

**Université 8 mai 1945 de Guelma**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



**Mémoire de fin d'études**

Présentée par : **BOUTEMEDJET Abdelmoumin**

**Master**

**Option : Maintenance Industrielle**

=====  
***Comportement dynamique d'une dalle de roulement  
sous la sollicitation de chargements mobiles***  
=====

Sous la direction de :

**Dr. REZAIGUIA Abdelouahab**

**Dr. KADDECHE Mounia**

Année universitaire 2014/2015



# Remerciements

*Au terme de ce mémoire, nous tenons à remercier ALLAH qui nous a donné le courage et la force pour mener à bien ce modeste travail.*

*Nos remerciements s'adressent particulièrement au **Dr. REZAIGUIA ABD-ELOUAHAB**; Encadreur de ce mémoire, qui, grâce à sa disponibilité, ses corrections et ses conseils, en a permis la réalisation effective.*

*Notre reconnaissance est également formulée envers tous nos enseignants et tous les employés de l'administration de département de Génie Mécanique.*

*Enfin, nous nous tenons à remercier toutes les membrés des jurys qui nous faisons honneur de juger ce travail.*

# Dédicace

Je dédie ce travail :

A Vous, **mes parents**, qui m'avez soutenue pendant quelques décennies, qui m'ont toujours laissée libre de mes choix, fait confiance et encouragée. C'est grâce à vous que j'ai le plaisir de rédiger cette page aujourd'hui, et c'est vers vous que je me tourne tout d'abord pour vous dire simplement "merci de m'avoir permis de devenir la personne que je suis aujourd'hui".

A ma famille spécialement (mes sœurs), marwa, chahineze, et surtout ma petit  
sœur **ala(aloua)**.

A mes amies : Saddam, billem, babey, fetah, saddik, alla, khemissi, youcef, etc.....

Et à tous ceux qui me sont chers

**abdelmoumin**

# Tables des matières

<b>Introduction générale</b> .....	<b>01</b>
<b>Chapitre 1 : Synthèse bibliographique</b> .....	<b>02</b>
1.1. Introduction .....	02
1.2. Nature des vibrations sur les dalles de roulement générées par les véhicules .....	02
1.3. Définition du Facteur d'Amplification Dynamique .....	04
1.4. Importance du Facteur d'Amplification Dynamique .....	05
1.5. Fréquence de passage .....	05
1.6. Modèles mathématiques de véhicules mobiles .....	06
1.7. Modèles mathématiques des profils de la chaussée .....	09
1.8. Méthodes de résolutions de problèmes d'interaction dynamique .....	10
<b>Chapitre 2 : Vibrations d'une dalle de roulement sous la sollicitation des forces mobiles</b> .....	<b>12</b>
2.1. Introduction .....	12
2.2. Equation du mouvement .....	12
2.3. Calcul des fréquences et modes propres de la dalle de roulement .....	13
2.4. Calcul de la réponse dynamique de la dalle de roulement .....	16
2.4.1. Cas d'une force mobile .....	16
2.4.2. Cas d'un convoi de forces mobiles. ....	19
2.4.3. Cas de deux convois de forces mobiles .....	21
<b>Chapitre 3 : Vibrations d'une dalle de roulement sous la sollicitation des masses mobiles</b> .....	<b>22</b>
3.1. Introduction .....	22
3.2. Calcul de la réponse dynamique de la dalle de roulement .....	22
3.2.1. Cas d'une masse mobile .....	22
3.2.2. Cas d'un convoi de masses mobiles .....	24
3.2.3. Cas de deux convois de masses mobiles .....	25
3.3. Résolution numérique du système d'équations modales .....	26
3.4. Algorithme de résolution : masses mobiles .....	27
<b>Chapitre 4 : Vibrations d'une dalle de roulement sous la sollicitation d'un véhicule mobiles</b> .....	<b>28</b>
4.1. Introduction .....	28
4.2. Interaction dynamique dalle-véhicule .....	28
4.3. Hypothèse de base de l'interaction dynamique dalle-véhicule .....	30
4.4. Modélisation du véhicule .....	30
4.4.1. Modèle à un degré de liberté .....	31
4.4.2. Modèle à deux degrés de liberté .....	31
4.4.3. Modèle à quatre degrés de liberté .....	32
4.4.4. Modèle à sept degrés de liberté .....	35

# Introduction générale

Le phénomène de l'interaction dynamique entre une dalle de roulement et un véhicule mobile est très complexe dans la réalité car plusieurs facteurs entrent en jeu. Les facteurs les plus importants intervenant dans cette interaction dynamique sont : la dalle de roulement du pont, le véhicule comme source d'excitation et l'état de la chaussée comme interface entre le véhicule et la dalle de roulement du pont. C'est un sujet d'extrême importance qui a fait l'objet de réflexion auparavant et continu d'être d'actualité, vu le nombre d'ouvrages réalisés, l'augmentation du trafic routier et le tonnage par essieu.

Les véhicules traversant les dalles de roulement des ponts à grande vitesse peuvent engendrer des effets dynamiques importants. Ces effets doivent être étudiés en simulant effectivement les réponses dynamiques des dalles de roulement des ponts et des véhicules.

Dans ce contexte, nous présentons une modélisation vibratoire d'une dalle de roulement d'un pont routier à une seule travée sollicitée par un chargement mobile.

Dans le premier chapitre, nous avons fait une étude bibliographique sur le phénomène d'interaction dynamique entre les dalles de roulement et les véhicules mobiles, l'amplification dynamique et les différents modèles mathématiques et méthodes utilisés pour la modélisation et la résolution du système dalle-véhicule-rugosité.

Au deuxième chapitre, on a simulé les vibrations d'une dalle de roulement lorsqu'elle est soumise à l'action d'un véhicule mobile. Ce dernier est modélisé simplement par des forces mobiles judicieusement décrites à l'aide de l'opérateur de Dirac faisant intervenir la vitesse de roulement. La dalle est modélisée par une plaque rectangulaire mince isotrope à une seule travée. Les équations du mouvement sont résolues par projection modale. Le calcul des fréquences et des modes propres de la dalle est donc indispensable pour étudier les vibrations forcées. La résolution de l'équation modale est obtenue analytiquement pour plusieurs types de forces mobiles en utilisant la méthode de convolution : (intégrale de Duhamel).

Au troisième chapitre, les vibrations de la dalle de roulement sont dues au transfert d'une quantité de mouvement communiquée par une ou plusieurs masses mobiles. L'objectif majeur est d'étudier l'effet d'inertie des masses sur la réponse dynamique de la dalle. La résolution de l'équation différentielle du mouvement de la dalle s'effectue par projection modale. Le système d'équation modale obtenue est intégré numériquement par la méthode de Newmark (résolution semi-analytique).

Au quatrième chapitre, les vibrations de la dalle de roulement sont dues à un véhicule mobile avec la prise en considération de l'état de la chaussée. Le véhicule est modélisé par plusieurs modèles dynamiques mobiles à plusieurs degrés de liberté à deux ou trois dimensions. Le profil de la chaussée est modélisé par une Densité Spectrale de Puissance. La méthode modale est utilisée pour résoudre l'équation du mouvement de la dalle de roulement. Les équations du mouvement couplées sont intégrées numériquement par la méthode de Newmark. Un algorithme de résolution, d'une manière découplée, avec un processus de calcul itératif est présenté.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation et l'interprétation des résultats des chapitres deux, trois et quatre.

Finalement, nous terminons ce mémoire par une conclusion générale sur cette étude.

# Chapitre 1

## Synthèse bibliographique

### 1.1. Introduction

Le problème d'interaction dynamique entre les dalles de roulement et les véhicules en mouvement représente une branche particulière de la dynamique des structures. C'est un problème couplé non linéaire.

Du point de vue historique, le problème de charges mobiles a été étudié pour la première fois en 19<sup>ème</sup> siècle en particulier les travaux de Willis [1] et Stokes [2]. Dans ces travaux, l'effet de l'inertie de la poutre a été négligé, et le véhicule est modélisé par une masse concentrée qui se déplace à une vitesse constante. Une solution exacte est obtenue mais son applicabilité reste très limitée à cause de l'absence de l'effet d'inertie de la poutre qui est très important dans ce type de problèmes. Néanmoins, les contributions de Stokes et Willis sont considérées comme historique, car ils sont parmi les premiers à porter le problème des impacts de véhicules à la conception des ponts.

L'autre cas extrême, c.-à-d. ; lorsque la masse mobile est petite devant la masse de la poutre ; a été initialement étudié pour une poutre simplement appuyée excitée par une force concentrée constante mobile par A.N. Krylov [3] en utilisant la méthode modale, et par S.P. Timoshenko [4]. A.N. Lowan [5] et N.G. Bondar [6] ont résolu le même problème à l'aide des fonctions de Green et les équations intégrales, respectivement. S.P. Timoshenko [7] attribua également la solution au problème des effets d'une force harmonique mobile à une vitesse constante pour étudier les effets du contrepoids sur les roues motrices d'une locomotive.

Le problème impliquant à la fois la masse de la charge mobile et la masse de la poutre est plus compliqué que le cas précédent. Il a été résolu pour la première fois par H. Saller [8], puis par H.H. Jeffcott [9], dont les méthodes itératives deviennent divergentes dans certains cas, et par H. Steuding [10]. Une méthode satisfaisante (la charge mobile est exprimée à l'aide d'une série de Fourier) a été présentée par A. Schailenkamp [11]. M .V. Muehnikov [12] et M.Y. Ryazanova [13] ont appliqué au problème, la méthode des équations intégrales. J. Naleszkiewicz [14] a utilisé la méthode Galerkin. V.V. Bolotin [15], utilisa la méthode approximative de solutions asymptotiques quadratures....

### 1.2. Nature des vibrations sur les dalles de roulement générées par les véhicules

La compréhension du phénomène d'interaction dynamique dalles de roulement/véhicules revient à bien détailler la représentation de la **charge** qui s'exerce sur la dalle par le véhicule et réciproquement.

En premier lieu, la situation où un véhicule mobile représenté par une force constante traverse une poutre simple à une vitesse constante  $v$  est considérée. La poutre est caractérisée par la portée, la rigidité, l'amortissement et la masse linéaire. À chaque instant  $t$  la force mobile se trouve à l'abscisse  $x = vt$  le long de la poutre et provoque une

déformée différente. Pour passer d'un état déformé à un autre durant un intervalle de temps  $\Delta t$ , chaque élément infinitésimal de la poutre subit une accélération. En plus des forces élastiques, la poutre est donc sollicitée par des forces d'inertie et des forces d'amortissement. Les forces d'inertie causent des oscillations de la poutre qui, après le passage de la force mobile, retrouve peu à peu sa position de repos par l'entremise des forces d'amortissement.

La situation décrite correspond au cas où la masse du véhicule traversant la dalle de roulement est très faible en regard de la masse de la poutre. Dans le cas contraire, les effets d'inertie liés à la masse mobile doivent être pris en compte. Cette masse mobile, lors de son parcours sur la poutre, modifie les propriétés vibratoires de la structure. Les modes et les fréquences de vibration du système en régime forcé varient durant le passage de la masse mobile [16].

Supposons maintenant qu'un véhicule traverse une dalle de roulement avec une vitesse constante et qu'il reste, par hypothèse, en contact permanent avec la chaussée. Au fur à mesure que le véhicule progresse sur la dalle, cette dernière subit une déformation différente. Ceci provoque un déplacement relatif des extrémités des ressorts et des amortisseurs du véhicule, et par la suite l'amplitude de la charge développée sous chaque pneu est modifiée. Sous ces nouvelles sollicitations, la dalle de roulement se déforme de nouveau et occupe une autre forme d'équilibre dynamique et, elle modifie de nouveau l'amplitude de la charge sous chaque pneu, et ainsi de suite. Ce processus d'ajustement successif se poursuit jusqu'à ce que le véhicule quitte complètement la dalle de roulement. Les vibrations de cette dernière poursuivent et sont amorties progressivement à cause de l'amortissement de la dalle [17].

La situation réelle est similaire à celle décrite ci-dessus avec, en plus, d'autres sources d'excitation pouvant affecter la vibration du véhicule. Les irrégularités dans le profil de la chaussée, les conditions initiales de vibration des véhicules conditionnées par l'état de la chaussée à l'approche de la dalle de roulement, la présence d'autres véhicules simultanément sur la dalle de roulement et les forces causées par l'accélération, le freinage ou l'action du vent sont des facteurs qui génèrent une variation de l'intensité des charges appliquées sur la dalle de roulement. Lors du bondissement de la dalle de roulement, ces facteurs influencent le mouvement du véhicule et conduisent la structure à se déformer. Dans ce contexte, le véhicule et la dalle de roulement sont considérés comme deux systèmes vibratoires couplés [16].

Les explications fournies dans les paragraphes précédents montrent que les éléments qui entrent en jeu sont nombreux. Les paramètres intervenant dans l'interaction dynamique dalle de roulement/véhicule sont décrits dans le but d'apporter des précisions nécessaires à la compréhension du phénomène vibratoire.

### **1.3. Définition du Facteur d'Amplification Dynamique**

Le Facteur d'Amplification Dynamique (FAD) est un paramètre très important dans l'analyse et la conception des dalles de roulement des ponts routiers. C'est une valeur qui majore les effets statiques d'une dalle de roulement causés par la charge statique d'un véhicule mobile, pour tenir compte des effets dynamiques provoqués par le passage de ce même véhicule. Cette définition est quelque peu différente selon les auteurs et les pays. L'Amplification Dynamique résultant du passage d'un véhicule sur une dalle de roulement est donnée par :

$$AD = \frac{R_{dyn} - R_{sta}}{R_{sta}}$$

Où  $R_{dyn}$  est la réponse dynamique maximum (déplacement, effort tranchant, moment fléchissant, ...),  $R_{sta}$  est la réponse statique maximum.

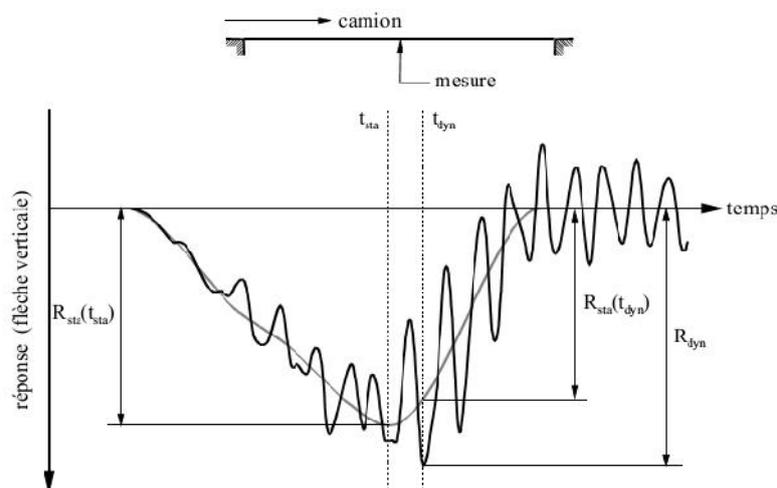
Le facteur  $1+AD$  représente le FAD qui est le rapport entre la réponse dynamique sur la réponse statique :

$$FAD = \frac{R_{dyn}}{R_{sta}}$$

La notion du facteur d'Impact ou d'incrément dynamique exprimé en pour-cent est également utilisée dans la littérature :

$$I(\%) = \left( \frac{R_{dyn}}{R_{sta}} - 1 \right) \times 100\%$$

Des divergences plus marquées existent dans la définition des FAD calculés expérimentalement par enregistrement des réponses statique et dynamiques à l'aide des jauges [18]. La réponse statique utilisée pour définir le FAD est, dans certain cas, celle obtenue à l'instant  $t_{dyn}$  où la réponse dynamique maximale est obtenue ou encore à l'instant  $t_{sta}$  où la réponse statique maximale est obtenue. Les réponses maximales statiques et dynamiques ne surviennent généralement pas pour une même position de la charge (Fig. 1.1).



**Figure 1.1 : Réponses statique et dynamique**

## 1.4. Importance du Facteur d'Amplification Dynamique

Le Facteur d'Amplification Dynamique est un paramètre très important pour l'analyse et la conception des dalles de roulement des ponts routiers. On peut résumer leur importance dans les points suivants :

- Présenter les effets dynamiques dans les dalles de roulement qui sont provoqués par le passage des véhicules. Ces effets sont déterminés par rapport à une référence statique,
- Déterminer la sensibilité des dalles de roulement aux sollicitations dynamiques provoquées par le trafic routier,
- Définir les endroits jugés importants sur les dalles de roulement selon un chargement donné,
- Déterminer quelles sont les types des dalles de roulement les plus sensibles aux sollicitations dynamiques.

## 1.5. Fréquence de passage et paramètre de vitesse

La première fréquence de passage est définie comme étant la fréquence de circulation d'un mobile à une vitesse constante  $v$  sur une dalle de longueur  $L$ . cette fréquence s'exprime par [19]:

$$\Omega_1 = \frac{fv}{L}$$

Le paramètre de vitesse  $S$ , utilisé pour exprimer la réponse de l'interaction dynamique dalle de roulement / véhicule, est défini comme étant le rapport de la fréquence de circulation (d'excitation) du véhicule mobile et la première fréquence propre de la dalle  $\tilde{S}_1$  [20]:

$$S = \frac{fv}{L\tilde{S}_1}$$

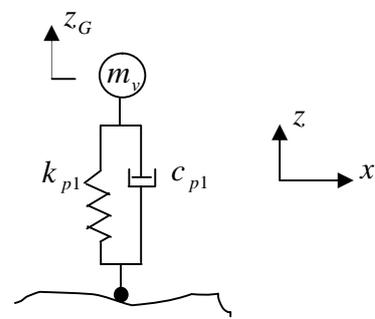
La première vitesse critique de passage d'un véhicule sur une dalle de roulement c'est la vitesse qui correspond au maximum de déplacement verticale de la dalle. Elle est déterminée en égalisant la première fréquence de passage à la première fréquence propre de la structure  $\Omega_1 = \tilde{S}_1$ , avec  $\tilde{S}_1 = 2f f_1$ . Dans ce cas, la première vitesse critique s'écrit alors :

$$v_{1,cr} = 2Lf_1$$

## 1.6. Modèles mathématiques de véhicules mobiles

Les modèles de véhicule se distinguent principalement par le type d'analyse (0, 1, 2 ou 3 dimensions), par le nombre de degrés de liberté, par la disposition des masses et par les lois de comportement des suspensions et des pneus. Dans le cas où le véhicule mobile est modélisé simplement par une force ou par une masse mobile, le modèle de véhicule ne possède aucune dimension (zéro degré de liberté). Les modèles sont décrits en considérant un ordre croissant des degrés de liberté.

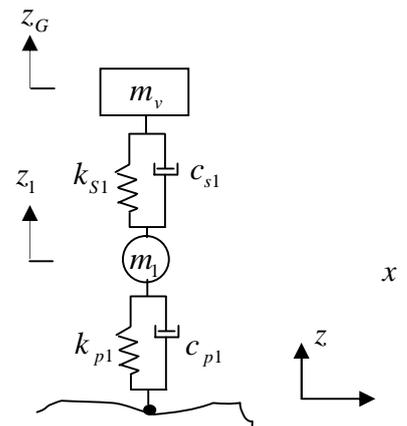
### 1.6.1. Modèles de véhicules unidimensionnels



Le modèle de véhicule de la figure 1.2 est composé d'une seule masse mobile  $m_v$  liée par un ressort  $k_{p1}$  et en parallèle un amortisseur visqueux  $c_{p1}$ . C'est le modèle le plus simple qui peut être employé pour étudier l'interaction dynamique entre le véhicule mobile et la dalle de roulement. Le seul degré de liberté correspondant au déplacement verticale  $z_G$  de la masse du véhicule  $m_v$ .

**Figure 1.2 :** Modèle de véhicule unidimensionnel à un degré de liberté.

Le véhicule de la figure 1.3 est composé de deux masses  $m_1$  et  $m_v$ , deux ressort  $k_{p1}$  et  $k_{s1}$  et deux amortisseurs visqueux  $c_{p1}$  et  $c_{s1}$ . Ce modèle est à deux degrés de liberté correspondant au déplacement verticale  $z_G$  de la masse du véhicule  $m_v$  et  $z_1$  correspond au déplacement vertical de la masse des roues avec essieux.



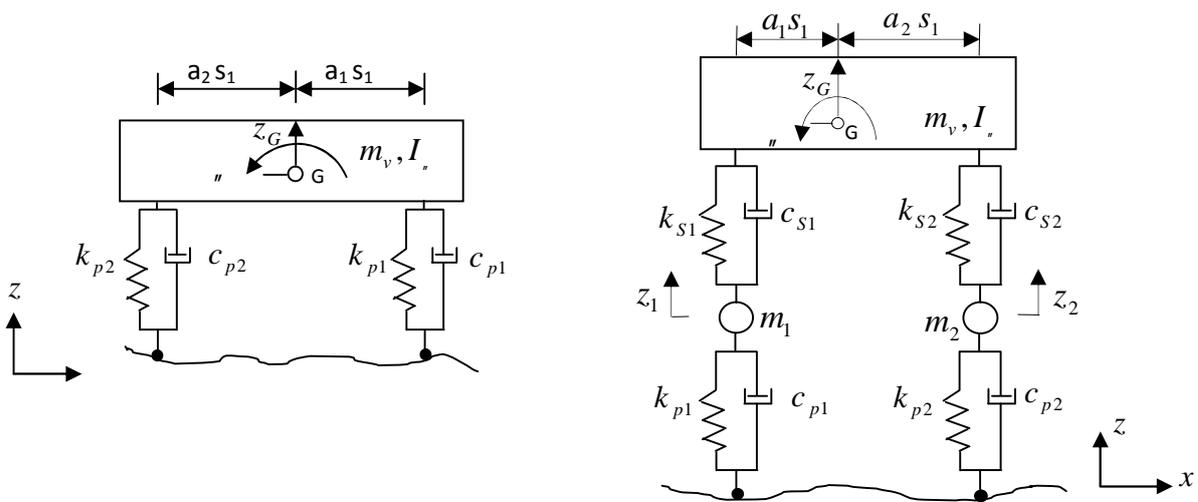
**Figure 1.3 :** Modèle de véhicule unidimensionnel à deux degrés de liberté.

### 1.6.2. Modèles de véhicules bidimensionnels

Le modèle à deux degrés de liberté permet de distinguer le châssis du véhicule (figure 1.4). Ce dernier est considéré comme un corps rigide posé sur deux ressorts  $k_{p1}, k_{p2}$  avec, en parallèle, deux amortisseurs visqueux  $c_{p1}, c_{p2}$ . D'autres auteurs ont amélioré ce modèle en suspendant un corps rigide sur deux essieux dont les masses sont indépendantes du corps rigide et où les suspensions et les pneus sont représentés. Le système forme un modèle de véhicule à 4 degrés de liberté (fig. 1.5) qui sont :

$z_G, \theta$  : Correspondant au bondissement et au tangage du corps rigide respectivement.

$z_1, z_2$  : Correspondant aux déplacements verticaux des masses des roues avec essieux  $m_1$  et  $m_2$  respectivement.



x

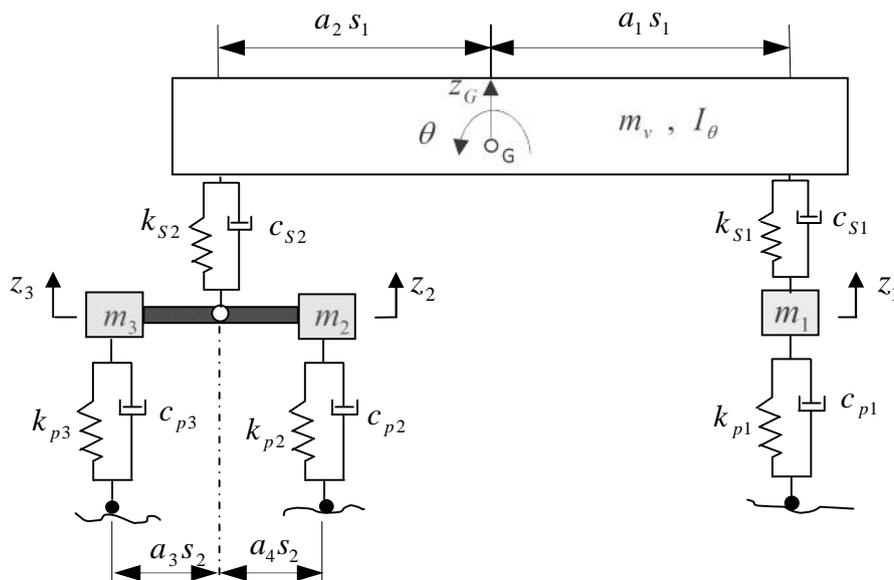
**Figure 1.4 :** Modèle bidimensionnel à 2 D.D.L

**Figure 1.5 :** Modèle bidimensionnel à 4

D.D.L

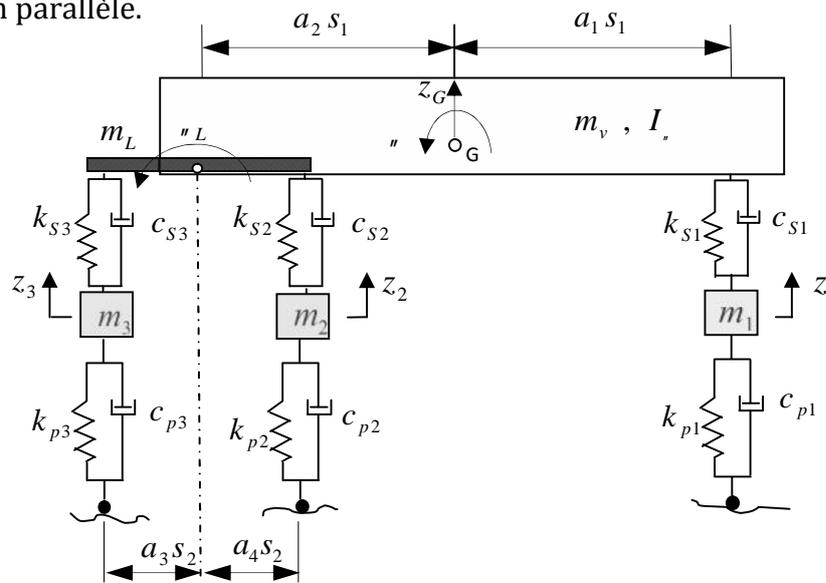
Dans la plupart des modèles des véhicules, les essieux tandem d'un camion sont considérés indépendants les uns des autres, bien que ces configurations d'essieux soient conçues avec des éléments de liaison pour répartir les charges entre les essieux.

Plusieurs configurations d'essieux tandem existent pour équiper les camions simples. Deux types avec des suspensions à lames d'acier sont retenus pour le camion simple à trois essieux. Pour le premier type d'essieux tandem (Fig. 1.6), le pivot se déplace essentiellement verticalement par rapport au châssis du véhicule et ce mouvement dépend de la flexibilité de la suspension. Dans ce le modèle, ce point est lié au corps du véhicule par un ressort représentant la suspension à laquelle un amortisseur visqueux est ajouté en parallèle. Les essieux du tandem de masse  $m_i$  sont attachés à chacune des extrémités de la poutre pivotante dont la masse est confondue à celle des essieux. Les pneus des roues de chaque essieu sont modélisés, par un montage en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur visqueux.



**Figure 1.6 :** Premier modèle de camion à trois essieux à 5 DDL.

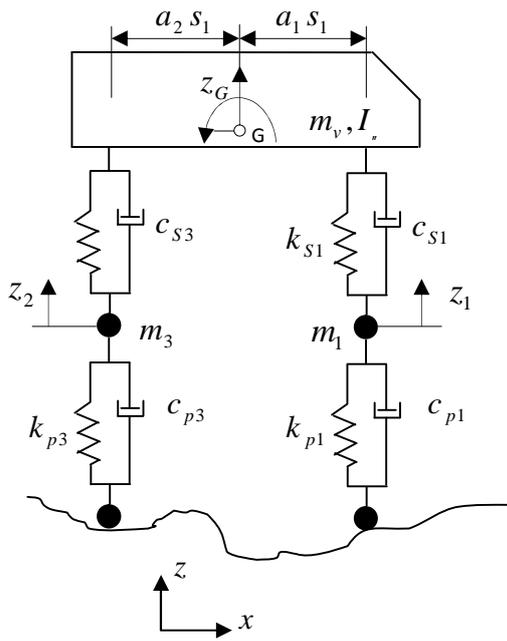
Dans le deuxième type d'essieux tandem (Fig. 1.7), la suspension et la liaison constituent un seul élément aux extrémités duquel sont fixés les axes. Le mouvement de chaque essieu par rapport au châssis est un mouvement de rotation sans déformation autour du pivot. La rotation de l'ensemble est représentée par le mouvement d'une barre pivotante infiniment rigide de masse  $m_L$  attachée à l'extrémité du corps rigide du véhicule. La flexion de chacun des porte-à-faux formant la suspension est modélisée par un ressort et un amortisseur visqueux liés à chaque extrémité de la barre pivotante et aux masses  $m_i$  indépendantes des deux essieux. Comme dans le modèle précédent, les pneus des roues de chaque essieu sont représentés par un ressort et un amortisseur visqueux mis en parallèle.



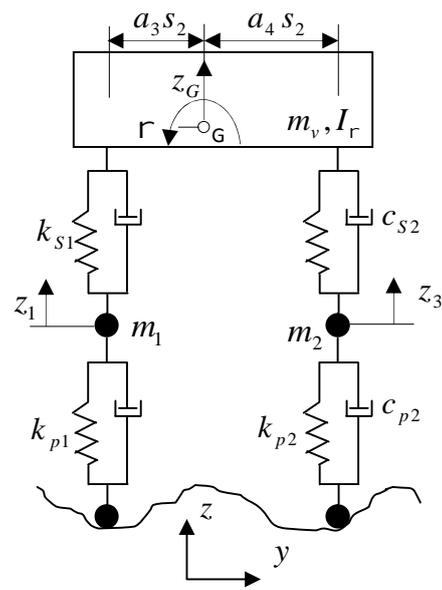
**Figure 1.7 :** Deuxième modèle de camion à trois essieux à 6 DDL.

### 1.6.3. Modèles de véhicules tridimensionnels

Le modèle de véhicule tridimensionnelle de la figure 1.8 est à sept degrés de liberté [16,17]. Il est constitué du châssis considéré comme un corps rigide de masse  $m_v$ , posé sur des suspensions viscoélastiques. Le système de suspension est constitué par une série de ressorts et d'amortisseurs. Les masses  $m_i$  représentent la masse des roues avec essieux. Les pneus sont modélisés par une combinaison en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur visqueux. Les déplacements verticaux du corps du véhicule sont décrits par trois variables correspondants au déplacement vertical (bondissement)  $Z_G$ , rotation autour de l'axe transversal (tangage)  $\theta$  et rotation autour de l'axe longitudinal (roulis)  $\alpha$ . Le déplacement vertical de chaque masse  $m_i$  est exprimé par les variables  $Z_i$  où  $i = 1$  à 4.



Vue de profil du modèle de véhicule



Vue de face avant du modèle de

**Figure 1.8 :** Modèle de véhicule tridimensionnel à 7 degrés de liberté.

## 1.7. Modèle mathématique du profil de la chaussée

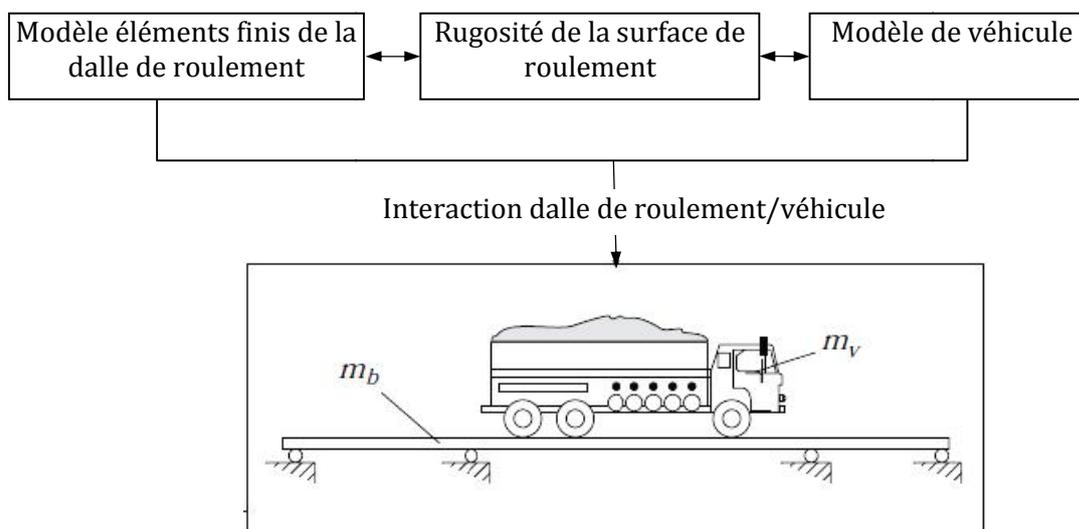
Le profil de la chaussée est un élément d'un grand intérêt pour l'étude du comportement dynamique d'une dalle de roulement. On distingue le profil statique qui représente les irrégularités de la chaussée en fonction de la position et le profil dynamique qui correspond aux déflexions causées par les charges appliquées sur le pont. Le profil statique est déterminé par le profil le long de la route auquel sont superposées les dénivellations aux appuis, les tassements différentiels des fondations ou les défauts d'alignement des travées, etc. Les irrégularités du profil statique de la chaussée ont pour effet d'induire et d'entretenir les oscillations de la charge sur le système de suspension du véhicule. Le profil statique de la chaussée est modélisé par une fonction aléatoire  $r(x_k)$  [16] :

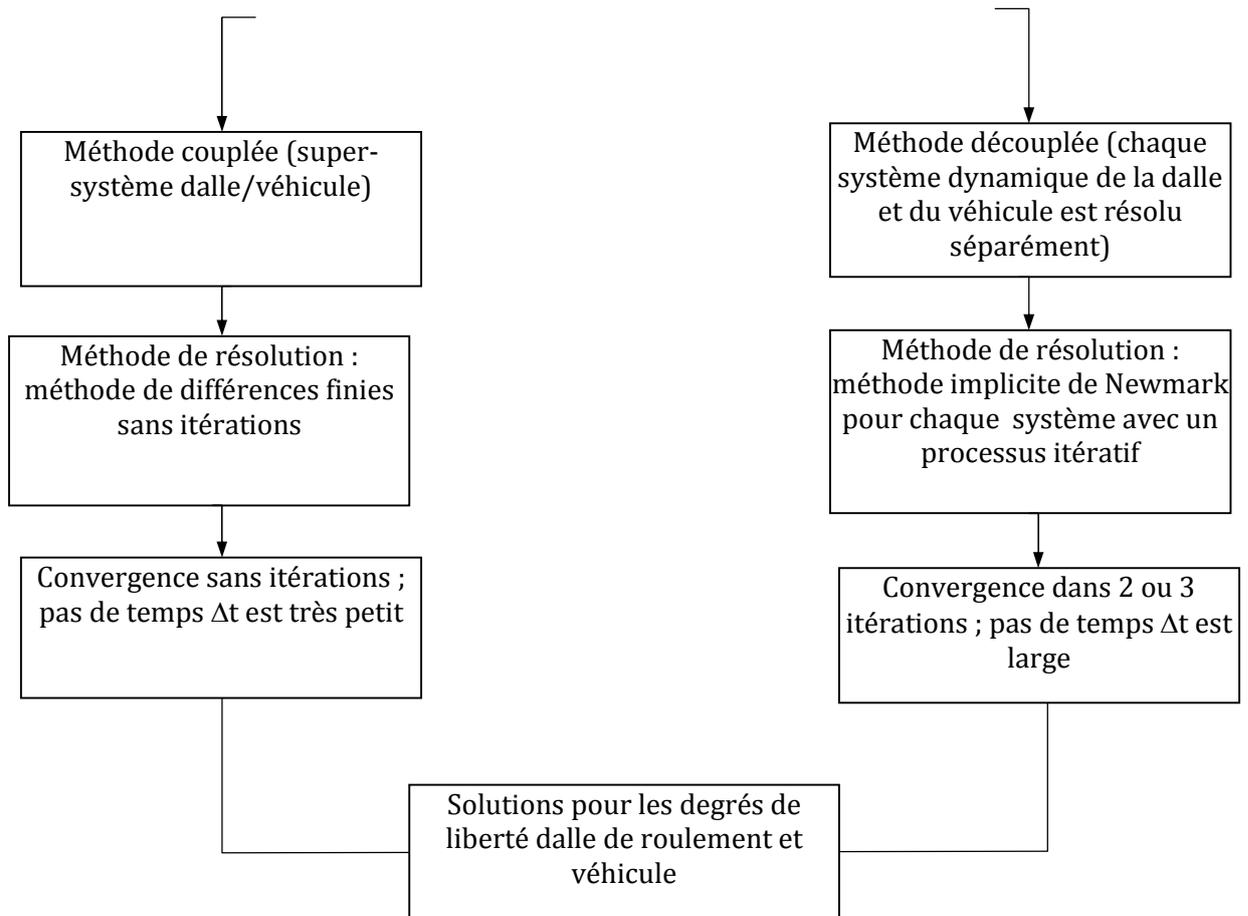
$$r(x_k) = \sum_{i=1}^N \sqrt{4A_r \left( \frac{2fi}{L_c \check{\omega}_{s0}} \right)^{-2} \frac{2f}{L_c} \cos(\check{\omega}_{si} x_k + \theta_i)} \quad , k=1, \dots, npc$$

Où  $A_r$  est un coefficient de rugosité spectral qui caractérise l'état de la chaussée,  $\omega_{s0}$  est la pulsation de discontinuité ( $\omega_{s0} = 1/2\pi$ ),  $\omega_{si}$  est le nombre d'onde ( $\omega_{si} = 2\pi i/L_c$ ),  $L_c$  est la longueur d'échantillonnage en général égale à  $2l$  ( $l$  est la longueur de la dalle du pont),  $N$  est le nombre de points de discrétisation fréquentielle,  $npc$  est le nombre de points de contact,  $\theta_i$  est un variable aléatoire qui varie entre 0 et  $2\pi$ .

## 1.8. Méthodes de résolutions de problèmes d'interaction dynamique

Il y a deux méthodes de simuler l'interaction dynamique entre une dalle de roulement et un véhicule mobile (Fig.1.10) [17]. La première est basée sur une méthode itérative découplée, dans laquelle chaque système d'équations de mouvement pour la dalle de roulement et pour le véhicule est résolu séparément et un processus de calcul itératif à chaque pas de temps est nécessaire pour chercher l'équilibre dynamique entre la dalle de roulement et les pneus du véhicule. La deuxième méthode consiste à coupler les équations du mouvement du véhicule avec ceux de la dalle de roulement et de construire ainsi un super-système d'équations. La solution est obtenue à chaque pas du temps sans aucune itération. Cette méthode présente des avantages et des inconvénients. Parmi les avantages, on peut citer : le temps de calcul est réduit en comparaison avec la méthode itérative découplée; mise en place numérique facile; mémoire de stockage réduite; aucune factorisation de la matrice globale; aucune itération dans le procédé de calcul. Cependant, les principaux inconvénients sont : la projection modale dans le sous-espace est indispensable, et si les haute fréquences de la dalle de roulement participent dans la réponse, ceci créera un problème dans la réponse dynamique; cette méthode est bien adaptée seulement pour un nombre de véhicules moins important présentant en même temps sur la dalle (cette remarque s'applique également à la méthode itérative découplée).





**Figure 1.10** : Différentes procédures pour la résolution des problèmes d'interaction dynamique dalle de roulement/véhicule.

## Chapitre 2

# Vibration d'une dalle de roulement sous la sollicitation des forces mobiles

### 2.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de simuler les vibrations d'une dalle de roulement lorsqu'elle est soumise à l'action d'un véhicule modélisé simplement par des forces mobiles. La dalle est modélisée par une plaque rectangulaire mince isotrope à une travée, simplement supportée sur deux bords et libre sur les deux autres bords. Les vibrations de cette dernière, sont régies par une équation différentielle aux dérivées partielles du 4<sup>eme</sup> ordre, que l'on résout par projection modale. Le calcul des fréquences et des modes propres de la dalle et donc indispensable. La résolution de l'équation modale obtenue pour plusieurs types de forces mobiles s'effectue par la méthode de convolution (intégrale de Duhamel).

### 2.2. Equation du mouvement

Considérons une plaque mince rectangulaire, de longueur  $l$ , de largeur  $b$  et d'épaisseurs  $h$ , (fig.2.1), excitée par une charge  $F(x, y, t)$ . Sur la base des hypothèses simplificatrices de Kirchhoff adoptées pour les plaques minces, l'équation du mouvement de la plaque s'écrit :

$$\dots h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = F(x, y, t) \quad (2.1)$$

Dans l'équation (2.1),  $w(x, y, t)$  est le déplacement vertical de la plaque,  $\dots$  est la masse volumique de la plaque,  $c$  et l'amortissement visqueux de la plaque,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  est la rigidité en flexion de la plaque ( $E$  : module de Young,  $\nu$  : rapport de Poisson).

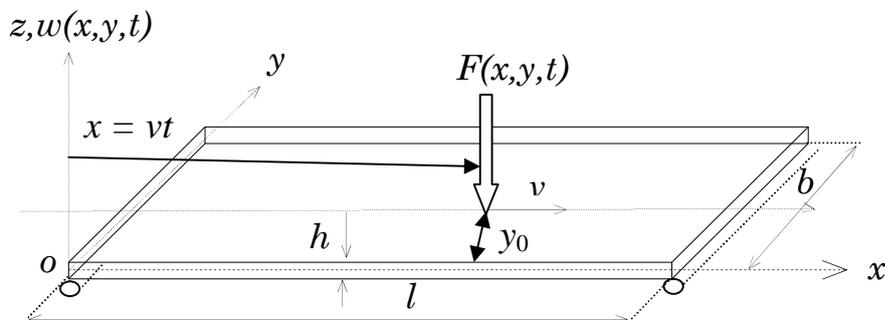


Figure 2.1 : Dalle de roulement à une travée sollicitée par une force mobile.

### 2.3. Fréquences et modes propres de la dalle de roulement

Le calcul des fréquences et des modes propres de la dalle de roulement est indispensable pour calculer la réponse dynamique en vibration forcées. Pour déterminer les fréquences et les modes propres de la dalle, considérons l'équation du mouvement homogène suivante :

$$\dots h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{D^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (2.2)$$

En vibrations libres harmoniques, le déplacement vertical de la dalle, dans la base modale s'écrit :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} w_{ij}(x, y) e^{k \tilde{S}_{ij} t} \quad (2.3)$$

Dans l'expression (2.3),  $a_{ij}$  sont les amplitudes modales,  $w_{ij}(x, y)$  sont les modes propres de la dalle,  $\tilde{S}_{ij}$  sont les fréquences propres de la dalle et  $k = \sqrt{-1}$ .

Remplaçons l'expression (2.3) dans l'équation (2.2), après regroupement l'équation spatiale à résoudre s'écrit alors (le terme entre parenthèse doit être nul):

$$\frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial y^4} - S_{ij}^4 w_{ij} = 0 \quad (2.4)$$

Avec  $S_{ij} = \sqrt{\tilde{S}_{ij} \sqrt{\dots h} / D}$  est un paramètre de fréquences.

La dalle est simplement appuyée sur les bords  $x = 0$  et  $x = l$ , et libres sur les bords  $y = 0$  et  $y = b$ . Donc on ne peut pas avoir une solution analytique pour les modes propres (éq .2.4). Pour cela, les modes propres selon  $x$  sont considérés comme ceux d'une poutre sur deux appuis simples  $\varphi_i(x)$  et selon  $y$ , sont exprimés par une fonction  $h_{ij}(y)$  qui doit vérifiée les conditions aux limites aux bords libre. La solution de (2.4) peut se mettre sous la forme :

$$w_{ij}(x, y) = \{ \varphi_i(x) h_{ij}(y) \} \quad (2.5)$$

Avec  $\{ \varphi_i(x) = \sin\left(\frac{ifx}{\ell}\right)$  sont les modes propres d'une poutre sur deux appuis simples.

Remplaçons (2.5) dans (2.4), on obtient :

$$\left[ \frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} - 2 \left( \frac{if}{\ell} \right)^2 \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + \left( \left( \frac{if}{\ell} \right)^4 - S_{ij}^4 \right) h_{ij} \right] \sin\left(\frac{ifx}{\ell}\right) = 0 \quad (2.6)$$

Pour déterminer la fonction  $h_{ij}(y)$ , on résout l'équation différentielle ordinaire du quatrième ordre suivante :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} - 2 \left( \frac{if}{\ell} \right)^2 \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + \left( \left( \frac{if}{\ell} \right)^4 - S_{ij}^4 \right) h_{ij} = 0 \quad (2.7)$$

La forme générale de la solution de l'équation (2.7) est :

$$h_{ij}(y) = A_{ij} e^{s_{ij}y} \quad (2.8)$$

Remplaçons (2.8) dans (2.7), on obtient :

$$s_{ij}^4 - 2\left(\frac{if}{\ell}\right)^2 s_{ij}^2 + \left(\frac{if}{\ell}\right)^4 - s_{ij}^4 = 0 \quad (2.9)$$

Les racines de (2.9) sont :

$$s_{1ij} = \pm \sqrt{\left(\frac{if}{\ell}\right)^2 + s_{ij}^2} = \pm r_{1ij} \quad (2.10.1)$$

$$s_{2ij} = \pm k \sqrt{\left(\frac{if}{\ell}\right)^2 - s_{ij}^2} = \pm kr_{2ij} \quad (2.10.2)$$

Remplaçons (2.10) dans (2.8)

$$h_{ij}(y) = A_{1ij} e^{r_{1ij}y} + A_{2ij} e^{-r_{1ij}y} + A_{3ij} e^{kr_{2ij}y} + A_{4ij} e^{-kr_{2ij}y} \quad (2.11)$$

Avec  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  sont des constantes d'intégration. Les fonctions exponentielles peuvent être remplacées par les fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$e^{\pm r_{1ij}y} = ch(r_{1ij}y) \pm sh(r_{1ij}y) \quad (2.12.1)$$

$$e^{\pm kr_{2ij}y} = \cos(r_{2ij}y) \pm k \sin(r_{2ij}y) \quad (2.12.2)$$

Remplaçons (2.12) dans (2.11), après factorisation on obtient :

$$h_{ij}(y) = C_{ij} \sin(r_{2ij}y) + D_{ij} \cos(r_{2ij}y) + E_{ij} sh(r_{1ij}y) + F_{ij} ch(r_{1ij}y) \quad (2.13)$$

Où  $C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}$  et  $F_{ij}$  sont des constantes d'intégrations déterminées par l'application des conditions aux limites aux bords libres de la dalle.

Sur les bords libres de la dalle, le moment fléchissant et l'effort tranchant son nul, alors :

Sur le bord  $y = 0$  :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0, t) + \epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0, t) = 0 \quad (2.14.1)$$

$$\frac{\partial^3 \check{S}}{\partial y^3}(x, 0, t) + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \check{S}}{\partial x^2 \partial y}(x, 0, t) = 0 \quad (2.14.2)$$

Sur le bord  $y = b$  :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b, t) + \epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, b, t) = 0 \quad (2.14.3)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, b, t) + (2 - \epsilon) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, b, t) = 0 \quad (2.14.4)$$

En tenant en couple des expressions (2.3) et (2.5), les conditions aux limites (2.14) s'écrivent :

$$\frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(0) - \epsilon \left( \frac{if}{\ell} \right)^2 h_{ij}(0) = 0 \quad (2.15.1)$$

$$\frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(0) - (2 - \epsilon) \left( \frac{if}{\ell} \right)^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(0) = 0 \quad (2.15.2)$$

$$\frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(b) - \epsilon \left( \frac{if}{\ell} \right)^2 h_{ij}(b) = 0 \quad (2.15.3)$$

$$\frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(b) - (2 - \epsilon) \left( \frac{if}{\ell} \right)^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(b) = 0 \quad (2.15.4)$$

En appliquant maintenant les conditions aux limites (2.15) à l'expression (2.13), on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & r_{ij} & 0 & n_{ij} \\ x_{ij} & 0 & t_{ij} & 0 \\ r_{ij} \sin(r_{2ij} b) & r_{ij} \cos(r_{2ij} b) & n_{ij} sh(r_{1ij} b) & n_{ij} ch(r_{1ij} b) \\ x_{ij} \cos(r_{2ij} b) & -x_{ij} \sin(r_{2ij} b) & t_{ij} ch(r_{1ij} b) & t_{ij} sh(r_{1ij} b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{ij} \\ D_{ij} \\ E_{ij} \\ F_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Avec :

$$r_{ij} = -r_{2ij}^2 - \epsilon \left( \frac{if}{\ell} \right)^2 \quad (3.17.1)$$

$$n_{ij} = -r_{1ij}^2 - \epsilon \left( \frac{if}{\ell} \right)^2 \quad (3.17.2)$$

$$x_{ij} = -r_{2ij}^3 - (2 - \epsilon) \left( \frac{if}{\ell} \right)^2 r_{2ij} \quad (3.17.3)$$

$$t_{ij} = -r_{1ij}^3 - (2 - \epsilon) \left( \frac{if}{\ell} \right)^2 r_{1ij} \quad (3.17.4)$$

On peut simplifier le système (2.16) en normalisant la première constante  $C_{ij}$  à 1. On aura donc 4 équations avec 3 inconnus. On choisit 3 équations parmi les quartes :

$$\begin{bmatrix} r_{ij} & 0 & n_{ij} \\ 0 & t_{ij} & 0 \\ r_{ij} \cos(r_{2ij} b) & n_{ij} sh(r_{1ij} b) & n_{ij} ch(r_{1ij} b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{ij} \\ E_{ij} \\ F_{ij} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{ij} \\ r_{ij} \sin(r_{2ij} b) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

D'où on obtient les constantes  $D_{ij}$ ,  $E_{ij}$ , et  $F_{ij}$  :

$$D_{ij} = (r_{ij} \sin(r_{2ij}b) - \frac{x_{ij}''}{t_{ij}} \sinh(r_{1ij}b)) / r_{ij} (\cosh(r_{1ij}b) - \cos(r_{2ij}b)) \quad (2.19.1)$$

$$E_{ij} = -x_{ij} / t_{ij} \quad (2.19.2)$$

$$F_{ij} = (-r_{ij} \sin(r_{2ij}b) + \frac{x_{ij}''}{t_{ij}} \sinh(r_{1ij}b)) / (r_{ij} \cosh(r_{1ij}b) - r_{ij} \cos(r_{2ij}b)) \quad (2.19.3)$$

Pour déterminer les fréquences propres de la dalle, il faut que le déterminant de la matrice du système (2.16) soit nul d'où l'équation aux fréquences :

$$2r_{ij}'' x_{ij} t_{ij} [\cos(r_{2ij}b) \operatorname{ch}(r_{1ij}b) - 1] + [r_{ij}''^2 x_{ij}^2 - r_{ij}''^2 t_{ij}^2] \sin(r_{2ij}b) \operatorname{sh}(r_{1ij}b) = 0 \quad (2.20)$$

La résolution de l'équation aux fréquences (2.20) nécessite un traitement informatique. Pour chaque indice  $i$ , on détermine une infinité de solutions pour  $j$ . Cette résolution est effectuée par le logiciel Mathematica.

## 2.4. Calcul de la réponse dynamique de la dalle de roulement

### 2.4.1. Cas d'une force constante mobile

Dans le cas d'une force constante d'amplitude  $F_0$  se déplace à une vitesse constante selon la direction  $x$  (voir figure 2.1), la force d'excitation s'écrit :

$$F(x, y, t) = \begin{cases} -F_0 u(x - x_0) u(y - y_0) & 0 \leq t \leq l/v \\ 0 & t > l/v \end{cases} \quad (2.21)$$

Avec  $x_0 = vt$  représente la distance parcourue par la force selon  $x$  et  $y_0 =$  constante, représente le trajet emprunté par la force.

On remplace l'expression (2.21) dans l'équation du mouvement (2.1), on obtient :

$$\dots h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -F_0 u(x - x_0) u(y - y_0); \quad 0 \leq t \leq l/v \quad (2.22)$$

### Remarque :

Quand la force quitte la dalle de roulement, l'excitation devient nulle et on résout l'équation (2.22) son second membre (vibrations libres).

Pour résoudre l'équation (2.22), on utilise la méthode modale ; très utilisée pour ce type de problème ; pour décomposer le déplacement  $w(x, y, t)$  de la manière suivante :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m W_{ij}(x, y) q_{ij}(t) \quad (2.23)$$

Avec  $w_{ij}(x, y)$  sont les modes propres de la dalle de roulement déjà calculer dans le paragraphe 2.3,  $q_{ij}(t)$  sont les coordonnées modales (coordonnées généralisées) à déterminer.

Remplaçons l'expression (2.23) dans (2.22), puis multiplions cette dernière par  $w_{kl}(x, y)$  et intégrons sur la surface de la dalle de roulement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \iint_S \dots h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \xi_{kl} \ddot{q}_{ij} ds + \iint_S c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \xi_{kl} \dot{q}_{ij} ds + \iint_S D \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right) w_{kl} q_{ij} ds \\ & = - \iint_S F_0 w_{kl} u(x - x_0) u(y - y_0) ds ; 0 \leq t \leq l/v \end{aligned} \quad (2.24)$$

On peut bénéficier de l'orthogonalité des modes propres c'est-à-dire :

$$\iint_S \dots h w_{ij} w_{kl} ds = \begin{cases} 0 & \text{pour } i, j \neq k, l \\ \iint_S \dots h w_{ij}^2 ds = M_{ij} & \text{pour } i, j = k, l \end{cases} \quad (2.25.1)$$

$$\iint_S c w_{ij} w_{kl} ds = \begin{cases} 0 & \text{pour } i, j \neq k, l \\ \iint_S c w_{ij}^2 ds = 2 \langle_{ij} \check{S}_{ij} M_{ij} = C_{ij} & \text{pour } i, j = k, l \end{cases} \quad (2.25.2)$$

$$\iint_S D \left( \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} \right) w_{kl} ds = \begin{cases} 0 & \text{pour } i, j \neq k, l \\ \check{S}_{ij}^2 M_{ij} = K_{ij} & \text{pour } i, j = k, l \end{cases} \quad (2.25.3)$$

Avec  $K_{ij}$ ,  $M_{ij}$ ,  $C_{ij}$  sont les raideurs, les masses et les amortissement modaux respectivement,  $\langle_{ij}$  sont les facteurs d'amortissement modaux ( $\langle_{ij} = C_{ij} / 2M_{ij} \check{S}_{ij}$ ).

Compte tenu des relations d'orthogonalité (2.25), les termes dont  $ij \neq kl$  disparaissent et il reste  $ij$  équation modales découplées :

$$M_{ij} \ddot{q}_{ij} + C_{ij} \dot{q}_{ij} + K_{ij} q_{ij} = F_{ij} \quad (2.26)$$

Avec  $F_{ij}(t)$  représentent les forces modales :

$$F_{ij}(t) = \begin{cases} - \iint_S F_0 w_{ij}(x, y) u(x - x_0) u(y - y_0) ds = -F_0 w_{ij}(x_0, y_0) & 0 \leq t \leq l/v \\ 0 & t > l/v \end{cases}$$

Pour déterminer alors le déplacement vertical de la dalle de roulement  $w(x, y, t)$ , il suffit de déterminer les coordonnées modales  $q_{ij}(t)$  par résolutions du système différentiel ordinaire suivant :

$$\ddot{q}_{ij} + 2 \langle_{ij} \check{S}_{ij} \dot{q}_{ij} + \check{S}_{ij}^2 q_{ij} = F_{ij} / M_{ij} ; \quad 0 \leq t \leq l/v \quad (2.27)$$

Pour le cas où  $t > l/v$ , on resoude le système (2.27) en vibration libre :

$$\ddot{q}_{ij} + 2\zeta_{ij}\dot{q}_{ij} + \check{S}_{ij}^2 q_{ij} = 0 \quad (2.28)$$

En utilisant la méthode de convolution (voir annexe 1), le système d'équations modales (2.27 et 2.28) admet comme solutions :

Solution en vibrations forcées :

$$q_{ij}(t) = e^{-\zeta_{ij}\check{S}_{ij}t} \left( q_{ij}(0) \cos(\%_{00ij}t) + \frac{\dot{q}_{ij}(0) + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}q_{ij}(0)}{\%_{00ij}} \sin(\%_{00ij}t) \right) - \frac{F_0}{M_{ij}\%_{00ij}} \int_0^t W_{ij}(\epsilon\ddagger, y_0) e^{-\zeta_{ij}\check{S}_{ij}(t-\ddagger)} \sin(\%_{00ij}(t-\ddagger)) d\ddagger \quad (2.29)$$

Avec  $\%_{00ij} = \check{S}_{ij} \sqrt{1 - \zeta_{ij}^2}$  sont les pulsations propres amorties.

Solution en vibrations libres :

$$s_{ij}(t) = e^{-\zeta_{ij}\check{S}_{ij}(t-\ddagger)} \left\{ q_{ij}(\ddagger) \cos(\%_{00ij}(t-\ddagger)) + \frac{\dot{q}_{ij}(\ddagger) + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}q_{ij}(\ddagger)}{\%_{00ij}} \sin(\%_{00ij}(t-\ddagger)) \right\} \quad (2.30)$$

Remplaçons (2.5) dans (2.3) ( avec  $\xi_i(x) = \sin\left(\frac{ifx}{l}\right)$  ), l'expression (2.29) devient :

$$q_{ij}(t) = e^{-\zeta_{ij}\check{S}_{ij}t} \left\{ q_{ij}(0) \cos(\%_{00ij}t) + \frac{\dot{q}_{ij}(0) + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}q_{ij}(0)}{\%_{00ij}} \sin(\%_{00ij}t) \right\} - \frac{F_0 e^{-\zeta_{ij}\check{S}_{ij}t} h_{ij}(y_0)}{M_{ij}\%_{00ij}} \int_0^t \sin\left(\frac{if\epsilon}{l}\ddagger\right) e^{\zeta_{ij}\check{S}_{ij}\ddagger} \sin(\%_{00ij}(t-\ddagger)) d\ddagger \quad (2.31)$$

Avec :

$$h_{ij}(y_0) = \sin(r_{2ij}y_0) + D_{ij} \cos(r_{2ij}y_0) + E_{ij}sh(r_{1ij}y_0) + F_{ij}ch(r_{1ij}y_0)$$

La quantité  $\frac{if\epsilon}{l}$  a la même dimension qu'une fréquence. Elle représente les fréquences

de passage de la force  $\left( \Omega_i = \frac{if\epsilon}{l} \right)$ .

Pour simplifier l'intégrale de l'expression (2.31), nous utilisons la relation trigonométrique suivante :

$$\sin(\Omega_i\ddagger) \sin(\%_{00ij}(t-\ddagger)) = \frac{1}{2} \left[ \cos\left[\left(\Omega_i + \%_{00ij}\right)\ddagger - \%_{00ij}t\right] - \cos\left[\left(\Omega_i - \%_{00ij}\right)\ddagger + \%_{00ij}t\right] \right] \quad (2.32)$$

En utilisant l'expression (2.32), la solution (2.31) s'écrit d'une manière plus compacte :

$$q_{ij}(t) = e^{-\zeta_{ij}\tilde{S}_{ij}t} \left\{ q_{ij}(0) \cos(\omega_{0ij}t) + \frac{\dot{q}_{ij}(0) + 2\zeta_{ij}\tilde{S}_{ij}q_{ij}(0)}{\omega_{0ij}} \sin(\omega_{0ij}t) \right\} - \frac{F_0 e^{-\zeta_{ij}\tilde{S}_{ij}t} h_{ij}(y_0)}{2M_{ij}\omega_{0ij}} [I_{1ij}(t) - I_{2ij}(t)] \quad (2.33)$$

Avec les intégrales  $I_{1ij}$  et  $I_{2ij}$  sont faciles à calculer (voir annexe 2) :

$$I_{1ij}(t) =$$

$$I_{2ij}(t) = \int_0^t e^{\zeta_{ij}\tilde{S}_{ij}\dagger} \cos[(\Omega_i + \omega_{0ij})\dagger + \omega_{0ij}\dagger] \dagger \dagger \quad (2.34.2)$$

### 2.4.2 Cas d'un convoi de forces constantes mobiles

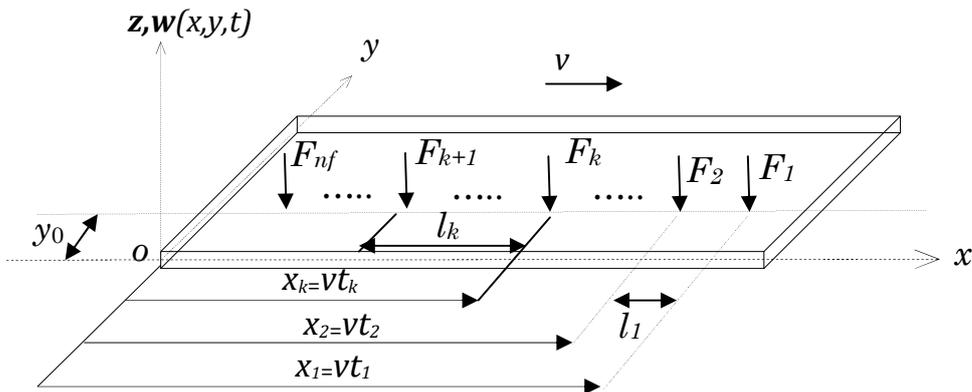
C'est une généralisation du cas d'une force constante mobile. Dans ce cas (fig.2.3), la force d'excitation s'écrit :

$$F(x, y, t) = - \sum_{k=1}^{nf} F_k u(x - x_k) u(y - y_0) \quad (2.35)$$

Avec :  $x_k = x_1 - \sum_{j=0}^{k-1} l_j$  et  $l_0 = 0$ ,  $nf$  est le nombre de forces mobiles,  $l_k$  est la distance entre

$F_k$  et  $F_{k+1}$ .

Remarque : si  $l < x_k < 0$ , la force  $F_k = 0$ .



**Figure 2.3** : dalle de roulement sous la sollicitation d'un convoi de forces mobiles

La force modale s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
F_{ij}(t) &= \iint_S F(x, y, t) W_{ij}(x, y) ds = - \iint_S \sum_{k=1}^{nf} F_k u(x - x_k) u(y - y_0) W_{ij}(x, y) ds \\
&= - \sum_{k=1}^{nf} F_k W_{ij}(x_k, y_0) = - \sum_{k=1}^{nf} F_k W_{ij}(\epsilon t_k, y_0)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Remplaçons cette dernière expression dans le système d'équations modales (2.27), on obtient :

$$\ddot{q}_{ij} + 2\zeta_{ij} \check{S}_{ij} \dot{q}_{ij} + \check{S}_{ij}^2 q_{ij} = - \frac{1}{M_{ij}} \sum_{k=1}^{nf} F_k W_{ij}(\epsilon t_k, y_0) \tag{2.37}$$

La solution de (2.37) a la même forme que celle de (2.27), elle est obtenue en superposons les solutions de toutes les forces de la manière suivante :

$$q_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{nf} [q_{ij}(t_k) + s_{ij}(t_k)] \tag{2.38}$$

Avec  $q_{ij}(t_k)$  est la réponse forcée de la dalle due à l'excitation  $F_k$ , et  $s_{ij}(t_k)$  est la réponse en vibrations libres quand  $F_k$  quitte la dalle de roulement :

- Pour  $0 \leq x_k \leq l$  :

$$q_{ij}(t_k) = e^{-\zeta_{ij} \check{S}_{ij} t_k} \left\{ q_{ij}(0) \cos(\%_{00}{}_{ij} t_k) + \frac{\dot{q}_{ij}(0) + 2\zeta_{ij} \check{S}_{ij} q_{ij}(0)}{\%_{00}{}_{ij}} \sin(\%_{00}{}_{ij} t_k) \right\} - \frac{F_k h_{ij}(y_0) e^{-\zeta_{ij} \check{S}_{ij} t_k}}{2M_{ij} \%_{00}{}_{ij}} [I_{1ij}^{(k)} - I_{2ij}^{(k)}] \tag{2.39}$$

Avec :

$$I_{1ij}^{(k)} = \int_0^t e^{\zeta_{ij} \check{S}_{ij} \dagger} \cos[(\Omega_i + \%_{00}{}_{ij}) \dagger - \%_{00}{}_{ij} t_k] d\dagger \tag{2.40.1}$$

$$I_{2ij}^{(k)} = \int_0^t e^{\zeta_{ij} \check{S}_{ij} \dagger} \cos[(\Omega_i + \%_{00}{}_{ij}) \dagger + \%_{00}{}_{ij} t_k] d\dagger \tag{2.40.2}$$

- Pour  $x_k > l$  :

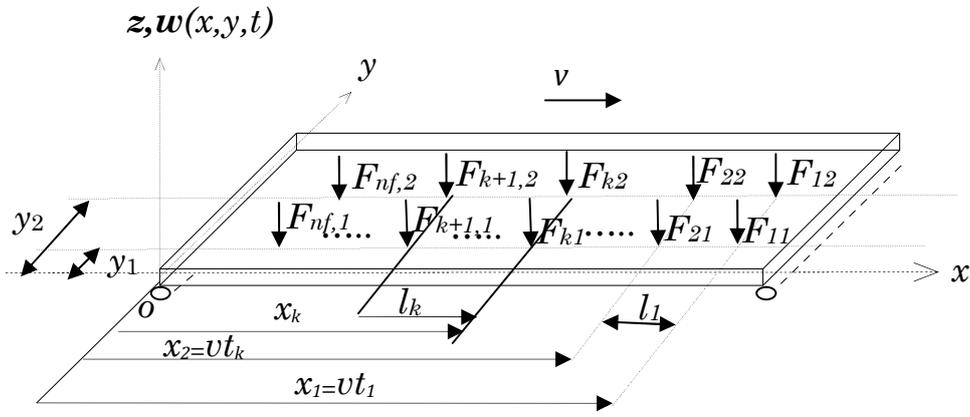
$$s_{ij}(t_k) = e^{-\zeta_{ij} \check{S}_{ij} (t_k - \dagger_k)} \left\{ q_{ij}(\dagger_k) \cos(\%_{00}{}_{ij} (t_k - \dagger_k)) + \frac{\dot{q}_{ij}(\dagger_k) + 2\zeta_{ij} \check{S}_{ij} q_{ij}(\dagger_k)}{\%_{00}{}_{ij}} \sin(\%_{00}{}_{ij} (t_k - \dagger_k)) \right\} \tag{2.41}$$

$$\text{Avec : } \dagger_k = \frac{1}{v} \left( l + \sum_{j=0}^{k-1} l_j \right)$$

### 2.4.3 Cas de deux convois de forces constantes mobiles

Dans le cas de deux convois de force (fig.2.4), la force d'excitation s'écrit :

$$F(x, y, t) = - \sum_{k=1}^{nf} \sum_{r=1}^2 F_{kr} u(x - x_k) u(y - y_r) \quad (2.42)$$



**Figure 2.4 :** Dalle de roulement sous la sollicitations de deux convois de forces mobiles.

Dans ce cas, la force modale s'écrit :

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) &= \iint F(x, y, t) w_{ij}(x, y) ds = - \sum_{k=1}^{nf} \sum_{r=1}^2 \iint F_{kr} u(x - x_k) u(y - y_r) w_{ij}(x, y) ds \\ &= - \sum_{k=1}^{nf} \sum_{r=1}^2 F_{kr} w_{ij}(x_k, y_r) \end{aligned} \quad (2.43)$$

On remplace (2.43) dans (2.27), l'équation modale prend la forme (2.44) :

$$\ddot{q}_{ij} + 2\zeta_{ij} \dot{q}_{ij} + \check{S}_{ij}^2 q_{ij} = - \frac{1}{M_{ij}} \sum_{k=1}^{nf} \sum_{r=1}^2 F_{kr} w_{ij}(x_k, y_r) \quad (2.44)$$

Avec  $q_{ij}(t_k)$  est la réponse forcée de la dalle due à l'excitation  $F_{k1}$  et  $F_{k2}$ ,  $S_{ij}(t_k)$  est la réponse en vibrations libres due à la sortie des deux forces  $F_{k1}$  et  $F_{k2}$  de la dalle.

Remarque : La solution de (2.44) a la même forme (2.37).

- Pour  $0 \leq x_k \leq l$  :

$$q_{ij}(t_k) = e^{-\langle_{ij} \tilde{S}_{ij} t_k} \left\{ q_{ij}(0) \cos(\%_{00}{}_{ij} t_k) + \frac{\dot{q}_{ij}(0) + 2\langle_{ij} \tilde{S}_{ij} q_{ij}(0)}{\%_{00}{}_{ij}} \sin(\%_{00}{}_{ij} t_k) \right\} - \sum_{r=1}^2 \frac{F_{kr} e^{-\langle_{ij} \tilde{S}_{ij} t_k} h_{ij}(y_r)}{2M_{ij} \%_{00}{}_{ij}} \left[ I_{1ij}^{(k)}(t_k) - I_{2ij}^{(k)}(t_k) \right]$$

(2.45).

- Pour  $x_k > l$  ;  $S_{ij}(t_k)$  sont données dans l'expression (2.41).

## Chapitre 3

# Vibrations d'une dalle de roulement sous la sollicitation des masses mobiles

### 3.1. Introduction

Contrairement au chapitre 2, les vibrations de la dalle de roulement sont dues au transfert d'une quantité de mouvement communiquée par une ou plusieurs masses mobiles. L'objectif est d'étudier l'effet d'inertie des masses sur la réponse dynamique de la dalle. La résolution de l'équation différentielle du mouvement de la dalle s'effectue par projection modale. Le système d'équation modale obtenue est intégré numériquement par la méthode de Newmark (résolution semi-analytique).

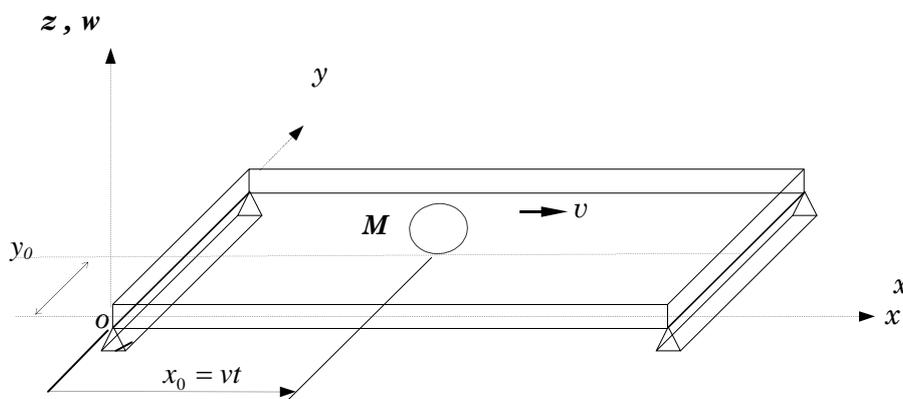
### 3.2. Calcul de la réponse dynamique de la dalle de roulement

#### 3.2.1 Cas d'une masse mobile

Dans le cas d'une masse mobile  $M$ , qui se déplace avec une vitesse constante  $v$  selon la direction  $x$ , (voir figure 3.1), la force d'excitation s'écrit :

$$F(x, y, t) = \begin{cases} -M \left( g + \ddot{w} \right) u(x - x_0) u(y - y_0) & \text{pour } 0 \leq t \leq l/v \\ 0 & \text{pour } t > l/v \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec  $\ddot{w}$  est l'accélération verticale de la dalle de roulement évaluée au point de contact dalle/masse mobile,  $M \ddot{w}$  représente l'effet d'inertie de la masse.



**Figure 3.1** : Dalle de roulement excitée par une masse mobile

L'accélération verticale au point de contact dalle/masse s'écrit :

$$\ddot{w}(x_0, y_0, t) = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x_0, y_0, t} \quad (3.2)$$

L'expression de l'accélération (3.2), projetée dans la base modale (2.23) s'écrit :

$$\ddot{w}(x_0, y_0, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m w_{kl}(x_0, y_0) \ddot{q}_{kl}(t) + 2\epsilon \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m w'_{kl}(x_0, y_0) \dot{q}_{kl}(t) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m w''_{kl}(x_0, y_0) q_{kl}(t) \quad (3.3)$$

Pour  $0 \leq t \leq \frac{l}{v}$ , l'expression de la force modale s'écrit :

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) &= -\iint_s M \left( g + \ddot{w} \right) u(x - x_0) u(y - y_0) w_{ij}(x, y) ds \\ &= -M g w_{ij}(x_0, y_0) - M w_{ij}(x_0, y_0) \ddot{w}(x_0, y_0, t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Remplaçons (3.3) dans (3.4), il vient :

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) &= -M g w_{kl}(x_0, y_0) \\ &\quad - M w_{kl}(x_0, y_0) \left( \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m w_{kl}(x_0, y_0) \ddot{q}_{kl}(t) + 2\epsilon \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m w'_{kl}(x_0, y_0) \dot{q}_{kl}(t) + \epsilon^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m w''_{kl}(x_0, y_0) q_{ij}(t) \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Remplaçons (3.5) dans le système d'équations modales (2.26), après regroupement on obtient :

$$\left[ M_{ij} + M w_{ij}(x_0, y_0) w_{kl}(x_0, y_0) \right] \ddot{q}_{kl}(t) + 2 \left( \epsilon \tilde{S}_{ij} M_{ij} + M v w_{ij}(x_0, y_0) w'_{kl}(x_0, y_0) \right) \dot{q}_{kl}(t)$$

$$+ (\check{S}_{ij}^2 M_{ij} + M \epsilon^2 w_{ij}(x_0, y_0) w_{kl}'(x_0, y_0)) q_{kl}(t) = -M g w_{ij}(x_0, y_0)$$

(3.6)

On pose :

$$\begin{aligned} M_{ijkl}^* &= M_{ij} u_{ijkl} + M w_{ij}(x_0, y_0) w_{kl}(x_0, y_0) \\ C_{ijkl}^* &= 2 \left( \langle \check{S}_{ij} M_{ij} u_{ijkl} + M w_{ij}(x_0, y_0) w_{kl}'(x_0, y_0) \rangle \right) \quad (3.7) \\ K_{ijkl}^* &= \check{S}_{ij}^2 M_{ij} u_{ijkl} + M \epsilon^2 w_{ij}(x_0, y_0) w_{kl}''(x_0, y_0) \\ P_{ij}^* &= -M g w_{ij}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

On obtient :

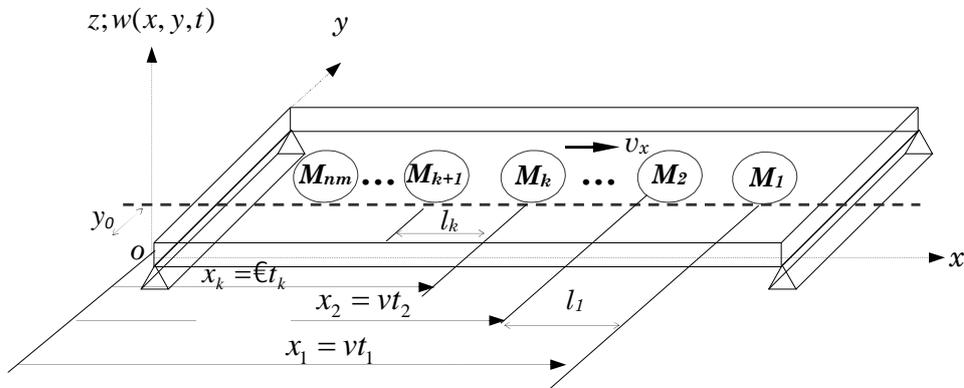
$$[M^*] \{\ddot{q}\} + [C^*] \{\dot{q}\} + [K^*] \{q\} = \{P^*\} \quad (3.8)$$

Avec :  $u_{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i, j = k, l \\ 0 & \text{pour } i, j \neq k, l \end{cases}$

Dans le système (3.8), les matrices  $[M^*]$ ,  $[C^*]$  et  $[K^*]$  sont respectivement, la matrice de masse généralisée, la matrice d'amortissement généralisé et la matrice de rigidité généralisée,  $\{P^*\}$  est le vecteur de force généralisé.

### 3.2.2 Cas d'un convoi de masses mobiles

C'est une généralisation du cas d'une masse vers plusieurs masses mobiles  $M_1, M_2, \dots, M_{nm}$ , où  $nm$  représente le nombre de masses mobiles (figure 3.2).



**Figure 3.2 :** Dalle de roulement sollicitée par un convoi de masses mobiles.

Dans ce cas la force d'excitation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 F(x, y, t) &= -M_1(g + \ddot{w}_1)u(x - x_1)u(y - y_0) - \dots - M_{nm}(g + \ddot{w}_{nm})u(x - x_{nm})u(y - y_0) \\
 &= -\sum_{k=1}^{nm} M_k(g + \ddot{w}_k)u(x - x_k)u(y - y_0)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Avec  $\ddot{w}_k$  est l'accélération vertical de la dalle de roulement évaluée au point de contact entre la dalle et la  $k^{\text{ème}}$  masse mobile. On va avoir donc le même système d'équations modales (3.8) mais avec une sommation sur le nombre de masse comme suite :

$$\begin{aligned}
 M_{ijkl}^* &= M_{ij}u_{ijkl} + \sum_{k=1}^{nm} M_k w_{ij}(x_k, y_0) w_{kl}(x_k, y_0) \\
 C_{ijkl}^* &= 2\zeta_{ij} \check{S}_{ij} M_{ij} u_{ijkl} + 2\nu \sum_{k=1}^{nm} M_k w_{kl}(x_k, y_0) w'_{kl}(x_k, y_0) \\
 K_{ijkl}^* &= \check{S}_{ij}^2 M_{ij} u_{ijkl} + \nu^2 \sum_{k=1}^{nm} M_k w_{ij}(x_k, y_0) w''_{kl}(x_k, y_0) \\
 P_{ij}^* &= -\sum_{k=1}^{nm} M_k g w_{ij}(x_k, y_0)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

### 3.2.3 Cas de deux convois de masses mobiles

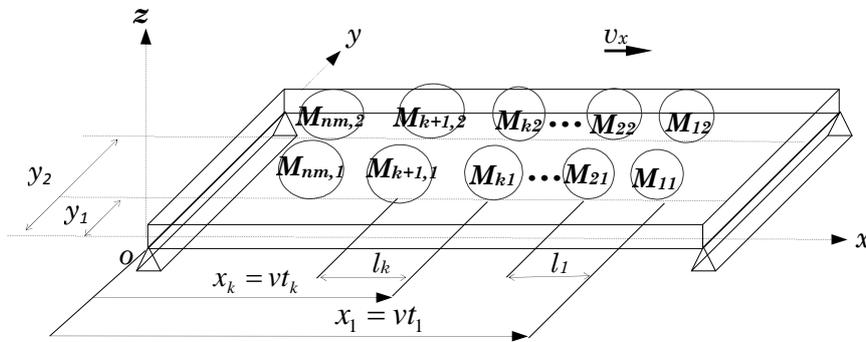
C'est une généralisation du cas de convois de masses mobiles (fig.3.3). Dans ces conditions, la force de sollicitation s'écrit :

$$F(x, y, t) = - \sum_{k=1}^{nm} \sum_{r=1}^2 M_{kr} (g + \ddot{w}_{kr}) u(x - x_k) u(y - y_r) \quad (3.11)$$

On va avoir donc le même système d'équations modales (3.8) mais avec une double sommation sur le nombre de masse comme suite :

$$\begin{aligned} M_{ijkl}^* &= M_{ij} u_{ijkl} + \sum_{k=1}^{nm} \sum_{r=1}^2 M_{kr} w_{ij}(x_k, y_r) w_{kl}(x_k, y_r) \\ C_{ijkl}^* &= 2\zeta_{ij} \tilde{S}_{ij} M_{ij} u_{ijkl} + 2\nu \sum_{k=1}^{nm} \sum_{r=1}^2 M_{kr} w_{ij}(x_k, y_r) w'_{kl}(x_k, y_r) \\ K_{ijkl}^* &= \tilde{S}_{ij}^2 M_{ij} u_{ijkl} + \nu^2 \sum_{k=1}^{nm} \sum_{r=1}^2 M_{kr} w_{ij}(x_k, y_r) w''_{kl}(x_k, y_r) \\ P_{ij}^* &= - \sum_{k=1}^{nm} \sum_{r=1}^2 M_{kr} g w_{ij}(x_k, y_r) \end{aligned} \quad (3.12)$$

On obtient le même système d'équations modales (3.8), mais avec une double sommation sur le nombre de masses comme suite :



**Figure.3.3** : Dalle de roulement excitée par deux convois de masses mobiles.

### 3.3. Résolution numérique du système d'équations modales

Il existe plusieurs méthodes d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires telles que, la méthode de Runge Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4, la méthode de Newmark, etc. Pour résoudre le système d'équations modales (3.8), nous avons utilisé la méthode de Newmark car, c'est une méthode implicite, à pas unique et inconditionnellement stable de précision maximale lorsqu'on utilise l'algorithme de l'accélération moyenne (voir annexe 3). Le système d'équations (3.8), au temps  $t + \Delta t$ , s'écrit :

$$[M^*] \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + [C^*] \{\dot{q}\}_{t+\Delta t} + [K^*] \{q\}_{t+\Delta t} = \{P^*\}_{t+\Delta t} \quad (3.13)$$

En utilisant la méthode de Newmark, le vecteur des vitesses et le vecteur des déplacements modaux, au temps  $t + \Delta t$ , s'écrivent (voir annexe 3) :

$$\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{q}\}_t + (1-x) \Delta t \{\ddot{q}\}_t + x \Delta t \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} \quad (3.14.1)$$

$$\{q\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t \{\dot{q}\}_t + (\Delta t)^2 (0,5 - S) \{\ddot{q}\}_t + (\Delta t)^2 S \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} \quad (3.14.2)$$

Avec  $\Delta t$  est le pas du temps d'intégration,  $x$  et  $S$  sont les paramètres de stabilité de la méthode de new mark (voir annexe 3).

Remplaçons les expressions (3.14.1) et (3.14.2) dans l'équation (3.13), après regroupement et factorisation, on obtient :

$$[S^*] \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + [C^*] \{\dot{q}\}_{t+\Delta t} + [K^*] \{q\}_{t+\Delta t} = \{P^*\}_{t+\Delta t} \quad (3.15)$$

Avec :

$$[S^*] = [M^*] + x \Delta t [C^*] + S \Delta t^2 [K^*]$$

$$\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{q}\}_t + (1-x) \Delta t \{\ddot{q}\}_t \quad (3.16)$$

$$\{q^*\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t \{\dot{q}\}_t + (0,5 - \varsigma) \Delta t^2 \{\ddot{q}\}_t$$

Multiplions (3.15) par  $[S^*]^{-1}$ , nous obtenons :

$$\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} = [S^*]^{-1} \{P\}_{t+\Delta t} - [S^*]^{-1} [C^*] \{\dot{q}^*\}_{t+\Delta t} - [S^*]^{-1} [K^*] \{q^*\}_{t+\Delta t} \quad (3.17)$$

Une fois le vecteur des accélérations modales est calculé, on peut calculer les vecteurs des vitesses et déplacements modaux en utilisant les expressions de Newmark (3.14.1) et (3.14.2).

### 3.4 : Algorithme de résolution : masses mobiles.

- 
- Lecture des données de la dalle de roulement:  $l, b, h, E, \dots, \epsilon, c$
  - Lecture des données des masses mobiles:  $M_{kr}, k=1, \dots, nm, r=1,2$
- 

Calcul préliminaire :

- Calcul de rigidité de flexion : D
  - Choix du nombre du mode nécessaires:  $n, m$
  - Calcul des fréquences et des modes propres:  $\check{S}_{ij}, W_{ij}(x, y)$
  - Choix des paramètres de stabilité de newmarek :  $\alpha, \beta$
  - Calcul des matrices : [M], [C], [K]
  - Choix de la vitesse de passage :  $v$
  - Choix de la trajectoire des masses :  $y_1, y_2$
  - Choix des conditions initiales  $\{q\}_0, \{\dot{q}\}_0, \{\ddot{q}\}_0$
- 

Pour chaque pas du temps :  $t = t + \Delta t$

- Calcul des positions des masses sur la dalle :  $x_r = vt_r$
- Calcul des modes propres et leurs dérivées aux points de contact  $k$  :  
 $W_{ij}(x_k, y_k), W'_{ij}(x_k, y_r), W''_{ij}(x_k, y_k)$
- Calcul des matrices : [M\*], [C\*], [K\*] et du vecteur {P\*}
- Résolution par la méthode de Newmark, le système :

$$[M^*] \{\ddot{q}\} + [C^*] \{\dot{q}\} + [K^*] \{q\} = \{P^*\}$$

- Calcul du déplacement vertical de la dalle, des forces de contact, ... etc.
-

## Chapitre 4

# Vibrations d'une dalle de roulement sous la sollicitation d'un véhicule mobile

### 4.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les vibrations d'une dalle de roulement sous la sollicitation d'un véhicule mobile avec la prise en considération de l'état de la chaussée, c'est-à-dire, d'étudier le phénomène d'interaction dynamique entre une dalle de roulement et un véhicule mobile.

Le véhicule est modélisé par : un modèle dynamique à deux dimensions et un seul ddl, un modèle dynamique à deux dimensions et deux ddl, un modèle dynamique à deux dimensions et quatre ddl et finalement, un modèle dynamique à trois dimensions et sept ddl.

Le profil de la chaussée est modélisé par une Densité Spectrale de Puissance (DSP), caractérisée par un coefficient de rugosité et une variable aléatoire.

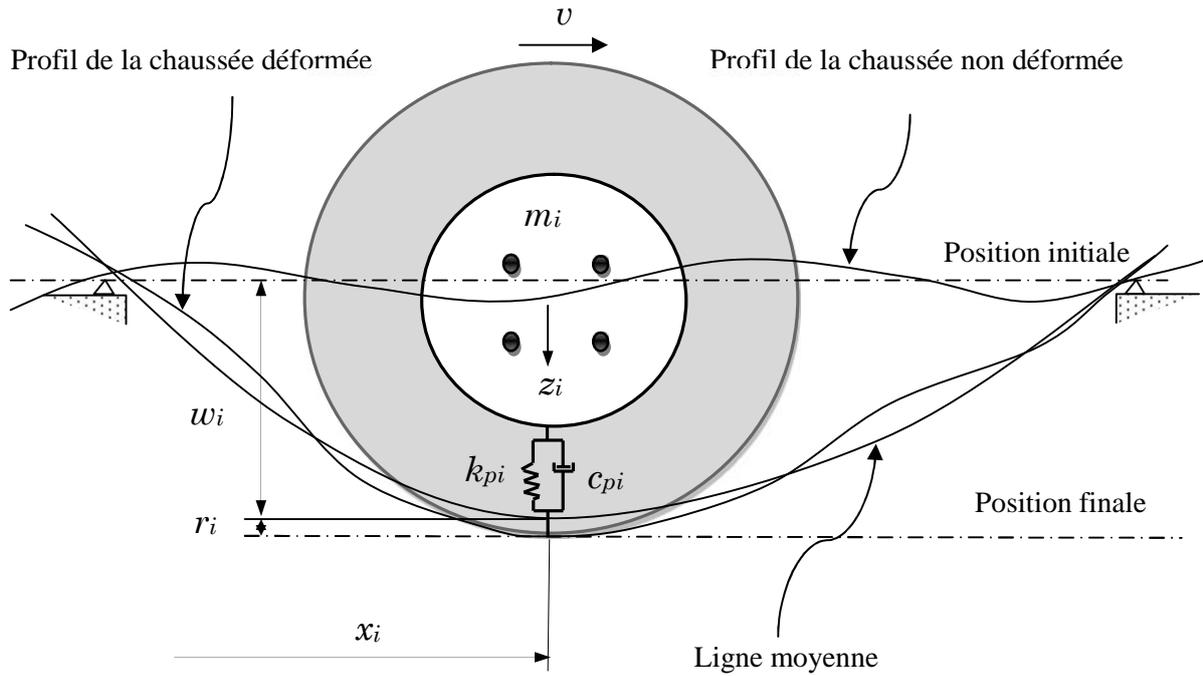
La dalle de roulement est modélisée par une plaque mince isotrope à une seule travée.

Nous avons utilisé la méthode modale pour résoudre l'équation du mouvement de la dalle de roulement. Les équations du mouvement des différents modèles du véhicule sont établies en appliquant le principe de Newton. L'intégration numérique des différentes équations du mouvement couplées s'effectue par la méthode de Newmark. Un algorithme de résolution des équations de mouvement couplées d'une manière découplée, avec un processus de calcul itératif, est présenté à la fin de ce chapitre.

### 4.2. Interaction dynamique dalle-véhicule

L'interaction dynamique entre une dalle de roulement et un véhicule mobile est expliquée en détaille dans le premier chapitre au paragraphe 1.2. Nous limiterons ici à la détermination de la force d'interaction entre une roue d'un véhicule et une dalle de roulement.

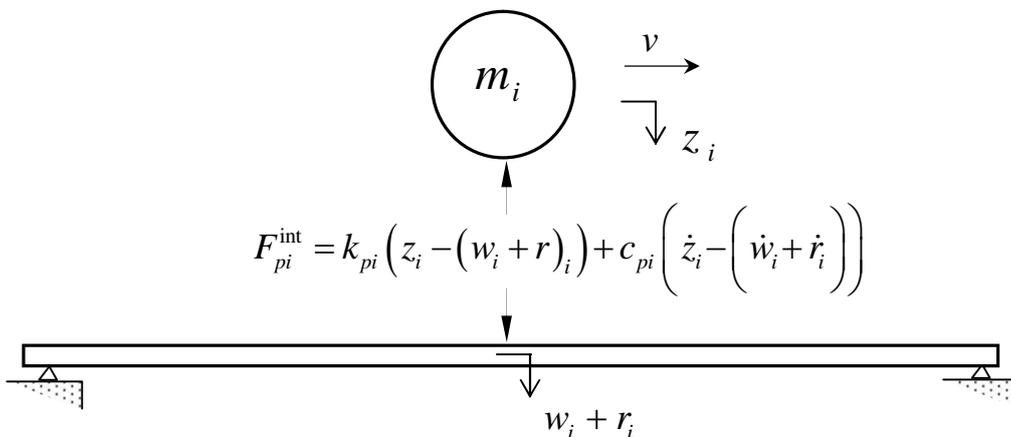
Considérons une roue d'un véhicule mobile sur une dalle de roulement avec la prise en compte des irrégularités de la chaussée (fig.4.1). La force d'interaction au point de contact  $i$  est la force d'interaction dans le pneu. Ce dernier est modélisé par un ressort de raideur  $k_{pi}$  et un amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement  $c_{pi}$ . La masse  $m_i$  représente la masse de la roue avec essieu,  $z_i$  est le déplacement vertical de la masse  $m_i$ ,  $w_i$  et  $r_i$  sont respectivement le déplacement vertical de la dalle et la rugosité du profil de la chaussée évalués au point de contact  $i$ .



**Figure 4.1 :** Modélisation de l'interaction dynamique dalle-roue d'un véhicule et évaluations des déplacements relatifs.

La force d'interaction entre la roue du véhicule et la dalle de roulement au point de contact  $i$  est exprimée par (fig. 4.2) :

$$\begin{aligned}
 F_{pi}^{\text{int}} &= k_{pi} (z_i - (w_i + r_i)) + c_{pi} (\dot{z}_i - (\dot{w}_i + \dot{r}_i)) \\
 &= k_{pi} [z_i - (w_i + r_i)] + c_{pi} \left[ \dot{z}_i - \left( \frac{\partial w}{\partial t} + v \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right) \right]_{x_i, y_i, t}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$



**Figure 4.2 :** Représentation de la force d'interaction à un point de contact  $i$ .

### 4.3. Hypothèse de base de l'interaction dynamique dalle-véhicule

Les hypothèses qui constituent la base du développement mathématique lors de l'étude de l'interaction dynamique entre les dalles de roulement et les véhicules mobiles sont :

- 1- Les pneus du véhicule restent en contact permanent avec la chaussée. Les déplacements des points de contact, supposé ponctuel, sont :

$$u_i = w(x_i, y_i, t) + r(x_i) \quad (4.2)$$

- 2- Le tangage ; c'est-à-dire la rotation  $\theta_v$  du bloc rigide du véhicule ; est considéré petit :

$$\cos \theta_v \approx 1 \quad ; \quad \sin \theta_v \approx \theta_v \quad (4.3)$$

- 3- Les axes (1,1') et (2,2') du véhicule conservent leur orientation par rapport au véhicule (fig.4.3).

$$x_v = x_1 - a_1 s_1 + \frac{h}{s_1} (z_{v2} - z_{v1}) \quad (4.4)$$

Avec :

$$\theta_v = \frac{z_{v2} - z_{v1}}{S_1}$$

$$z_v = a_1 z_{v1} + a_2 z_{v2}$$

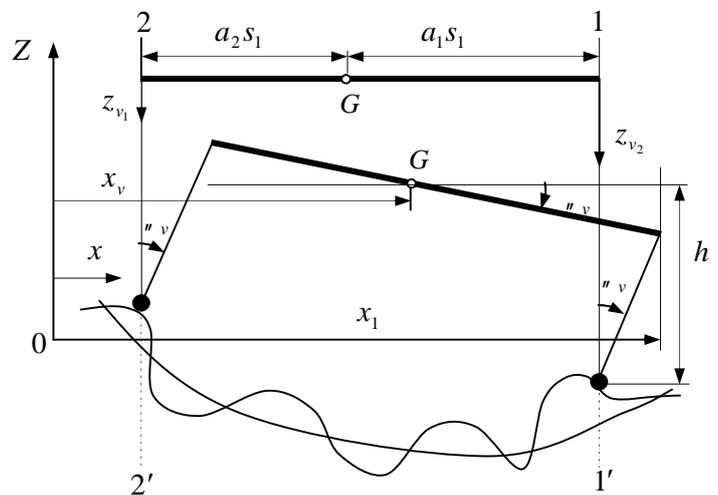


Figure 4.3 : Position du centre de gravité du véhicule.

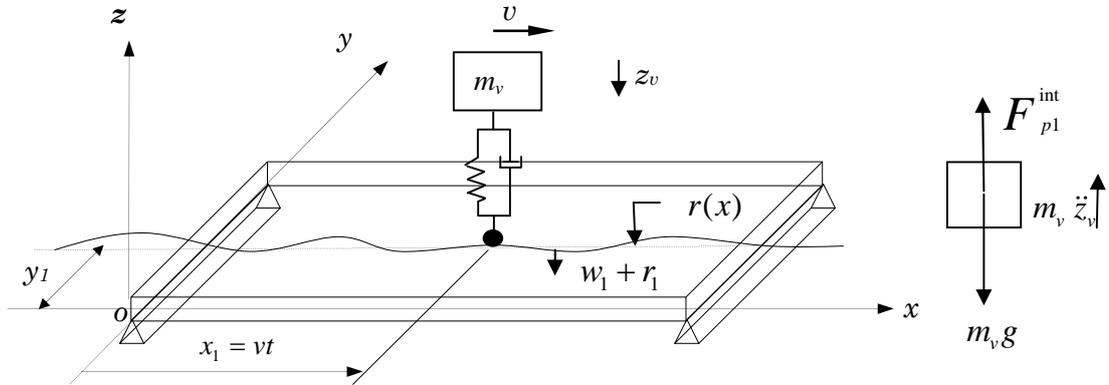
- 4- Le comportement des amortisseurs du véhicule est linéaire.
- 5- En plus pour cette étude, la dalle de roulement est supposée isotrope, à une travée, d'épaisseur faible par rapport aux autres dimensions, la théorie des plaques minces est alors utilisée.

#### 4.4. Modélisation du véhicule

Pour déterminer les équations du mouvement du modèle de véhicule, on peut utiliser les équations de Lagrange, le principe de Newton ou bien le principe des travaux virtuels. Dans notre cas, nous avons utilisé la loi de Newton qui permet de mieux comprendre la distribution des efforts.

##### 4.4.1. Modèle à un degré de liberté

La figure 4.4, représente une dalle de roulement sollicitée par un véhicule, modélisé simplement par un modèle physique à 1 ddl, qui est le déplacement vertical  $z_v$  de la masse ponctuel du véhicule  $m_v$ .



**Figure 4.4 :** Modèle mathématique dalle-véhicule à 1 ddl.

En appliquant la loi d'équilibre dynamique des forces sur la masse  $m_v$ , on obtient :

$$m_v \ddot{z}_v + c_{p1} \dot{z}_v + k_{p1} z_v = m_v g + k_{p1} (w_1 + r_1) + c_{p1} (\dot{w}_1 + \dot{r}_1) \quad (4.5)$$

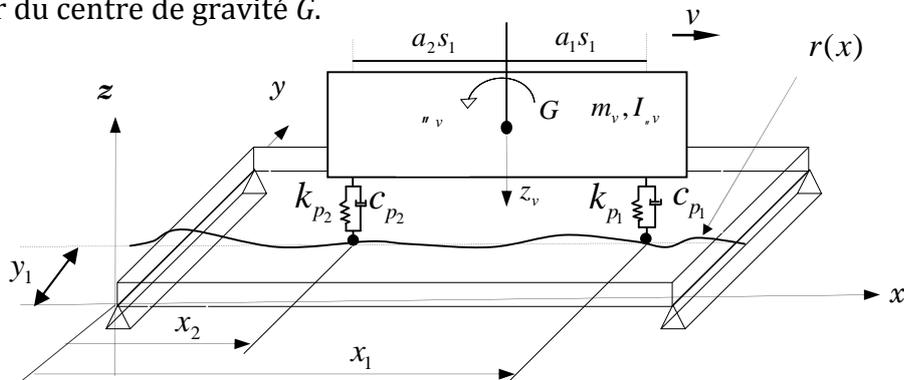
Avec :

$$\dot{w}_1 + \dot{r}_1 = \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + v \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \right]_{x_1, y_1, t}$$

(4.6)

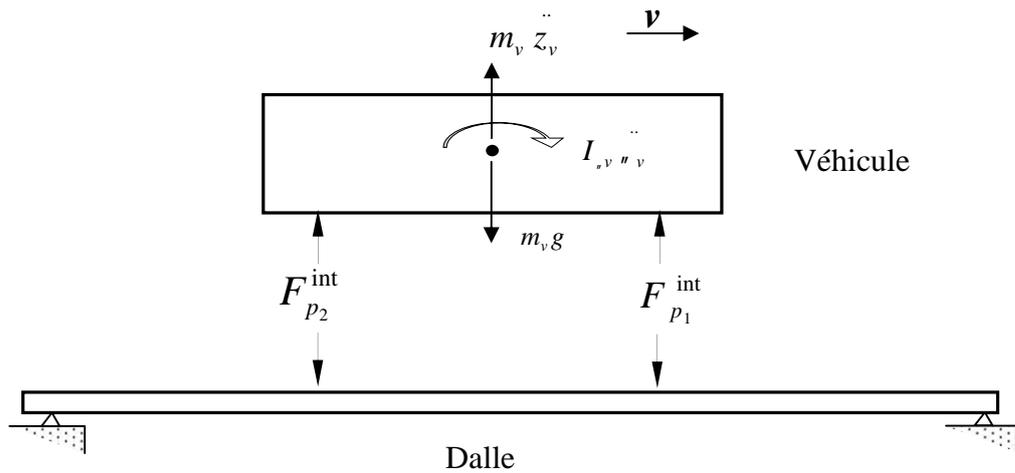
#### 4.4.2. Modèle à deux degrés de liberté

La figure 4.5, montre une dalle de roulement à une travée, excité par un modèle de véhicule à deux ddl qui sont, le déplacement vertical du centre de gravité  $z_v$  (bondissement) du bloc rigide du véhicule de masse  $m_v$  et la rotation  $\theta_v$  (tangage) bloc rigide autour du centre de gravité  $G$ .



**Figure 4.5 :** Modèle mathématique dalle-véhicule 2 ddl.

Les équations du mouvement du modèle de véhicule sont obtenues en utilisant le principe d'équilibre dynamique de forces et des moments du bloc rigide (fig. 4.6).



**Figure 4.6 :** schéma d'équilibre dynamique des forces et des moments.

Les forces d'interaction dalle-véhicule dans les pneus sont :

$$F_{pi}^{int} = k_{pi} (z_{vi} - (w_i + r_i)) + c_{pi} (\dot{z}_{vi} - (\dot{w}_i + \dot{r}_i)) ; \quad i=1,2 \quad (4.7)$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$m_v \ddot{z}_v + F_{p1}^{int} + F_{p2}^{int} - m_v g = 0 \quad (4.8.1)$$

$$I_{v} \ddot{\theta}_v + F_{p2}^{int} a_2 s_1 - F_{p1}^{int} a_1 s_1 = 0 \quad (4.8.2)$$

Remplaçons les expressions (4.4) et (4.7) dans (4.8), après réarrangements et regroupement, on obtient le système suivant :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\} \quad (4.9)$$

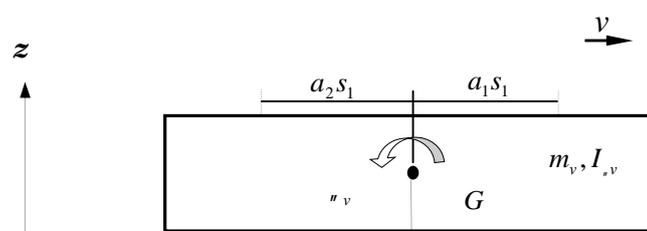
Avec  $[M_v]$ ,  $[C_v]$ ,  $[K_v]$  sont les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité respectivement,  $\{F_g\}$  est le vecteur des forces de gravité,  $\{F^{int}\}$  est le vecteur des forces d'interaction (**annexe 4**).

#### 4.4.3 Modèle à quatre degrés de liberté

Le modèle de véhicule à 4ddl est présenté sur la figure 4.7. Les ddl sont :

- $\theta_v$  : Tangage du bloc rigide ;
- $z_v$  : Bondissement du bloc rigide ;
- $z_1, z_2$  : Sautillage des essieux de l'avant et de l'arrière respectivement.

Avec  $m_1$  et  $m_2$  sont les masses des roues avec essieux de l'avant et de l'arrière respectivement.

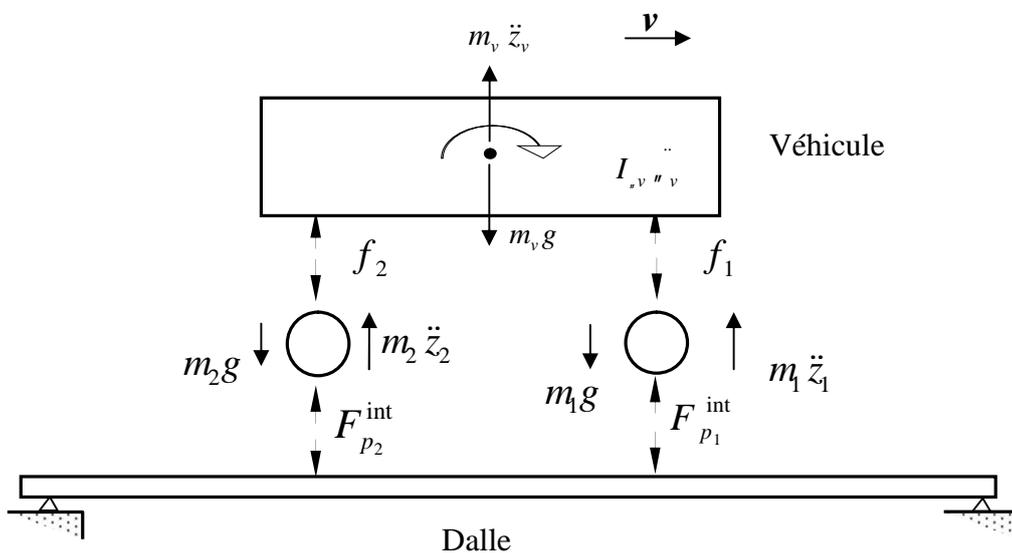


**Figure 4.7 :** Modèle mathématique dalle/véhicule 4ddl.

On peut utiliser le déplacement et la rotation du bloc rigide  $\ddot{z}_v, \dot{\theta}_v$  ou bien les déplacements  $z_{v1}$  et  $z_{v2}$  dans la formulation des équations du mouvement, le vecteur des ddl s'écrit alors :

$$\{z_v\} = \{z_1 \quad z_2 \quad z_{v1} \quad z_{v2}\}^T \quad (4.10)$$

La figure 4.8, montre le schéma d'équilibre des forces et des moments du modèle à 4 ddl.



**Figure 4.8 :** Equilibre dynamique des forces et des moments du modèle de véhicule à 4ddl.

Les forces dans les suspensions du véhicule sont :

$$f_i = k_{si}(z_i - z_{vi}) + c_{si}(\dot{z}_i - \dot{z}_{vi}); \quad i=1,2 \quad (4.11)$$

Les forces d'interactions  $F_{p1}^{int}$  et  $F_{p2}^{int}$  sont données par l'expression (4.7). Appliquons le principe d'équilibre dynamique pour chaque degré de liberté, on obtient :

- Pour  $z_v$  :  $+m_v \ddot{z}_v + f_1 + f_2 - m_v g = 0$
  - Pour  $z_v$  :  $+I_{s,v} \ddot{\theta}_v + a_2 s_1 f_2 - a_1 s_1 f_1 = 0$
  - Pour  $z_1$  :  $+m_1 \ddot{z}_1 - f_1 + F_{p1}^{int} - m_1 g = 0$
- (4.12)
- Pour  $z_2$  :  $+m_2 \ddot{z}_2 - f_2 + F_{p2}^{int} - m_2 g = 0$

Remplaçons (4.4), (4.7) et (4.11) dans (4.12), après réarrangement et regroupement, on obtient :

Pour  $z_1$  :

$$m_1 \ddot{z}_1 + (k_{s1} + k_{p1}) z_1 - k_{s1} z_{v1} + (c_{s1} + c_{p1}) \dot{z}_1 - c_{s1} \dot{z}_{v1} = +m_1 g + k_{p1} [w_1 + r_1] + c_{p1} [\dot{w}_1 + \dot{r}_1]$$

Pour  $z_2$  :

$$m_2 \ddot{z}_2 + (k_{s2} + k_{p2}) z_2 - k_{s2} z_{v2} + (c_{s2} + c_{p2}) \dot{z}_2 - c_{s2} \dot{z}_{v2} = +m_2 g + k_{p2} [w_2 + r_2] + c_{p2} [\dot{w}_2 + \dot{r}_2]$$

Pour  $z_{v1}$  :

$$-k_{s1} z_1 + k_{s1} z_{v1} - c_{s1} \dot{z}_1 + c_{s1} \dot{z}_{v1} + \ddot{z}_{v1} \left[ m_v a_2^2 + m_v \frac{h^2}{s_1^2} + \frac{I_{s,v}}{s_1^2} \right] + \ddot{z}_{v2} \left[ m_v a_1 a_2 - m_v \frac{h^2}{s_1^2} - \frac{I_{s,v}}{s_1^2} \right] = +a_2 m_v g$$

Pour  $z_{v2}$  :

$$-k_{s2} z_2 + k_{s2} z_{v2} - c_{s2} \dot{z}_2 + c_{s2} \dot{z}_{v2} + \ddot{z}_{v1} \left[ m_v a_1 a_2 - m_v \frac{h^2}{s_1^2} - \frac{I_{s,v}}{s_1^2} \right] + \ddot{z}_{v2} \left[ m_v a_1^2 + m_v \frac{h^2}{s_1^2} + \frac{I_{s,v}}{s_1^2} \right] = +a_1 m_v g$$

(4.13)

Sous forme matricielle ; les équations (4.13) prenant la forme :

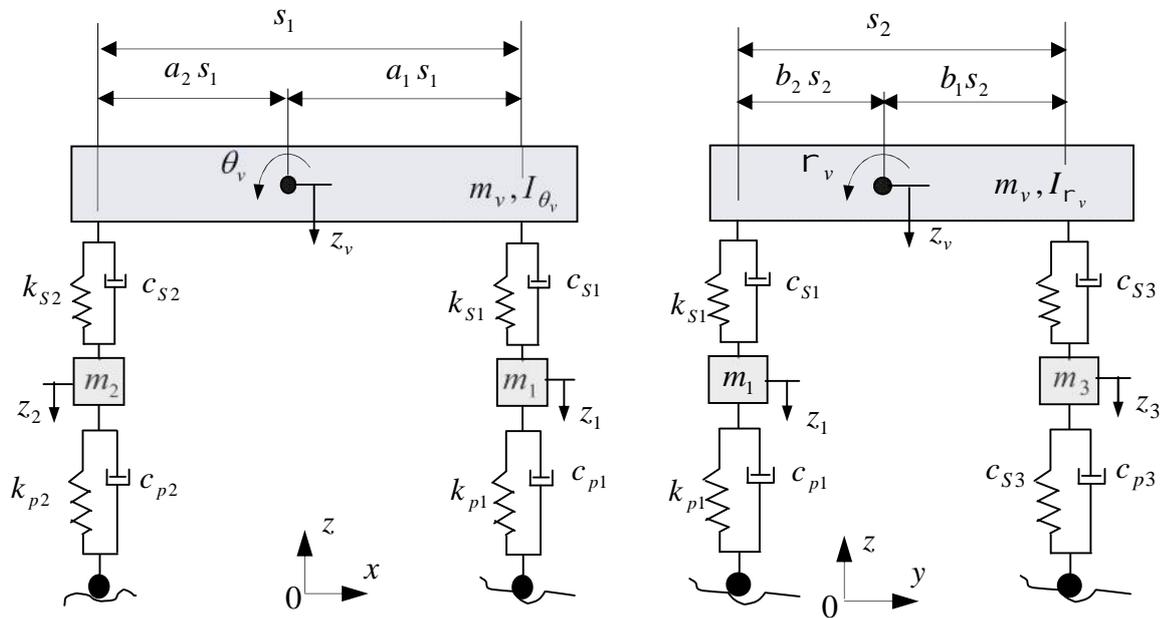
$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\} \quad (4.14)$$

Les expressions des différents matrices et vecteurs sont présentées dans l'**annexe 4**.

#### 4.4.4 Modèle à sept degrés de liberté

Ce modèle est une extension du modèle à 4 DDL vers la deuxième dimension (Fig.4.9). La détermination des équations du mouvement de ce modèle se fait de la

même manière que précédemment et ont la même forme (4.14). Les expressions des différents matrices et vecteurs sont présentés dans l'annexe 4.



**Figure 4.9** : Modèle tridimensionnel du véhicule à 7 D.D.L

Avec :

$$\begin{cases} \{Z_v\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_{v1}, z_{v2}, z_{v3}\}^T \\ n_v = \frac{z_{v2} - z_{v1}}{s_1} \quad ; \quad r_v = \frac{z_{v2} - z_{v4}}{s_2} \\ z_v = a_2 z_{v1} + (a_1 - b_2) z_{v2} + b_2 z_{v4} \end{cases}$$

#### 4.5. Profil de la chaussée

Le profil de la chaussée est l'interface entre le véhicule et la dalle de roulement. Cet élément joue un rôle important dans l'interaction dynamique entre les dalles de roulement et les véhicules mobiles, car il perturbe le mouvement vertical du véhicule et à degré inférieur, le mouvement de la dalle d'une manière importante. Le profil statique de la chaussée est modélisé dans la littérature par une densité spectrale de puissance (DSP) en respectant la qualité de la chaussée [16] :

$$r(x_k) = \sum_{i=1}^N \sqrt{4A_r \left( \frac{2fi}{L_c \check{S}_{s0}} \right)^{-2} \frac{2f}{L_c} \cos(\check{S}_{si} x_k + \theta_i)} \quad , k=1, \dots, npc \quad (4.15)$$

Avec  $A_r$  est un coefficient de rugosité spectral qui caractérise l'état de la haussée,  $L_c$  s'appel la longueur d'échantillonnage en général égale à  $2l$  ( $l$  est la longueur de la dalle),  $\omega_{s0}$  est la pulsation de discontinuité ( $\omega_{s0} = 1/2\pi$ ),  $\omega_{si}$  est le nombre d'onde ( $\omega_{si} = 2\pi i/L_c$ ),  $\theta_i$  est un variable aléatoire qui varie entre 0 et  $2\pi$ ,  $N$  est le nombre de points de discrétisation fréquentielle,  $npc$  est le nombre de points de contact.

#### 4.6. Dalle de roulement

La dalle de roulement est modélisée par une plaque mince isotrope, simple sur deux appuis et libre sur les deux autres appuis (voir chapitre 2). La résolution de l'équation du mouvement de la dalle de roulement s'effectuée par la méthode modale (voir chapitres 2 et 3). L'équation modale ainsi obtenu est donnée par (2.27) :

$$\ddot{q}_{ij} + 2\zeta_{ij} \check{S}_{ij} \dot{q}_{ij} + \check{S}_{ij}^2 q_{ij} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij} \quad (4.16)$$

Avec les forces modales  $F_{ij}$  s'écrivent :

$$F_{ij} = - \sum_{k=1}^{npc} F_{pk}^{int} W_{ij}(x_k, y_k) \quad (4.17)$$

#### 4.7. Résolution des équations de mouvement

Pour résoudre les équations de mouvement couplées (4.9) ou (4.14), nous utilisons la méthode de Newmark (**annexe 3**). Le système d'équation du mouvement du véhicule (4.9), à l'instant  $t + \Delta t$  s'écrit :

$$[M_v] \left\{ \ddot{z}_v \right\}_{t+\Delta t} + [C_v] \left\{ \dot{z}_v \right\}_{t+\Delta t} + [K_v] \left\{ z_v \right\}_{t+\Delta t} = \left\{ F_g \right\} \left\{ F^{int} \right\}_{t+\Delta t} \quad (4.18)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses au temps  $t + \Delta t$ . Sont respectivement :

$$\begin{aligned} \left\{ z_v \right\}_{t+\Delta t} &= \left\{ z_v \right\}_t + \Delta t \left\{ \dot{z}_v \right\}_t + \Delta t^2 (0.5 - S) \left\{ \ddot{z}_v \right\}_t + S \Delta t^2 \left\{ \ddot{z}_v \right\}_{t+\Delta t} \\ \left\{ \dot{z}_v \right\}_{t+\Delta t} &= \left\{ \dot{z}_v \right\}_t + (1 - X) \Delta t \left\{ \ddot{z}_v \right\}_t + X \Delta t \left\{ \ddot{z}_v \right\}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Avec  $X$  et  $S$  sont les paramètres de stabilisé de la méthode de Newmark (voir annexe 4).

Remplaçons les expressions (4.19) dans (4.18), après factorisation et réarrangement, on obtient :

$$[S_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{F_g\} + \{F^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (4.20)$$

Avec :

$$\begin{aligned} [S_v] &= [M_v] + \alpha \Delta t [C_v] + s \Delta t^2 [K_v] \\ \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{Z}_v\}_t + (1-\alpha) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t \\ \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} &= \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5-s) \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t \end{aligned} \quad (4.21)$$

De même, l'équation du mouvement du pont (4.16), à l'instant  $t+\Delta t$  s'écrit :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + 2\alpha_{ij} \ddot{S}_{ij} \dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + \ddot{S}_{ij}^2 q_{ij}^{(t+\Delta t)} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (4.22)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses généralisés du pont, à l'instant  $t+\Delta t$  sont:

$$q_{ij}^{(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + \Delta t^2 (0,5-s) \ddot{q}_{ij}^{(t)} + s \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (4.23)$$

$$\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1-\alpha) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \alpha \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (4.24)$$

Remplaçons les expressions (4.23) et (4.24) dans l'équation (4.22), on obtient :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \left( \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} - 2\alpha_{ij} \ddot{S}_{ij} \dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} - \ddot{S}_{ij}^2 q_{ij}^{(t+\Delta t)} \right) / \left( 1 + 2\Delta t \alpha_{ij} \ddot{S}_{ij} + s \Delta t^2 \ddot{S}_{ij}^2 \right) \quad (4.25)$$

Avec :

$$\begin{aligned} q_{ij}^{*(t+\Delta t)} &= q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5-s) \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)} \\ \dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} &= \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1-\alpha) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

#### 4.8. Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution comprend deux boucles. La première boucle est celle des pas du temps et la seconde correspond aux itérations. On calcule les déplacements et les vitesses de la dalle du pont et du véhicule, en utilisant les expressions (4.19) et (4.23). On fait une approximation des déplacements, vitesses et accélérations de la dalle et du véhicule à partir de l'itération précédente ( $\bar{k}$ ), puis on calcul les forces d'interaction en chaque point de contact puis on résout l'équation de mouvement du véhicule (4.20) par la méthode de Newmark. On calcule par la suite le vecteur des forces d'interaction qui agissent sur la dalle du pont en chaque point de contact. On résout par la méthode de

Newmark, l'équation modale (4.22) de la dalle de roulement puis on fait un test de convergence entre le déplacement vertical du pont  $w^{(\bar{k}+1)}$  de l'itération  $(\bar{k} + 1)$  et  $w^{(\bar{k})}$  de l'itération précédente :

$$\left| w^{(\bar{k}+1)}(x, y, t) - w^{(\bar{k})}(x, y, t) \right| \leq v$$

Si cette condition est vérifiée, on calcule les paramètres dynamiques voulus, puis on passe au pas du temps suivant, Si non, on passe à l'itération suivante telle que le déplacement  $w^{(\bar{k}+1)}(x, y, t)$  devient une approximation de l'itération prochaine et on refait le calcul jusqu'à la convergence.

Lecture des données de la dalle de roulement du pont

Lecture des données du véhicule

Lecture des données de la chaussée

Calcul de :  $D, \bar{m}$

Choix du nombre de modes:  $n, m$

Lecture des fréquences  $\tilde{S}_{ij}$  calculées par MATHEMATICA

Calcul des modes propres  $W_{ij}$

Choix de la vitesse de roulement:  $v$

Choix du pas de temps  $\Delta t$ , des paramètres  $\chi, S$ , et de la tolérance  $v$

Calcul des matrices des masses, des rigidités et des amortissements modaux

Du pont :  $M_{ij}, K_{ij}, C_{ij}$

Calcul des matrices de masse, de rigidité et de l'amortissement

Du model véhicule:  $[M_v], [C_v], [K_v]$

Choix des conditions initiales pour le pont :  $q_{ij}^{(0)}, \dot{q}_{ij}^{(0)}, \ddot{q}_{ij}^{(0)}$

Choix des conditions initiales pour le véhicule :  $\{Z_v\}_0, \{\dot{Z}_v\}_0, \{\ddot{Z}_v\}_0$

Choix de cheminement du véhicule sur la dalle de roulement du pont

Pour chaque pas du temps  $t = t + \Delta t$  :

Détermination de la position longitudinale du véhicule sur le pont :  $x_k = v t_k$

Calcul du profile de la route en chaque point de contact  $k$  :  $r_k, r'_k$

Approximation des déplacements, vitesses et accélérations de la dalle de roulement du pont et du véhicule à partir de l'itération précédente

$$\{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - S) \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t; \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \chi) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t$$

$$q_{ij}^{*(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5 - S) \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)}; \dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \chi) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)}$$

Pour chaque itération:  $\bar{k} = \bar{k} + 1$

Calcul en chaque point de contact  $k$  :  $w_k, \dot{w}_k, \dot{r}_k$

Calcul des forces d'interaction  $F_k^{int} = k_{pk} (w_k + r_k) + c_{pk} (\dot{w}_k + \dot{r}_k)$

Calcul du vecteur  $\{F^{int}\}$

Calcul du vecteur des forces dues aux effets de la gravité :  $\{F_g\}$

Résolution (Newmark) :  $[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$



## Chapitre 5

### Résultats et interprétations

#### 5.1. Exemple de validation

Dans cet exemple, nous présentons les fréquences et les modes propres d'une plaque mince, appuyée sur deux bords et libre sur les deux autres bords (SLSL). Les données de cette plaque sont les suivantes [20] :  $l = 0.6$  m,  $b = 0.4$  m,  $h = 0.001$  m,  $E = 2.1 \times 10^{11}$  N/m,  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ . Les fréquences propres de la plaque  $\check{S}_{ij}$  sont calculées en deux étapes :

- Pour chaque valeur de l'indice  $i$ , on trace l'équation aux fréquences (2.20), en utilisant le logiciel Mathematica version 6, on détermine alors une infinité de solutions  $r_{1ij}$  ou  $r_{2ij}$ . On calcule les paramètres de fréquences  $S_{ij}$ , en utilisant les expressions (2.10.1) ou bien (2.10.2). Sur la figure (5.1), on présente le graphe de l'équation aux fréquences (2.20), pour différentes valeurs de  $i$ .
- On calcule les fréquences propres de la plaque  $f_{ij}$  en utilisant l'expression suivante :

$$f_{ij} = \frac{S_{ij}^2}{2f} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{S_{ij}^2}{2f} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

Le tableau 5.1 montre une comparaison des six premières fréquences propres de la plaque, calculées par l'approche modale (utilisée dans la présente étude), par l'expression de Blevins [21]<sup>1</sup> et celles calculées par la méthode de Rayleigh-Ritz [20]. Une excellente concordance entre les fréquences est observée surtout celles calculées par l'approche modale et la formule de Blevins (parfaite coïncidence). Une légère dispersion est observée entre les fréquences calculées par l'approche modale et celles calculées par la méthode de Rayleigh-Ritz.

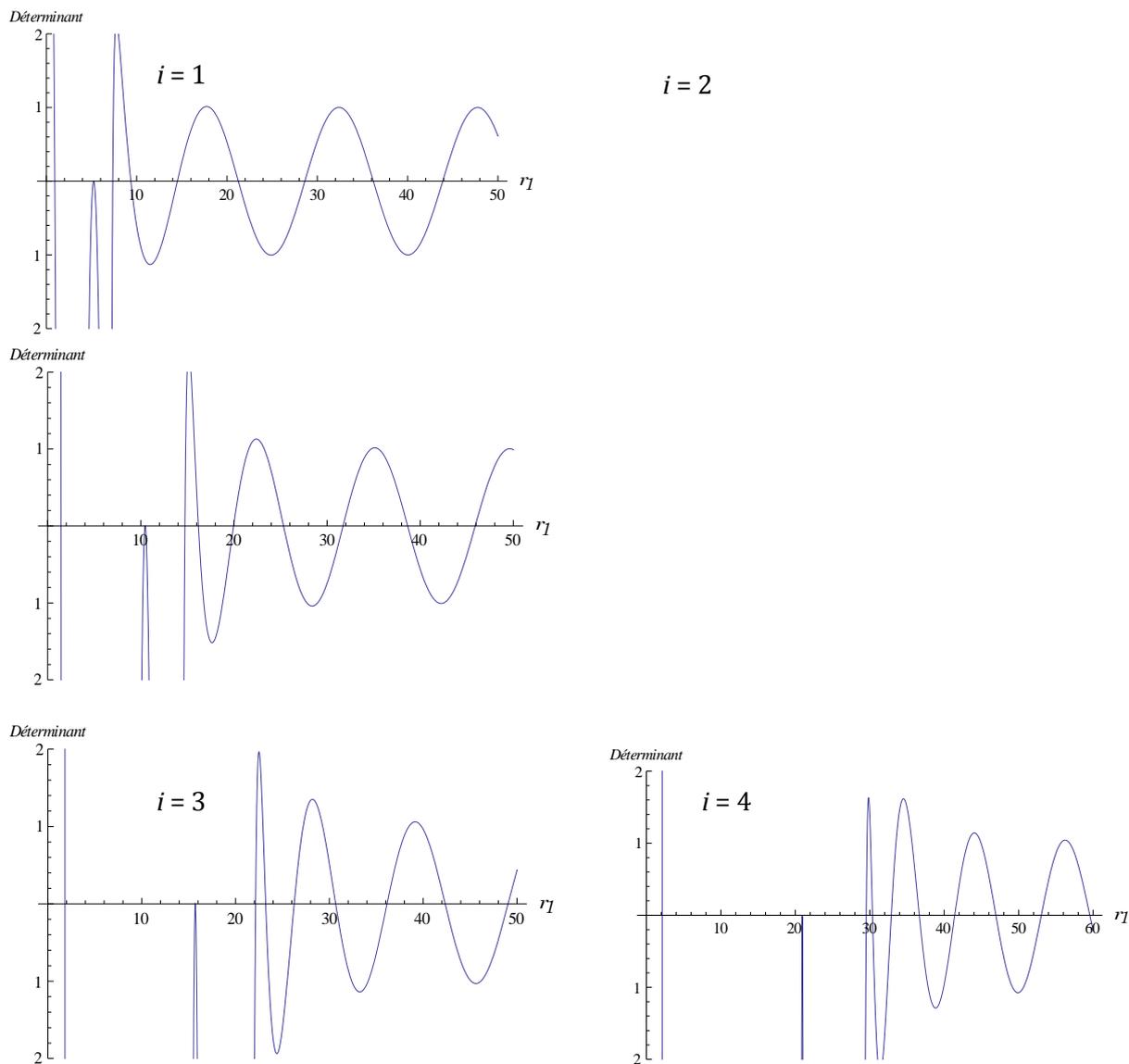
---

<sup>2</sup> Expression de Blevins :  $f_{ij} = \frac{\check{S}_{ij}}{2fl^2} \left( \frac{Eh^3}{12\rho(1-\nu^2)} \right)^{1/2}$

$\check{S}_{ij}$  : Paramètre de fréquence sans dimension, qui dépend des conditions aux limites et du rapport  $l/b$ .

$l/b = 0.5 \quad \lambda_{11} = 9.559 ; \lambda_{12} = 21.62 ; \lambda_{21} = 38.72 ; \lambda_{22} = 54.84 ; \lambda_{13} = 65.79 ; \lambda_{31} = 87.63$



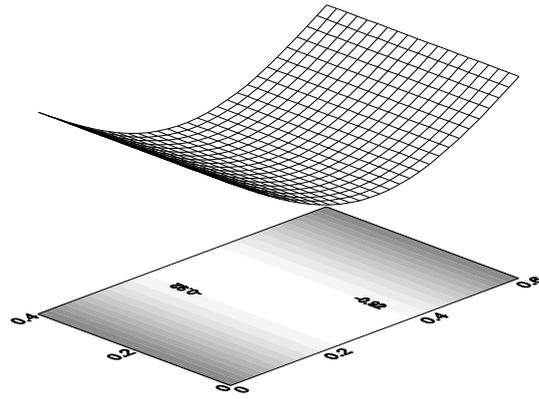


**Figure 5.1.** : Graphes de l'équation aux fréquences (2.20) pour différentes valeurs de  $i$ .

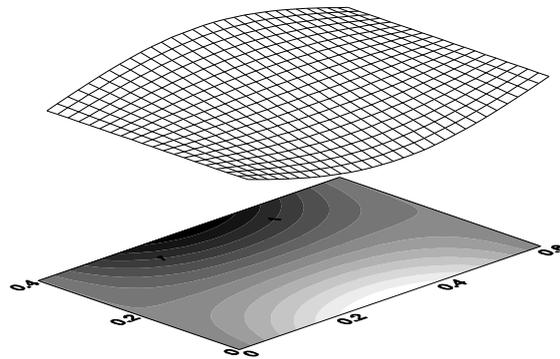
**Tableau 5.1:** Comparaison entre les six premières fréquences propres de la plaque

Mode	Ordre des Fréquences	Fréquences [Hz]		
		Blevins [21]	Réf. [20]	Approche modale
1	1,1	6.63	6.92	<b>6.63</b>
2	1,2	15.01	15.05	<b>15.01</b>
3	2,1	26.88	27.36	<b>26.88</b>
4	2,2	38.07	38.34	<b>38.07</b>
5	1,3	45.67	46.67	<b>45.67</b>
6	3,1	60.83	61.62	<b>60.83</b>

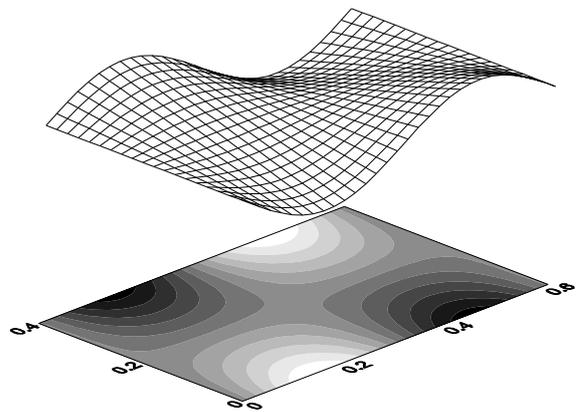
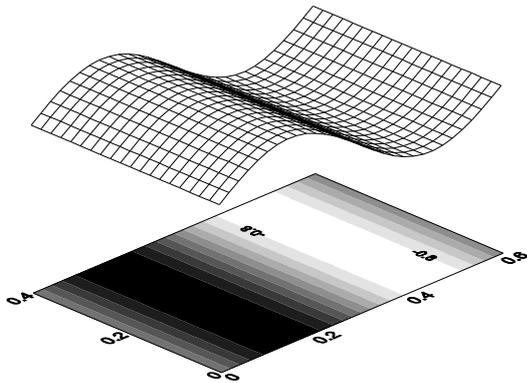
Les six déformées propres de la plaque sont présentées dans la figure 5.2. Les modes sont définis par un double indice selon  $x$  et  $y$ . Le mode 1 est le mode de plus basse fréquence propre. Tous les points de la plaque vibrent en phase sur ce mode. Le mode deux est le deuxième en fréquence qui présente une ligne nodale pour  $y = b/2$ . Les vibrations s'effectuent en opposition de phase de part et d'autre de la ligne nodale. Le mode quatre en fréquence présente une ligne nodale suivant  $x$  en  $l/2$ , et une ligne nodale suivant  $y$  en  $b/2$ . Le passage d'une ligne nodale implique des vibrations en opposition de phase.



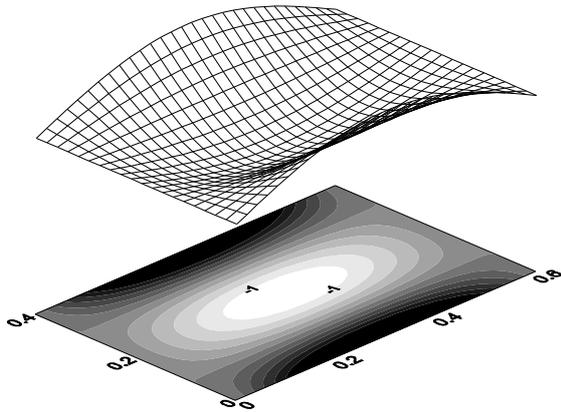
Mode 1 : flexion longitudinale,  $f_1 = 6.63$  Hz



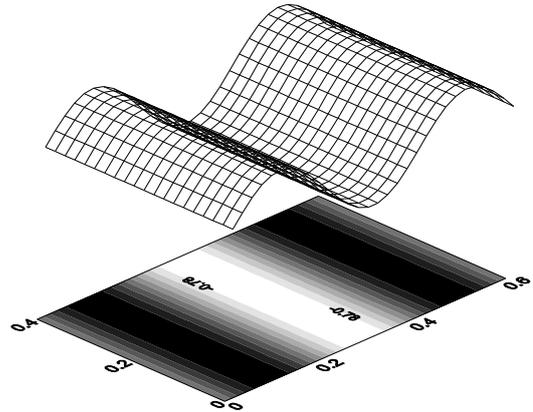
Mode 2 : torsion,  $f_2 = 15.05$  Hz



Mode 3 : flexion longitudinale,  $f_3 = 26.88$  Hz



Mode 4 : torsion,  $f_4 = 38.07$  Hz



Mode 5 : flexion transversale,  $f_5 = 45.67$  Hz

Mode 6 : flexion longitudinale,  $f_6 = 60.83$  Hz

**Figure 5.2 :** Six premiers modes propres de la plaque associés à leurs fréquences propres

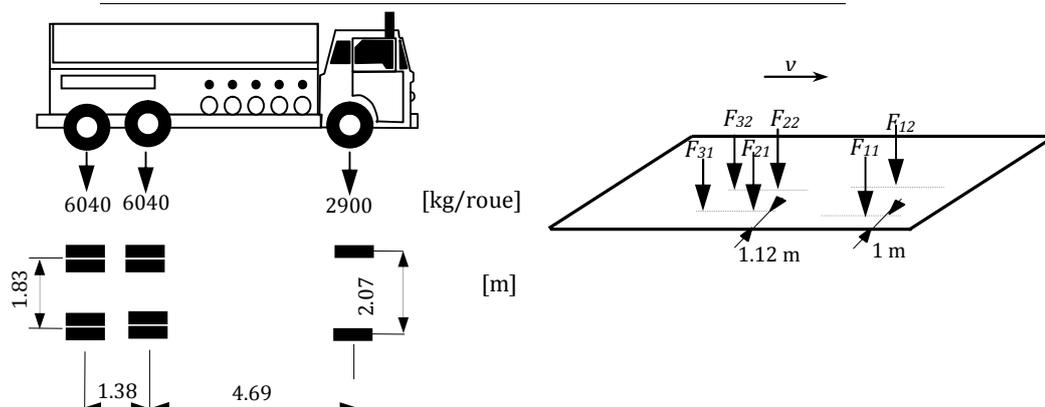
## 5.2. Application à une dalle de roulement

### 5.2.1. Cas de deux convois de forces mobiles

Dans cet exemple, nous étudions le comportement dynamique d'une dalle de roulement en béton non amortie, sous la sollicitation d'un véhicule. Ce dernier est modélisé par deux convois de forces mobiles (Fig. 5.3), conformément à la modélisation présentée dans le chapitre 2. Les données de la dalle de roulement et du chargement sont regroupées dans le tableau 5.2 [17] :

**Tableau 5.2 :** Données du chargement et de la dalle de roulement

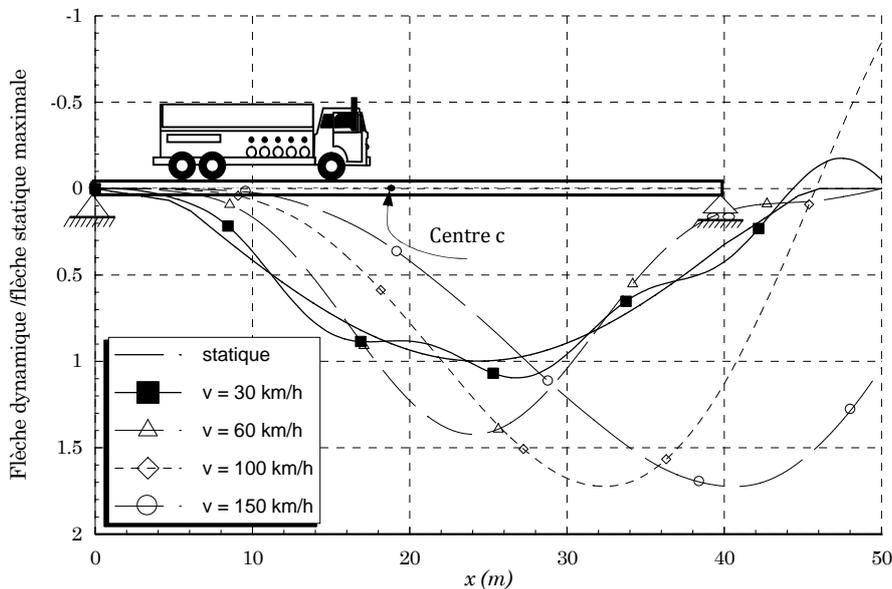
Données de la dalle	Données du chargement
$E = 3 \times 10^{10}$ N/m <sup>2</sup>	$F_{11} = F_{12} = 28449$ N
$\rho = 3500$ kg/m <sup>3</sup>	$F_{21} = F_{22} = 59252.4$ N
$\nu = 0.2$	$F_{31} = F_{32} = 59252.4$ N
$h = 0.8$ m	
$b = 8$ m	
$l = 40$ m	



**Figure 5.3 :** Modélisation du véhicule par deux convois de forces mobiles

Les dix premières fréquences propres de la dalle de roulement en [Hz] sont : 0.664 ; 2.664 ; 4.770 ; 6.011 ; 9.809 ; 10.710 ; 15.368 ; 16.768 ; 21.660 ; 24.180. Pour voir l'influence de la vitesse de roulement des forces mobiles sur la réponse dynamique, la dalle de roulement est excitée par un véhicule modélisé par deux convois de forces mobiles :  $F_{11} = F_{12} = 28449 \text{ N}$ ,  $F_{21} = F_{22} = F_{31} = F_{32} = 59252.4 \text{ N}$ , comme montre le tableau 5.2 et la figure 5.3. Le véhicule emprunte la dalle de roulement selon la trajectoire de coordonnées :  $y_{11} = 1\text{m}$ ,  $y_{21} = y_{31} = 1.12 \text{ m}$ ,  $y_{12} = 3.07 \text{ m}$  et  $y_{22} = y_{32} = 2.95 \text{ m}$ .

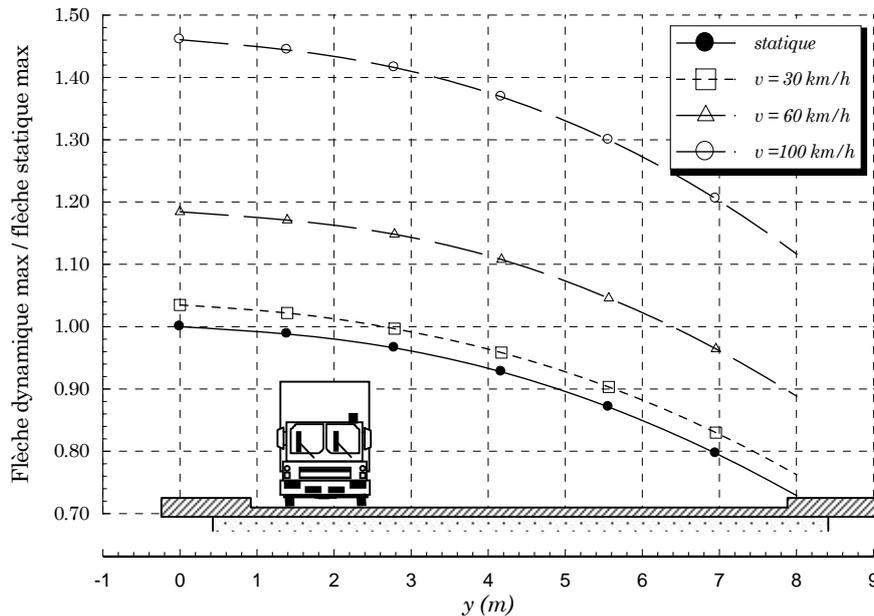
L'influence de la vitesse de roulement et l'effet de l'excentricité du véhicule sont présentés sur les figures 5.4 et 5.5 respectivement. Sur la figure 5.4, le déplacement vertical de la dalle de roulement est calculé à son centre  $c$ , alors que pour la figure 5.5, la flèche statique et la flèche dynamique maximales sont calculées dans la section transversale au milieu de la dalle de roulement. On constate que pour une vitesse de roulement très faible, la réponse dynamique tend vers la flèche statique. Le FAD, qui est le rapport entre la flèche dynamique max sur la flèche statique max, augmente progressivement avec l'augmentation de la vitesse jusqu'à 100 km/h environ, puis diminue.



**Figure 5.4 :** Flèche dynamique/flèche statique maximale au centre  $c$  de la dalle de roulement en fonction de la distance parcourue par le premier essieu et pour différentes vitesses de passage du véhicule

La figure 5.5, montre la variation du FAD dans la section transversale médiane de la dalle de roulement pour plusieurs vitesses de roulements du véhicule. Le chargement

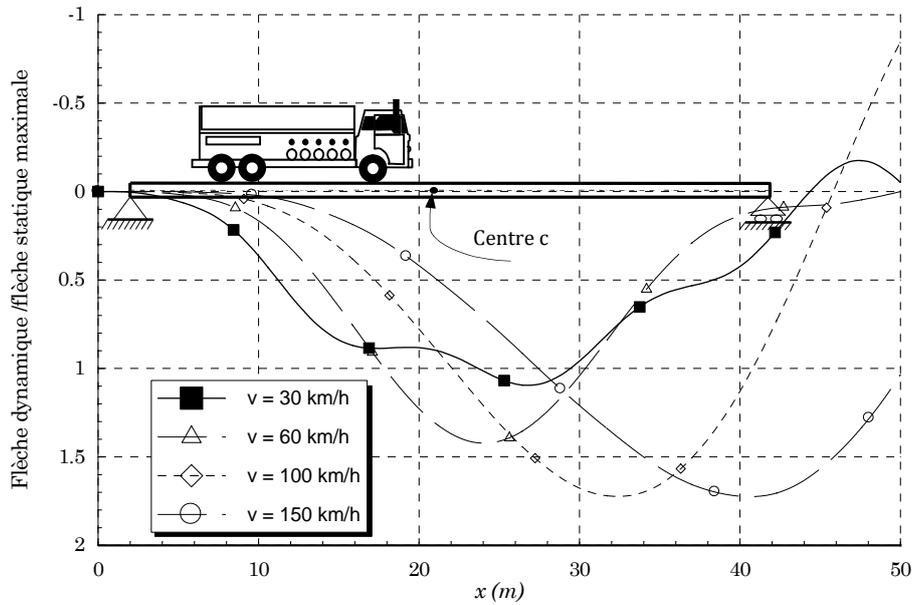
étant excentrique. On constate que le FAD est élevé près du chargement, alors qu'il est faible loin du chargement. Il augmente en fonction de l'augmentation de la vitesse.



**Figure 5.5 :** Flèche dynamique/Flèche statique maximales à la section centrale médiane de la dalle de roulement

### 5.2.2. Cas de deux convois de masse mobiles

Le véhicule de la figure 5.3 est modélisé par deux convois de masses mobiles :  $M_{11} = M_{12} = 2900$  Kg,  $M_{21} = M_{22} = M_{31} = M_{32} = 6040$  Kg. Les positions de ces masses selon  $y$  sont les mêmes que pour le cas des forces :  $y_{11} = 1$  m,  $y_{12} = 3.07$  m,  $y_{21} = y_{31} = 1.12$  m,  $y_{22} = y_{32} = 2.95$  m. Le rapport entre la masse totale du véhicule et la masse de la dalle de roulement est noté  $r_m = 29960/896000 = 0.033$ . La figure 5.6 montre l'influence de la vitesse de roulement du véhicule sur la réponse dynamique au centre de la dalle. La comparaison entre cette figure et la figure 5.4 montre que si le rapport  $r_m$  est très faible, les masses mobiles peuvent simplement être modélisées par des forces mobiles équivalentes.



**Figure 5.6 :** Variation de la réponse dynamique au centre  $c$  de la dalle de roulement en fonction de la distance parcourue et de la vitesse de passage du véhicule,  $r_m = 0.033$ .

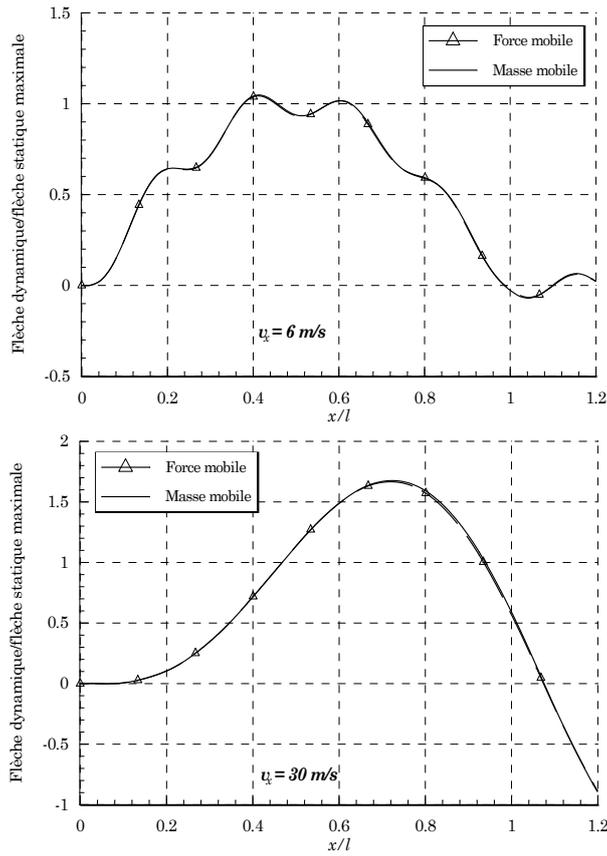
### 5.2.3. Etude comparative entre masse et force mobiles

Dans cet exemple, nous avons fait une étude comparative entre la réponse dynamique au milieu de la dalle de roulement sous les sollicitations de :

- masse mobile  $M$ ;
- force mobile équivalent à la masse ( $F = Mg$ ).

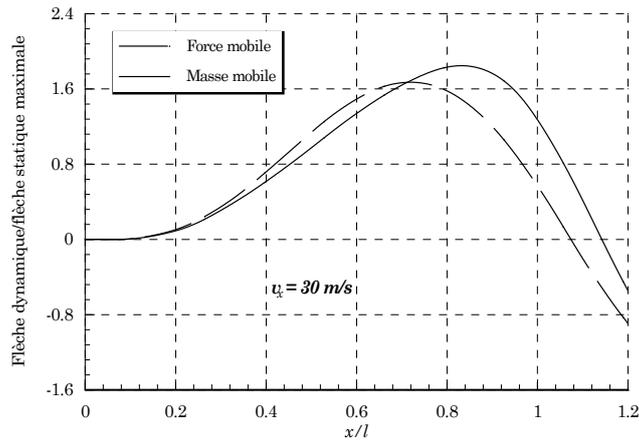
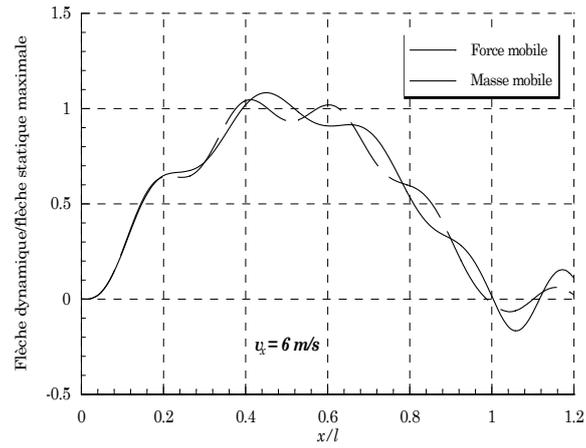
L'objectif est d'étudier les effets d'inertie de la masse mobile sur la réponse dynamique de la dalle. Pour cela, nous avons examiné trois cas du rapport  $r_m$  de la masse mobile  $M$  par la masse totale de la dalle  $m_d$ .

**1<sup>er</sup> Cas :**  $r_m = M/m_d = 5096.84/896000 = 0.006 \rightarrow F = Mg = 50 \text{ KN}$



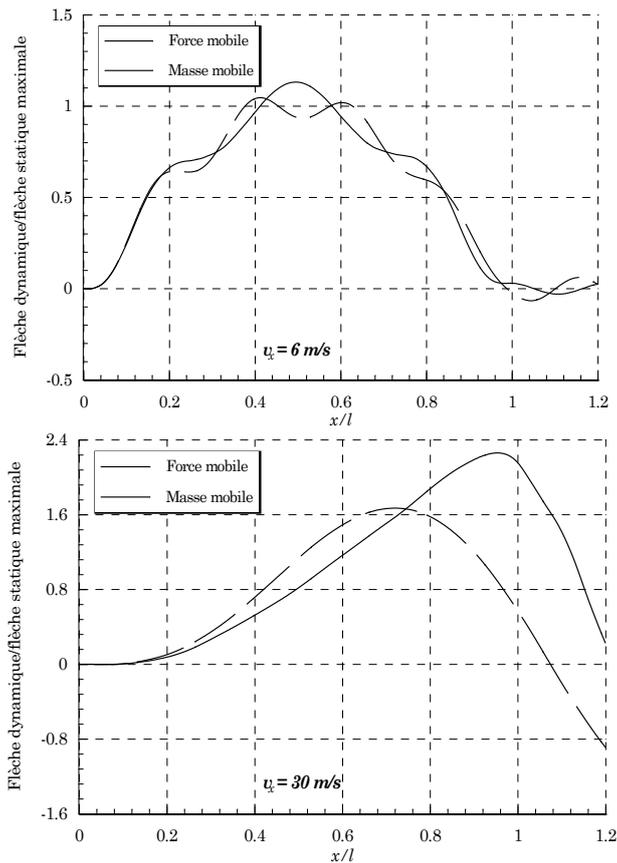
**Figure 5.7 :** Effet d'inertie de la masse mobile sur la réponse dynamique au centre de la dalle,  
 $r_m = 0.006$

**2<sup>ème</sup> Cas :**  $r_m = M/m_d = 179200/896000 = 0.2 \rightarrow F = Mg = 1757.95 \text{ KN}$



**Figure 5.8** : Effet d'inertie de la masse mobile sur la réponse dynamique au centre de la dalle,  
 $r_m = 0.2$

**3<sup>ème</sup> Cas** :  $r_m = M/m_d = 448000/896000 = 0.5$  et  $F = Mg = 4394.88$  KN



**Figure 5.9 :** Effet d'inertie de la masse mobile sur la réponse dynamique au centre de la dalle,  
 $r_m = 0.5$

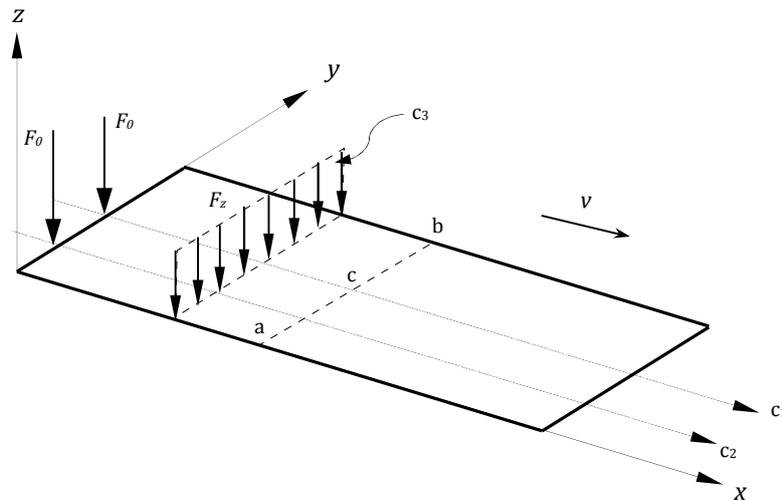
En observant les figures 5.7, 5.8 et 5.9, on constate que : si le rapport  $r_m$  est faible (figure 5.7), la différence entre les réponses de masse mobile et force mobile est très faible même à grande vitesse de roulement et le problème de masse mobile peut simplement être remplacé par une force mobile. Pour des rapports  $r_m = 0.2$  et  $0.5$ , cette différence est relativement faible à condition que la vitesse de roulement soit faible. Avec l'augmentation de la vitesse de roulement, cette différence devient très importante. Dans ce cas, l'effet d'inertie de la masse est non négligé.

#### 5.2.4. Influence du mode de chargement

Pour identifier l'influence du l'excentrement du chargement mobile sur la réponse dynamique de la dalle de roulement, nous examinons les trois cas suivants (figure 5.10):

- charge mobile ponctuelle  $F_0 = 50$  KN traversant la dalle par le cheminement centrale noté  $c_1$  ;
- charge mobile ponctuelle  $F_0 = 50$  KN traversant la dalle par le cheminement excentrique noté  $c_2$  ;

- charge mobile uniformément répartie sur la largeur de la dalle  $F_z = F_0/8 = 6.25$  KN/m, traversant la dalle par le cheminement noté  $c_3$ .



**Figure 5.10** : Différents cheminements utilisés pour la modélisation de la charge mobile.

Les déplacements statiques et dynamiques max ainsi que les FAD sont calculés dans la section médiane de la dalle de roulement aux points a, b et c (voir figure 5.10). Nous choisissons une vitesse de passage  $v = 72$  km/h. Les calculs de la simulation sont regroupés dans les tableaux suivants :

*Cheminement  $c_1$  :*

Points	$W_{sta\ max}$	$W_{dyn\ max}$	FAD
a	- 0.006543	- 0.010318	1.577
c	- 0.006464	- 0.010189	1.576
b	- 0.006482	- 0.010226	1.577

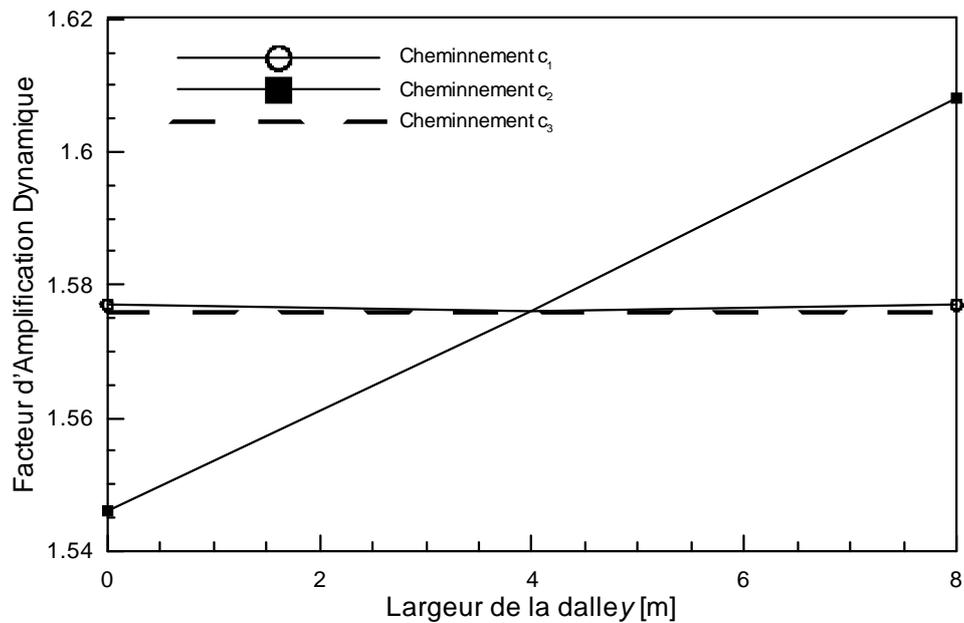
*Cheminement  $c_2$  :*

Points	$W_{sta\ max}$	$W_{dyn\ max}$	FAD
a	- 0.006929	- 0.010717	1.546
c	- 0.006512	- 0.010268	1.576
b	- 0.006241	- 0.010036	1.608

*Cheminement  $c_3$  :*

Points	$W_{sta\ max}$	$W_{dyn\ max}$	FAD
a	- 0.006527	- 0.010358	1.576
c	- 0.006479	- 0.010215	1.576
b	- 0.006511	- 0.010266	1.576

La figure 5.11 montre l'influence du mode de chargement sur le FAD dans la section médiane de la dalle de roulement. La charge excentrique  $c_2$  produit l'effet dynamique maximal contrairement aux deux autres types de chargement  $c_1$  et  $c_3$ . Le chargement  $c_3$  présente une légère différence par rapport au chargement  $c_1$ . Cela veut dire que si la largeur de la dalle de roulement n'est pas importante, par rapport sa longueur, le problème de poutre sous force mobile est identique à celui d'une plaque sous force mobile.



**Figure 5.11** : Distribution du FAD sur la section médiane de la dalle en fonction du type de chargement,  $v = 72$  km/h.

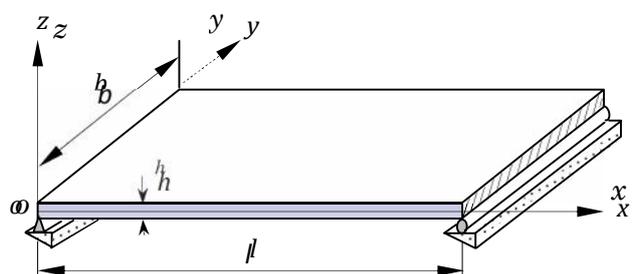
### 5.3. Cas d'un véhicule mobile à sept degrés de liberté

Sur la base de la modélisation et de l'algorithme de résolution présentés dans le chapitre 4, nous avons élaboré un programme de calcul en langage FORTRAN permettant la résolution numérique des équations du mouvement d'une manière découplée avec un processus de calcul itératif. Cette résolution est basée sur la méthode modale et la méthode d'intégration numérique de Newmark. Les données numériques de cet exemple sont issues de la référence [17]. Le véhicule est modélisé par un modèle dynamique tridimensionnel à sept degrés de liberté. Les données de la dalle de roulement ainsi que du véhicule sont les suivantes :

---

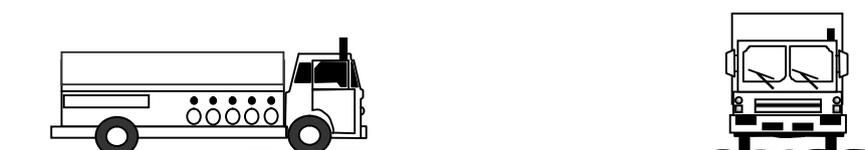
*Données de la dalle de roulement*

---



Module d'élasticité	: $E = 3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Masse volumique	: $\dots = 3500 \text{ Kg/m}^3$
Rapport de Poisson	: $\epsilon = 0.2$
Epaisseur	: $h = 0.8 \text{ m}$
Largeur	: $b = 8 \text{ m}$
Longueur	: $l = 40 \text{ m}$

**Figure 5.12** : Propriétés mécaniques et géométriques de la dalle de roulement.



*Données du véhicule à 7 degrés de liberté*

Masse du bloc rigide du véhicule	: $m_v = 1460 \text{ kg}$
Moment d'inertie de tangage	: $I_{v_v} = 1516 \text{ Nms}^2$
Moment d'inertie de roulis	: $I_{r_v} = 449 \text{ Nms}^2$
Rigidité des suspensions avant	: $k_{s1} = k_{s3} = 0.399 \times 10^6 \text{ N/m}$
Rigidité des suspensions arrière	: $k_{s2} = k_{s4} = 0.399 \times 10^6 \text{ N/m}$
Rigidité des pneus avant	: $k_{p1} = k_{p3} = 0.351 \times 10^6 \text{ N/m}$
Rigidité des pneus arrière	: $k_{p2} = k_{p4} = 0.351 \times 10^6 \text{ N/m}$
Amortissement dans les suspensions avant	: $c_{s1} = c_{s3} = 23.21 \times 10^3 \text{ Ns/m}$
Amortissement dans les suspensions arrière	: $c_{s2} = c_{s4} = 23.21 \times 10^3 \text{ Ns/m}$
Amortissement dans les pneus avant	: $c_{p1} = c_{p3} = 800 \text{ Ns/m}$
Amortissement dans les pneus arrière	: $c_{p2} = c_{p4} = 800 \text{ Ns/m}$
Masse équivalente des roues avant	: $m_1 = m_3 = 800 \text{ kg}$
Masse équivalente des roues arrière	: $m_2 = m_4 = 710 \text{ kg}$
Distance entre l'essieu avant et arrière	: $s_1 = 2.66 \text{ m}$
Distance entre les roues de chaque essieu	: $s_2 = 1.5 \text{ m}$
Hauteur du centre de gravité du véhicule	: $h = 1.2 \text{ m}$
Excentricités	: $a_1 = 0.35, a_2 = 0.65,$ $b_1 = b_2 = 0.5$

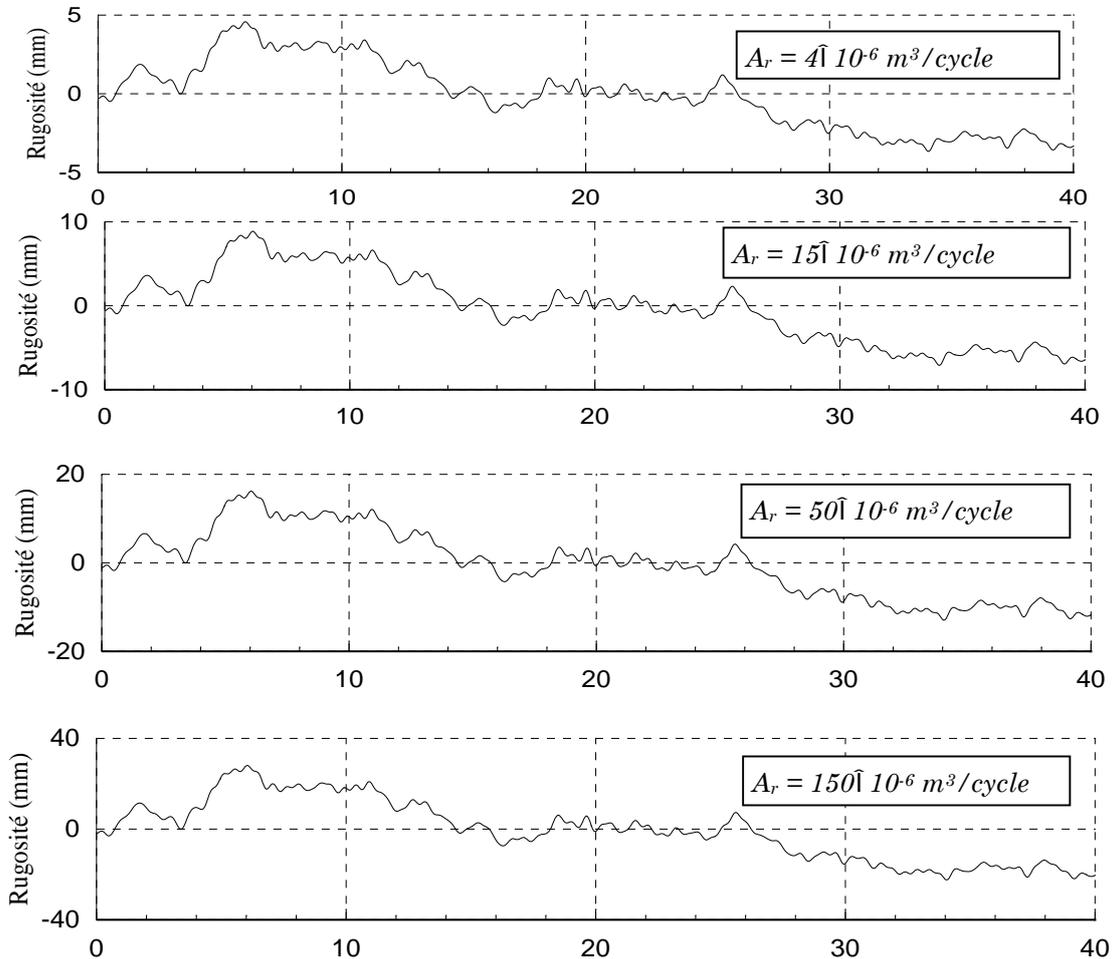
**Figure 5.13** : Propriétés du véhicule à sept degrés de liberté

Les cinq premières fréquences propres de la dalle de roulement en [Hz], calculées par l'approche modale, sont les suivantes : 0.664 ; 2.664 ; 4.770 ; 6.011 ; 9.809. Sur la base de l'expression (4.15) du profil de la route, nous présentons sur la figure 5.14, le profil aléatoire de la voie de roulement pour différentes valeurs du coefficient de rugosité spectral  $A_r$ . La génération du variable aléatoire  $\kappa$  se fait sur MATLAB. Dans le tableau 5.3, nous présentons les valeurs expérimentales de  $A_r$  en fonction de l'état de la voie de roulement [17].

**Tableau 5.3** : Valeurs expérimentales de  $A_r$ , selon l'états de la chaussée [17]

État de la surface	Très bon	Bon	Moyen	Mauvais
--------------------	----------	-----	-------	---------

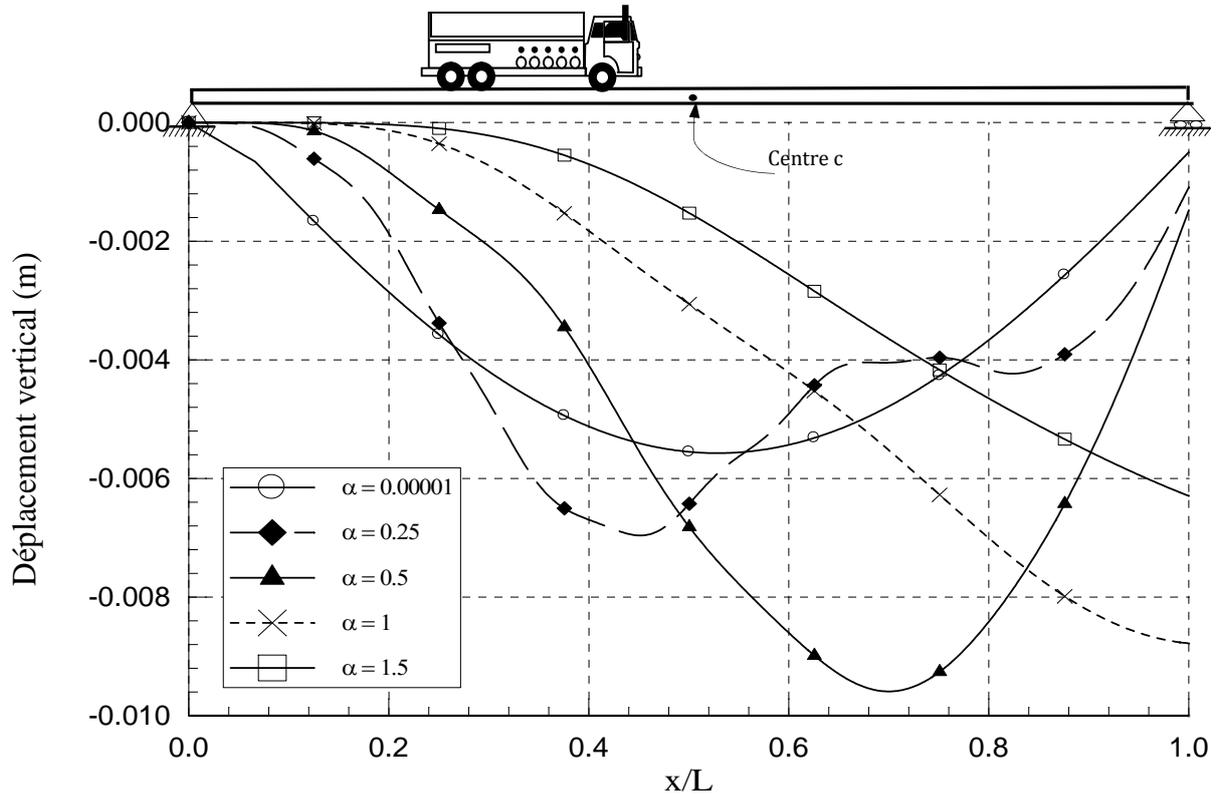
$A_r$ ( $m^3/cycle$ ) $\times 10^{-6}$	$A_r < 5$	$5 < A_r < 20$	$20 < A_r < 80$	$80 < A_r < 256$
--	-----------	----------------	-----------------	------------------



**Figure 5.14** : Profil aléatoire de la voie de roulement pour différentes valeurs du coefficient de rugosité  $A_r$ .

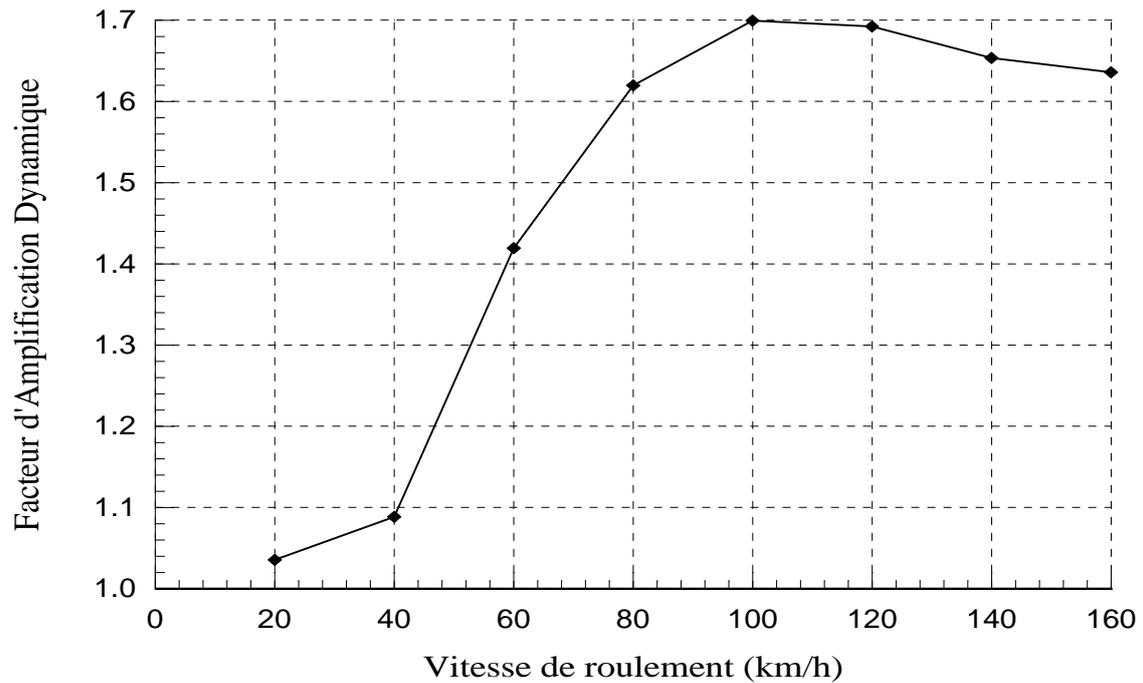
La figure 5.15 montre l'influence de la vitesse de roulement du véhicule sur la réponse dynamique au centre de la dalle. Le véhicule traverse la dalle selon le cheminement centrale ( $y_1 = y_2 = 3.25$  m,  $y_3 = y_4 = 4.75$  m). La vitesse de roulement du véhicule est présentée sous forme d'un rapport de vitesse ( $\alpha = v_x / v_{1,cr}$ ), où  $v_{1,cr}$  est la première vitesse critique de roulement du véhicule obtenue lorsque la première fréquence de passage ( $\Omega_1 = \pi v_1 / l$ ) est égale à la première fréquence propre de la dalle ( $\omega_{11} = 2\pi f_{11}$ ). Dans ce cas, on a montré que  $v_{1,cr} = 2lf_{11}$ . Lorsque la vitesse de roulement égale la première vitesse critique du passage ( $v_x = v_{1,cr}$ ), la fréquence du passage égale

deux fois la première fréquence propre de la dalle  $f_1^* = 2f_{11}$ . Les différentes valeurs du rapport de vitesse utilisés sont  $\alpha = 10^{-5}$ , 0.25, 0.5, 1 et 1.5. D'après cette figure, on constate que pour une vitesse très faible ( $\alpha = 10^{-5}$ ), la réponse dynamique au centre de la dalle tend vers la flèche statique. Avec l'augmentation de la vitesse, le déplacement vertical au centre de la dalle augmente jusqu'à  $v_x = 0,5v_{1,cr}$  ( $\alpha = 0.5$ ) au delà de cette vitesse le déplacement diminue et se décale en amont dans le sens de roulement du véhicule.



**Figure 5.15:** Influence de la vitesse de roulement du véhicule sur la réponse dynamique au milieu de la dalle de roulement du pont

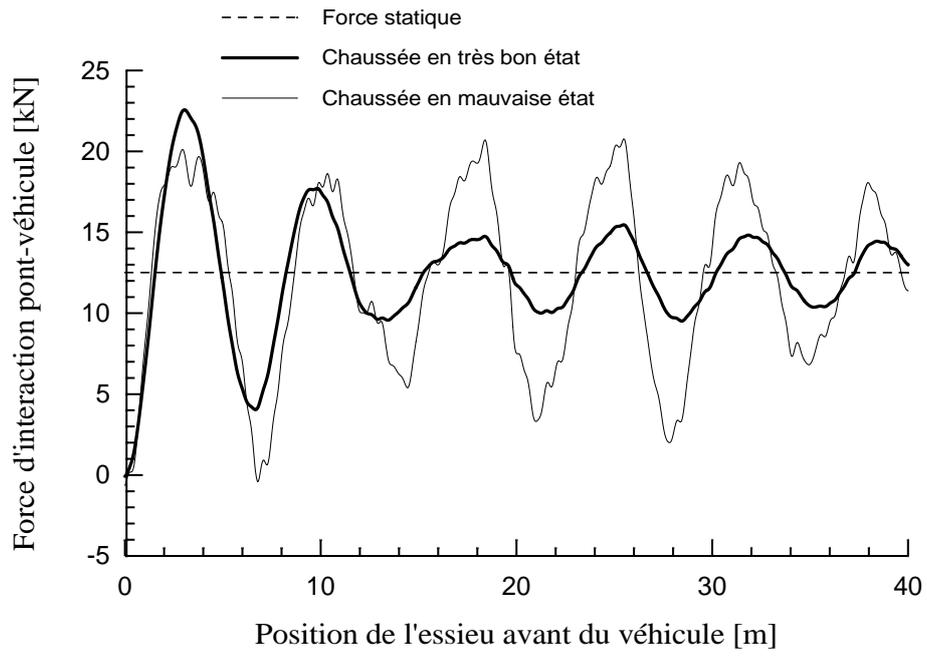
La figure 5.16 montre la variation du facteur d'amplification dynamique ( $FAD$ ) de la dalle de roulement en fonction de la vitesse de passage du véhicule. Le  $FAD$  est défini comme étant le rapport entre la réponse dynamique maximale et la réponse statique maximale dans le même point de la dalle du pont. Le facteur d'amplification dynamique est calculé à partir des déplacements verticaux au centre de la dalle. La flèche statique maximale est obtenue lorsque le véhicule traverse la dalle avec une vitesse très faible ( $\alpha = 10^{-5}$ ). Dans ce cas, la flèche statique maximale au centre de la dalle est  $w_{stmax} = 5.65$  mm. d'après cette figure on remarque que le  $FAD$  augmente avec l'augmentation de la vitesse de roulement jusqu'à la vitesse de 100 k/h ( $FAD = 1.7$ ) puis diminue.



**Figure 5.16** : Variation du facteur d'amplification dynamique en fonction de la vitesse de roulement du véhicule

La figure 5.17 montre l'influence de l'état de la chaussée sur la force d'interaction ( $F_{p1}$ ) exercée par une roue avant du véhicule sur la dalle du pont. Le véhicule roule à une vitesse de 70 km/h suivant la trajectoire centrale ( $y_1 = y_2 = 3.25$  m,  $y_3 = y_4 = 4.75$  m). Les constatations dégagées sont :

- l'augmentation des amplitudes de la force d'interaction avec la dégradation de l'état de la chaussée.
- les amplitudes de la force d'interaction varient en fonction de la position du véhicule autour d'une valeur moyenne (12.5kN) qui correspond à la force statique obtenue par une vitesse très faible et une chaussée parfaite (courbe en trait discontinu).



**Figure 5.17:** Force d'interaction exercée par une roue avant droite du véhicule.

## Annexe 1

### Détermination de la forme de la solution de l'équation modale

Pour trouver la forme de la solution de l'équation modale (1.1), nous avons utilisé la méthode du calcul opérationnel.

$$\ddot{q}_{ij} + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}\dot{q}_{ij} + \check{S}_{ij}^2 q_{ij} = F_{ij}(t) / M_{ij} \quad (1.1)$$

L'équation auxiliaire (Transformée de Laplace) de l'équation (1.1) est :

$$\tilde{q}_{ij}(P)(P^2 + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}P + \check{S}_{ij}^2) = \tilde{q}_{ij}(0)P + \dot{\tilde{q}}_{ij}(0) + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}\tilde{q}_{ij}(0) + \frac{\tilde{F}_{ij}(P)}{M_{ij}} \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) peut s'écrire :

$$\tilde{q}_{ij}(P) = \frac{\tilde{q}_{ij}(0)P + \dot{\tilde{q}}_{ij}(0) + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}\tilde{q}_{ij}(0)}{P^2 + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}P + \check{S}_{ij}^2} + \frac{\tilde{F}_{ij}(P)}{M_{ij}(P^2 + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}P + \check{S}_{ij}^2)} \quad (1.3)$$

Nous avons :

$$\frac{\tilde{q}_{ij}(0)P + \dot{\tilde{q}}_{ij}(0) + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}\tilde{q}_{ij}(0)}{P^2 + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}P + \check{S}_{ij}^2} \quad \dashrightarrow \quad e^{-\zeta_{ij}\check{S}_{ij}t} \left\{ q_{ij}(0)\cos(\check{S}_{ij}t) + \frac{\dot{q}_{ij}(0) + 2\zeta_{ij}\check{S}_{ij}q_{ij}(0)}{\check{S}_{ij}} \sin(\check{S}_{ij}t) \right\} \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{M_{ij}(P^2 + 2\check{\zeta}_{ij}\check{S}_{ij}P + \check{S}_{ij}^2)} \xrightarrow{\cdot} \frac{e^{-\check{\zeta}_{ij}\check{S}_{ij}t}}{\check{S}_{ij}M_{ij}} \sin(\check{S}_{ij}t) \quad (1.5)$$

Où  $\check{S}_{ij} = \check{S}_{ij}\sqrt{1-\check{\zeta}_{ij}^2}$  est la pulsation propre amortie de la plaque.

Pour trouver la solution du deuxième terme du deuxième membre de l'équation (1.3), nous appliquons le **théorème de convolution** suivant [22].

Si  $\tilde{F}_1(P)$  et  $\tilde{F}_2(P)$  sont les images des fonctions  $F_1(t)$  et  $F_2(t)$ ,

Alors  $\tilde{F}_1(P)\tilde{F}_2(P)$  est l'image de  $\int_0^t F_1(\ddagger)F_2(t-\ddagger)d\ddagger$

On pose alors :

$$\tilde{F}_1(P) = \tilde{F}_{ij}(P)$$

$$\tilde{F}_2(P) = \frac{1}{M_{ij}(P^2 + 2\check{\zeta}_{ij}\check{S}_{ij}P + \check{S}_{ij}^2)}$$

En appliquant le théorème de convolution sur le deuxième terme du deuxième membre de l'équation (1.3), on obtient :

$$\frac{\tilde{F}_{ij}(P)}{M_{ij}(P^2 + 2\check{\zeta}_{ij}\check{S}_{ij}P + \check{S}_{ij}^2)} \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{M_{ij}\check{S}_{ij}} \int_0^t F_{ij}(\ddagger) e^{-\check{\zeta}_{ij}\check{S}_{ij}(t-\ddagger)} \sin\check{S}_{ij}(t-\ddagger)d\ddagger \quad (1.6)$$

D'après (1.4) et (1.6), la solution de l'équation modale (1.1) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 q_{ij}(t) = e^{-\zeta_{ij}\tilde{S}_{ij}t} & \left\{ q_{ij}(0)\cos(\tilde{S}_{ij}t) + \frac{\dot{q}_{ij}(0) + 2\zeta_{ij}\tilde{S}_{ij}q_{ij}(0)}{\tilde{S}_{ij}} \sin(\tilde{S}_{ij}t) \right\} \\
 (1.7) & \\
 & + \frac{1}{\tilde{S}_{ij}M_{ij}} \int_0^t F_{ij}(\tau) e^{-\zeta_{ij}\tilde{S}_{ij}(t-\tau)} \sin(\tilde{S}_{ij}(t-\tau)) d\tau
 \end{aligned}$$

## Annexe 2

### Complément des intégrales du chapitre 2

#### Calcul de l'intégrale $I_{1ij}$

$$I_{1ij}(t) = \int_0^t e^{\langle ij \tilde{S}_{ij} \dagger} \cos((h_i + \tilde{S}_{ij})\dagger - \tilde{S}_{ij}t) d\dagger \quad (2-1)$$

En utilisant la formule d'intégration par partie

$$\int_0^t u dv = uv \Big|_0^t - \int_0^t v du$$

Posons :

$$u = \cos[(h_i + \tilde{S}_{ij})\dagger - \tilde{S}_{ij}t] \quad dv = e^{\langle ij \tilde{S}_{ij} \dagger} d\dagger$$

On obtient :

$$du = -(h_i + \tilde{S}_{ij}) \sin[(h_i + \tilde{S}_{ij})\dagger - \tilde{S}_{ij}t] d\dagger$$

$$v = \frac{e^{\langle ij \tilde{S}_{ij} \dagger}}{\langle ij \tilde{S}_{ij}}$$

Alors

$$I_{1ij}(t) = \frac{e^{\langle ij \check{S}_{ij} \dagger}}{\langle ij \check{S}_{ij}} \cos[(h_i + \check{S}_{ij})\dagger - \check{S}_{ij}]$$

$$- \frac{h_i + \check{S}_{ij}}{\langle ij \check{S}_{ij}} \int_0^t e^{\langle ij \check{S}_{ij} \dagger} \sin[(h_i + \check{S}_{ij})\dagger - \check{S}_{ij}t] d\dagger \quad (2.2)$$

On pose

$$I^*_{1ij} = \int_0^t e^{\langle ij \check{S}_{ij} \dagger} \sin[(h_i + \check{S}_{ij})\dagger - \check{S}_{ij}t] d\dagger$$

De la même manière en calcul l'intégrale  $I^*_{1ij}$ , on pose

$$u = \sin[(h_i + \check{S}_{ij})\dagger - \check{S}_{ij}t] \quad dv = e^{\langle ij \check{S}_{ij} \dagger} d\dagger$$

On obtient

$$du = (h_i + \check{S}_{ij}) \cos[(h_i + \check{S}_{ij})\dagger - \check{S}_{ij}t] d\dagger$$

$$v = \frac{e^{\langle i \check{S}_{ij} \dagger}}{\langle ij \check{S}_{ij}}$$

Alors

$$I^*_{1ij} = \frac{e^{\langle ij \check{S}_{ij} t \rangle}}{\langle ij \check{S}_{ij} \rangle} \sin[(\Omega_i + \check{S}_{ij})t - \check{S}_{ij}t] \Big|_0^t - \frac{\Omega_i + \check{S}_{ij}}{\langle ij \check{S}_{ij} \rangle} \int_0^t e^{\langle ij \check{S}_{ij} t \rangle} \cos((\Omega_i + \check{S}_{ij})t - \check{S}_{ij}t) dt \quad (2.3)$$

Remplaçons (2.2) dans (2.2), on obtient

$$I_{1ij} = \frac{e^{\langle ij \check{S}_{ij} t \rangle}}{\langle ij \check{S}_{ij} \rangle} \cos[(h_i + \check{S}_{ij})t - \check{S}_{ij}t] \Big|_0^t + \frac{h_i + \check{S}_{ij}}{(\langle ij \check{S}_{ij} \rangle)^2} \sin[(h_i + \check{S}_{ij})t - \check{S}_{ij}t] e^{\langle ij \check{S}_{ij} t \rangle} \Big|_0^t - \frac{(h_i + \check{S}_{ij})^2}{(\langle ij \check{S}_{ij} \rangle)^2} I_{1ij}$$

Après tout calcul fait, On obtient

$$I_{1ij} = \frac{\langle ij \check{S}_{ij} \rangle (e^{\langle ij \check{S}_{ij} t \rangle} \cos(h_i t) - \cos(\check{S}_{ij} t)) + (h_i + \check{S}_{ij}) (e^{\langle ij \check{S}_{ij} t \rangle} \sin(h_i t) + \sin \check{S}_{ij} t)}{(\langle ij \check{S}_{ij} \rangle)^2 + (h_i + \check{S}_{ij})^2} \quad (2.4)$$

## Calcul de l'intégrale $I_{2ij}(t)$

$$I_{2ij}(t) = \int_0^t e^{\langle ij \tilde{S}_{ij} \dagger} \cos((h_i - \tilde{S}_{ij}) \dagger + \tilde{S}_{ij} t)) d \dagger \quad (2.5)$$

De la même manière que précédemment, on calcule  $I_{2ij}(t)$ , on va avoir :

$$I_{2ij} = \frac{\langle ij \tilde{S}_{ij} (e^{\langle ij \tilde{S}_{ij} t} \cos h_i t - \cos \tilde{S}_{ij} t) + (h_i - \tilde{S}_{ij}) (e^{\langle ij \tilde{S}_{ij} t} \sin h_i t - \sin \tilde{S}_{ij} t)}{(\langle ij \tilde{S}_{ij})^2 + (h_i - \tilde{S}_{ij})^2} \quad (2.6)$$

## Annexe 3

### Méthode de Newmark

La méthode de Newmark est une méthode d'intégration numérique à un pas. On y calcul l'état du système à un instant donné  $t + \Delta t$  en fonction de l'état connu à l'instant  $t$  par la formule de Taylor :

$$\{q\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t \{\dot{q}\}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{q}\}_t + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \{q^{(n)}\}_t + \{R_n\} \quad (3.1)$$

Avec  $\{R_n\}$  est le reste du développement de l'ordre  $n$ ,

$$\{R_n\} = \frac{1}{n!} \int_t^{t+\Delta t} \{q^{(n+1)}\}_{\ddagger} (t + \Delta t - \ddagger)^n d\ddagger \quad (3.2)$$

La formule (3.1) permet de calculer la vitesse et le déplacement à l'instant  $t + \Delta t$ ,

$$\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{q}\}_t + \int_t^{t+\Delta t} \{\ddot{q}\}_{\ddagger} d\ddagger \quad (3.3)$$

$$\{q\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t \{\dot{q}\}_t + \int_t^{t+\Delta t} (t + \Delta t - \ddagger) \{\ddot{q}\}_{\ddagger} d\ddagger \quad (3.4)$$

L'approximation consiste donc à calculer les intégrales dans (3.3) et (3.4), de l'accélération. Pour ce faire, exprimons  $\{\ddot{q}\}_{\ddagger}$  dans l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$  en fonction de  $\{\ddot{q}\}_t$  et  $\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t}$  aux bornes de l'intervalle :

$$\{\ddot{q}\}_t = \{\ddot{q}\}_{\ddagger} + \{q^{(3)}\}_{\ddagger} (t - \ddagger) + \{q^{(4)}\}_{\ddagger} \frac{(t - \ddagger)^2}{2} + \dots \quad (3.5)$$

$$\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} = \{\ddot{q}\}_{\ddagger} + \{q^{(3)}\}_{\ddagger} (t + \Delta t - \ddagger) + \{q^{(4)}\}_{\ddagger} \frac{(t + \Delta t - \ddagger)^2}{2} + \dots \quad (3.6)$$

Multiplions les équations (3.5) par  $1-x$  et (3.6) par  $x$  respectivement on obtient :

$$(1-x)\{\ddot{q}\}_t = (1-x)\{\ddot{q}\}_{\ddagger} + (1-x)\{q^{(3)}\}_{\ddagger} (t - \ddagger) + (1-x)\{q^{(4)}\}_{\ddagger} \frac{(t - \ddagger)^2}{2} + \dots \quad (3.6.a)$$

$$x\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} = x\{\ddot{q}\}_{\ddagger} + x\{q^{(3)}\}_{\ddagger} (t + \Delta t - \ddagger) + x\{q^{(4)}\}_{\ddagger} \frac{(t + \Delta t - \ddagger)^2}{2} + \dots \quad (3.6.b)$$

Ajoutons (3.6.a) à (3.6.b) il vient :

$$\{\ddot{q}\}_{\ddagger} = (1-x)\{\ddot{q}\}_t + x\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + \{q^{(3)}\}_{\ddagger} (\ddagger - x\Delta t - t) + O(\Delta t^2 \{q^{(4)}\}_{\ddagger}) \quad (3.7)$$

De même, en multipliant les équations (3.5) par  $(1-2S)$  et (3.6) par  $2S$  :

$$(1-2S)\{\ddot{q}\}_t = (1-2S)\{\ddot{q}\}_{\ddagger} + (1-2S)\{q^{(3)}\}_{\ddagger} (t - \ddagger) + (1-2S)\{q^{(4)}\}_{\ddagger} \frac{(t - \ddagger)^2}{2} + \dots \quad (3.7.a)$$

$$2S\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} = 2S\{\ddot{q}\}_{\ddagger} + 2S\{q^{(3)}\}_{\ddagger} (t + \Delta t - \ddagger) + 2S\{q^{(4)}\}_{\ddagger} \frac{(t + \Delta t - \ddagger)^2}{2} + \dots \quad (3.7.b)$$

Ajoutons (3.7.a) à (3.7.b) :

$$\{\ddot{q}\}_{\ddagger} = (1-2S)\{\ddot{q}\}_t + 2S\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + \{q^{(3)}\}_{\ddagger} (\ddagger - 2S - t) + O(\Delta t^2 \{q^{(4)}\}_{\ddagger}) \quad (3.8)$$

Si on substitue (3.7) et (3.8) dans les intégrales (3.3), on obtient les formules suivantes:

$$\int_t^{t+\Delta t} \{\ddot{q}\}_{\ddagger} d\ddagger = (1-x)\Delta t \{\ddot{q}\}_t + x\Delta t \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + \{r\}_t \quad (3.9)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} (t + \Delta t - \ddagger) \{\ddot{q}\}_{\ddagger} d\ddagger = \left(\frac{1}{2} - S\right) \Delta t^2 \{\ddot{q}\}_t + S\Delta t^2 \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + \{r'\}_t \quad (3.10)$$

Avec les erreurs correspondantes :

$$\{r\}_t = (x - 1/2)\Delta t^2 \{q^{(3)}\}_{\ddagger} + O(\Delta t^3 \{q^{(4)}\}_{\ddagger}) \quad (3.11)$$

$$\{r'\}_t = (S - 1/6)\Delta t^2 \{q^{(3)}\}_{\ddagger} + O(\Delta t^4 \{q^{(4)}\}_{\ddagger}) \quad (3.12)$$

Avec  $t < \ddagger < t + \Delta t$ . Les constantes  $x$  et  $S$  sont les paramètres de la formule de Newmark utilisée. Le choix des constantes  $x = 1/2$ ,  $S = 1/6$ , est équivalent à l'interpolation linéaire des accélérations dans l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$

$$\{\ddot{q}\}_{\ddagger} = \{\ddot{q}\}_t + \ddagger \left( \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} - \{\ddot{q}\}_t \right) / \Delta t$$

De même pour  $x = 1/2$ ,  $S = 1/4$ , correspond à adopter une valeur des accélérations moyennes sur l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$

$$\{\ddot{q}\}_{\ddagger} = \left( \{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} + \{\ddot{q}\}_t \right) / 2$$

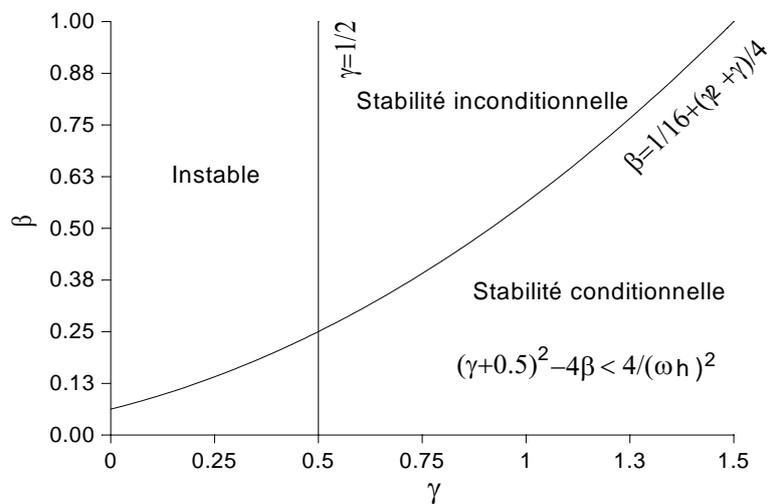
La substitution de (3.9) et (3.10) dans (3.3) et (3.4) fournit les approximations par la méthode de Newmark :

$$\{\dot{q}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{q}\}_t + (1-\alpha)\Delta t\{\ddot{q}\}_t + \alpha\Delta t\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} \quad (3.13)$$

$$\{q\}_{t+\Delta t} = \{q\}_t + \Delta t\{\dot{q}\}_t + \Delta t^2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\{\ddot{q}\}_t + \Delta t^2\alpha\{\ddot{q}\}_{t+\Delta t} \quad (3.14)$$

Remarque:

L'algorithme de l'accélération moyenne est le schéma inconditionnellement stable de précision maximale. Le domaine de stabilité de l'algorithme de Newmark est représenté si dessous [23] :



**Féfigure1** : Domaine de stabilité de l'algorithme de Newmark.

## Annexe 4

### Equations du mouvement du modèle de véhicules

Les équations du mouvement du modèle de véhicule à 2, 4 et 7 ddl sont sous la forme :

$$[M_v] \{\ddot{z}_v\} + [C_v] \{\dot{z}_v\} + [K_v] \{z_v\} = \{F_g\} + \{F^{\text{int}}\}$$

- **Pour le modèle à 2ddl :**

$$[M_v] = \begin{bmatrix} m_v(a_2^2 + \frac{h^2}{s_1^2}) + \frac{I_{ov}}{s_1^2} & m_v(a_1a_2 - \frac{h^2}{s_1^2}) \\ m_v(a_1a_2 - \frac{h^2}{s_1^2}) - \frac{I_{ov}}{s_1^2} & m_v(a_1^2 + \frac{h^2}{s_1^2}) + \frac{I_{ov}}{s_1^2} \end{bmatrix}$$

$$[C_v] = \begin{bmatrix} C_{p_1} & 0 \\ 0 & C_{p_2} \end{bmatrix}$$

$$[K_v] = \begin{bmatrix} K_{p_1} & 0 \\ 0 & K_{p_2} \end{bmatrix}$$

$$\{F_g\} = \begin{Bmatrix} a_2 m_v g \\ a_1 m_v g \end{Bmatrix}$$

$$\{F^{\text{int}}\} = \begin{Bmatrix} k_{p_1}(w_1 + r_1) + c_{p_1}(\dot{w}_1 + \dot{r}_1) \\ k_{p_2}(w_2 + r_2) + c_{p_2}(\dot{w}_2 + \dot{r}_2) \end{Bmatrix}$$

$$\{Z_v\} = \begin{Bmatrix} z_{v_1} \\ z_{v_2} \end{Bmatrix}$$

- **Pour le modèle à 4 ddl :**

$$[M_v] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 & 0 \\ & & m_v(a_2^2 + \frac{h^2}{s_1^2}) + \frac{I_{ov}}{s_1^2} & m_v(a_1a_2 - \frac{h^2}{s_1^2}) - \frac{I_{ov}}{s_1^2} \\ & & & m_v(a_1^2 + \frac{h^2}{s_1^2}) + \frac{I_{ov}}{s_1^2} \end{bmatrix}$$

*symétrique*

$$[C_v] = \begin{bmatrix} C_{s_1} + C_{p_1} & 0 & -C_{s_1} & 0 \\ & C_{s_2} + C_{p_2} & 0 & -C_{s_2} \\ & & C_{s_1} & \\ & & & C_{s_2} \end{bmatrix}$$

*symétrique*

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{s_1} + k_{p_1} & 0 & -k_{s_1} & 0 \\ & k_{s_2} + k_{p_2} & 0 & -k_{s_2} \\ & & k_{s_1} & \\ & & & k_{s_2} \end{bmatrix}$$

*symétrique*

$$\{F_g\} = \begin{Bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ a_2 m_v g \\ a_1 m_v g \end{Bmatrix}$$

$$\{z_v\} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_{v_1} \\ z_{v_2} \end{Bmatrix}$$

$$\{F^{int}\} = \begin{Bmatrix} k_{p_1}(w_1 + r_1) + c_{p_1}(\dot{w}_1 + \dot{r}_1) \\ k_{p_2}(w_2 + r_2) + c_{p_2}(\dot{w}_2 + \dot{r}_2) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- **Pour le modèle à 7 ddl :**

$$\{Z_v\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_{v_1}, z_{v_2}, z_{v_3}\}^T$$

$$[M_v] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & m_v \left( a_2^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right) + \frac{I_{xv}}{s_1^2} & m_v \left[ a_1 a_2 - a_2 b_2 - \frac{h^2}{s_1^2} \right] - \frac{I_{xv}}{s_1^2} & m_v a_2 b_2 \\ & & & & & m_v \left[ (a_1 - b_2)^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right] + \frac{I_{xv}}{s_1^2} + \frac{I_{rv}}{s_2^2} & m_v \left[ a_1 b_2 - b_2^2 \right] - \frac{I_{rv}}{s_2^2} \\ sym & & & & & & m_v b_2^2 + \frac{I_{rv}}{s_2^2} \end{bmatrix}$$

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{p1} & 0 & 0 & 0 & -k_{s1} & 0 & 0 \\ & k_{s2} + k_{p2} & 0 & 0 & 0 & -k_{s2} & 0 \\ & & k_{s3} + k_{p3} & 0 & -k_{s3} & k_{s3} & -k_{s3} \\ & & & k_{s4} + k_{p4} & 0 & 0 & -k_{s4} \\ & & & & k_{s1} + k_{s3} & -k_{s3} & k_{s3} \\ & & & & & k_{s2} + k_{s3} & -k_{s3} \\ sym & & & & & & k_{s3} + k_{s4} \end{bmatrix}$$

$$[C_v] = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{p1} & 0 & 0 & 0 & -c_{s1} & 0 & 0 \\ & c_{s2} + c_{p2} & 0 & 0 & 0 & -c_{s2} & 0 \\ & & c_{s3} + c_{p3} & 0 & -c_{s3} & c_{s3} & -c_{s3} \\ & & & c_{s4} + c_{p4} & 0 & 0 & -c_{s4} \\ & & & & c_{s1} + c_{s3} & -c_{s3} & c_{s3} \\ & & & & & c_{s2} + c_{s3} & -c_{s3} \\ sym & & & & & & c_{s3} + c_{s4} \end{bmatrix}$$

$$\{F_g\} = \begin{Bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \\ m_4 g \\ a_2 m_v g \\ (a_1 - b_2) m_v g \\ b_2 m_v g \end{Bmatrix}$$

$$\{F^{\text{int}}\} = \begin{Bmatrix} k_{p1} [w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p2} [w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p3} [w(x_3, y_3, t) + r(x_3, y_3)] + c_{p3} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_3, y_3, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_3, y=y_3} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p4} [w(x_4, y_4, t) + r(x_4, y_4)] + c_{p4} \left[ \frac{\partial w}{\partial t}(x_4, y_4, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_4, y=y_4} \dot{x}_1 \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## Conclusion générale

Ce travail avait pour objectif, l'étude des vibrations d'une dalle de roulement isotrope à une travée sous la sollicitation de chargement mobile. Nous avons développé une modélisation pour plusieurs cas d'excitations :

- Cas des forces mobiles ;
- Cas des masses mobiles ;
- Cas des véhicules mobiles.

Pour le cas des forces mobiles, la méthode modale et l'intégrale de Duhamel sont utilisées pour développer des solutions analytiques de l'équation du mouvement de la dalle de roulement.

Pour le cas des masses mobiles, la méthode modale couplée à une intégration numérique par la méthode de Newmark sont utilisées pour développer des solutions semi-analytiques de l'équation du mouvement de la dalle de roulement.

Pour le cas des véhicules mobiles, la loi de Newton est utilisée pour dériver les équations de mouvement alors que leur résolution a été effectuée par la méthode de Newmark. La méthode modale et la méthode de Newmark sont utilisées pour résoudre l'équation de mouvement de la dalle de roulement. Les équations du mouvement couplées du système dalle-véhicule-rugosité sont résolues par la méthode de Newmark. Un algorithme de résolution avec une technique découplée et un calcul itératif est présenté.

Plusieurs exemples numériques sont présentés et validés. Le calcul des fréquences et modes propres de la dalle de roulement, nécessaire pour l'étude des vibrations forcées, a été effectué à l'aide d'une approche modale. Les racines de l'équation aux fréquences propres sont déterminées graphiquement à l'aide du logiciel Mathematica. D'après les résultats obtenus, nous avons tirés les conclusions suivantes :

1. La méthode modale est très efficace en vibrations des systèmes continus.
2. Si le rapport entre les masses roulantes et la masse de la dalle de roulement est faible, l'effet d'inertie dû aux masses mobiles est négligeable même pour une vitesse de roulement élevée. Les masses mobiles peuvent être simplement remplacées par des forces mobiles.
3. Si le rapport entre les masses roulantes et la masse de la dalle de roulement n'est pas faible, l'effet d'inertie dû aux masses mobiles est non négligeable même à une vitesse de roulement et faible. Dans ce cas, l'effet d'inertie est non négligeable et les masses mobiles ne peuvent pas être remplacées par des forces mobiles.
4. le facteur d'amplification dynamique, qui major les effets statiques, dépend de plusieurs paramètres, dont les plus importants sont : la vitesse de passage et l'état de la chaussée empruntée par le véhicule.
5. Pour une dalle de roulement bien identifiée, il n'existe pas un FAD spécifique, car ce dernier change en fonction du chargement de la vitesse

de passage, de l'état de la chaussée, de la fréquence de passage, du tonnage par essieux, etc.

6. L'état de la chaussée reste le paramètre le plus important qui influe sur les forces d'interaction et par conséquent sur le FAD.
7. D'autres paramètres peuvent également influencer le FAD mais ne sont pas étudiés ici tels que : l'espacement entre les véhicules, le nombre de véhicules, etc.

## Références bibliographiques

- [1] Willis R. et al. Preliminary Essay to the Appendix B.: Experiments for Determining the Effects Produced by causing weights to Travel over Bars with Different velocities. In: Grey G. Et al.: Report of the commissioners Appointed to Inquire into the application of Iron to Railway structures. W. Clowes and Sons, London 1849. Reprinted in: Barlow P.: Treatise on the Strength of Timber, Cast iron and Malleable Iron. London 1851.
- [2] Stokes G. G., Discussion of a Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges. Trans. Cambridge Philosophical Society, (1849), Soc., 8, Part 5, pp. 707-735. Reprinted in: Mathematical and Physical Papers, (1883), Vol. 2, pp. 178- 220.
- [3] Krylov A. N., Mathematical collection of papers of the Academy of Sciences; Vol.61. (Matematicheskii sbornik akademii Nauk). Peterburg 1905. KRILOFF A.N.: Uber die erzwungenen Schwingungen von gleichformigen elastischen Staben .Mathematische Annalen; 61(1905); 211.
- [4] Timoshenko S.P. Forced vibration of Prismatic Bars (In Russian): Izvestiya Kievskogo politekhnicheskogo instituta, (1908). (In German): Erzwungene Schwingungen prismatischer Stabe . Zeitsch f. Mathematik u. Physik, (1911), Vol. 2, pp. 163-203.
- [5] Loman A. N.: On Transverse Oscillations of Beams under the Action of Moving Variable Loads. Philosophical Magazine; 1935, Vol.7, N° 127, pp. 708-715.
- [6] Bondar N.G. Dynamic Calculations of Beams Subjected to a Moving Load (in Russian). Issledovaniya po teorii sooruzhenii, Stroiizdat, Moscow; 1954, Vol.6, pp.11-23.
- [7] Timoshenko S.P.: On the Forced Vibration of Bridges.Philosophical Magazine, Ser.6, 43 (1922), 1018.
- [8] Saller H.: Einfluss bewegter Last auf Eisenbahnoberbau und Brucken. Kreidels Verlag, Berlin 1921.
- [9] Jeffcott H .H.: On the Vibration of Beams under the Action of moving Loads. Philosophical Magazine, ser.7, 8(1929), No.48, 66-97.
- [10] Steuding H.: Die Schwingungen von Tragern bei bewegten Lasten .I, II. Ingenieur – Archiv, 5(1934), No.4, 275-305, 6 (1935), No. 4, 265-270.
- [11] Schailenkamp A.: Schwingungen von Tragern bei bewegten Lasten. Ingenieur-Archiv, 8 (1937), 182 – 198.
- [12] Muehnikov V. M.: Some Methods of Computing Vibration of Elastic Systems Subjected to Moving Loads (Nekotorye metody rascheta uprugikh sistem na kolebaniya pri podvizhnoi nagruzke), Gosstroizdat, Moscow 1953
- [13] Ryazanova M.Y.: Vibration of Beams Produced by the Action of Load Moving on Them (in Russian) .Dopovidi AN URSR, 20 (1958), No. 2,157-161.
- [14] Naleszkiewicz J.: On the Dynamics of Bridge Girders (in Polish). Archiwum mechaniki stosowanej, 5 (1953), No .4.517-544.

- [15] Bolotin V. V.: Problem of Bridge Vibration under the Action of a Moving Load (in Russian). Izvestiya AN SSSR, Mekhanika i mashinostroenie, 1961, No. 4,109-115.
- [16] Broquet Claude. Comportement des dalles de roulement des routes en béton sollicitées par le trafic routier. Thèse PhD, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1999, 170 p.
- [17] Henchi Kamel. Analyse dynamique des ponts par élément fini sous les sollicitations des véhicules mobiles. Thèse de Doctorat, Université de technologie de Compiègne, France, 1995, 243 p.
- [18] Bakht B., Pinjarkar S.G., Review of dynamic testing of highway bridges, Structural Research Report, SRR-89-01, Ministry of Transportation of Ontario, Downsview, Ontario, 1989.
- [19] Cai Y., Chen S.S., Rote D.M., Coffey H.T., 1994, "Vehicle guide way Interaction for high speed vehicles on a flexible guide way", Journal of Sound and Vibration, 175(5), 625-646.
- [20] Zouak Toufik, Souadnia Moussa, Etude du comportement dynamique d'une plaque mince sollicitée par des masses mobiles, Mémoire d'ingénieur, Département de Mécanique, Université de Guelma, 2007, 65 p.
- [21] R. D. Blevins, 1986, "Formulas for natural frequency and mode shape", Florida, Krieger Publishing Company, p. 254.
- [22] N. Piskounov, 1980, "Calcul différentiel et intégral", OPU
- [23] M. Geradin, D. Rixen, 1996, "Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures", 2<sup>ème</sup> édition, Masson, Paris.

**Remerciement**

DEDICATED

# table des matières

# Chapitre 1: Synthèse bibliographique

# Chapitre 2: Vibration d'une dalle de roulement sous la sollicitation des forces mobiles

## Chapitre 3: Mouvement d'une table de roulement sous la sollicitation des masses mobiles

## Chapitre 04: Mouvement d'une table de roulement sollicitée par des systèmes dynamiques simples



# résultats chapitre 5 et interprétation

# Conclusion générale

# LES ANNEXES

**introduction général**

**références bibliographiques**

