chaque sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$.

De plus, si (i), est vérifié

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,p} = D_p(u,0)$$

et les fonctions (iii) et (iv) sont respectivement $S(z) = \dfrac{D_p(\mu,0)}{D_p(\mu,z)}$ et $T_{n,p}(z) = \dfrac{1}{D_p(\mu,z)}$,

Preuve

On montre uniquement $(i) \Leftrightarrow (ii)$

Puisque $A_K > 0$,

$$\lambda_{n,p} \geq \inf_{Q_n(0)=1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \left|\frac{Q_n(z)}{W^*_n(z)}\right|^p d\mu(\theta) \right\}^{1/p} = \tau_{n,p}, \tag{3.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf\ \lambda_{n,p} \geq D_p(\mu,0).$$

Maintenant, soit V_n un polynôme dont les zéros sont $z_1,\ z_2, \ldots\ z_n$ et soit $T^*_{n-N,p}$, avec $T^*_{n-N,p}(0) = 1$, le polynôme extrémal pour la mesure $\left|\dfrac{V_N(z)}{V_N(0)}\right|^p d\mu_n$; tel que,

$$\lambda^p_{n,p} \leq \inf_{Q_{n-N}(0)=1} \int\limits_{|z|=1} \left|\frac{Q_{n-N}(z)}{W^*_n(z)}\right|^p \left|\frac{V_N(z)}{V_N(0)}\right|^p d\mu = \int\limits_{|z|=1} \left|\frac{T^*_{n-N,p}(z)}{W^*_n(z)}\right|^p \left|\frac{V_N(z)}{V_N(0)}\right|^p d\mu.$$

En utilisant le théorème 4 nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{|z|=1} \left|\frac{T^*_{n-N,p}(z)}{W^*_n(z)}\right|^p \left|\frac{V_N(z)}{V_N(0)}\right|^p d\mu = D_p\left(\left|\frac{V_N(z)}{V_N(0)}\right|^p d\mu, 0\right).$$

À partir des propriétés de la fonction Szegö, nous obtenons que

$$D_p\left(\left|\frac{V_N(z)}{V_N(0)}\right|^p d\mu, 0\right) = D_p(\mu, 0),$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \sup \lambda_{n,p} \leq D_p(\mu, 0). \tag{3.8}$$

Le résultat découle de (3.7) et (3.8).

3.4 Comportement asymptotique des polynômes extrémaux sur un contour

Dans cette partie nous donnons une asymptotique forte des polynômes extrémaux associés à des mesures variables possédant la forme $d\sigma = \dfrac{d\sigma}{|Y|^P}$, où σ est une mesure positive sur un contour de Jordan C, et $\{Y_n\}$ est une suite de polynômes telle que pour chaque n, Y_n a exactement un degré n et tel que tous ses zéros $(\alpha_{n,i})$, $i = 1, 2, ...$, se trouvent à l'extérieur de C.

Soit C un contour de Jordan de longueur L dans le plan $\mathbb{C}$ dont l'intérieur est α. Soit $\sigma(s)$ une mesure positive sur $[0, l]$. Nous désignons par $L^p(C, \sigma)$ l'espace des fonctions mesurables et complexes sur C, telle que :

$$\|f\|_{p,\sigma} = \int_C |f(\zeta)|^p < \infty, \ \xi = \xi(s).$$

Avec $\zeta = \zeta(s)$ une paramétrisation de C. Soit B l'intérieur de C et $x = \varphi(z) = \alpha + z + b_2 z^2 + ...$, $|z| < 1$, $\alpha \in B$ la transformation conforme qui agit de $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ sur B, tel que $\alpha = \varphi(0)$ et $\acute{\varphi}(0) > 0$ à partir du théorème de Carathéodory, φ peut être prolongeable par continuité à une fonction qui est une application injective de $\{|z| = 1\}$ sur C.

Soit $z = \gamma(x)$ la fonction inverse de φ. Ainsi, la mesure σ induit une mesure image μ sur $|z| = 1$ définie par :

$$\mu(E) = \sigma(\zeta - \mu(\gamma - \mu(E))) = \sigma((\gamma \circ \zeta) - \mu(E)),$$

avec $\acute{\sigma}$ et $\acute{\mu}$ parties absolument continue de σ et μ, respectivement.

Soit K la composante non bornée du complément de C et $z = \varphi(x)$ une fonction qui associe K sur $E = \{z : |z| > 1\}$ de sorte que les points à l'infini correspondent les uns aux autres et que $\varphi(\infty) > 0$. C_R désigne génériquement la courbe $|\varphi(x)| = R > 1$ dans K.

Nous définissons la mesure variable

$$d\sigma_n = \frac{d\sigma}{\left|Y_n\right|^P}$$

où $\{Y_n\}$, $n \in N$ est une suite de polynômes telle que pour chaque n, Y_n a exactement un degré n, l'ensemble de ses zéros $(\alpha_n,\ i), i = 1, 2, ...,$ se trouvent dans le composant non bornée du complément de C_A, $A > 1$, et $Y_n(\alpha) = 1$.

Nous voulons étudier le comportement asymptotique des polynômes qui résolvent le problème extrémal suivant :

$$\rho_{n,p} \underset{Q_n(\alpha)=1}{=\inf} \|Q_n\|_{p,\sigma_n} = \inf_{Q_n(\alpha)=1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \left| \frac{Q_n(\zeta)}{Y_n(\zeta)} \right|^P d\sigma(s) \right\}^{1\backslash p}.$$

Nous désignons par $\{P_{n,p}\}$ une suite de polynômes extrémaux tel que

$$\|P_{n,p}\|_{p,\sigma_n} = \min_{Q_n(\alpha)=1} \|Q_n\|_{p,\sigma_n}.$$

$H^p(C,\sigma)$ est définie comme la fermeture des polynômes $L^p(C,\sigma)$ de la variable $\zeta \in C$. $L^p_s(C,\sigma) = \{f \in L^p_s(C,\sigma) : f = 0,\ \acute{\sigma}_s \text{ p.s}\}$ et $L^p_a(C,\sigma) = \{f \in L^p(C,\sigma) : f = 0,\ \sigma_s\text{−a.e.}\}$, avec σ_s la partie singulière de σ. De même, nous définissons $H^P_s(C,\sigma)$ et $H^p_a(C,\sigma)$
Par ailleurs, on note H^p l'espace classique de Hardy dans $\{|z| < 1\}$ et $H^p(\mu)$ la fermeture des polynômes $L^p(\mu)$ en $e^{i\theta}$.

Nous supposons que σ satisfait la condition de Szegö tel que

$$\int\limits_C \log \acute{\sigma}(s) \left|\acute{\gamma}(\zeta)\right| |d\zeta| > -\infty,$$

et c'est la même chose que, $\log \acute{\mu} \in L^1$. Nous désignons par $D_p(\mu, z)$ la fonction de Szegö.

$$D_p(\mu, z) = \exp\left\{ \frac{1}{2p\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \acute{\mu}(\theta)\, d\theta \right\},\ \zeta = e^{i\theta},\ z \in D,$$

et

$$\Delta_p(\mu, x) = D_p(\mu, \gamma(x)).$$

La fonction $\Delta_p(\sigma, x)$ satisfait les propriétés suivantes :

1) $D_p(\sigma, x)$ est régulière en B, plus précisément, $D_p(\sigma, x) \in H^p(C, \sigma)$.

2) $D_p(\sigma, x) = 0$ dans B, et $D_p(\sigma, \alpha) = D_p(\mu, 0) > 0$,

3) $|\gamma(\zeta)||D_p(\sigma, \zeta)|p = \sigma(s)$ presque partout dans C, avec $\zeta \in C$.

3.4.1 Résultats auxiliaires

Soit F un ensemble de points fermés limités et $f(x)$ une fonction continue sur F. Soit F_n un ensemble de fonctions de la forme

$$\pi_n(x) = \frac{b_{n,0}x^n + b_{n,1}x^{n-1} + \ldots + b_{n,n}}{(x - \alpha_{n,1})(x - \alpha_{n,2}) \ldots (x - \alpha_{n,n})}.$$

Prenons $r_n(f) \in F_n$ de sorte que c'est la meilleure approximation de $f(x)$ sur F dans le sens de Tchebycheff, i.e.

$$\|f - r_n(f)\| = \min\{\|f - \pi_n\| : \pi_n \in F_n\}.$$

Avec $||.||$ est la norme sup sur F.

Si $f \in H^p(\mu)$, alors il existe des fonctions uniques $\tilde{f}$, f_s telles que

$$f = K_p f \tilde{+} f_B, \tilde{f} \in H^p, \ f_s \in L_s^p(\mu).$$

Avec

$$K_p(\mu, z) = \begin{cases} \dfrac{D_p(\mu, 0)}{D_p(\mu, z)}, & \text{si } z \in (\mathbb{T}_\alpha \cup \{z : |z| = 1\}) \\ 0, & \text{si } z \in \mathbb{T}_\alpha \end{cases}$$

où $\mathbb{T}_a$ et$\mathbb{T}_S$ représentent une décomposition disjointe du cercle unité de telle sorte que $\acute{\mu}$

et μ_s se situent respectivement sur ces deux ensembles.

Théorème 3.9. (Théorème de Keldysh ([2]))

Supposons que μ *satisfait la condition de Szegö et* $\{f_n\} \subset H^p(\mu)$, $0 < p < \infty$, *tel que*

i) $\lim \tilde{f}_n(0) = 1$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{p,\mu} = D_p(\mu, 0)$.

Alors

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n(z) = 1$ *est uniformément sur chaque sous ensemble compact de* $\mathbb{D}$.

b) $\|f_n - K_p(\mu, z)\|_{p,\mu} = 0$.

Théorème 3.10.

Pour $0 < p < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{P_{n,p}}{Y} \right\|_{p,\sigma} = \Delta_p(\sigma, \alpha)$$

où 0 *remplace* $\Delta_p(\sigma, \alpha)$ *si* σ *ne satisfait pas les conditions Szegö.*

Preuve

Soit μ est la mesure image de σ sur $|z| = 1$ par $\gamma \circ \zeta$. À partir de Szegö ([2]), nous savons que si $T_{n,2}(z)$, sont les polynômes extrémaux

tels que

$$\|T_{n,2}\|_{2,\mu} = \min \left\{ \|Q_n\|_{2,\mu} : \ Q_n \text{ monic de degree } n \right\},$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \|T_{n,2}\|_{2,\mu}^2 = \lim_{n\to\infty} \left\|T_{n,2}^*\right\|_{2,n}^2 = D_2(\mu, 0)^2$$

Avec $D_2(\mu, 0) = 0$ si $\log\acute{\mu}(\theta)$ n'est pas intégrable et

$$T_{n,2}^*(z) = z^n \overline{T}_{n,2}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Soit

$$\delta_n(x) = \left(T_{n,2}^*(\gamma(x))\right)^{2/p},$$

ce qui est analytique dans $\bar{B}$ tant que les zéros de $T_{n,2}^*$ se situent dans $\{|z| > 1\}$, donc et

à partir du théorème 2.1 ; il existe une suite
$\left\{\dfrac{R_{m_n}}{Y_{m_n}}\right\}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\zeta\in C}\left|\frac{R_{m_n}(\zeta)}{Y_{m_n}(\zeta)}-\delta_n(\zeta)=0\right|,$$

et la convergence est uniforme dans B. En particulier, il y a convergence en $x=\alpha$ et tant que

$$\delta_n(\alpha)=\left(T^*_{n,2}(0)\right)^{2/\mu}=1=Y_{m_n}(\alpha)$$

on a

$$\lim_{n\to\infty}R_{m_n}(\alpha)=1.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_C\left|\frac{R_{m_n}(\zeta)}{Y_{m_n}(\zeta)}\right|^p d\sigma(s) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_C|\delta_n(\zeta)|^p\,d\sigma(s),\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\left|T^*_{n,2}\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\mu(\theta),\\
&= D_2(\mu,0)^2,\\
&= D_p(\mu,0)^p,
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\|\frac{P_{n,p}}{Y_n}\right\|_{p,\sigma}\leq D_p(\mu,\gamma(\alpha))=\Delta_p(\sigma,\alpha).$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Jensen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{C}\left|\frac{R_{m_n}(\zeta)}{Y_{m_n}(\zeta)}\right|^{p} d\sigma(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left\|\frac{P_{n,p}\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}{Y_n\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}\right\|^{p} d\mu(\theta),\\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left\|\frac{P_{n,p}\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}{Y_n\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}\right\|^{p} \acute{\mu}(\theta)\, d\theta,\\
&\geq \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left\|\frac{P_{n,p}\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}{Y_n\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}\right\|^{p} \acute{\mu}(\theta)\, d,\\
&\geq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\left|\frac{P_{n,p}\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}{Y_n\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}\right| d\theta\right\}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\log\acute{\mu}(\theta)\, d\theta\right\},\\
&\geq \left|\frac{P_{n,p}(\varphi(0))}{Y_n(\varphi(0))}\right| D_p(\mu,0)^{p} = D_p(\mu,0)^{p},
\end{aligned}
$$

plus, (3.2) nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{P_{n,p}}{Y_n}\right\|_{p,\sigma} = D_p(\mu,\gamma(\alpha)).$$

Théorème 3.11.

Pour $0 < p < \infty$, les énoncés suivants sont équivalents

i) σ satisfait la condition de Szegö.

ii) La limite suivante existe et est positive

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{np} > 0.$$

iii) Il existe une fonction $S(x)$ régulière dans B avec $S(\alpha) = 1$ et $||S||_{p,\sigma} < \infty$, tel que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{p_{np}(x)}{Y_n(x)} - S(x)\right\|_{p,\sigma} = 0.$$

iv) Il existe une fonction $T_{n,p}(x)$ régulière dans B tels que vérifie uniformément sur *chaque sous ensemble compact de B*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{p_{np}(x)}{Y_n(x)}}{\left\|\dfrac{p_{np}}{Y_n x}\right\|}=T_{n,p}(x)$$

Par ailleurs, si i) est vérifié

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{np}=\Delta_p(\sigma,\alpha), S(x)=\frac{\Delta_p(\sigma,\alpha)}{\Delta_p(\sigma,x)},\ et\ T_{n,p}(x)=\frac{1}{\Delta_p(\sigma,x)}.$$

Preuve

Les preuves i)$\Longrightarrow$ii). Voire le théorème 3.1.

i)$\Longrightarrow$iii). Nous considérons la fonction

$$h_n(z)=\frac{P_{n,p}(\varphi(z))\,D_p(\mu,z)}{Y_n(\varphi(z))\,D_p(\mu,0)},$$

qui est régulière dans $\mathbb{D}$ et $h_n(0)=1$. À partir de i)$\Longrightarrow$ii) et $|D_p(\mu,e^{i\theta})|p=\acute{\mu}(\theta)$, nous avons $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|h_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right\}=1.$
Ensuite, nous appliquons le théorème 2.2.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|h_n\left(e^{i\theta}\right)-1\right|^p d\theta\right\}=0,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_{n,p}\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)D_p\left(\mu,e^{i\theta}\right)}{Y_n\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)D_p(\mu,0)}-1\right|^p d\theta=0\right\},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_{n,p}\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}{Y_n\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}-\frac{D_p(\mu,0)}{D_p\left(\mu,e^{i\theta}\right)}\right|^p \acute{\mu}(\theta)\,d\theta=0\right\}.$$

Par conséquent, en utilisant (3.4) et le théorème 3.1, nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_{n,p}\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}{Y_n\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)}-\frac{D_p(\mu,0)}{D_p\left(\mu,e^{i\theta}\right)}\right|^p d\mu(\theta)=0\right\},$$

et c'est la même chose que iii), où

$$S\left(x\right)=\frac{\Delta_p\sigma,\alpha)}{\Delta_p\sigma,x)}$$

iii)⇒i). Il résulte de la relation

$$\liminf_{n\to\infty}\left\|\frac{P_{n,p}}{Y_n}-\psi\right\|_p=0,$$

où $\psi(\zeta)$ est telle que $||\psi||_p\neq 0$.

En fait, à partir de (3.5), il s'ensuit qu'il existe une suite $\{n_\nu\}$ tel que

$$\lim_{\gamma\to\infty}\left\|\frac{P_{n_\gamma,p}}{Y_{n_\gamma}}-\psi\right\|_p=0.$$

Si i) n'est pas vérifié, à partir de ii)

$$\lim_{\gamma\to\infty}\left\|\frac{P_{n_\gamma,p}}{Y_{n_\gamma}}\right\|=0,$$

et nous obtenons $||\psi||_p=0$, ce qui est contradictoire

iii)$\Longrightarrow$iv). La suite de fonctions $\{h_n\}$ comme dans (3.3) satisfait l'hypothèse du théorème 2.2, uniformément sur chaque sous ensemble compacte de B. Comme i) est équivalent à iii) d'après le théorème 3.1, nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{P_{n_\gamma,p}\left(x\right)}{Y_{n_\gamma}\left(x\right)}}{\left\|\dfrac{P_{n_\gamma,p}\left(x\right)}{Y_{n_\gamma}\left(x\right)}\right\|_p}=\frac{1}{D_p\left(\mu,\gamma\left(x\right)\right)},$$

iv)$\Longrightarrow$i). à partir iv) et le théorème 3.1, nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{P_{n_\gamma,p}(x)}{Y_{n_\gamma}(x)}}{\left\|\dfrac{P_{n_\gamma,p}(x)}{Y_{n_\gamma}(x)}\right\|_p}-T_{n,p}(\alpha)-\frac{1}{\Delta_p(\sigma,\mu)}<\infty.$$

Mais ceci est vrai si et seulement si i) est vérifié.

3.4.2 Théorème de densité

Dans cette section, nous donnons un théorème de densité qui peut être vu comme une «application» du théorème principal. On introduit la notation suivante :

$$R_{n,k}=\left\{\frac{h}{Y_n}:\ \text{degree } h<n-k\right\}.$$

Théorème 3.12.

Soit σ_α une mesure en C continue absolument par rapport à la mesure de Lebesgue, et qui satisfait la condition Szegö, alors les énoncés suivants sont équivalents :
i) Pour chaque $j\in Z_+$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\dfrac{P_{n,n-j,,p}}{Y_n}\right\|_{p,\sigma_\alpha}=\Delta_p(\sigma_\alpha,\alpha)$,
où $P_{n,n-j,p}$ désigne un polynôme extrémal, avec $P_{n,n-j,p}(\alpha)=1$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{P_{n,n-j,,p}}{Y_n}\right\|_{p,\sigma_\alpha}=\min\left\{\left\|\frac{Q_{n-j}}{Y_n}\right\|:\ Q_{n-j}\in\Pi_{n-j}Q_{n-j}(\alpha)=1\right\}.$$

ii) Pour chaque $k\in Z_+$, $R_{n,k}$ est dense dans $H^p(\sigma_\alpha)$.

Preuve

ii)$\Longrightarrow$i) Ici, nous utilisons la même technique que dans la preuve du théorème 3.1. A partir de Szegö ([29]), le résultat est vrai pour $T_{n-k,2}$,
donc

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T^*_{n-k,2}\right\|_2=D_2(\mu,0)^2.$$

Soit $\delta_{n-k}(x) = \left(T^*_{n-k,2}(\gamma(x))\right)^{2/p}$qui est analytique dans $\bar{B}$ comme le Zéros de$T^*_{n-k,2}$ se trouvent dans $\{|z| > 1\}$, et à partir de ii) il existe une suite de polynômes $\{R_{m(n)-k}\}$ de degré $m_{(n)-k}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\zeta\in C} \left| \frac{R_{m_{n-k}}(\zeta)}{Y_{m_n}(\zeta)} - \delta_{n-k}(\zeta) \right| = 0,$$

et la convergence est uniforme dans $\overline{B}$. Alors,

a) $\lim_{n\to\infty} R_{m_{n-k}}(\alpha) = 1.$

b) $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{R_{m_{n-k}}}{Y_{m_n}} \right\|^p_{p,\sigma_n} = \Delta_p(\sigma_\alpha, \alpha)^p.$

Étant donné $\Lambda \subset N$ une suite d'index, à partir de ii) on observe que la suite $\{m_n\}$ peut être choisi dans Λ, alors i) résulte de a) et b).

i)$\Longrightarrow$ii). On pose$i, j \in Z_+$, à l'aide de i) et le théorème 2.2, nous avons

$$\frac{P_{n,n-(i+j),p}(\zeta)}{Y_n(\zeta)} \to \frac{\Delta_p(\sigma_\alpha, \alpha)}{\Delta_p(\sigma_\alpha, \zeta)},$$

dans $L^p(C, \sigma_\alpha)$ ainsi

$$\frac{\zeta^i P_{n,n-(i+j),p}(\zeta)}{Y_n(\zeta)} \to \zeta^i \frac{\Delta_p(\sigma_\alpha, \alpha)}{\Delta_p(\sigma_\alpha, \zeta)},$$

dans $H^p(C, \sigma_\alpha)$.

puisque

$H^p(C, \sigma_\alpha) = H^p(C) \dfrac{\Delta_p(\sigma_\alpha, \alpha)}{\Delta_p(\sigma_\alpha, \zeta)}$ et $H^p(C)$ est la fermeture des polynômes dans $L^p(C)$; $R_{n,j}$ satisfait .ii).

3.5 Conclusion

Dans ce travail nous avans présenté l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des polynômes orthogonaux ou L_p- extrémaux est celui de leur comportement asymptotique quands $n \to \infty$. Parmi les méthodes actuelles utilisées pour résoudre ces problèmes on peut citer celles se basant sur l'étude approfondie de problèmes extrémaux dans des espaces de Hardy de fonctions holomorphes et sur la théorie du potentiel logarithmique complexe.

Ce problème dépend essentiellement de la mesure σ et de son support $\mathcal{F}$.

Nous avons traité le problème dans le cas particulier $p = 2$ sur le cercle avec une fonction poids assez générale, ce problème a été étudié par plusieurs auteurs. D'autres mathématiciens ont précédé Szegö come Mehler, Heine, Darboux, Adammoff, mais chacun s'est penché sur une classe particulière de polynômes orthogonaux sans élaboré une méthode générale de résolution. Il faut noter que la méthode de Szegö est à la base de l'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux associés à des mesures concentrées sur des ensembles autres que le cercle (un contour de Jordan réctifiable, un contour de Jordan réctifiable plus une partie discrète ou finie infinie, un Système de contours et arcs plus une partie discrète finie ou infinie).tel qu'il a introduit de nouvelles idées pour vérifier les conditions imposées sur les mesures utilisées. La méthode dans le cas du contour reste encore à vèrifier ;

3.6 Bibliography

Bibliographie

[1] **M. Bello Hernandez and G. Lopez Lagomazino,** Ratio and relative asymptotics of polynomials orthogonal on an arc of the unit circle. *Journ. Approx. Theory 92 (1998). 216-244.*

[2] **M. Bello Hernandez, F. Marcellan, J. Minguez Ceniceros,** Pseudo-uniform convexity in H^p and somme extrémal problems on Sobolev spaces, *Complex Variables Theory and Application, 48 (2003), 429-440.*

[3] **M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros,** Strong asymptotiques behavior for extrémal polynomials with respect to varying measures on the unit circle, *J. Approx Theory 125 (2003) 131-144.*

[4] **I. Chalender**, "Anlyse Fonctionnelle : Fonctions armonique, Classe de Neavanlino, Espaces de hardy et introduction aux opérateurs de Toplitz et de Hank", *Université Lyon I, 2008.*

[5] **B.de la Calle Ysern, G. Lopez Lagamasino,** *S*trong asymptotiques of orthogonal polynomials with varying measures and Hermite-Padé approximants, *Journ.of Comput. appl Math. 99 (1998) 91-103.*

[6] **J. B. Conway,** "Functions of one complex variable". *Springer-Verlag. New York (1973).*

[7] **Ya. L. Geronimus,** Some extrémal problems in $L^P(\sigma)$ spaces. *Math. Sbornik. 31 (1952) 3-26 [In Russian].*

[8] **Ya. L. Geronimus, "**Polynomials orthogonal on a circle and interval". *Pergamon Press New York (1960).*

[9] **A. A. Gonchar,** On the convergence of Pade approximants for some classes of meromorphic functions, *Math. Sb. 97(139) (1975), 607-629.*

[10] **A. A. Gonchar and G. Lopez ,** On Markov's theorem for multi-point Pade approximations, *Mat. Sb. 105(147) (1978), 512-524.*

[11] **A. A. Gonchar, E.A. Rakhmanov,** The equilibriaum measure and distributions of zeros of extremal polynomials, *Math. Sbornik NS 125(167) 1(9) (1984) 117-127 (Russian).*

[12] **V. A. Kaliaguine,** A note on the asymptotics of orthogonal polynomials on a complex arc : the case of a measure with a discrete part. *J. Approx. Theory, 80(1995), 138-145.*

[13] **V.A., Kaliaguine,** On asymptotics of L_p extrémal polynomials on a complex curve $(0 < p < \infty)$, *J. Approx. Theory, 74 (1993), 226-236.*

[14] **R. Khaldi and F. Aggoune,** extremal polynomials with varying measures, *Inter. Math, For, Vol. 2, No.39, (2007), 1927-1934.*

[15] **P. P. Korovkin,** On polynomials orthogonal on a rectifiable curve with respect to a weight function. *Math. Sbornik. 9 (1941) 469-484 [In Russian].*

[16] **M. G. Krein,** On generalisation of some investigations of G. Szegö. V. Smirnoff and A. Kolmogorov. *C. R. (Doklad) Acad. Sci. URSS. 46 (1945) 91-94.*

[17] **X. Li and K. Pan,** Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to measure with discrete part off the unit circle. *Journal of Approximation Theory. 79 (1994) 54-71.*

[18] **M. Nuttal and S. R. Singh**, Oorthogonal polynomials and Pade"approximations associated with a systems of arcs, *J.Approx. Theory 21 (1977), pp :1-42.*

[19] **F. Peherstorfer and P. Yuditskii,** Asymptotics of orthogonal polynomials in the presence of a denumerable set of mass points, *Pro. Amer. Math. Soc., 11 : (2001) 3213-3220.*

[20] **E. A. Rakhmanov,** On the asymptotics of ratio of orthogonal polynomials I, *Math. USSR Sb. 32 (1977). 199-213.*

[21] **E. A. Rakhmanov,** On the asymptotics of ratio of orthogonal polynomials II, *Math. USSR Sb. 46 (1983). 105-117.*

[22] **W. Rudin,** "Real and Complex Analysis ," *McGraw-Hill*, *New York*, *1976.*

[23] **V. J. Smirnov and N. A. Lebedev,** "The Constructive Theory of Functions of a complex Variable," *Nauka*, *Moscow*, *1964 [in Russian]* ; *M.I.T. Press*, *Cambridge*, *MA*, *1968 [Engl. transl.].*

[24] **V. J. Smirnov,** Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe, *Journal de la Société Physico-Mathématique de Leningrad*, *Vol. 2 (1928)*, *pp. 155-179.*

[25] **V. J. Smirnov,** Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent, *Bulletin de l'Académie des Sciences de L' U.R.S.S.*, *1932*, *pp.337-372.*

[26] **P. Souetine,** Polynômes orthogonaux sur un contour. *Russian Math. Surveys. T. 21 (1966) [En Russe].*

[27] **H. Stahl and V. Totik,** General orthogonal polynomials, *Vol. 43*, *Cambridge university press (1992).*

[28] **Szegö. G,** Uber die Enttwickelung einer analytischen Funktion nach den polynômen einers orthogonal systems. *Mathematische Annalen. 82 (1921) 188-212.*

[29] **Szegö. G,** Uber Orthogonale polynôme die zu einer gegebenen Kurve der Komplexen Ebene gehoren. *Mathematische zeitchrift. 9 (1921) 218-270.*

[30] **L. Schwartz**. "Analyse I : théorie des ensembles et topologie", *volume 42. Hermann,1991.*

[31] **L. Schwartz**. "Analyse I : Calcul intégral", *volume 44. Hermann, 1993.*

[32] **J. L. Walsh,** Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, *3th ed.*, *American Math. Society Colloquium Publications*, *Vol. XX*, *Amer. Math. Society*, *Providence 6*, *Rhode Island*, *1960.*

[33] **H. Widom,** Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane, *Adv. in Math. 3 (1969)*, *127-232.*