



024



Mémoire de Magister

Présenté à l'Université de Guelma
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département de : Génie électrique
Spécialité : Signaux et Images

Présenté par : M^{elle} ZERGUINE Chalabia

Traitement d'image au moyen d'algorithmes utilisant la morphologie mathématique

Sous la Direction du : D^r Abdelhani BOUKROUCHE

Membre de jury:

Président :

SERIDI Hamid

MC

Université de Guelma

Examineurs :

LAKHEL Rabah

MC

Université de Annaba

KECHIDA Sihem

MC

Université de Guelma

ملخص

من الصعب معالجة المعلومات التي تحملها صورة ما مباشرة بشدة رمادية كل نقطة فيها وبذلك تكون القيمة بدلالة شروط الإضاءة.

المهم هو دراسة تغير الشدة الموضعية للصورة فيحسب عندئذ البعد التقريبي حيث يأخذ بعين الاعتبار أبعاد الشيء المراد دراسته.

وفي اغلب الأحيان تكون البنيات ذات أحجام مختلفة ولذلك لا يمكن الوصول أو التحصل على حل مثالي لدراسة صورة.

التقسيم المتعدد المتماثل يعطي بنية طبقية سهلة لترجمة المعلومات المكونة للصورة عند كل تقسيم وهذا يميز عادة مختلف البنيات الفيزيائية للمشاهد، بدءاً بالبنية من أكبر إلى أصغر معلومة في الصورة.

ففي سيكولوجية الرؤية البشرية الدراسة متعددة المستويات لها فعالية خاصة في شرح عدة برامج بيولوجية ذات المستويات المنخفضة. وبذلك تكون الموجات العامل الرئيسي الذي يقوم بعملية الامتداد و الاتسحاب لمجموعة من الموجات. لقد سعينا في هذه المذكرة لدراسة التحليل متعدد المستويات لصورة بواسطة الموجات.

بدءاً بدراسة الحالة أحادية الأبعاد ثم دراسة الحالة ثنائية الأبعاد. وأخيراً طبقنا هذه الدراسة على صورة مشوهة ثم قمنا بنزع هذا التشوه باستعمال التحول الموجي.

RESUME

Dans la vision par ordinateur, il est difficile d'analyser l'information contenue dans l'image directement par l'intensité de gris de chaque pixel de l'image. En effet, cette valeur dépend des conditions d'éclairage. Le plus important est d'étudier la variation locale de l'intensité de l'image. La dimension du voisinage, où le contraste est calculé, doit être adaptée à la dimension de l'objet à analyser. Cette taille définit une résolution pour mesurer la variation locale de l'image. Généralement, les structures ont différentes tailles, ainsi il est impossible de définir a priori une résolution optimale pour analyser les images. La décomposition multirésolutionnelle nous permet d'avoir une interprétation de l'image à différentes échelles. La représentation multirésolutionnelle donne une structure simple et hiérarchique pour l'interprétation de l'information contenue dans l'image à chaque résolution de l'image. Ceci caractérise généralement différentes structures physiques de la scène ; allant des structures larges (contexte) au plus fins détails de l'image. Dans la psychophysologie visuelle humaine, le modèle multiéchelle a eu un succès particulier dans l'explication de plusieurs processus biologiques bas-niveau. Etant donnée que l'ondelette est un opérateur qui génère par translation et dilatation un ensemble d'ondelettes indépendantes.

Nous optons dans ce mémoire à étudier l'analyse multirésolutionnelle d'une image avec des ondelettes. Nous avons commencé par étudier le cas monodimensionnel, puis nous avons fait une extension au cas bidimensionnel séparable pour analyser l'image et enfin, nous étendons éventuellement notre étude à le débruitage d'une image bruitée en utilisant la méthode de débruitage par un filtre linéaire. Ainsi par la méthode de débruitage par la transformée en ondelettes.

Abstract

In the vision via computer, it is too hard to analyse directly the information containing in the picture by grey's intensity of each pixel_of the picture. In deed this value depends on conditions of lighting ,the most important thing is to study the local variation of the picture's intensity .the dimension of neighbourhood where the contrast is calculated ,must be adapted to the dimension of the object matter. This size defines a resolution to measure the local variation of the picture. The structures have generally different sizes and thus it's impossible to define an optimal resolution to analyse the pictures. The multiresolutional splitting up permets us to have an interpretation of the pictures at the different scole.the multi-resolutional representation gives a simple and hierarchical structure for the interpretation of the information containing in the picture at each resolution. This generally characterized different physical structures of the scene ;and drives to large structures with the smallest details of the picture, in the human visual psychology ,the multi-scale model had a particular succset in explaining low-level biological process.Wavlet is an operator which produces by translation and dilation the whole independent wavlets .We opt in this thesis to study the multi-resolutional analysis of a picture with wavlets we have begun by styding the mono-dimensional case, then we have done an extention in bi-dimensional case and finally ,we eventually extend ouer stydy on noising of pictures using the method of dinoising whit linear filter and with method of dinoising with wavlets transformation and with invariant wavlets .

Dédicaces

A mon père, merci papa pour tes encouragements et ton soutien moral et ma mère.

A ma sœur et mes frères Amar, Mohamed, Chemsou .

A toute ma famille.

A tous mes amis et mes collègues.

A monsieur Boukrouche Abd el hani pour son aide.

Remerciement

Mes premiers remerciements s'adressent à mon encadreur Monsieur Abdehani BOUKROUCHE Maître de conférence à l'université de Guelma pour l'intérêt qu'il porte au développement de la recherche en me proposant ce sujet: mémoire de magister «Traitement d'image au moyen d'algorithmes utilisant la morphologie mathématique».

Sa culture scientifique, son exigence, sa persévérance, et sa rigueur, ont été plus que bienvenus : ils ont été indispensables pour mener à bien cette aventure et pour diriger mes travaux. Je suis encore une fois reconnaissante pour m'avoir permis l'accès libre à sa documentation personnelle.

Toute ma gratitude pour m'avoir fait honneur d'être aussi rapporteur de ce mémoire, Je lui exprime tout mon respect pour être allé au-delà des imperfections du manuscrit que je lui ai remis, pour le soin qu'il a mis à cette lecture, et ses corrections.

Un grand merci à M^r.Doghmane, pour les nombreuses discussions que nous avons eues, sa générosité et son enthousiasme pour transmettre ses connaissances et sa culture des ondelettes et du traitement du signal, et, pour m'avoir permis de faire le lien avec la communauté d'électronique.

Je suis reconnaissante envers monsieur SERIDI Hamid Maître de conférence à l'université de Guelma d'avoir accepté de présider le jury.

J'exprime toute ma gratitude pour M^r LAKHEL Rabah, Maître de conférence à l'université de Annaba et M^{elle} Khechida Sihem, Maître de conférence à l'université de Guelma ; pour m'avoir fait le très grand honneur d'examiner mes travaux de magister.

Un grand merci au laboratoire d'automatique et informatique de Guelma (LAIG), dans son ensemble pour m'avoir fourni des moyens informatiques, un cadre de travail, une assistance, tout à fait corrects, grâce auxquels les problèmes quotidiens sont plus facilement solutionnés.

Merci à ma famille pour son amour, à mes amis pour leur soutien et leur présence.

..et tous ceux qui m'ont vraiment aidés.

TABLE DES MATIERES

	Page
Introduction Générale	1
Chapitre I Pour quoi les Ondelettes..... ?	
I.1 Transformée.....quoi ?	4
I.2 Transformée de Fourier	5
I.2.1 Définition	5
I.2.2 La formule	5
I.2.3 Interprétation	5
I.2.4 Inconvénients	7
I.2.4.1 Signaux stationnaires	8
I.2.4.2 Signaux non stationnaires	9
I.3 Transformée de Fourier fenêtrée (TFF)	11
I.3.1 Définition	11
I.3.2 La formule	11
I.3.3 Inconvénients	12
Chapitre II Outils mathématique 'les Ondelettes'	
II.1 Généralités	16
II.2 Transformée en ondelette continue (TOC)	18
II.3 Transformée en ondelette continue inverse (TOCI)	18
II.4 Transformée en ondelettes discrète (TOD)	19
II.5 Construction des ondelettes	20
II.5.1 Construction d'ondelette orthonormale	20
II.5.2 Construction des ondelettes biorthogonales	23
II.6 Familles d'ondelettes	24
II.6.1 Ondelette orthogonale et a support compact	24
II.6.1.1 Ondelette de Daubechies	24
II.6.1.2 Ondelette de Symelet	27
II.6.1.3 Ondelette de Coiflet	28
II.6.2 Ondelette à régularité infinie et orthogonale	30
II.6.2.1 Ondelette de Meyer	30
II.6.2.2 Ondelette discrète de Meyer	31
II.6.3 Ondelette définie sans fonction d'échelle	31
II.6.3.1 Ondelette de Morlet	32
II.6.3.2 Ondelette Mexican-hat	33
II.6.3.3 Ondelette Gaussienne	33
II.6.4 Ondelettes biorthogonale B-spline	34
II.6.5 Ondelettes complexes	35
II.6.5.1 Ondelette Gaussienne complexe	35
II.6.5.2 Ondelette Morlet complexe	36
II.6.5.3 Ondelette B-spline complexe	36
II.6.5.4 Ondelette Shannon complexe	37
II.7 Conclusion	38

Chapitre III	Théorie de la transformation 'multirésolution'	
III.1	Analyse multirésolutionnelle : cas monodimensionnel	40
III.1.1	Approximation du signal	44
III.1.2	Détails du signal	45
III.1.3	Reconstruction	46
III.2	Analyse multidimensionnelle par ondelettes Pour le cas bidimensionnel (Image)	50
III.3	Conclusion	61
Chapitre IV	Application de l'ondelette à l'étude du débruitage	
IV.1	Position du problème	64
IV.2	Débruitage par filtres linéaires	65
IV.3	Débruitage par ondelettes	66
IV.3.1	Débruitage par seuillage	66
IV.3.1.1	Seuillage dur et doux	67
IV.3.1.2	Débruitage par transformation invariante par Translation	70
IV.4	Résultats	72
IV.4.1	Seuillage dur	72
IV.4.2	Seuillage doux	74
IV.5	Conclusion	74
	Conclusion générale	75
	Références	76

INTRODUCTION

Le traitement numérique des images s'est développé à partir des années 1960 avec l'apparition des calculateurs de la troisième génération, en effet une image même de dimension modeste véhicule une quantité d'information importante. Un des premiers domaines où le traitement numérique a été utilisé pour l'amélioration des images est celui de la recherche spatiale en 1964 au jet propulsion laboratory de pasadena (Californie), des images de la lune transmises par la sonde Ranger 7 ont été traitées par l'ordinateur [1].

Parallèlement, l'application du traitement des images s'est progressivement mais considérablement élargie à d'autres domaines comme la médecine (radiographie, tomographie, scintigraphie,...), la biologie, la géologie, la métrologie, la physique (spectroscopie, la physique de plasma,.....), et les applications militaires.

De nouvelles applications pratiques sont maintenant en vue, allant des diagnostics médicaux à la vision par ordinateur appliquée à la robotique et à l'intelligence artificielle ; notamment, la reconnaissance automatique de texte et des formes d'objets par une machine appelée à remplacer l'œil humain. Nous pouvons dire que nous traitons une image dès lors que nous extrayons une information de cette image. Il existe plusieurs façons de traiter des images. Une des plus importantes est la détection de certaines formes, certains contours ou certaines textures de modèles connus, sans vouloir préserver les autres informations contenues dans l'image dite aussi l'analyse des images et elle est divisée en 2 techniques de base ; l'extraction d'attribut ou de « forme » (contours, textures) et la segmentation de l'image en régions présentant des caractéristiques spécifiques.

Plusieurs opérateurs, désormais classiques, ont été utilisés pour résoudre les difficultés liées à l'analyse de l'image, ces approches consistent en une cascade d'un filtre passe-bas suivi d'un opérateur différentiel pour l'analyse de l'image. Parmi ces opérateurs nous mentionnons celui de Marr [2] qui a proposé des filtres gaussiens simples associés à des dérivées secondes non directionnelles. Dans [3], une étude comparative a été présentée entre les différents opérateurs de détection de contours, l'opérateur de Canny, l'opérateur de Deriche et l'opérateur de Marr, pour aboutir enfin à un filtre optimal exponentiel conçu pour un modèle de contour échelon.

Canny [4] a montré que le filtre optimal 1D, selon le critère de localisation, est une combinaison linéaire de 4 filtre exponentiels de taille finie qui peuvent être approximés par la dérivée première d'un filtre gaussien. Dans [5] Deriche a proposé un opérateur de détection de contours et d'analyse, basé sur le critère de Canny qu'il a implémenté récursivement tout en considérant une fenêtre de taille infinie.

L'inconvénient majeur de ces opérateurs est la contradiction qui existe entre le filtrage et la précision de localisation du contour dans les filtres gaussiens créant ainsi les effets de réponses multiples. Aussi, la taille de ces filtres est invariante ce qui mène à une mauvaise analyse temps-fréquence qui exige une fenêtre de taille variable. Ainsi, un opérateur plus souple et plus efficace qui a pris un essor considérables ces dernières années est l'ondelette.

L'analyse de Fourier classique et la méthode de Gabor se sont depuis longtemps montrées inadaptées car elles ne permettent pas d'obtenir une résolution suffisante. Dans [6], il a été proposé un procédé révolutionnaire en utilisant les ondelettes pour l'analyse et la synthèse des signaux, ceci a permis d'analyser efficacement des signaux où se combinent des phénomènes d'échelles très différentes. La transformation en ondelettes qui a été créée pour résoudre des problèmes posés par la sismique- réflexion a été ensuite appliquée à l'analyse des sons, des images et de toute forme de signal.

Depuis le 18^{ème} siècle, de nombreux mathématiciens ont étudié la représentation en fréquences des signaux. La technique des séries de Fourier, qui consiste sans doute le point de départ de cette approche, a abouti à l'analyse par ondelette [7,8].

Un procédé plus efficace pour analyser un signal consiste à décomposer le signal en des fonctions limitées dans le temps afin d'en analyser des fragments indépendamment, et donc une représentation temps-fréquence s'avère nécessaire.

Divers nouveaux domaines d'applications sont actuellement envisagés, principalement en médecine et en mécanique. Puisque les ondelettes ont la capacité d'analyser des phénomènes qui se produisent simultanément à des échelles différentes, elles sont très utilisées pour étudier les objets de types fractals.

Mallat a conçu une version multidimensionnelle de l'analyse en ondelettes afin de traiter des images numérisées et d'analyser ainsi ses irrégularités. Il a montré que l'ondelette est un outil mathématique performant pour l'analyse des irrégularités dans

l'image. Cette analyse représente un volet important dans le traitement de l'image [9].

Nous considérons, dans notre travail, l'étude du concept de l'analyse multirésolutionnelle avec ondelette séparable, et une application le débruitage d'image.

ORGANISATION DU MEMOIRE

Nous considérons dans ce mémoire le concept de traitement d'image au moyen d'algorithmes utilisant la morphologie mathématique. Après l'introduction, le mémoire comporte quatre chapitres.

Dans le chapitre 1, nous présentons le problème de l'apparition de l'ondelette, nous commençons par la transformée de Fourier et ensuite par la transformée de Fourier fenêtrée.

Dans le chapitre 2, nous présentons le formalisme mathématique sur la théorie des ondelettes. Nous commençons par la procédure de construction des ondelettes à partir des filtres quadrature miroirs et ensuite nous expliquons les différentes familles des ondelettes.

Le chapitre 3 est divisé en deux parties. La première partie consiste à bien expliquer la technique de l'analyse multirésolutionnelle à une dimension qui se base sur l'opérateur ondelette, le concept d'extraction de différents détails et l'approximation à chaque niveau de résolution. Dans la deuxième partie, le concept d'analyse 1D sera étendu à l'image, signal bidimensionnel, où nous donnons une étude approfondie du cas particulier opté traditionnellement qui est le cas de séparabilité.

Le chapitre 4, nous donne une application sur les ondelettes qui est le débruitage. Enfin, terminons par une conclusion générale, et ensuite nous donnons quelques perspectives pour ce travail de recherche.

Chapitre I : Pour quoi les Ondelettes ?

I.1 Transformée.....quoi ?

I.2 Transformée de Fourier (TF)

I.3 Transformée de Fourier fenêtrée (TFF)

I.1 Transformée.....quoi ?

Dans la pratique, la plupart des signaux sont des signaux dépendant du temps (du domaine temporel) sous leur format brut. La représentation du signal est une représentation temps-amplitude.

Cette représentation n'est pas toujours la meilleure pour la plupart des applications de traitement du signal. Dans beaucoup de cas, l'information la plus pertinente est cachée dans la composante de fréquence du signal. Le spectre de fréquence d'un signal sont les composantes de fréquence de ce signal. Le spectre de fréquence d'un signal indique quelles sont les fréquences qui existent dans le signal.

Intuitivement, nous savons que la fréquence est liée au régime de changement d'une variable physique ou mathématique. Si cette variable change

- Rapidement : changement à haute fréquence,
- Lentement : changement à basse fréquence, et
- Si elle ne change pas du tout, qu'elle est de fréquence zéro.

Comment allons-nous mesurer la fréquence, comment allons-nous trouver le contenu en fréquence d'un signal ? La réponse c'est la TRANSFORMÉE de FOURIER (TF). Si on prend la TF d'un signal du domaine temporel, on obtient la représentation fréquence-amplitude de ce signal [10,11].

- Si ce résultat de cette intégration est une petite valeur, alors nous disons que le signal $x(t)$ n'a pas de composante spectrale dominante et majoritaire à la fréquence « f ».
- Si ce résultat est nul, alors le signal ne contient pas du tout la fréquence « f ».

L'information fournie par l'intégrale, correspond à tous les instants de temps, puisque l'intégration est de $-\infty$ à $+\infty$ sur le temps. Il suit qu'à n'importe quel instant du temps la composante avec la fréquence « f » apparaît, elle affectera également aussi bien le résultat de l'intégration. En d'autres termes, si la composante « f » de fréquence apparaît au temps T_1 ou au temps T_2 , il y aura le même effet sur l'intégration.

C'est pour quoi la transformée de Fourier n'est pas appropriée si le signal a une fréquence variable dans le temps (non stationnaire). Si uniquement, le signal a une composante de fréquence « f » à tout moment (pour toutes les valeurs de « f » (stationnaire)), alors le résultat obtenu par la transformée de Fourier a un sens. Il est donc très important de savoir si un signal est stationnaire ou pas, avant de le traiter avec la TF [11].

Exemple 1 :

On peut connaître quelles fréquences constituent le signal [13].

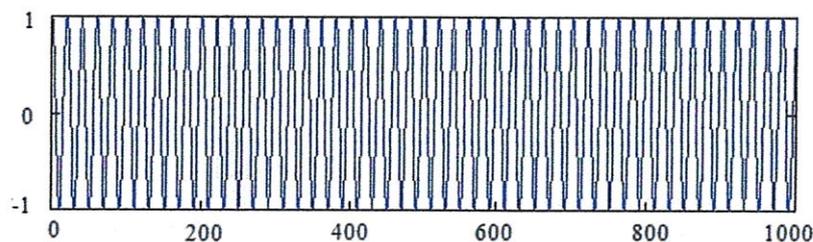


Figure 1.1 : Signal du domaine temporel (50 HZ).

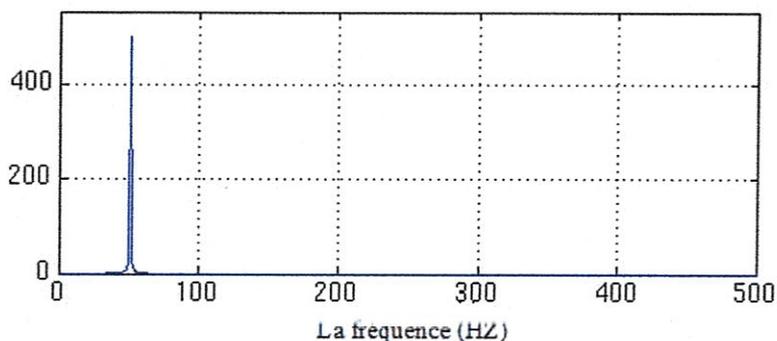


Figure 1.2 : Transformée de Fourier du signal.

Pour quoi avons-nous besoin des informations de fréquence ?

Souvent, l'information qui ne peut pas être distinguée dans le domaine temporel est facilement visible dans le domaine fréquentiel.

Prenons un exemple dans le secteur des signaux biologiques et supposons que nous observions un signal ECG (Electro-Cardio-Graphie, graphique enregistrant l'activité électrique du cœur) La forme typique du signal ECG d'un cœur sain est bien connue des cardiologues, tout écart avec cette forme est considéré comme le symptôme d'une possible pathologie.

Ce signe de pathologie, cependant, n'est pas toujours très évident dans le signal, du domaine temporel, original. Les cardiologues utilisent jusqu'à présent les enregistrements de ces signaux dans le domaine temporel, ils figurent sur les bandes de papiers, pour analyser les ECG. Récemment, les nouveaux analyseurs ECG informatisés utilisent l'information de fréquence pour décider de l'existence d'une pathologie. Un symptôme de maladie peut parfois être mieux diagnostiqué quand on analyse les composantes fréquentielles du signal.

Ceci n'est qu'un exemple de l'utilité de l'analyse en fréquence. La TF est aujourd'hui, très largement utilisée dans beaucoup de domaines [11,13].

I.2.4 Inconvénients

Malgré son immense succès, cette technique a plusieurs défauts, en particulier :

- Son manque évident de localisation temporelle. La TF, est une transformation réversible, c'est-à-dire qu'elle permet des « aller-retour » entre le signal brut et le signal traité (transformé). Aucune information de fréquence n'est disponible

dans le domaine temporel et aucune information temporelle n'est disponible dans la TF du signal.

En effet, l'analyse de Fourier permet de connaître les différentes fréquences excitées dans un signal, c'est-à-dire son spectre, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises. Cette analyse donne une information globale et non locale.

Cette perte de localité n'est pas un inconvénient pour analyser des signaux dont la structure n'évolue pas ou peu (statistiquement stationnaires), mais devient un problème pour l'étude de signaux stationnaires.

- L'analyse de Fourier ne permet pas l'étude de signaux dont la fréquence varie dans le temps (signaux non stationnaires) [11].

1.2.4.1 Signaux stationnaires

Ce sont les signaux dont le contenu en fréquence ne change pas au cours du temps. Autrement dit, la composition en fréquences des signaux stationnaires est indépendante du temps. Dans ce cas, on n'a pas à connaître à quels instants les composantes en fréquence existent : ces composantes en fréquence existent tout le temps !

Exemple 2 : un signal stationnaire.

Un signal stationnaire car il présente des composantes de fréquence à 5, 10, 20 et 50 HZ à tout instant.

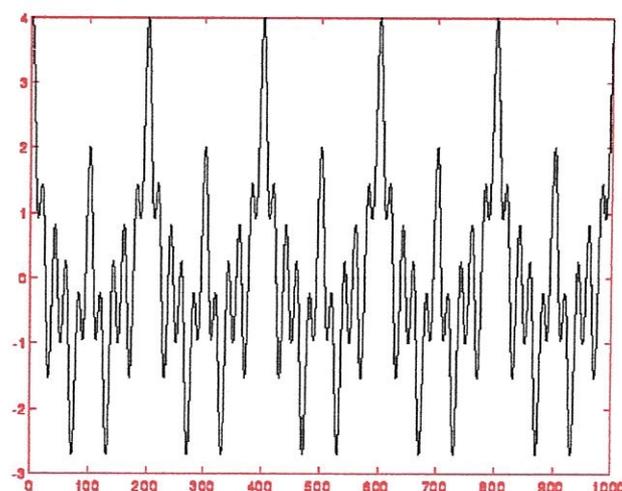


Figure 1.3 : Signal stationnaire.

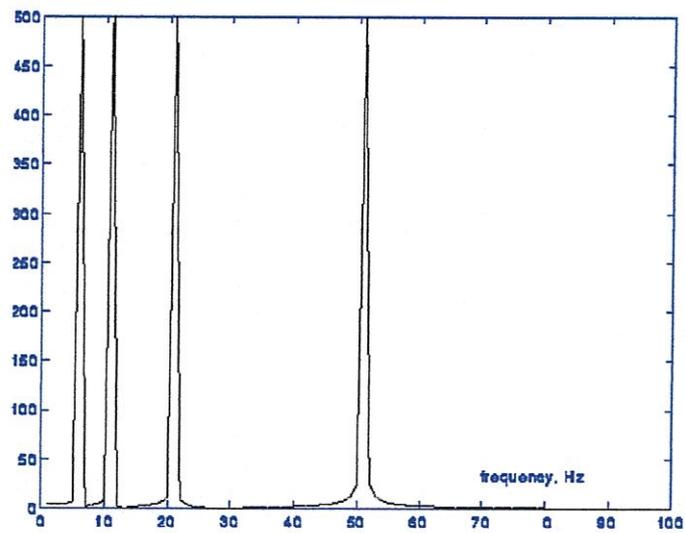


Figure 1.4 : Transformée de Fourier.

I.2.4.2 Signaux non stationnaires.

Exemple 3 : signal non stationnaire.

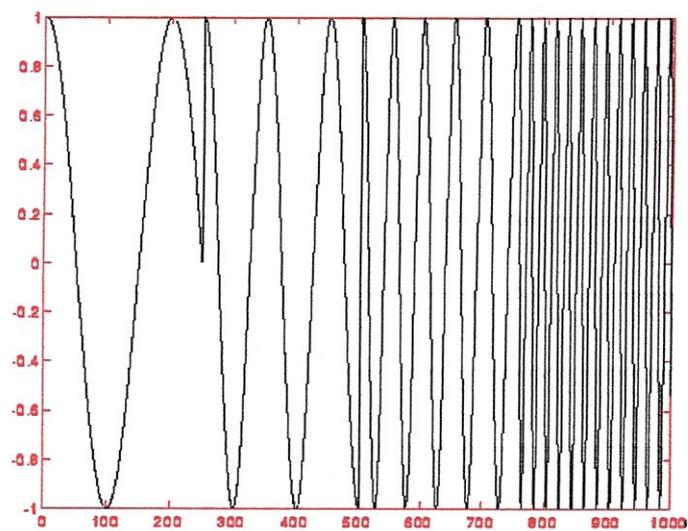


Figure 1.5 : Signal non stationnaire.

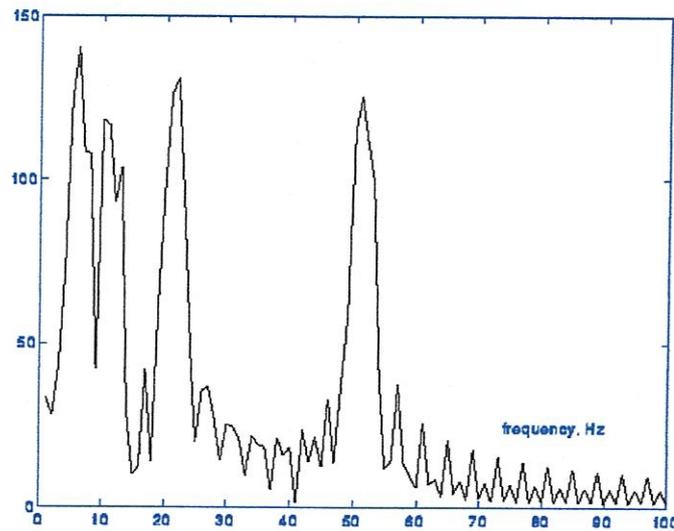


Figure 1.6 : Transformée de Fourier.

Un signal ayant les même quatre composantes de fréquence de l'exemple 2 mais à quatre instants différents. Les quatre crêtes principales correspondant à 5, 10, 20, 50 Hz. La raison du bruit (crêtes intermédiaires) est que ces fréquences existent également dans le signal. Mais la raison qu'ils ont une petite amplitude, est qu'ils ne sont pas les composantes spectrales principales du signal donné (peuvent être filtrées), et nous les voyons à cause de changement soudain entre les fréquences.

Comme nous pouvons voir de cet exemple, la TF ne donne pas une bonne résolution entre les spectres de signaux x_i et les spectres correspondant aux signaux de transition brusques de signal i au signal $i+1$. Pour la TF, les deux signaux (x_i et la transition i vers $i+1$) sont les mêmes, parce qu'ils constituent des mêmes composants de fréquence. Par conséquent, la TF n'est pas un outil approprié pour analyser les signaux non stationnaires, signaux avec des spectres variables de temps.

La transformée de Fourier n'est donc pas l'outil adéquat pour les signaux non stationnaires, à une exception : la TF peut être utilisée pour les signaux non stationnaires si on ne s'intéresse qu'aux composantes spectrales qui existent dans le signal et non aux instant où elles apparaissent.

Si cependant cette information est recherchée, si on veut savoir quelles composantes spectrales apparaissent et à quels instants, alors la TF n'est pas la transformée à utiliser.

Donc quand on a besoin de la localisation dans le temps des composantes spectrales, on utilise une transformée : *Transformée de Fourier fenêtrée* (Short Time Fourier Transform (STFT)), *Ondelette* (Wavelet Transform (WT)), qui fournit une représentation Temps-Fréquences du signal [11].

I.3 Transformée de Fourier fenêtrée (TFF).

I.3.1 Définition

La transformée de Fourier fenêtrée remplace la sinusoïde de la transformée de Fourier par le produit d'une sinusoïde et d'une fenêtre localisée en temps [14]. Elle consiste à :

- Appliquer la transformée de Fourier pour chaque morceau du signal contenu dans la fenêtre.
- Décaler la fenêtre tout le long du signal.
- L'emplacement de la fenêtre sur le signal nous donnera l'information de temps qui manquait à la transformée de Fourier [13].

Donc elle a deux arguments : le temps, et la fréquence.

I.3.2 La formule

La fenêtre représentée par une fonction de fenêtrage w , la transformée de Fourier fenêtrée est définie comme suit.

$$STFT_x^{(w)}(t', f) = \int_t [x(t)w^*(t-t')]e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.4)$$

Regardons attentivement cette équation. $x(t)$ est le signal lui-même, $w(t)$ est la fonction fenêtre et $w(t)^*$ son complexe conjugué. Comme l'indique l'équation, la TFF du signal n'est autre que la TF du signal multiplié par la fonction fenêtre.

Pour chaque valeurs de f et de t' , on calcule un nouveau coefficient de la TFF.

La figure suivante nous aidera à comprendre cela un peu mieux.

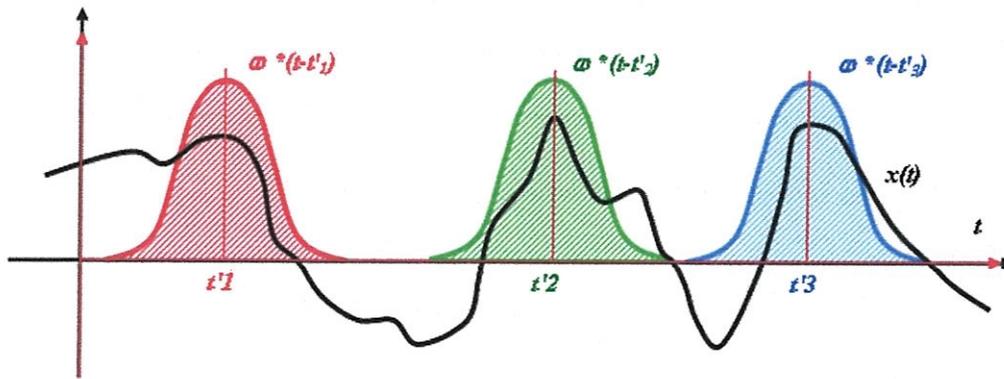


Figure 1.7 : Principe de la TFF d'un signal.

Les fonctions en couleur, à l'allure de gaussiennes, sont les fonctions de fenêtrage. La rouge montre la fenêtre placée à $t = t'1$, la verte à $t = t'2$ et la bleue montre la fenêtre située à $t = t'3$. Elles vont correspondre à trois différentes TF calculées à trois instants différents. Nous allons donc obtenir une représentation Temps – Fréquence du signal [13].

La transformée de Fourier fenêtrée a une résolution temps-fréquence fixe. C'est une représentation complète et stable. Elle est donc inversible [14].

I.3.3 Inconvénients

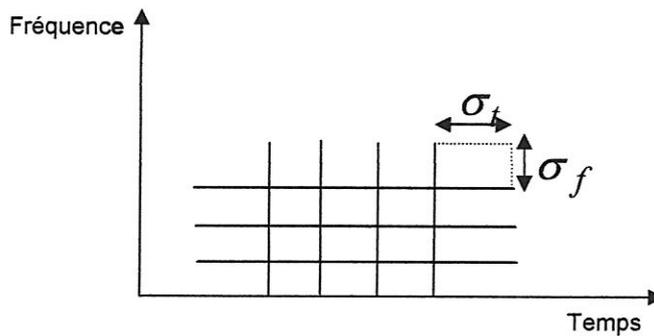


Figure 1.8 : Pavage temps fréquence pour la transformée de Fourier fenêtrée.

On constate un problème de résolution, problème au niveau de la largeur de la fenêtre [10].

Rappelez-vous qu'en TF il n'y a aucun problème de résolution dans le domaine fréquentiel, nous savons exactement quelles fréquences existent ; pareillement il n'y a aucun problème de résolution dans le domaine de temporel, puisque nous savons la valeur du signal à chaque instant de temps.

Réciproquement, la résolution de temps en TF, et la résolution de fréquence dans le domaine de temps sont zéro, puisque nous n'avons aucune information sur elles. Ce qui donne la résolution parfaite de fréquence en TF.

Maintenant, dans la TFF, notre fenêtre est de longueur finie, ainsi elle couvre seulement une partie du signal, qui cause la résolution de fréquence de devenir plus pauvre : nous ne connaissons plus les composants exacts de fréquence qui existent dans le signal, mais nous connaissons seulement une bande des fréquences qui existent.

Vous pouvons-nous demander, pourquoi ne rendons-nous pas la longueur de la fenêtre dans le TFF infinie, pour obtenir la résolution parfaite de fréquence ?

Nous sommes confrontés au dilemme suivant :

Si nous employons une fenêtre de longueur infinie, nous n'obtenons la TFF, qui donne la résolution parfaite de fréquence, mais aucune information de temps. En outre, afin d'obtenir la stationnarité, nous devons avoir une fenêtre assez étroite, dans laquelle le signal est stationnaire. Plus nous rendons la fenêtre étroite, plus la résolution de temps est meilleure, et plus la l'hypothèse du stationnarité est meilleure, mais plus pauvre la résolution de fréquence:

Fenêtre étroite - bonne résolution temporelle, mauvaise résolution fréquentielle.

Fenêtre large - bonne résolution fréquentielle, mauvaise résolution temporelle.

Un utilisateur souhaitant employer la TFF est confronté à ce problème de résolution.

Quel genre de fenêtre à employer ?

- Les fenêtres étroites donnent la bonne résolution dans le domaine du temps, mais la résolution est faible dans le domaine de fréquence.
- Les fenêtres larges donnent la bonne résolution dans le domaine de fréquence, mais la résolution est faible dans le domaine du temps ; en outre, les fenêtres larges peuvent violer la condition de stationnarité.

Peut-on choisir une fonction de fenêtre, une fois pour toutes, et l'utilisation cette fenêtre dans l'analyse entière ?

La réponse, naturellement, est liée à l'application : si les composantes de fréquence sont bien séparées l'une de l'autre dans le signal original, nous pouvons alors sacrifier une certaine résolution dans le domaine de fréquence et aller chercher la bonne résolution dans le domaine de temps. Cependant, si ceci n'est pas le cas, alors une bonne fonction de fenêtre doit être trouvée, cette tâche pourrait être bien difficile ! [11].

Une solution la transformée en Ondelettes.

C'est quoi la transformée en ondelettes continue ?

- Même principe que la TFF.
- Différence majeure : on utilise une fenêtre (dans notre cas une ondelette mère) dont la largeur est variable.
- But : obtenir plus de précisions dans les résultats en fonction du type de fréquences (hautes ou basses) [13].

Dont le principe est précisé dans le chapitre suivant.

Chapitre II : Outils mathématique

« Les ondelettes »

- II.1 Généralités
 - II.2 Transformée en ondelette continue (TOC)
 - II.3 Transformée en ondelette continue inverse (TOCI)
 - II.4 Transformée en ondelettes discrète (TOD)
 - II.5 Construction des ondelettes
 - II.6 Familles d'ondelettes
 - II.7 Conclusion
-

La théorie des ondelettes est devenue un outil mathématique très utilisé depuis les années 80. En effet, on y trouve beaucoup d'applications dans des domaines très divers : la mécanique des fluides, l'étude des équations aux dérivées partielles, le traitement du signal.....Elles sont aussi très présentes en traitement d'images puis qu'elles permettent de résoudre de nombreux problèmes classiques tels que la restauration d'image, la compression, l'analyse de textures, le gradient de textures ou encore l'estimation du mouvement [15].

Bien que délivrant une information temporelle, la transformée de Fourier s'avère toute fois insuffisante [12] pour certaines applications en l'occurrence les signaux non stationnaires.

A l'inverse, la transformée en ondelettes est une transformation adaptée à l'analyse des signaux non stationnaires d'énergie finie [16]. Elle consiste à analyser le signal à l'aide d'une fonction appelée ondelette bien localisée, de moyenne nulle, qu'on translate sur tout le signal et que l'on peut dilater [12].

L'intérêt croissant des ondelettes n'est pas un pur hasard, mais il est dû à sa capacité de donner une analyse multi échelle d'un signal avec une flexibilité et une bonne localisation temps fréquence qui dépend de l'échelle [9].

II.1 Généralités

Le terme **ondelette** signifie **petite onde**. La "petitesse" en question se réfère à la condition selon laquelle cette fonction (de fenêtrage) est de dimension finie. Le terme "onde" est une référence indiquant qu'elle est oscillante, par conséquent, et en se retournant à la dimension finie du support de l'ondelette, on peut grouper un ensemble d'ondelettes qui présentent la même nature et qu'on appelle « famille », alors une famille d'ondelettes est générée à partir d'une onde principale nommée « **ondelette mère** ».

Le terme "mère" implique que les fonctions, d'intervalles de support différents, utilisées dans le processus de transformation dérivent toutes d'une fonction principale. L'ondelette mère est donc, en d'autres termes, le **prototype** permettant d'engendrer [13] les autres fonctions de fenêtrage.

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad a \in \mathfrak{R}, b \in \mathfrak{R} \quad (2.1)$$

Le paramètre a est appelé facteur d'échelle, et b facteur de décalage. Le sens du terme translation est celui qu'il avait dans la TFF, il est lié à la localisation de la fenêtre, à mesure que cette fenêtre est décalée sur l'étendue du signal. Ce terme correspond évidemment à une information de temps dans le domaine de la transformée.

Nous n'avons pas cependant de paramètre de fréquence, comme nous l'avons avec la TFF, il est remplacé par un paramètre d'échelle défini comme **1/fréquence**. Le terme fréquence [13] reste réservé à la TFF (ou à la TF).

Le paramètre d'échelle dans l'analyse d'ondelette est semblable à l'échelle utilisée dans les cartes géographiques ou plans, comme dans le cas des cartes, les hautes échelles correspondent à une vue globale non-délaîtée (du signal), et les basses échelles correspondent à une vue détaillée.

De même, en termes de fréquence, les basses fréquences (hautes échelles) correspondent à une information globale d'un signal, tandis que les hautes

fréquences (basses échelles) correspondent à une information détaillée d'un modèle caché dans le signal.

L'échelle, comme une opération mathématique, dilate ou comprime [11] un signal. Grandes échelles correspondent aux signaux dilatés et les petites échelles correspondent aux signaux comprimés.

La figure 2.1 présente un exemple de génération d'une base d'ondelettes.

L'ondelette mère utilisée dans cet exemple est celle de Grossman et Morlet (1984) dont la forme est :

$$\psi(x) = \cos(5.x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (2.2)$$

De gauche à droite, une ondelette [16] contractée ($a=0.5$; $b=-10$), L'ondelette mère ($a=1$; $b=0$) et une ondelette dilatée ($a=2$; $b=20$).

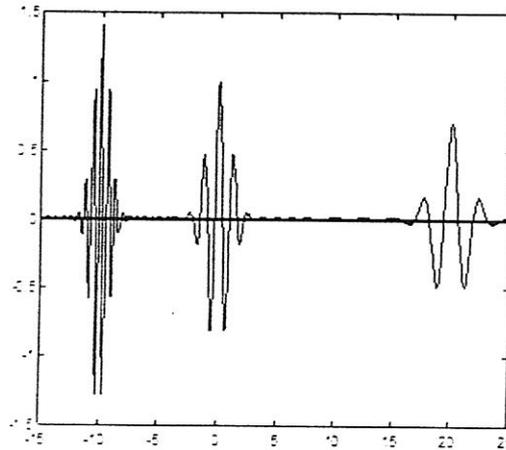


Figure 2.1 : Génération d'ondelette par dilatation et translation.

Dans la définition de la transformée en ondelettes, le terme d'échelle figure au dénominateur et donc, lorsque : $a > 1$ dilate le signal (basses fréquences), et lorsque $a < 1$ comprime le signal (hautes fréquences) [11, 13].

Ainsi une ondelette mère doit satisfaire les conditions d'admissibilité suivantes qui vérifie l'inversion de l'ondelette :

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|w|} |\Psi(w)|^2 dw < \infty \quad (2.3)$$

où Ψ est la transformée de Fourier de la fonction ψ . Cette condition implique que ψ décroisse plus vite quand t tend vers $+\infty$. Et que $\Psi(0) = 0$, et que $\Psi(\omega)$ est petite au voisinage de zéro [9]. De plus l'ondelette mère doit être à moyenne nulle comme l'indique l'équation (2.4).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (2.4)$$

Cette propriété entraîne que l'ondelette est une fonction oscillante. L'oscillation de ψ et l'adjonction d'une propriété de décroissance liée à la régularité de l'ondelette [17]. Nous pouvons étendre l'équation (2.4) au moment d'ordre M donnant ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0 ; k=1, \dots, M \quad (2.5)$$

La nullité des moments d'une ondelette permet d'analyser la régularité locale d'un signal [14]. Plus une fonction présente des moments nuls plus elle est régulière.

II.2 Transformée en ondelette continue (TOC)

La transformée en ondelettes est une fonction $W_f(a, b)$ qui associe aux paramètres a et b la valeur du coefficient $C_{a,b}$ de l'ondelette $\psi_{a,b}$ dans la décomposition du signal. La décomposition ou analyse d'une fonction $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$W_f(a, b) = C_{a,b} = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^* \left(\frac{x-a}{b} \right) dx \quad (2.6)$$

où $\psi_{a,b}$ est une ondelette analysante, ψ^* est le complexe conjugué de ψ , et $\langle f, \psi_{a,b} \rangle$ est le produit scalaire défini dans $L^2(\mathbb{R})$. Dans ce cas, a et b sont définis comme précédemment et varient d'une façon continue. Pour une échelle a et une position b , l'équation (2.6) représentée par $f(x)$ pour cette échelle [16] et à cette position.

II.3 Transformée en ondelette continue inverse (TOCI)

La transformée en ondelettes directe permet d'analyser un signal afin de détecter des singularités ou bien un comportement non stationnaire ou fractal. Il est possible, à partir de l'ensemble des coefficients calculés, de reconstruire le signal de départ.

Pour que la transformée en ondelettes admette une inversion, il faut que l'ondelette ψ vérifie les conditions d'admissibilité (équation 2.3 et 2.4).

La transformée inverse est donnée par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{da db}{a^2} \quad (2.7)$$

Il est donc facile, connaissant les coefficients $C_{a,b}$ et l'ondelette de référence $\psi(x)$, de reconstruire le signal $f(x)$ [16].

II.4 Transformée en ondelettes discrète (TOD)

Considérons une fonction $f(x)$ est sa transformée en ondelettes continue, $W_f(a, b)$ la discrétisation consiste en l'extraction d'un ensemble de coefficients $C_{a,b}$ permettant de trouver complètement l'information contenue dans la version continue.

Les paramètres de dilatation et de translation a et b se réduisent à un réseau discret de la forme : $(a, b) = (a_0^j, nb_0 a_0^j)$ avec $a_0 > 1, b_0 \neq 0$ et $(j, n) \in \mathbb{Z}^2$.

L'équation (1) devient :

$$\psi_{j,n}(x) = a_0^{-j} \psi(a_0^{-j}(x - nb_0 a_0^j)) = a_0^{-j} \psi(a_0^{-j}x - nb_0) \quad (2.8)$$

Au paragraphe précédent nous avons défini la décomposition ou analyse d'une fonction $f(x)$ par l'équation (2.6). De façon similaire, on a, dans le cadre des ondelettes discrètes :

$$W_f(a_0^j, nb_0 a_0^j) = C_{j,n}(f(x)) = \langle f, \psi_{j,n} \rangle = \frac{1}{a_0^j} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{j,n}^*(x) dx \quad (2.9)$$

où $C_{j,n}$ est appelée le coefficient d'ondelette. Ce coefficient représente une mesure de l'intensité des variations locales du signal. Sa valeur sera importante si l'échelle de variation de l'ondelette $\psi_{j,n}$ est proche de la structure locale du signal. Si le signal présente peu ou pas de variations pour cette échelle, la valeur du coefficient d'ondelette sera faible. $C_{j,n}$ est donc une caractérisation des structures présentes dans le signal pour cette échelle et à cette position.

De même, la reconstruction d'une fonction $f(x)$ à partir des coefficients d'ondelettes s'écrit :

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{j,n}(f(x)) \psi_{j,n}(x) \quad (2.10)$$

Meyer a montré qu'il existe des fonctions ψ telles que pour $a_0=2$ et $b_0=1$ (Transformée en ondelettes discrètes dyadiques), les fonctions $\psi_{j,n}(x)$ constituent une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$, elles sont définies comme précédemment par dilatation et translation de l'ondelette mère [16]. L'équation (8) devient :

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - n) \quad (2.11)$$

II.5 Construction des ondelettes

Une base d'ondelette consiste en une paire de fonctions constituant une base dite de Riez [18] générée à partir de deux fonctions à support compact par dilatation et translation de l'ondelette et l'ondelette duale comme suit :

$$\begin{cases} \psi_n^j(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - n) & (j, n) \in \mathbb{Z}^2 \\ \tilde{\psi}_n^j(x) = 2^{-j/2} \tilde{\psi}(2^{-j}x - n) & (j, n) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases} \quad (2.12)$$

où ψ_n^j dénote l'ondelette dilatée et tradlatée avec un facteur de dilatation 2^{-j} et un facteur de translation n . Toute fonction f à énergie finie peut-être exprimée par la décomposition stable suivante :

$$f = \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_n^j \rangle \psi_n^j = \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_n^j \rangle \tilde{\psi}_n^j = \sum_{j,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_n^j \rangle \psi_n^j \quad (2.13)$$

La décomposition est stable si elle vérifie le critère de Daubechies : « une représentation multirésolutionnelle est stable si elle est bornée ».

Il existe deux types d'ondelettes : les ondelettes orthonormales et les ondelettes biorthogonales.

II.5.1 Construction d'ondelette orthonormale

Les ondelettes orthonormales sont associées à une fonction échelle ϕ qui permet de définir une analyse multirésolutionnelle. Cette analyse multirésolutionnelle est représentée par un ensemble de sous-espaces vectoriels V_{2^j} , $j \in (-\infty, +\infty)$, imbriqués,

tel que chaque sous espace V_{2^j} (par simplification, nous utilisons aussi le symbole V_j pour représenter V_{2^j}) est généré par la dilatation et la translation de la fonction échelle mère ϕ avec un facteur de dilatation égale à 2^{-j} . Cet ensemble de sous-espaces vectoriels vérifie donc $\{0\} \subset \dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots \subset L^2(\mathfrak{R})$ où $\{0\}$ est le singleton zéro et $L^2(\mathfrak{R})$ est l'espace d'Hilbert définie comme étant un espace vectoriel de toutes les fonctions monodimensionnelles mesurables (dont le carré est intégrable). Ainsi les ondelettes sont construites pour caractériser les détails perdus entre deux niveaux d'approximation adjacents 2^{-j} et $2^{-(j+1)}$. Le signal détail à la résolution 2^{-j} est donné par la projection du signal original sur W_j le complément vectoriel orthogonal de V_{2^j} dans $V_{2^{j+1}}$. La construction de ϕ et ψ est basée sur un polynôme trigonométrique $m_0(w)$ tel que $m_0(0)=1$. Etant donné la fonction échelle ϕ et la fonction échelle $\phi_{-1,n}$ donnée à la résolution $j=-1$ et au point de translation n , telles que $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$ et $\phi_{-1,n}$ forment une base orthonormale dans V_{-1} ; alors nous avons

$$\phi = \sum_n h_n \phi_{-1,n} \quad (2.14)$$

avec $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1$. L'équation (2.14) peut s'écrire alors :

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n) \quad (2.15)$$

Dans le domaine fréquentiel, l'équation (2.15) devient :

$$\hat{\Phi}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-inw} \hat{\Phi}(w/2) \quad (2.16)$$

L'équation (2.16) peut se réécrire comme :

$$\hat{\Phi}(w) = m_0(w/2) \hat{\Phi}(w/2) \quad (2.17)$$

Avec

$$m_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-inw} = \hat{H}(w) \quad (2.18)$$

où ($\hat{H}(w)$ ou $m_0(w)$) est un filtre miroir avec la réponse impulsionnelle $h(n)=h(-n)$. En utilisant l'orthonormalité de la fonction échelle ϕ et la périodicité de $m_0(w)$, nous obtenons

$$\sum_l |\hat{\Phi}(w + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1} \quad (2.19)$$

La substitution de (2.16) dans (2.17) donne

$$\sum_l |m_0(w + \pi l)|^2 |\hat{\Phi}(w + \pi l)|^2 = (2\pi)^{-1} \quad (2.20)$$

De l'équation (2.20), il peut- être montré que :

$$|m_0(w)|^2 + |m_0(w + \pi)|^2 = 1 \quad (2.21)$$

C'est à dire, les filtres vérifiant la condition (2.21) sont dits des filtres conjugués (conjugate filters). La fonction échelle ϕ sera alors construite à partir de $m_0(w)$ par :

$$\hat{\Phi}(w) = \prod_{p=1}^{\infty} m_0(2^{-j} p_w) \quad (2.22)$$

Pour construire l'ondelette mère ψ , nous remarquons de la définition de V_J et de W_J que si une fonction $f \in W_0$, W_0 l'espace générée par cette fonction ondelette, alors $f \in V_{-1}$ et f est perpendiculaire à V_0 . Puisque $f \in V_{-1}$ alors $f = \sum_n f_n \phi_{-1,n}$.

Ceci implique que

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum f_n e^{-inw} \hat{\Phi}(w/2) = m_f(w/2) \hat{\Phi}(w/2) \quad (2.23)$$

Substituons les équations (2.16) et (2.20) dans l'équation (2.23) et utilisons l'orthogonalité de la fonction échelle, nous obtenons :

$$\hat{f}(w) = e^{-inw/2} \overline{m_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \nu(w) \hat{\Phi}(w/2) \quad (2.24)$$

où $\overline{(\quad)}$ représente le conjugué et ν est une fonction périodique de périodicité égale à 2π . Donc, nous pouvons construire une base d'ondelettes $\psi(x)$ de W_0 comme suit

$$\hat{\Psi}(w) = G(w/2) \hat{\Phi}(w/2) \quad (2.25)$$

où

$$G(w) = e^{-iw} \overline{m_0\left(\frac{w}{2} + \pi\right)} \quad (2.26)$$

Les filtres $\hat{H}(w)$ et $G(w)$ donnés respectivement par les équations (2.21) et (2.26) sont appelés des filtres de quadrature conjugués [9].

II.5.2 Construction des ondelettes biorthogonales

Malgré de nombreux avantages, les analyses multi résolutions 1D ou séparables présentent au moins un inconvénient pratique : si on veut préserver la symétrie du traitement (linéarité en phase), les filtres numériques impliqués dans les algorithmes ont une réponse impulsionnelle infinie. Leur mise en œuvre, sauf cas particulier des filtres récurrents, est donc relativement lourde et/ou le résultat imprécis.

Dans les applications liées au traitement des images, cette symétrie du traitement semble très souhaitable ; d'autre part, ce type d'application est particulièrement sensible à la complexité des algorithmes car le nombre de données à traiter est souvent considérable. Ces deux éléments ont conduit les chercheurs à proposer une variante de l'analyse multi résolution conciliant la linéarité en phase et la compacité des supports des filtres associés. La solution proposée fait appel aux bases biorthogonales. Ces familles de fonctions permettent l'analyse multi résolution du signal et assurent la possibilité d'une reconstruction parfaite du signal. L'analyse reste non redondante, possède les propriétés de symétrie et de simplicité.

Enfin la complexité conceptuelle de l'analyse sur les bases biorthogonales est un peu plus grande car l'analyse et la reconstruction n'utilisent pas les mêmes familles de fonctions [10].

Une construction parfaite des ondelettes biorthogonales est accomplie par quatre filtres $m_0(w)$, $m_1(w)$ et leurs duaux réciproques $\tilde{m}_0(w)$ et $\tilde{m}_1(w)$. Ces filtres doivent satisfaire [18] l'équation suivante.

$$\begin{cases} \tilde{m}_0(w)m_0(w) + \overline{m_1(w)}m_1(w) = 1 \\ \tilde{m}_0(w+\pi)m_0(w) + \overline{m_1(w+\pi)}m_1(w) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

La solution de ce système d'équation donne

$$\begin{cases} m_1(w) = e^{-iw} \overline{\tilde{m}_0(w+\pi)} \\ \tilde{m}_1(w) = e^{-iw} \overline{m_0(w+\pi)} \end{cases} \quad (2.28)$$

Nous pouvons ainsi définir la fonction échelle ϕ , la fonction ondelette ψ et leur duaux $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ par :

$$\hat{\Phi}(w) = \prod_{k=1}^{+\infty} m_0(2^{-k} w) \quad (2.29)$$

$$\hat{\Psi}(w) = m_1(w) \hat{\Phi}(w/2) \quad (2.30)$$

$$\hat{\tilde{\Phi}}(w) = \prod_{k=1}^{+\infty} \tilde{m}_0(2^{-k} w) \quad (2.31)$$

et

$$\hat{\tilde{\Psi}}(w) = \tilde{m}_1(w) \hat{\tilde{\Phi}}(w/2) \quad (2.32)$$

Finalement, nous pouvons dire que pour faire une analyse multirésolutionnelle, il suffit de connaître les fonctions ϕ et ψ ou les filtres m_0 et m_1 .

II.6 Familles d'ondelettes

Ils existent plusieurs types d'ondelette dont la qualité et les performances de chacune diffèrent selon certains critères qui sont :

- Le support de $\psi(x)$, $\Psi(w)$ et $\phi(x)$, $\Phi(w)$: Le support est donné par la vitesse de convergence de ces fonctions à l'infini vers zéro quand le temps ou la fréquence tend vers l'infini. Cette convergence quantifie la localisation dans le temps et dans la fréquence.
- Le nombre de moments : Le nombre des moments qui tendent vers zéro pour ϕ ou ψ (s'ils existent) est très utilisé dans le domaine de la compression.
- La régularité : La régularité telle qu'un signal ou une image reconstruit ne contenant pas d'irrégularité, est très utilisée pour l'extraction de bons contours (segmentation) [18, 19].

Ces critères sont associés à quelques propriétés tels que l'existence de la fonction échelle ϕ , l'orthogonalité ou la biorthogonalité, etc.

II.6.1 Ondelette orthogonale et à support compact

II.6.1.1 Ondelette de Daubechies

Les ondelettes de Daubechies n'ont pas une expression à l'exception de l'ondelette d'ordre 1, db1, appelé aussi « Haar wavelet » ondelette de Haar. L'ondelette de Haar est définie par :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases} \quad (2.33)$$

où $\psi(x)$ est l'ondelette mère et ϕ et la fonction échelle associée donnée par [9]

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases} \quad (2.34)$$

L'Ondelette de Haar [20] à les propriétés suivantes:

- Les filtres RIF de longueur 2.
- Utilisée en continue et en discret.
- La symétrie.
- $\psi(x)$ possède 1 moment nul.
- La régularité : fonction de Haar non continue.
- Localisation fréquentielle faible mais bonne localisation temporelle.

La figure 2.2 illustre la fonction échelle ϕ et l'ondelette associée ψ de Haar.

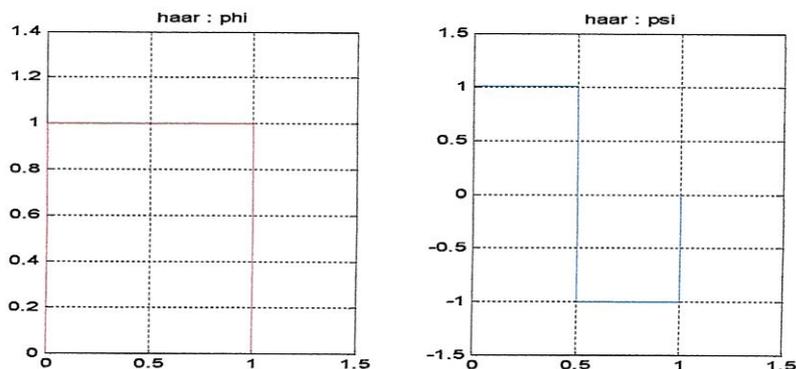


Figure 2.2 : Fonction échelle et ondelette de Haar.

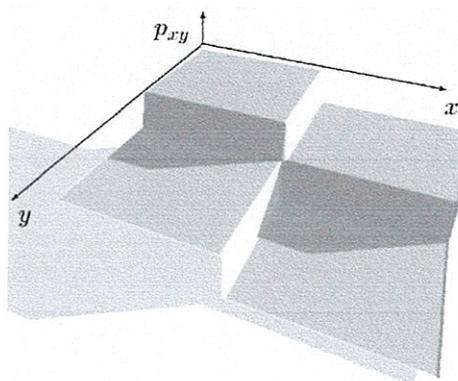


Figure 2.3 : L'ondelette-mère bidimensionnelle de Haar.

Les ondelettes de Daubechies $N > 1$, qui n'ont pas [9] une expression explicite, ont [20] les propriétés suivantes:

- Les filtres RIF de longueur $2N$ à phase minimale.
- Le nombre de moments tendant vers zéro de ψ est N [9].
- La régularité de ϕ et ψ augmente avec l'ordre N [9].
- Utilisée en continue et en discret.
- L'analyse est orthogonale et biorthogonale.
- L'analyse non symétrique.

Les figures 2.4 à 2.6 illustrent les ondelettes de Daubechies pour différent ordre N .

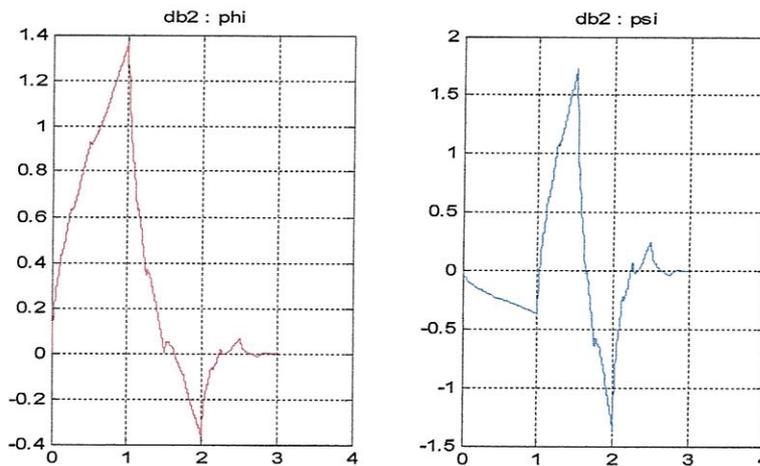


Figure 2.4 : Fonction échelle et ondelette de Daubechies pour $N = 2$.

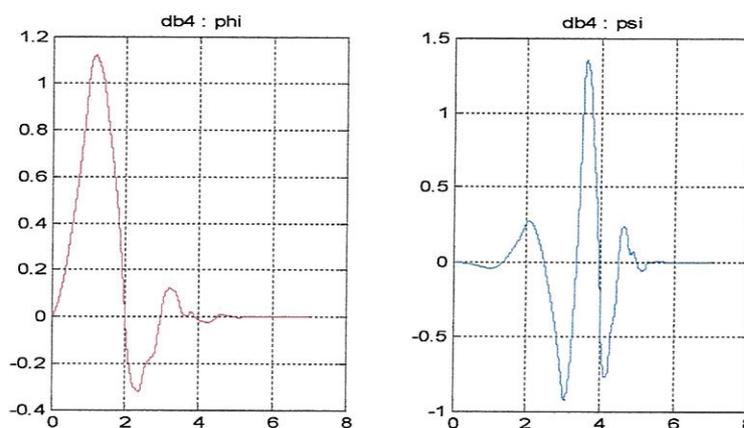


Figure 2.5 : Fonction échelle et ondelette de Daubechies pour $N = 4$.

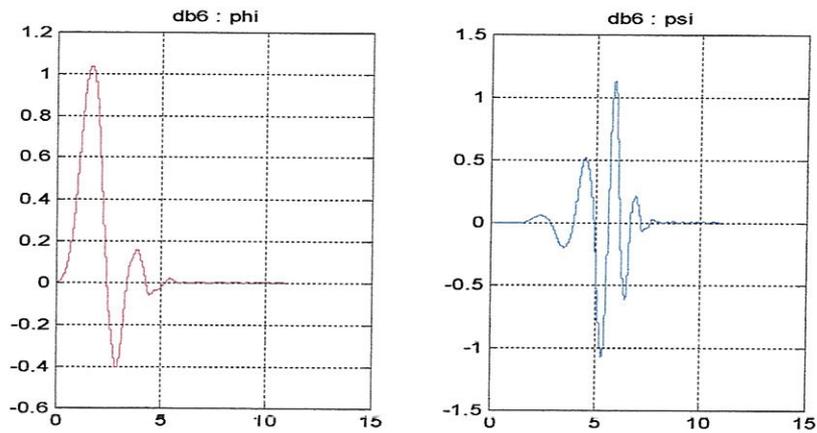


Figure 2.6 : Fonction échelle et ondelette de Daubechies pour N = 6.

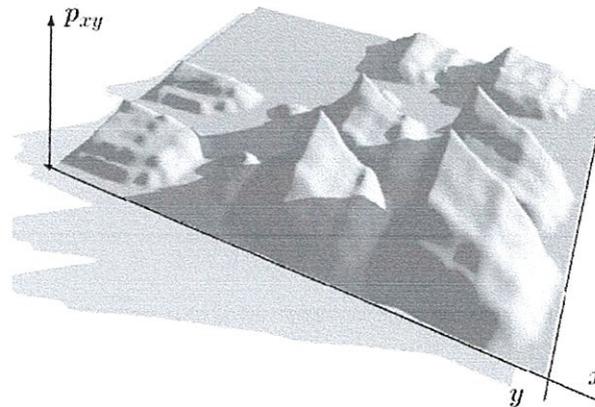


Figure 2.7: Ondelette mère bidimensionnelle de Daubechies N=3.

II.6.1.2 Ondelette de Symelet

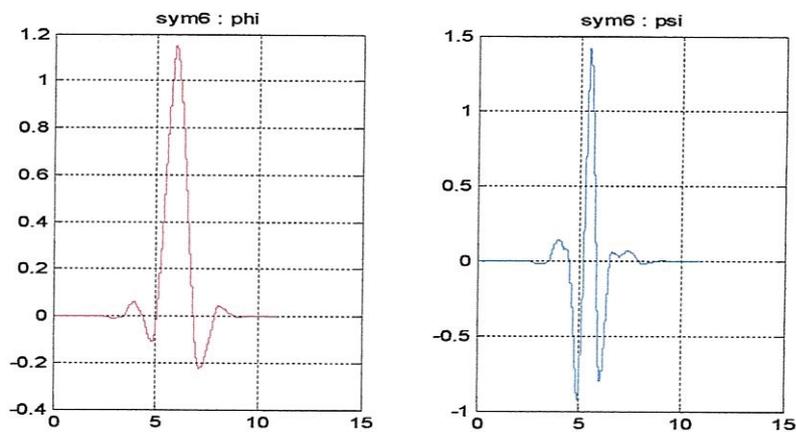


Figure 2.8 : Fonction échelle et ondelette de Symlet pour N = 6.

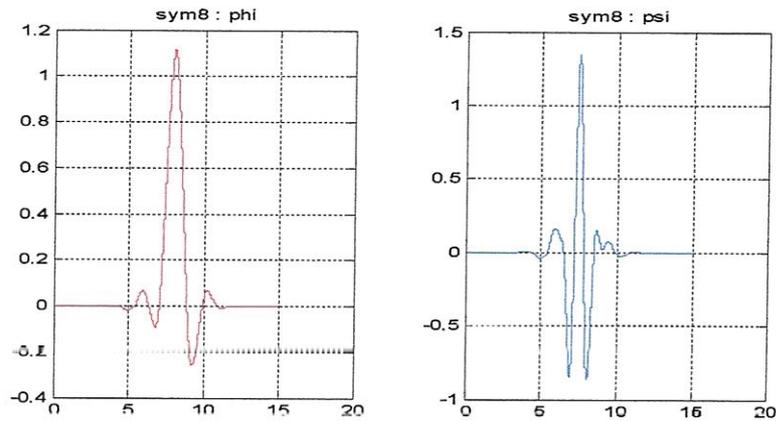


Figure 2.9 : Fonction échelle et ondelette de Symlet pour $N = 8$.

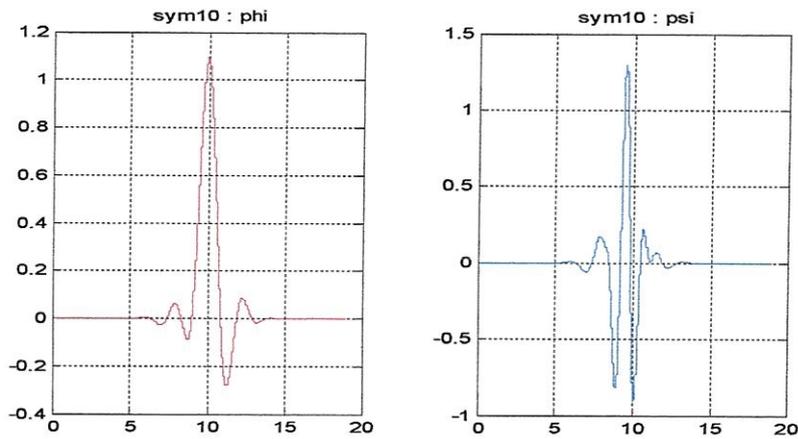


Figure 2.10 : Fonction échelle et ondelette de Symlet pour $N = 10$.

L'ondelette de Symlet (figures de 2.8 à 2.10), pour $N [1 \dots 33]$, est l'ondelette de Daubechies modifiée dont les propriétés sont les suivantes :

- Pour N pair l'ondelette presque symétrique.
- Les filtres RIF [20,21] de longueur $2N$.

II.6.1.3 Ondelette de Coiflet

L'ondelette de Coiflet c'est l'ondelette de Daubechies modifiée. Coiflet d'ordre $N [1 \dots 5]$ à les propriétés suivantes :

- La symétrie de ψ et de ϕ .

- L'ondelette ψ possède $2N$ moments nuls.
- La fonction échelle ϕ possède $2N - 1$ moments nuls.
- Les Filtres RIF [20,21] de longueur $6N - 1$.

Les figures 2.11 et 2.12 illustrent la fonction échelle ϕ et l'ondelette associée ψ de Coiflet.

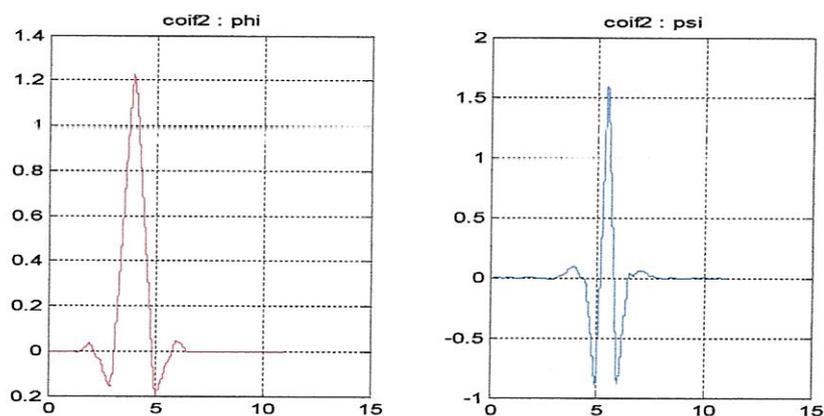


Figure 2.11 : Fonction échelle et ondelette de Coiflet pour $N = 2$.

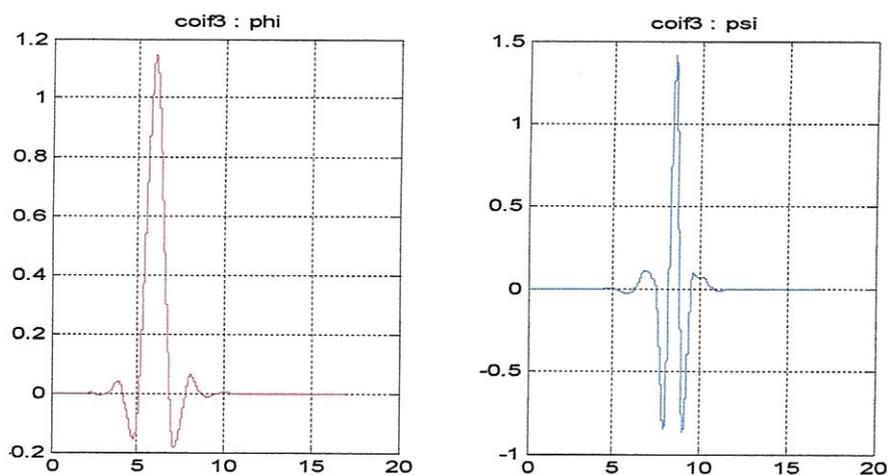


Figure 2.12: Fonction échelle et ondelette de Coiflet pour $N = 3$.

II.6.2 Ondelette à régularité infinie et orthogonale

2.6.2.1 Ondelette de Meyer

La fonction échelle associée à l'ondelette de Meyer est définie par :

$$\hat{\Phi}(w) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} & , |w| < 2\pi/3 \\ (2\pi)^{-1/2} \cos \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} |w| - 1 \right) \right] & , 2\pi/3 < |w| < 4\pi/3 \\ 0 & , \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.35)$$

où ν est une fonction de lissage. Les ondelettes de Meyer [8,19] sont construites à partir du filtre $H(w)$ et de son filtre conjugué $G(w)$. L'ondelette de Meyer [20] a les propriétés suivantes:

- La fonction d'ondelette $\psi(x)$ définie à partir de $\Psi(w)$.
- La fonction échelle $\phi(x)$ définie à partir de $\Phi(w)$.
- L'analyse est orthogonale et biorthogonale [9].
- La symétrie de $\psi(x)$ et de $\phi(x)$.
- $\psi(x)$ et $\phi(x)$ indéfiniment dérivable \rightarrow régularité infinie.
- Analyse possible par la transformée continue.
- Analyse possible par la transformée discrète filtre non RIF.

La figure 2.13 illustre la fonction échelle ϕ et l'ondelette associée ψ de Meyer.

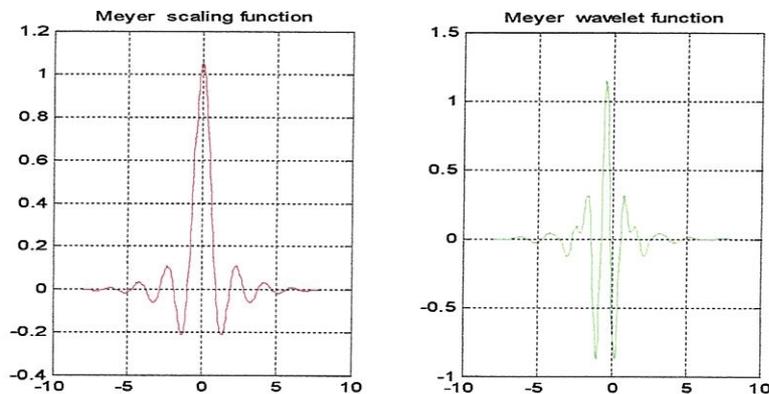


Figure 2.13 : Fonction échelle et ondelette de Meyer.

II.6.2.2 Ondelette discrète de Meyer

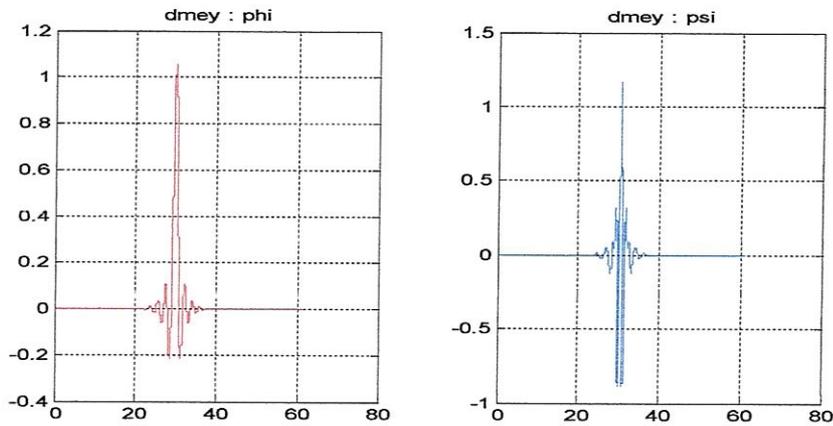


Figure 2.14 : Fonction échelle et ondelette discrète de Meyer.

L'approximation de l'ondelette de Meyer par les filtres RIF. L'ondelette discrète de Meyer à les propriétés suivantes :

- Analyse et synthèse par la transformée discrète et continue.
- L'analyse est orthogonale et biorthogonale [20].

La figure 2.14 illustre la fonction échelle ϕ et l'ondelette associée ψ de Meyer.

II.6.3 Ondelette définie sans fonction d'échelle

Les ondelettes définies sans fonction d'échelle sont : l'ondelette de Morlet, l'ondelette de Mexican-hat et l'ondelette de Gaussienne, ont les propriétés suivantes :

- Fonction d'ondelette $\psi(x)$ explicite.
- Symétrie de $\psi(x)$.
- Pas de fonction d'échelle $\phi(x)$.
- Analyse non orthogonale.
- Synthèse non assurée.
- Utilisée en décomposition continue [20].

II.6.3.1 Ondelette de Morlet

L'ondelette de Morlet a été introduite par le géophysicien Morlet comme une ondelette analysante. Cette ondelette est connue dans la littérature de l'analyse d'image comme l'ondelette de Gabor [6]. Ce si est du à la similitude dans les deux expressions mathématiques. Elle est donnée par une expression simple :

$$\psi(x) = e^{-x^2/2} \cdot (e^{iw_0x} - e^{-w_0^2}) \quad (2.36)$$

L'ondelette de Gabor [21, 22, 23] est définie aussi par :

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \cdot (e^{-\pi x^2 / \sigma^2}) (e^{iw_0x}) \quad (2.37)$$

avec w_0 la fréquence du coupure du filtre. Dans le Toolbox de MATLAB, l'ondelette de Morlet (*figure 2.15*) comprend seulement la partie réelle [9] de la forme complexe donnée par :

$$\psi(x) = e^{-x^2/2} \cdot \cos(5x) \quad (2.38)$$

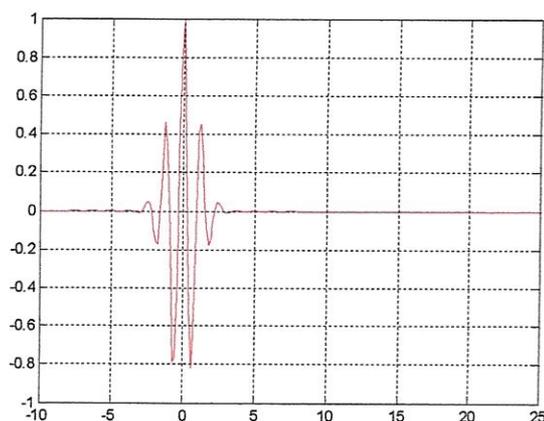


Figure 2.15: Ondelette de Morlet.

II.6.3.2 Ondelette Mexican-hat

L'ondelette Mexican-hat (*figure 2.16*) est le laplacien d'une gaussienne introduite dans le domaine de l'analyse visuelle par Marr et Hildreth [2 19 24]. Elle est définie [9] comme suit :

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} \right) (1 - x^2) e^{-x^2/2} \quad (2.39)$$

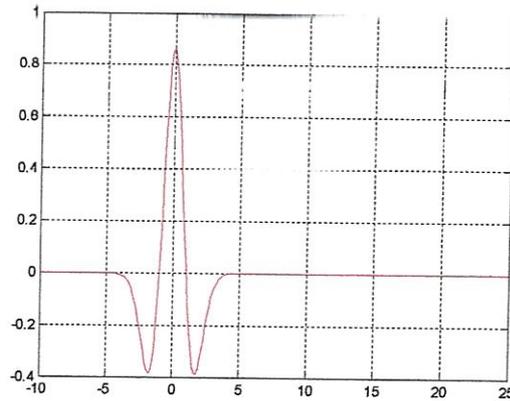


Figure 2.16 : Ondelette de Mexican-hat.

II.6.3.3 Ondelette Gaussienne

L'ondelette Gaussienne (*figure 2.17*) est la dérivée première de la fonction de Gauss qui est :

$$F(x) = C_p e^{-x^2} \quad (2.40)$$

Elle est [20] symétrique pour N pair et antisymétrique pour N impair.

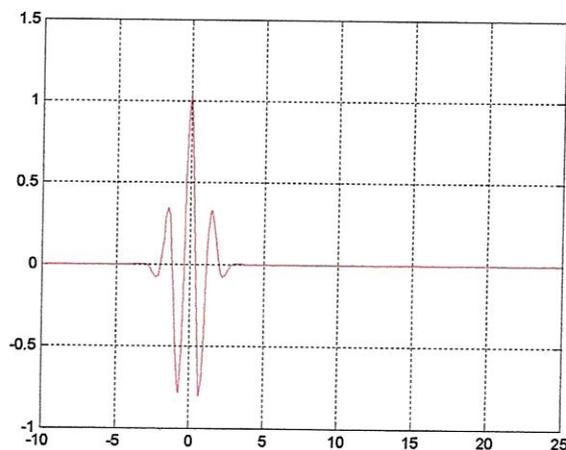


Figure 2.17: Ondelette Gaussienne d'ordre 8.

II.6.4 Ondelettes biorthogonale B-spline

Les bases d'ondelettes ne sont plus orthonormales de façon à avoir des ondelettes symétriques implique une reconstruction parfaite. Les ondelettes utilisées pour l'analyse sont légèrement différentes des ondelettes utilisées pour la synthèse [20].

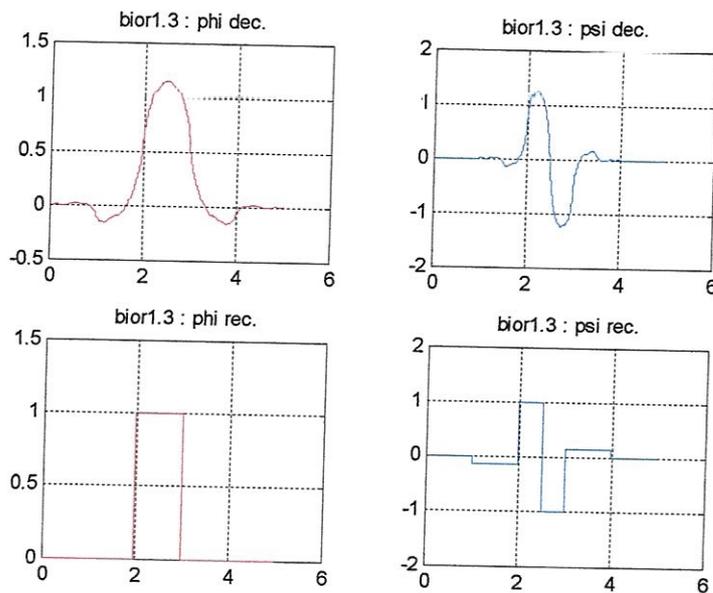


Figure 2.18: Ondelette biorthogonale de B-spline (1.3).

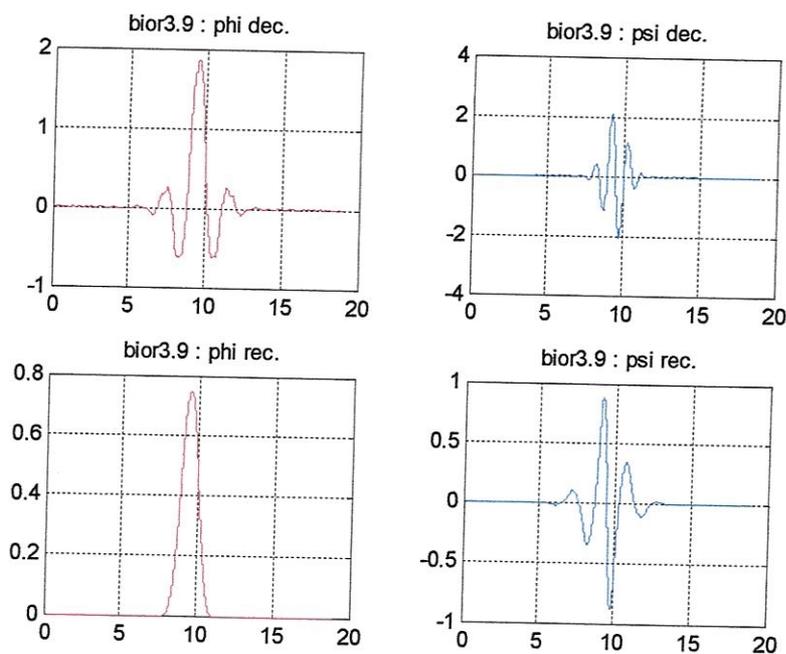


Figure 2.19 : Ondelette biorthogonale de B-spline (3.6).

II.6.5 Ondelettes complexes

Les ondelettes complexes sont : l'ondelette Gaussienne complexe, l'ondelette de Morlet complexe, l'ondelette de B-spline complexe et l'ondelette de Shannon complexe, ont les propriétés suivantes :

- Pas de fonction d'échelle $\phi(x)$.
- Fonction d'ondelette $\psi(x)$ explicite et symétrique.
- L'ondelette $\psi(x)$ n'est pas à support compact.
- Analyse non orthogonale.
- Synthèse non assurée.
- Utilisée en décomposition continue complexe [20].

II.6.5.1 Ondelette Gaussienne complexe

L'ondelette Gaussienne (figure 2.20) complexe [20] c'est la dérivée d'ordre p de :

$$F(x) = C_p e^{-x^2} e^{-ix} \quad (2.41)$$

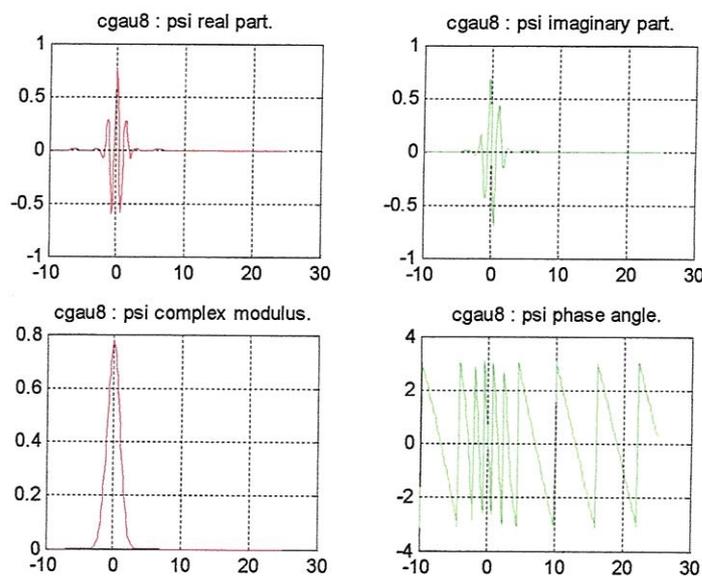


Figure 2.20 : Ondelette Gaussienne complexe.

II.6.5.2 Ondelette Morlet complexe

L'ondelette de Morlet (*figure 2.21*) complexe est :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi f_b}} e^{-\frac{x^2}{f_b}} e^{i2\pi f_c x} \quad (2.42)$$

Telle que : f_b bande passante, et f_c fréquence centrale. ($f_b = 1$, $f_c = 0.9$ [20]).

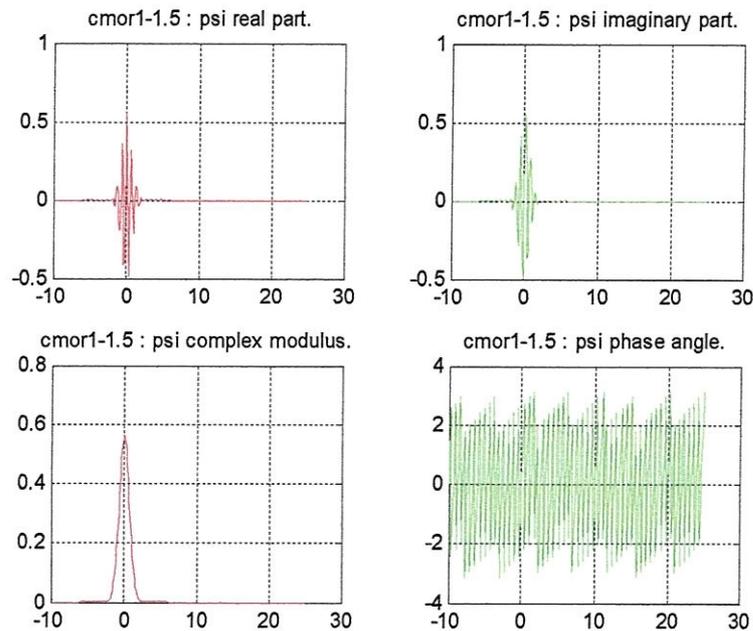


Figure 2.21 : Ondelette de Morlet complexe.

II.6.5.3 Ondelette B-spline complexe

L'ondelette B-spline complexe (*figure 2.22*) est donnée par :

$$\psi(x) = \sqrt{f_b} \left(\sin c \left(\frac{f_b x}{m} \right) \right)^m e^{i2\pi f_c x} \quad (2.43)$$

Telle que : f_b bande passante, f_c fréquence centrale et m paramètre entier ≥ 1 , ($f_b = 1$, $f_c = 0.9$, $m = 3$ [20]).

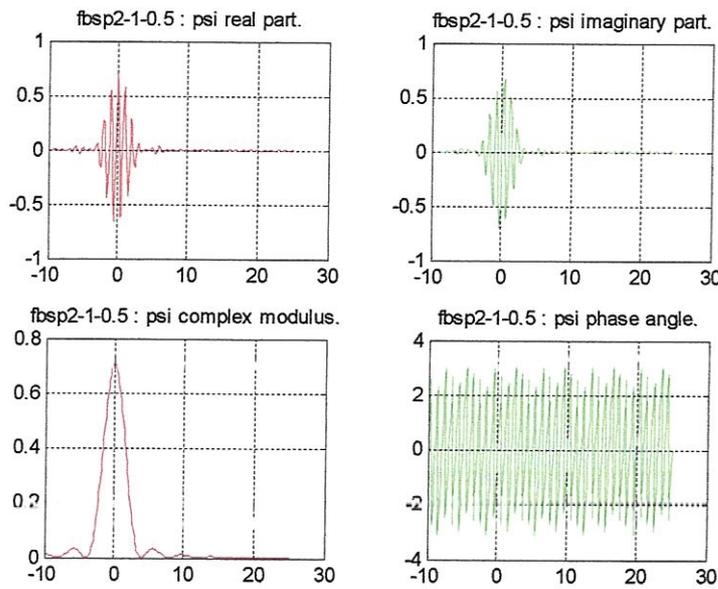


Figure 2.22 : Ondelette de B-spline complexe.

II.6.5.4 Ondelette Shannon complexe

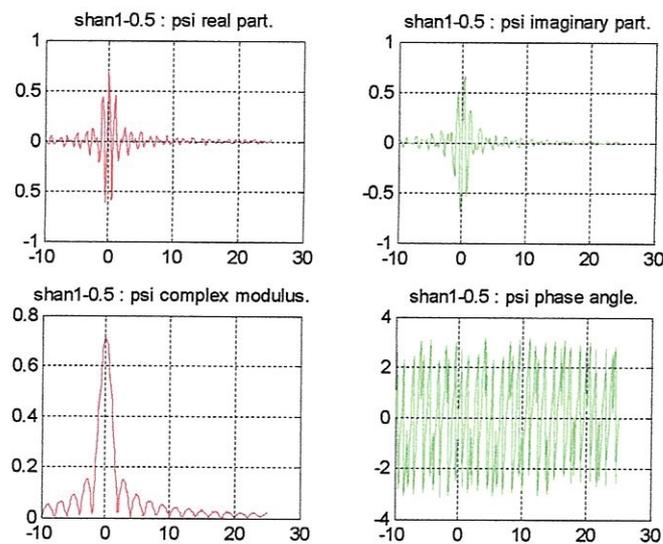


Figure 2.23 : Ondelette de Shannon complexe.

L'ondelette de Shannon complexe (figure 2.23) est formulée comme suit :

$$\psi(x) = \sqrt{f_b} \sin c(f_b x) e^{i2\pi f_c x} \tag{2.44}$$

Telle que : f_b bande passante, et f_c fréquence centrale, ($f_b = 1$, $f_c = 0.9$ [22]).

II.7 Conclusion

La transformée en ondelettes est aujourd'hui, très largement utilisée dans beaucoup des domaines d'application. Elle est utilisée dans l'analyse spectrale, l'analyse temporelle, compression d'image, suppression de bruit, codage optimal et en statistique [20, 21]

Dans ce chapitre, nous avons essayé de donner un aperçu général sur l'outil mathématique d'analyse que nous allons utiliser dans le modèle multirésolutionnelle et, qui sera détaillé dans le chapitre qui suit.

Chapitre III : Théorie de la

Transformation «multirésolution»

III.1 Analyse multirésolutionnelle : cas monodimensionnel

III.2 Analyse multidimensionnelle par ondelettes

Pour le cas bidimensionnel (Image)

III.3 Conclusion

La représentation multirésolutionnelle d'un signal est très efficace pour l'analyse de l'information contenue. En étudiant les propriétés de l'opérateur approximant un signal à différent niveau de résolution, nous constatons que la différence de l'information entre deux approximation peut-être extraite par décomposition du signal sur une base orthonormale de fonctions dites ondelettes (wavelet).

La famille des ondelettes $\left(\sqrt{2^j} \psi(2^j x - n)\right)_{j,n \in \mathbb{Z}^2}$ est construite à partir d'une seule fonction mère $\psi(x)$ par dilatation et translation. Cette décomposition définit une représentation multirésolutionnelle (multiéchelle) dite représentation en ondelettes. A chaque résolution la représentation multiéchelle fournit un cadre hiérarchique pour l'interprétation de l'information. Le détail ainsi extrait pour une résolution grossière caractérise un type de structure physique d'une scène. Le détail exprime alors une structure large correspondant au contexte de l'image. Donc, il est naturel d'analyser l'image en partant d'une résolution grossière à une résolution fine.

Burt et Crowly ont introduit une implémentation pyramidale pour calculer le signal détail par simplification et ils ont choisi un facteur de résolution égale à deux. Dans cette implémentation pyramidale, le signal détail est calculé par la différence de deux filtres passe-bas donnant ainsi une approximation du laplacien d'une gaussienne.

Les signaux détail sont regroupés dans une structure pyramidale dite la pyramide laplacienne. L'inconvénient de cette structure est la corrélation qui existe entre ces signaux détails à des niveaux séparés. Il n'y a aucun modèle clair qui traite cette corrélation. Il est difficile de savoir si cette similitude est due aux propriétés de l'image en elle-même ou aux redondances intrinsèques de cette représentation. En outre, la représentation multirésolutionnelle pyramidale n'introduit aucune orientation sélective dans le processus de la décomposition. Le concept de l'analyse multiéchelle a été élaboré comme étant un outil mathématique puissant pour l'analyse de l'image. Dans la section une de ce chapitre, nous appliquons le concept de l'analyse multiéchelle au cas monodimensionnel où nous extrayons les deux signaux détail et approximation à chaque niveau de résolution. Puis dans la section deux, nous généralisons le concept de l'analyse multiéchelle au cas bidimensionnel (image) par ondelettes séparables [9].

III.1 Analyse multirésolutionnelle : cas monodimensionnel

L'analyse multirésolutionnelle est définie comme étant une structure où l'intégral double d'une fonction f appartenant à l'espace d'Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ est considérée comme la limite des approximations successives. Chaque approximation est une version lissée de la fonction originale à différente résolution obtenue par une convolution de la fonction $f(x)$ avec un filtre passe-bas $\phi(x)$ appelée fonction de lissage. La différence entre deux approximations successives est une fonction détail à haute fréquence. Puisque les ondelettes sont des fonctions générées par translation et dilatation d'une seule fonction ondelette mère ψ ; Grossmann et Morlet ont défini cette fonction avec un facteur d'échelle a et un facteur de translation b pour obtenir :

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) (a,b) \in \mathbb{R}^2, a \neq 0 \quad (3.1)$$

où x est une variable monodimensionnel. L'ondelette mère satisfait aussi la condition d'admissibilité (voir chapitre II).

Ceci implique que l'ondelette admet de petites oscillations à la fin. L'idée de base de la transformation en ondelette est de représenter toute fonction f par une superposition d'ondelettes.

Cette fonction f peut être ainsi décomposée en différentes échelles ou niveaux de résolution. Pour obtenir cette décomposition, nous faisons une intégration de la transformation en ondelette de la fonction f sur a et b . En pratique, les paramètres a et b sont discrets. En prenant $a = a_0^j$ et $b = nb_0 a_0^j$ où a_0 et b_0 sont des constantes fixes avec $a_0 > 1$, $b_0 \neq 0$ et $(j, n) \in \mathbb{Z}^2$.

L'ondelette est ainsi définie par :

$$\psi_{j,n}(x) = \psi_{a_0^j, nb_0 a_0^j}(x) = a_0^{-\frac{j}{2}} \psi(a_0^{-j} x - nb_0) \quad (3.2)$$

La décomposition multirésolutionnelle de f devient :

$$f = \sum_{j,n} c_{j,n}(f) \psi_{j,n} \quad (3.3)$$

où $c_{j,n}(f), (j, n) \in \mathbb{Z}^2$, sont les coefficients de l'ondelette à la résolution j et au point de translation n . Nous notons que quand les valeurs de j , j positif, sont grandes (c'est à dire $a > 1$), la fonction ondelette ψ devient très dilatée.

Pour $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$, les fonctions $\psi_{j,n}(x), (j, n) \in \mathbb{Z}^2$, qui constituent une base orthonormale sur $L^2(\mathbb{R})$ devient

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j} x - n) \quad (3.4)$$

Les coefficients des ondelettes, $c_{j,n}(f)$ obéissent à la relation suivante :

$$c_{j,n}(f) = \langle f, \psi_{j,n} \rangle = \int f(x) \psi_{j,n}(x) dx \quad (3.5)$$

L'analyse multirésolutionnelle en ondelettes décompose chaque fonction f en une somme linéaire d'une approximation et d'un signal détail [9].

Définissant de façon plus mathématique la construction d'une approche multirésolution. Nous plaçons dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, une analyse à la résolution j , est définie par l'application d'un opérateur linéaire $A_j; A_j f \in V_j$ où V_j est un sous espace vectoriel de l'espace V (espace d'approximations) satisfaisant :

$$\begin{aligned}
& \{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \dots \subset V_{j+1} \subset V_{j+2} \dots L^2(\mathbb{R}) \\
& \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \\
& \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \\
& \forall j \in \mathbb{Z}; f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_{j+1} \\
& \forall k \in \mathbb{Z}; f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Cet ensemble définit une multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ [10]

Dans le cas dyadique la fonction d'échelle est définie par :

$$\phi_{j,n}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}x - n) \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.7}$$

où $\phi_{j,n}(x)$ est la fonction échelle avec une dilatation 2^{-j} est une translation n .

Le projecteur est alors :

$$A_j f = \sum \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n} \tag{3.8}$$

et le produit scalaire :

$$\alpha_n^j = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \tag{3.9}$$

représente l'approximation du signal à l'échelle j .

Pour compléter l'analyse nous avons besoin d'un espace complémentaire W_j (espace des détails) orthogonal à V_j . L'ensemble des W_j , couvre tout l'espace, $L^2(\mathbb{R})$, et les W_j sont orthogonaux deux à deux.

$$\begin{aligned}
L^2(\mathbb{R}) &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \\
\forall j, k \neq j & W_j \perp W_k
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Les espaces V_j et W_j sont liés entre eux par la relation

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j. \tag{3.11}$$

Les espaces d'approximations (V_j) et de détails (W_j) étant orthogonaux, toute l'information du signal est conservée. Par conséquent, nous pourrions reconstruire exactement notre signal. La fonction générant W_j est une ondelette (ψ). Le projecteur est alors :

$$D_j f = \sum \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} \quad (3.12)$$

et le produit scalaire :

$$d_n^j = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (3.13)$$

représente les détails du signal à l'échelle j .

Dans le cas dyadique la fonction d'analyse est définie par :

$$\psi_{j,n}(x) = \gamma^{-\frac{j}{2}} \psi(\gamma^{-j} x - n) \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.14)$$

où $\psi_{j,n}(x)$ est la fonction ondelette avec une dilatation 2^{-j} est une translation n

La figure 3.1 présente un schéma de l'analyse multirésolution :

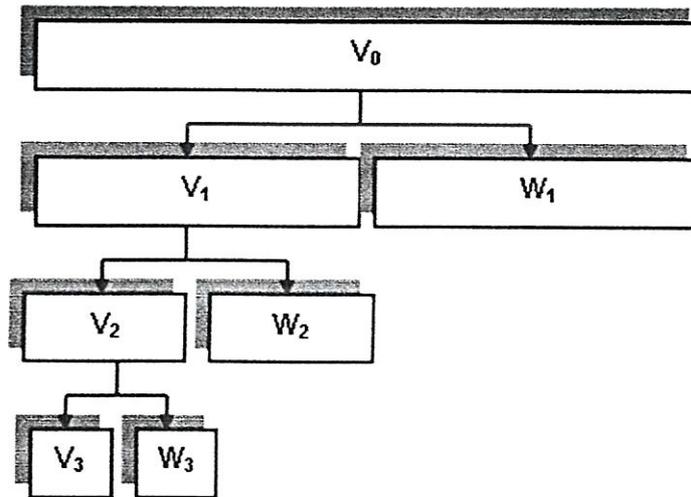


Figure 3.1: Schéma de l'analyse multirésolution.

Nous pouvons considérer que notre image (signal échantillonné) correspond à l'espace V_0 . Cet espace sera ensuite décomposé en deux espaces : un espace d'approximations et un espace de détails. L'espace d'approximation nous permettra d'extraire les basses fréquences de notre image d'origine. L'espace des détails nous servira pour extraire les hautes fréquences. L'opération s'effectue récursivement sur les espaces d'approximation.

Nous obtiendrons alors une analyse fréquentielle des hautes fréquences avec les espaces des détails et une analyse des basses fréquences grâce aux espaces d'approximation. Nous aurons alors plusieurs images correspondant à différentes bandes fréquentielles [16].

III.1.1 Approximation du signal

On peut écrire l'approximation du signal $f(x)$ à la résolution 2^j grâce à l'opérateur A_j en décomposant le signal sur la base orthogonale définie ci-dessus :

$$\forall f(x) \in L^2(\mathbb{R}) : A_{2^j} f(x) = 2^{-j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f(x), \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \rangle \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \quad (3.15)$$

L'approximation de $A_{2^j}^d f(x)$ (approximation discrète de $f(x)$ à la résolution 2^j) est définie par l'ensemble des produits internes données par :

$$A_{2^j}^d f = \langle f(x), \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \rangle \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.16)$$

L'équation (3.16) peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$A_{2^j}^d f = \left[(f(x) * \phi_{2^j}(-x))(2^{-j}n) \right]_{n \in \mathbb{Z}} \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) peut être interpréter comme suit : $A_{2^j}^d f(x)$, est obtenue par un filtrage passe-bas de $f(x)$ suivie d'un sous-échantillonnage d'un taux 2^j .

$A_{2^j}^d f$ peut être donc obtenue à partir de $A_{2^{j+1}}^d f$ (approximation discrète à la résolution $(j+1)$) par :

$$A_{2^j}^d f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k - 2n) A_{2^{j+1}}^d f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(2n - k) A_{2^{j+1}}^d f \quad (3.18)$$

Avec, $\tilde{h}[n] = h[-n]$, h est la réponse impulsionnelle du filtre miroir H . Ainsi $A_{2^j}^d f$ peut être calculé en convoluant $A_{2^{j+1}}^d f$ avec le filtre \tilde{h} et en gardant un échantillon sur deux du signal de sortie, d'où un phénomène de décimation (*figure 3.2*) [16].

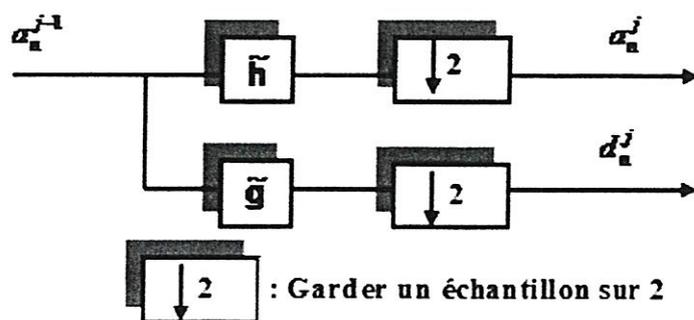


Figure 3.2 : Décomposition unidimensionnelle par ondelettes.

III.1.2 Détails du signal

On appelle détails du signal à la résolution 2^j , la différence d'information entre les approximations d'un signal $f(t)$ à la résolution 2^j et 2^{j+1} .

Ainsi

$$D_{2^j}^d f = \langle f(x), \psi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \rangle = \left[(f(x) * \psi_{2^j}(-x))(2^{-j}n) \right]_{n \in \mathbb{Z}} \quad (3.19)$$

L'équation (3.19) représente le signal de détails discret à la résolution 2^j . $D_{2^j}^d f$ peut être obtenue en convoluant $A_{2^{j+1}}^d f$ avec un filtre de réponse impulsionnelle \tilde{g} (filtre passe-haut) suivie d'une opération de décimation (en gardant un échantillon sur deux du signal de sortie) suivant la formule ci-dessous :

$$D_{2^j}^d f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(k - 2n) A_{2^{j+1}}^d f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(2n - k) A_{2^{j+1}}^d f \quad (3.20)$$

notons que les filtres h et g sont reliés par la relation suivante :

$$g[n] = (-1)^{l-n} h[l - n] \quad (3.21)$$

Les équations (3.18) et (3.20) montrent qu'on peut calculer les coefficients d'ondelettes en fonction des différentes approximations suivant le schéma représenté sur la figure 3.2. Les filtres \tilde{H} et \tilde{G} appelés en traitement du signal : filtres **miroirs en quadrature** [16].

III.1.3 Reconstruction

La décomposition sur la base d'ondelettes orthogonales permet d'avoir une reconstruction exacte du signal original en ajoutant à l'approximation discrète à la résolution 2^j le signal de détail correspondant.

$$A_{2^{j+1}}^d f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-2k]A_{2^j}^d(k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[n-2k]D_{2^j}^d(k) \quad (3.22)$$

Cette reconstruction est montrée par la figure 3.3. Chaque coefficient d'approximation est obtenu par la somme du filtrage par h des coefficients d'approximation à la résolution précédente aux quels sont intercalés des zéros et du filtrage par g des coefficients de détails (d'ondelettes) aux quels sont également intercalés des zéros, d'où un phénomène de sur-échantillonnage [16].

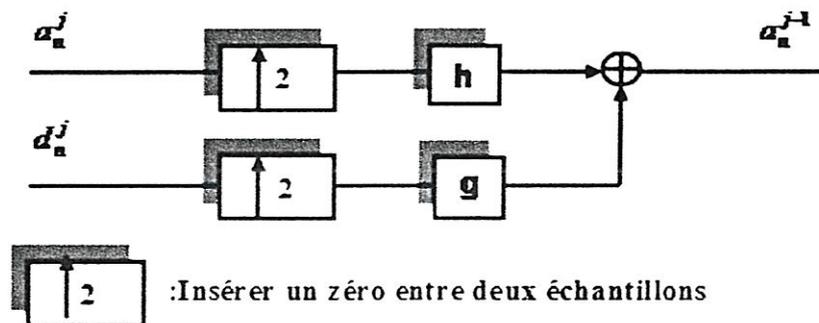


Figure 3.3 : Reconstruction unidimensionnelle par ondelettes.

Exemple :

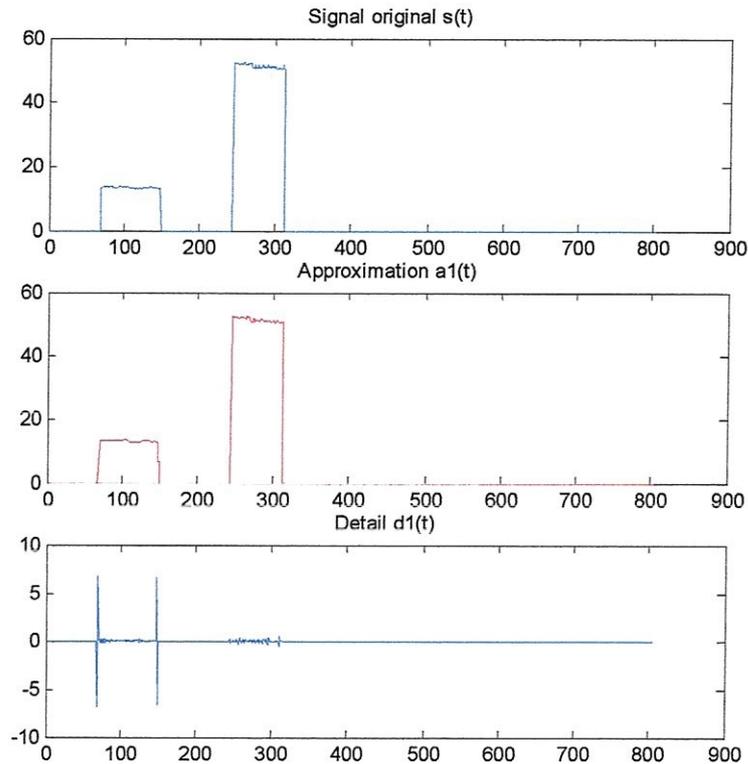


Figure 3.4 : Première étape de décomposition au niveau $j=1$.

La figure 3.4 montre la décomposition d'un signal original $s(t)$ au premier niveau de résolution $j=1$ en une approximation $a_1(t)$ et un signal détail $d_1(t)$.

$a_1(t)$: Approximation du signal original $s(t)$ au premier niveau de résolution $j=1$.

$d_1(t)$: Signal détail extrait du signal original au premier niveau de résolution $j=1$.

La figure 3.5 la reconstruction du signal original $s_0(t)$ obtenu par une sommation linéaire de l'approximation $a_1(t)$ et le signal détail $d_1(t)$.

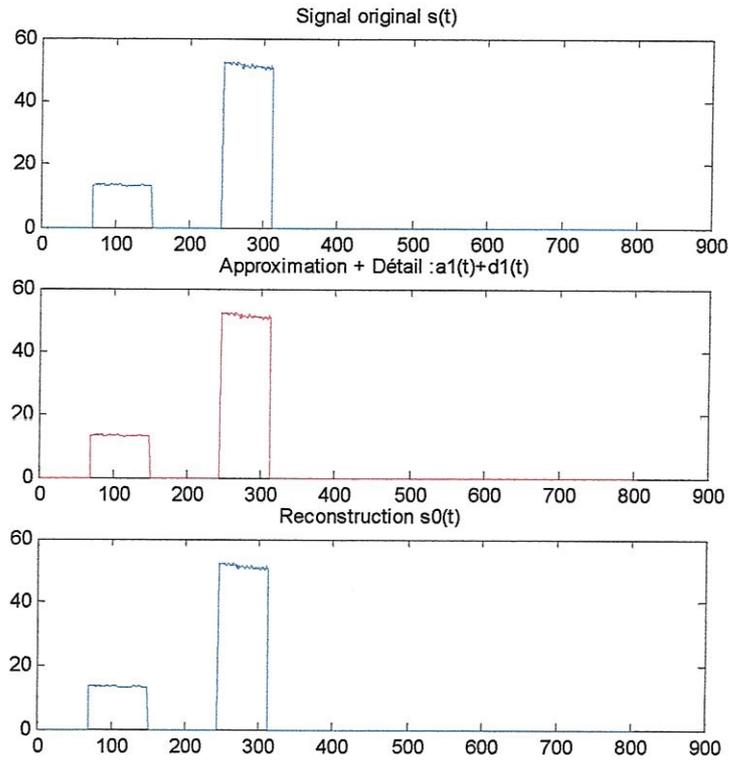


Figure 3.5 : Reconstruction du signal original $s_0(t)$.

La figure 3.6 montre la décomposition du signal $s(t)$ au troisième niveau de résolution $j = 3$ en une approximation $a_3(t)$ et des signaux détails $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_3(t)$.

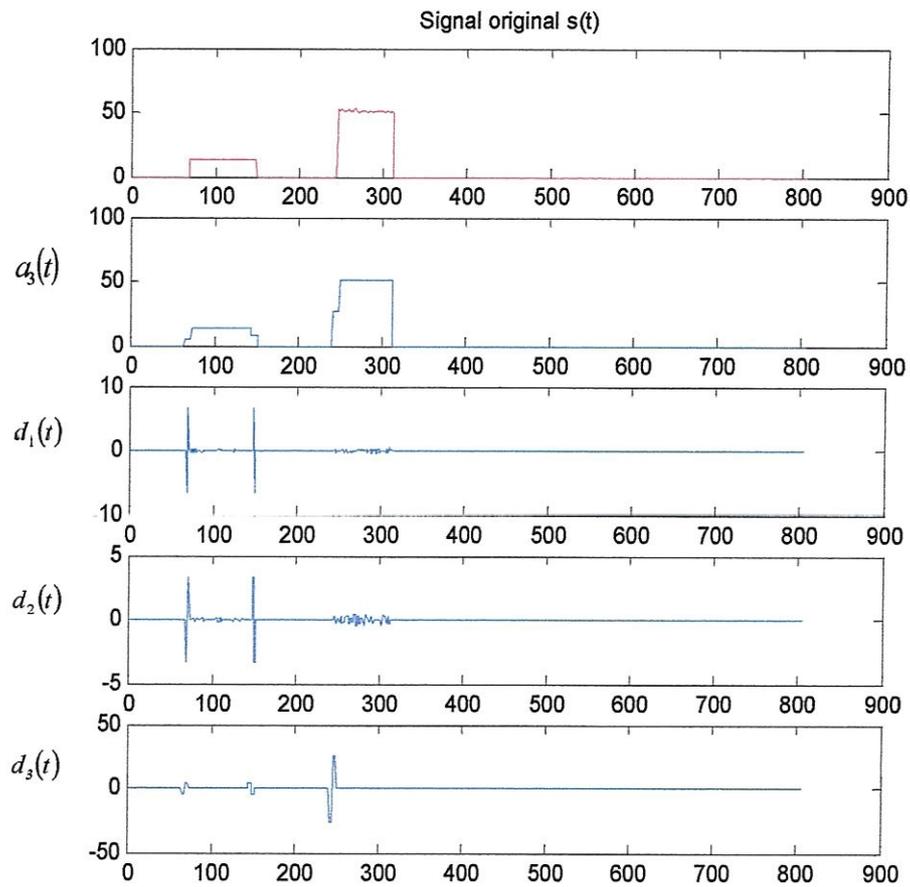


Figure 3.6 : Décomposition du signal original au niveau de résolution $j=3$.

La figure 3.7 illustre la reconstruction du signal original $s_0(t)$ obtenu par une sommation linéaire de l'approximation $a_3(t)$ et les différents signaux détails $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_3(t)$.

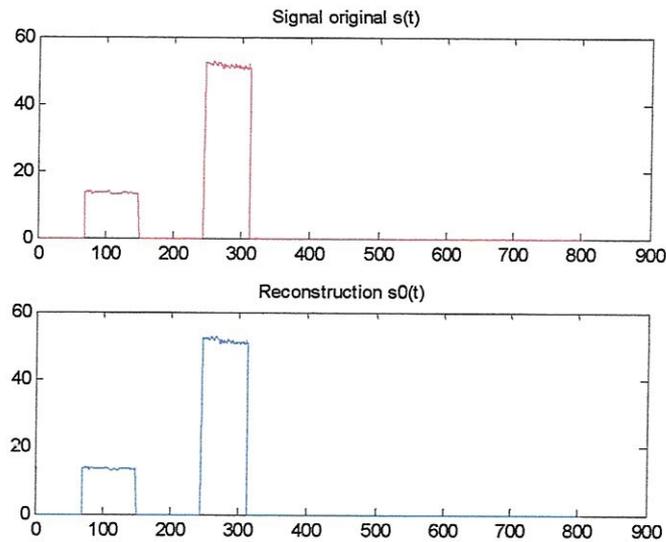


Figure 3.7 : Reconstruction du signal original au niveau de résolution $j=3$.

Le signal original $s(t)$ est un signal test. L'approximation à chaque niveau de résolution est calculée par une convolution du signal original avec la fonction échelle appropriée (à chaque niveau de résolution). Le signal détail est donné aussi par une convolution de l'approximation avec l'ondelette. Dans notre cas nous avons choisit les ondelettes de Daubechies dbN, $N = 1$.

III.2 Analyse multidimensionnelle par ondelettes

Pour le cas bidimensionnel (Image)

Bien que s'appliquant aussi dans le cas monodimensionnel, le concept de l'analyse multirésolution décrite précédemment, a été introduit par Mallat (1989) pour une application à l'image [16]. Nous supposons que l'image, $f(x, y)$ appartenant à l'espace d'Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2)$ est à énergie finie. L'approximation multirésolutionnelle de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est une séquence de sous-espaces de $L^2(\mathbb{R}^2)$ satisfait l'équation (3.9). Soit $(V_{2^j})_{j \in \mathbb{Z}}$ l'approximation multirésolutionnelle de l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$. L'approximation de $f(x, y)$ à la résolution 2^j est égale à sa projection orthogonale sur l'espace vectoriel V_{2^j} . Donc, il existe une seule fonction échelle $\phi(x, y)$, qui par sa dilatation et sa translation, construit une base orthonormale dans l'espace V_{2^j} .

La famille de fonctions $(2^{-j} \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n, y - 2^{-j}m))$, $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, forme une base orthonormale et $\phi_{2^j}(x, y)$ représente la fonction échelle avec le facteur de dilatation 2^{-j} .

Dans ce qui suit, nous considérons le cas de la séparabilité de l'ondelette. Pour ce type de multirésolution, chaque espace vectoriel V_{2^j} peut-être décomposer en un produit tensoriel de deux sous espaces identiques de $L^2(\mathbb{R}^2)$; c'est à dire.

$$V_{2^j} = V_{2^j}^1 \otimes V_{2^j}^2 \quad (3.23)$$

et la fonction échelle $\phi(x, y)$ s'écrira alors

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y) \quad (3.24)$$

où $\phi(x)$ est une fonction échelle monodimensionnelle du sous-espace $(V_{2^j}^1)_{j \in \mathbb{Z}}$ et $\phi(y)$ est une fonction échelle du sous-espace vectoriel $(V_{2^j}^2)_{j \in \mathbb{Z}}$ [9].

La base orthogonale de (V_{2^j}) est alors donnée par :

$$[2^{-j} \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n, y - 2^{-j}m)]_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} = [2^{-j} \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \phi_{2^j}(y - 2^{-j}m)]_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.25)$$

L'approximation discrète du signal $f(x, y)$ à la résolution 2^j est définie par :

$$A_{2^j}^d f = \langle f(x, y), \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \phi_{2^j}(y - 2^{-j}m) \rangle_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.26)$$

L'expression de la différence d'information existante entre deux approximations successives d'une même image s'effectue à l'aide de trois ondelettes directionnelles qui s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi^D(x, y) &= \psi(x)\psi(y) \\ \psi^H(x, y) &= \phi(x)\psi(y) \\ \psi^V(x, y) &= \psi(x)\phi(y) \end{aligned} \quad (3.27)$$

où ψ^D, ψ^H, ψ^V sont respectivement les ondelettes permettant le calcul de la différence d'information dans les directions diagonales, horizontales et verticales.

Les signaux de détails à la résolution 2^j sont donnés par [16]

$$D_{2^j}^H f = \left[\langle f(x, y), \psi_{2^j}^H(x - 2^{-j}n, y - 2^{-j}m) \rangle \right]_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \text{ détails horizontaux} \quad (3.28)$$

$$D_{2^j}^V f = \left[\langle f(x, y), \psi_{2^j}^V(x - 2^{-j}n, y - 2^{-j}m) \rangle \right]_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \text{ détails verticaux} \quad (3.29)$$

$$D_{2^j}^D f = \left[\langle f(x, y), \psi_{2^j}^D(x - 2^{-j}n, y - 2^{-j}m) \rangle \right]_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \text{ détails diagonaux} \quad (3.30)$$

où $D_{2^j}^H f$, $D_{2^j}^V f$, $D_{2^j}^D f$, et $j \in \mathbb{Z}$, sont respectivement le signal détail horizontal, vertical et diagonal. Nous remarquons que, comme dans le cas 1D, $A_{2^j}^d f$, $D_{2^j}^H f$, $D_{2^j}^V f$, $D_{2^j}^D f$ sont donnés par des produits de convolution séparables ; c'est-à-dire [9]

$$A_{2^j} f = \left((f(x, y) * \phi_{2^j}(-x)\phi_{2^j}(-y))(2^{-j}n, 2^{-j}m) \right)_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.31)$$

$$D_{2^j}^H f = \left((f(x, y) * \phi_{2^j}(-x)\psi_{2^j}(-y))(2^{-j}n, 2^{-j}m) \right)_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.32)$$

$$D_{2^j}^V f = \left((f(x, y) * \psi_{2^j}(-x)\phi_{2^j}(-y))(2^{-j}n, 2^{-j}m) \right)_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.33)$$

et

$$D_{2^j}^D f = \left((f(x, y) * \psi_{2^j}(-x)\psi_{2^j}(-y))(2^{-j}n, 2^{-j}m) \right)_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.34)$$

Avec $\phi(x)$ un filtre passe-bas et $\psi(x)$ un bon filtre passe-haut [19,22]. La figure 3.8 nous montre la structure arborescente des détails à un niveau de résolution égale à 3. $D_{2^j}^H f$ représente les hautes fréquences horizontales (contours horizontaux), $D_{2^j}^V f$ les hautes fréquences verticales (contours verticaux) et $D_{2^j}^D f$ les hautes fréquences diagonales (contours diagonaux).

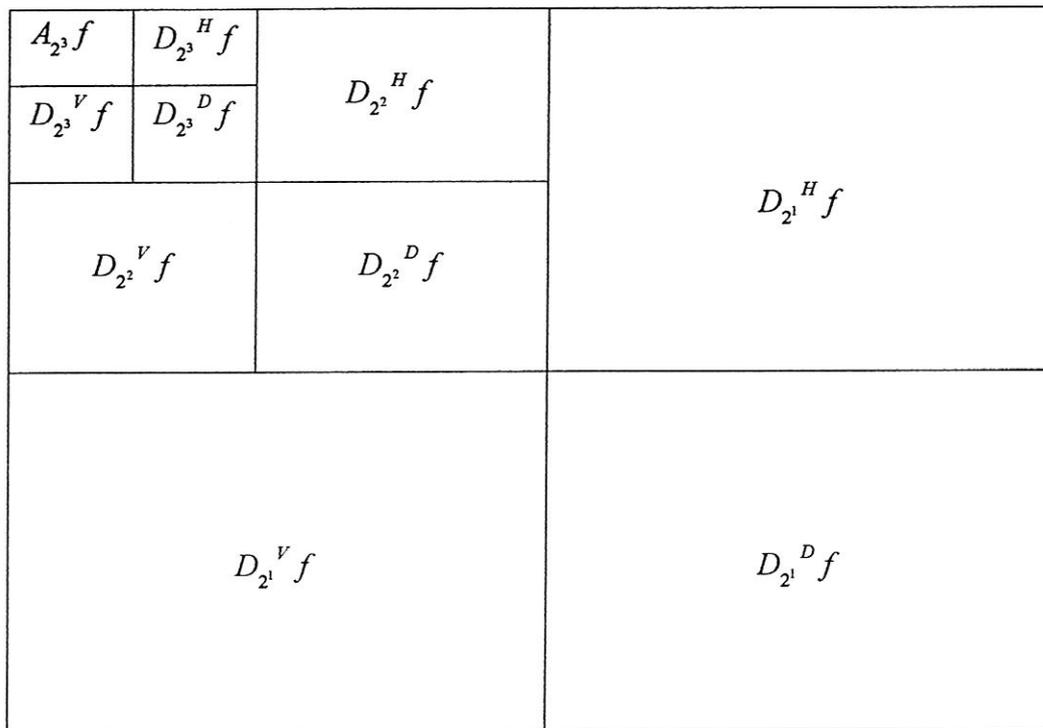


Figure 3.8 : Décomposition arborescente de la transformation en ondelettes pour un niveau de résolution $j=3$.

Donc, nous pouvons calculer les transformations en ondelettes 2D seulement avec une extension séparable de l'algorithme de décomposition monodimensionnel [9]. Cet algorithme est illustré par le diagramme en bloc dans la figure 3.9 [16].

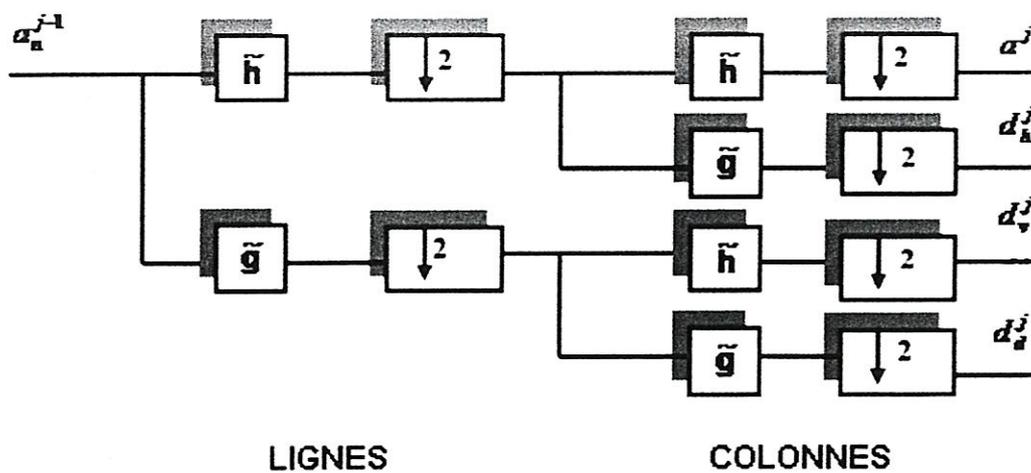


Figure 3.9 : Algorithme de décomposition de Mallat à deux dimensions.

Comme dans le cas monodimensionnel, le calcul des approximations successives s'effectue à l'aide des filtres numériques. Dans le cas de l'image, les filtres seront appliqués en lignes puis en colonnes [16]. Les filtres utilisés dans cette décomposition sont les filtres quadrature miroirs \tilde{H} et \tilde{G} .

La reconstruction se fait d'une manière récursive. On reconstruira ainsi toutes les approximations à travers l'axe des résolutions en ajoutant à l'approximation discrète à la résolution 2^j les signaux des détails correspondants [16]. L'algorithme de reconstruction 2 D est aussi étendu à partir de l'algorithme monodimensionnel en utilisant des ondelettes séparables [9]. La figure 3.10 présente l'algorithme de reconstruction de Mallat appliqué sur une image numérique [16].

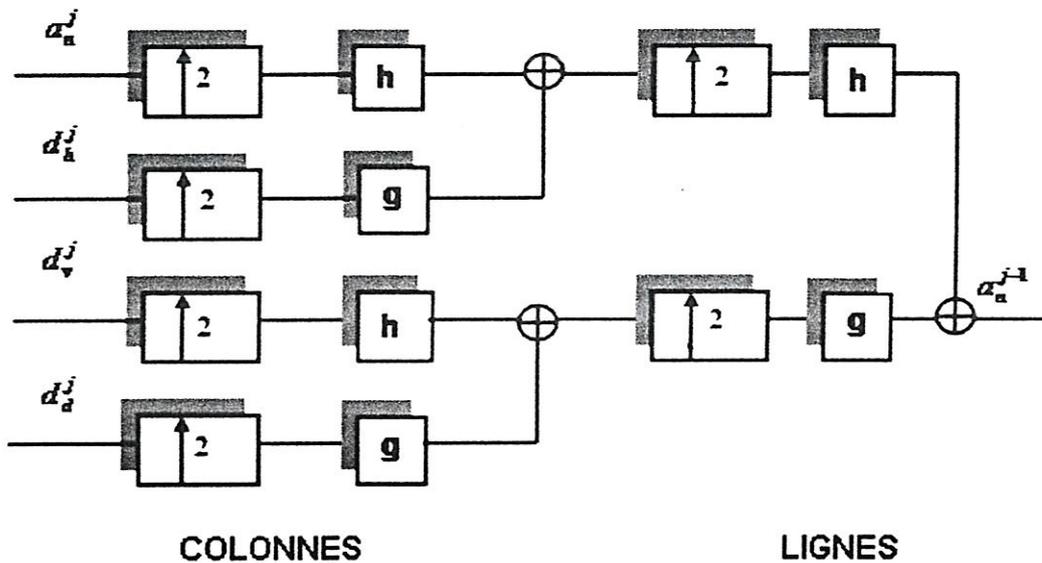


Figure 3.10 : Algorithme de reconstruction exacte de Mallat.

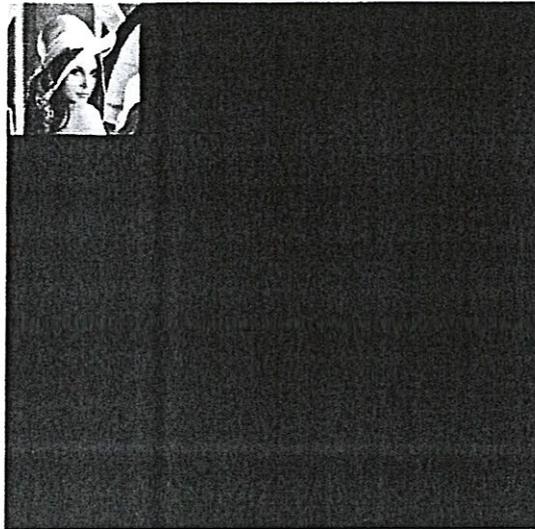
La figure 3.11 est un exemple d'analyse multirésolution appliquée à l'image de Lena (256×256) en utilisant comme base de décomposition l'ondelette biorthogonale de daubechies (5,3) et pour des échelles différentes.



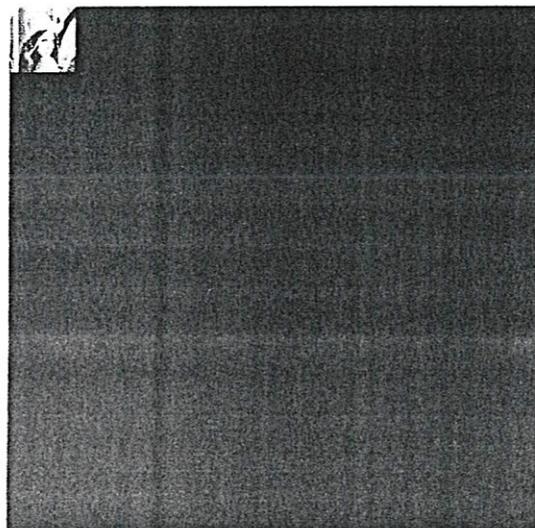
a : Image originale



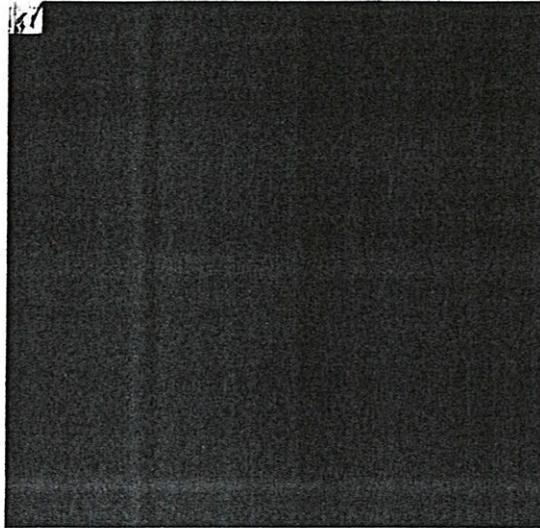
b : Image à la résolution $j=1$



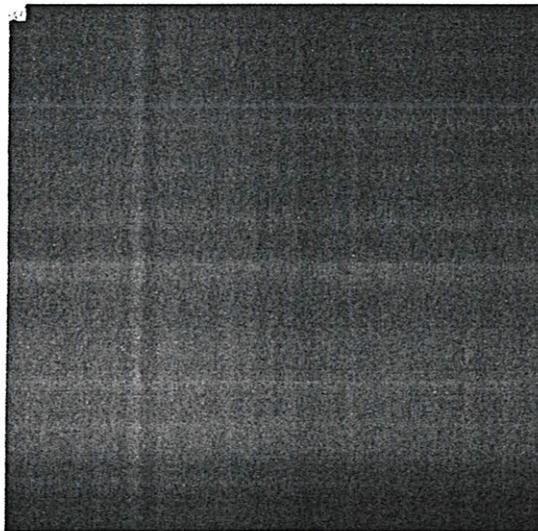
c : Image à la résolution $j=2$.



d : Image à la résolution $j=3$.



e: Image à la résolution $j=4$.



f : Image à la résolution $j=5$.

Figure 3.11 : Analyse multirésolution appliquée à l'image de Lena à l'aide de l'algorithme de Mallat.

Les figures 3.12 à 3.15 illustrent les résultats obtenus sur une image en appliquant le concept de l'analyse multirésolutionnelle avec des ondelettes séparables, l'ondelette utilisée est l'ondelette de Daubechies db6. Nous commençons par tirer les différentes approximations de l'image originale à chaque niveau de résolution, ensuite nous calculons des images détails perdues entre deux approximations ; à ce stade nous extrayons les détails horizontaux, les détails verticaux et les détails diagonaux. Enfin une reconstruction de l'image originale à partir des images détails et des approximations à chaque résolution. Dans la figure 3.12, la première étape de décomposition de l'image originale utilisée, qui est Lena (256 x 256), que nous présentons sous forme arborescente, cette forme groupe l'approximation au premier niveau de résolution, et les différentes images détails, et dans la figure 3.13, la deuxième et la troisième étape de décomposition de l'image originale. Dans la figure 3.14, nous avons extrait les différentes images détails pour trois niveaux de résolutions $j=1$, $j=2$ et $j=3$, nous remarquons, que quand j augmente, il y aura de moins en moins d'information perdue.

Dans la figure 3.15, nous donnons l'image reconstruite à partir de l'approximation au niveau de résolution $j=3$, et toutes les images détails trouvées au niveau $j=1$, $j=2$, et $j=3$.

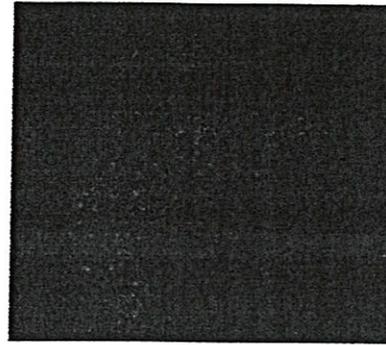
Image originale



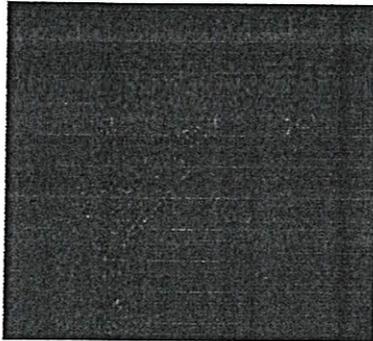
Image à la résolution $j=1$



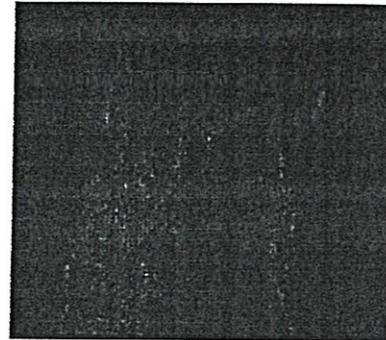
Approximation A1



Horizontal Detail H1



Vertical Detail V1



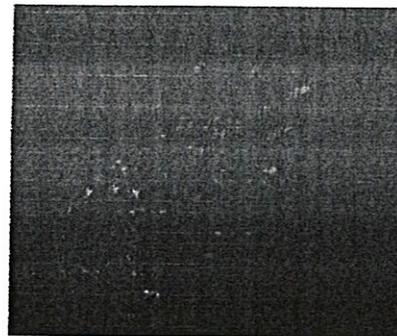
Diagonal Detail D1

Figure 3.12 : Première étape de décomposition de l'image originale pour le niveau de résolution $j=1$.

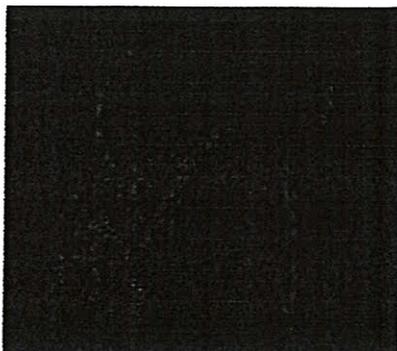
Image à la résolution $j=2$



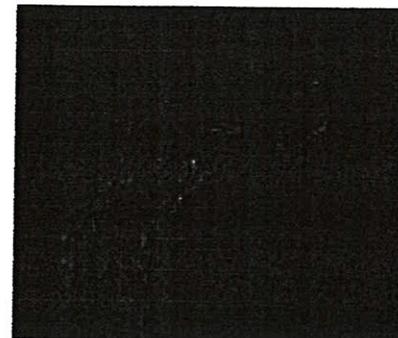
Approximation A2



Horizontal Detail H2



Vertical Detail V2

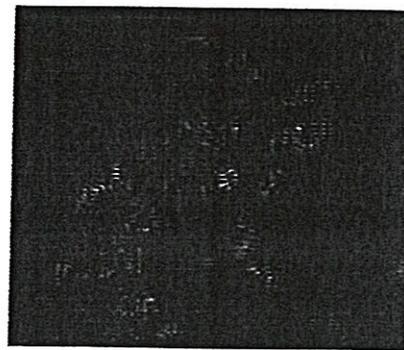


Diagonal Detail D2

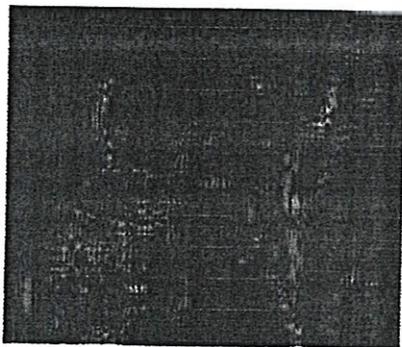
Image à la résolution $j=3$



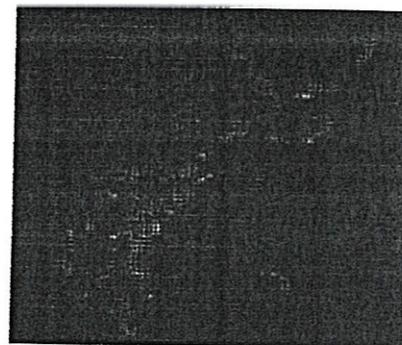
Approximation A3



Horizontal Detail H3



Vertical Detail V3

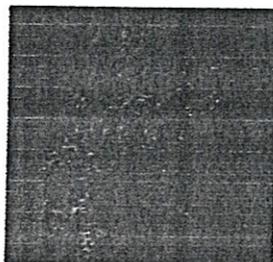


Diagonal Detail D3

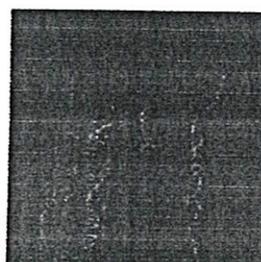
Figure 3.13 : Deuxième et troisième étape de décomposition de l'image originale.



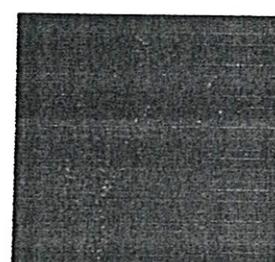
Approximation A1



Horizontal Detail H1



Vertical Detail V1



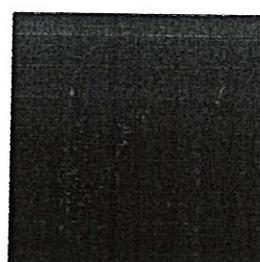
Diagonal Detail D1



Approximation A2



Horizontal Detail H2



Vertical Detail V2



Diagonal Detail D2

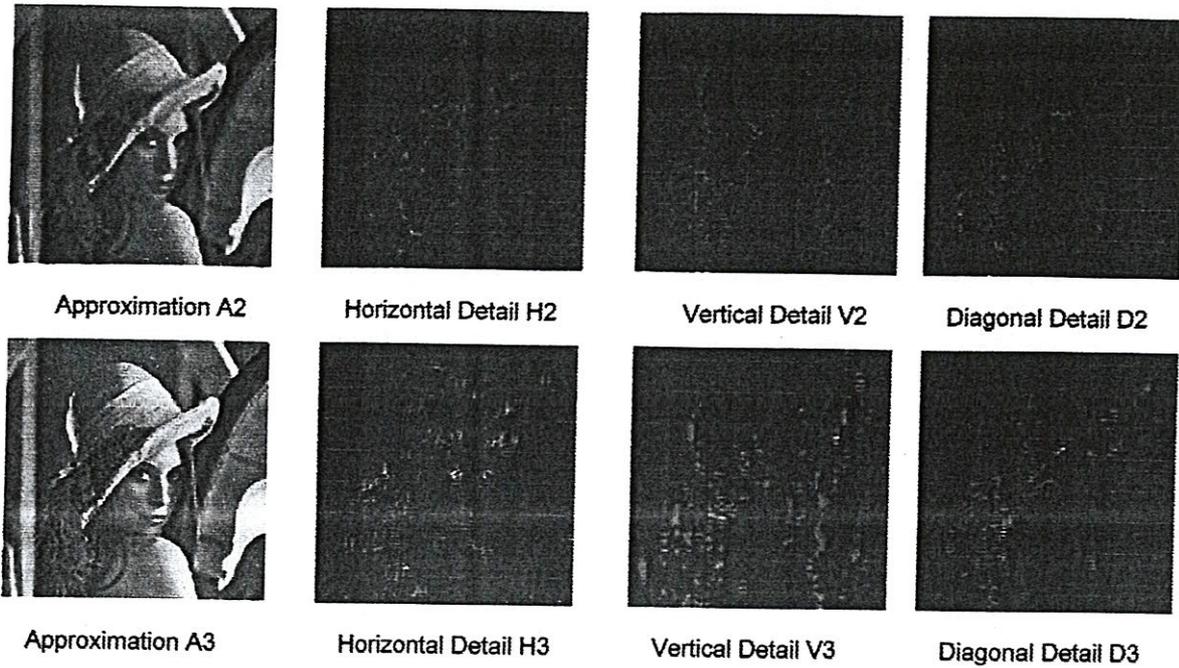


Figure 3.14 : Images détails obtenues à la résolution $j=1$, $j=2$ et $j=3$.



Figure 3.15 : Image reconstruite à partir des approximations et toutes les images détails trouvée au niveau $j=1$, $j=2$ et $j=3$.

III.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'analyse multirésolutionnelle par ondelette pour le cas monodimensionnel et le cas bidimensionnel. Pour le cas 1D, nous avons appliqué le concept de l'analyse multiéchelle au signal $s(t)$ afin d'extraire les différentes approximations et les différents signaux détails à chaque échelle j . Nous avons remarqué que nous extrayons de moins au moins de détail quand j augmente. La reconstruction de $s(t)$ se fait par sommation des différentes approximations et des différents signaux détails trouvés. Pour le cas 2D (image),

trois ondelettes ont été construites afin d'extraire à chaque résolution trois types de détails (horizontal, vertical et diagonal). Cette construction se fait en supposant que l'ondelette est séparable. L'image utilisée est Lena (256×256) à 256 niveau de gris. L'ondelette utilisée est l'ondelette de Daubechies db6 avec sa fonction échelle associée.

Chapitre IV : Application de l'ondelette à l'étude du débruitage

IV.1 Position du problème

IV.2 Débruitage par filtres linéaires

IV.3 Débruitage par ondelettes

IV.4 Résultats

IV.5 Conclusion

Dans les conditions idéales, le niveau de bruit est réduit à un niveau négligeable par rapport au niveau du signal pour que tout débruitage soit inutile. Malheureusement, dans les données réelles le bruit est toujours présent [26]. Au cours des vingt dernières années, le débruitage (régression non paramétrique en statique) a fait l'objet de nombreuses recherches en traitement d'images, et fait encore l'objet d'une recherche soutenue. Le bute consiste à estimer une fonction inconnue s à partir de ses mesures bruitées. Les techniques de régression non paramétrique (débruitage) offrent un panel d'outils simples d'emploi permettant de récupérer une structure, sans imposer un modèle paramétrique au préalable. Plusieurs débruiteurs basés sur la théorie statistique ont ainsi vu le jour aussi bien dans un contexte classique que bayésien [27].

Durant les année 90, Donoho et Johnstone ont proposé deux types d'estimateurs non linéaires comme solution au problème de régression non paramétrique dans le domaine des ondelettes à savoir le "contraction par ondelettes" et le "seuillage par ondelettes" [28, 29]. Ces estimateurs, reposent sur l'analyse multirésolution [30].

Dans le présent chapitre, nous allons donc tout d'abord spécifier ce qu'est le débruitage, puis nous présenterons quelques utilisations pour le débruitage de signaux.

IV.1 Position du problème

Le débruitage de signaux est une notion relativement vague si l'on ne précise pas ce que cela signifie pour nous. Dans ce paragraphe nous allons donner une interprétation plus formelle de ce qu'est le débruitage de signaux.

Supposons que l'on ait des observations bruitées y d'un signal s

$$y_i = s_i + n_i \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.1)$$

où n_i est un bruit blanc gaussien centré indépendant et identiquement distribué de variance σ^2 : $n_i \rightarrow N(0, \sigma^2)$. Notre interprétation de la notion de débruitage est d'inférer sur la valeur des échantillons s_i à partir des observations corrompues y_i en utilisant divers critères comme la minimisation de l'erreur quadratique moyenne définie par

$$EQM = E\{\|\hat{s} - s\|^2\} = \sum_{i=0}^{N-1} E\{(\hat{s}_i - s_i)^2\} \quad (4.2)$$

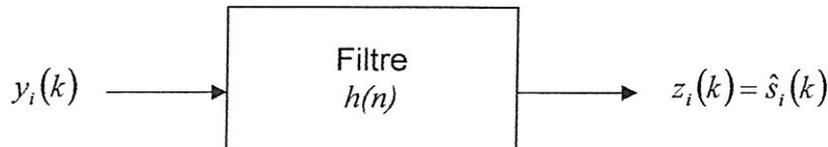


Figure 4.1 : Principe du filtrage linéaire

On traite les observations $y_i(k)$ grâce au filtre linéaire $h(n)$ de façon à estimer les sources $s_i(k)$ par $\hat{s}_i(k) = z_i(k) = (h * y_i)(k)$.

Dans le meilleur des cas, nous souhaitons pouvoir séparer complètement le signal in-formatif s_i du bruit n_i .

IV.2 Débruitage par filtres linéaires

Une première méthode pour effectuer un débruitage est d'utiliser des filtres spectraux : ils traitent les coefficients issus de la transformée de Fourier en fonction de leur fréquence. Leur principale idée est d'ajuster la bande effective au signal recherché de façon à réduire la puissance du bruit d'où une augmentation du rapport signal sur bruit défini par

$$PSNR = \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \quad (4.3)$$

où p_{signal} est la puissance du signal et p_{bruit} celle du bruit. L'emploi du filtrage de Wiener permet de minimiser l'erreur quadratique moyenne, les coefficients du filtre sont alors donnés par

$$H(f) = \frac{\Gamma_s(f)}{\sigma^2 + \Gamma_s(f)} \quad (4.4)$$

où $\Gamma_s(f)$ est la densité spectrale de puissance du signal, σ^2 la variance du bruit blanc qui perturbe les données et $H(f)$ la fonction de transfert du filtre $h(n)$. Cependant, l'emploi d'un tel filtre suppose que l'on ait une connaissance statique du second ordre sur le signal.

De plus, le débruitage par filtre, qui repose sur l'idée de traiter les échantillons en fonction de leur fréquence, sera d'autant plus performant que le signal et le bruit occupent des bandes de fréquences distinctes [26].

La figure 4.2 illustre le débruitage par le filtre de Wiener.

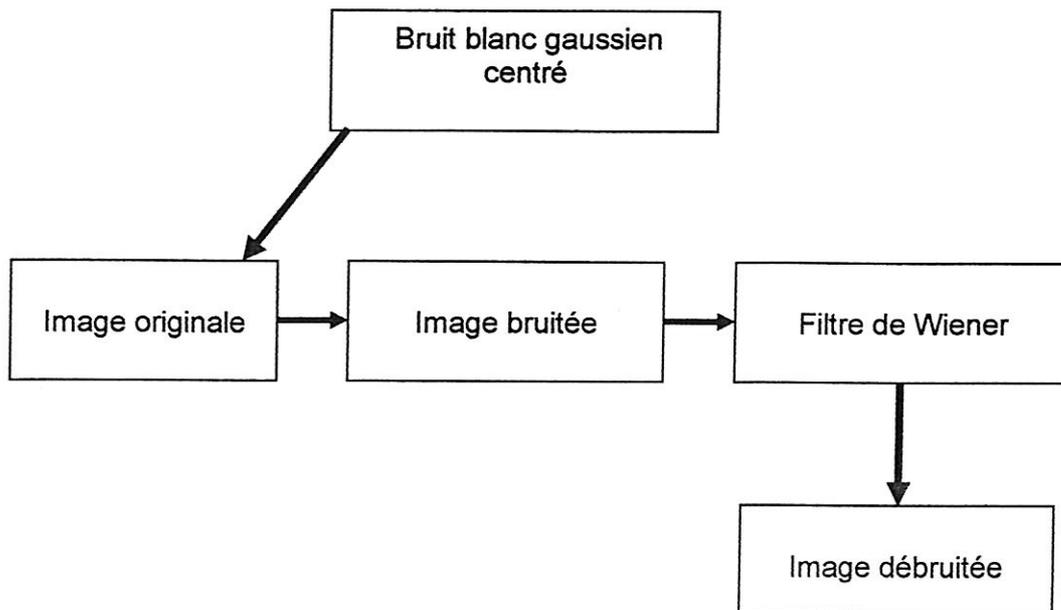


Figure 4.2 : Débruitage par le filtre de Wiener.

IV.3 Débruitage par ondelettes

La décomposition sur une base d'ondelettes discrètes est une méthode standard d'analyse et de débruitage d'image [31]. Il existe deux grandes catégories de méthodes pour le débruitage par ondelettes : le débruitage par seuillage et le débruitage par projection dans une base convenable. Pour cela nous allons exploiter deux propriétés intéressantes de la transformée en ondelettes discrète :

- Elle est éparse, c'est-à-dire que seul un petit nombre de coefficients a une amplitude importante.
- Les coefficients sont moins corrélés que les échantillons du signal.

Ces propriétés, jointes à l'utilisation d'algorithmes rapides de calcul de la transformée en ondelettes discrète, font que l'on traite les coefficients de la transformée plutôt que les échantillons du signal.

IV.3.1 Débruitage par seuillage

La propriété de décorrélation nous suggère de traiter les coefficients indépendamment les uns des autres et le fait que la transformée en ondelettes soit éparse nous incite à traiter les coefficients en fonction de leur amplitude et donc à utiliser des estimateurs à seuils.

Notons $W(\cdot)$ et $W^{-1}(\cdot)$ les opérateurs direct et inverse de la transformée en ondelettes discrète. Soit $D(\cdot, \lambda)$ l'opérateur de débruitage associé au seuil λ . En regroupant les observations y_i du signal observé dans un vecteur

$$y = s + n \quad (4.5)$$

où s représente le signal original informatif, et n est un bruit blanc gaussien centré indépendant et identiquement distribué de matrice de covariance $\sigma^2 I$:

$$n \longrightarrow N(0, \sigma^2 I),$$

la procédure de débruitage pour estimer s se traduit alors en trois étapes par

$$\begin{aligned} w &= W(y) \\ z &= D(w, \lambda) \\ \hat{s} &= W^{-1}(z) \end{aligned} \quad (4.6)$$

où l'opérateur direct $W(\cdot)$ de la transformée en ondelettes discrète se caractérise par une simple matrice de transformation W orthogonale qui vérifie donc $WW^T = W^T W = I$.

Ainsi, pour les observations on a

$$w = W(y) = Ws + Wn = \theta + b \quad (4.7)$$

Il est alors très simple de vérifier que b est un bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance $\sigma^2 I$: $b \longrightarrow N(0, \sigma^2 I)$.

Intéressons-nous maintenant au choix de l'estimateur à seuil $D(\cdot, \lambda)$ ainsi qu'à celui du seuil λ .

IV.3.1.1 Seuillage dur et doux.

Comme nous l'avons souligné, la transformée en ondelettes discrète est éparse: le signal s est caractérisé par un faible nombre de coefficients θ de grande amplitude.

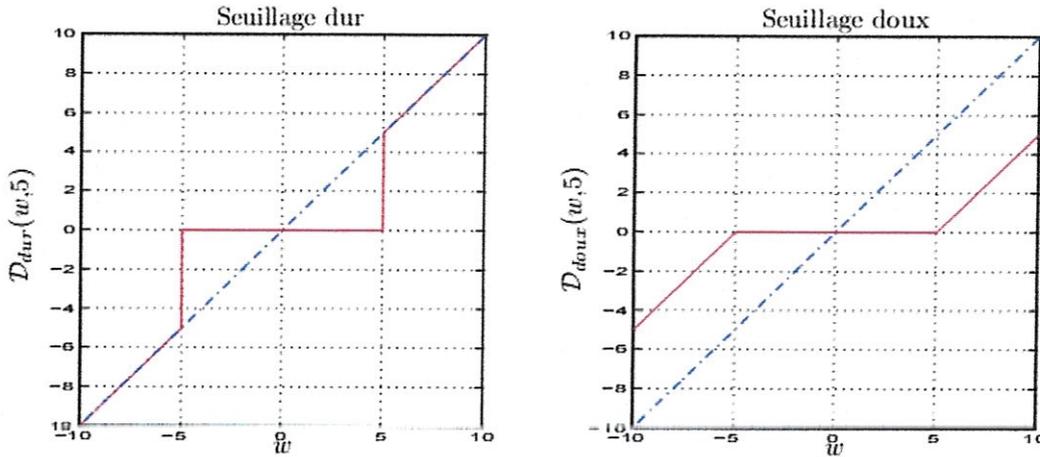


Figure 4.3 : Seuillages dur et doux.

La figure de gauche représente le seuillage dur (courbe en trait plein): les coefficients dont l'amplitude est inférieure au seuil λ , choisi ici égal à 5, sont annulés; les autres restent inchangés. La figure de droite représente quant à elle le seuillage doux (courbe en trait plein): les coefficients dont l'amplitude est inférieure au seuil λ sont annulés, les autres voient leur amplitude diminuée de la valeur du seuil.

Le seuillage dur exploite cette propriété en annulant tous les coefficients w_i inférieur au seuil λ :

$$D_{dur}(w, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } |w| \leq \lambda \\ w & \text{sin on} \end{cases} \tag{4.8}$$

si w représente un coefficient quelconque de la transformée en ondelettes discrète (figure 4.3). Ceci revient à considérer que les coefficients de faible amplitude (inférieure à λ) ne sont pas dus au signal mais uniquement au bruit, ils sont donc considérés comme nuisibles ce qui nous suggère de ne pas en tenir compte en les annulant.

Cependant, un tel estimateur peut entraîner, du fait de sa discontinuité, des oscillations comparables à celles engendrées par le phénomène de Gibbs (conduisant à des variances généralement élevées). Pour palier cet inconvénient, Donoho suggère de choisir un estimateur doux [33] défini par

$$D_{doux}(w, \lambda) = \text{sgn}(w) (|w| - \lambda)_+ \tag{4.9}$$

où $\text{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe et $(\cdot)_+$ représente la partie positive de l'expression entre parenthèses. Cet estimateur est continu: il annule tous les coefficients dont l'amplitude $|w|$ n'excède pas λ et diminue les autres de la valeur du seuil (figure 4.3), mais il introduit un biais systématique puisqu'il contracte les coefficients quelle que soit leur amplitude.

Comment choisir le seuil λ ? Deux possibilités s'offrent à nous :

1. Nous décidons d'adopter un seuil (comme le seuil universel [33]) qui ne dépend que du nombre de données N et de la variance du bruit σ^2 auquel cas λ peut être prédéterminé et nous pouvons appliquer la procédure en trois étapes décrite précédemment.

2. Nous optons pour un seuil adaptatif

$$\lambda = d(w) \quad (4.10)$$

(comme le seuil sélectionné par l'estimateur non biaisé du risque fondé sur le principe de Stein [9] paragraphe suivant) qui ne dépend plus uniquement de N et σ^2 mais aussi des données w . Et nous appliquons alors une procédure de débruitage en quatre étapes

$$\begin{aligned} w &= W(y) \\ \lambda &= d(w) \\ z &= D(w, \lambda) \\ \hat{s} &= W^{-1}(z) \end{aligned} \quad (4.11)$$

où nous distinguons maintenant l'opérateur $d(\cdot)$ qui sélectionne le seuil λ , de l'opérateur $D(\cdot, \cdot)$ qui effectue le seuillage.

Laissons pour le moment les seuils adaptatifs et développons le seuil universel. L'idée du seuil universel est d'approcher les performances qu'offre un oracle [33] avec un seuil très simple. Un oracle suppose que l'on a une connaissance parfaite des coefficients θ_i inconnus, non pas qu'il nous donne directement θ_i , mais qu'il va nous permettre d'effectuer le choix du seuil de manière idéale afin de minimiser l'erreur quadratique moyenne. Adopter le seuil universel permet de se rapprocher de ces performances: il suffit pour cela de choisir λ^* tel que

$$\lambda^* = \sigma \sqrt{2 \ln(N)} \quad (4.12)$$

Ce seuil très simple associé au seuillage doux donne de bons résultats et possède des propriétés intéressantes [32] quant à la régularité de l'estimateur.

Autres méthodes ont été envisagées afin de trouver un compromis entre le seuillage doux et dur: SURE, Oracle threshold [26,35].

La figure 4.4 illustre le débruitage par la transformée en ondelettes.

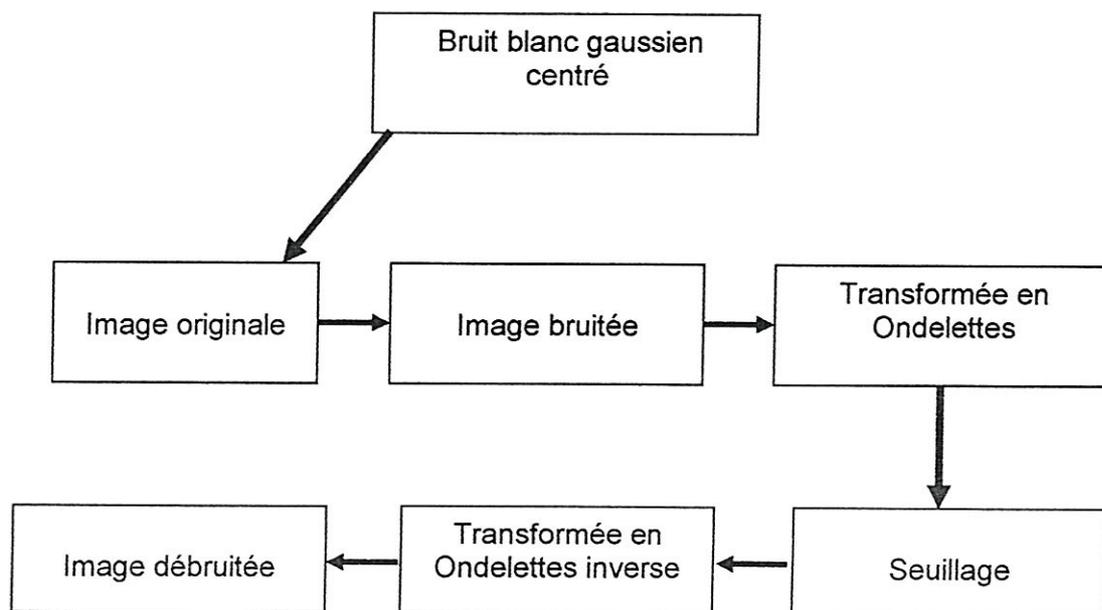


Figure 4.4 : Débruitage par la transformée en ondelettes.

IV.3.1.2 Débruitage par transformation invariante par translation

Un des inconvénients de la transformée en ondelettes discrète est qu'elle n'est pas invariante par translation: un signal et son translaté n'ont pas des représentations en ondelettes discrètes translatées l'une de l'autre. De plus, comme nous l'avons déjà dit, le seuillage dur peut entraîner l'apparition d'artefacts. Coifman et Donoho [36] proposent une méthode pour s'affranchir de cet inconvénient. Ils suggèrent ainsi de calculer les transformées en ondelettes discrètes du signal ainsi que de toutes les permutations circulaires de celui-ci, d'effectuer le débruitage de

notre choix et d'appliquer la transformation inverse à chacune des transformées directes calculées avant de moyenner celles-ci:

$$\tilde{T}(w, S_{k \in K}) = Moy_{k \in K} \{S_{-k} \circ T \circ S_k(w)\} \quad (4.13)$$

où $Moy_{k \in K}(\cdot)$ est l'opérateur moyenne de l'expression entre parenthèse pour pour l'ensemble des indices k de K , $T(\cdot) = W^{-1} \circ D(\cdot, \lambda) \circ W(\cdot)$ représente l'opérateur de débruitage de notre choix et $(S_k(w))_i = w_{(k+i) \bmod(N)}$ l'opérateur de translation temporelle. Nason et Silverman [37] montrent que ce principe est équivalent à calculer la transformée en ondelettes stationnaire. Leur idée est de moyenner des transformées en ondelettes discrètes légèrement différentes, appelée transformées-décimées. Pour cela rappelons que la transformée en ondelettes discrète est calculée à partir de bancs de filtres selon l'algorithme de Mallat [38, 39]. Cet algorithme fait appel à chaque échelle à un sous échantillonnage en ne gardant que les échantillons d'indice impair, mais il est tout à fait possible de ne garder que les échantillons d'indice pair. Ainsi à chaque échelle nous devons choisir entre garder les échantillons d'indice impair et ceux d'indice pair. En calculant toutes les décompositions possibles du signal original, nous obtenons 2^L décompositions différentes à l'échelle L , équivalentes à celles obtenues par le principe de Coifman et Donoho [36]. Une façon très simple de calculer toutes les transformations décimées est d'utiliser un algorithme proche de celui de Mallat à chaque échelle, on ne sous échantillonne plus les coefficients mais on sur-échantillonne les coefficients qui définissent les filtres passe-bas et passe-haut. La transformée en ondelettes stationnaire inverse est calculée en moyennant les diverses reconstructions obtenues des différentes décompositions.

La figure 4.5 illustre le débruitage par la transformée en ondelettes invariante par translation.

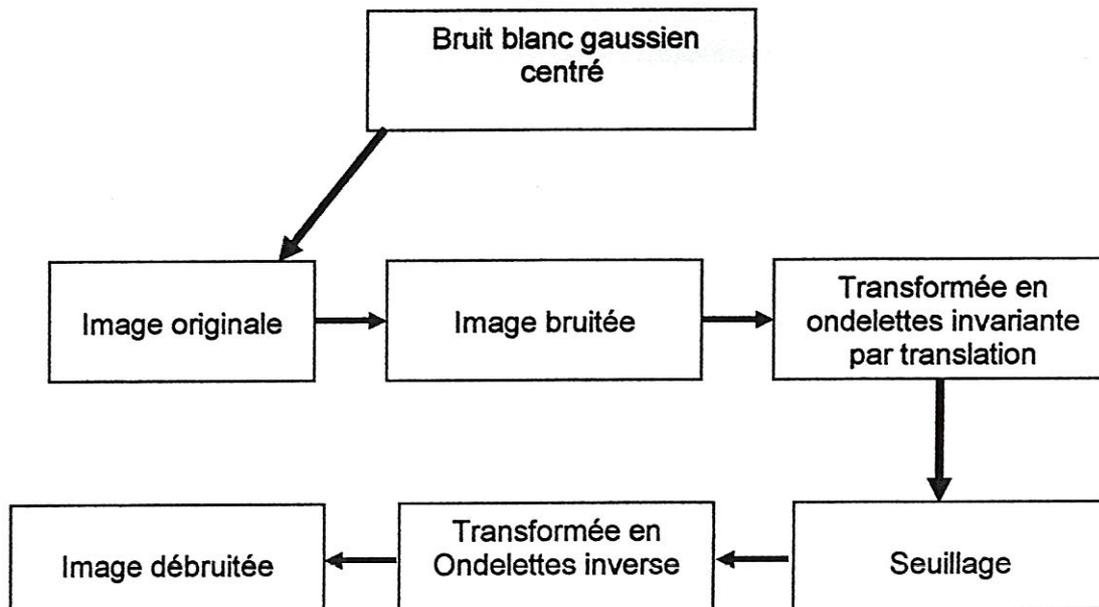


Figure 4.5 : Débruitage par la transformée en ondelettes invariante par translation.

IV.4 Résultats

Nous nous intéressons aux propriétés d'un bruit blanc gaussien centré qui nous ajoutons sur l'image originale qui est Lena 256×256 . On peut alors effectuer les méthodes de débruitage, débruitage par le filtre Wiener, et le débruitage par la transformée en ondelettes par seuillage, qui est une technique d'élimination des coefficients suivant d'un seuil donné avant l'étape de synthèse (reconstruction) [40]. On présente les PSNR de ces méthodes de débruitage :

IV.4.1 Seuillage dur

- Débruitage par le filtre de Wiener : 27.8154.
- Débruitage par la transformée en ondelettes : 25.653.
- Débruitage par la transformée en ondelettes invariante par translation : 28.3776.

La figure 4.6 illustre les différentes images débruitées par le seuillage dur.



Figure 4.6 : Les différentes images débruitées par le seuillage dur

Les meilleurs résultats sont donnés par le débruitage par la transformée en ondelettes invariante par translation.

IV.4.2 Seuillage doux

- Débruitage par le filtre de Wiener : 27.6691.
- Débruitage par la transformée en ondelettes : 23.3203.
- Débruitage par la transformée en ondelettes invariante par translation : 24.0148.

La figure 4.7 illustre les différentes images débruitées par le seuillage doux.

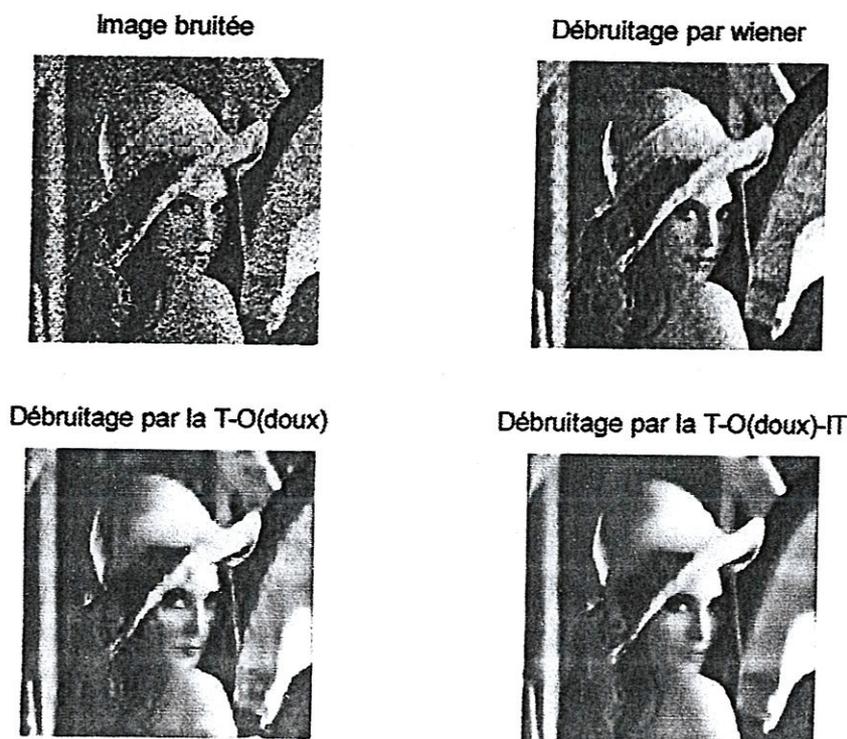


Figure 4.7 : Les différentes images débruitées par le seuillage doux

Les meilleurs résultats sont donnés par le débruitage par le filtre de Wiener.

IV.5 Conclusion

Les meilleurs résultats sont donnés par la méthode de débruitage par la transformée en ondelettes invariante par translation pour le seuillage dur, et pour le seuillage doux les meilleurs résultats sont donnés par la méthode de débruitage par le filtre de Wiener. Donc le PSNR (rapport signal sur bruit) est plus grand c'est-à-dire élimination du bruit sans pertes d'informations sur l'image.

RESUME

Dans ce mémoire, nous avons présenté un modèle stable et complet pour l'analyse du contenu sémantique de l'image qui est l'analyse multirésolutionnelle par ondelettes. L'ondelette est un bon opérateur pour l'extraction des détails dans l'image.

Dans le chapitre 1, nous avons donné une étude de la cause de l'apparition d'ondelette. Ensuite, nous avons donné la procédure de transformée de Fourier. Nous avons donné aussi la transformée de Fourier fenêtrée.

Dans le chapitre 2, nous avons présenté une étude de l'opérateur ondelette avec ses propriétés. Ensuite, nous avons donné la procédure de construction des ondelettes orthogonales et biorthogonales à partir des filtres duaux. Nous avons donné aussi les différentes familles d'ondelettes.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié l'analyse multirésolutionnelle par ondelettes pour le cas monodimensionnel et le cas bidimensionnel. Pour le cas 1D, nous avons appliqué le concept de l'analyse multiéchelle à un signal $s(t)$ afin d'extraire les différentes approximations et les différents signaux détails à chaque résolution. La reconstruction du signal original est faite par la sommation des différentes approximations et des différents signaux détails trouvés. Pour le cas 2D, trois ondelettes ont été construites afin d'extraire à chaque résolution trois types de détails ; horizontal, vertical et diagonal. Cette analyse s'est faite en supposant que l'ondelette est séparable.

Dans le chapitre 4, nous avons donné une application des ondelettes à le débruitage. Nous avons donné le débruitage par un filtre linéaire (filtre de Wiener). Nous avons aussi donné le débruitage par la transformée en ondelettes.

SUGGESTION ET PERSPECTIVES

Nous avons traité dans le chapitre 3 le cas 2D (image) par l'analyse multirésolutionnelle par ondelette séparable. Il est intéressant de traiter les images 2D par l'analyse multirésolutionnelle par ondelettes 2D non séparables et orientées. Il serait intéressant donc de l'appliquer à la segmentation.

REFERENCE

REFERENCES

- [1] A. Marion, « Introduction aux techniques de traitement d'images », Edition Eyrolles Paris, 1987.
- [2] D. Marr et E. Hildreth, « Theory of edge detection », Proc. Royal Soc. London, Vol. 207, pp. 187-217, 1980.
- [3] J. Castan, J. Zhao et J. Shen, « A family of edge detection operators based on optimal exponential filter », Internal report, pp. 23-36, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- [4] J. Canny, « A computational approach to edge detection », IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, Vol. PAMI 8, N° 6, pp. 679-697, Novembre 1986.
- [5] R. Deriche, « Fast algorithm for low- level vision », IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, Vol. 12, N° 1, pp. 8-87, Janvier 1990.
- [6] A. Grossman et J. Morlet, « Decomposition of hardy functions into square integrables wavelets of constant shape », SIAM. J. Math, Vol 15, pp. 723-736, 1984.
- [7] A. Cohen, « Ondelette et traitement des images numériques », Annale institut H. Poincaré, Analyse non linéaire, Vol 7, pp. 439-459, 1990.
- [8] Y. Meyer, S. Jaffard et O. Rioul, « L'analyse par ondelette », Pour la science, pp. 28-31, Septembre 1987.
- [9] Bouchemha Amel, « Analyse multiresolutionnelle de l'image par ondelettes bidimensionnelle non-separables et orientées », Université de Constantine, 1998.
- [10] Frédéric Truchetet, « Ondelette pour le signal numérique », Paris : Hermès 1998.
- [11] Tarik Al Ani, « Introduction aux ondelettes (Wavelets) », Laboratoire A2SI-ESIE-Paris, 2006.
- [12] Olivier le Cadet, « Méthode d'ondelettes pour la segmentation d'images. Application à l'image médicale et au tatouage d'images », Grenoble, 2004.

- [13] Robi Polikar, « The Wavelet Tutorial », Rowan University, College of Engineering, 1999.
- [14] F. Chapelais, « Une exploration des signaux en ondelettes par Stéphane MALLAT », Ecole des mines de paris, 2001.
- [15] Cédric Demonceaux, « Etude du mouvement dans les séquences d'image par analyse d'ondelettes et modélisation markovienne hiérarchique. Application à la détection d'obstacles dans un milieu routier », Université de Picardie Jules Verne, 2000.
- [16] Houam lotfi, « Filtrage du speckle basé sur la transformée en ondelettes », EMP, 2002.
- [17] Marc Antonini, « Compression des images et des vidéos numériques », Université de Nice-Sophia Antipoles, 2003.
- [18] M. Bariaud, « Wavelet in image communication », Edit par M. Barlaud, Université de Nice Sophia, Antipolis, Valbonne France 1994.
- [19] I. Daubechies, « Ten lectures on wavelet », N^o 61 in CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [20] Jean-Yves Richard, « Présentation de la méthode des ondelettes », Paris, 4-8 Septembre 2006.
- [21] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim, Jean-Michel Poggi, « Wavelet Toolbox For Use With Matlab », Copyright by The MathWorks, Inc. All Rights Reserved, 1996.
- [22] Y. Yao, « Complete Gabor transformation for signal representation », IEEE transactions on image processing, Vol. 2, N^o 2, pp. 152-159, 1983.
- [23] J. G. Daugman, « Six formal properties of two-dimensionnel anisotropic visual filter: Structural principles and frequency / orientation selectivity », IEEE transactions on system, Manad Cybernetic, Vol. 13, N^o 05, pp. 882-887, 1983.
- [24] T. Singlee, « Image representation using 2D gabor wavelet », IEEE transactions pattern analysis and machine intelgence, Vol. 18, N^o 10, 1996.

-
- [25] J. P. Antoine, P. Carrette, R. Murenzi et B. Piette, « Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform », Elsevier Science Publishers, pp. 241-272, 1993.
- [26] Bertrand Rivet, « Débruitage par ondelettes pour la séparation de sources dans des mélanges fortement bruités. Validation sur des électrocardiogrammes du fœtus. », Université de Paris-Sud XI, Juin 2003.
- [27] A. Antoniadis, J. Bigot, and T. Sapatinas, « Wavelet estimators in nonparametric regression : A comparative simulation study », Journal of Statistical Software, vol. 6, no. 6, 2001.
- [28] D. L. Donoho and I. M. Johnstone, « Ideal spatial adaptation by wavelet Shrinkage », Biometrika, vol. 81, no. 3, pp. 425–455, 1994.
- [29] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, G. Kerkyacharian, and D. Picard, « Wavelet shrinkage: Asymptopia? », J. R. Statist. Soc. B., vol. 57, no. 2, pp. 301–337, 1995.
- [30] S. G. Mallat, « A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation », IEEE trans. PAMI, vol. 11, no. 7, pp. 674–693, 1989.
- [31] Caroline Chaux¹, Laurent Duval², Jean- Christophe Pesquet¹, « Etude du bruit dans une analyse bandes en arbre dual », Université de Marne-la-Vallée, France, 2005.
- [32] David L. Donoho, « De-noising by soft-thresholding », IEEE Transactions on Information Theory, vol. 41(3):pp. 613–627, May 1995.
- [33] David L. Donoho and Iain M. Johnstone, « Ideal spatial adaptation by wavelet Shrinkage », Biometrika, vol. 81:pp. 425–455, 1994.
- [34] David L. Donoho and Iain M. Johnstone, « Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage », Journal of the American Statistical Association, vol. 90(432): pp. 1200-1224, 1995.
- [35] Larbi BOUBCHIR et Jalal FADILI, « Algorithme EM pour l'estimation des hyperparametres du debruiteur bayesien d'images base sur l'a priori des Formes K de Bessel », GREYC UMR CNRS 6072, Caen France, novembre 2006.

-
- [36] R. R. Coifman and D. L. Donoho, « Translation-invariant de-noising », In *Wavelets and Statistics*, Springer Lecture notes in Statistics 103, pages 125–150, New York: Springer-Verlag.
- [37] Guy P. Nason and Bernard W. Silverman, « The stationary wavelet transform and some statistical applications », Technical report, University of Bristol, February 1995.
- [38] J. L. Lacoume, « Ondelettes », Cours de troisième année option ATIS, ENSIEG, 2002–2003.
- [39] Stéphane Mallat, « A wavelet tour of signal processing », Academic Press, second edition, 1999.
- [40] Ionut Danaila. Pascal Joly. Sidi Mahmoud Kaber. Marie Postel, « Introduction au calcul scientifique par la pratique », Ecoles d'ingénieurs 2^e cycle/Master, Dunod, Paris, 2005.