الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية


**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche scientifique**

**Université de 8 Mai 1945 – Guelma -**

**Faculté des Mathématiques, d’Informatique et des Sciences de la matière**

**Département de Mathématiques**


# Support de cours du module -Maths 3-

## Destiné aux étudiants de la deuxième année de

## Tronc Commun Sciences & Technologies


**Présenté par : Dr.  Meftah Badreddine**

Semestre : 3

UE : UEF 2.1.1

Matière 1 : Mathématiques 3 (VHS: 67h30, Cours : 3h00, TD : 1h30)

Objectifs de l'enseignement:

À la fin de ce cours, l'étudiant(e) devrait être en mesure de connaître les différents types de séries et ses conditions de convergence ainsi que les différents types de convergence.

Connaissances préalables recommandées

Mathématiques 1 et Mathématiques 2

Contenu de la matière :

Chapitre 1 : Intégrales simples et multiples 3 semaines
1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives.
1.2 Intégrales doubles et triples.
1.3 Application au calcul d'aires, de volumes…
Chapitre 2 : Intégrale impropres 2 semaines
2.1 Intégrales de fonctions définies sur un intervalle non borné.
2.2 Intégrales de fonctions définies sur un intervalle borné, infinies à l'une des extrémités.
Chapitre 3 : Equations différentielles 3 semaines
3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires.
3.2 Equations aux dérivées partielles.
3.3 Fonctions spéciales.
Chapitre 4 : Séries 2 semaines
4.1 Séries numériques.
4.2 Suites et séries de fonctions.
4.3 Séries entières, séries de Fourrier.
Chapitre 5 : Transformation de Fourier 3 semaines
5.1 Définition et propriétés.
5.2 Application à la résolution d'équations différentielles.
Chapitre 6 : Transformation de Laplace 2 semaines
6.1 Définition et propriétés.
6.2 Application à la résolution d'équations différentielles.
Mode d'évaluation : Contrôle continu : 40 % ; Examen final : 60 %.

Références bibliographiques:

(Selon la disponibilité de la documentation au niveau de l'établissement, Sites internet...etc.)

# Table des matières

# Chapitre 1

# Intégrales simples et multiples

## 1.1 Intégrale de Riemann

### 1.1.1 Subdivision

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

**Définition 1.1** *On appelle toute partie finie de points de* $[a, b]$ *contenant* $a$ *et* $b$ *une subdivision, cette dernière s'écrit de façon unique*

$$d = \{x_0, x_1, ..., x_n\},$$

*où* $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$ *et* $n$ *un entier naturel quelconque.*

**Remarque 1.1** *Si* $d$ *est une subdivision de* $[a, b]$ *et* $E$ *une partie finie de* $[a, b]$, *alors* $d \cup E$ *est encore une subdivision de* $[a, b]$.

**Définition 1.2** *Soit* $d, d'$ *deux subdivisions de* $[a, b]$. *On dit que* $d$ *est plus fine que* $d'$, *si* $d' \subset d$.

**Définition 1.3** *Soit* $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *une subdivision de* $[a, b]$. *Le réel strictement positif* $\delta(d)$, *où*

$$\delta(d) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

*est dit : pas de la subdivision.*

**Remarque 1.2** *Si le pas est uniforme c'est-à-dire*

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ..... = x_n - x_{n-1}$$

*on dira que la subdivision est équidistante.*

### 1.1.2 Sommes de Darboux

Soit la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

**Définition 1.4** *On dit que la fonction $f$ définie sur $[a, b]$ est bornée si*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < +\infty.$$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction bornée sur $[a, b]$ et $d = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$.

Posons

$$\begin{aligned} m_i(f, d) &= m_i = \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) \\ M_i(f, d) &= M_i = \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) . \end{aligned}$$

Et $S_{a,b}$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$.

**Définition 1.5** *On appelle somme de Darboux inferieur (resp. supérieur) de $f$ relativement à la subdivision $d$ le nombre $s$ ( resp. $S$) donné par les relations*

$$s = s(f, d) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

*et*

$$S = S(f, d) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) .$$

posons $s_a^b := \sup\limits_{d\in S_{a,b}} s(f,d)$ et $S_a^b := \inf\limits_{d\in S_{a,b}} S(f,d)$.

**Définition 1.6** *La fonction $f$ est dite Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si $s_a^b$ coïncide avec $S_a^b$, ce nombre est alors appelé l'intégrale de Riemann de $f$ sur $[a,b]$, et on le note*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

**Remarque 1.3** *La variable d'intégration $x$ dans $\int_a^b f(x)\,dx$ est une variable muette, c'est-à-dire qu'elle peut-être remplacée par n'importe quelle autre variable.*

**Proposition 1.1 (Critère d'intégrabilité de Riemann)** *une fonction $f$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $X \in S_{a,b}$ telle que*

$$S(f,d) - s(f,d) < \varepsilon.$$

**Théorème 1.1** *Toute fonction monotone ou continue sur un intervalle $[a,b]$ est Riemann-intégrable.*

### 1.1.3 Sommes de Riemann

Les sommes de Darboux ne sont pas très utiles pour le calcul effectif d'une intégrale, par exemple à l'aide d'un ordinateur, car il est en général assez difficile de trouver les inf et sup sur les sous-intervalles. On considère plutôt

$$s_n(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_{i-1})$$

et

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_i).$$

Plus généralement, si $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ vérifie $\forall i \in \{1, ..., n\}$ , $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, on appelle $(X, \xi)$ une subdivision pointée et $S(f, X, \xi)$ la somme de Riemann associée à la subdivision

pointée $(X,\xi)$, où
$$S(f,X,\xi)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,f(\xi_i)\,.$$

**Théorème 1.2** *Si $f$ est Riemann-intégrable, alors les sommes de Riemann $S(f,X,\xi)$ tendent vers $\int f(x)dx$, indépendamment du choix des $\xi_i$, lorsque la subdivision devient de plus en plus fine.*

### 1.1.4 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soit $f$, $g$ deux fonctions Riemann-intégrables, on a alors pour toute subdivision $X$ de $[a,b]$ :

1)- $s(f,X)\leq\int\limits_a^b f(x)\,dx\leq S(f,X)$. En particulier, on a $(b-a)\inf f([a,b])\leq\int\limits_a^b f(x)\,dx\leq(b-a)\sup f([a,b])$.

2)- $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx$ dite relation de Chasles.

3)- $\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

4)- $\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$.

5)- $\int\limits_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx+\beta\int\limits_a^b g(x)\,dx$, pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

6)- $f\geq 0\Rightarrow\int\limits_a^b f(x)\,dx\geq 0$, (La réciproque est fausse).

7)- $f\leq g\Rightarrow\int\limits_a^b f(x)\,dx\leq\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

8)- $|f|$ est Riemann-intégrables, alors $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int\limits_a^b|f(x)|\,dx$.

**Théorème 1.3 (de la moyenne)** *Soit $f\in C([a,b])$. Alors*
$$\exists c\in\,]a,b[\,:\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=f(c).$$

## 1.2 Primitive d'une fonction continue

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur $D$.

**Définition 1.7** *Une fonction $F : D \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f$ dans $D$ si et seulement si*

1) *$F$ est dérivable sur $D$.*

2) *$F' = f$ dans $D$.*

**Proposition 1.2** *Si $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$, alors $F - G$ est une constante sur tout intervalle $I \subset D$.*

**Existence d'une primitive**

**Théorème 1.4** *Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possède une primitive, on écrit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

*Et*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

**Remarque 1.4** *Il existe des fonctions continues mais leurs primitives n'ont pas forcément une écriture explicite.*

**Primitives des fonctions usuelles**

$$\begin{aligned}
\int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\} \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + c \\
\int e^x dx &= e^x + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin x dx &= -\cos x + c \\
\int \cos x dx &= \sin x + c \\
\int chx dx &= shx + c \\
\int shx dx &= chx + c \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= arctgx + c \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, \qquad x \in ]-1, 1[ \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \arg shx + c = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c.
\end{aligned}$$

**Exemple 1.1** *Calculer l'intégrale suivante*

$$I = \int (3x^2 + e^{-x} - \cos 2x) dx.$$

*On a*

$$\begin{aligned}
I &= \int 3x^2 dx + \int e^{-x} dx - \int \cos 2x dx \\
&= 3 \int x^2 dx - \int -e^{-x} dx - \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx \\
&= x^3 - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin 2x + c.
\end{aligned}$$

**Intégration par parties**

**Proposition 1.3** *Pour $f, g \in C^1(I, R)$, on a*

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx.$$

*Au cas ou $I = [a, b]$ et en utilisant les intégrales définies*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)d.$$

**Exemple 1.2** *Calculer l'intégrale suivante*

$$I = \int \ln(x+1) \ dx.$$

*Posons* $u = \ln(x+1) \Rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$ *et* $v' = 1 \Rightarrow v = x + 1$. *Ainsi*

$$\begin{aligned} I &= (x+1) \ \ln(x+1) - \int \ dx \\ &= (x+1) \ \ln(x+1) + x + c. \end{aligned}$$

**Changement de variable d'intégration**

**Proposition 1.4** *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi : J \to I$ *un difféomorphisme, on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Exemple 1.3** *Calculer l'intégrale suivante*

$$I = \int x\sqrt{1+x^2}dx$$

*Posons* $u = 1 + x^2 \Rightarrow 2xdx = du$. *Ainsi*

$$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{3}u\sqrt{u},$$

*d'où*

$$I = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2} + c.$$

## 1.3 Intégrale double

Soit dans le plan $xoy$ un domaine $D$ limite par la courbe $\Gamma$. Considérons dans le même domaine, la fonction $z = f(x, y)$ des deux variables indépendantes $x$ et $y$.

Partageons ce dernier, en $n$ parties (sous domaine) $\Delta s_1, \Delta s_2, .., \Delta s_n$, choisissons dans chaque élément $\Delta s_k$ un point $p_k$ arbitraire, dont image par l'application $f$ vaut $f(p_k)$.

Considérons la somme des produits $v_n$ où $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta s_k$, cette dernière est dite la somme intégrale de la fonction $f(x, y)$ dans le domaine $D$.

Considérons maintenant la suite $(v_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}}$ des sommes intégrales dû aux diffèrent découpages possibles de $D$, de telle sorte que le plus grand sous domaine $\Delta s_n$ tend vers 0, quand $n \to +\infty$.

**Théorème 1.5** *Considérons la fonction $f(x, y)$ continue sur $D$, la suite $(v_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}}$ des sommes intégrales a une limite lorsque le plus grand sous domaine $\Delta s_k$ tend vers 0 et que $n$ tend vers l'infini, cette dernière ne dépend ni du mode du découpage de $D$, ni du choix du point $p_k$ dans $\Delta s_k$.*

**Définition 1.8** *On appelle intégrale double de la fonction $f(x, y)$ sur le domaine $D$, la limite de la suite $(v_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}}$, lorsque le plus grand sous domaine $\Delta s_k \to 0$ et que $n \to +\infty$. Et on note*

$$\lim_{\substack{\max \Delta s_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta s_k = \iint_D f(x, y)dydx.$$

### 1.3.1 Propriétés des intégrales doubles

Si $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont deux fonctions continues sur le domaine $D = D_1 \cup D_2$ de $\mathbb{R}^2$ avec $(D_1 \cap D_2 = \Phi)$, nous avons alors

1)- $\iint_D [f(x, y) + g(x, y)]\, dydx = \iint_D f(x, y)dydx + \iint_D g(x, y)dydx.$

2)- $\iint_D \lambda f(x, y)dydx = \lambda \iint_D f(x, y)dydx, \quad (\lambda \in \mathbb{R})\,.$

3)- $\iint_D f(x, y)dydx = \iint_{D_1} f(x, y)dydx + \iint_{D_2} f(x, y)dydx.$

4)- Si $f(x, y) \leq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f(x, y)dydx \leq \iint_D g(x, y)dydx.$

### 1.3.2 Calcul des intégrales doubles

Considérons un domaine $D$ du plan $xoy$ on suppose que ce dernier est limité par deux courbes $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$ telles que $\varphi(x) \geq \psi(x)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

**Définition 1.9** *On dit que le domaine $D$ est régulier selon ox (resp. oy), si toute droite parallèle à l'axe ox (resp. oy) passant par un point de $D$ coupe sa frontière en deux points $M_1$ et $M_2$ (resp. $N_1$ et $N_2$).*

**Remarque 1.5** *Si le domaine $D$ est régulier selon ox et selon oy, on dira qu'il est régulier.*

Considérons une fonction $f(x, y)$ continue sur le domaine $D$, régulier selon $oy$. Supposons que ce dernier est limité par les courbes $y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$ $(y_1(x) \leq y_2(x))$ et les droites $x = a$ et $x = b$ $(a \leq b)$.

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$, le rectangle défini par quadrillage donné par les droites $x = x_i, y = y_j$, où $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ et $c = y_0 < y_1 < ... < y_m = b$.

Soit la fonction $F(x, y)$ égale à $f(x, y)$ dans $D$ et nulle à son extérieur. On peut donc écrire

$$I = \iint\limits_{D} f(x, y)dydx = \iint\limits_{R} F(x, y)dydx = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{l=n.m} F(p_k)\Delta s_k,$$

où $\Delta s_k$ sont des pavés rectangulaires d'aire $\Delta s_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$, et le point $p_k$ de coordonnées $\left(\zeta_i, \eta_j\right) = (\frac{x_i+x_{i-1}}{2}, \frac{y_j+y_{j-1}}{2})$. Donc on a $x_{i-1} < \zeta_i < x_i$, $y_{j-1} < \eta_j < x_j$, $f(p_k) = f\left(\zeta_i, \eta_j\right)$ et $F(p_k) = F\left(\zeta_i, \eta_j\right)$. Posons $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ et $\Delta y_j = \ y_j - y_{j-1}$, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{l=n.m} F(p_k)\Delta s_k \\
&= \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left[ \Delta x_i \left[ \sum_{j=1}^{m} \left[ F\left(\zeta_i, \eta_j\right) \Delta y_j \right] \right] \right] \\
&= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[ \Delta x_i \left[ \lim_{\max \Delta y_j \to 0} \sum_{j=1}^{m} \left[ F\left(\zeta_i, \eta_j\right) \Delta y_j \right] \right] \right].
\end{aligned}
$$

Par définition de l'intégrale simple on a

$$
\lim_{\max \Delta y_j \to 0} \sum_{j=1}^{m} \left[ F\left(\zeta_i, \eta_j\right) \Delta y_j \right] = \int_{c}^{d} F\left(\zeta_i, y\right) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\left(\zeta_i, y\right) dy = \Phi\left(\zeta_i\right).
$$

Ainsi

$$
I = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\zeta_i\right) \Delta x_i = \int_{a}^{b} \Phi\left(x\right) dx = \int_{a}^{b} \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\left(x, y\right) dy \right] dx.
$$

**Théorème 1.6** *L'intégrale double d'une fonction continue $f(x,y)$ sur un domaine $D$ régulier selon $oy$ a pour valeur*

$$
\iint_D f(x,y)dydx = \int_{a}^{b} \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f\left(x, y\right) dy \right] dx.
$$

**Théorème 1.7** *L'intégrale double d'une fonction continue $f(x,y)$ sur un domaine $D$ régulier selon $ox$ a pour valeur*

$$
\iint_D f(x,y)dydx = \int_{c}^{d} \left[ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f\left(x, y\right) dx \right] dy.
$$

**Exemple 1.4** *Calculer l'intégrale suivante*

$$\iint_D \left(x^2+y\right) dydx,$$

*où $D$ est défini par* $1 \leq x \leq 2$ *et* $0 \leq y \leq 2$. *On a*

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(x^2+y\right) dydx &= \iint_D x^2dx + \iint_D ydy = \int_1^2\int_0^2 x^2dx + \int_1^2\int_0^2 ydy \\
&= \left[\left.\frac{x^3}{2}\right|_{x=1}^{x=2}\right]\left[y|_{y=0}^{y=2}\right] + \left[x|_{x=1}^{x=2}\right]\left[\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=2}\right] \\
&= 7+2=9.
\end{aligned}$$

**Théorème 1.8 (Fubini-Tonelli, cas n = 2)** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction positive, alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dydx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\right)dy.$$

### 1.3.3 Changement de variables dans les intégrales doubles

#### Correspondance biunivoque

Soit $D$ un domaine du plan $xoy$ et $R$ du plan $uo'v$, à chaque point $M(x,y)$ du plan $xoy$ on peut faire correspondre un point $m(u,v)$ du plan $uo'v$, et réciproquement à chaque point $m(u,v)$ du plan $uo'v$ correspond un point unique $M(x,y)$ du plan $xoy$. Ainsi lorsque $M$ décrit le domaine $D$ du plan $xoy$, le point $m$ décrit le domaine $R$ du plan $uo'v$. On dit alors que l'on a établi une correspondance biunivoque entre le domaine $D$ et le domaine $R$, c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre les deux domaines.

**Changement de variables** $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$

Soit l'intégrale double $\iint\limits_D f(x,y)dydx$ étendue au domaine $D$ du plan $xoy$. Considérons aussi le changement de variable

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Supposons que

1) Le changement de variable établit une correspondance biunivoque entre les domaines $D$ et $R$.

2) $x(u,v), y(u,v)$ admettent des dérivées partielles continues.

3) La jacobienne $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$

**Théorème 1.9** *Si $x(u,v), y(u,v)$ vérifie les conditions 1), 2) et 3), on a alors*

$$\iint\limits_D f(x,y)dydx = \iint\limits_R f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,dvdu.$$

**Exemple 1.5** *Calculer $\iint\limits_D f(x,y)dydx$ en coordonnées polaires. On a*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

*et*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

*Ainsi on a*

$$\iint\limits_D f(x,y)dydx = \iint\limits_R f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\theta d\rho.$$

**Exemple 1.6** *Calculer l'intégrale suivante*

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dydx,$$

*où* $D$ *est défini par* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0$ *(* $a$ *et* $b$ *sont deux réels non nuls). En prenant comme changement de variable*

$$\begin{cases} x = \rho a \cos\theta \\ y = \rho b \sin\theta, \end{cases}$$

*la jacobienne sera*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -\rho a \sin\theta \\ b\sin\theta & \rho b\cos\theta \end{vmatrix} = |\rho ab|.$$

*Ainsi nous aurons*

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dydx &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{(\rho a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(\rho b \sin\theta)^2}{b^2}\right) |ab\rho| \, d\theta d\rho \\ &= |ab| \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 d\theta d\rho = \frac{|ab|\,\pi}{2}. \end{aligned}$$

### 1.3.4 Application des intégrales doubles

#### Calcul d'aires d'un domaine

L'aire du domaine $D$ est donnée par la formule

$$\iint_D dydx.$$

**Calcul des aires de surfaces**

L'aire de la surface $z = f(x, y)$ est donnée par la formule

$$A = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} dxdy.$$

**Calcul de la masse**

Soit $\delta(x, y)$ la densité de la matière dans un certain domaine $D$, la quantité totale de la matière dans ce domaine est donnée par la formule

$$m = \iint\limits_{D} \delta(x, y) dxdy.$$

**Moment d'inertie d'une figure plane**

Le moment d'inertie d'une figure plane par rapport à l'axe $ox$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x, y)$ est donné par la formule

$$I_{ox} = \iint\limits_{D} y^2 \delta(x, y) dxdy.$$

Le moment d'inertie d'une figure plane par rapport à l'axe $oy$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x, y)$ est donné par la formule

$$I_{oy} = \iint\limits_{D} x^2 \delta(x, y) dxdy.$$

Le moment d'inertie d'une figure plane par rapport à l'origine dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x, y)$ est donné par la formule

$$I_o = \iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right) \delta(x, y) dxdy.$$

**Centre de gravité**

**Le moment statique** Le moment statique d'une figure plane par rapport à l'axe $ox$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x,y)$ est donné par la formule

$$M_x = \iint\limits_D y\delta(x,y)dxdy.$$

Le moment statique d'une figure plane par rapport à l'axe $oy$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x,y)$ est donné par la formule

$$M_y = \iint\limits_D x\delta(x,y)dxdy.$$

**Coordonnées du centre de gravité** Les coordonnées du centre de gravité d'une figure plane sont données par les formules

$$x_c = \frac{M_x}{m} \text{ et } y_c = \frac{M_y}{m}.$$

## 1.4 Intégrales triples

On va réaliser une étude de l'intégrale triple par analogie avec celle de l'intégrale double. Les définitions de l'intégrale triple sont semblables aux définitions de l'intégrale double.

Le vocabulaire est identique il suffit de remplacer $\mathbb{R}^2$par $\mathbb{R}^3$, et on parlera de volume au lieu de surface.

### 1.4.1 Propriétés des intégrales triples

Si $f(x,y,z)$ et $g(x,y,z)$ sont deux fonctions continues sur le domaine $D = D_1 \cup D_2$ de $\mathbb{R}^3$ avec $(D_1 \cap D_2 = \Phi)$, nous avons alors

1)- $\iiint_D [f(x,y,z) + g(x,y,z)]\, dzdydx = \iiint_D f(x,y,z)dzdydx + \iiint_D g(x,y,z)dzdydx.$

2)- $\iiint_D \lambda f(x,y,z)dzdydx = \lambda \iiint_D f(x,y,z)dzdydx, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

3)- $\iiint_D f(x,y,z)dzdydx = \iiint_{D_1} f(x,y,z)dzdydx + \iiint_{D_2} f(x,y,z)dzdydx$.

4)- Si $f(x,y,z) \leq g(x,y,z) \Rightarrow \iiint_D f(x,y,z)dzdydx \leq \iiint_D g(x,y,z)dzdydx$.

### 1.4.2 Calcul des intégrales triples

Considérons la fonction $f(x,y,z)$ continue dans un certain domaine $V$, découpons ce dernier en petits parallélépipèdes rectangles de côtés parallèles aux axes et ayant pour mesure $\Delta x_i$ selon $ox$, $\Delta y_j$ selon $oy$ et $\Delta z_l$ selon $oz$, ainsi le volume élémentaire vaut $\Delta V_k = \Delta x_i \times \Delta y_j \times \Delta z_l$. Considérons aussi la somme intégrale suivante

$$w_k = \sum_i \sum_j \sum_l f(p_k)\Delta x_i \times \Delta y_j \times \Delta z_l,$$

où $p_k = (\zeta_i, \eta_j, \xi_l)$ est un point du volume élémentaire.

Soit $D$ le domaine plan obtenu par découpage du volume $V$ par un plan parallèle à $xoy$ de côte $z$, donc $D$ dépend de $z$, c'est-à-dire $D = D(z)$. Dans le cas où $\Delta x_i$, $\Delta y_j$ et $\Delta z_l$ tendent simultanément vers zéro, on obtient

$$\lim_{\Delta x_i \to 0, \Delta y_j \to 0, \Delta z_l \to 0} w_k = \int_{z_1}^{z_2} \left[ \iint_{D(z)} f(x,y,z)dxdy \right] dz.$$

**Théorème 1.10** *L'intégrale triple d'une fonction continue $f(x,y,z)$ sur un certain domaine $V$ a pour valeur*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{z_1}^{z_2} \left[ \iint_{D(z)} f(x,y,z)dxdy \right] dz,$$

*où $D(z)$ est la surface définie antérieurement.*

**Exemple 1.7** *Calculer l'intégrale suivante*

$$\iiint\limits_D \frac{dzdydx}{(x+y+z+1)^3},$$

*où $D$ est limité par les plans de coordonnées et le plan $x+y+z=1$. On a*

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_D \frac{dzdydx}{(x+y+z+1)^3} &= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{1-x} \left[\int\limits_0^{1-y-x} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3}\right] dy\right] dx \\
&= \frac{-1}{2}\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{1-x} \left[\left.\frac{1}{(x+y+z+1)^2}\right|_{z=0}^{z=1-y-x}\right] dy\right] dx \\
&= \frac{-1}{2}\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{1-x} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+\ 1)^2}\right] dy\right] dx \\
&= \frac{-1}{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{y}{4} + \left.\frac{1}{(x+y+\ 1)}\right|_{y=0}^{y=1-x}\right] dx \\
&= \frac{-1}{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{(x+\ 1)}\right] dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

### 1.4.3 Changement de variables dans les intégrales triples

Considérons le changement de variables $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ et $z = z(u,v,w)$. Soit l'intégrale triple $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ étendue au domaine $V$ de l'espace $oxyz$. Considérons aussi le changement de variable

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w). \end{cases}$$

Supposons que ce dernier

1) Le changement de variable établit une correspondance biunivoque entre les do-

maines $V$ et $R$.

2) $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ et $z(u,v,w)$ admettent des dérivées partielles continues.

3) La jacobienne $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$

**Théorème 1.11** *Si $x(u,v,w), y(u,v,w)$ et $z(u,v,w)$ vérifient les conditions 1), 2) et 3) on a alors*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_R f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw.$$

**Coordonnées sphériques**

Le changement en coordonnées sphériques est donné par la transformation suivante

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ z = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Dont la jacobienne vaut

$$|J| = \rho^2\,|\cos\theta|\,.$$

**Coordonnées cylindriques**

Le changement en coordonnées cylindriques est donné par la transformation suivante

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$

Dont la jacobienne vaut

$$|J| = \rho.$$

**Exemple 1.8** *Calculer l'intégrale suivante*

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz,$$

*où $V$ est la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon $R$.*

*Passons aux coordonnées sphériques, on obtient*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \left[ \int_0^{2\pi} \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \left|\cos\theta\right| \sqrt{\rho^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta} d\rho d\varphi d\theta \right] \right] \\ &= \int_0^R \left[ \int_0^{2\pi} \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \left|\cos\theta\right| d\rho d\theta d\varphi \right] \right] = \frac{\pi R^4}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{\pi R^4}{2} \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^4. \end{aligned}$$

### 1.4.4 Application des intégrales triples

#### Calcul du volume d'un domaine

Le volume d'un domaine $V$ s'exprime par la relation

$$\iiint\limits_V dxdydz.$$

#### Calcul de la masse

Soit $\delta(x, y, z)$ la densité de la matière dans un certain domaine $V$, la quantité totale de la matière dans ce domaine est donnée par la formule

$$m = \iiint\limits_V \delta(x, y, z) dxdydz.$$

#### Moment d'inertie d'une figure plane

Le moment d'inertie d'une figure plane par rapport à l'axe $ox$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x, y, z)$ est donné par la formule

$$I_{ox} = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right) \delta(x, y, z) dxdydz.$$

Le moment d'inertie d'une figure plane par rapport à l'axe $oy$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x, y)$ est donné par la formule

$$I_{oy} = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right) \delta(x, y, z) dxdydz.$$

Le moment d'inertie d'une figure plane par rapport à l'axe $oz$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x, y)$ est donné par la formule

$$I_{oz} = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) \delta(x, y, z) dxdydz.$$

Le moment d'inertie d'une figure plane par rapport au plan $oyz$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x, y, z)$ est donné par la formule

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \delta(x, y, z) dxdydz.$$

Le moment d'inertie d'une figure plane par rapport au plan $oxy$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x, y)$ est donné par la formule

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \delta(x, y, z) dxdydz.$$

Le moment d'inertie d'une figure plane par rapport au plan $oxz$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x,y)$ est donné par la formule

$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \delta(x,y,z) dxdydz.$$

Le moment d'inertie d'une figure plane par rapport au point $o$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x,y)$ est donné par la formule

$$I_o = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \delta(x,y,z) dxdydz.$$

**Centre de gravité**

**Le moment statique** Le moment statique d'une figure plane par rapport à l'axe $ox$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x,y,z)$ est donné par la formule

$$M_x = \iiint\limits_V x\delta(x,y,z) dxdydz.$$

Le moment statique d'une figure plane par rapport à l'axe $oy$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x,y)$ est donné par la formule

$$M_y = \iiint\limits_V y\delta(x,y,z) dxdydz.$$

Le moment statique d'une figure plane par rapport à l'axe $oz$ dont la densité superficielle en chaque point vaut $\delta(x,y)$ est donné par la formule

$$M_z = \iiint\limits_V z\delta(x,y,z) dxdydz.$$

**Coordonnées du centre de gravité** Les coordonnées du centre de gravité d'une figure plane sont données par les formules

$$x_c = \frac{M_x}{m},\ y_c = \frac{M_y}{m} \text{ et } \ z_c = \frac{M_z}{m}.$$

# Chapitre 2

# Intégrales impropres

Les intégrales jusqu'ici ont été définies sur des intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$, dont la fonction doit être au moins continue par morceaux. Cependant plusieurs applications conduisent à considérer assez souvent des intervalles non bornés où la fonction $f$ à intégrer est discontinue pour des valeurs isolées de la variable $x$ comprises dans les limites d'intégration. Pour couvrir ces cas, la notion d'intégrale, que ce soit de Cauchy ou de Riemann, doit être étendue à l'aide des limites. Cette appellation est dite intégrale impropre ou généralisée.

**Définition 2.1** *Une fonction définie sur un intervalle $I$ est dite localement intégrable sur $I$ si $f$ est Riemann intégrable sur tout intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$.*

**Remarque 2.1** *Dans ce qui suit on note par $R(I)$ l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $I$, et $R_{loc}(I)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables au sens de Riemann.*

**Définition 2.2** *Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. $f$ est dite localement intégrable sur $I$ si $\int\limits_a^b f(t)dt$ est convergente en $b$ si la fonction $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ définie sur $I$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $b$, dans le cas contraire, on dira que l'intégrale est divergente.*

**Définition 2.3** *Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $I = ]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$. $f$ est dite localement intégrable sur $I$ si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente en $a$ si la fonction $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ définie sur $I$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $a$, dans le cas contraire, on dira que l'intégrale est divergente.*

**Définition 2.4** *Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $I = ]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. $f$ est dite localement intégrable sur $I$ si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente en $a$ et $b$ s'il existe $c \in ]a, b[$ si $\int_a^c f(t)dt$ converge en $a$ et $\int_c^b f(t)dt$ converge en $b$, si non l'intégrale est divergente.*

## 2.1 La convergence absolue

**Définition 2.5** *On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente en $b$ si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente en $b$.*

**Définition 2.6** *On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est semi convergente si elle converge sans être absolument convergente.*

**Théorème 2.1** *Toute intégrale absolument convergente est convergente.*

## 2.2 Intégrales impropres des fonctions à signe constant

Si $f$ est négative sur $I$, alors $-f$ est positive sur $I$ et la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ se ramène à celle de l'intégrale $\int_a^b -f(t)dt$.

La suite sera restreinte uniquement aux fonctions positives.

### 2.2.1 Critère de la convergence majorée

**Proposition 2.1** *Si $f$ est positive alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente en $b$, si et seulement si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est bornée sur $[a, b[$.*

### 2.2.2 Critère de comparaison

**Proposition 2.2** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions positives, définies et localement intégrables sur $[a, b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq Mg(x)$ pour tout $x \in [a, b[$, alors la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ entraîne celle de $\int_a^b f(t)dt$.*

### 2.2.3 Critère d'Abel

**Théorème 2.2** *Soit $f$ et $g \in R_{loc}([a, b[)$ vérifiant les conditions*

- *$f$ est monotone et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$.*
- *Il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in [a, b[ : \left| \int_a^x g(t)dt \right| \leq k$.*

*Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.*

**Théorème 2.3** *Soit $f$ et $g \in R_{loc}([a, b[)$ vérifiant les conditions*

- *$f$ est monotone et bornée sur $[a, b[$.*
- *Il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in [a, b[ : \left| \int_a^x g(t)dt \right| \leq k$.*

*Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.*

### 2.2.4 Critère de la convergence dominée

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$, où $D$ est une réunion d'intervalles disjoints de $\mathbb{R}$, $b \in \overline{D}$ où $\overline{D}$ est l'adhérence de $D$, c'est-à-dire dans notre cas le plus petit intervalle contenant $D$.

**Définition 2.7** *On appelle voisinage de $b$ tout intervalle contenant $b$.*

**Définition 2.8** *On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $b$ et on écrit $f = o_b(g)$ s'il existe une fonction $\varepsilon$, définie sur D, telle que $f = g\varepsilon$ au voisinage de $b$ et $\lim\limits_{x\to b}\varepsilon(x) = 0$.*

**Remarque 2.2** *Si $g$ ne s'annule pas sur $D$-$\{b\}$, alors $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $b$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

**Définition 2.9** *On dit que $f$ est dominée par $g$ au voisinage de $b$ et on écrit$f = O_b(g)$, s'il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur $D$, bornée, telle que $f = g\varepsilon$ au voisinage de $b$.*

**Remarque 2.3** *Si $g$ ne s'annule pas sur $D$-$\{b\}$, alors $f$ est dominée par $g$ au voisinage de $b$ si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de $b$.*

**Proposition 2.3** *Si $f = O_b(g)$, alors la convergence de l'intégrale $\int\limits_a^b g(t)dt$ entraîne celle de $\int\limits_a^b f(t)dt$.*

**Proposition 2.4** *Si $f = o_b(g)$, alors la convergence de l'intégrale $\int\limits_a^b g(t)dt$ entraîne celle de $\int\limits_a^b f(t)dt$.*

### 2.2.5 Critère des équivalents

**Proposition 2.5** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions positives, définies et localement intégrables sur $[a, b[$. Si $f$ est équivalente à $g$ au voisinage $b$, alors les intégrales $\int\limits_a^b g(t)dt$ et $\int\limits_a^b f(t)dt$ ont même nature.*

## 2.3 Valeur principale de Cauchy

Soit $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b] \setminus \{c\}$ où $c \in ]a, b[$.

**Définition 2.10** *Si* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left[ \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(t)dt + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(t)dt \right]$ *existe, on dit que* $\int\limits_a^b f(t)dt$ *est convergente au sens de la valeur principale de Cauchy et l'on a*

$$v.p. \int_a^b f(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(t)dt + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(t)dt \right] < \infty.$$

**Définition 2.11** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *une fonction localement intégrable, on dit que* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente au sens de la valeur principale de Cauchy et l'on a*

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{-\lambda}^{+\lambda} f(t)dt < \infty.$$

**Remarque 2.4** *Il existe des intégrale divergente par contre elle converge au sens de la valeur principale de Cauchy.*

## 2.4 Intégrales de références

### 2.4.1 Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ où $a > 0$, est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\int\limits_0^{a} \frac{1}{t^\alpha} dt$ où $a > 0$, est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

### 2.4.2 Intégrales de Bertrand

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

### 2.4.3 Intégrale de Gauss

- $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

### 2.4.4 Intégrale de Dirichlet

- $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

### 2.4.5 Intégrales de Fresnel

- $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin\left(t^2\right) dt$ et $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos\left(t^2\right) dt$ sont convergentes et valent $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

# Chapitre 3

# Equations différentielles

La plupart des problèmes posés par la physique, l'économie et les sciences d'ingénierie sont modélise par des équations différentielles ordinaires ou partielles, c'est-à-dire une équation dépendant d'une fonction inconnue ainsi que certaines de ses dérivées. La solution du problème étudier revient à résoudre l'équation différentielle obtenue.

## 3.1 Equations différentielles ordinaires

**Définition 3.1** *On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante $x$, la fonction inconnue $y = f(x)$ et un certain nombre de ces dérivées, on écrit*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = g(x).$$

**Remarque 3.1** *Si la fonction inconnue de l'équation différentielle dépend d'une seule variable, l'équation différentielle est dite ordinaire.*

**Définition 3.2** *On appelle ordre de l'équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée dans l'équation différentielle.*

**Définition 3.3** *On appelle intégrale ou solution d'une équation différentielle toute fonction vérifiant cette dernière.*

**Définition 3.4** *Résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est trouver l'ensemble de toutes ses solutions.*

### 3.1.1 Equations à variables séparées et séparables

#### Equations à variables séparées

Soit l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$y' = f(x, y). \tag{3.1}$$

**Définition 3.5** *Si $f(x, y)$ à la forme $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, alors l'équation est dite à variables séparées.*

#### Méthode de résolution

On a

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dx} &= f_1(x)f_2(y), \end{aligned} \tag{3.2}$$

pour $f_2(y) \neq 0$ l'équation (3.2) devient

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{3.3}$$

Par passage à l'intégration on obtient

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c. \tag{3.4}$$

**Remarque 3.2** *L'équation (3.3) peut se mettre sous la forme*

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \tag{3.5}$$

**Exemple 3.1** *Donner la solution de l'équation différentielle suivante*

$$x^2dx - \cos y dy = 0. \tag{3.6}$$

*(3.6) est une équation à variables séparées, intégrons les deux membres de (3.6), on obtient*

$$\int \cos y dy = \int x^2 dx + c,$$

*d'où*

$$\sin y = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

*Ainsi*

$$y = \arcsin\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right).$$

**Equations à variables séparables**

**Définition 3.6** *Toute équation différentielle ayant la forme*

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{3.7}$$

*est dite équation à variables séparables.*

**Méthode de résolution**

Il suffit de diviser les deux membres de (3.7) par $N_1(y)M_2(x)$, on obtient une équation à variables séparées, c'est-à-dire de la forme (3.5).

**Exemple 3.2** *Donner la solution de l'équation différentielle suivante*

$$2x\left(1 + y\right)dx - \ ydy = 0. \tag{3.8}$$

*(3.8) est une équation à variables séparables, on la réécrit sous la forme*

$$\begin{aligned} 2xdx &= \frac{y}{(1+y)}dy \\ &= \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)dy. \end{aligned} \tag{3.9}$$

*Intégrons les deux membres de (3.9) on obtient*

$$\int 2xdx = \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)dy + c,$$

*d'où*

$$x^2 = y - \ln|y+1| + c.$$

*Ainsi*

$$x = \sqrt{y - \ln|y+1| + c}.$$

### 3.1.2 Equations homogènes du premier ordre

**Définition 3.7** *On dit que la fonction $f(x,y)$ est homogène de degré $n$ par rapport aux variables $x$ et $y$ si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y), \tag{3.10}$$

*ou*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = n. \tag{3.11}$$

**Définition 3.8** *Toute équation de la forme (3.1) est dite homogène, si la fonction $f(x,y)$ est homogène de degré zéro.*

**Méthode de résolution**

Considérons l'équation différentielle homogène du premier ordre suivante

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3.12}$$

Faisons le changement de variable suivant

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}. \tag{3.13}$$

Combinons (3.12) et (3.13), on obtient

$$u + x\frac{du}{dx} = f(x, xu). \tag{3.14}$$

L'homogénéité de $f$ et (3.14) donne

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1,\ u). \tag{3.15}$$

(3.15) implique

$$\frac{du}{f(1,\ u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{3.16}$$

(3.16) est une équation à variables séparées.

**Exemple 3.3** *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}. \tag{3.17}$$

*Il est évident que (3.17) est une équation homogène du premier ordre, en faisant le changement de variable approprié, (3.17) devient*

$$-\frac{u+1}{u^2 + 2u - 1}du = \frac{dx}{x}, \tag{3.18}$$

*d'où*

$$-\ln\left|u^2+2u-1\right| = \ln cx^2. \tag{3.19}$$

*(3.19) implique*

$$u^2+2u-1 = \frac{1}{cx^2}. \tag{3.20}$$

*Ainsi on a*

$$y^2+2yx-x^2 = c.$$

### 3.1.3 Equations se ramenant aux équations homogènes

Les équations de la forme $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ où $(c, c_1) \neq (0,0)$ ne sont pas des équations homogènes, mais à l'aide d'un changement de variable approprié elles peuvent le devenir. D'où leur appellation

#### Méthode de résolution

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}. \tag{3.21}$$

Si $(c, c_1) = (0,0)$, alors (3.21) est homogène, sa résolution est évidente.

Si $(c, c_1) \neq (0,0)$ et $ab_1 \neq a_1b$, en faisant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k, \end{cases} \tag{3.22}$$

et en substituant (3.22) dans (3.21), on obtient

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}. \tag{3.23}$$

Choisissons $h, k$ de telle sorte qu'ils soient solution du système suivant

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Ainsi (3.23) devient

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}. \tag{3.25}$$

Résolvons (3.24) et revenons aux anciennes variables, on obtient la solution de (3.21).

Si $(c, c_1) \neq (0, 0)$ et $ab_1 = a_1b$, nous utiliserons le changement de variable suivant

$$z = ax + by, \tag{3.26}$$

la condition $ab_1 = a_1b$, assure l'existence d'un certain $\lambda$ de telle sorte que l'équation (3.21) devient

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1} + \frac{a}{b}. \tag{3.27}$$

Ainsi (3.26) devient une équation à variables séparables.

**Remarque 3.3** *De la même manière on résout les équations différentielles dont la forme est*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right), \tag{3.28}$$

*où $f$ est une fonction continue.*

**Exemple 3.4** *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}. \tag{3.29}$$

*L'équation (3.29) est similaire à (3.21), de plus $(c, c_1) \neq (0, 0)$ et $ab_1 = -1 \neq 1 = a_1b$.*

*Faisons le changement de variable suivant*

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k. \end{cases} \tag{3.30}$$

*Choisissons* $h, k$ *de telle sorte qu'ils soient solution du système*

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0, \end{cases} \tag{3.31}$$

*on trouve*

$$h = 2, \ k = 1.$$

*On obtient l'équation homogène*

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}. \tag{3.32}$$

*Posons* $u = \frac{y_1}{x_1}$*, (3.32) devient*

$$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}. \tag{3.33}$$

*Ainsi la solution de (3.33) est*

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) = \ln\left|cx_1\right|. \tag{3.34}$$

*D'où la solution de (3.29) est*

$$arctg\frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right) = \ln\left|c\left(x-2\right)\right|. \tag{3.35}$$

**Exemple 3.5** *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x+y-1}. \tag{3.36}$$

*L'équation (3.36) est similaire à (3.21), de plus* $(c, c_1) \neq (0,0)$ *et* $ab_1 = 1 = a_1 b$.

*Faisons le changement de variable suivant*

$$z = x + y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}. \tag{3.37}$$

*Combinons (3.36) et (3.37) on obtient*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z-4}{z-1} \tag{3.38}$$

*(3.38) est équivalente à*

$$\frac{z-1}{2z-4}dz = dx. \tag{3.39}$$

*Intégrons (3.39) on obtient*

$$z + \ln|z-2| = 2x + c. \tag{3.40}$$

*Substituons dans (3.40) la valeur de z, on trouve*

$$x + y + \ln|x+y-2| = 2x + c. \tag{3.41}$$

### 3.1.4 Equations linéaires du premier ordre

**Définition 3.9** *On appelle équation du premier ordre toute équation s'écrivant sou la forme*

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{3.42}$$

*où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues.*

#### Méthode de résolution

**Première méthode** Cette méthode consiste à chercher la solution $y(x)$ de (3.42) sous forme d'un produit de deux fonctions c'est-à-dire

$$y(x) = u(x)v(x). \tag{3.43}$$

Dérivons les deux membres de (3.43), et substituons le tout dans (3.42), on obtient

$$u(x)\left(\frac{dv}{dx}(x)+a(x)v(x)\right)+v(x)\frac{du}{dx}(x)=b(x). \tag{3.44}$$

Choisissons $v(x)$ de telle sorte à avoir

$$\frac{dv}{dx}(x)+a(x)v(x)=0, \tag{3.45}$$

ainsi

$$v(x)=ce^{-\int a(x)dx}. \tag{3.46}$$

Comme les fonctions $u$ et $v$ sont arbitraires on peut prendre dans (3.46) $c=1$, donc en prend

$$v(x)=e^{-\int a(x)dx}, \tag{3.47}$$

substituons (3.47) dans (3.44), on trouve

$$\frac{du}{dx}(x)=b(x)\,e^{\int a(x)dx}.$$

Ainsi

$$u(x)=\int b(x)\,e^{\int a(x)dx}dx+c.$$

Et la solution de (3.42) aura la forme

$$y(x)=\left(e^{-\int a(x)dx}\right)\left(\int b(x)\,e^{\int a(x)dx}dx+c\right).$$

**Deuxième méthode** C'est ce qu'on appelle la méthode de la variation de la constante. On commence par résoudre l'équation sans second membre, ensuite on suppose que la constante d'intégration $c$, est une fonction qui dépend de la variable $x$, on substitue la solution ainsi trouvée dans l'équation donnée, nous parviendrons à la solution générale souhaitée.

**Exemple 3.6** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y' - \frac{2}{x+1}y = x. \tag{3.48}$$

***1^er^ méthode***

*Posons $y = uv$, (3.48) donne*

$$u'v + v'u - \frac{2}{x+1}uv = x, \tag{3.49}$$

*(3.49) implique*

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right) = x. \tag{3.50}$$

*Trouvons une fonction $v$ qui vérifie l'équation*

$$v' - \frac{2}{x+1}v = 0. \tag{3.51}$$

*Les solutions de (3.50) s'écrivent*

$$v(x) = c(x+1)^2. \tag{3.52}$$

*Substituons (3.51) dans (3.50) on trouve*

$$u' = \frac{x}{c(x+1)^2} = \frac{1}{c(x+1)} - \frac{1}{c(x+1)^2}. \tag{3.53}$$

*D'où*

$$u = \frac{1}{c}\ln|x+1| + \frac{1}{c(x+1)} + c_1. \tag{3.54}$$

*Ainsi la solution de (3.48) vaut*

$$y(x) = (x+1)^2\ln|x+1| + (x+1) + \ C(x+1)^2. \tag{3.55}$$

***$2^{ième}$ méthode***

*l'équation homogène associée à (3.48) est*

$$y' - \frac{2}{x+1}y = 0, \tag{3.56}$$

*(3.56) admet comme solution*

$$y(x) = c(x+1)^2. \tag{3.57}$$

*On suppose que la constante c est en fonction de x, (3.57) devient*

$$y(x) = c\,(x)\,(x+1)^2. \tag{3.58}$$

*Substituons (3.58) dans (3.48), on obtient*

$$\begin{aligned}
c'\,(x)\,(x+1)^2 + 2c\,(x)\,(x+1) - \frac{2}{x+1}c\,(x)\,(x+1)^2 &= x. \\
c'\,(x)\,(x+1)^2 &= x \\
c'\,(x) &= \frac{x}{(x+1)^2} \\
c'\,(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \\
c\,(x) &= \frac{1}{x+1} + \ln|x+1| + C.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

*Combinons (3.59) et (3.58), on obtient la solution de (3.48).*

### 3.1.5 Equations aux différentielles totales

**Définition 3.10** *Toutes équations s'écrivant sous la forme*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{3.60}$$

*telles que* $M(x,y)$*,* $N(x,y)$*,*$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)$ *et* $\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ *sont des fonctions continues sur un certain domaine vérifiant*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y). \tag{3.61}$$

*Sont dites équations aux différentielles totales.*

**Méthode de résolution**

Rappelons tout d'abord que la différentielle totale d'une fonction $u(x,y)$ est

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)dy. \tag{3.62}$$

D'après (3.60) et (3.61), il existe une fonction $u(x,y)$ qui remplit les hypothèses de la Définition 3.10 autrement dit le premier terme de (3.60) est la différentielle totale d'une certaine fonction. Donc on peut dire que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = N(x,y). \end{cases} \tag{3.63}$$

Choisissons une des équations du système (3.63) et intégrons la de telle sorte à avoir la fonction $u(x,y)$ c'est- à-dire qu'on intègre la première par rapport à $x$ ou la seconde par rapport à $y$, substituons le résultat dans l'équation restante on trouve l'écriture explicite de la fonction $u(x,y)$, ainsi la solution de (3.60) sera donnée par $u(x,y) = 0$.

**Exemple 3.7** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$\left(x^2 + y\right) dx + (x - 2y)\, dy = 0. \tag{3.64}$$

*Posons* $M(x,y) = x^2 + y$ *et* $N(x,y) = x - 2y$*. Assurons-nous de la condition (3.61)*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \tag{3.65}$$

*d'après (3.65) et (3.64) il existe une fonction $u(x, y)$ telle qu'elle vérifie le système (3.63), on a donc*

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)dx = \int \left(x^2 + y\right) dx, \tag{3.66}$$

*cette dernière implique*

$$u(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy + c(y). \tag{3.67}$$

*Dérivons (3.67) par rapport à $y$, on obtient*

$$x + c'(y) = x - 2y. \tag{3.68}$$

*(3.68) donne*

$$c'(y) = -2y, \tag{3.69}$$

*intégrons cette dernière par rapport à $y$ on trouve*

$$c(y) = -y^2 + c. \tag{3.70}$$

*D'où*

$$u(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 + c.$$

*Ainsi la solution de (3.64) est*

$$\frac{1}{3}x^3 + xy + -y^2 = c.$$

### 3.1.6 Facteur intégrant

Supposons qu'on nous propose de résoudre une équation de la forme (3.60) par contre cette dernière ne satisfait pas la condition (3.60), autrement dit le premier terme de l'équation donnée n'est pas une différentielle totale. Dans ce cas il est possible de trouver une fonction $\mu(x, y)$ telle que sa multiplication avec l'équation proposée génère une différentielle totale, la fonction $\mu(x, y)$ sera dite facteur intégrant de l'équation (3.60).

**Procédé de recherche du facteur intégrant**

Multiplions l'équation (3.60) par la fonction $\mu(x, y)$, on obtient

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0. \tag{3.71}$$

Pour que (3.71) soit une équation aux différentielles totales, il faut et il suffit qu'elle vérifie

$$\frac{\partial\,(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial\,(\mu N)}{\partial x}. \tag{3.72}$$

(3.72) est équivalente à

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{3.73}$$

Multiplions les deux membres de (3.73) par $\frac{1}{\mu}$ $(\mu(x, y) \neq 0)$, on obtient

$$M\frac{\partial\,(\ln \mu)}{\partial y} - N\frac{\partial\,(\ln \mu)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{3.74}$$

– Si la quantité $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ dépend uniquement de $y$, c'est-à-dire

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = f(y)$$

alors le facteur intégrant vaut

$$\mu = e^{\int f(y)dy}.$$

– Si la quantité $\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}}{N}$ dépend uniquement de $x$, c'est-à-dire

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x)$$

alors le facteur intégrant sera égal à

$$\mu = e^{\int g(x)dx}.$$

– Le cas échéant, soit on nous le donne carrément ou bien il faudra tâtonner jusqu'à ce qu'on puisse trouver une fonction satisfaisant à (3.72).

**Exemple 3.8** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$2ydx + (2x + xy)\,dy = 0. \tag{3.75}$$

*On a* $M(x,y) = 2y$, $N(x,y) = 2x + xy, \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2$ *et* $\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2 + y$. *Comme* $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$*, (3.75) n'est pas une équation aux différentielles totales. Cherchons le facteur intégrant, on a*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-y}{2x + xy}, \quad \text{ne dépend pas uniquement de } x.$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2 + y - 2}{2y} = \frac{1}{2},$$

*donc nous prenons comme facteur intégrant la fonction*

$$\mu\,(y) = e^{\int \frac{1}{2}dy} = e^{\frac{1}{2}y}.$$

*Ainsi l'équation* $2ye^{\frac{1}{2}y}dx + (2x + xy)\,e^{\frac{1}{2}y}dy = 0$ *est exacte. Il existe donc une fonction* $u(x,y)$ *vérifiant le système (3.63).*

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dx = \int 2ye^{\frac{1}{2}y}dx, \tag{3.76}$$

*ce qui donne*

$$u(x,y) = 2yxe^{\frac{1}{2}y} + c(y), \tag{3.77}$$

*d'où*

$$c'(y) + 2xe^{\frac{1}{2}y} + yxe^{\frac{1}{2}y} = (2x + xy)\, e^{\frac{1}{2}y} \tag{3.78}$$

*implique*

$$c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = \alpha. \tag{3.79}$$

*Ainsi la solution générale est*

$$2yxe^{\frac{1}{2}y} - \alpha = 0.$$

### 3.1.7 Equation de Bernoulli

**Définition 3.11** *On appelle équation de Bernoulli toute équation s'écrivant sous la forme*

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \tag{3.80}$$

*où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues et $n \neq 0$, $n \neq 1$.*

#### Méthode de résolution

On divise les deux membres de (3.80) par $y^n$, faisons le changement de variable

$$z = y^{1-n}, \tag{3.81}$$

(3.80) devient

$$z' + (1 - n)\, a(x)z = (1 - n)b(x). \tag{3.82}$$

(3.82) est une équation linéaire du premier ordre (voir 3.1.4), résolvons cette dernière et revenons à la première variable, on obtient la solution de (3.80).

**Remarque 3.4** *Pour $n = 0$, (3.80) devient*

$$y' + a(x)y = 0, \tag{3.83}$$

*le cas où $n = 1$, (3.80) s'écrit*

$$y' + [a(x) - b(x)]\, y = 0. \tag{3.84}$$

*(3.83) et (3.84) sont dès le départ des équations linéaires sans second membre.*

**Exemple 3.9** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y' + 2xy = \frac{x}{\sqrt[3]{y}}. \tag{3.85}$$

*Divisons les deux membres de (3.85) par $\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$, on obtient*

$$y'y^{\frac{1}{3}} + 2xy^{\frac{4}{3}} = x, \tag{3.86}$$

*posons $z = y^{\frac{4}{3}}$, donc $z' = \frac{4}{3}y'y^{\frac{1}{3}}$. (3.86) devient*

$$3z' + 8xz = 4x, \tag{3.87}$$

*l'équation homogène associée à (3.87) est une équation à variable séparée, elle admet comme solution*

$$z(x) = ce^{-\frac{4}{3}x^2}. \tag{3.88}$$

*Supposons que (3.88) s'écrit*

$$z(x) = c\,(x)\, e^{-\frac{4}{3}x^2}.$$

*Substituons là dans (3.87), on obtient*

$$c'\,(x) = \frac{4}{3}xe^{\frac{4}{3}x^2} \Rightarrow c\,(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{4}{3}x^2} + c.$$

*Ainsi*

$$z(x) = \frac{1}{2} + ce^{-\frac{4}{3}x^2}$$

*d'où la solution de (3.85) est*

$$y(x) = \left[\frac{1}{2} + ce^{-\frac{4}{3}x^2}\right]^{\frac{3}{4}}.$$

### 3.1.8 Equation de Riccati

**Définition 3.12** *On appelle équation de Riccati toute équation s'écrivant sous la forme*

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x). \tag{3.89}$$

*où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions continues.*

#### Méthode de résolution

Il suffit de connaitre une solution particulière c'est-à-dire une certaine fonction $y_1(x)$ satisfaisant à (3.89), et en faisant le changement de variable

$$y = y_1 + z. \tag{3.90}$$

(3.89) devient

$$z' + (a(x) + 2b(x)y_1(x))\, z = -b(x)z^2, \tag{3.91}$$

qui est une équation de Bernoulli.

**Proposition 3.1** *Etant donné une équation de Riccati de la forme*

$$y' = \alpha y^2 + \frac{\beta}{x}y + \frac{\gamma}{x^2}, \tag{3.92}$$

*où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des constantes.*

*Si $(\beta + 1)^2 \geq 4\alpha\gamma$ est vérifié, la solution particulière aura la forme*

$$y_1(x) = \frac{a}{x}. \tag{3.93}$$

*a est une constante à déterminer.*

**Proposition 3.2** *Etant donné une équation de Riccati de la forme*

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{\alpha}{x}y^2 + \beta, \tag{3.94}$$

*où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes.*

*(3.94) se ramené à une équation à variables séparables, pour le changement de variable suivant*

$$y = z\sqrt{x}. \tag{3.95}$$

**Exemple 3.10** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y' + \frac{y}{x} - y^2 + \frac{1}{x^2} = 0, \tag{3.96}$$

*sachant qu'elle admet comme solution particulière la fonction $y(x) = \frac{1}{x}$.*

*Considérons le changement de variable*

$$y = z + \frac{1}{x}. \tag{3.97}$$

*Combinons (3.96) et (3.97), on obtient*

$$z' - \frac{z}{x} = -z^2 \tag{3.98}$$

*(3.98) est une équation de Bernoulli, divisons ces deux membres par $(-z^2)$, on trouve*

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{1}{x}\frac{1}{z} = 1. \tag{3.99}$$

*Posons $w = \frac{1}{z} \Rightarrow w' = -\frac{1}{z^2}z'$, (3.99) devient*

$$w' + \frac{1}{x}w = 1. \tag{3.100}$$

*(3.100) admet comme solution*

$$w(x) = \frac{1}{2}x + \frac{c}{x} = \frac{x^2 + 2c}{2x}, \tag{3.101}$$

*(3.101) implique*

$$z(x) = \frac{2x}{x^2 + 2c}. \tag{3.102}$$

*Ainsi la solution de (3.96) est*

$$y(x) = \frac{2x}{x^2 + 2c} + \frac{1}{x}. \tag{3.103}$$

### 3.1.9 Equation de Clairaut

**Définition 3.13** *On appelle équation de Clairaut toute équation s'écrivant sous la forme*

$$y = xy' + \varphi\left(y'\right). \tag{3.104}$$

**Méthode de résolution**

Posons dans (3.104)

$$y' = p. \tag{3.105}$$

Substituons (3.105) dans (3.104), on trouve

$$y = xp + \varphi\left(p\right). \tag{3.106}$$

Dérivons (3.106) par rapport à $x$, on obtient

$$\left[x + \varphi'\left(p\right)\right]\frac{dp}{dx} = 0, \tag{3.107}$$

(3.107) implique

$$\frac{dp}{dx} = 0, \tag{3.108}$$

ou

$$x + \varphi'(p) = 0. \tag{3.109}$$

(3.108) entraîne

$$p = c, \tag{3.110}$$

d'où

$$y = xc + \varphi(c). \tag{3.111}$$

De (3.109), on a

$$p = (\varphi')^{-1}(-x) = \psi(x). \tag{3.112}$$

Intégrons (3.108) on obtient la solution générale de (3.104) tandis que la solution de (3.109) est appelée solution singulière de (3.104), géométriquement elle représente les tangentes de la solution générale, qu'on appelle aussi enveloppe de la solution générale.

**Exemple 3.11** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y = xy' + 2(y')^2. \tag{3.113}$$

*Posons $y' = p$, (3.113) devient*

$$y = xp + 2p^2. \tag{3.114}$$

*Dérivons (3.114) par rapport à $x$, on obtient*

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + 4p\frac{dp}{dx}. \tag{3.115}$$

*(3.115) implique*

$$(x + 4p)\frac{dp}{dx} = 0. \tag{3.116}$$

*De (3.116) on a*

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{dp}{dx}=0 \\ ou \\ x+4p \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} p=c \\ ou \\ p=-\frac{x}{4}. \end{array}\right. \tag{3.117}$$

*Ainsi la solution générale de (3.113) est*

$$y = xc + 2c^2. \tag{3.118}$$

*Par contre la solution singulière de (3.113) est*

$$y' = -\frac{x}{4} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{8}. \tag{3.119}$$

### 3.1.10 Equation de Lagrange

**Définition 3.14** *On appelle équation de Lagrange toute équation s'écrivant sous la forme*

$$y = x\varphi\left(y'\right) + \psi\left(y'\right). \tag{3.120}$$

#### Méthode de résolution

De la même manière que celle de l'équation de Clairaut substituons dans (3.120) $y'$par $p$ ensuite dérivons le résultat par rapport à $x$, on obtient

$$p = \varphi\left(p\right) + \left[x\varphi'\left(p\right) + \psi'\left(p\right)\right]\frac{dp}{dx}. \tag{3.121}$$

Les solutions singulières de (3.120) sont données par

$$y = x\varphi\left(c\right) + \psi\left(c\right), \tag{3.122}$$

où $c$ est solution de l'équation

$$c - \varphi\left(c\right) = 0. \tag{3.123}$$

Tandis que la solution générale (3.120) est la solution de l'équation linéaire suivante

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}. \tag{3.124}$$

La solution de (3.124) est de la forme

$$x = \omega(p, c), \tag{3.125}$$

(3.125) implique

$$p = \omega^{-1}(x, c). \tag{3.126}$$

Intégrons (3.126) on obtient la solution de (3.120) de la forme

$$y = \Phi(x, c). \tag{3.127}$$

**Exemple 3.12** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y = x(y')^2 + (y')^2. \tag{3.128}$$

*Substituons dans (3.128) $y'$ par $p$, ensuite dérivons le résultat par rapport à $x$, on obtient*

$$(2px + 2p)\frac{dp}{dx} = p(1-p). \tag{3.129}$$

*Les solutions singulières de (3.128) sont données par l'équation*

$$y = xp^2 + p^2, \tag{3.130}$$

*où $p$ est solution de l'équation*

$$p(1-p) = 0. \tag{3.131}$$

*Autrement dit*

$$y = 0 \text{ ou } y = x + 1. \tag{3.132}$$

*La solution générale de (3.128) est la solution de l'équation*

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{2}{(1-p)} = \frac{2}{(1-p)}. \tag{3.133}$$

*(3.133) admet comme solution*

$$x = -1 + \frac{c^2}{(p-1)^2}, \tag{3.134}$$

*(3.134) donne*

$$p = 1 + \frac{c}{\sqrt{x+1}}. \tag{3.135}$$

*Substituons (3.135) dans (3.128), on obtient*

$$\begin{aligned} y &= (x+1)\left(1 + \frac{c}{\sqrt{x+1}}\right)^2 \\ &= \left(2c + \sqrt{x+1}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.136}$$

*Remplaçons (3.132 ) dans (3.136), pour différencier la solution singulière de la solution particulière*

$y = 0 \Rightarrow \left(2c + \sqrt{x+1}\right)^2 = 0 \Rightarrow 2c + \sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{x+1}}{2}$ *n'est pas constant, donc* $y = 0$ *est une solution singulière.*

$y = x + 1 \Rightarrow \left(2c + \sqrt{x+1}\right)^2 = x + 1 \overset{x \geq -1}{\Rightarrow} 2c + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+1} \Rightarrow c = 0$, *ainsi* $y = x + 1$ *est une solution particulière.*

### 3.1.11 Equations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

**Définition 3.15** *Toute équation de la forme*

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.137}$$

*où $a$, $b$ et $c$ sont des constantes réelles, est dite équation linéaire du second ordre à coefficients constants.*

On va chercher les solutions particulières de (3.137) sous la forme $y = e^{rx}$ où $r$ est une constante, substituons cette dernière dans (3.137), on obtient

$$e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0. \tag{3.138}$$

Comme $e^{rx} \neq 0$ (3.138) sera valide si et seulement si

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3.139}$$

L'équation (1.139) est dite polynôme caractéristique associé à l'équation (1.137).

#### Discussions des solutions de l'équation (1.137)

Tout d'abord on va calculer le discriminant de l'équation (1.139)

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

La discussion se fera d'après les valeurs de ce dernier, trois cas peuvent se présenter.

- $\Delta > 0$

L'équation (1.139) admet deux racines distinctes $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, la solution générale de (3.137) s'écrira

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}. \tag{3.140}$$

**Remarque 3.5** *$y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$ Sont linéairement indépendantes donc elles constituent une base ($\nexists \lambda \in \mathbb{R}^\star : y_1 = \lambda y_2$).*

**Exemple 3.13** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y'' + 2y' - 3y = 0. \tag{3.141}$$

*Le polynôme caractéristique associé à l'équation (3.141) est $r^2 + 2r - 3$, ce dernier admet comme racines $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$. La solution de (3.141) est*

$$y = c_1 e^{\ x} + c_2 e^{-3x}. \tag{3.142}$$

– $\Delta = 0$

L'équation (1.139) admet une racine double $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$, la solution générale de (3.137) s'écrira

$$y = (c_1 x + c_2)\, e^{r_1 x}. \tag{3.143}$$

**Remarque 3.6** *Comme dans le premier cas il faudrait chercher deux solutions linéairement indépendantes, par contre on a obtenu deux solutions identiques, donc on doit chercher une solution particulière linéairement indépendante avec celle trouvée et la solution générale sera une combinaison linéaire des deux. En général cette solution particulière s'écrit sous la forme*

$$y_2 = v(x) e^{r_1 x}. \tag{3.144}$$

*Substituons (3.142) dans (3.137), on obtient une certaine équation différentielle dont la* *fonction inconnue est $v(x)$, la solution de cette dernière est*

$$y_2 = xe^{r_1 x}. \tag{3.145}$$

**Exemple 3.14** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{3.146}$$

*Le polynôme caractéristique associé à l'équation (3.141) est $r^2 + 2r + 1$, ce dernier admet une racine double $r_1 = r_2 = -1$. La solution de (3.146) est*

$$y = (c_1 x + c_2)\, e^{-x}. \tag{3.147}$$

– $\Delta < 0$

L'équation (1.139) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha + i\beta$, la solution générale de (3.137) s'écrira

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right). \tag{3.148}$$

**Exemple 3.15** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y'' + 2y' + 5y = 0. \tag{3.149}$$

*Le polynôme caractéristique associé à l'équation (3.141) est $r^2 + 2r + 5$, ce dernier admet comme racine $r_1 = -1 + 2i$ et $r_2 = -1 - 2i$. La solution de (3.149) est*

$$y = e^{\,-x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right). \tag{3.150}$$

### 3.1.12 Equations linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants (avec second membre)

**Définition 3.16** *Toute équation de la forme*

$$ay'' + by' + cy = g(x), \tag{3.151}$$

*où $a$, $b$ et $c$ sont des constantes réelles et $g(x) \neq 0$, est dite équation linéaire non homogène du second ordre à coefficients constants.*

#### Méthode de résolution

Dans ce cas on procède comme suit, on commence tout d'abord par résoudre l'équation homogène associée à (3.151) qu'on note $y_h$ c'est-à-dire résoudre l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{3.152}$$

Ensuite on cherche une solution particulière qu'on note $y_p$, soit par superposition, soit par la variation de la constante, la solution générale de (3.151), s'écrit

$$y_g = y_h + y_p. \tag{3.153}$$

**Exemple 3.16** *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y'' + 5y' + 6y = 2\cos x. \tag{3.154}$$

*Nous allons commencer par résoudre l'équation homogène associée à (3.153)*

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \tag{3.155}$$

*(3.154) admet comme solution*

$$y_h = c_1 e^{-2\ x} + c_2 e^{-3x}. \tag{3.156}$$

*La solution particulière a la forme*

$$y_p = A\cos x + B\sin x. \tag{3.157}$$

*Substituons (3.156) dans (3.153) et trouvons les valeurs de A et B, on obtient*

$$5\,(A+B)\cos x + 5\,(B-A)\sin x = 2\cos x. \tag{3.158}$$

*Par identification, on trouve*

$$A = B = \frac{1}{5}. \tag{3.159}$$

*(3.158) implique*

$$y_p = \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x. \tag{3.160}$$

*Ainsi la solution générale de (3.153) est*

$$y_g = c_1 e^{-2\ x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x. \tag{3.161}$$

## 3.2 Equations aux dérivées partielles

Dans la première section on était amenés à résoudre des équations différentielles dont la fonction inconnue dépend d'une seule variable c'est ce qu'on avait nommé équation différentielle ordinaire (e.d.o.). Dans cette présente section nous allons étendre notre étude au cas où la fonction inconnue dépendrait de plusieurs variables, dans ce cas on dira qu'on est ramenés à résoudre des équations aux dérivées partielles (e.d.p.), on se limitera à l'étude et la résolution des équations du premier et du second ordre.

### 3.2.1 Généralités

Soit $u$ une fonction dépendant de $n$ variables indépendantes $x_1, x_2, ..., x_n$.

**Définition 3.17** *On appelle e.d.p. toute relation entre une fonction inconnue $u$, $x_1, x_2, ..., x_n$ et ses dérivées partielles, dont la forme générale est*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} .. \partial x_k^{m_k}}) = g\left(x_1, x_2, ..., x_n, u\right), \quad (3.162)$$

*où* $1 \leq k \leq n$ *et* $m_1 + m_2 + .. + m_k = n$.

**Définition 3.18** *L'ordre d'une e.d.p. est l'ordre de la dérivée partielle la plus élevé qu'elle contient.*

**Définition 3.19** *Une e.d.p. est dite linéaire quand elle l'est par rapport à $u$ et à toutes ses dérivées partielles.*

**Définition 3.20** *Une e.d.p. est dite homogène si dans (3.162) $g\left(x_1, x_2, ..., x_n, u\right) = 0$.*

**Définition 3.21** *Une e.d.p. est dite quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport à la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.*

### 3.2.2 E.d.p. du $1^{er}$ ordre

**Définition 3.22** *On appelle e.d.p. du $1^{er}$ ordre toute équation ayant la forme suivante*

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i\left(x_1, x_2, ..., x_n, u\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + G(x_1, x_2, ..., x_n) u = F(x_1, x_2, ..., x_n). \quad (3.163)$$

**Remarque 3.7** *(3.163) est une équation quasi-linéaire, elle devient homogène pour $F = 0$ et elle est linéaire si $A_i$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ ne dépend pas de $u$.*

On se limitera dans notre étude aux e.d.p. de 2 et 3 variables indépendantes.

**Méthode des caractéristiques**

Considérons le problème suivant

$$F\left(x, u\left(x\right), \nabla u\left(x\right)\right) = 0, \tag{3.164}$$

où $F \in C^1\left(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (i.e. $x = (x_1, x_2, ..., x_3)$) et $\nabla u\left(x\right)$ est le gradient de $u\left(x\right)$ (i.e. $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$).

On veut essayer de trouver une solution classique de l'équation (3.164), c'est-à-dire chercher une fonction $u \in C^1\left(\Omega\right)$ vérifiant (3.164).

**Remarque 3.8** *Les équations aux dérivées partielles du premier ordre n'admettent pas forcément des solutions s'écrivant sous forme de combinaisons linéaires de fonctions élémentaires, dans ce cas on sera amené à chercher une fonction $u \in C\left(\Omega\right)$, remplissant des conditions complémentaires ensuite c'est ce qu'on appellera solution faible.*

Tout d'abord on va traiter le cas où l'e.d.p. dépend de deux variables indépendantes.

Considérons l'e.d.p. suivante

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u). \tag{3.165}$$

En chaque point de l'espace $(x, y, u)$, il existe une direction dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $a, b$ et $c$. Ce champ de directions définit une famille de lignes telles que la tangente à chacune d'elles est confondue avec la direction du champ au point de contact, cette dernière s'obtient par intégration du système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}. \tag{3.166}$$

Notons par $ds$ la valeur commune de ces rapports, (3.166) devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x,y,u) \\ \frac{dy}{ds} = b(x,y,u) \\ \frac{du}{ds} = c(x,y,u). \end{cases} \tag{3.167}$$

Ainsi la surface intégrale formée par les caractéristiques de l'équation (3.166) est la solution cherchée, on écrit

$$\Phi\left(c_1, c_2\right)) = 0 \text{ ou } c_1 = \Phi\left(c_2\right). \tag{3.168}$$

D'où l'appellation de la méthode.

**Exemple 3.17** *Résoudre l'e.d.p. suivante*

$$xy^2\frac{\partial u}{\partial x} + x^2y\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2+y^2)u. \tag{3.169}$$

*On associe à (3.168) le système suivant*

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{du}{(x^2+y^2)u}. \tag{3.170}$$

*D'une part on a*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{xy^2} &= \frac{dy}{x^2y} \Rightarrow \\ ydy &= xdx \Rightarrow y^2 - x^2 = c_1. \end{aligned} \tag{3.171}$$

*D'autre part*

$$\begin{aligned} x^2\frac{dy}{x^2y} + y^2\frac{dx}{xy^2} &= x^2\frac{du}{(x^2+y^2)u} + y^2\frac{du}{(x^2+y^2)u} \\ \frac{xdy}{xy} + \frac{ydx}{xy} &= \frac{du}{u} \\ \frac{d\left(xy\right)}{xy} &= \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{u}{xy} = c_2. \end{aligned} \tag{3.172}$$

*Ainsi la solution de (3.168) est*

$$\frac{u}{xy} = \Phi\left(y^2 - x^2\right) \Rightarrow u = xy\Phi\left(y^2 - x^2\right). \tag{3.173}$$

*D'une manière analogue on généralise la méthode dans le cas $n$ dimensionnel on aura un système de $(n+1)$ équations, donc $n$ intégrales premières, et la solution aura la forme*

$$\Phi(c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \text{ ou } c_n = \Phi(c_1, c_2, ..., c_{n-1}). \tag{3.174}$$

**Quelques types d'e.d.p. du $1^{er}$ ordre**

- Equation de transport
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \tag{3.175}$$
où $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et $c$ une constante.
- Equation d'onde de choc
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \tag{3.176}$$
où $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
- Equation de Burgers
$$a(u)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \tag{3.177}$$
où $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

### 3.2.3 E.d.p. du second ordre

**Définition 3.23** *On appelle e.d.p. du second ordre toute équation de la forme*

$$F\left(x_1, x_2, .., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, .., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, .., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right) = 0 \tag{3.178}$$

*ou*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x_1,...x_n,u\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\left(x_1,...x_n,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\;=f\left(x_1,...x_n,u\right). \tag{3.179}$$

Nous nous limiterons dans notre étude aux équations du second ordre linéaire et quasi linéaire à deux variables indépendantes c'est-à-dire les équations de la forme

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+g(x,y)u=f(x,y) \tag{3.180}$$

ou

$$a(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=R(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}). \tag{3.181}$$

**Classification des e.d.p. du 2$^{ème}$ ordre**

Le type des équations (3.180) et (3.181) dépend de leur discriminant $\triangle = b^2 - ac$.

**Définition 3.24** *L'équation est du type hyperbolique si et seulement si* $\triangle > 0$.

***Exemple 3.18*** *Considérons l'équation aux dérivées partielles suivantes :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u, \tag{3.182}$$

*définie sur* $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$\triangle = b^2 - ac = 3 > 0$ *pour tout* $x, y$ *de* $\Omega$. *Donc c'est une équation du type hyperbolique.*

***Définition 3.25*** *L'équation est du type parabolique si et seulement si* $\triangle = 0$.

***Exemple 3.19*** *Considérons l'équation aux dérivées partielles suivantes :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0, \tag{3.183}$$

*définie sur* $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$\triangle = b^2 - ac = 0$ *pour tout* $x, y$ *de* $\Omega$. *Donc c'est une équation du type parabolique.*

**Définition 3.26** *L'équation est du type elliptique si et seulement si* $\triangle < 0$.

***Exemple 3.20*** *Considérons l'équation aux dérivées partielles suivantes :*

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3.184}$$

*définie sur* $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

$\triangle = b^2 - ac = -xy < 0$ *pour tout* $x, y$ *de* $\Omega$. *Donc c'est une équation du type elliptique.*

### Principales équations de la physique

**Equation de Laplace** Elle a la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^{\,2}} + c^{\,2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^{\,2}} = 0. \tag{3.185}$$

Pour $c = \pm 1$ l'équation (3.185) est elliptique.

**Equation de Poisson** Elle a la forme :

$$\nabla^{\,2} u = \delta(x, y). \tag{3.186}$$

Est une équation elliptique.

**Equation de la chaleur (équation de diffusion)** Elle a la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^{\,2}} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{3.187}$$

C'est une équation parabolique. Le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ est appelé terme de diffusion.

**Equation des ondes** Elle a la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.188}$$

ou

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3.189}$$

C'est une équation hyperbolique. Le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ est appelé terme de propagation.

**Equation de Tricomi** Elle a la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.190}$$

### Conditions aux frontières et problème bien posé

Dans la pratique on est souvent amenés à étudier un des problèmes suivants.

**Problème de Dirichlet**

$$\begin{cases} L.u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Problème de Neumann**

$$\begin{cases} L.u = f & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Problème mixte**

$$\begin{cases} L.u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega_2. \end{cases}$$

Où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est noté $\partial\Omega$ vérifiant $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$, $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$ et

$$L\ . = a(x,y)\frac{\partial^2 .}{\partial x^{\ 2}} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 .}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 .}{\partial y^{\ 2}}.$$

**Définition 3.27** *Le problème d'e.d.p. est dit bien posé si :*

*1) il existe une solution de l'e.d.p. satisfaisant les conditions frontières (existence).*

*2) la solution doit être unique (unicité).*

*3) la solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilité).*

### 3.2.4 Forme standard des e.d.p. du $2^{ème}$ ordre ( Méthode des caractéristiques )

**Théorème 3.1** *Les courbes caractéristiques (3.180) sont les solutions de l'équation*

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0, \tag{3.191}$$

*si* $a(x,y) \neq 0$.

*si* $a(x,y) = 0$ *et* $c(x,y) \neq 0$, *alors les courbes caractéristiques (3.180) sont les solutions de l'équation*

$$c(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b(x,y)\frac{dy}{dx} + a(x,y) = 0. \tag{3.192}$$

*Dans le cas où* $a(x,y) = 0$ *et* $c(x,y) = 0$, *les courbes caractéristiques (3.180) sont des droites d'équations*

$$x = k_1 \quad et \quad y = k_2. \tag{3.193}$$

**Théorème 3.2** *Si (3.180) est du type hyperbolique, en prend comme changement de* *variable les courbes caractéristiques ($\varphi_1(x,y) = k_1$ et $\varphi_2(x,y) = k_2$), pour*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x,y) \\ x_2 = \varphi_2(x,y), \end{cases} \tag{3.194}$$

*l'équation (3.180) devient*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = G\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right). \tag{3.195}$$

*De plus si en prend*

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y) \\ y_2 = \varphi_1(x,y) - \varphi_2(x,y), \end{cases} \tag{3.196}$$

*alors (3.180) s'écrira*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = H\left(y_1, y_2, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}\right). \tag{3.197}$$

**Théorème 3.3** *Si (3.180) est du type parabolique, en prend comme changement de variable les courbes caractéristiques $x_1 = \varphi_1(x,y)$ et $x_2$ n'importe quelle fonction indépendante avec $\varphi_1$, l'équation (3.180) devient*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = G\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right). \tag{3.198}$$

**Théorème 3.4** *Si (3.180) est du type elliptique, en prend comme changement de variable les courbes caractéristiques $[\eta_1(x,y) + i\psi_1(x,y) = \lambda_1 \in \mathbb{C},\ \eta_2(x,y) + i\psi_2(x,y) = \lambda_2 \in \mathbb{C}]$, pour*

$$\begin{cases} x_1 = \eta_1(x,y) + i\psi_1(x,y) \\ x_2 = \eta_2(x,y) + i\psi_2(x,y), \end{cases} \tag{3.199}$$

*le terme de la dérivée mixte dans l'équation (3.180) disparaitra.*

**Exemple 3.21** *Considérons le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \varphi_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_2(x), \end{cases} \tag{3.200}$$

*où a est une constante. Donner la solution de (3.200) par la méthode des caractéristiques.*

*En effet :* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *est l'équation de la corde vibrante, le discriminant* $\Delta = 4a^2 > 0$*, donc c'est une équation du type hyperbolique. Les courbes caractéristiques (3.200) sont les solutions de l'équation*

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0, \tag{3.201}$$

*ce qui entraîne*

$$(dx - adt)(dx + adt) = 0. \tag{3.202}$$

*Ainsi* $x - at = c_1$ *et* $x + at = c_2$*. En prend comme changement de variable* $z(x,t) = x - at$ *et* $y(x,t) = x + at$*, on trouve*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0. \tag{3.203}$$

*(3.203) implique*

$$u(z,y) = \Psi_1(z) + \Psi_2(y), \tag{3.204}$$

*d'où*

$$u(x,t) = \Psi_1(x - at) + \Psi_2(x + at), \tag{3.205}$$

*d'après les conditions initiales on a*

$$u(x,0) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x) = \varphi_1(x), \tag{3.206}$$

*et*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -a\Psi_1'(x) + a\Psi_2'(x) = \varphi_2(x). \tag{3.207}$$

*Intégrons (3.207) on obtient*

$$-\Psi_1(x) + \Psi_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_2(\theta)\,d\theta. \tag{3.208}$$

*Additionnons (3.206) et (3.208) on trouve*

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_2(\theta)\,d\theta. \tag{3.209}$$

*La soustraction entre (3.206) et (3.208) donne*

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_2(\theta)\,d\theta. \tag{3.210}$$

*Ainsi la solution de (3.200) est*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\varphi_1(x-at)+\varphi_1(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at} \varphi_2(\theta)\,d\theta - \int_0^{x-at} \varphi_2(\theta)\,d\theta\right] \\ &= \frac{\varphi_1(x-at)+\varphi_1(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_2(\theta)\,d\theta. \end{aligned} \tag{3.211}$$

### 3.2.5 Séparation des variables

Considérons l'e.d.p. du second ordre à coefficients constants suivante

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = 0. \tag{3.212}$$

Autrement dit le terme de la dérivée mixte ne figure pas dans l'e.d.p.

La méthode consiste à chercher une solution $u(x,y)$ du problème donné sous la forme

$$u(x,y) = f(x).g(y). \tag{3.213}$$

Substituons (3.213) dans (3.212), on obtient

$$a\ f''(x).g(y) +\ bf(x).g''(y) + \alpha f'(x).g(y) + \beta f(x).g'(y) + \gamma f(x).g(y) = 0. \tag{3.214}$$

Supposons $f(x).g(y) \neq 0$, (3.214) peut être réécrite comme suit

$$a\ \frac{f''(x)}{f(x)} +\ b\frac{g''(y)}{g(y)} + \alpha\frac{f'(x)}{f(x)} + \beta\frac{g'(y)}{g(y)} + \gamma\ = 0. \tag{3.215}$$

Ainsi on obtient deux e.d.o. à résoudre

$$\begin{cases} a\ \frac{f''(x)}{f(x)} + \alpha\frac{f'(x)}{f(x)} + c = 0 \\ b\frac{g''(y)}{g(y)} + \beta\frac{g'(y)}{g(y)} + \gamma - c = 0, \end{cases} \tag{3.216}$$

(3.216) est équivalente à

$$\begin{cases} a\ f''(x) + \alpha f'(x)\ + cf(x) = 0 \\ bg''(y) + \beta g'(y) + (\gamma - c)\, g(y) = 0, \end{cases} \tag{3.217}$$

où $c$ est une constante arbitraire. On résout les e.d.o. résultantes du système (3.217) on obtient les formes explicites de $f(x)$ et $g(y)$, substituons ces dernières dans (3.212) on obtient la forme de $u(x,y)$.

**Exemple 3.22** *Soit le problème suivant*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_2(x), \end{cases} \tag{3.218}$$

*où $a$ et une constante. Trouver la solution de (3.18) par la méthode de séparation des variables.*

*En effet : On suppose que la solution $u(x,t)$ s'écrit sous la forme $u(x,t)=f(x)g(t)$, ainsi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.219}$$

*devient*

$$f(x)g''(t) \; = a^2 f''(x)g(t), \tag{3.220}$$

*(3.219) est équivalente à*

$$\frac{g''(t)}{a^2 g(t)}=\frac{f''(x)}{f(x)}=-w^2. \tag{3.221}$$

*(3.20) donne les deux e.d.o. suivantes*

$$f''(x)+w^2 f(x)=0 \tag{3.222}$$

*et*

$$g''(t)+(aw)^2\, g(t)=0. \tag{3.223}$$

*(3.221) admet comme solution*

$$f(x)=c_1\cos wx+c_2\sin wx. \tag{3.224}$$

*Et (3.222) admet comme solution*

$$g(t)=c_3\cos wat+c_4\sin wat. \tag{3.225}$$

*Ainsi*

$$u(x,t)=(c_1\cos wx+c_2\sin wx)\,(c_3\cos wat+c_4\sin wat)\,. \tag{3.226}$$

*Appliquons les conditions initiales et les conditions aux limites on trouve*

$$u(0,t) = c_1 \left(c_3 \cos wat + c_4 \sin wat\right) = 0, \quad \textit{pour tout } t \Rightarrow c_1 = 0 \tag{3.227}$$

*et*

$$u(l,t) = c_2 \left(\sin wl\right) \left(c_3 \cos wat + c_4 \sin wat\right), \quad \textit{pour tout } t \Rightarrow wl = k\pi \Rightarrow w = \frac{k\pi}{l}. \tag{3.228}$$

*Ainsi on a*

$$u_k(x,t) = c_2 \left(c_{k,3} \cos \frac{ka\pi}{l} t + c_{k,4} \sin \frac{ka\pi}{l} t\right) \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{3.229}$$

*Fixons $c_2$ en prend par exemple $c_2 = 1$, notons $c_{k,3} = a_k$ et $c_{k,4} = b_k$, (3.226) devient*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{ka\pi}{l} t + b_k \sin \frac{ka\pi}{l} t\right) \sin \frac{k\pi}{l} x. \tag{3.230}$$

*Comme $u(x,0) = \varphi_1(x)$, on a donc*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = \varphi_1(x). \tag{3.231}$$

*(3.231) est le développement en séries de sinus de la fonction $\varphi_1(x)$ (On a supposé que la fonction $\varphi_1(x)$ est $2l$-périodique et impaire, en identifiant son développement en série de Fourier avec (3.231)), on trouve*

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \tag{3.232}$$

*De la condition $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_2(x)$, on a*

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_2(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \tag{3.233}$$

## 3.3 Fonctions spéciales

### 3.3.1 Fonctions eulériennes

**Définition 3.28** *On appelle intégrale eulérienne de première espèce ou fonction bêta, l'intégrale dépendant de deux paramètres $x$ et $y$ définie comme suit*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt. \tag{3.234}$$

*Ou*

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t dt. \tag{3.235}$$

**Définition 3.29** *On appelle intégrale eulérienne de deuxième espèce ou fonction gamma, l'intégrale dépendant du paramètre $x$, définie comme suit*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \tag{3.236}$$

*ou*

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} t^{2x-1}e^{-t^2}dt. \tag{3.237}$$

**Théorème 3.5** *Pour tout $x$ et $y$ positifs on a*

$$\beta(x,y)\,\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\,\Gamma(y). \tag{3.238}$$

**Théorème 3.6** *Pour tout $x$, on a*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{3.239}$$

**Théorème 3.7** *Pour tout* $0 < x < 1$, *on a*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{3.240}$$

### 3.3.2 Fonction hypergéométrique

Les fonctions hypergéométriques ont été introduites par Gauss lorsqu'il a dû résoudre l'équation différentielle suivante

$$x(1-x)y'' + (c - (1+a+b)x)y' - aby = 0,$$

où $a, b, c$ sont des réels ou complexes différents des entiers négatifs.

**Définition 3.30** *La fonction hypergéométrique est définie par la série*

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(a+k+1)\Gamma(b+k+1)\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)\Gamma(c+1+k)} \frac{z^k}{k!}.$$

**Remarque 3.9** *La forme intégrale de la fonction hypergéométrique est donnée par*

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{\beta(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt,$$

*où* $|z| < 1$, $c > b > 0$ *et* $\beta(.,.)$ *est la fonction bêta d'Euler.*

### 3.3.3 Fonction de Bessel de première espèce

**Définition 3.31** *On appelle fonction de Bessel la fonction* $J_\lambda(x)$, *définie par*

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - \lambda\theta)} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - \lambda\theta)\,d\theta. \tag{3.241}$$

**Remarque 3.10** *$J_\lambda(x)$ est solution de l'équation différentielle suivante*

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \lambda^2\right) y = 0. \tag{3.242}$$

**Remarque 3.11** *$J_\lambda(x)$ vaut également*

$$J_\lambda(x) = (\frac{x}{2})^\lambda \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!\Gamma(n+\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{3.243}$$

**Quelques propriétés des fonctions de Bessel**

$$J_{-\lambda}(x) = (-1)^\lambda J_\lambda(x). \tag{3.244}$$

$$J_{\lambda+1}(x) + J_{\lambda-1}(x) = \frac{2\lambda}{x} J_\lambda(x). \tag{3.245}$$

$$J_{\lambda+1}(x) - J_{\lambda-1}(x) = -2J'_\lambda(x). \tag{3.246}$$

$$J_{\lambda+1}(x) - \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) = -J'_\lambda(x). \tag{3.247}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-\lambda} J_\lambda(x) = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x). \tag{3.248}$$

$$\frac{d}{dx} x^\lambda J_\lambda(x) = x^\lambda \frac{d}{dx} J_\lambda(x) + \lambda x^{\lambda-1} J_\lambda(x) = x^\lambda J_{\lambda-1}(x). \tag{3.249}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-\lambda} J_\lambda(x) = x^{-\lambda} \frac{d}{dx} J_\lambda(x) - \lambda x^{-\lambda-1} J_\lambda(x) = -x^{-\lambda} J_{\lambda+1}(x). \tag{3.250}$$

$$e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x). \tag{3.251}$$

**Définition 3.32** *On appelle fonction de Bessel de $2^{\grave{e}me}$ espèce, la fonction définie comme suit*

$$Y_n = \lim_{\lambda \to n} \frac{\frac{d}{d\lambda}[(\cos \lambda\pi) J_\lambda(x) - J_{-\lambda}(x)]}{\frac{d}{d\lambda} \sin \lambda\pi}. \tag{3.252}$$

**Définition 3.33** *On appelle fonctions de Hankel ou fonctions de Bessel de troisième espèce les fonctions* $H_{\lambda}^{(1)}(z)$ *et* $H_{\lambda}^{(2)}(z)$ *définies par*

$$H_{\lambda}^{(1)}(z) = J_{\lambda}(z) + Y_{\lambda}(z) \tag{3.253}$$

*et*

$$H_{\lambda}^{(2)}(z) = J_{\lambda}(z) - Y_{\lambda}(z). \tag{3.254}$$

# Chapitre 4

# Les séries

## 4.1 Séries numériques

### 4.1.1 Séries à termes positifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.

**Définition 4.1** *On appelle série numérique réelle de terme général* $u_n$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n + ... \tag{4.1}$$

On note par $s_n$ la somme partielle des $n$ premiers termes et on a

$$s_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}. \tag{4.2}$$

**Définition 4.2** *On dit que la série numérique* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *est convergente si et seulement si sa suite de sommes partielles* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, c'est à dire* $\lim_{n\to+\infty} s_n$ *existe et est finie, si non on dira qu'elle est divergente.*

**Exemple 4.1** *Déterminer la nature de la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. *On* *a*

$$u_n = \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \tag{4.3}$$

*d'où*

$$\begin{aligned} s_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

*Ainsi*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \tag{4.5}$$

*Donc la série est convergente.*

**Théorème 4.1** *On n'affecte pas le caractère de convergence d'une série en lui ôtant un nombre fini de termes.*

**Propriétés des séries**

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries numériques, $\lambda$ un nombre arbitraire on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ convergente} &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) \text{ convergente.} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ et} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \text{ converge} &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n \pm v_n) \text{ converge.} \end{aligned}$$

**Condition nécessaire de la convergence des séries**

**Théorème 4.2** *Si* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

**Corollaire 4.1** *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ *alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est divergente.*

Dans l'étude de la nature d'une série il n'est pas toujours possible de calculer sa somme, par contre on peut déterminer sa nature en utilisant d'autres techniques, pour cela on a besoin d'autres outils.

### Critères de convergence des séries à termes positifs

**Critère de comparaison** Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries numériques à termes positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n, \tag{4.6}$$

ou bien (4.6) est vérifié à partir d'un certain rang

**Théorème 4.3** *Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ est convergente alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ l'est aussi.*

**Théorème 4.4** *Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ l'est aussi.*

**Remarque 4.1** *Souvent on compare une série avec la somme d'une progression géométrique qui converge si la raison $q$ est comprise entre $-1$ et $+1$ ($|q| < 1$) ou les séries Riemann $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ qui converge pour $\alpha > 1$ ou bien celle de Bertrand $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ qui converge pour $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

### Critère d'équivalence

**Théorème 4.5** *Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries numériques à termes positifs telle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les deux séries sont de même nature.*

**Remarque 4.2** *L'étude de la nature d'une série revient à l'étude de son développement limité au voisinage de l'infini, car ces deux derniers sont équivalents.*

### Critère de d'Alembert

**Théorème 4.6** *Si dans une série à termes positifs $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est finie et vaut $l$, alors*

*1) La série converge pour $l < 1$.*

*2) La série diverge pour $l > 1$.*

*3) Pour $l = 1$, on ne peut conclure.*

**Critère de Cauchy**

**Théorème 4.7** *Si dans une série à termes positifs* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *la limite de la racine* $n^{ème}$ *du* $n^{ème}$ *terme vaut* $l$*, alors nous aurons les mêmes conséquences que le Théorème 4.7.*

**Critère intégrale de Cauchy**

**Théorème 4.8** *Soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *une série numérique à termes positifs et décroissante (commence à décroître d'un certain rang* $n_0$*), on définit l'application* $f(x)$ *comme suit* $f(n) = u_n$*, alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *et* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ $\left(\int\limits_{n_0}^{+\infty} f(x)dx\right)$ *ont même nature.*

### 4.1.2 Série alternée

**Définition 4.3** *On appelle série alternée toute série ayant la forme suivante*

$$u_1 - u_2 + u_3 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ..., \tag{4.7}$$

*où* $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

**Théorème 4.9 (de Leibniz)** *Si dans une série alternée les termes vont en décroissance et la limite du terme générale tend vers zéro alors cette dernière converge, de plus sa somme est inférieure au premier terme.*

### 4.1.3 Série à termes de signes quelconques

**Définition 4.4** *Une série est dite à terme de signe quelconque si parmi ces termes on trouve ceux qui sont positifs aussi bien que négatifs.*

**Remarque 4.3** *La série alternée est un cas particulier des séries à termes de signes quelconques.*

**Théorème 4.10** *Pour qu'une série numérique* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *soit une suite de Cauchy c'est-à-dire*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \ , \forall p \geq 1 \left[ m > N \Rightarrow \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} u_n \right| < \varepsilon \right]. \tag{4.8}$$

**Définition 4.5** *Une série est dite absolument convergente si la série formée des valeurs absolues de ces termes est convergente.*

**Définition 4.6** *Une série est dite semi-convergente si elle converge sans être absolument convergente.*

**Théorème 4.11** *Toute série absolument convergente est convergente la réciproque est fausse.*

**Théorème 4.12 (d'Abel)** *Supposons que* $u_n = v_n.w_n$*, où* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient les conditions suivantes*

*1)* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$

*2)* $s_n$ *est bornée où* $s_n$ *est définie comme dans (4.2).*

*Alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente.*

**Théorème 4.13** *Supposons que* $u_n = v_n.w_n$*, où* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient les conditions suivantes*

*1)* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$*,* $(l \in \mathbb{R})$.

*2)* $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ *est convergente.*

*Alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente.*

## 4.2 Suites et séries de fonctions

### 4.2.1 Suites de fonction

**Définition 4.7** *On appelle suite de fonction toute suite dont le terme général est une fonction dépendant d'un paramétré $n$ et on note $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

**Types de convergences**

**Convergence simple**

**Définition 4.8** *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On dit que $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $I$, si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie qu'on note $f(x)$.*

**Convergence absolue**

**Définition 4.9** *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On dit que $(f_n)$ est absolument convergente si la suite formée des valeurs absolues de ces termes est convergente.*

**Convergence uniforme**

**Définition 4.10** *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On dit que $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $I$, si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{4.9}$$

**Théorème 4.14** *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions convergeant simplement vers $f$, si $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ est bornée alors la convergence est uniforme.*

**Théorème 4.15** *Toute suite uniformément convergente est simplement convergente, la réciproque est fausse.*

**Propriétés des suites de fonctions**

**Théorème 4.16** *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues en $x_0 \in I$, convergeant uniformément vers $f$ sur $I$. Alors $f$ est continue en $x_0$.*

**Théorème 4.17** *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers $f$ sur $I$. Alors $f$ l'est aussi.*

**Théorème 4.18** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers la fonction $f$. Alors la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f'$.*

**Théorème 4.19** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables convergeant uniformément vers une fonction $f$ sur $[a,b]$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx. \tag{4.10}$$

### 4.2.2 Séries de fonctions

**Définition 4.11** *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On appelle série de fonctions la somme infinie des termes de $f_n$ et on note*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x) + ... \tag{4.11}$$

**Définition 4.12** *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur $I$, si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $I$.*

**Définition 4.13** *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument sur $I$, si la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge simplement sur $I$.*

**Définition 4.14** *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $I$, si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $I$.*

**Définition 4.15** *Le domaine de convergence d'une série de fonction est l'ensemble des points où cette dernière converge absolument.*

**Définition 4.16** *On dit qu'une série de fonctions* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est majorable sur un certain domaine, s'il existe une série numérique positive et convergente, majorant cette dernière i.e.*

$$\exists v_n \geq 0, \ \sum v_n \text{ convergente } : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ on a } |f_n(x)| \leq v_n. \tag{4.12}$$

**Définition 4.17** *Toute série majorable est dite normalement convergente.*

**Théorème 4.20** *Toute série normalement convergente est uniformément convergente.*

**Théorème 4.21** *Toute série normalement convergente est absolument convergente.*

**Théorème 4.22** *Supposons que* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *soit majorable sur* $I$*, de somme* $s(x)$*, dont la somme des* $n$ *premiers termes vaut* $S_n(x)$*, alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall x \in I \ \text{ on a } \ |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

**Propriétés des séries de fonctions**

**Théorème 4.23** *Soit* $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une suite de fonctions, si* $f_n$ *est continue en* $x_0$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformément vers* $s(x)$*, alors* $s(x)$ *est continue en* $x_0$*.*

**Théorème 4.24** *Soit* $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une suite de fonctions, si* $f_n$ *est continue sur* $I$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformément vers* $s(x)$*, alors* $s(x)$ *l'est aussi.*

**Théorème 4.25** *Soit* $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une suite de fonctions intégrables si* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformément vers* $s(x)$*. Alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b s(x)dx. \tag{4.13}$$

**Théorème 4.26** *Soit $f_n : \ [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions majorable de classe $C^1$, convergeant uniformément vers $s(x)$, si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$ est uniformément convergente alors sa somme vaut $s'(x)$.*

## 4.3 Séries entières

**Définition 4.18** *On appelle série entière toute série s'écrivant sous la forme*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \tag{4.14}$$

*où $a_n$ est une série numérique.*

**Théorème 4.27 (d'Abel)** *Considérons la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, soit $\alpha$ un nombre strictement positif, si la suite de fonctions $(|a_n|\,\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ convergera pour tout $x$ tel que $|x| < \alpha$. Et si la suite de fonctions $(|a_n|\,\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ divergera pour tout $x$ tel que $|x| > \alpha$.*

**Définition 4.19** *On appelle domaine de convergence d'une série l'ensemble des points dont cette dernière converge absolument, en vertu du théorème d'Abel ce dernier est un intervalle centré à l'origine. Il s'écrit sous la forme $]-R, R[$ où $R \in [0, +\infty]$.*

### 4.3.1 Détermination du rayon de convergence

Considérons la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**Critère de d'Alembert**

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{4.15}$$

**Remarque 4.4** *Le rayon de convergence est la limite du rapport de deux termes successifs dépendant de $n$ quand ce dernier tend vers l'infini par exemple*

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{3n+1}}{a_{3n+2}}\right| \quad ou \quad R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+17}}{a_{n+18}}\right|. \tag{4.16}$$

**Critère de Cauchy**

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{4.17}$$

**Remarque 4.5** *Le rayon de convergence est l'inverse de la limite d'un terme dont l'indice dépendant de $n$ a la puissance de son inverse (l'inverse de l'indice) quand $n$ tend vers l'infini par exemple*

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}}.ou\ R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{|a_{n^2}|}}. \tag{4.18}$$

### 4.3.2 Quelques propriétés des séries entières

**Continuité**

**Proposition 4.1** *La somme d'une série entière est une fonction continue sur tout sous domaine de son domaine de convergence.*

**Dérivation**

**Théorème 4.28** *Considérons la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dont le domaine de convergence est $]-R, R[$, et de somme $s(x)$, soit la série entière $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ déduite de la première par dérivation terme à terme, cette dernière a même domaine de convergence que la première, de plus sa somme $l(x) = s'(x)$.*

**Remarque 4.6** *On peut généraliser le théorème précédent à n'importe quel ordre de dérivation, c'est-à-dire toute série déduite d'une certaine série par dérivation $n$ fois admet le même domaine de convergence et sa somme est la dérivée $n^{ième}$ de la série initiale.*

**Intégration**

**Théorème 4.29** *Considérons la série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *dont le domaine de convergence est* $]-R, R[$, *et de somme* $s(x)$, *soit la série entière* $c + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *déduite de la première par intégration terme à terme, cette dernière a même domaine de convergence que la première, de plus sa somme* $k(x) = \int s(x)dx$.

### 4.3.3 Séries de puissances

**Définition 4.20** *On appelle série de puissance toute série s'écrivant sous la forme*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{4.19}$$

*où* $a_n$ *est une série numérique.*

**Remarque 4.7** *Il suffit de prendre comme changement* $X = x - x_0$ *pour que cette dernière devienne une série entière.*

**Remarque 4.8** *L'intervalle de convergence des séries de puissances est centré en* $x_0$.

**Remarque 4.9** *Le développement en séries de Mac Laurent représente une série entière, par contre celui de Taylor représente une série de puissance au voisinage du point* $x_0$.

### 4.3.4 Applications des séries entières

**Le calcul des limites**

Lors des indéterminations on peut calculer la limite du développement des fonctions au voisinage du point voulu.

**Exemple 4.2** *Calculer la limite suivante*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

*On a*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\frac{0}{0}.$$

*On remplace* $e^x$ *et* $\sin x$ *par leurs développements de Mac Laurent, on obtient*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

**Le prolongement par continuité**

Pour voir si une fonction admet un prolongement par continuité en un point dont elle n'est pas définie il suffit de la développer en série entière et si cette dernière est continûment différentiable donc la fonction peut être prolongée en ce point-là.

**Exemple 4.3** *Peut-on prolongé la fonction* $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ *en une fonction continue sur* $\mathbb{R}$.
*On a*

$$\sin x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Rightarrow\frac{\sin x}{x}=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

*La série obtenue est définie et est de classe* $C^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *donc la fonction* $f(x)$ *admet un prolongement par continuité.*

**Le calcul d'intégrale**

Nous savons que toute fonction continue admet une primitive, mais il existe des fonctions dont la primitive ne peut pas être exprimée explicitement, mais nous pouvons les calculer à l'aide des séries.

**Exemple 4.4** *Calculer*

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

*On a*

$$e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\Rightarrow e^{-x^2}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!},$$

*donc*

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}dx &= \int_0^1 \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \left.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\right|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}.\end{aligned}$$

### L'intégration des équations différentielles ordinaires

Si on nous propose d'intégrer une certaine e.d.o., dont la résolution ne se ramène pas à une quadrature, on peut toujours trouver une solution approchée en supposant que la solution de cette dernière peut-être développable en série entière.

**Exemple 4.5** *Trouver une solution sous forme d'une série entière de l'e.d.o. suivante*

$$(1-x)y' + y = 1 + x. \tag{4.20}$$

*Sachant qu'elle vérifie*

$$y(0) = 0. \tag{4.21}$$

*On suppose que la solution à la forme suivante*

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_nx^n + ... \tag{4.22}$$

*donc*

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... + na_nx^{n-1} + ... \tag{4.23}$$

*D'après la condition (4.21) on a*

$$y(0) = a_0 = 0. \tag{4.24}$$

*Substituons (4.22)-(4.23) dans (4.20), on obtient*

$$\begin{aligned}0 &= (a_1 + a_0 - 1) + (2a_2 - 1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + ... + \\ &\quad + [\ (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n]\, x^n + ...\end{aligned} \tag{4.25}$$

*(4.25)-(4.24) donnent le système suivant*

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 = 0 \\ a_1 + a_0 - 1 = 0 \\ 2a_2 - 1 = 0 \\ 3a_3 - a_2 = 0 \\ 4a_4 - 2a_3 = 0 \\ . \\ . \\ (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{1}{2} \\ a_3 = \frac{1}{3}a_2 \\ a_4 = \frac{2}{4}a_3 \\ . \\ . \\ a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n. \end{array}\right. \tag{4.26}$$

*Ainsi on a*

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \ \textit{ et } a_{n+1} = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)} \ \textit{ pour } n \geq 1. \tag{4.27}$$

*La solution de (4.20)-(4.21) est*

$$y\,(x) = \ x + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}. \tag{4.28}$$

## 4.4 Série de Fourier

**Définition 4.21** *On dit que $f$ est périodique de période $p$ si elle vérifie*

$$\forall x \in D, x + p \in D : f(x+p) = f(x), \tag{4.29}$$

*où $D$ est le domaine de définition de $f$ et $p$ le plus petit nombre positif vérifiant (4.29).*

**Définition 4.22** *On dit que $f$ est monotone par tranche sur l'intervalle $[a, b]$, si on peut partager ce dernier on sous intervalles de telle sorte que la fonction $f$ soit monotone sur chacun d'eux.*

**Remarque 4.10** *Soit $f$ une fonction monotone par tranches et bornée sur $[a, b]$, si elle admet des discontinuités, celles-ci ne peuvent être que des discontinuités de première espèce.*

**Définition 4.23** *On appelle série trigonométrique toute série s'écrivant sous la forme*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4.30}$$

*où $a_0$, $a_i$ et $b_i$ sont des réels dits coefficients de la série.*

### 4.4.1 Détermination des coefficients de Fourier

Considérons une fonction $2\pi$-périodique pouvant être représentée par une série trigonométrique de la forme (4.30), supposons que la série $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1} (a_n + b_n)$ soit absolument convergente, donc (4.30) est uniformément convergente, on peut donc l'intégrer termes à termes.

Sachant que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = \begin{cases} \pi & \text{si } \ n = k \\ 0 & \text{si } \ n \neq k \end{cases} \tag{4.31}$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = 0, \quad \forall n, k. \tag{4.32}$$

L'intégration des deux membres de (4.30) donne

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{4.33}$$

Maintenant, multiplions les deux membres de (4.30) par $\cos kx$, ensuite intégrons le résultat entre $-\pi$ et $\pi$, on obtient

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx. \tag{4.34}$$

Multiplions les deux membres de (4.30) par $\sin kx$ et intégrons le résultat entre $-\pi$ et $\pi$, on obtient

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \tag{4.35}$$

Ainsi on a trouvé les coefficients de la série. Ces derniers sont dit coefficients de Fourier.

**Théorème 4.30** *Toute fonction périodique, bornée et monotone par tranche est développable en série de Fourier, sa somme $s(x) = f(x)$ aux points de continuité, par contre aux points de discontinuité elle sera égale au moyen arithmétique des limites à droite et à gauche.*

**Remarque 4.11** *Le développement en série de Fourier des fonctions paire ne contient pas les $b_n$ ($b_n = 0$).*

**Remarque 4.12** *Le développement en série de Fourier des fonctions impaire ne contient pas les $a_n$ ($a_0 = a_n = 0$).*

### 4.4.2 Séries de Fourier des fonctions périodiques de période $\neq 2\pi$

Supposons que la fonction $f(x)$ est $2l$-périodique ($l \neq 0 et l \neq \pi$), si de plus $f$ est monotone par tranche et bornée alors elle est développable en séries de Fourier, dont les coefficients de Fourier valent

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx. \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx. && (4.36) \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. && (4.37) \end{aligned}$$

De plus on a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}). \tag{4.38}$$

### 4.4.3 Égalité de Parseval

**Théorème 4.31** *Soit $f$ une fonction développable en série de Fourier de période $2l$ on a*

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2). \tag{4.39}$$

### 4.4.4 Série de Fourier sous forme complexe

Comme on l'a déjà vu si $f$ est développable en séries de Fourier on l'écrit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{4.40}$$

Sachant que

$$\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2}\quad \text{et}\quad \sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2i}. \tag{4.41}$$

Substituons (4.40) dans (4.39), on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)-\frac{ib_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\right)\\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

où

$$c_0=\frac{a_0}{2},\ c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}\ \text{et}\ c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2} \tag{4.43}$$

ou simplement

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx. \tag{4.44}$$

**Exemple 4.6** *Considérons la fonction $f$, $2\pi$-périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par*

$$f(x)=|\sin x|.$$

*1) Montrer que $f(x)$ est développable en séries de Fourier.*

*2) Calculer les coefficients de Fourier associes à $f(x)$.*

*3) Déduire la somme suivante : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}$.*

1) *La fonction $f$ étant périodique, bornée et monotone par tranche donc développable en séries de Fourier.*

2)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right],$$

*où*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

*Comme la fonction $f$ est paire, alors $b_n = 0$. Il suffit de calculer $a_0$ et $a_n$*

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin xdx = -\frac{2}{\pi} \cos x|_0^{\pi} = -\frac{2(\cos\pi - \cos 0)}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\cos nxdx.$$

*On a*

$$\sin x\cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(n+1)x + \sin(1-n)x\right].$$

*Donc*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \sin(n+1)xdx + \int_{0}^{\pi} \sin(1-n)xdx\right].$$

*Pour $n = 1$ on a*

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \sin 2xdx\right] = -\frac{1}{2\pi}\cos 2x|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

*Pour $n \neq 1$ on obtient*

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x|_0^{\pi}\right) + \frac{1}{1-n}\cos(1-n)x|_0^{\pi}\right] \\
a_n &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{1-n}\right] \\
a_n &= \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est impair} \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \textit{si } n \textit{ est pair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

*On peut donc écrire*

$$a_{2n} \;=\; \frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}.$$

*Ainsi*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)} \cos 2nx.$$

3) *Déduction de* $\sum\limits_{n\ \geq\ 1} \frac{1}{4n^2-1}$, $f(x)$ *est continue en* $x_0 = 0$. *Donc*

$$\begin{aligned} f(\ 0\ ) \;&=\; 0 = \frac{2}{\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)} \cos\left(2n \times 0\right) \\ &=\; \frac{2}{\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

*Ainsi*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\ .$$

# Chapitre 5

# Transformation de Fourier

La transformée de Fourier est définie comme une extension de la série de Fourier aux fonctions non périodiques, c'est-à-dire qu'on suppose que la fonction a une période infinie.

**Définition 5.1** *$L^1$ est l'ensemble des fonctions sommables.*

**Définition 5.2** *$L^2$ est l'ensemble des fonctions à carré sommable.*

**Définition 5.3** *$\mathcal{L}^1$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points, continues en dehors de ces points, et absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.*

**Définition 5.4** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f$ est dite à décroissance rapide, et on note $f \in \mathcal{S}$ si $f \in C^\infty$ et si,*

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \exists C_{k,n} : |x^k f^{(n)}(x)| \leq C_{k,n} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

**Définition 5.5** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f$ est une fonction test si elle est indéfiniment différentiable à support compact, et on note $f \in \mathcal{D}$, autrement dit*

$$f \in C^\infty et\ \exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq b, \forall x \in \mathbb{R} \diagdown [a, b] \, , f(x) = 0. \tag{5.2}$$

**Définition 5.6** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Nous définissons la transformée de Fourier de $f$, la fonction notée $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, comme suit*

$$\widehat{f}\ (\omega) = \mathcal{TF}\ (f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\omega} dt. \tag{5.3}$$

*Sa transformée inverse de $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, est donnée par*

$$f(t) = \mathcal{TF}^{\ -1}(\widehat{f}\ )(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\ (\omega)\, e^{it\omega} d\omega. \tag{5.4}$$

**Remarque 5.1** *La variable $t$ est dite variable temporelle car elle représente souvent le temps. La variable $x$ est dite variable fréquentielle car elle représente souvent la fréquence ou pulsation. La fonction $f(t)$ est dite signal.*

**Remarque 5.2** *La formule (5.3) peut-être mise sous la forme*

$$\widehat{f}\ (\omega) = A(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}, \tag{5.5}$$

*on appelle $A(\omega)$ spectre du module, $\varphi(\omega)$ spectre de phase et $A^2(\omega)$ spectre de puissance.*

**Définition 5.7** *La fonction de Heaviside dite également fonction échelon est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & si \;\; t < 0 \\ 1 & si \;\; t \geq 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

**Définition 5.8** *On appelle fonction porte toute fonction constante sur un compact de $\mathbb{R}$ et nulle ailleurs.*

**Définition 5.9** *La fonction $Si = \frac{\sin x}{x}$, est dite sinus cardinal.*

**Définition 5.10** *La mesure de Dirac ou impulsion de Dirac est définie comme suit*

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; t = a \\ 0 & ailleurs. \end{cases} \tag{5.7}$$

**Exemple 5.1** *Calculer la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside.*

*En effet on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\ (H)(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) e^{-it\omega} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-it\omega} dt \\ &= \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} e^{-it\omega} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} \\ &= \frac{-i}{\omega\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

## 5.1 Propriétés de la transformée de Fourier

Soit $f(t)$, $g(t) \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{TF}$ la transformée de Fourier directe et $\mathcal{TF}^{-1}$ la transformée de Fourier inverse

### 5.1.1 Linéarité de $\mathcal{TF}$

Soit $\lambda$ et $\mu$ deux nombres complexes quelconques, on a

$$\mathcal{TF}\ (\lambda f + \mu g)(t) = \lambda \widehat{f}\ (\omega) + \mu \widehat{g}\ (\omega). \tag{5.8}$$

### 5.1.2 Linéarité de $\mathcal{TF}^{-1}$

Soit $\lambda$ et $\mu$ deux nombres complexes quelconques $\widehat{f}\ (\omega)$ et $\widehat{g}\ (\omega)$ deux fonctions localement intégrables et absolument intégrables sur $\mathbb{C}$, on a

$$\mathcal{TF}^{-1}\ \left(\lambda\widehat{f}\ \ +\mu\widehat{g}\ \ \right)(\omega)=\lambda f\,(t)+\mu g\,(t)\,. \tag{5.9}$$

### 5.1.3 Dérivation dans le domaine temporel

$$\mathcal{TF}\ (\frac{d^n f}{dt^n})\,(t)=(i\omega)^n\,\widehat{f}\ \,(\omega)\,. \tag{5.10}$$

### 5.1.4 Dérivation dans le domaine fréquentiel

$$\frac{d^n\widehat{f}}{dt^n}\,(\omega)=\mathcal{TF}\ \left((it\omega)^n f\right)(t)\,. \tag{5.11}$$

### 5.1.5 Translation en t

$$\mathcal{TF}(f)\,(t-t_0)=e^{-i\omega t_0}\widehat{f}\ \,(\omega)\,. \tag{5.12}$$

**Remarque 5.3** *La translation dans le domaine temporel se traduit par un terme correspondant à un déphasage linéaire en fonction de la fréquence ($e^{-i\omega t}$). Cette opération ne modifie pas le module de la transformée de Fourier.*

### 5.1.6 Contraction du domaine [*dilatation en t*]

$$\mathcal{TF}\ (f)\,(at)=\frac{1}{|a|}\widehat{f}\ \left(\frac{\omega}{a}\right). \tag{5.13}$$

### 5.1.7 Modulation

$$\mathcal{TF}(e^{i\ \omega_0 t} f)\,(t) = \widehat{f}\ \,(\omega - \omega_0)\,. \tag{5.14}$$

**Remarque 5.4** *La multiplication par une sinusoïde dans le domaine temporel se traduit par une translation dans le domaine fréquentiel.*

### 5.1.8 Conjugaison

$$\mathcal{TF}(\overline{f})\,(t) = \overline{\widehat{f}\ \,(\omega)}. \tag{5.15}$$

### 5.1.9 Convolution

**Définition 5.11** *Le produit de convolution des fonctions réelles ou complexes $f$ et $g$ est la fonction $f\ * g$ définie comme suit*

$$(f * g)\,(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt. \tag{5.16}$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est le produit des transformées

$$\mathcal{TF}(f * g)\,(t) = \widehat{f}\ \,(\omega)\,.\widehat{g}\,(\omega)\,. \tag{5.17}$$

### 5.1.10 Continuité

$$f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \mathcal{TF}\ \,(f) \in C\,(\mathbb{R})\,. \tag{5.18}$$

### 5.1.11 Comportement à l'infini

$$\lim_{|\omega| \to +\infty} \widehat{f}\ (\omega) = 0. \tag{5.19}$$

**Remarque 5.5** *Si $f(t)$ est réelle et paire $\Rightarrow \mathcal{TF}\ (f)$ est réelle et paire.*

*Si $f(t)$ est réelle et impaire $\Rightarrow \mathcal{TF}\ (f)$ est imaginaire pure et impaire.*

*Si $f(t)$ est imaginaire et paire $\Rightarrow \mathcal{TF}\ (f)$ est imaginaire et paire.*

*Si $f(t)$ est imaginaire et impaire $\Rightarrow \mathcal{TF}\ (f)$ est réelle et impaire.*

**Théorème 5.1 (de Plancherel)** *Soit les fonctions $f, g \in \mathcal{S}$, on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\ (\omega)\ \overline{\widehat{g}\ (\omega)} d\omega. \tag{5.20}$$

**Théorème 5.2 (de Parseval)** *Soit $f(t)$ une fonction à énergie finie ($f \in L^2$) et $\widehat{f}\ (\omega)$ sa transformée de Fourier. Les fonctions $f(t)$ et $\widehat{f}\ (\omega)$ ont la même énergie c'est-à-dire*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}\ (\omega)\right|^2\ d\omega. \tag{5.21}$$

## 5.2 Application de la transformée de Fourier à la résolution des équations différentielles

La transformation de Fourier permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire en la transformant en une équation plus simple.

### 5.2.1 Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

**Proposition 5.1** *Soit $f$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $\mathcal{TF}(f) = F$. Alors on a*

$$\mathcal{TF}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = (2i\pi\omega) F(\omega) \ \ et\ \mathcal{TF}\left(\frac{d^2 f}{dt^2}(t)\right) = (2i\pi\omega)^2 F(\omega). \tag{5.22}$$

*En générale*

$$\mathcal{TF}\left(\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right) = (2i\pi\omega)^n F(\omega). \tag{5.23}$$

Considérons l'équation différentielle à coefficients constants suivante

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} y^{(n-j)}(t) = g(t), \tag{5.24}$$

avec $y^{(0)}(t) = y(t)$. Appliquons la transformée de Fourier aux deux membres de (5.24) et utilisons ses propriétés, on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \mathcal{TF}\left(y^{(n-j)}(t)\right) = \mathcal{TF}(g(t)). \tag{5.25}$$

Utilisons la Proposition 5.1, (5.25) donne

$$\left[\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} (2i\pi\omega)^{n-j}\right] F(\omega) = \mathcal{TF}(g(t)), \tag{5.26}$$

où $\mathcal{TF}(y(t)) = F(\omega)$. De (5.26), on a

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \left[\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} (2i\pi\omega)^{n-j}\right]^{-1} \mathcal{TF}(g(t)) \\ &= \mathcal{TF}(h(t))\,\mathcal{TF}(g(t)) \\ &= \mathcal{TF}(h(t) * g(t)). \end{aligned} \tag{5.27}$$

L'injectivité de $\mathcal{TF}$ nous permet d'écrire

$$y(t) = h(t) * g(t). \tag{5.28}$$

### 5.2.2 L'équation différentielle dépend de $t$ de façon linéaire

Considérons l'équation différentielle

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\left(t\right) y^{(n-j)}\left(t\right) = g(t), \tag{5.29}$$

avec $y^{(0)}\left(t\right) = y\left(t\right)$ et $a_{n-j}\left(t\right)$ sont des fonctions polynomiales.

**Proposition 5.2** *Soit $f$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $\mathcal{TF}$ $(f) = F$. Alors on a*

$$\mathcal{TF}\left(tf\left(t\right)\right) = \frac{i}{2\pi}\frac{dF}{d\omega}\left(\omega\right) \text{ et } \mathcal{TF}\left(t^2 f\left(t\right)\right) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 F\left(\omega\right). \tag{5.30}$$

*En générale*

$$\mathcal{TF}\left(t^n f\left(t\right)\right) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n F\left(\omega\right). \tag{5.31}$$

**Exemple 5.2** *En appliquant la transformée de Fourier trouver une solution de l'équation différentielle suivante*

$$-y''(t) + y(t) = e^{-t^2}. \tag{5.32}$$

*Appliquons la transformée de Fourier à (5.32), on obtient*

$$\begin{aligned}
-\left(2i\pi\omega\right)^{2}F\left(\omega\right)+F\left(\omega\right) &= \mathcal{TF}\left(e^{-t^{2}}\right)\\
\left(4\pi^{2}\omega^{2}\ +1\right)F\left(\omega\right) &= \mathcal{TF}\left(e^{-t^{2}}\right)\\
F\left(\omega\right) &= \frac{1}{4\pi^{2}\omega^{2}\ +1}\mathcal{TF}\left(e^{-t^{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{1+\left(2\pi\omega\right)^{2}}\mathcal{TF}\left(e^{-t^{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ \mathcal{TF}\left(e^{|t|}*e^{-t^{2}}\right)\\
&= \ \mathcal{TF}\left(\frac{1}{2}e^{|t|}*e^{-t^{2}}\right). \qquad (5.33)
\end{aligned}$$

*Ainsi*

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{|t|}*e^{-t^{2}}. \qquad (5.34)$$

# Chapitre 6

# Transformation de Laplace

La transformation de Laplace est une opération intégrale qui permet de transformer une fonction à variable réelle en une fonction à variable complexe, elle permet aussi de transformer les équations différentielles linéaires en équations algébriques facilitant ainsi leur résolution.

## 6.1 La transformation de Laplace directe

**Définition 6.1** *Soit* $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *, et* $p \in \mathbb{C}$ *telle que* $p = \alpha + i\beta$ $(i^2 = -1)$. *La transformée de Laplace de la fonction* $f$ *notée* $L(f(t))$ *vaut*

$$L(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \tag{6.1}$$

$f(t)$ *est dite originale de* $F(p)$ *et on note* $F(p) \sqsubset f(t)$. $F(p)$ *est l'image de* $f(t)$ *et on note* $f(t) \sqsupset F(p)$.

**Définition 6.2** *On appelle fonction causale toute fonction nulle pour* $t < 0$.

### 6.1.1 Existence de la transformation de Laplace

**Définition 6.3** *Soit $f(t)$ une fonction continue par morceau sur l'intervalle fermé $[0, a]$ ( $a > 0$). On dit que $f$ a un ordre exponentiel $\alpha$ à l'infini si*

$$\exists M > 0, \exists \alpha > 0, \forall t > a \quad on\ a \quad |f(t)| = Me^{\alpha t}. \tag{6.2}$$

**Théorème 6.1** *Toute fonction continue par morceau, vérifiant (5.2) et*

$$\exists \beta,\ 0 < \beta < 1 :\ \lim_{t \to 0} t^{\beta} |f(t)| = 0, \tag{6.3}$$

*admet une transformée de Laplace (elle existe).*

**Remarque 6.1** *L'égalité (6.3) est équivalente à*

$$\lim_{t \to +\infty} \left| e^{-\alpha t} f(t) \right| = 0. \tag{6.4}$$

### 6.1.2 Unicité de la transformation de Laplace

**Théorème 6.2** *Soit $f(t)$ et $g(t)$, deux fonctions continues par morceaux ayant un ordre exponentiel à l'infini sur $[0.a]$ ( $a > 0$) si*

$$L(f(t)) = L(g(t)) \Rightarrow f(t) = g(t), \quad \forall t \in [0.a]. \tag{6.5}$$

### 6.1.3 Propriétés de la transformation de Laplace

Considérons les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ dont les conditions du Théorème 6.1 sont remplies alors $L(f(t))$ et $L(g(t))$ existent, et ont les propriétés suivantes

**Linéarité**

Soit $f_i(t)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, $n$ fonctions vérifiant les conditions du Théorème 6.1, $c_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, $n$ constantes arbitraires on a

$$L(\sum_{i=1}^{n}(c_i f_i(t))) = \sum_{i=1}^{n} c_i L(f_i(t)) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p). \tag{6.6}$$

**Exemple 6.1** *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t)=\cos wt$. On a*

$$\cos wt = \frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2}, \tag{6.7}$$

*donc*

$$\begin{aligned}
L(\cos wt) &= L(\frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2}) = \frac{1}{2}L(e^{iwt}) + \frac{1}{2}L(e^{-iwt}) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{iwt}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-iwt}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(-p+iw)t}\ dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(p+iw)t}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p-iw)} + \frac{1}{(p+iw)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(p+iw)+(p-iw)}{(p-iw)(p+iw)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{p+iw+p-iw}{p^2-\ (iw)^2}\right] = \frac{p}{p^2+w^2}.
\end{aligned}$$

**Dérivée**

Soit $f(t)$ une fonction qui vérifie les conditions du Théorème 6.1, on a alors

$$L(f'(t)) = pF(p) - f(0), \tag{6.8}$$

et

$$L(f''(t)) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0). \tag{6.9}$$

Donc on peut en déduire

$$L(f^{\ (n)}(t)) = p^nF(p) - \sum_{i=1}^{n-1} p^{n-1-i} f^{(i)}(0), \tag{6.10}$$

où $f^{(i)}$ est la dérivée $i^{ième}$ de $f$ et $f^{(0)} = f$.

### Translation de la transformée

Soit $f(t)$ une fonction qui vérifie les conditions du Théorème 6.1, on a alors

$$L(e^{-wt}f(t)) = F\left(p + w\right). \tag{6.11}$$

### Retard temporel

Soit $f(t)$ une fonction qui vérifie les conditions du Théorème 6.1, on a alors

$$L(f(t - \tau)) = e^{-p\tau}F\left(p\right). \tag{6.12}$$

### Intégrale

Soit $f(t)$ une fonction qui vérifie les conditions du Théorème 6.1, on a alors

$$L\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F\left(p\right)}{p}. \tag{6.13}$$

### Convolution

Soit $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions vérifiant les conditions du Théorème 6.1, on alors

$$L(\ f(t) * g(t)) = F\left(p\right).G\left(p\right). \tag{6.14}$$

**Théorème de la valeur initiale**

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to +\infty} pF(p). \tag{6.15}$$

**Théorème de la valeur finale**

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p). \tag{6.16}$$

**Remarque 6.2** *Les égalités (6.15) et (6.16) sont valables si les limites existent.*

**Tableau de quelques transformées**

| Fonction | transformée |
|---|---|
| $\delta$ | $1$ |
| $H$ | $\frac{1}{p}$ |
| $t^a \ (a > -1)$ | $\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$ |
| $e^{-\lambda t}$ | $\frac{1}{p+\lambda}$ |
| $t^a e^{-\lambda t}$ | $\frac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}}$ |
| $\cos(wt)$ | $\frac{p}{p^2+w^2}$ |
| $\sin(wt)$ | $\frac{w}{p^2+w^2}$ |
| $e^{-\lambda t}\sin(wt+\alpha)$ | $\frac{w\cos\alpha+(p+\lambda)\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+w^2}$ |
| $e^{-\lambda t}\cos(wt+\alpha)$ | $\frac{(p+\lambda)\cos\alpha+w\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+w^2}$ |
| $t^n\sin(wt)$ | $n!\frac{\mathrm{Im}(p+iw)^{n+1}}{(p^2+w^2)^{n+1}}$ |
| $t^n\cos(wt)$ | $n!\frac{\mathrm{Re}(p+iw)^{n+1}}{(p^2+w^2)^{n+1}}$ |

## 6.2 Transformation de Laplace inverse

**Définition 6.4** *Si nous connaissons la transformation de Laplace $F(p)$ d'une certaine fonction $f(t)$, nous pouvons toujours déterminer l'expression de cette dernière à l'aide* *de la formule suivante*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \tag{6.17}$$

**Remarque 6.3** *Comme la plupart des transformées $F(p)$ sont des fractions rationnelles de la forme $\frac{N(p)}{D(p)}$, il suffit de les décomposer en fractions simples et d'utiliser la propriété de linéarité de la transformée de Laplace, puis on applique la méthode des résidus.*

### 6.2.1 Calcul de la transformation de Laplace inverse

On suppose pour commencer que $d^\circ(N(p)) < d^\circ(D(p))$ et que les pôles $p_i$ de $F(p)$ sont simples c'est-à-dire $N(p_i) \neq 0$, on a $D(p_i) = 0$ et $D'(p_i) \neq 0$.

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{N(p)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (p - p_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p - p_i}, \end{aligned} \tag{6.18}$$

où $p_i \neq p_j$ pour tout $i \neq j$ et

$$c_i = \lim_{p \to p_i} \left[ (p - p_i) F(p) \right]. \tag{6.19}$$

Ainsi nous aurons

$$f(t) = \left[ \sum_{i=1}^{n} c_i e^{p_i t} \right] \varepsilon(t). \tag{6.20}$$

Le cas où $d^\circ(N(p)) < d^\circ(D(p))$ et que $F(p)$ possède des pôles multiples c'est-à-dire $N(p_i) \neq 0$, on a $D(p_i) = D'(p_i) = D''(p_i) = .. = D^{(k)}(p_i)0$ et $D^{(k+1)}(p_i) \neq 0$, $p_i$ est un pôle d'ordre $k$.

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{N(p)}{\prod\limits_{i=1}^{\alpha}(p-p_i)^{k_j}} \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k_j}\frac{c_i}{\left(p-p_{k_j}\right)^i}, \end{aligned} \tag{6.21}$$

où $\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = d^\circ(D(p))$ et $p_{k_j}$ est un pôle d'ordre $k_j$. Ainsi

$$f(t) = \left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k_j} c_i e^{p_{k_j}t}\right]\varepsilon(t). \tag{6.22}$$

**Remarque 6.4** *Dans le cas où $d^\circ(D(p)) < d^\circ(N(p))$, on a*

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{k(p)D(p)+r(p)}{D(p)} \\ &= k(p) + \frac{r(p)}{D(p)}, \end{aligned} \tag{6.23}$$

*où $d^\circ(r(p)) < d^\circ(D(p))$.*

## 6.3 Application de la transformation de Laplace à la résolution d'équations différentielles

Considérons l'équation différentielle

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1\, x^{(n-1)}(t) + ... + a_n x(t) = f(t) \tag{6.24}$$

satisfaisant aux conditions suivantes

$$x^{(i)}(0) = x_i \text{ pour tout } i : 0 \leq i \leq n-1, \tag{6.25}$$

où la dérivée d'ordre zéro égale à la fonction elle même ($x^{(0)}(t) = x(t)$).

Supposons que $a_0 \neq 0$ et la fonction $f(t)$ ainsi que la fonction $x(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n$ sont des originaux. On applique la transformée de Laplace aux deux membres de (6.24), utilisons la règle de dérivation et la linéarité, (6.24) devient

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n\right) X(p) = F(p) + B(p), \tag{6.26}$$

où $X(p) = L(x(t))$, $F(p) = L(f(t))$ et $B(p) = x_0 \left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + ... + a_{n-1}\right) + x_1 \left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + ... + a_{n-2}\right) + ... + x_{n-1}(a_0)$. La résolution de (6.26), donne

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n\right)}. \tag{6.27}$$

Ainsi la solution (6.24) est donnée par

$$x(t) = L^{-1}(X(p)). \tag{6.28}$$

**Exemple 6.2** *Donner la solution de l'équation différentielle suivante*

$$x'' + a^2 x = b \sin at, \tag{6.29}$$

*vérifiant aux conditions initiales*

$$x(0) = x_0 \text{ et } x'(0) = x_1. \tag{6.30}$$

*Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de (6.29), on obtient*

$$L\left(x'' + a^2 x\right) = L(b \sin at). \tag{6.31}$$

*Utilisons les propriétés de dérivation et de linéarité, (6.31) devient*

$$\begin{aligned}
L\left(x''\right)+a^2 L\left(x\right) &= bL\left(\sin at\right). \\
\left(p^2+a^2\right)X(p) &= \frac{ba}{p^2+a^2}+px_0+x_1. \qquad (6.32)
\end{aligned}$$

*Ainsi on obtient*

$$X(p)=\frac{ba}{\left(p^2+a^2\right)^2}+\frac{p}{p^2+a^2}x_0+\frac{1}{p^2+a^2}x_1. \qquad (6.33)$$

*Calculons l'originale de (6.33), on a*

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+a^2}x_1\right)=\frac{x_1}{a}L^{-1}\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)=\frac{x_1}{a}\sin at, \qquad (6.34)$$

*de plus*

$$L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+a^2}x_0\right)=x_0L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)=x_0\cos at. \qquad (6.35)$$

*On a*

$$\frac{ba}{\left(p^2+a^2\right)^2}=\frac{\frac{ib}{4a^2}}{p+ia}+\frac{\frac{-ib}{4a^2}}{p-ia}+\frac{\frac{-b}{4a}}{\left(p+ia\right)^2}+\frac{\frac{-b}{4a}}{\left(p-ia\right)^2}, \qquad (6.36)$$

*d'où*

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left(\frac{ba}{\left(p^2+a^2\right)^2}\right) &= \frac{ib}{4a^2}L^{-1}\left(\frac{1}{p+ia}\right)-\frac{ib}{4a^2}L^{-1}\left(\frac{1}{p-ia}\right) \\
&\quad -\frac{b}{4a}L^{-1}\left(\frac{1}{\left(p+ia\right)^2}\right)-\frac{b}{4a}L^{-1}\left(\frac{1}{\left(p-ia\right)^2}\right) \\
&= \frac{ib}{4a^2}\left[e^{-iat}-e^{iat}\right]-\frac{b}{4a}\left[te^{-iat}+te^{iat}\right] \\
&= \frac{b}{2a^2}\sin at-\frac{bt}{2a}\cos at. \qquad (6.37)
\end{aligned}$$

*Ainsi la solution de (3.62) est*

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{x_1}{a}\sin at+x_0\cos at+\frac{b}{2a^2}\sin at-\frac{bt}{2a}\cos at. \\
&= \left(\frac{x_1}{a}+\frac{b}{2a^2}\right)\sin at+\left(x_0-\frac{bt}{2a}\right)\cos at.
\end{aligned}$$

# Bibliographie


[1] A. Angot, Compléments de mathématiques. Maisons Masson. 1982.

[2] K. Benarioua, Mathématiques en première et deuxième année de licence.

[3] G. Baudrand, Mathématiques : résumés du cours ECE 1re et 2e année. Dunod, 2008.

[4] R. Bracewell, The fourier transform and iis applications. Third Edition. New York, 5. 1965.

[5] J. Douchet, Analyse Recueil d'exercices et aide-mémoire vol. 2. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.

[6] P. Dyke, An introduction to Laplace transforms and Fourier series. Springer, 2014.

[7] S. Francinou, H. Gionello et S. Nicolas, Analyse 2. Edition Cassini, 2009.

[8] D. Fredon et M. Bridier, Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur. Dunod,

[9] J. Genet and G. Pupion, Analyse modern, Tome I. Librairie Vuibert, 1971.

[10] J. Genet and G. Pupion, Analyse modern, Tome II. Librairie Vuibert, 1973.

[11] D.Guinin et B. Joppin, Analyse MP. Bréal 2004

[12] E.-H. Laamri, P. Chateaux, G. Eguether, A. Mansoux, M. Rezzouk, D. Rupprecht et L. Schwald, Tous les exercices d'analyse MP. Ediscience, 2007.

[13] C. Lardon et J.-M. Monier, Mathématiques Méthodes et exercices ECS 2e année. Editions Dunod, 2011.

[14] B. Malgrange, Équations Différentielles Linéaires et Transformation de Fourier : Une Introduction. Sociedade Brasileira de Mathematica, 1989.

[15] F. Pécastaing et J. Sevin, Chemins vers l'analyse, Tome I. Librairie Vuibert

[16] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Tome II. Editions Mir.

[17] M.H. Protter and C. B. Morrey, A first course in real analysis. Springer, 2014.

[18] G. E. Shilov, Elementary Real and Complex Analysis