621.036

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE 08 MAI 1945
GUELMA

172

INSTITUT DE GENIE ELECTRIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

Présentée par

Monsieur DOGHMANE Hakim

En vue de l'obtention du diplôme de Magister en Electronique
Option : Informatique Industriel et Imagerie

CONTRIBUTION A LA RESTAURATION DES SIGNAUX MONO ET BIDIMENSIONNELS

Soutenue devant le jury :

M[r] A. YOUNSI	Maître de Conférences	U. Guelma	Président
M[r] M. BEDA	Maître de Conférences	U. Annaba	Rapporteur
M[r] A. BOUKROUCHE	Docteur d'état	C.U. Guelma	Rapporteur
M[r] N. DOGHMANE	Maître de Conférences	U. Annaba	Examinateur
M[r] H. TEBIKH	Maître de Conférences	C.U. Guelma	Examinateur

1999 - 2000

REMERCIEMENTS

Ma reconnaissance s'adresse à Monsieur A. ***YOUNSI****, Maître de Conférence à l'université de Guelma, qui me fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de soutenance et m'a fait bénéficier de ses aimables remarques.*

Je remercie Monsieurs ***A/H. BOUKROUCHE****, Chargé de cours à l'université de Guelma, et* Monsieur **M. BEDA**, Maître de Conférence à l'université de Annaba *qui ont proposé le sujet passionnant et ont suivi avec intérêt le déroulement de mes travaux ; ils ont su apporter à la fois une contribution judicieuse et efficace. Je le prie de bien vouloir accepter mes plus sincères remerciements.*

Je remercie vivement Monsieur ***H. TEBIKH****, Maître de Conférence à l'université de Guelma et Monsieur N.* ***DOGHMANE*** *Maître de Conférence à l'université de Annaba qui ont accepté de faire partie du jury et qui ont voulu me faire bénéficier de leurs aimables remarques.*

SOMMAIRE

INTRODUCTION 01

CHAPITRE I Présentation du problème de déconvolution

1 Introduction 08
2 Position du problème 09
3 L'état de l'art des méthodes de déconvolution 10
4 Modélisation des systèmes linéaires et invariants 13
5 Convolution 14
5.1 Définition 14
5.2 Convolution et transformation de Fourier 15
5.2.1 Théorème de Plancherel 15
5.2.2 Solution de l'équation de convolution dans l'espace direct 15
5.2.3 Condition d'existence 15
5.2.4 Unicité de l'inverse de convolution 16

6 Filtre inverse 17
7 Problèmes spécifiques à la déconvolution 18
7.1 Difficultés en temps 20
7.2 Difficulté en numérique 20

CHAPITRE II MODELE DES SIGNAUX ALEATOIRES

1 Introduction 23
2 Déconvolution par la méthode MAP 23
3 Filtre de Wiener 27
3.1 Présentation 27
3.2 Application à la déconvolution 28

4 Résultats et Commentaires 28

CHAPITRE III APPROCHE DETERMINISTE

1 Introduction 35
2 Méthode de Moindres Carrés..... 35
3 Méthode de Tikhonov-Miller 37
4 Application de la théorie de la commande optimale
au problème de déconvolution 38
5 Méthodes itératives 43
5.1 Méthode de Van Cittert 44
5.2 Méthode de Van Cittert modifiée 46
5.3 Méthode de Singh 46
6 Méthodes d'optimisations 47
6.1 Minimisation de l'énergie de l'erreur 48
6.2 Méthode du Gradient conjugué 51
7 Déconvolution avec information a priori 53
7.1 Définition des contraintes 53
7.2 Déconvolution itératives avec contraintes 54

8 Résultats et Commentaires 57

CHAPITRE IV FILTRAGE OPTIMAL ET RESTAURATION

1 Introduction 67
1.1 Estimateur de Kalman 68
1.2 Estimateur linéaire (cas discret) 70
2 Filtrage et commande optimale 72
2 Déconvolution des signaux 2D 75
4 Méthode de régularisation classique 77
4.1 Réduction du bruit 77
4.2 Procédure de restauration 78

5 Régularisation de Tikhonov-Miller 80
6 Filtrage optimal et déconvolution (cas discret) 80
7 Résultats et Commentaires 82

CONCLUSION GENERALE
BIBLIOGRAPHIE

Résumé :

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'étude des problèmes inverses. Il s'agit de restaurer un signal inconnu ayant été dégradé par un système linéaire invariant et un bruit. Ce problème constitue un thème important en traitement du signal et des images. En effet, il apparaît dans de nombreuse disciplines comme la spectrométrie, la sismologie, la calorimétrie, l'astronomie, ...etc.

Les résultats montre l'efficacité de la méthode qu'intègre le filtrage optimal dans la procédure de restauration.

Introduction

Dans différents domaines scientifiques où les mesures expérimentales sont capitales, les capteurs sont l'objet de la plus grande attention. Leurs qualités croissent avec l'évolution de la technologie, mais l'expérimentateur en veut toujours plus. C'est à dire qu'il veut dépasser les performances offertes par ses capteurs. Dans ce cas, il faut faire appel au traitement du signal afin d'extraire un maximum d'information des signaux enregistrés.

Considérons le cas d'un capteur, qui a pour mission de transformer une grandeur physique (représentant une température, une pression, un débit ...) en une grandeur électrique (en générale une tension). Compte tenu de ce changement de dimension et de la physique du capteur, il est nécessaire avant toute mise en fonction du système de mesure d'effectuer un étalonnage. Cet étalonnage traduit le lien existant entre la grandeur physique et la grandeur électrique, cette relation est appelée '**fonction d'appareil**'. Généralement, celle-ci est considérée comme une constante. Cependant certains capteurs présentent un comportement dynamique non négligeable.

Le traitement numérique bas niveau des signaux et des images a pour objectifs essentiels :

- l'atténuation de l'effet des bruits et autres perturbations parasites pouvant affecter l'information à divers endroits dans la chaîne de mesure et d'acquisition. En effet, les signaux aléatoires parasites sont générés par l'appareillage de mesure et/ou d'acquisition, du milieu ou l'information s'est propagée ou encore même par le capteur qui génère l'information elle-même.

- La restauration de l'information dégradée par le système de mesure et d'acquisition. En effet, tous les systèmes de mesure, d'acquisition de conditionnement apportent une dégradation inévitable que l'on qualifie habituellement au filtrage indésirable sur les signaux informatifs. Ceci est dû essentiellement à la lenteur des temps de réponse des systèmes de mesure par rapport au signal informatif original. On qualifie habituellement cet effet, par l'effet de flou (ou Spread Function) compte tenu que tous les détails rapides et aigus du signal sont élargis et il arrive souvent qu'ils

se chevauchent et deviennent un seul et même objet ou détail. Ces altérations sont plus visibles dans certains domaines et applications que d'autres. On cite, à titre indicatif, le domaine de l'astronomie où les images observées par télescopes donnent des informations erronées sur les astres et autres étoiles. Ceci est bien entendu dû à l'effet de **filtrage indésirable** apporté par le télescope lui-même et par le milieu ou l'information s'est propagée avant d'arriver. Pour des systèmes que l'on peut supposer comme linéaires et invariant par translation cet effet de **flou** peut être assimilé à une sorte de **convolution** du signal original par la réponse du système. Ce qui conduit à proposer une **déconvolution** pour restaurer l'information. Néanmoins, pour réaliser une déconvolution on devrait pouvoir retrouver toute l'information qui a été perdue par l'effet de filtrage indésirable. Ceci s'explique mieux dans le domaine fréquentiel ou la dégradation apportée par le système de mesure est équivalent à une perte très prononcée des harmoniques hautes fréquences de notre signal original. Retrouver ces harmoniques perdues n'est pas tout à fait une réalisation aisée. C'est ce que l'on appelle habituellement un problème **«mal posé »**. La déconvolution revient donc à rendre ce problème bien posé en apportant des éléments de régularisation. Ceci peut s'effectuer, par exemple, par l'introduction d'information a priori.

Considérons le processus de mesure suivant :

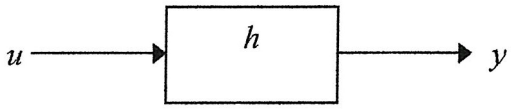


Figure 1 : système de mesure

u : grandeur à mesurer
h : capteur de mesure
y : grandeur mesurée

La grandeur que l'on désire capter ou mesurer constitue le support physique d'une information d'origine variée. Cela peut être un phénomène physique, chimique, biologique, acoustique, ... etc.

La détermination du signal original u qui n'est pas observable directement, à partir de l'enregistrement y est un problème inverse.

Du point de vue du traitement du signal, la modélisation du bruit se doit être adaptée aux traitements sur les signaux reçus. Dans de nombreux cas, les capteurs peuvent être modélisés comme ayant une dynamique linéaire. De plus, le signal enregistré y_m peut être considéré comme étant la somme d'un signal aléatoire v représentant les bruits sur les observations et d'un signal déterministe y, comme le montre la figure (2).

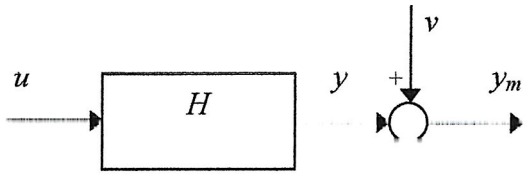


Figure 2 : modélisation d'un système linéaire

Moyennant des hypothèses de linéarité et d'invariance, le modèle physique est une convolution, et le problème à résoudre est une variété du problème inverse appelée déconvolution.

La relation qui liée la sortie y_m avec le signal d'entrée u peut être décrit par l'équation suivante :

$$y = h * u + v \qquad (1)$$

(*) désigne le produit de convolution

h *est* la réponse impulsionnelle du système de mesure

Si les signaux traités sont continus ou discrets, l'équation (1) revêt des aspects différents. La même chose est obtenue si celle-ci est exprimée dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Continu – temporel :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad (2)$$

Continu – fréquentiel :

Si nous nous plaçons dans le cas des fonctions possédant une transformée de Fourier, la transformée de Fourier de l'équation (2) s'écrit :

$$Y_m(w) = H(w)U(w) + V(w) \qquad (3)$$

Où $Y_m(w)$, $H(w)$, $U(w)$, $V(w)$ sont respectivement les transformées de Fourier du signal enregistré y_m, du noyau de convolution h, du signal utile u et du bruit de mesure v.

La transformée de Fourier $F(w)$ d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jwt}\,dt$$

Continu – Laplace :

Si nous appliquons la transformée de Laplace à l'équation (2), nous obtenons :

$$Y_m(S) = H(S)U(S) + V(S) \qquad (4)$$

Où $Y_m(s)$, $H(s)$, $U(s)$, $V(s)$ sont respectivement les transformées de Laplace du signal enregistré y_m, du réponse impulsionnelle h, du signal original u et du bruit de mesure v.
La transformé de Laplace $F(s)$ d'une fonction $f(t)$ est donnée par :

$$F(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Discret – temporel :

$$y_m(nT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(nT_e - kT_e)u(kT_e) + v(nT_e) \quad (5)$$

T_e désigne période d'échantillonnage.

Continu – transformé en Z :

$$Y_m(Z) = H(Z)U(Z) + V(Z) \quad (6)$$

Où $Y_m(z)$, $H(z)$, $U(z)$, $V(z)$ sont respectivement les transformées en z du signal enregistré y_m, du réponse impulsionnelle h, du signal original u et du bruit de mesure v.
La transformée en Z $F(z)$ d'une fonction $f(t)$ est donnée par :

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{N} f(nT_e)Z^{-n}$$

N désigne le nombre d'échantillons.

Donc l'estimation d'un signal à partir de sa version déformée et bruitée représente un problème majeur en traitement du signal. Depuis une soixante d'année le problème de déconvolution a été considéré comme celui du filtrage inverse [24]. Dans le même temps, plusieurs méthodes basées sur la synthèse des filtres numériques ont été plus en plus appliqués et ont conduit à la déconvolution des données numériques par le filtrage de Wiener [25], [26], [27], [28]. Toutefois ces méthodes représentent une version modifiée des techniques de filtrage inverse. Nombreux sont les auteurs qui ont montré l'échec de ce type de filtrage et les méthodes d'inversion généralisées qui sont des variantes des Moindres Carrés [29], [30], [31], [32].

Les premières méthodes de résolution étaient basées sur une approche itérative [33], consistant en une inversion directe ou en une inversion dans l'espace fréquentiel du noyau de convolution. Ces méthodes sont intéressantes car représentent une

structure itérative mais elles ne réduisent pas l'effet de bruit. Au-delà d'un certain nombre d'itérations, la stabilité du signal restauré n'est pas assurée.

Pendant les années 80, de nouvelles approches sophistiquées ont vu le jour, introduisant le concept de régularisation [22]. Cette technique consiste à introduire des connaissances a priori sur le signal à estimer afin d'assurer la stabilité numérique de l'algorithme de résolution.

La stratégie de régularisation, nous permet d'éviter les singularités du noyau de convolution. La technique d'optimisation de Wiener [34] est introduite pour réduire l'effet du bruit de mesure. Cette technique est basée sur la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation du signal à estimer, mais cette approche suppose une forte hypothèse sur le signal original qui doit être un signal aléatoire stationnaire d'ordre deux. L'utilisation par Demoment [10], [35] du filtre de Kalman discret permet de s'affranchir cette hypothèse tout en ayant une bonne stabilité numérique.

L'information a priori peut être introduite soit sous forme déterministe ou stochastique dans l'algorithme de résolution. Parmi les techniques utilisées dans la théorie de probabilité pour résoudre le problème de déconvolution, on trouve les estimateurs MAP(maximum a posteriori) [36] [37] [38] qui consiste à combiner dans un cadre Bayèsien l'information provenant des données et de l'a priori.

L'objectif de notre mémoire consiste à régulariser le problème de déconvolution, tout en faisant introduire des méthodes combinat le filtrage optimal dont le but est de réduire le bruit dans la donnée et les méthodes de régularisation diverses qui réduisent la distorsion sur le signal à restaurer.

Dans le cas où l'on s'intéresse au problème de la restauration d'image, l'image enregistrée et l'image originale sont liées par la relation suivante :

$$y_m(\zeta,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\zeta-\zeta',\eta-\eta')u(\zeta',\eta')d\zeta' d\eta' + v(\zeta,\eta) \qquad (7)$$

Le noyau de convolution $h(.,.)$ traduit des phénomènes variés tel une ouverture limitée du système optique, un bougé de l'objet pendant le temps d'exposition.

Le présent travail s'intéresse donc au problème de déconvolution. La déconvolution ou encore d'une manière plus générale la restauration des signaux et des images est une discipline assez vielle. Elle a commencé voilà plus de soixante années. Cependant, elle n'a cessé de connaître des développements et des affinements. En effet, l'information à utiliser et plus complexe de jour en jour, les instruments de mesure ou autres sont beaucoup plus sophistiqués mais d'autre part la recherche d'une information plus précise et plus significative se voit plus pressant aujourd'hui qu'hier. Il est donc évident que cette discipline est loin d'être délaissée mais bien au contraire elle est beaucoup plus sollicitée qu'avant.
Ce travail est organisé de la façon suivante :

Au cours du chapitre1, nous définissons la convolution et la déconvolution.

Nous rappelons dans le chapitre2 la technique d'estimation linéaire de Wiener qui résulte de la minimisation de la densité spectrale de l'erreur d'estimation.

Le chapitre 3 est consacré aux méthodes dites déterministes. Nous passons en revue la méthode des moindres carrés, les méthodes itératives et deux approches résultant du concept de régularisation.

Au chapitre 4, après avoir rappelé quelques résultats établis dans le cadre du filtrage optimal pour des signaux déterministes, nous étendons l'approche du filtrage de Kalman.

Afin d'améliorer la robustesse des techniques usuelles de déconvolution vis à vis du bruit de mesure, nous exposons des méthodes de déconvolution $1D$ et $2D$ modélisant le signal à restaurer comme un signal déterministe perturbé par un signal aléatoire additif. Ces méthodes combinent le filtrage optimal et les techniques de régularisation pour la résolution du problème de déconvolution.

Chapitre 1

Présentation du problème de déconvolution

I 1 Introduction :

Le but du traitement du signal consiste à extraire le maximum d'information à partir du signal enregistré, selon des critères et des objectifs bien définis en vue de son analyse, de son amélioration, de sa transformation, de sa reconstruction ou de sa restauration, etc.

Les informations provenant des phénomènes physiques étudiés ne sont pas, en général, directement accessible à l'observateur, elles subissent en effet, avant de lui parvenir diverses transformations dont les principales sont dues :

- Au bruit qui superpose au signal utile.
- Aux appareils de transmission.
- Au milieu dans lequel se propage le signal avant d'être enregistré.

Dans le cas général, le bruit s'additionne au signal utile, ainsi leur séparation peut s'effectuer en utilisant les concepts de filtrage optimal, par contre, l'action de l'appareillage ou du milieu de propagation, se traduit généralement par la **convolution** du signal porteur de l'information avec le signal caractéristique de l'élément perturbateur (voir figure (1.1)). La séparation de ces deux composantes liées par convolution, appelée couramment **déconvolution**. Ou autrement dit la déconvolution consiste à estimer l'information originale à partir du signal observé et diverses informations sur le système et sur le bruit de mesure

Pour tous les développements ultérieurs, il est commode de représenter le processus de dégradation et de transformation du signal utile à l'aide du schéma bloc de la figure (1.1). Ainsi le signal utile $u(t)$ est considéré comme l'entrée d'un système linéaire, décrit dans le cas stationnaire par sa réponse impulsionnelle.

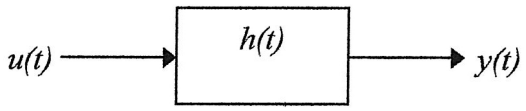


Figure 1.1

L'une des applications les plus spectaculaires se trouve en astronomie, où un télescope de résolution moyenne utilisé pour observer deux étoiles lointaines donne comme image une tâche. Augmenter le pouvoir de séparation du télescope, afin de distinguer les deux étoiles, revient à doubler la taille de ses miroirs. Ce qui nécessite un coût de réalisation prohibitif et un effort considérable. Au lieu de cela, l'utilisation des techniques de déconvolution permet d'avoir un résultat acceptable sur l'observation des deux étoiles, tout en gardant le même instrument.

I. 2 Position du problème :

En général, on rencontre très souvent des difficultés lorsque l'on effectue, en pratique, une mesure, dans le but de remonter à une grandeur physique que l'on veut évaluer avec précision. La plupart des processus de mesure peuvent être schématisés par la figure suivante :

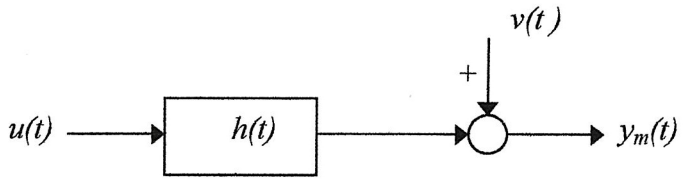


Figure 1.2 : principe de dégradation convolutive

u : représente la grandeur que l'on désire mesurer.

h : fonction d'appareil représentant le processus de distorsion engendré par la chaîne d'acquisition des mesures.

v: les perturbations (bruits) de mesure.

y_m : le signal enregistré.

Lorsque h est linéaire, la configuration de la figure (1.2) peut être décrite par l'équation suivante :

$$y_m(t) = h(t) * u(t) + v(t) \tag{1.1}$$

Où (*) représente l'opérateur de convolution.

Si les signaux de l'équation précédante admettent des transformées de Fourier, nous avons :

$$Y_m(w) = H(w)U(w) + V(w) \tag{1.2}$$

Dans le cas général $H(w)$ est un filtre passe bas, il en résulte que $1/H(w)$ aura plutôt tendance à amplifier les bruits de mesure que de donner une estimation acceptable du signal u. De nombreux travaux ont été publiés[4] proposant une variété de méthodes permettant de trouver une solution acceptable au problème de déconvolution. Cette diversité traduit d'une part l'importance du problème de déconvolution, et d'autre part sa grande difficulté. En présence du bruit de mesure v, il est souvent proposé une étape de mise en forme du signal y_m en filtrant ce dernier afin de réduire le niveau des bruits de mesure, se pose alors la question du choix du filtre. En effet, si le filtrage n'est pas adapté, soit certaines informations contenues dans le signal enregistré peuvent être atténuées, soit le filtre ne réduire que partiellement les bruits des mesures.

I. 3 L'état de l'art des méthodes de déconvolution :

La non- unicité de la solution du problème de déconvolution qui est un problème mal posé et les domaines de ses applications très variés ont donné lieu, comme en témoigne la littérature abondante sur ce sujet, à une grande diversité de méthodes. Par conséquent, il est difficile d'effectuer une comparaison complète de ces méthodes, vu les différents critères utilisés pour juger la qualité de restauration.
Les méthodes de déconvolution existantes peuvent être classées selon deux grandes approches, l'approche déterministe et l'approche stochastique.

Dans un cadre déterministe, le problème qu'on cherche à traiter revient à restaurer le signal d'entrée u, connaissant le signal observé y et l'opérateur linéaire de

dégradation H. Le bruit aléatoire est un signal dont les caractéristiques sont supposées partiellement connues. Une solution immédiate peut être obtenue au problème de déconvolution en minimisant un critère quadratique de l'erreur résiduelle tel que :

$$J(\hat{u}) = \|y - H\hat{u}\|^2 = (y - H\hat{u})'(y - H\hat{u}) \tag{1.3}$$

Où : $\hat{u} = arg\ min\{J(\hat{u})\}$ est la solution des Moindres Carrés.

Nous verrons au paragraphe §III.2 que la solution obtenue par cette méthode ne constitue pas une bonne approximation à la solution du problème de déconvolution. Afin de stabiliser la solution de la norme minimale, les techniques de régularisations doivent être utilisées [12], [39]. Elles permettent d'avoir une solution acceptable au problème de déconvolution. Cette solution résulte d'une combinaison d'informations relatives aux données et des connaissances a priori sur le signal à estimer. Elles s'obtiennent par la minimisation du critère suivant :

$$J(u,\alpha) = (y - Hu)'(y - Hu) + \alpha\, u'C'C\, u \tag{1.4}$$

Où C est une fonctionnelle de stabilisation et α un paramètre positif de régularisation

Toutefois le critère (1.4)ne permet pas de représenter certains types de contraintes, en particulier de bornitude [40]. Or, l'ajout de ces informations dans le critère de restauration permet d'améliorer la qualité de la solution. Les méthodes itératives ont justement l'avantage d'être particulièrement attractives pour l'introduction de diverses contraintes [41], [19].

Dans un conteste stochastique, le problème de restauration consiste à estimer u, à partir de l'observation de y, la connaissance de H et les propriétés statistiques du bruit v. De plus l'objet à restaurer et le bruit sont considérés comme des réalisations de processus aléatoires gaussiens indépendants dont on connaît les lois à priori. Si les hypothèses précédentes sont satisfaites, le problème de la restauration du signal u, est un problème de déconvolution simple.

Il est clair que ces hypothèses semblent simplificatrices car pour certaines applications, ni le système de dégradation ni les caractéristiques statistiques de u et v sont connus à priori. La déconvolution aveugle (myope) peur être une solution à ce problème. Il consiste d'une part à estimer les lois statistiques de u et v. Une fois que ces hyperparamètres ont été déterminés et le système a été identifié, on procède à la phase finale de restauration du signal d'entrée u.

Nous supposons que le système de dégradation est connu ou a été identifié, que le bruit est additif blanc gaussien et indépendant de u et que ses caractéristiques statistiques ainsi que celles de u peuvent être connues ou estimées à partir des données où des connaissances a priori (i.e., cas du modèle AR).

Le principe général de la restauration est illustré sur le schéma de principe suivant :

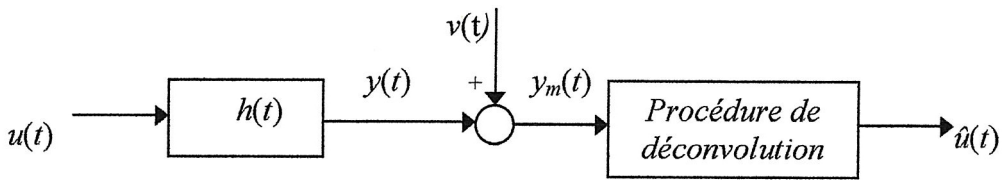


Figure (1.3) : principe général de la déconvolution

L'information a priori qui porte sur les propriétés statistiques du signal inconnu et du bruit, est introduit sous forme de lois de probabilité. Si celles-ci possèdent des distributions connues, la règle de Bayès permet de donner une estimation $\hat{u}$ du signal d'entrée u, qui maximise la densité de probabilité conditionnelle suivante :

$$P(u/y) = \frac{P(y/u)P(u)}{P(y)} \tag{1.5}$$

Où : $\hat{u} = arg\ max\{P(u/y)\}$

On voit alors, que cette règle permet de combiner l'information a priori provenant du signal original et de son observation.

Malheureusement, en pratique il n'est pas toujours possible de connaître les distributions a priori de ces processus. Si le processus à traiter satisfont l'hypothèse gaussienne, l'estimée déduite de l'équation (1.5) est équivalente à l'estimée obtenue par le principe du maximum a posteriori (MAP).

Dans le cas de processus linéaires gaussiens et centrés, l'estimateur MAP est similaire à celui de l'erreur moyenne quadratique minimale :

$$Min\ \varepsilon\left\{(u-\hat{u})^{t}(u-\hat{u})\right\} \tag{1.6}$$

De plus, si le signal d'entrée peut être décrit par un processus stationnaire, l'estimateur (1.6) conduit au filtre de Wiener dont la formulation sera donnée ultérieurement. Nous verrons que ce filtre présente plusieurs restrictions dues essentiellement au manque d'informations nécessaires pour son fonctionnement, à l'hypothèse de stationnarité qui n'est pas toujours satisfaite et son implantation non récursive.

I. 4 Modélisation des systèmes linéaires et invariants dans le temps :

Si nous plaçons dans le cas idéal des signaux non bruités, le système de dégradation S est un système linéaire de réponse impulsionnelle h(t) peut être représenté par le schéma de la figure (1.4) :

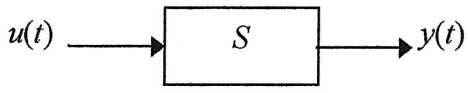


Figure (1.4) : Dégradation du signal à mesurer

Le signal de sortie $y(t)$ est donné par :

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{1.7}$$

Lorsque le support T du signal $u(t)$ est connu, on peut écrire :

$$y(t)=\int_{T} h(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_{T} h(\tau)\ u(t-\tau)d\tau \tag{1.8}$$

L'expression (1.8) est une équation de Fredholm de première espèce.

La version discrétisée de la relation (1.7) est donnée par la relation :

$$y(nT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(nT_e - kT_e)\, u(kT_e) \qquad (1.9)$$

T_e désigne la période d'échantillonnage.

k, n sont des entiers.

On dira que le système est causal si : $h(t) = 0 \quad \forall\, t < 0$

I 5 Convolution :

I 5.1 Définition :

La convolution est l'effet que produit un instrument de mesure qui donne d'un phénomène non pas une image réelle, mais une image un peu floue. L'image d'un point dans un instrument d'optique n'est jamais réellement un point mais une tâche. Cette tâche sera plus au moins large selon la qualité de l'appareil. Dans un tel instrument deux points rapprochés ne pourront donner deux images distinctes que s'ils sont éloignés l'un de l'autre d'une distance minimale qui définit le pouvoir séparateur.

Cette notion de convolution et de pouvoir séparateur, se trouve dans tous les domaines. Nous savons qu'en électronique, une impulsion infiniment brève, injectée à l'entrée d'un amplificateur ne donne jamais en sortie une impulsion infiniment brève mais un signal de durée non nulle (d'autant plus vite éteint que la bande de l'appareil est plus grande figure(1.5). Ce signal, réponse à une impulsion infiniment brève, est appelé réponse impulsionnelle.

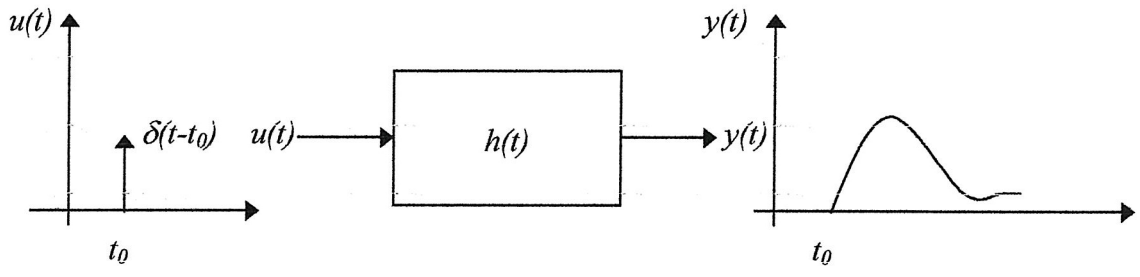


Figure (1.5) : l'effet de l'instrument de mesure

I 5.2 Convolution et transformation de FOURIER :

I 5.2.1 Théorème de Plancherel :

Cet important théorème, établit que la transformation de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement.

$$u(t) * h(t) \quad \longleftrightarrow \quad U(w).\ H(w)$$
$$u(t).\ h(t) \quad \longleftrightarrow \quad U(w) * H(w)$$

I 5.2.2 Solution de l'équation de convolution dans l'espace direct :

Soit l'équation de convolution définie auparavant :

$$y(t) = h(t) * u(t) \tag{1.10}$$

ou $u(t)$ est signal inconnu

La transformée de Fourier de l'équation (1.10) donne :

$$Y(w) = H(w)U(w) \tag{1.11}$$

La solution de l'équation (1.10), si elle existe est donnée par :

$$u(t) = h^{*-1}(t) * y(t) \tag{1.12}$$

$h(t)^{*-1}$: étant la fonction inverse de $h(t)$ de telle façon que :

$$h^{*-1}(t) * h(t) = \delta(t) \tag{1.13}$$

$\delta(t)$ représente l'impulsion de dirac.

La solution de l'équation (1.12) consiste à déterminer l'inverse $h(t)^{*-1}$ de la réponse impulsionnelle $h(t)$. Il reste cependant à définir les conditions d'existence de l'inverse de convolution et son unicité.

I 5.2.3 Condition d'existence :

La transformée de Fourier de l'équation (1.13) conduit à :

$$H^{-1}(w)H(w) = 1$$

et : $$H^{-1}(w) = \frac{1}{H(w)}$$

Puis en revenant à l'espace temps, donc :

$$h^{*-1}(t) = TF^{-1}\left\{\frac{1}{H(w)}\right\}$$

$H^{-1}(w)$ existe, si $h(t)$ est une distribution tempérée.

I 5.2.4 Unicité de l'inverse de convolution :

Supposons $h_1^{*-1}(t)$ et $h_2^{*-1}(t)$ deux inverses de convolution de $h(t)$, nous avons d'après (1.13) :

$$\begin{aligned} h_1^{*-1}(t) * h(t) &= \delta(t) \quad (a) \\ h_2^{*-1}(t) * h(t) &= \delta(t) \quad (b) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Par différence entre (a) et (b) de l'équation (1.14), on aura :

$$\left(h_1^{*-1}(t) - h_2^{*-1}(t)\right) * h(t) = 0 \qquad \forall t$$

Si $h_1^{*-1}(t) \neq h_2^{*-1}(t)$, on dit qu'il existe des solutions muettes de l'équation de convolution. En effet par transformation de Fourier, on obtient :

$$\left(H_1^{-1}(w) - H_2^{-1}(w)\right) H(w) = 0 \tag{1.15}$$

Dans le cas où H est une fonction qui ne s'annule pour aucune valeur de w et ne tend pas vers zéro pour w tendant vers l'infini plus vite qu'une puissance de $1/w$, on peut définir $1/H(w)$ de façon unique et par conséquent, le problème de déconvolution est, dans ce cas, théoriquement soluble. Par contre si $H(w)$ s'annule pour un ou plusieurs intervalles (ou points), $H_1^{-1}(w)$ peut alors être différent de $H_2^{-1}(w)$ bien que (1.15) est vérifiée ; on ne peut garantir l'unicité de la solution figure(1.6). L'inverse de convolution ainsi n'existe pas. Nous voyons que toutes les solutions $U_k(w)$ vérifient la relation (1.11). Nous appellerons solution principale de Bracewell, $U_B(w)$ celle qui permet les $U_k(w)$ est telle que :

$$U_B(w)=\begin{cases}U(w) & \forall\, w\notin\Omega\\ 0 & \forall\, w\in\Omega\end{cases}$$

$$\Omega=\{w/H(w)=0\}$$

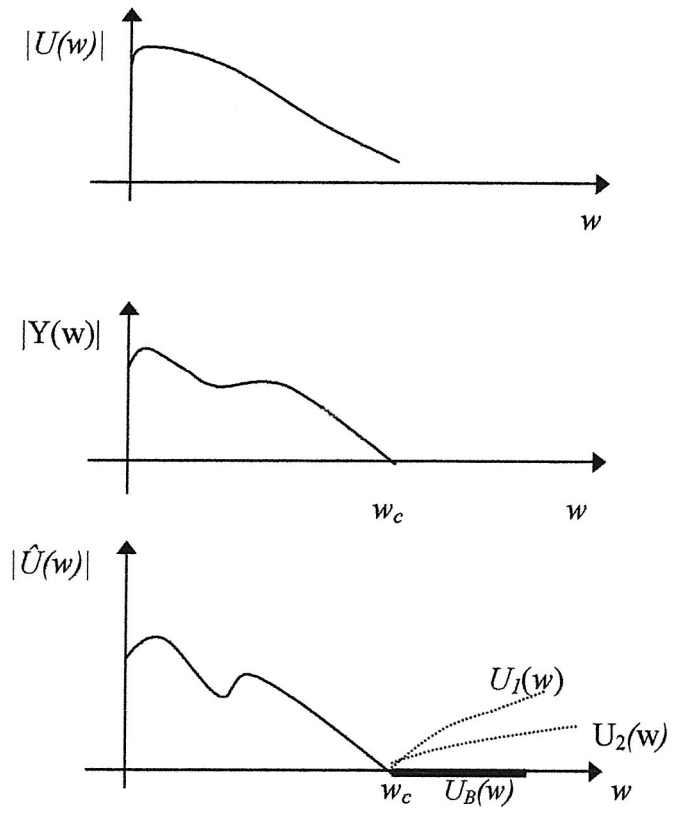


figure (1.6) : multiplicité des solutions de l'inverse de convolution

I 6 Filtre inverse :

Si les signaux traités sont continus ou discrets, l'équation de convolution revêt des aspects différents, de même si celle-ci est exprimée dans le domaine temporel ou non. Par exemple l'équation de convolution peut être écrite dans le domaine fréquentiel :

$$Y_m(w)=H(w)U(w)+V(w) \qquad (1.16)$$

L'expression du filtre inverse peut donner par :

$$\hat{U}(w)=H^{-1}(w)Y(w)+H^{-1}(w)V(w) \qquad (1.17)$$

Dans l'équation (1.17), nous devons nous assurer de l'existence de l'inverse de $H(w)$, c'est –à- dire que $H(w)$ ne doit s'annuler en aucun point du spectre. Mais ce qui est plus important, la plupart pour ne pas dire que la totalité des processus physiques étudiés ici sont tel que :

$$H(w) \rightarrow 0 \text{ quand } w \rightarrow \infty$$

Or le spectre du bruit ne s'annule pas dans le domaine de fréquences élevées, la division par $H(w)$ entraîne par conséquent une amplification très importante du bruit. Donc cette procédure est impossible à mettre en œuvre, le filtre inverse $1/H(w)$ est l'objectif visé mais il ne peut être réalisé. Donc il est clair que le filtre inverse ne peut être considéré que comme un idéal à atteindre. La majorité des méthodes de déconvolution consiste en une approximation de celui-ci en utilisant au maximum toutes les informations disponibles sur les divers signaux.

I 7 Problèmes spécifiques à la déconvolution / difficultés :

Nous présentons dans ce paragraphe les difficultés du problème de la déconvolution respectivement dans le domaine continu et discret.

I 7.1 Difficultés en temps :

Nous illustrons ces difficultés sur un exemple de capteur de température. En effet, l'utilisation d'un capteur signifie que l'on n'a pas accès directement à la grandeur physique. Dans le cas étudié, le capteur a une dynamique traduite par l'équation différentielle suivante (où l'on suppose que le coefficient de conversion est égal 1).

$$\tau \dot{y} + y = u \qquad (1.18)$$

où u représente la température non mesurable, y le signal mesuré et τ la constante de temps du thermomètre.

Le but de la déconvolution consiste ici à estimer u sur la base des mesures de y et de la connaissance de τ.

I 7.1.1 Première difficulté :

a- Difficulté au temps :

La restauration de u à partir de y, se ramène dans ce cas à une dérivation :

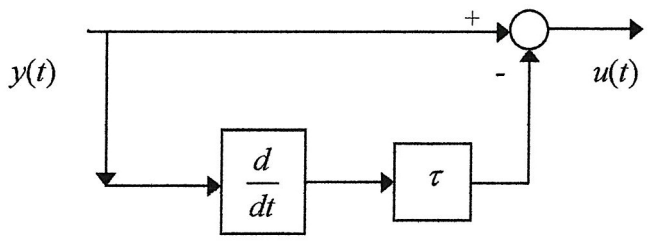


figure 1.5

A cause de la présence inévitable du bruit dans les mesures, cette dérivation amplifie le bruit dans la solution, classiquement les techniques utilisées pour empêcher cette amplification, consiste à lisser le signal bruité avant d'effectuer la dérivation, il est alors difficile de choisir le lisseur qui correspond au bruit présent dans les données.

b- Difficulté en fréquence :

La restauration de u est réalisée maintenant par le filtrage inverse, en effet par transformation de Laplace de l'équation (1.18), on aura :

$$Y(S)(\tau S + 1) = U(S) \tag{1.19}$$

La fonction de transfert $H(S)$ est donnée par :

$$H(S) = \frac{1}{\tau S + 1} \tag{1.20}$$

Ce filtre dont la fonction de transfert est causale possède un comportement passe-bas.

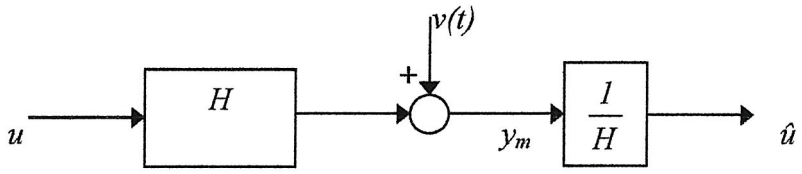


Figure 1.6 : Principe de filtrage inverse

Restauration ≡ filtrage inverse

Le filtre qui est représenté ci-dessus joue le rôle d'un amplificateur de bruit. Celui ci, en dehors du fait qu'il est physiquement irréalisable, donc il favorise les composantes hautes fréquences et amplifie le bruit dans la solution. Le même phénomène se produit si en divisant $Y(w)$ par la réponse fréquentielle $H(w)$. Cette division fréquentielle conduit à une amplification du bruit car on effectue une division par zéros. En effet, comme c'est le cas pour la plupart des systèmes physiques, la réponse fréquentielle tend vers zéro pour les fréquences élevées ($H(w) \rightarrow 0$ quand $w \rightarrow \infty$). Or le spectre de bruit est constant et ne s'annule pas dans le domaine des fréquences supérieures, la division par $H(w)$ entraîne donc une amplification très importante du bruit.

Les moyens classiques employés pour remédier à cette amplification, consistent en une extrapolation de bande sur la base des connaissances a priori de support fini, bande limitée, avant de réaliser la division fréquentielle.

I 7.1.2 Deuxième difficulté : non-unicité de la solution

Biraud [13] a étudié cette difficulté (en absence du bruit)dans le cas des systèmes physiques ayant des réponses fréquentielles $H(w)$ qui s'annulent pour certaines valeurs de w. Il montre qu'il est impossible dans ce cas de reconstituer le signal d'entrée de façon unique, car il existe plusieurs solutions muettes.

On pourrait comme précédemment sur la base des connaissances à priori sur le signal à restaurer, reconstituer ce signal par des techniques d'extrapolation de bande, mais on se heurte toujours au problème de la multiplicité de solution.

I 7.2 Difficultés en numérique :

Nous allons montrer que les difficultés rencontrées en continu vont se retrouver en discret. La restauration du signal u se ramène à la résolution d'un système d'équation linéaire suivant :

$$[Y]=[H][u]+[v] \qquad (1.21)$$

Diverses méthodes ont été développées, l'une des premières techniques utilisée, est la méthode d'inversion directe ou de filtrage inverse, qui consiste à prendre comme solution $\hat{u}$ tel que :

$$\hat{u} = H^{-1}y + H^{-1}v \tag{1.22}$$

Malheureusement, l'inverse de H n'existe pas toujours, et dans le cas où elle existe, elle est mal conditionnée (valeurs singulières). La présence de bruit rend alors la solution inacceptable. Certaines techniques itératives permettent d'approcher ce filtre, même en présence de singularité dans H. C'est le cas par exemple de la méthode d'approximation de Van Cittert. Cependant, malgré ces différentes améliorations, le filtre inverse demeure difficile d'utilisation en particulier en présence de bruit.

En l 'absence de toute information statistique sur le bruit, la solution pseudo inverse obtenue par la méthode des moindres carrés classiques est donnée par :

$$\hat{u} = \left(H'H\right)^{-1}H'y \tag{1.23}$$

Celle ci s'obtient par minimisation d'une norme quadratique :

$$J(\hat{u}) = \left\|y - H\hat{u}\right\|_2^2 \tag{1.24}$$

On montre qu'une faible perturbation $||\Delta y||$ sur les données y engendre une forte perturbation $||\Delta u||$ sur la solution. La solution est donc instable, i.e., ne dépend pas continûment des données :

$$||\Delta y|| \to 0 \not\Rightarrow ||\Delta u|| \to 0$$

la décomposition en valeurs propres de la matrice $(H'H)$ permet de matréaliser ce point :
Soient $\{ \mu_i^2 , i=1, \ldots ,r\}$ ses valeurs propres, supposées ordonnées :
$\mu_1^2 \geq \mu_2^2 \geq \mu_3^2 \geq \ldots \geq \mu_r^2$

Le calcul de la pseudo inverse de H conduit à la solution $\hat{u}$ suivante :

$$\hat{u} = H^{+}y = \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-1}(w_i, y)v_i \qquad (1.25)$$

où r est le rang de H, w_i et v_i sont respectivement les vecteurs colonnes propres ordonées de $HH^{'}$ et $H^{'}H$.
(.,.) représente le produit scalaire de deux vecteurs.

On peut montrer qu'une faible perurbation Δy sur les observations se traduit par une forte perturbation Δu sur la solution. (i.e., $y = y_s + \Delta y$ ou $y_s = H\,u_s$).

$$\begin{aligned} u_s &= u + \Delta u = H^{+}(y_s + \Delta y) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-1}(w_i, y_s)v_i + \sum_{i=1}^{r} \mu_i^{-1}(w_i, \Delta y) \end{aligned} \qquad (1.26)$$

D'après l'équation (1.26), $\mu_i \to 0$ ($y_s \to 0$), le terme μ_i^{-1} $(w_i\,,\, \Delta y)$ devient important (même pour Δy faible), ce qui a pour conséquence une amplification du bruit Δu dans la solution. L'objectif de notre mémoire s'inscrit dans le cadre des techniques de régularisation.

Conclusion :

Nous avons vu dans ce chapitre que la déconvolution est un problème inverse mal posé et avons monté ses difficultés en continu et en discret. Nous avons constaté qu'elle sont liées à deux défaux :

- Insuffisance des données : résolution limitée du système de mesure.
- Présence d'un bruit aléatoire de mesure.

Il est important de noter que la principale difficulté de la déconvolution réside dans la présence du bruit dans les données qui empêche l'obtention d'une solution stable.

Chapitre 2

Modèle de signaux aléatoires

II 1 Introduction :

L'approche stochastique permet d'utiliser explicitement les paramètres statistiques du bruit pour résoudre l'équation de convolution. On suppose alors, que ce bruit ainsi que l'objet à restaurer sont des réalisations de processus aléatoires succeptibles d'avoir des propriétés statistiques connues. Les propriétés statistiques sont limitées au deux premiers moments qui suffisent pour décrire la plupart des processus aléatoires. Ainsi, le problème de déconvolution se ramène à un problème d'estimation classique[14]. Il consiste à estimer l'entrée inconnue u connaissant l'observation y, la loi du bruit b et la matrice de dégradation H. La solution est obtenue dans le cadre de la théorie de l'estimation bayésienne [15], [16], [17] et du filtrage optimal. L'information a priori qui porte sur les propriétés statistiques du signal inconnu et du bruit, est introduite sous forme de lois de probabilités. La règle de bayés associée à l'équation (1.13) permet de donner une estimation $\hat{u}$ du signal d'entrée u, qui maximise la densité de probabilité conditionnelle suivante :

$$\begin{cases} P(u/y) = \dfrac{P(y/u)P(u)}{P(y)} \\ Où \quad \hat{u} = arg\ max\{P(u/y)\} \end{cases} \tag{2.1}$$

On voit alors, que cette règle permet de combiner l'information a priori provenant du signal original et de son observation. C'est là sans doute une forme de régularisation stochastique.

II 2 Déconvolution par la méthode MAP :

Si les signaux u et b sont décrits par des processus aléatoires gaussiens [Van 68]. L'application de la règle de bayés permet au critère MAP de fournir une estimation de u qui maximise la densité de probabilité a posteriori [15], [42] :

$$\begin{cases} P(u/y) = \dfrac{P(y/u)P(u)}{P(y)} \\ Où \quad \hat{u}_{MAP} = arg\ max\ \{P(u/y)\} \end{cases} \tag{2.2}$$

On suppose en plus que les processus du bruit et du signal sont indépendants, et possèdent des densités de probabilités connues. Celles-ci sont déterminées par la connaissance des moments statistiques d'ordre deux de ces processus :

$$\varepsilon\{b\} = 0 \ ; \qquad \varepsilon\{b\, b'\} = R_b \tag{2.3}$$

$$\varepsilon\{u\} = \tilde{u} \ ; \qquad \varepsilon\{(u - \tilde{u})(u - \tilde{u})'\} = R_u \tag{2.4}$$

où R_b, R_u sont respectivement les matrices de covariances du bruit et du signal.

La connaissance du bruit définit complètement p(y/u) [15]. On définit alors p(y/u) et p(u) comme des lois normales multivariables :

$$p(y/u) = K_1\, exp\left\{-\frac{1}{2}(y - Hu)' R_b^{-1}(y - Hu)\right\} \tag{2.5}$$

$$où \quad K_1 = \left[(2\pi)^{\frac{N}{2}} (det\, R_b)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

$$p(u) = K_2\, exp\left\{-\frac{1}{2}(u - \tilde{u})' R_u^{-1}(u - \tilde{u})\right\} \tag{2.6}$$

$$où \quad K_2 = \left[(2\pi)^{\frac{M}{2}} (det\, R_u)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

Le terme p(y) qui ne dépend pas de u, est interprété comme une constante de normalisation pour p(u/y). Maximiser (2.2) est équivalent à maximiser son logarithme :

$$\hat{u}_{MAP} = arg\ max\ \{ln(p(u/y))\} = arg\ max\ \{ln(p(y/u)) + ln(p(u))\} \tag{2.7}$$

Ce maximum s'obtient par la condition nécessaire suivante :

$$\left[\frac{\partial ln(p(y/u))}{\partial u} + \frac{\partial ln(p(u))}{\partial u}\right]_{u=\hat{u}_{MAP}} = 0 \tag{2.8}$$

Sachant que les constantes K_1 et K_2 sont indépendantes de u, le développement de (2.8) conduit à l'expression suivante :

$$u = arg\ max\left\{-\frac{1}{2}(y-Hu)' R_b^{-1}(y-Hu) - \frac{1}{2}(u-\tilde{u})' R_u^{-1}(u-\tilde{u})\right\} \tag{2.9}$$

On voit alors que maximiser (2.9) revient à minimiser le critère quadratique suivant :

$$J(u) = \frac{1}{2}(y-Hu)' R_b^{-1}(y-Hu) + \frac{1}{2}(u-\tilde{u})' R_u^{-1}(u-\tilde{u}) \tag{2.10}$$

Après développement et réarrangement de (2.10), on obtient l'expression ci-dessous :

$$J_1(u) = \frac{1}{2}u'\left(H' R_b^{-1} H + R_u^{-1}\right)u - u'\left(H' R_b^{-1} y + R_u^{-1}\tilde{u}\right) \tag{2.11}$$

Cette expression qui est une fonctionnelle quadratique, se réécrit en utilisant les notations usuelles du produit scalaire, sous la forme :

$$J_1(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (u, b) \tag{2.12}$$

où (.,.) dénote le produit scalaire et A et b sont déterminés par :

$$A = \left(H' R_b^{-1} H + R_u^{-1}\right)$$
$$b = \left(H' R_b^{-1} y + R_u^{-1}\tilde{u}\right)$$

Comme A est un opérateur symétrique semi-défini positif, la méthode MAP possède alors un minimum unique donné par :

$$\hat{u} = A^{-1} b$$

D'où en remplaçant A et b par leurs expressions respectives, on obtient :

$$\hat{u}_{MAP} = \left(H' R_b^{-1} H + R_u^{-1}\right)^{-1}\left(H' R_b^{-1} y + R_u^{-1}\tilde{u}\right) \tag{2.13}$$

Remarquons si $\tilde{u}$ =0, la relation (2.13) se réduit au filtre de Wiener.

Nous allons voir maintenant une interprétation bayésienne de l'approche de réguiarisation par le principe MAP. Soit en supposant que le bruit de mesure est blanc gaussien et l'entrée u est modélisée par un processus AR piloté par un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_v^2 :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{p} a_i\, u(k-i) = v(k) & k = 1,\ldots,N \\ a_0 = 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

En développement le système (2.14) pour k allant de 1 à N, on obtient la forme matricielle suivante :

$$F\,u = v \tag{2.15}$$

avec

$$F = \begin{bmatrix} 1\ 0\ \ldots\ 0 \\ a_1\ 1\ \ldots\ 0 \\ . \\ a_p\ \ldots\ 1.\ 0 \\ .\ .\ .\ .\ . \\ 0.\ a_p\ .\ a_1\ 1 \end{bmatrix}$$

Les propriétés statistiques de u déduite de (2.15) et du bruit définies par :

$$\begin{aligned} &\tilde{u} = 0 \\ &R_u = \sigma_v^2 \left(F' F\right)^{-1} \\ &R_b = \sigma_b^2 I \end{aligned} \tag{2.16}$$

En remplaçant les paramètres de (2.16) dans (2.10), on obtient une expression qui s'écrit sous la forme suivante :

$$J(u) = \frac{1}{2}\frac{\|y - Hu\|^2}{\sigma_b^2} + \frac{1}{2}\frac{\|F\,u\|^2}{\sigma_v^2}$$

Ce qui revient à minimiser le critère suivant :

$$J(u,\alpha) = \frac{1}{2}\|y - Hu\|^2 + \alpha\frac{\|F\,u\|^2}{2} \tag{2.17}$$

avec $\alpha = \dfrac{\sigma_b^2}{\sigma_v^2}$

l'équation (2.17) montre également l'effet régularisant de la méthode MAP. L'opérateur F peut être interprété comme un fonctionnelle de stabilisation.

Si les processus linéaires gaussiens et centrés, l'estimateur MAP est similaire à celui de l'erreur moyenne quadratique minimale (EMQM), qui donner par :

$$Min\ \varepsilon\left\{(u - \hat{u})'(u - \hat{u})\right\} \tag{2.18}$$

De plus, si le signal d'entrée peut être décrit par un processus stationnaire, l'estimateur (2.18) conduit au filtre de Wiener.

II 3 Filtre de Wiener :

II 3.1 Présentation :

La méthode de wiener traite des signaux stationnaires et est orientée vers la réalisation du système physique capable de séparer le signal du bruit..

Soient $y(t)$ et $u(t)$ deux processus stochastiques, stationnaires, l'un connu, l'autre inconnu. Le filtre de wiener est un système linéaire invariant devant être déterminer pour estimer la réponse $\hat{u}(t)$ à partir de l'entrée $y(t)$ telle que :

$$J = \varepsilon\left\{(u(t) - \hat{u}(t))^2\right\} \tag{2.19}$$

soit minimale.

La recherche du filtre est équivalent à la recherche de sa réponse impulsionnelle $l(t)$, on à :

$$\hat{u}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)l(\tau)d\tau \tag{2.20}$$

On peut démontrer que l'estimateur optimal doit être tel que $u(t)$-$\hat{u}(t)$ soit orthogonale avec les données $y(t-\theta)$.

$$\varepsilon\left\{\left[u(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)l(\tau)d\tau\right]y(t-\theta)\right\} = 0 \tag{2.21}$$

$$\varepsilon\left\{u(t)y(t-\theta) - \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)y(t-\theta)l(\tau)d\tau\right\} = 0 \tag{2.22}$$

d'où :

$$C_{yu}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{yy}(\theta-\tau)l(\tau)d\tau \tag{2.23}$$

Donc :

$$C_{yu}(\theta) = C_{yy}(\theta) * l(\theta) \tag{2.24}$$

Où C_{yy} et C_{yu} sont respectivement les fonctions d'autocorrélation de y et d'intercorrélation de $y(t)$ *et* $u(t)$.

On applique la transformée de Fourier pour l'équation (2.24), on obtient :

$$L(w) = \frac{\phi_{yu}(w)}{\phi_{yy}(w)} \tag{2.25}$$

tel que : ϕ_{yu} et ϕ_{yy} sont les densités spectrales de puissance.

II 3.2 Application à la déconvolution :

Les techniques d'estimation linéaires exposées dans ce chapitre peuvent être schématisées par la configuration suivante :

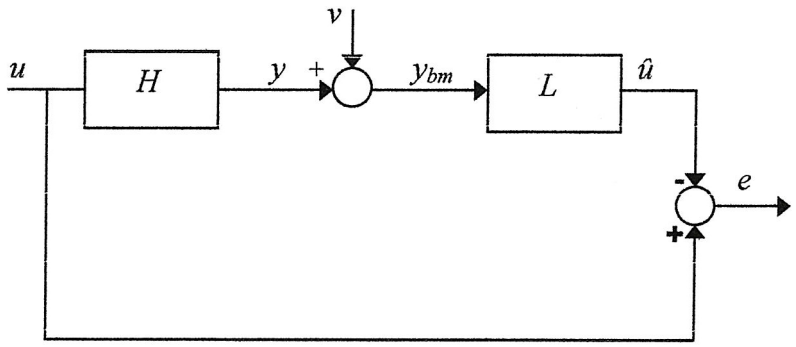


Figure 2.1 : Schéma de l'estimation linéaire

Soit un système décrit par l'équation suivante :

$$y_{bm}(t) = h(t) * u(t) + v(t) \tag{2.26}$$

Où $u(t)$ et $v(t)$ sont des processus stochastiques stationnaires d'ordre deux et non corrélés.

Soit $y(t) = h(t)*u(t)$ et $\varepsilon[y(t).\ v(t)]=0$

Nous avons donc :

$$\phi_{y_{bm}u}(w) = \phi_{yu}(w) = \phi_{uu}(w)H^*(w)$$

$$\phi_{y_{bm}\,y_{bm}}(w) = \phi_{y_{bm}\,u}(w) + \phi_{vu}(w) = \phi_{yy}(w) + \phi_{vv}(w)$$

D'où la fonction de transfert du filtre de Wiener :

$$L(w) = \frac{\phi_{y_{bm}u}(w)}{\phi_{y_{bm}y_{bm}}(w)} = \frac{\phi_{uu}(w)H'(w)}{\phi_{uu}(w)|H(w)|^2 + \phi_{vv}(w)} = \frac{1}{H(w)} \frac{|H(w)|^2}{|H(w)|^2 + \frac{\phi_{vv}(w)}{\phi_{uu}(w)}} \quad (2.27)$$

Cette expression peut être encore écrite sous forme :

$$L(w) = \frac{1}{H(w)} W(w) \quad (2.28)$$

avec :

$$W(w) = \frac{|H(w)|^2}{|H(w)|^2 + \frac{\phi_{vv}(w)}{\phi_{uu}(w)}} \quad (2.29)$$

D'après (2.28), on remarque que la réponse du filtre inverse idéal étant modifiée par la fonction $W(w)$ qui est un genre de préfiltrage du signal y. Ce qui nous permettra même dans le cas de pseudo- inversion d'appliquer cette technique de préfiltrage optimal. Le filtre de Wiener permet d'améliorer la solution des Moindres carrés et remédier à l'effet du mauvais conditionnement du filtre inverse.

On remarque aussi, d'après l'équation (2.29) dans le cas d'absence de bruits de mesure ($\phi_{vv}(w)$ =0), le filtre de Wiener (2.28) n'est autre que le filtre inverse. Par conséquent, en présence du bruit de mesure le terme $\frac{\phi_{vv}(w)}{\phi_{uu}(w)}$ permet au filtre de Wiener d'être défini même en dans le cas d'existence des valeurs singulières du filtre H. Or cette méthode suppose que les densités spectrales de puissance du signal à restaurer et du bruit de mesure sont parfaitement connues.

II 4 Résultats et commentaires :

L'utilisation du filtre de Wiener améliore la solution des Moindres Carrés (§ III.2) et remédie à l'effet du mauvais conditionnement du filtre inverse. Toutefois, ces avantages se voient limitées lorsque le rapport signal à bruit diminué. En particulier, ce filtre ne permet pas d'améliorer la qualité visuelle d'une image. Hunt explique ceci par la structure linéaire du filtre de Wiener qui à tendance à se comporter en filtre passe-bas vis à vis de l'image entière. Or le système visuel humain (SVH) qui perçoit l'image, est

de structure non linéaire logarithmique et représente un filtre intermédiaire entre un passe-bas et passe-haut.

Les résultats obtenus, nous montrent que le filtre de Wiener donne des solutions acceptables pour des signaux faiblement bruités (voir figures (2.3) et (2.4)) d'une part et d'autre ce filtre ne permet une bonne restitution pour des signaux bruités (voir figures (2.5) et (2.6)).

Représentation des signaux utilisés :

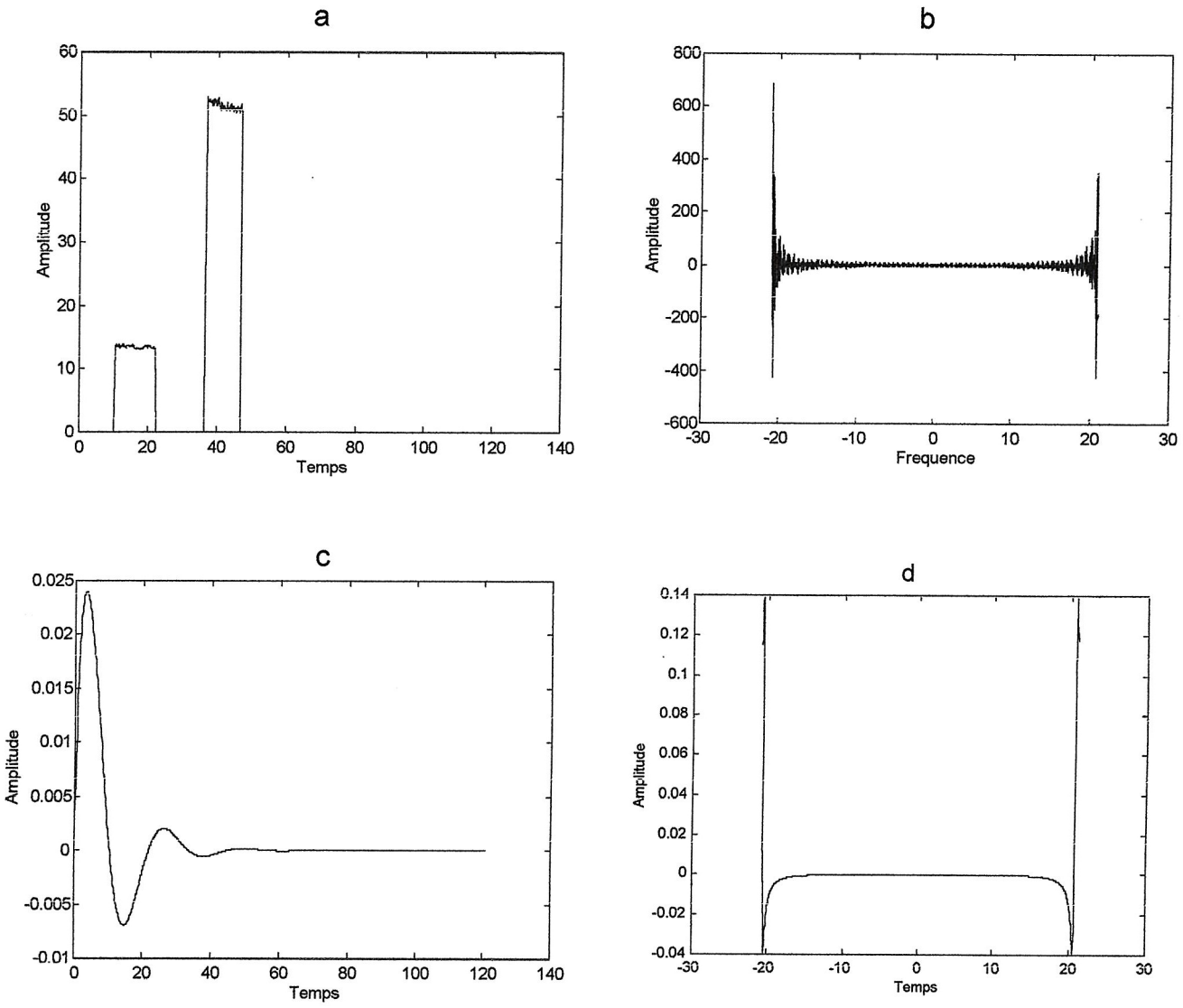


Figure 2.2 : Représentation des signaux utilisés

a- Signal test (signal original).
b- Spectre du signal test
c- Réponse impulsionnelle
d- Spectre de la réponse impulsionnelle

Restauration par filtre de Wiener :
Pour SNR =60 db, 20 db, 10 db

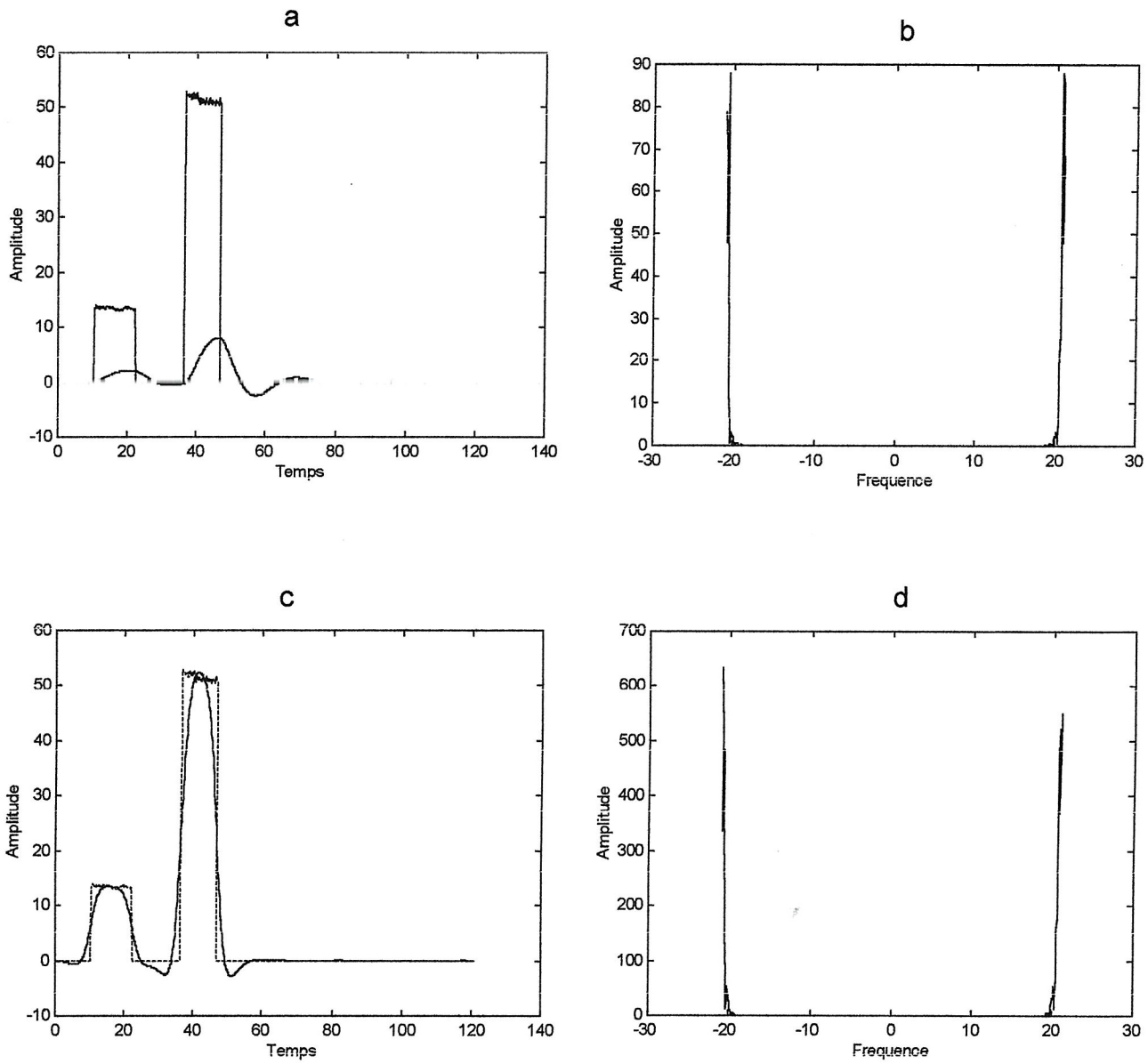


Figure 2.3 : Restauration par filtre de Wiener pour un SNR=60 db

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré

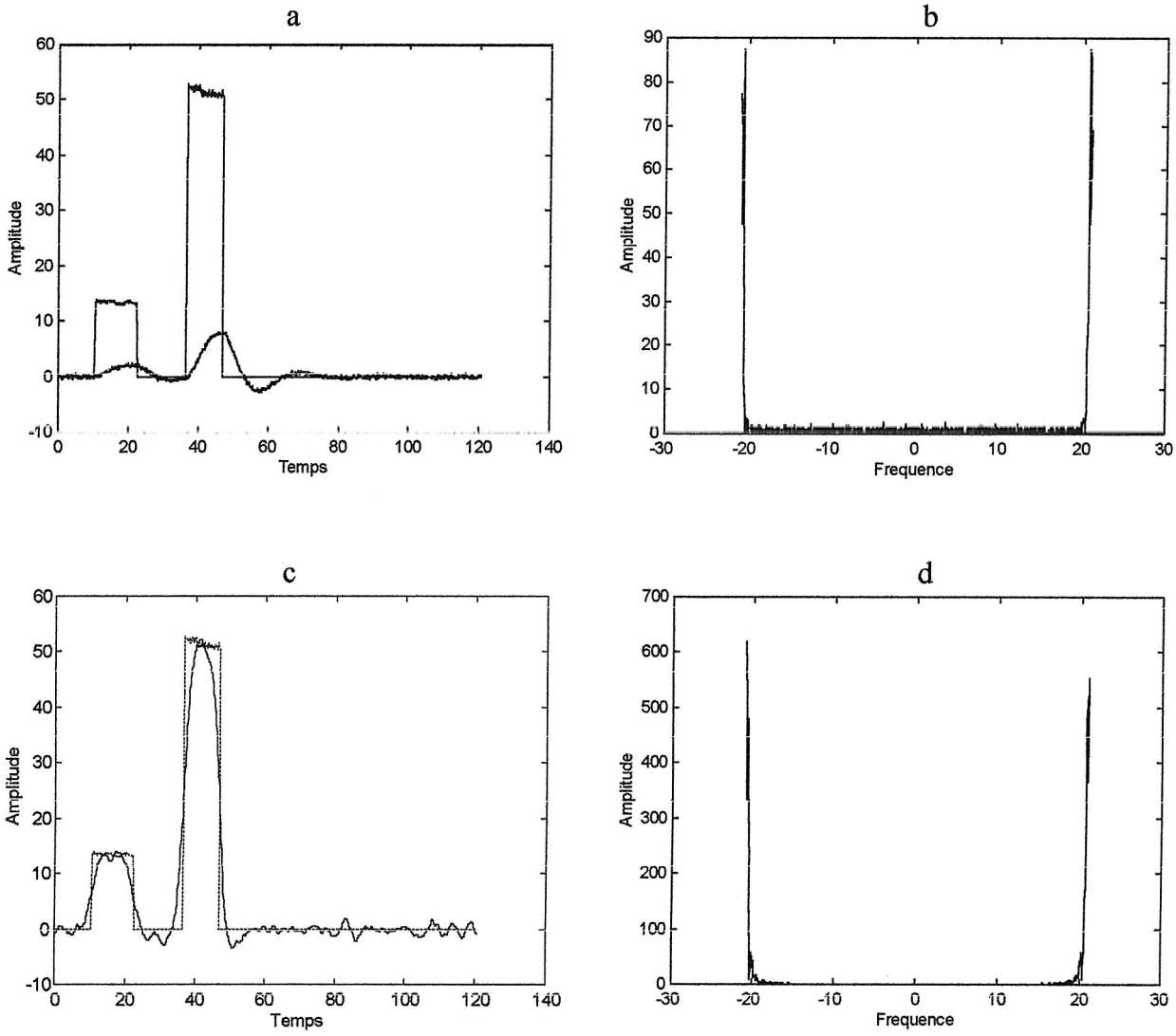


Figure 2.5 : Restauration par filtre de Wiener pour un SNR=20 db

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré

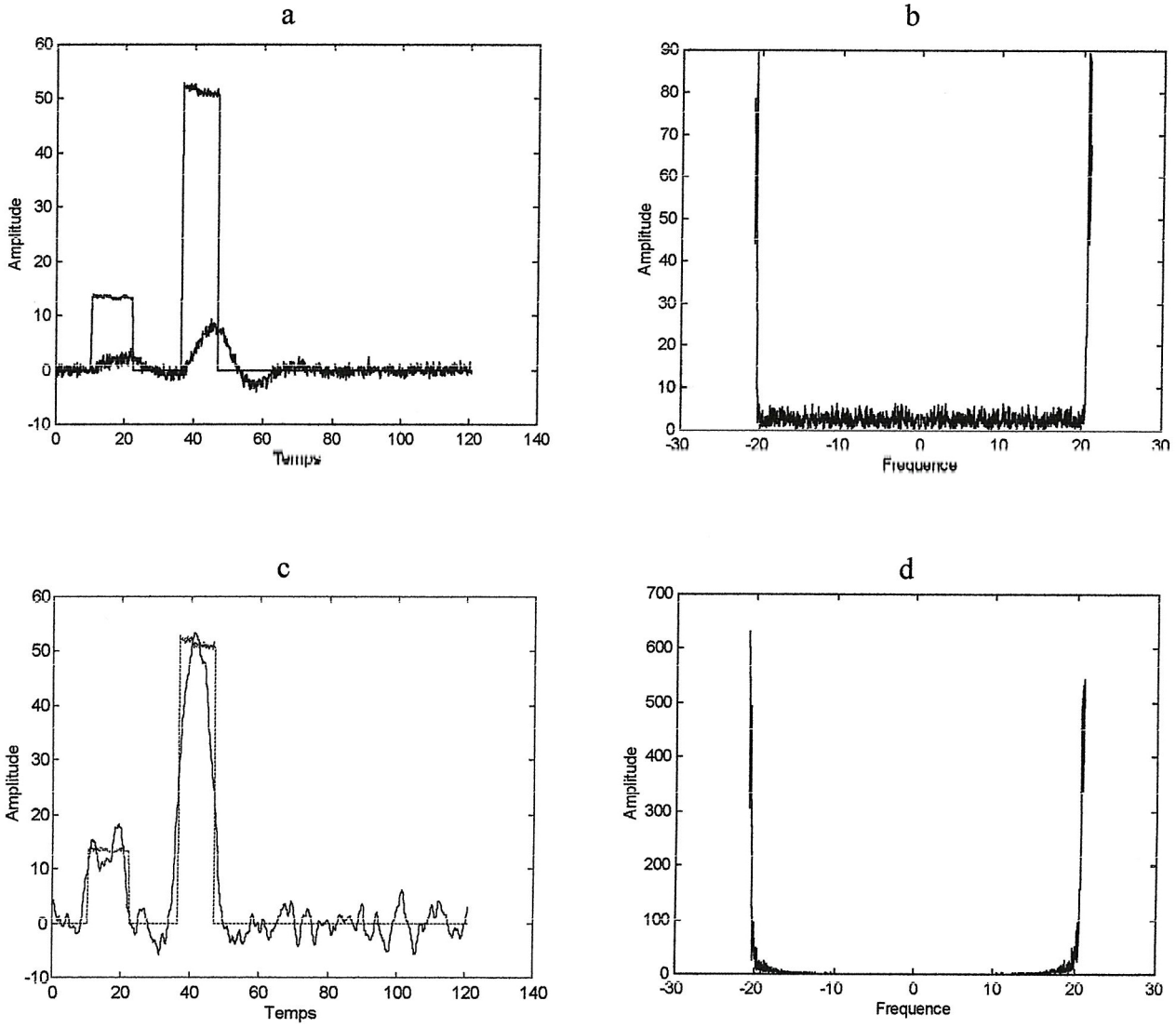


Figure 2.6 : Restauration par filtre de Wiener pour un SNR=10 db

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré

Chapitre 3

Approche déterministe

III 1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous essayons de montrer quelques méthodes utilisées pour résoudre le problème de la déconvolution pour d'une part donner une idée plus claire sur les recherches et différentes approches par lesquelles les auteurs ont traité le problème inverse, et d'autre part pour situer les méthodes aux quelles nous nous somme consacré.

III 2 Méthode de Moindres Carrés :

Soit le système d'équations linéaires à résoudre suivant :

$$Y_m = H\,u + v \tag{3.1}$$

- u : vecteur de dimension N contenant l'ensemble des inconnus du problème.
- y_m : vecteur de dimension M contenant l'ensemble des observations.
- v : vecteur de dimension M contenant les termes correspondant au bruit de mesure sur les observations et de matrice de covariance $\sigma_v^2\, I$.
- H : matrice circulante de Toelpitz de dimension MxN connue, ne dépendant que du noyau du système de mesure.

Cette méthode consiste à déterminer une estimée $\hat{u}$ de u qui minimise un critère quadratique des erreurs résiduelles $(y_m - H\,u)$:

$$J(u) = \|y_m - H\,u\|^2 = (y - Hu)'(y - Hu) \tag{3.2}$$

avec : $\hat{u} = arg\,min\{J(u)\}$

Si la matrice $(H'H)$ est non singulière, on obtient :

$$\hat{u} = (H'H)^{-1} H\, y_m \tag{3.3}$$

Les étapes permettant d'aboutir à l'équation (3.3) sont établies par Demoment [10]. On cherche une solution $\hat{u}$ qui vérifie (3.2) et qui correspond à un meilleur ajustement aux données, si dans (3.3) la matrice est inversible, la solution $\hat{u}$ est unique et est dite estimée des Moindres Carrés. Toutefois, la matrice H et $H^{'} H$ sont en général mal conditionnées, la solution est alors instable.

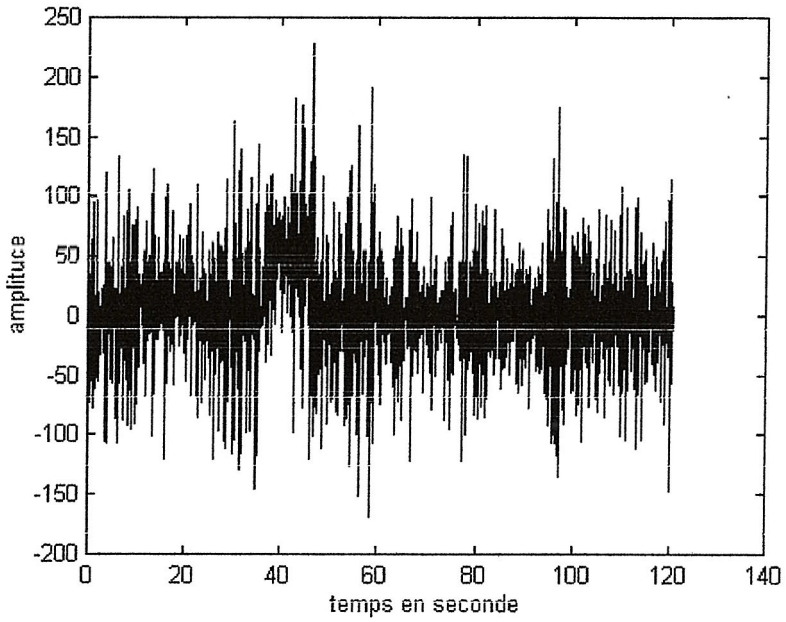


Figure 3.1 : Signal restauré par la méthode de Moindre Carré
avec un SNR = 50 db

L'utilisation de la méthode des Moindres Carrés pour restaurer des signaux bruités conduit à des solutions instables. Donc cette méthode se prête mal dans le cas des signaux bruités. Comme le montre Demoment [10], ces insuffisantes sont liées à la nature du problème de déconvolution qui est un problème mal posé. D'où la nécessité, de l'utilisation des techniques de régularisations afin de stabiliser la solution de la norme minimale. La solution est obtenue par cette méthode résulte d'une combinaison d'informations relatives aux données et à l'a priori. La méthode la plus souvent utilisée est celle de Tikhonov-Miller [11].

III 3 Méthode de Tikhonov-Miller :

Cette méthode est utilisée pour régulariser un problème mal posé et de le rendre bien posé, en introduisant une information sur la solution. Cette approche consiste à estimer au mieux le signal original à partir du signal enregistré, en minimisant un critère de qualité quadratique.

La solution unique obtenue par cette approche satisfait simultanément les deux conditions suivantes :

$$\|C\hat{u}\|^2 \leq E^2 \tag{3.4}$$

$$\|y - H\,u\|^2 \leq \varepsilon^2 \tag{3.5}$$

Où $||.||$ désigne une norme L_2, E est une constante prédéfinie et C un opérateur linéaire qui traduit une information de douceur. ε est une estimation sur la précision des données. L'estimé qui résulte de l'intersection de deux ensembles décrits par (3.4) et (3.5) est donnée par la minimisation de la fonctionnelle suivant :

$$J(u,\alpha) = \|y - H\,u\|^2 + \alpha\|C\,u\|^2 \tag{3.6}$$

où : $$\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2$$

ε et E sont inconnus. Ces deux constantes sont choisies de façon à ce que l'intersection de ces deux ensembles ne soit pas vide. On montre que la valeur de α peut être déterminée par une estimation du rapport signal à bruit, [18], [19]. La solution s'écrit alors sous la forme explicite suivante :

$$\hat{u} = \left(H'H + \alpha C'\,C\right)^{-1} H\,y \tag{3.7}$$

Si la matrice $(H'H+\alpha C'C)$ est inversible, la solution donnée par cette approche est acceptable.

L'opérateur C est choisi de manière à améliorer le conditionnement de H et permettre l'inversion dans (3.7), il doit donc se comporter comme un filtre passe-haut afin de

contrer l'effet passe-bas dû au système de dégradation. Cet opérateur doit avoir d'une certaine façon une répartition spectrale inverse de celle de H. Mais la solution obtenue nécessite une inversion directe d'une matrice de dimension élevée, d'où un temps de calcule très important. Pour surmonter à ce problème, on propose d'utiliser l'approche de poursuite qui résolue dans le cadre de la commande optimale dans le problème de déconvolution.

III 4 Application de la théorie de la commande au problème de la déconvolution :

Cette approche est basée sur la synthèse d'un signal $\hat{u}(t)$ qui convolué avec le la réponse impulsoionnelle $h(t)$ donnera une bonne approximation $\hat{y}(t)$ du signal enregistré $y(t)$, nous avons donc :

$$\hat{y}(t) = h(t) * \hat{u}(t) \tag{3.8}$$

et soit $\varepsilon(t)$; l'erreur d'estimation commise sur $y(t)$:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \tag{3.9}$$

où $y(t)$ est le vecteur de sortie désiré (que l'on poursuit).

Supposons que le processus de mesure soit décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.10}$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état appartenant à R^n

$$\begin{cases} A \in R^{n \times n} \\ B \in R^{n \times 1} \\ C \in R^{1 \times n} \end{cases} \tag{3.11}$$

Il est clair que la solution du problème de commande optimale dépend étroitement du choix du critère de performance J. Or, bien souvent, on ne trouve pas la solution analytique, même pour les systèmes linéaires. Par contre, il est

intéressant de noter que l'utilisation d'un critère quadratique pour J donne une solution élégante et simple au problème de poursuite que nous traitons.

Soit $[0, T]$ l'intervalle de temps pendant lequel est effectue la poursuite du vecteur y par $\hat{y}$, la forme la plus générale pour le critère J sera alors :

$$J(\hat{u}) = \int_0^T \left(\varepsilon' Q\, \varepsilon + \hat{u}'\, R\, \hat{u}\right) dt \qquad (3.12)$$

où :

- Q est une matrice $m \times \mathrm{m}$ semi-définie positive.
- R est une matrice positive.

avec : $R = \alpha.I$ et $Q = q.I$

Nous étudierons cette optimisation sans contrainte sur la commande $\hat{u}$ et sur le vecteur d'état x. L'absence de contrainte sur la commande $\hat{u}$ pouvant entraîner de grandes valeurs de celle-ci. Donc son introduction de façon explicite dans le critère J est nécessaire.

La recherche de la loi de la commande optimale peut se faire à l'aide de la programmation dynamique de Bellman ou encore en utilisant le principe du maximum. L'utilisation du principe du maximum conduit à définir une fonction scalaire appelée l'hamiltonien H, qui est dans ce cas :

$$H = \varepsilon'\, Q\, \varepsilon + \hat{u}'\, R\, \hat{u} + p'\left(A\underline{x} + B\underline{\hat{u}}\right) \qquad (3.13)$$

où :

p est le vecteur adjoint de n éléments.

Dans le cas scalaire (Q= q, R= α), on trouve :

Sur la trajectoire optimale, on à :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial H}{\partial p} & (a) \\ \\ \dot{p}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x} & (b) \end{cases} \qquad \forall t \in [0 \;\; T] \qquad (3.14)$$

La commande devient vérifier sur la trajectoire optimale la relation :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \alpha\,\hat{u} + B'p = 0 \qquad (3.15)$$

On peut ainsi déduire que :

$$\hat{u}(t) = -\alpha^{-1}\,B'p \qquad (3.16)$$

La matrice $\alpha(t)$ étant définie positive, l'existence de α^{-1}est assurée d'une part, et d'autre part, nous avons effectivement un minimum, puisque :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \alpha(t) > 0 \qquad (3.17)$$

et la condition (3.14.b)donne :

$$\dot{p} = -C'\,q\,C\,x - A'\,p + C'\,q\,y \qquad (3.18)$$

à partir des équations (3.13) et (3.14.a), on obtient la relation :

$$\dot{x} = A\,x - B\,\alpha^{-1}\,B'\,p \qquad (3.19)$$

Les relations (3.14) constituent un système de 2n équations différentielles linéaires variantes. La solution de ce système donne l'unique solution du problème de poursuite :

$$\hat{u}(t) = \alpha^{-1}\,B'\,(f - K\,x) \qquad (3.20)$$

où la matrice symétrique définie positive K est la solution de l'équation de Riccati :

$$\dot{K} = -KA - A'K + KB\alpha^{-1}B'K - C'qC \qquad (3.21)$$

avec la condition limite : $K(T)$ =[0]

Et : $$\dot{f} = -\left(A - B\alpha^{-1}B'K\right)'\,f - C'\,q\,y \qquad (3.22)$$

avec $f[T]$ =[0]

La figure (3.2)montre la structure du système optimal correspondant. Le signal $\hat{u}$ représente donc une estimation de u. Ainsi cette procédure permet d'opérer la déconvolution dans le cas de systèmes fixes ou variables sans modification de l'algorithme. La solution de Riccati tend très vite vers la solution stationnaire ; un tel

comportement, nous permet de calculer la valeur stationnaire de la matrice $K(t)$ et de l'utiliser comme telle dans les autres équations de calcul de la commande optimale. Une telle procédure permet d'économiser beaucoup de l'espace mémoire, et surtout le temps de calcul.

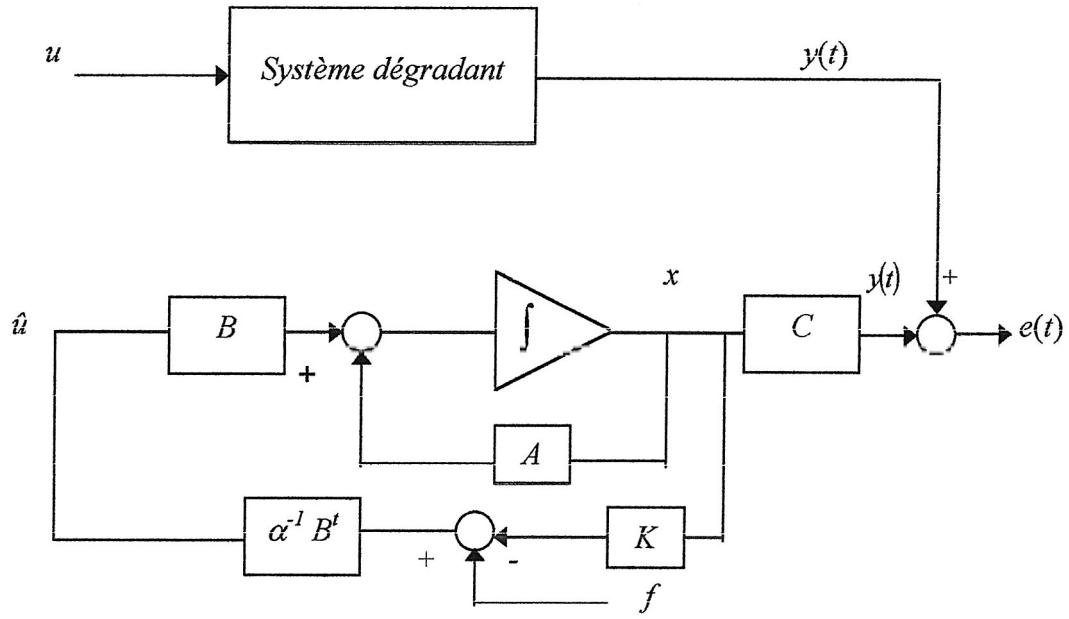


Figure 3.2 : Structure du système optimal pour la déconvolution

Quant aux paramètres q et α, coefficients de pondération respectifs de l'erreur ε et l'entrée u, leurs choix permet un dosage entre une erreur faible et une commande pas trop grande. Ainsi un ajustement de q et α est fait pour essais en simulation numérique sachant que moins on pondère $\hat{u}(t)$ (α petit), plus on laisse la possibilité à ce signal d'avoir une forte amplitude ; seulement il est claire qu'il existe une limite au-delà de laquelle on ne peut aller ; ceci suppose que l'opérateur à une idée a priori du signal recherché.

Remarque :

Soit le processus de mesure décrit par les équations d'états (3.10), on doit minimiser le critère :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\varepsilon' \, q \, \varepsilon + \hat{u}' \, \alpha \, \hat{u}\right) dt \qquad (3.23)$$

Donc l'hamiltonien est donnée par :

$$H = \frac{1}{2}\left(\varepsilon' \, q \, \varepsilon + \hat{u}' \, \alpha \, \hat{u}\right) + p'\left(Ax + B\hat{u}\right) \tag{3.24}$$

Sur la trajectoire optimale :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial H}{\partial p^*} \\ \dot{p}^* = -\dfrac{\partial H}{\partial x^*} \end{cases} \tag{3.25}$$

La commande devant vérifier sur la trajectoire optimale, la relation :

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{u}} = 0 \Rightarrow \hat{u} = -\alpha^{-1} B' p^* \tag{3.26}$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = Ax^* - B\alpha^{-1}B'p^* \\ \dot{p}^* = -C \, q \, C' \, x^* \end{cases} \tag{3.27}$$

Où aussi, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{p}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B\alpha^{-1}B' \\ -C \, q \, C' & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ p^* \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

On pose :

$$M = \begin{bmatrix} A & -B\alpha^{-1}B' \\ -C \, q \, C' & -A' \end{bmatrix}$$

Soit v, w les vecteurs propres de la matrice M, donc :

$$M \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \Delta \tag{3.29}$$

$\Delta = diag\,(\lambda_i)^n_{i=1}$

λ_i sont les valeurs propres de la matrice M

En remplaçant la matrice M, l'équation (3.29)devient :

$$\begin{cases} A v - B \alpha^{-1} B' w = v \Delta & (a) \\ -C q C' v - A' w = w \Delta & (b) \end{cases} \tag{3.30}$$

Si, on fait multiplie l'équation (3.30.a) par (wv^{-1}), on trouve l'équation suivante :

$$w v^{-1} A v - w v^{-1} B \alpha^{-1} B' w = w v^{-1} v \Delta \tag{3.31}$$

En multipliant l'équation (3.31)par v^{-1}, on obtient :

$$w v^{-1} A - w v^{-1} B \alpha^{-1} B' w v^{-1} = w \Delta v^{-1} \tag{3.32}$$

multipliant l'équation (3.30.b)par v^{-1}, l'équation devient :

$$C q C' - A' w v^{-1} = w \Delta v^{-1} \tag{3.33}$$

En faisant l'égalité entre les deux équations (3.32)et (3.33), on trouve :

$$w v^{-1} A - w v^{-1} B \alpha^{-1} B' w v^{-1} = -C q C' - A' w v^{-1}$$

Où :

$$w v^{-1} A + A' w v^{-1} - w v^{-1} B \alpha^{-1} B' w v^{-1} + C q C' = 0 \tag{3.34}$$

On pose : $K = wv^{-1}$

L'équation (3.34)devient :

$$K A + A' K - K B \alpha^{-1} B' K + C q C' = 0 \tag{3.35}$$

L'équation (3.35)n'est autre que l'équation de Riccati, tel que K est la solution de cette équation.

III 5 Méthodes itératives :

Ce sont des méthodes itératives de déconvolution, découlent toutes d'une même forme proposée initialement par Schafer et Prost :

$$u_k = u_{k-1} + F\{\varepsilon_{k-1}\} \tag{3.36}$$

On va présenter rapidement quelques méthodes dérivées de cette équation.

III 5.1 Méthode de Van Cittert :

Cette méthode proposée initialement par Van Cittert, permet d'approcher d'une façon itérative le filtre inverse $1/H(w)$ même dans le cas d'existence de singularités. La formule de récurrence est définie à la $k^{ième}$ itération par :

$$\hat{u}_k = \hat{u}_{k-1} + (y - h * \hat{u}_{k-1}) \tag{3.37}$$

La première estimation $\hat{u}_0$, étant le signal qui porte plus d'information sur $u(t)$ soit le signal $y(t)$ lui-même.

Nous obtenons donc :

$$\hat{u}_0 = y \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= y + (y - h * y) \\ &= y + y * (\delta - h) \end{aligned} \tag{3.39}$$

On pose : $e_1 = y * (\delta - h)$ (3.40)

On obtient :

$$\hat{u}_1 = y + e_1 \tag{3.41}$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 &= \hat{u}_1 + (y - h * u_1) \\ &= y + e_1 + (y - h * (y + e_1)) \\ &= y + e_1 + (y - h * y - h * e_1) \\ &= y + e_1 + (y * (\delta - h) - h * e_1) \\ &= y + e_1 + e_1 * (\delta - h) \end{aligned} \tag{3.42}$$

En posant par analogie avec (3.40) :

$$e_2 = e_1 * (\delta - h) \tag{3.43}$$

On obtient :

$$\hat{u}_2 = y + e_1 + e_2 \tag{3.44}$$

Enfin, on obtient par récurrence :

$$\hat{u}_k = y + e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_k \tag{3.45}$$

Avec :

$$e_k = e_{k-1} * (\delta - h) \tag{3.46}$$

et $e_0 - y$

En prenant la transformée de Fourier de l'équation (3.45), on trouve :

$$\hat{U}_k(w) = Y(w) + E_1(w) + E_2(w) + ... + E_k(w) \tag{3.47}$$

avec :

$$E_1(w) = Y(w)(1 - H(w)) \tag{3.48}$$

$$E_2(w) = E_1(w)(1 - H(w))$$

$$E_2(w) = Y(w)(1 - H(w))^2 \tag{3.49}$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned} \hat{U}_k(w) &= Y(w)\left(1 + (1 - H(w)) + (1 - H(w))^2 + ... + (1 - H(w))^k\right) \\ &= Y(w) R_k(w) \end{aligned} \tag{3.50}$$

avec :

$$R_k(w) = 1 + (1 - H(w)) + (1 - H(w))^2 + (1 - H(w))^3 + ... + (1 - H(w))^k \tag{3.51}$$

$R_k(w)$ peut alors s'interpréter comme la réponse fréquentielle du filtre inverse du k^e ordre. Il apparaît clairement que $R_k(w)$ n'est autre qu'une somme partielle d'une série géométrique de raison $(1-H)$, on à donc :

$$\begin{cases} \lim \hat{U}_k(w) = \dfrac{1}{1-(1-H)} = \dfrac{Y}{H} \\ k \to +\infty \\ Si\ |1 - H| < 1 \qquad \forall\, w \in R \end{cases} \tag{3.52}$$

Cette méthode peut se traduire à l'aide de la représentation matricielle ; ainsi, l'équation (3.37) peut s'écrire :

$$[\hat{U}_k] = [\hat{U}_{k-1}] + [Y] - [H][\hat{U}_{k-1}] \tag{3.53}$$

avec : $[\hat{U}_0]=[Y]$

III 5.2 Méthode de Van Cittert modifier :

Thomas [22] à introduit une modification rendant la condition de convergence plus allégée et facilement vérifiable ; en effet il a ajouté en cascade avec le système de réponse $h(t)$ un autre système de réponse $h(-t)$, puis il applique la méthode précédente sur la sortie de ce dernier, l'équation (3.37) devient :

$$\hat{u}_k(t)=\hat{u}_{k-1}(t)+(x(t)-g(t)*\hat{u}_{k-1}(t)) \tag{3.54}$$

avec : $x(t)=y(t)*h(-t)$ et $g(t)=h(t)*h(-t)$

et la condition de convergence devient :

$$\left|1-|G(w)|\right|<1\Rightarrow\left|1-|H(w)|^2\right|<1$$

tout en remarquant que G(w) est réel.

III 5.3 Méthode de Singh :

Singh et Al, ont procédé par une autre approche. On disant que la $k^{ième}$ estimée de u_k, n'est autre qu'une transformation de la valeur réelle du signal u, ce qui nous permet d'écrire :

$$\hat{U}_k(w)=H_k(w)U(w) \tag{3.55}$$

avec : $\hat{U}_0(w)=Y(w)$ et $H_0(w)=H(w)$

Ils ont ainsi élaboré l'algorithme suivant :

$$\hat{U}_{k+1}(w)=(1+B_k(w))\hat{U}_k(w) \tag{3.56}$$

$$B_{k+1}(w)=(B_k(w))^2 \tag{3.57}$$

Avec : $B_k(w)=1-H_k(w)$

Par analogie à(3.50), l'équation (3.56) peut être écrite :

$$\hat{U}_0(w)=Y(w)$$

$$\hat{U}_k(w) = Y(w)\left(1 + (1 - H(w)) + (1 - H(w))^2 + (1 - H(w))^3 + \ldots + (1 - H(w))^N\right) \quad (3.58)$$

avec : $$N = \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} \quad (3.59)$$

On voit que l'expression (3.58)est une progression géométrique contenant plus de termes que (3.50), elle permet donc plus de précision pour l'estimation du filtre inverse et une convergence plus rapide à la solution désirée que la méthode de Van-Cittert qui est de convergence linéaire. La vitesse de convergence de l'algorithme de Singh est quadratique, donc c'est un algorithme puissant.

A titre d'exemple, remarquons que pour le même membre de termes dans les expressions (3.50) et (3.58), la relation (3.59) montre que l'itération de Singh nécessite seulement N itérations, telles que :

$$N = 1 + log_2 k \quad (3.60)$$

Où log_2 est le logarithme en base 2 et k le nombre d'itérations que nécessite l'algorithme de Van-Cittert.

Toutefois cette technique a les même défauts que la méthode de Van-Cittert, et il serait intéressant d'améliorer sa convergence par la méthode de Thomas cité plus haut.

III 6 Méthodes d'optimisations :

Rappelons l'équation de convolution discrète :

$$y(n) = \sum_{m=1}^{N} h(n-m)u(m) \quad (3.61)$$

Sous forme matricielle, on peut écrire :

$$[y] = [H][u] \quad (3.62)$$

Le résidu défini par :

$$r = y - H\,u \quad (3.63)$$

La résolution du système de (3.62) par les méthodes d'optimisations visent à annuler le résidu. Pour ce faire, on cherche le minimum de son énergie. C'est donc un problème de la programmation non linéaire, on utilise la méthode de gradient ou de gradient conjugué pour résoudre ce problème.

L'équation itérative de base est :

$$u_k = u_{k-1} + \mu_k d_k \tag{3.64}$$

avec d_k est le vecteur de correction et μ_k est un coefficient d'accélération.
L'utilisation des méthodes d'optimisations, nous permet de déterminer les valeurs de d_k et μ_k minimisant certains critère. En effet, une grande valeur de ceux ci peut donner un u_k dépassant trop la valeur exacte, de même une petite valeur freine la vitesse de convergence ; les valeurs optimales vont alors optimiser la vitesse de convergence.

III 6.1 Minimisation de l'énergie de l'erreur :

L'énergie de l'erreur r est définie par le carré de la norme :

$$\varphi(u_k) = \|r_k\|^2 = \|y - H\, u_k\|^2 \tag{3.65}$$

On détermine les valeurs μ_k et d_k par la méthode du gradient à pas optimal.

a- Détermination de μ_k optimal :

Soit un vecteur μ_k donné, la valeur optimale de μ_k est obtenue par :

$$\frac{\partial \varphi(u_{k+1})}{\partial \mu_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi(u_k + \mu_k d_k)}{\partial \mu_k} = 0 \tag{3.66}$$

Sachant que :

$$r_k = y - H\, u_k$$
$$\varphi(u_k) = \|r_k\|^2$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}\varphi(u_{k+1}) &= \|r_{k+1}\|^2 = \|y - H\,u_{k+1}\|^2 = (y - H\,u_{k+1})'(y - H\,u_{k+1}) \\ &= (y - H(u_k + \mu_k\,d_k))'W(y - H(u_k + \mu_k\,d_k)) \\ &= (y - H\,u_k - H\,\mu_k\,d_k)'W(y - H\,u_k - H\,\mu_k\,d_k) \\ &= (r_k - H\,\mu_k\,d_k)'W(r_k - H\,\mu_k\,d_k)\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(u_{k+1})}{\partial\mu_k} &= (-H\,d_k)'W\,r_k\,(r_k - H\,\mu_k\,d_k) + (r_k - H\,\mu_k\,d_k)'W\,(-H\,d_k) \\ &= (-H\,d_k)'W\,r_k + \mu_k\,(H\,d_k)'W\,H\,d_k - r_k'W\,H\,d_k + \mu_k\,(H\,d_k)'W\,(H\,d_k) \\ &= -(H\,d_k)'W\,r_k + \mu_k\,(H\,d_k)'W\,H\,d_k - r_k'W\,H\,d_k + \mu_k\,(H\,d_k)'W\,H\,d_k\end{aligned} \tag{3.68}$$

On montre que :

$$(H\,d_k)'W\,r_k = r_k'W\,H\,d_k \tag{3.69}$$

Alors :

$$\frac{\partial\varphi(u_{k+1})}{\partial\mu_k} = 2\left(-r_k'W\,H\,d_k + \mu_k\,(H\,d_k)'W\,H\,d_k\right) \tag{3.70}$$

la valeur optimale de μ_k est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(u_{k+1})}{\partial\mu_k} = 0 &\Rightarrow -r_k'W\,H\,d_k + \mu_k\,(H\,d_k)'W\,H\,d_k = 0 \\ &\Rightarrow r_k'W\,H\,d_k = \mu_k(H\,d_k)'W\,H\,d_k \\ &\Rightarrow \mu_k = \frac{r_k'W\,H\,d_k}{(H\,d_k)'W\,H\,d_k} = \frac{r_k'W\,H\,d_k}{d_k'H'W\,H\,d_k}\end{aligned} \tag{3.71}$$

Si $H'WH$ est une matrice positive, la valeur de μ_k est donnée par :

$$\mu_k = \frac{(r_k, W\,H\,d_k)}{(d_k, H'W\,H\,d_k)} \tag{3.72}$$

(. ,.) présente le produit scalaire.

b- Détermination du vecteur de restauration d_k :

La plus simple des solutions, est celle de la plus forte pente qui est donnée par le Gradient $\varphi(u_k)$:

$$\varphi(u_k) = \|r_k\|^2 = \|y - H\,u_k\|^2 = (y - H\,u_k)'\,W\,(y - H\,u_k) \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} d_k &= \overrightarrow{grad}\,(\varphi(u_k)) = -\frac{1}{2}\varphi(u_k) \\ &= -\frac{1}{2}\left(-H'\,W\,(y - H\,u_k) + (y - H\,u_k)'\,W\,(-H)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(-H'\,W\,r_k - r_k'\,W\,H\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(-2H'\,W\,r_k\right) = H'\,W\,r_k \end{aligned} \tag{3.74}$$

D'après l'équation (3.72), on a :

$$\mu_k = \frac{(r_k, W\,H\,d_k)}{(d_k, H'\,W\,H\,d_k)} = \frac{r_k'\,W\,H\,d_k}{(d_k, H'\,W\,H\,d_k)} \tag{3.75}$$

En utilisant (3.74) :

$$\mu_k = \frac{d_k'\,d_k}{(d_k, H'\,W\,H\,d_k)} = \frac{(d_k, d_k)}{(d_k, H'\,W\,H\,d_k)} \tag{3.76}$$

On peut mettre d_k sous forme itérative, en effet :

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= H'\,W\,r_{k+1} = H'\,W(y - H\,u_{k+1}) = H'\,W(y - H\,u_k - H\,\mu_k\,d_k) \\ &= H'\,W\,r_k - H'\,W\,H\,\mu_k\,d_k \\ d_{k+1} &= d_k - H'\,W\,H\,\mu_k\,d_k \\ \Rightarrow d_{k+1} &= d_k - \mu_k\,H'\,W\,H\,d_k \end{aligned} \tag{3.77}$$

L'initialisation peut être faite comme suit :

$$\begin{aligned} u_0 &= y \\ d_0 &= H'\,W\,(y - H\,u_0) = H'\,W\,r_0 \end{aligned}$$

c- Calcul de l'erreur de la restauration :

L'erreur à la $k^{ième}$ estimation est défini comme :

$$\varepsilon_k = \varphi(u_k) - \varphi(u_{k+1}) = \varphi(u_k) - \varphi(u_k + \mu_k\,d_k) \tag{3.78}$$

$$\varphi(u_k)=\|r_k\|^2=\|y-H\,u_k\|^2=(r_k,W\,r_k) \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}\varphi(u_{k+1})&=\|r_{k+1}\|^2=\|y-H\,u_{k+1}\|^2=(y-H(u_k+\mu_k\,d_k))'\,W\,(y-H(u_k+\mu_k\,d_k))\\&=(r_k-H\,\mu_k\,d_k)'\,W\,(r_k-H\,\mu_k\,d_k)=(r_k-\mu_k\,H\,d_k,W\,r_k-\mu_k\,W\,H\,d_k)\end{aligned} \tag{3.80}$$

alors l'erreur devient égale :

$$\begin{aligned}\varepsilon(k)&=\varphi(u_k)-\varphi(u_{k+1})=(r_k,W\,r_k)-(r_k-\mu_k\,H\,d_k,W\,r_k-\mu_k\,W\,H\,d_k)\\&=r_k'\,W\,r_k-(r_k-\mu_k\,H\,d_k)'\,(W\,r_k-\mu_k\,W\,H\,d_k)\\&=r_k'\,W\,r_k-r_k'\,W\,r_k+r_k'\,\mu_k\,W\,H\,d_k+\mu_k\,(H\,d_k)'\,W\,r_k-\mu_k^{\,2}\,(H\,d_k)\\&=-\mu_k^{\,2}\,(H\,d_k)'\,W\,H\,d_k+2\,\mu_k\,r_k'\,W\,H\,d_k\end{aligned} \tag{3.81}$$

En remplace les valeurs de μ_k et d_k dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_k&=-\frac{(d_k,d_k)}{(d_k,H'\,W\,H\,d_k)^2}(d_k,H'\,W\,H\,d_k)+2\frac{(d_k,d_k)}{(d_k,H'\,W\,H\,d_k)}(d_k,d_k)\\&=-\frac{(d_k,d_k)^2}{(d_k,H'\,W\,H\,d_k)}+2\frac{(d_k,d_k)^2}{(d_k,H'\,W\,H\,d_k)}\\&\Rightarrow\varepsilon(k)=\frac{(d_k,d_k)^2}{(d_k,H'\,W\,H\,d_k)}\end{aligned} \tag{3.82}$$

Remarque :

Lorsque l'on a le produit $d_k'\,d_k>0$ et la matrice $H'WH$ définie positive, le dénominateur de ε_k est positif, ce qui implique que l'énergie de l'erreur est toujours positive. On déduit alors qu'on s'approche de la solution à chaque itération et que l'énergie de l'erreur diminue de l'itération à l'autre.

III 6.2 Méthode du Gradient conjugué :

Afin d'améliorer la vitesse de convergence, les chercheurs ont proposés la méthode du gradient, en améliorant les directions de descente d_k par l'équation itérative :

$$d_{k+1}=W\,r_{k+1}+\sigma_{k+1}\,d_k \tag{3.83}$$

σ_k est une constante choisie pour qu'elle satisfasse l'équation :

$$(d_{k+1}, H\, d_k) = 0$$
$$(W\, r_{k+1} + \sigma_{k+1}\, d_k, H\, d_k) = 0 \qquad (3.84)$$
$$(W\, r_{k+1})' H\, d_k + \sigma_{k+1}\, d_k' H\, d_k = 0$$

$$\sigma_{k+1} = \frac{-(W\, r_{k+1})' H\, d_k}{d_k' H\, d_k} \qquad (3.85)$$

l'algorithme s'initialise avec :

$u_0 = y$ et $d_0 = W(y - Hu_0)$

les expressions élaborées avant, de μ_k et ε maintiennent leur premier forme, puisque d_k n'est plus égal à $W r_k$:

$$\mu_k = \frac{(d_k, W\, r_k)}{(d_k, H\, d_k)} \qquad (3.86)$$

et l'erreur : $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{(d_k, W\, r_k)^2}{(d_k, H\, d_k)}$ (3.87)

ainsi, on peut facilement montrer que :

$$r_{k+1} = r_k - \mu_k H\, d_k \qquad (3.88)$$

<u>Algorithme du Gradient conjugue :</u>

1. $u_0 = y \;\; ; \;\; d_0 = W(y - Hu_0)$
2. $\mu_k = \frac{(d_k, W\, r_k)}{(d_k, H\, d_k)}$
3. $u_{k+1} = u_k + \mu_k d_k$
4. $\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{(d_k, W\, r_k)^2}{(d_k, H\, d_k)}$ si satisfaisant goto 9
5. $r_{k+1} = r_k - \mu_k H\, d_k$
6. $\sigma_{k+1} = -\frac{(W\, r_{k+1}, H\, d_k)}{(d_k, H\, d_k)}$
7. $d_{k+1} = W\, r_{k+1} + \sigma_{k+1}\, d_k$
8. goto 2
9. fin

III 7 Déconvolution avec informations a priori :

Le problème majeur de la déconvolution est l'instabilité de la solution. Des techniques de régularisation du problème s'avèrent donc nécessaires. En d'autres termes, les méthodes que nous avons précédemment vu n'arrivent pas à restituer les composantes fréquentielles perdues (il existe une infinité de solutions possibles).

Parmi les techniques de régularisation, est l'introduction des connaissances a priori sur le signal désiré dans l'algorithme de déconvolution.

III 7.1 Définition des contraintes :

- **a- Contrainte de positivité :**

L'opérateur de positivité peut être considéré de deux façons comme suit :

$$P_1(u) = \begin{cases} u & si \quad u > 0 \\ 0 & si \quad u \leq 0 \end{cases} \tag{3.89}$$

Cet opérateur peut poser le problème de conservation d'énergie, pour cela on défini un second opérateur qui respecte cette propriété :

$$P_2(u) = \begin{cases} u & si\, u \geq 0 \\ -u & si\, u < 0 \end{cases} \tag{3.90}$$

- **<u>b- Contrainte de borne d'amplitude :</u>**

Le signal est limité en amplitude entre les bornes α et β, si on connaît ces données, on peut les introduire de la façon suivante :

$$A(u) = \begin{cases} u & si\, \alpha \leq u \leq \beta \\ \alpha & si\, u < \alpha \\ \beta & si\, u > \beta \end{cases} \tag{3.91}$$

- **<u>c- Contrainte de support borné :</u>**

Le signal est limité en support entre les bornes n_a et n_b, si on connaît ces bornes, on peut les introduites comme contraintes :

$$u(n) = T[u(n)] = \begin{cases} u(n) & -\infty < n_a \leq n \leq n_b < +\infty \\ 0 & Ailleurs \end{cases} \tag{3.92}$$

- **d- Association de contraintes :**

Les opérateurs de contraintes peuvent être associés en un seul opérateur. L'association d'opérateurs est commutative :

$$PT(u) = TP(u) = C_1(u) \tag{3.93}$$

avec : $P = P_1$ ou P_2

$$AT(u) = TA(u) = C_2(u) \tag{3.94}$$

- **e- Propriétés énergétiques des contraintes :**

Si C est un opérateur de contraintes, $C(u)$ a une énergie inférieure ou égale à celle de u. L'énergie est définie par :

$$\|Cu\|^2 = (Cu)^t(Cu) \tag{3.95}$$

Il est évident, d'après les définitions précédentes des contraintes que l'on a :

$$\|Cu\|^2 \leq \|u\|^2 \tag{3.96}$$

III 7.2 Déconvolution itérative avec contraintes :

- Méthode de Schafer et al :

Leurs propriétés sont basées sur la méthode d'approximation successive suivante :

$$u_k = F\,u_{k-1} = C\,u_{k-1} + \mu(y - H\,C\,u_{k-1}) = \mu\,y + G\,u_{k-1} \tag{3.97}$$

où :

$$G = (I - \mu H)C$$

C représente un (ou une combinaison) (d') opérateur(s) de contrainte(s).

μ un facteur qui permet de contrôler et d'accélérer la convergence de (3.97).

Comme beaucoup d'algorithmes, l'équation (3.97) est basée sur le principe de la méthode du point fixe. L'intérêt de ces algorithmes est dû à leur convergence théorique donné par le théorème des fonctions contractantes développées dans le cadre de l'analyse fonctionnelle.

On montre alors que l'équation (3.97) converge vers le point fixe de l'opérateur F, si celui-ci et par conséquent G sont contractants [20]. L'opérateur F est dit contractant si :

$$\forall k,l \ \forall u_k, u_l \ \|F u_k - F u_l\| \leq \rho \|u_k - u_l\| \tag{3.98}$$

avec $0 \leq \rho < 1$ ou ρ le rayon spectral de la matrice F [23].

Or d'après (3.97) :

$$\|F u_k - F u_l\| = \|G u_k - G u_l\| \tag{3.99}$$

G est donc contractant (ou doit être contractant).

Nous allons maintenant montrer que si F et G possèdent ces propriétés, l'équation (3.97) converge vers la solution du point fixe (ou la vraie solution u) de F :

$$\lim_{k \to \infty} u_k = u \tag{3.100}$$

Soit en considérant le vecteur d'erreur associé à la $k^{ième}$ itération :

$$\varepsilon_k = u_k - u \tag{3.101}$$

et sachant que u vérifie une équation similaire à(3.97), il s'ensuit que :

$$\varepsilon_k = G(u_{k-1} - u) = G \varepsilon_{k-1} \tag{3.102}$$

En faisant varier l'équation (3.102) de 1 à k, on aura finalement :

$$\varepsilon_k = G^k \varepsilon_0 \tag{3.103}$$

La convergence de (3.97) sera alors atteinte, si pour tous ε_0 on a :

$$\|\varepsilon_k\| = \|G^k \varepsilon_0\| \leq \rho \|\varepsilon_0\| \tag{3.104}$$

qui vérifiée pour tous ε_0 (pour $0 \leq \rho < 1$). Autrement dit, G doit être contractant.

On a alors démontré la convergence de (3.97), que l'on peut exprimer différemment par :

$$\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = \lim_{k \to \infty} G^k \varepsilon_0 = 0 \qquad \forall \varepsilon_0, u_0 \tag{3.105}$$

Lorsque G vérifie cette propriété et $u_0 = \mu y$, l'équation (3.97) converge vers la valeur finale suivante :

$$u_k = \left(I + G + G^2 + \ldots + G^k\right)u_0 = \left(I - G\right)^{-1}\left(I - G^{k-1}\right)u_0 \qquad (3.106)$$

D'où : $\lim u_k = \left(I - G\right)^{-1} u_0$ (3.107)

L'expression (3.106) dite solution principale en extrapolation spectrale [21], n'est pas simple de réalisation.

Dans le cas où G n'est pas contractant, deux senarii peuvent exister :

- Si G est non contractant ($\rho = 1$), l'équation (3.97) possède plusieurs points fixes et sa convergence ne peut être obtenue.
- Si G est strictement non contractant, l'équation (3.97) peut converger.

A titre d'illustration, considérons un exemple de combinaison de contraintes : non-négativité + support borné. Il est préférable de prendre dans ce cas la forme convolutive (3.97) :

$$u_k = \mu y + g_1 * PT\, u_{k-1} \qquad (3.108)$$

où $g_1 = (\delta - \mu h)$, δ la distribution de Dirac, P et T sont des opérateurs de contraintes de non-négativité et de support borné.

La convergence de l'équation (3.108) sera assurée si $g_1 * PT$ est contractant. Cette propriété est satisfaite si l'un des trois opérateurs est contractant.

D'autre part, si les deux contraintes sont vérifiées simultanément, il est évident que l'opérateur PT est non contractant. En règle générale la décomposition de deux ou plusieurs opérateurs non contractants, est non contractante [TOM 22].

Il suffit alors que g_1 soit contractant, ce qu'on peut traduire en fréquentiel par la condition :

$$\left|G_1(w)\right| < \left|1 - H(w)\right| < 1 \qquad (3.109)$$

Imaginons que $H(w)$ est la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure w_c et de gain unité :

$$H(w)=\begin{cases}1 & si\ |w|\le w_c\\ 0 & si\ |w|\ge w_c\end{cases} \qquad (3.110)$$

La condition (3.109) est alors satisfaire pour :

$$0<\mu<2 \quad \text{si} \quad |w|\le w_c \qquad (3.111)$$

Une propriété importante de l'opérateur g_1, déduite de (3-109) et de (3.111) s'obtient pour $\mu=1$:

$$G_1(w)=\begin{cases}0 & si\quad |w|\le w_c\\ 1 & si\quad |w|\ge w_c\end{cases} \qquad (3.112)$$

L'opérateur g_1 joue alors le rôle d'un filtre passe-haut. Il permet donc de reconstituer l'information perdue au passage à travers le filtre dégradant (H). On voit alors l'intérêt des méthodes itératives avec contraintes en extrapolation des signaux.

III 8 Résultats et commentaires :

Les résultats obtenus, nous montrent, la limitation de l'utilisation de la méthode du moindre carré pour restaurer le signal original. On voit clairement pour un signal dégradé bruité(voir figures (3.3) et (3.4)) donne une solution instable (le signal estimé est plus loin au signal réel). D'où l'impossibilité d'utiliser cette technique pour la déconvolution pour des signaux bruités, même pour des signaux faiblement bruités, l'approche de Tikhonov-Miller permet d'améliorer la solution au sens du moindre carré (voir figures (3.5) à (3.7)). Si le coefficient α possède une valeur faible proche de zéro, la solution sera plus proche de la meilleure solution, or, si les données sont bruitées, l'amplification excessive du bruit conduit à rejeter la solution. Plus α aura des valeurs élevées, plus la solution estimée sera lisse et le bruit est moins amplifié mais l'amplitude du signal restaurer est pénalisé . Pour cet raison, on cherche à trouver un compromis entre un signal qui ne sera pénalisé en amplitude d'une part et d'un bruit très faible d'autre part. Ce compromis est basé sur le choix de la valeur de α qui doit être choisi d'une façon à avoir un EMQ_r minimale. Réellement la valeur optimale du coefficient α sera déterminer après essais, en se basant sur un critère subjectif (critère visuel).

La méthode de commande optimale (voir figures (3.8) à (3.11)) permet de surmonter au problème de l'instabilité des solutions qui résultent d'une inversion d'une matrice. Cette approche peut être utilisée aussi dans le cas des systèmes variants. A fin d'évaluer les performances numériques des algorithmes utilisés et la qualité des résultats, nous avons considéré les critères d'erreurs quadratiques relatifs aux entrées pour différentes valeurs de SNR.

Remarque:

L'erreur moyenne quadratique relative aux entrées est donnée par :

$$EMQ_r = \frac{\| u - \hat{u} \|_2^2}{\| u \|_2^2}$$

Le rapport signal sur bruit est donné par la relation suivante :

$$SNR = 10 * log \frac{\| y \|_2^2}{\| v \|_2^2}$$

Type de déconvolueur	EMQ_r
Méthode de Moindre Carré	-
Méthode de Tikhonov-Miller	21 %
Méthode de Commande Optimale	18 %

EMQ_r pour SNR=10 db

Type de déconvolueur	EMQ_r
Méthode de Moindre Carré	-
Méthode de Tikhonov-Miller	18 %
Méthode de Commande Optimale	16 %

EMQ_r pour SNR=40 db

Type de déconvolueur	EMQ_r
Méthode de Moindre Carré	12 %
Méthode de Tikhonov-Miller	7 %
Méthode de Commande Optimale	6 %

EMQ_r pour SNR=70 db

D'après les résultats obtenus, on peut prendre comme conclusion :

En général, les signaux observés sont attachés des bruits, ce qui rend l'impossibilité d'utiliser la méthode de moindre carré pour estimer le signal original, alors que la méthode de Tikhonov-Miller reste utilisable pour tout système linéaire stationnaire causal ou non causal. Le problème de stationnarité est surmonter par l'approche de poursuite.

Pour éviter tout risque de l'instabilité des solutions dû aux bruits, il est conseiller d'effectuer l'opération de déconvolution en deux étapes :

- On commence par le filtrage pour réduire l'effet du bruit sur le signal observé.
- Puis, en passe à l'opération de restauration pour estimer le signal original.

Restauration par la méthode de Moindre Carrés avec SNR =70 db, 80 db

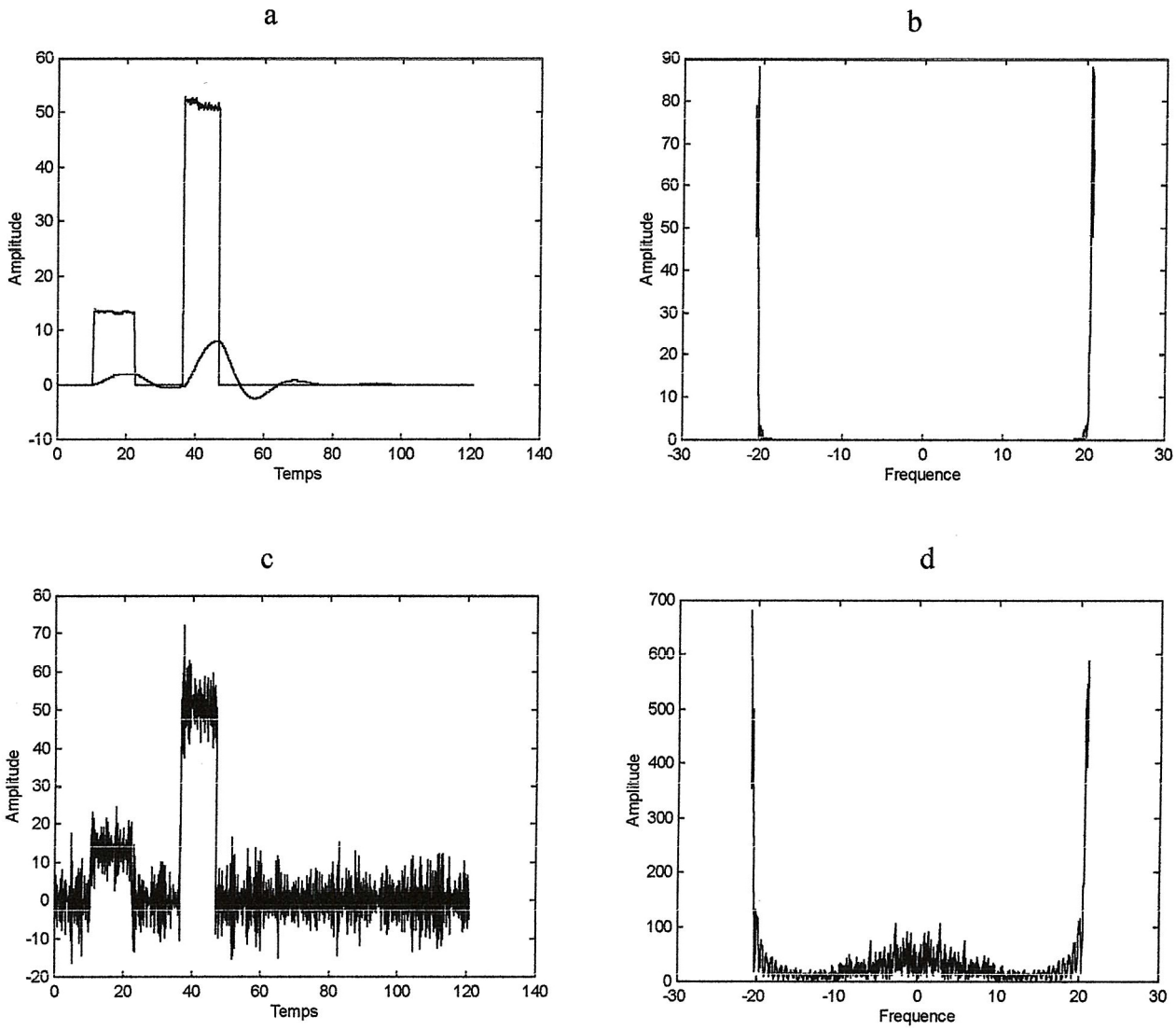


Figure 3.3 : Restauration par la méthode de Moindres Carrés pour SNR=70 db

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré

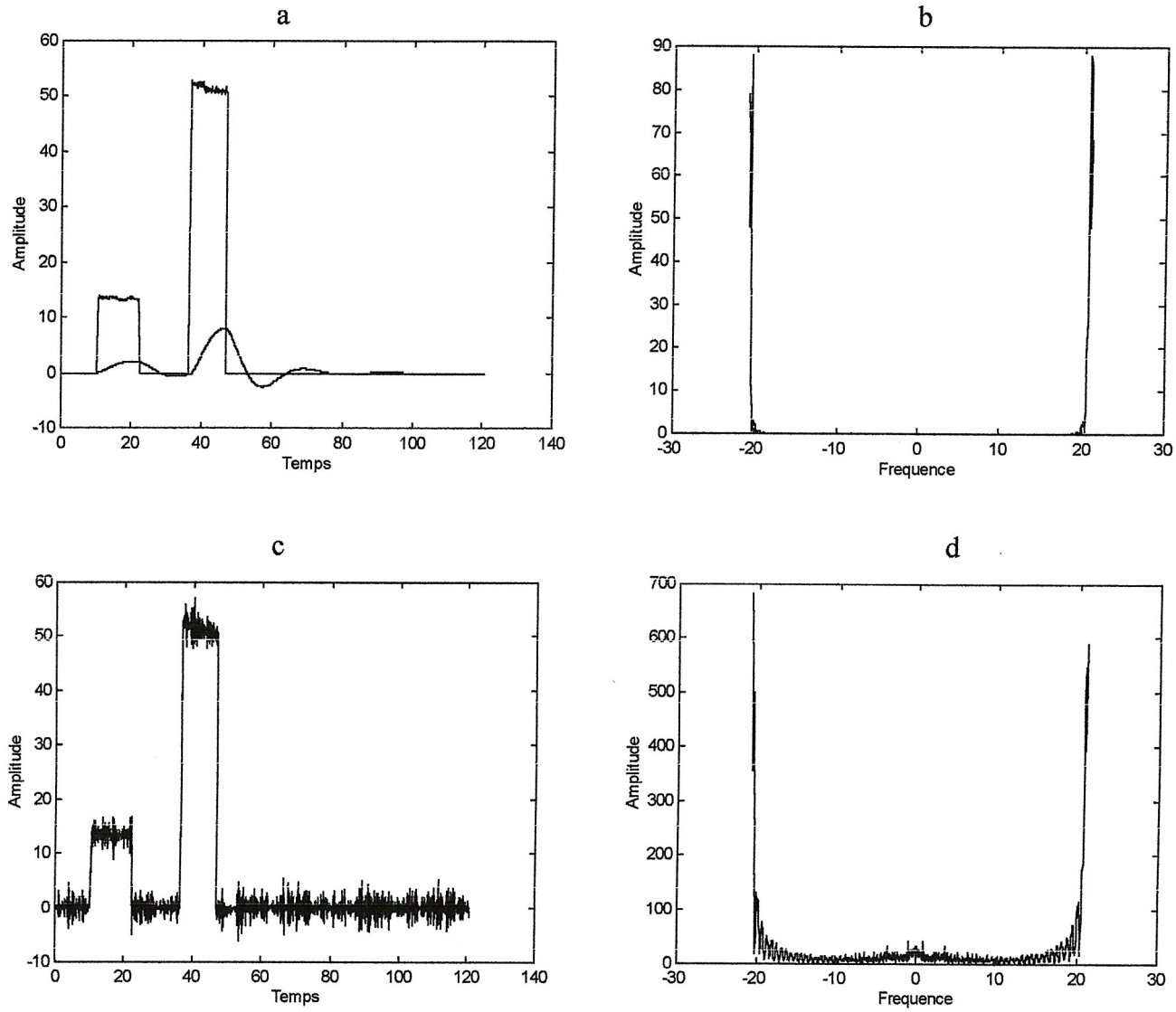


Figure 3.4 : Restauration par la méthode de Moindres Carrés pour SNR=80 db

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré

Restauration par la méthode de Tikhonov-Miller avec SNR =10 db, 70 db

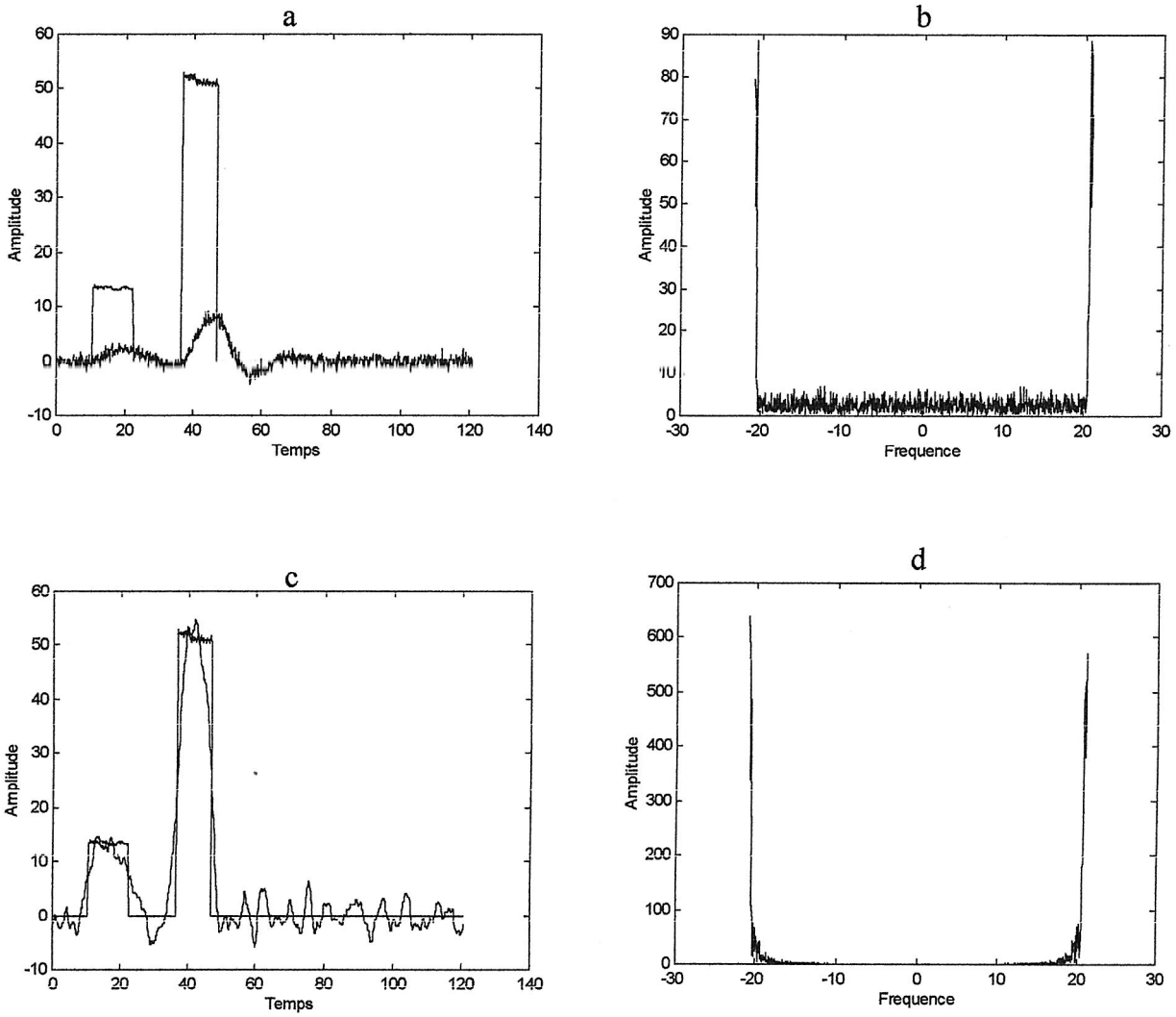


Figure 3.5 : Restauration par la méthode de Tikhonov-Miller pour SNR=10 db et Phi=10^{-3}

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré

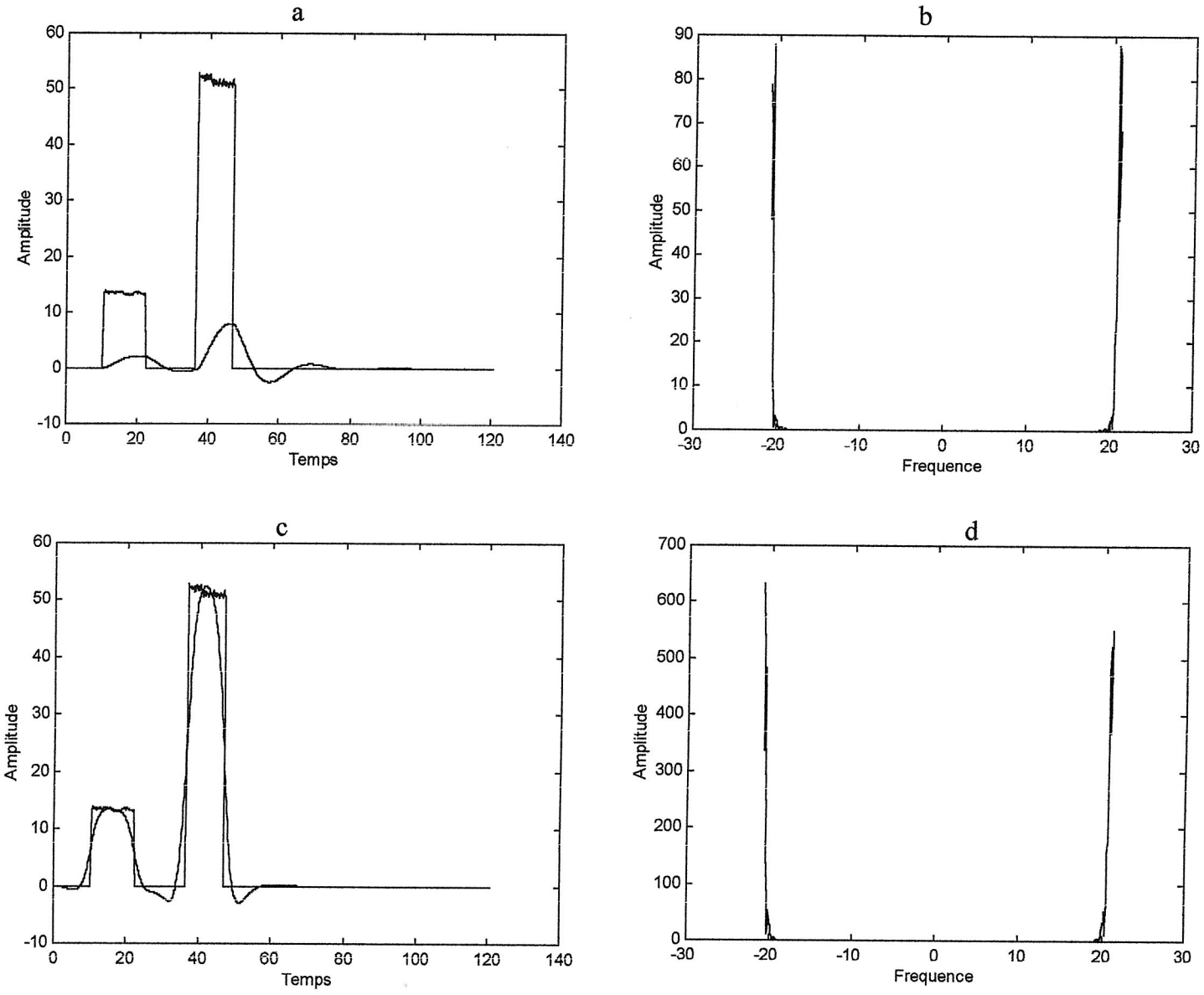


Figure 3.6 : Restauration par la méthode de Tikhonov-Miller pour SNR=70 db et Phi=10^{-3}

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré

Restauration par la Commande optimale avec SNR =80 db, 50 db, 8db

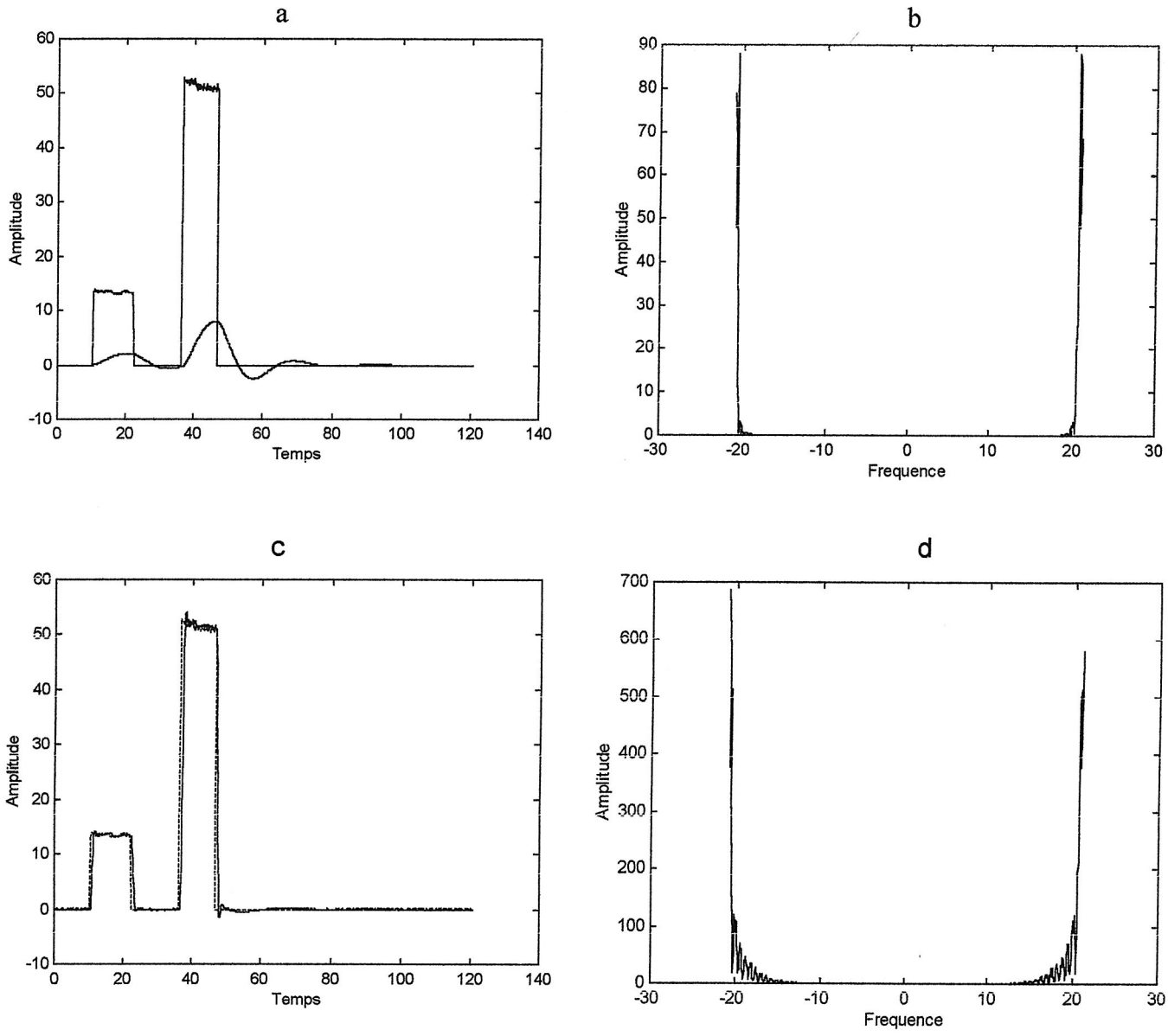


Figure 3.7 : Restauration par la commande optimale pour $\alpha=10^{-6}$ et SNR=80 db

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré

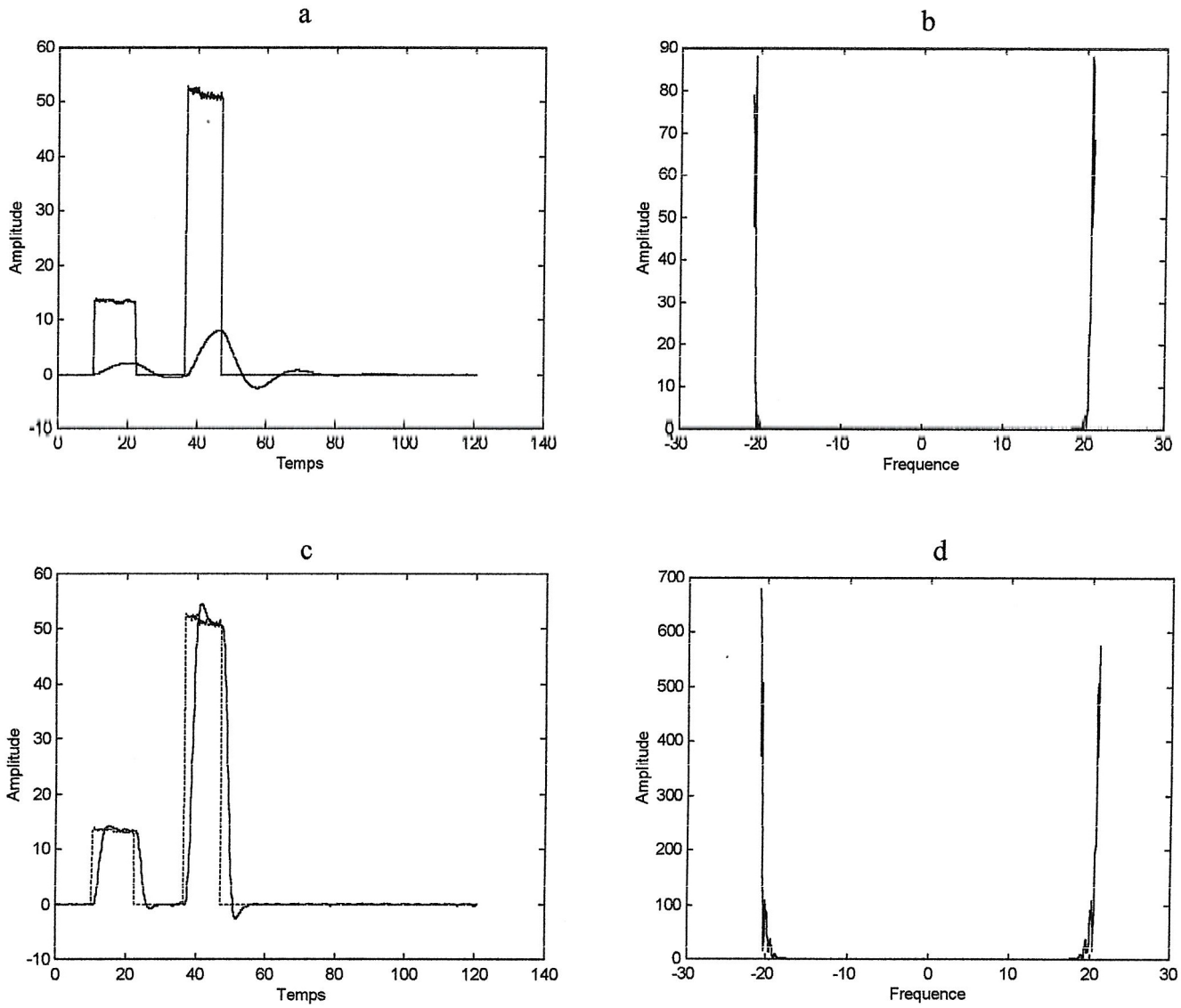


Figure 3.8 : Restauration par la commande optimale pour $\alpha=10^{-4}$ et SNR=50 db

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré

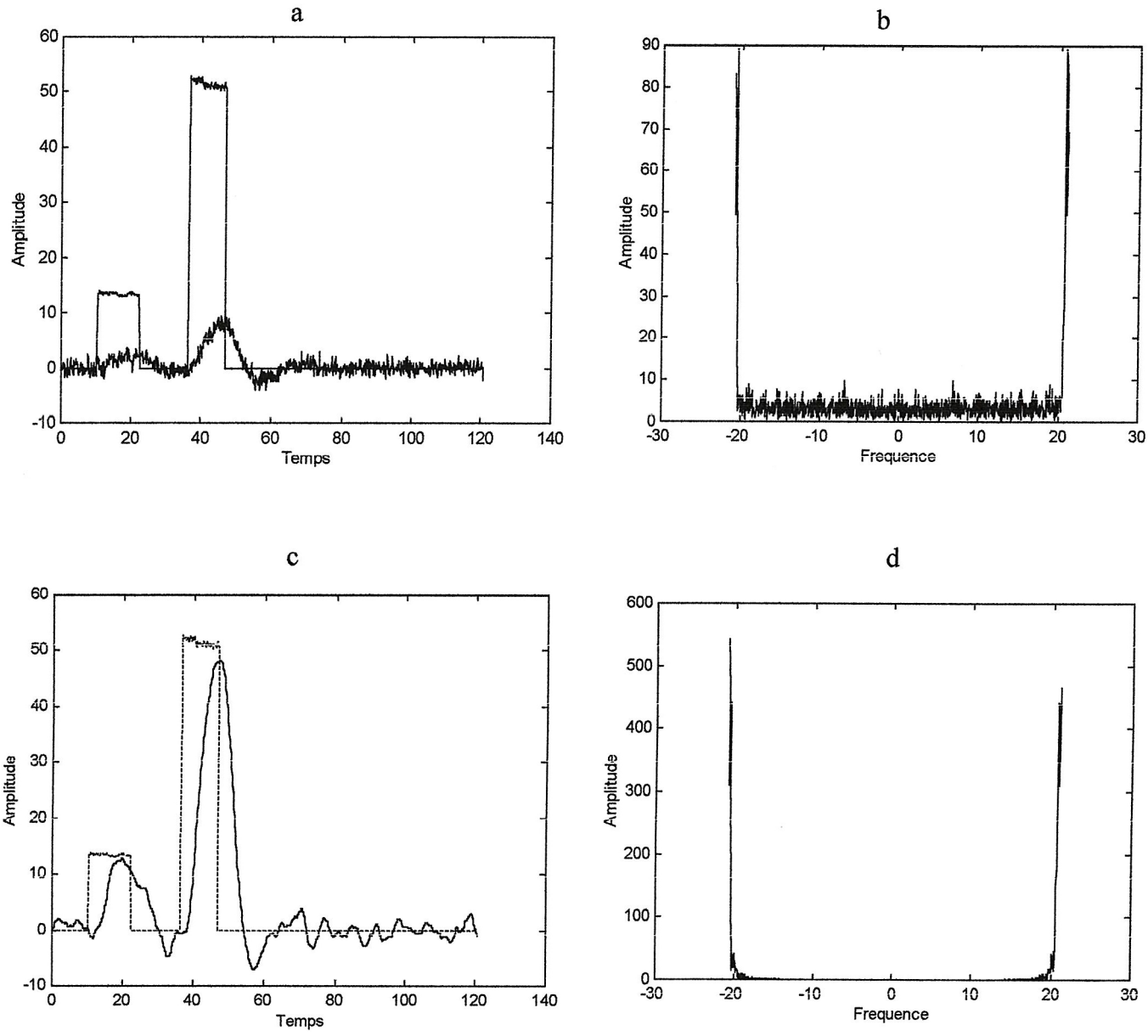


Figure 3.9 : Restauration par la commande optimale
pour $\alpha=0.3.10^{-4}$ et SNR=8 db

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré

Chapitre 4

Filtrage optimale et restauration

IV 1 Introduction :

Nous avons vu que l'approche de Wiener suppose une forte hypothèse sur le signal d'entrée qui doit être un signal aléatoire stationnaire d'ordre deux. Pour remédier à cet inconvénient, nous considérons la configuration suivante :

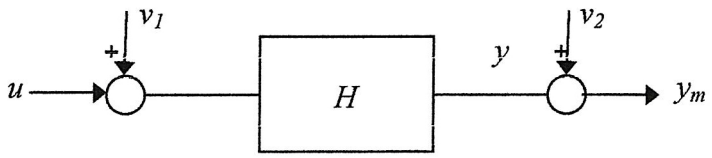


Figure 4.1

u est un signal déterministe à estimer.
v_1 et v_2 sont des bruits aléatoires non corrélés.

Le problème d'estimation de u revient à minimiser :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left\{(y_m - h*u)^2 + \alpha^2 u^2\right\} dt \tag{4.1}$$

Dans le cas ou le signal y_m est bruité, la minimisation de l'équation (4.1), peut conduire à des solutions instables. C'est pour cette raison, nous proposons à minimiser :

$$\begin{cases} J = \frac{1}{2}\int_0^T \left\{(\hat{y} - h*u)^2 + \alpha^2 u^2\right\} dt \\ \varepsilon\left\{(y - \hat{y})^2\right\} \end{cases} \tag{4.2}$$

$\hat{y}$ est le meilleur estimé du signal y la version non bruité.

Il y a plusieurs techniques qui permet de résoudre ce problème (trouver le meilleur estimé de y).

a- Estimateur de Kalman : (cas discret)

Du point de vue de la théorie des systèmes, le filtre de Kalman est celui qui donne au sens de la variance minimale, la meilleure estimée (dans le cas linéaire et dans un environnement gaussien) de l'état x à partir de l'ensemble d'observations.
Considérons un processus de mesure modélisé par l'équation d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) + v_1(t) \\ y(t) = C\,x(t) \\ y_m(t) = C\,x(t) + v_2(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

Où :

$$\begin{cases} A \in R^{nxn} \\ B \in R^{nx1} \\ C \in R^{1xn} \end{cases}$$

u : un signal déterministe supposé connu.
y_m : le signal mesuré.
v_2 : représente le bruit de mesure.
v_1 : représente le bruit de l'appareil.
v_1 et v_2 sont supposés non corrélés.

Si les signaux de bruit sont des processus centrés, stationnaire d'ordre deux, Kalman [8] a proposé la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\,\hat{x}(t) + K\left(y_m(t) - C\,\hat{x}(t)\right) + B\,u(t) \\ \hat{y}(t) = C\,\hat{x}(t) \end{cases} \tag{4.4}$$

Le problème du filtrage qui se pose alors, consiste à déterminer l'éstimée optimale de la valeur d'état x à partir de l'ensemble des observations disponibles, des informations a priori sur l'état et des caractéristiques statistiques des bruits.

Comme estimateur optimal, on prend celui qui minimise la variance de l'erreur d'estimation :

$$\varepsilon\left\{\left\|x-\hat{x}\right\|^2\right\} \tag{4.5}$$

La minimisation de (4.5) conduit à l'équation de Riccati stationnaire :

$$AP+PA'-PC'\sigma_{v_2}{}^{-2}CP+B\sigma_{v_1}{}^{2}B'=0 \tag{4.6}$$

P est une matrice symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati (4.6).

Si l'équation (4.6) admet une solution symétrique définie positive, la matrice de gain du Kalman est donnée par :

$$K=PC'\sigma_{v_2}{}^{-2} \tag{4.7}$$

En utilisant la transformée de Laplace, l'équation (4.4) devient :

$$\begin{cases} S\,\hat{X}(S)=A\,\hat{X}(S)+K\left(Y_m(S)-C\,\hat{X}(S)\right)+B\,U(S) & .a \\ \hat{Y}(S)=C\,\hat{X}(S) & .b \end{cases} \tag{4.8}$$

D'après l'équation (4.8.a), on à :

$$(S\,I-A+K\,C)\hat{X}(S)=K\,Y_m(S)+B\,U(S)$$

$$\hat{X}(S)=(S\,I-A+K\,C)^{-1}\,K\,Y_m(S)+(S\,I-A+K\,C)^{-1}\,B\,U(S) \tag{4.9}$$

En remplaçant l'équation (4.9) dans l'équation (4.8.b), on obtient :

$$\hat{Y}(S)=C\,(S\,I-A+K\,C)^{-1}\,K\,Y_m(S)+C\,(S\,I-A+K\,C)^{-1}\,B\,U(S) \tag{4.10}$$

On pose :

$$F(S)=C\,(S\,I-A+K\,C)^{-1}\,K$$
$$G(S)=C\,(S\,I-A+K\,C)^{-1}\,B$$

L'équation (4.10) devient :

$$\hat{Y}(S) = F(S)Y_m(S) + G(S)U(S) \tag{4.11}$$

Le problème qui sert à trouver l'estimé de y revient à rechercher deux filtres F et G, en minimisant l'équation (4.5).

b- Estimateur linéaire (cas discret) :

Soit la figure suivante qu'illustre la procédure de la convolution :

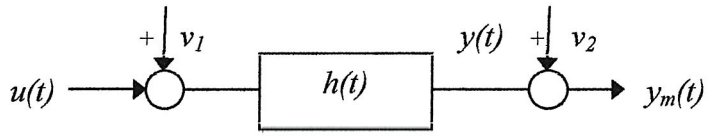


Figure 4.2 : processus de dégradation

- u : signal d'entrée
- y_m : signal mesuré
- v_1 : bruit d'entrée gaussien de variance σ_{v_1}
- v_2 : bruit de sortie gaussien de variance σ_{v_2}
- $h(t)$: réponse impulsionnelle du système

La relation entrée sortie peut être écrite dans le cas discret :

$$y_m(k) = \Delta T \sum_{i=0}^{N} h(i)\left(u(k-i) + v_1(k-i)\right) + v_2(k) \tag{4.12}$$

Avec :

- $h(i)$, $u(i)$, $v(i)$, $y_m(i)$ et $v_2(i)$ sont les versions discrètes de $h(t)$, $u(t)$, $v_1(t)$, $y_m(t)$ et $v_2(t)$ respectivement.
- ΔT est la période d'échantillonnage.

L'équation (4.12) peut être écrite sous forme matricielle :

$$y = H(u + v_1) \tag{4.13}$$

$$y_m = y + v_2 \tag{4.14}$$

Avec :

$$y_m = [y_m(0)\ y_m(1)\ \ldots\ y_m(M)]'$$

On cherche d'estimé le signal y la version non bruité, en minimisant le critère J suivant :

$$J = \varepsilon\{(\hat{y} - y)'(\hat{y} - y)\} = trace\{(\hat{y} - y)'(\hat{y} - y)\} \tag{4.15}$$

La minimisation de (4.15) donne :

$$\hat{y} = F\, y_m + G\, u \tag{4.16}$$

Où :

$$\begin{cases} F = (H\,H' + B\,I)^{-1}\,H\,H' \\ G = (I - F)H \\ \beta = \dfrac{\sigma_{v_1}}{\sigma_{v_2}} \end{cases} \tag{4.17}$$

Démonstration :

On défini l'innovation qui correspond à l'estimateur de l'erreur :

$$\varepsilon = \hat{y} - y \tag{4.18}$$

En utilisant l'équation (4.17), on obtient l'expression :

$$\varepsilon = [(F - I)H + G]u + (F - I)H\,v_1 + F\,v_2 \tag{4.19}$$

Donc :

$$J = trace\begin{Bmatrix} [(F - I)H + G]\varepsilon\{u\,u'\}[(F - I)H + G]' + [(F - I)H]\varepsilon\{v_1\,v_1'\}[(F - I)H]' \\ +\ldots + F\,\varepsilon\{v_2\,v_2'\}F' \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

les valeurs optimales de F et G sont obtenus par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial G} = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial F} = 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial J}{\partial G} = 2\left[(F - I)H + G\right]\left(\varepsilon\left\{u\,u'\right\}\right)'$$

d'où :

$$G = (I - F)H \tag{4.22}$$

En remplaçant G dans l'équation (4.20), on obtient :

$$J = trace\left\{\left[(F - I)H\right]\varepsilon\left\{v_1\,v_2'\right\}\left[(F - I)H\right]' + F\,\varepsilon\left\{v_2\,v_2'\right\}F'\right\} \tag{4.23}$$

D'après l'équation (4.23) :

$$\frac{\partial J}{\partial F} = 2\left[(F - I)H\right]\left(\varepsilon\left\{v_1\,v_1'\right\}\right)'H' + 2F\left(\varepsilon\left\{v_2\,v_2'\right\}\right)' = 0$$

d'où :

$$F = \left[H\left(\varepsilon\left\{v_1\,v_1'\right\}\right)'H' + \left(\varepsilon\left\{v_2\,v_2'\right\}\right)'\right]H\left(\varepsilon\left\{v_1\,v_1'\right\}\right)'H' \tag{4.24}$$

Et comme :

$$\varepsilon\left\{v_1\,v_1'\right\} = \sigma_{v_1}^{\,2}\,I$$
$$\varepsilon\left\{v_2\,v_2'\right\} = \sigma_{v_2}^{\,2}\,I$$

On note $\beta = \dfrac{\sigma_{v_2}^2}{\sigma_{v_1}^2}$

l'équation (4.24) devient :

$$F = \left[H\,H' + \beta\,I\right]^{-1}H\,H' \tag{4.25}$$

d'où :

$$\hat{y} = F\,y_m + (I - F)H\,u$$

IV 2 Filtrage et commande optimale :

La plupart des procédures de déconvolution se fait en deux étapes, une étape de filtrage utilisée pour réduire le bruit de mesure sur le signal enregistré, et ensuite une technique de déconvolution pour restaurer le signal original. La technique développée

dans ce paragraphe intègre le filtrage optimal dans l'algorithme de déconvolution. Ce qui conduit à la configuration suivante :

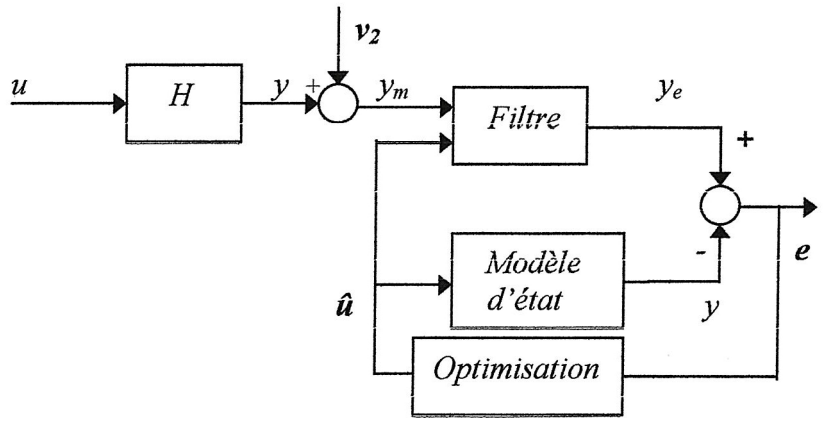


Figure 4.3

On cherche à minimiser le critère suivant :

$$Min \left\| \hat{y} - h * u \right\|_2^2 + \alpha^2 \left\| u \right\|_2^2 \tag{4.26}$$

On note η et ξ les vecteurs d'états de modèle du système et du filtre respectivement dont les équations d'états sont :

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = A\,\eta(t) + B\,\hat{u}(t) \\ y(t) = C\,\eta(t) \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = (A - K\,C)\,\zeta(t) + K\,y_m(t) + B\,\hat{u}(t) \\ y_e(t) = C\,\zeta(t) \end{cases} \tag{4.28}$$

Avec : $K = PC'\sigma_{v_2}^{-2}$

Où :

P est une matrice symétrique définie positive solution de l'équation de Riccati suivante :

$$A\,P + P\,A' - PC'\sigma_{v_2}^{-2}CP + B\sigma_{v_1}^{2}B' = 0 \tag{4.29}$$

On pose : $x = \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$

Le système d'équation (4.27) et (4.28) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-KC \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} y_m + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \hat{u} \\ y = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} x \\ y_e = \begin{pmatrix} 0 & C \end{pmatrix} x \\ z = y - y_e = \begin{pmatrix} C & -C \end{pmatrix} x \end{cases} \tag{4.30}$$

On défini :

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-KC \end{pmatrix} \quad ; \quad \overline{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}$$

$$\overline{B_2} = \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \quad ; \quad \overline{C} = \begin{pmatrix} C & -C \end{pmatrix}$$

Donc l'équation (4.30) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = \overline{A}\, x + \overline{B_1}\, y_m + \overline{B_2} u \\ y = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} x \\ y_e = \begin{pmatrix} 0 & C \end{pmatrix} x \\ z = \overline{C}\, x \end{cases} \tag{4.31}$$

Le problème revient à minimiser :

$$J = \int_0^T \left(z^2 + \alpha^2 u^2 \right) dt \tag{4.32}$$

Nous définissons l'hamiltonien comme :

$$H(u,x,P) = \frac{1}{2}\left(z^2 + \alpha^2 u^2 \right) + P' \left(\overline{A}\, x + \overline{B_1}\, y_m + \overline{B_2}\, u \right) \tag{4.33}$$

Où P est le vecteur adjoint ayant n composantes.

Sur la trajectoire optimale :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \dfrac{\partial H(\hat{u}, x^*)}{\partial P^*} \\ \dot{P}^* = -\dfrac{\partial H(\hat{u}, x^*)}{\partial x^*} \end{cases} \tag{4.34}$$

La commande $\hat{u}(t)$ est donnée par :

$$\frac{\partial H(\hat{u}, x^*, P^*)}{\partial u} = 0 \tag{4.35}$$

D'où :

$$\hat{u} = -\alpha^{-2}\overline{B_2}P^* \tag{4.36}$$

A partir des relations (4.32) et (4.36) nous avons :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \overline{A}\,x^* + \overline{B_1}\,y_m - \overline{B_2}\alpha^{-2}\overline{B_2}'P^* \\ \dot{P}^* = -\overline{A}'\,P^* - \overline{C}\,\overline{C}'\,x^* \end{cases} \tag{4.37}$$

A l'instar d'Andreson [9], nous considérons qu'il existe une matrice :

$$P^* = S\,x^* - \theta \tag{4.38}$$

θ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\theta} = -\left(\overline{A} - \alpha^{-2}S\overline{B_2B_2}'\right)\theta + S\,\overline{B_1}\,y_m \qquad , \theta(T) = 0 \tag{4.39}$$

Et pour S, nous avons :

$$S\,\overline{A} + \overline{A}'S - S\overline{B_2}\alpha^{-2}\overline{B_2}'S - \overline{C}\overline{C}' = 0 \tag{4.40}$$

En tenant compte de l'équation (4.38), l'équation (4.36) devient :

$$\hat{u} = \alpha^{-2}\overline{B_2}'\left(S\,x^* - \theta\right) \tag{4.41}$$

En substituant l'expression de (4.38) dans (4.37), nous obtenons :

$$\dot{x}^*(t) = \overline{\overline{A}}\,x^*(t) + \overline{B_1}\,y_m + \overline{\overline{B_2}}\,\theta \qquad , \quad x^*(0) = 0 \tag{4.42}$$

Avec :

$$\begin{cases} \overline{\overline{A}} = \overline{A} + \alpha^{-2}\overline{B_2B_2}'S \\ \overline{\overline{B_2}} = -\alpha^{-2}\overline{B_2B_2}' \end{cases}$$

IV 3 Déconvolution des signaux 2D

Les images enregistrées et plus généralement sont des signaux obtenus par l'intermédiaire d'un capteur sont une version dégradée du signal original. Cette dégradation peut être modélisée par une convolution suivie de l'addition d'un bruit. La suppression de ce bruit est un problème très important en traitement du signal [1,5,6,7].

Les images sont obtenues par l'intermédiaire d'un processus de dégradation qui peut être un télescope, caméra, satellite, ...etc. La figure suivante représente cette dégradation :

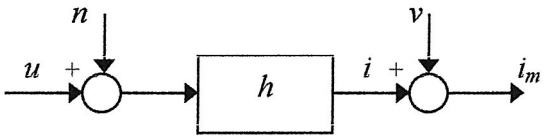


Figure 4.4

u :image originale

i_m :image dégradée et bruitée

n : bruit gaussien d'entrée de variance σ_1

v : bruit gaussien de sortie de variance σ_2

h : réponse impulsionnelle du processus *(PSF)*

D'après la figure ci-dessus, on peut écrire :

$$i_m(x_1,x_2) = i(x_1,x_2) + v(x_1,x_2) \tag{4.43}$$

avec :

$$i(x_1,x_2) = h(x_1,x_2) * [u(x_1,x_2) + n(x_1,x_2)] \tag{4.44}$$

(*) opérateur de convolution en 2D.

En utilisant la transformée de Fourrier, l'équation (4.43) devient :

$$I_m(\zeta,\eta) = H(\zeta,\eta)[U(\zeta,\eta) + N(\zeta,\eta)] + V(\zeta,\eta) \tag{4.45}$$

On peut obtenir U à partir de (4.44) par division :

$$U(\zeta,\eta) = \frac{I_m(\zeta,\eta)}{H(\zeta,\eta)} - \frac{V(\zeta,\eta)}{H(\zeta,\eta)} - N(\zeta,\eta) \tag{4.46}$$

Revenant au domaine spatial, on trouve :

$$u(x_1,x_2) = F^{-1}\{U(\zeta,\eta)\} \tag{4.47}$$

La solution (4.46) est correcte, si H ne possède pas des valeurs singulières. Dans le cas où H ne possède pas des zéros mais contenir des petites valeurs, elle conduit à une erreur sur l'image estimée, autrement dit le problème de déconvolution devient un problème mal conditionné. En conséquence l'utilisation des techniques de régularisation est nécessaire.

IV 4 Méthode de régularisation classique :

Cette méthode consiste à trouver u qui vérifie :

$$Min\left[\Delta(u,i_m)+\alpha\phi(v)\right] \tag{4.48}$$

α un paramètre de régularisation.

Pour l'équation (4.48), le premier terme mesure la fidélité de l'image observée et le second terme présente une contrainte qu'à pour rôle de réduire l'effet du bruit sur la solution obtenue à partir de (4.48).

L'utilisation de la méthode de maximum a posteriori [MAP][1] permet d'estimer u. L'utilisation de MAP consiste à déterminer u qui vérifier :

$$Min\left\{\| i_m(x_1,x_2) - h(x_1,x_2)*\hat{u}_\alpha(x_1,x_2)\|_2^2+\alpha\| u(x_1,x_2)\|_2^2\right\} \tag{4.49}$$

La solution optimale $\hat{u}_\alpha$ [2] est donnée par :

$$\alpha+h'(x_1,x_2)*h(x_1,x_2)*\hat{u}_\alpha(x_1,x_2)=h'(x_1,x_2)*i_m(x_1,x_2) \tag{4.50}$$

IV 4.1 Réduction du bruit :

On considère que l'image observée est résultat d'un processus linéaire invariant. La méthode est basée sur la détermination de deux filtres $f(x_1,x_2)$, $g(x_1,x_2)$ obtenus par l'estimation optimal $\hat{i}(x_1,x_2)$ de $i(x_1,x_2)$

$$\hat{i}(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)*i_m(x_1,x_2)+g(x_1,x_2)*u(x_1,x_2) \tag{4.51}$$

Les deux filtres $f(x_1,x_2)$ et $g(x_1,x_2)$ sont obtenus par la minimisation de l'erreur quadratique entre $i(x_1,x_2)$ et $\hat{i}(x_1,x_2)$. le critère est défini comme :

$$J = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\hat{i}(x_1,x_2) - i(x_1,x_2)\right]^2 dx_1\right)dx_2\right\} \tag{4.52}$$

Utilisant le calcul variationnel [5], après la transformation de Fourier, on obtient :

$$\begin{cases} F(\zeta,\eta) = \dfrac{|H(\zeta,\eta)|^2}{|H(\zeta,\eta)|^2 + \dfrac{\gamma_v}{\gamma_n}} \\ G(\zeta,\eta) = H(\zeta,\eta)[1 - F(\zeta,\eta)] \end{cases} \tag{4.53}$$

Où F, G sont les transformées de Fouriers de f, g et γ_n, γ_v sont les densités spectrales du signal n et v respectivement.

IV 4.2 Procédure de restauration :

Cette procédure consiste à définir $u(x_1, x_2)$ de telle façon :

$$J = \left\{ \| \hat{i}_2(x_1,x_2) - h(x_1,x_2) * u(x_1,x_2) \|_2^2 + \alpha \| u(x_1,x_2) \|_2^2 \right\} \tag{4.54}$$

soit minimal.

L'équation (4.51) peut être écrite dans le domaine spatial, en exploitant l'équation (4-53) :

$$\hat{i}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) * [i_m(x_1,x_2) - h(x_1,x_2) * u(x_1,x_2)] + h(x_1,x_2) * u(x_1,x_2) \tag{4.55}$$

d'où :

$$\hat{i}(x_1,x_2) - h(x_1,x_2) * u(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) * [i_m(x_1,x_2) - h(x_1,x_2) * u(x_1,x_2)] \tag{4.56}$$

En remplaçant l'équation (4.56) dans (4.54), on obtient :

$$J = \| f(x_1,x_2) * i_m(x_1,x_2) - f(x_1,x_2) * h(x_1,x_2) * u(x_1,x_2) \|_2^2 + \alpha \| u(x_1,x_2) \|_2^2 \tag{4.57}$$

Cette technique conduit à la configuration suivante :

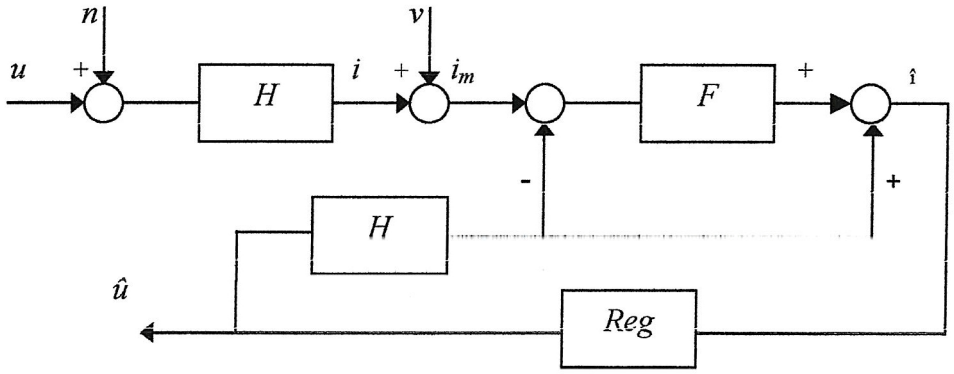


Figure 4.5

La solution optimale $\hat{u}_\alpha(x_1, x_2)$ [2] obtenue par l'équation :

$$\begin{cases} \{\alpha + [f(x_1,x_2) * h(x_1,x_2)]' * [f(x_1,x_2) * h(x_1,x_2)]\} * \hat{u}_\alpha(x_1,x_2) \\ = [f(x_1,x_2) * h(x_1,x_2)]' * f(x_1,x_2) * i_m(x_1,x_2) \end{cases} \tag{4.58}$$

Dans le domaine fréquentiel, l'équation (4.58) devient :

$$\begin{cases} \{\alpha + [F(\zeta,\eta).H(\zeta,\eta)]' [F(\zeta,\eta).H(\zeta,\eta)]\} \hat{U}_\alpha(\zeta,\eta) \\ = [F(\zeta,\eta).H(\zeta,\eta)]' F(\zeta,\eta) I_m(\zeta,\eta) \end{cases} \tag{4.59}$$

$F(\zeta,\eta)$, Y_m et $\hat{U}_\alpha$ sont les transformées de Fouriers de f, i_m et $\hat{u}_\alpha$ respectivement.

$[F(\zeta,\eta).\ H(\zeta,\eta)]'$ est le conjugué de $[F(\zeta,\eta).\ H(\zeta,\eta)]$.

On peut obtenir $\hat{U}_\alpha(\zeta,\eta)$ tel que :

$$Y_\alpha(\zeta,\eta) = R_\alpha(\zeta,\eta).\hat{U}_\alpha(\zeta,\eta) \tag{4.60}$$

avec :

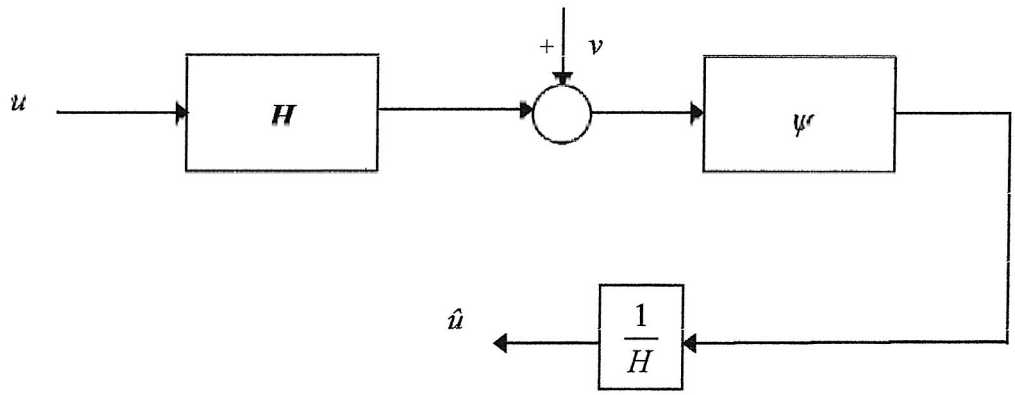
$$Y_\alpha(\zeta,\eta) = [F(\zeta,\eta)H(\zeta,\eta)]' F(\zeta,\eta) I_m(\zeta,\eta)$$

$$R_\alpha(\zeta,\eta) = \alpha + [F(\zeta,\eta)H(\zeta,\eta)]' [F(\zeta,\eta)H(\zeta,\eta)]$$

La détermination de $\hat{U}_\alpha(\zeta,\eta)$ est obtenue par une méthode itérative. Nous utilisons la méthode itérative de Singh [4] et celle de Gradient conjugué pour calculer $\hat{U}_\alpha(\zeta,\eta)$.

IV 5 Régularisation de Tikhonov-Miller :

L'utilisation de la technique de Tikhonov-Miller dans le cas stationnaire pour la déconvolution conduit à la configuration suivante.



Avec :

$$\psi = \frac{|H|^2}{|H|^2 + \frac{S_v}{S_u}}$$

S_v, S_u sont les densités spectrales des signaux v, u supposées stationnaires d'ordre deux et non corrélés.

La démarche exposée ci-dessous suppose une hypothèse forte sur le signal à restaurer. A savoir, ce dernier doit être un processus aléatoire d'ordre deux dont on connaît la densité spectrale. D'autre robustesse est éprouvée en présence du bruit inévitable sur le signal enregistré. Nous proposons une approche nouvelle, robuste qui s'affranchie de toute hypothèse d'ordre statistique sur le signal à restaurer.

IV 6 Filtrage optimale et déconvolution (cas discret) :

La plupart des procédures de déconvolution se font en deux étapes, une étape de filtrage pour réduire l'effet bruit de mesure sur le signal enregistré, et ensuite une technique de déconvolution pour restaurer le signal original. Cette technique intègre le

filtrage optimal dans l'algorithme de déconvolution.ce qui conduit à la configuration de la figure (4.5).

- Première étape :

Nous recherchons une estimée $\hat{y}$ de y, en utilisant l'estimateur linéaire discret développé au paragraphe § IV.b , on obtient :

$$\underline{\hat{y}} = F\,\underline{y_m} + G\,\underline{u}$$

Où :

$$\begin{cases} F = (H\,H' + B\,I)^{-1}\,H\,H' \\ G = (I - F)\,H \\ \beta = \dfrac{\sigma_{v_1}}{\sigma_{v_2}} \end{cases}$$

- deuxième étape :

A présent, le problème est de chercher la valeur optimale du signal d'entrée u tel que :

$$\hat{u} = \arg min \left\{ \| \hat{y} - h * u \|^2 + \alpha \| L\,u \|^2 \right\}$$

En remplaçant la valeur de $\hat{y}$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\hat{u} = \arg min \left\{ \| F\,y_m - F\,H\,u \|^2 + \alpha \| L\,u \|^2 \right\}$$

On définit le critère suivant :

$$J = \| F\,y_m - F\,H\,u \|^2 + \alpha \| L\,u \|^2 \qquad (4.61)$$

la valeur optimale de u doit minimiser le critère ci-dessus :

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 0 \qquad (4.62)$$

la dérivation de J par rapport à u donne :

$$\frac{\partial J}{\partial u} = -2\,(F.H)'\,[F\,y_m - F\,H\,u] + 2\,\alpha\,L'\,L\,u \qquad (4.63)$$

En utilisant les équations (4.62) et (4.63), la valeur optimale est donnée par :

$$\left((F\,H)'\,(F\,H) + \alpha\,L'\,L\right)\hat{u} = (F\,H)'\,F\,y_m$$

IV 7 Résultats et commentaires :

Cas 1D :

Méthode itératives :

L'utilisation de l'algorithme de Van Cittert et de Singh modifier pour l'approche proposée, nous permet de remarquer que l'algorithme de Singh converge plus rapide que celle de Van Cittert, puisque ce dernier est de convergence linéaire contrairement à l'algorithme de Singh qui est de convergence quadratique (voir figures (1.6) et (1.7) et le graphe de variation de l'erreur de chaque algorithme). L'introduction de l'information a priori (positivité) permet d'améliorer la solution et d'accélérer la convergence (voir figures (4.8) et (4.9)).

La combinaison entre le filtrage optimal et la restauration :

Pour illustrer les performances de cette technique, nous appliquons, la méthode de Tikhonov-Miller et cette approche dans le cas 1D et 2D.

La restauration par la méthode de Tikhonov-Miller , nous montre qu'au delà d'un certain nombre d'itérations la solution devient instable (voir figure (4.10)) contrairement à celle qu'utilise le filtrage optimal dans la procédure de restauration (voir figures (4.11) et (4.12)). La variation de l'erreur moyenne quadratique montre cette constatation, on voit clairement pour les figures qui représente la variation de l'erreur, que pour la méthode de Tikhonov-Miller au delà d'un certain nombre d'itérations l'erreur se diverge par contre pour l'autre technique (l'erreur devient constant).

Restauration par la méthode de Van-Cittert modifiée :

Avec un SNR =40 db

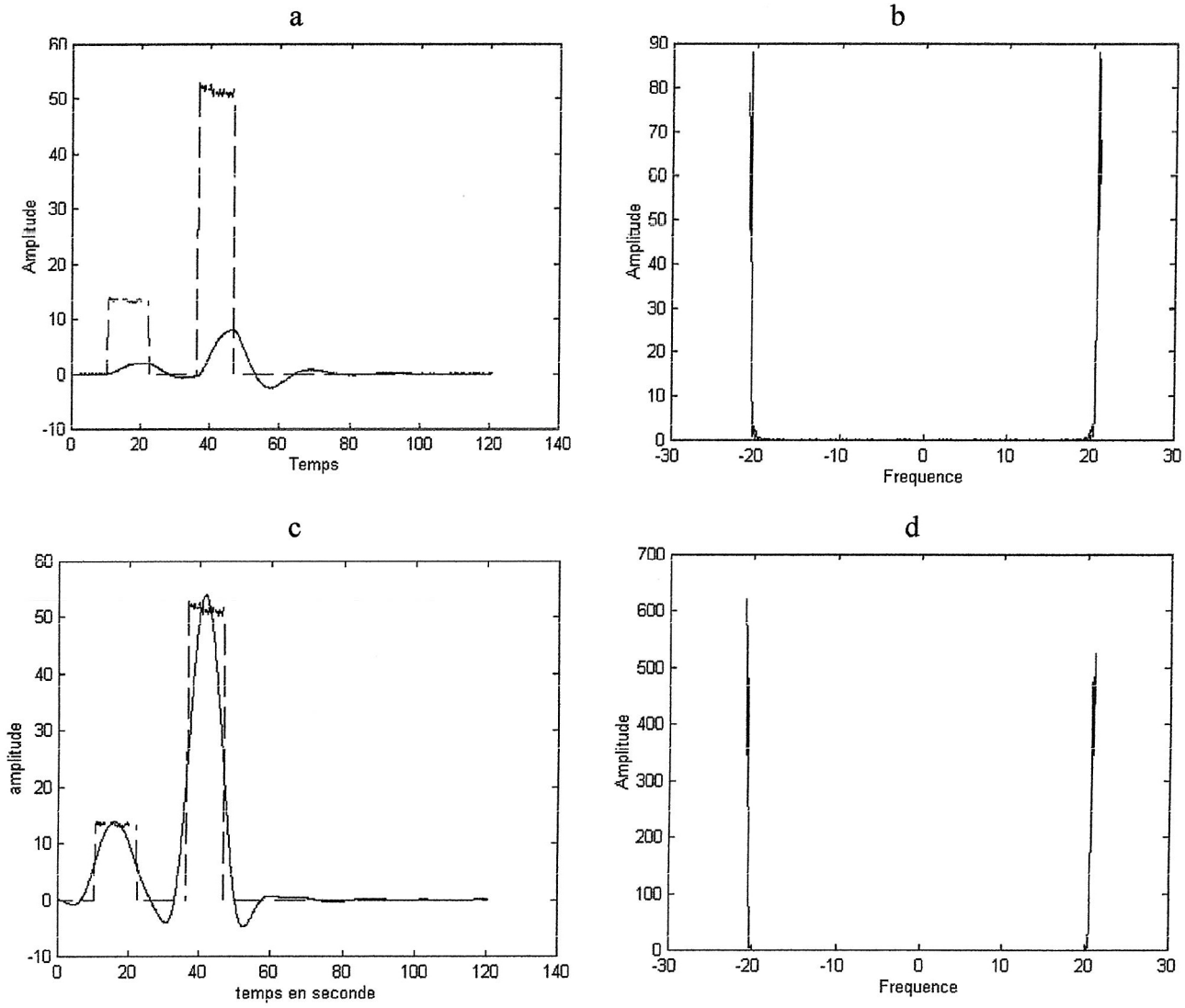
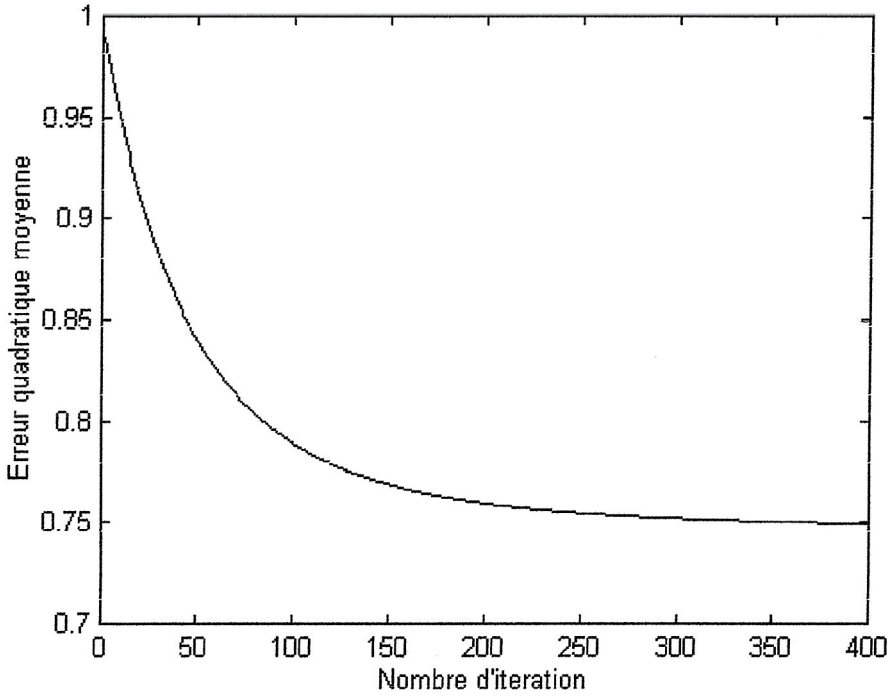


Figure 4.6 : Restauration par la méthode de Van-Cittert après 400 itérations avec SNR=40 db pour l'approche proposée

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré



Variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Restauration par la méthode de Singh modifiée :

Avec un SNR =40 db

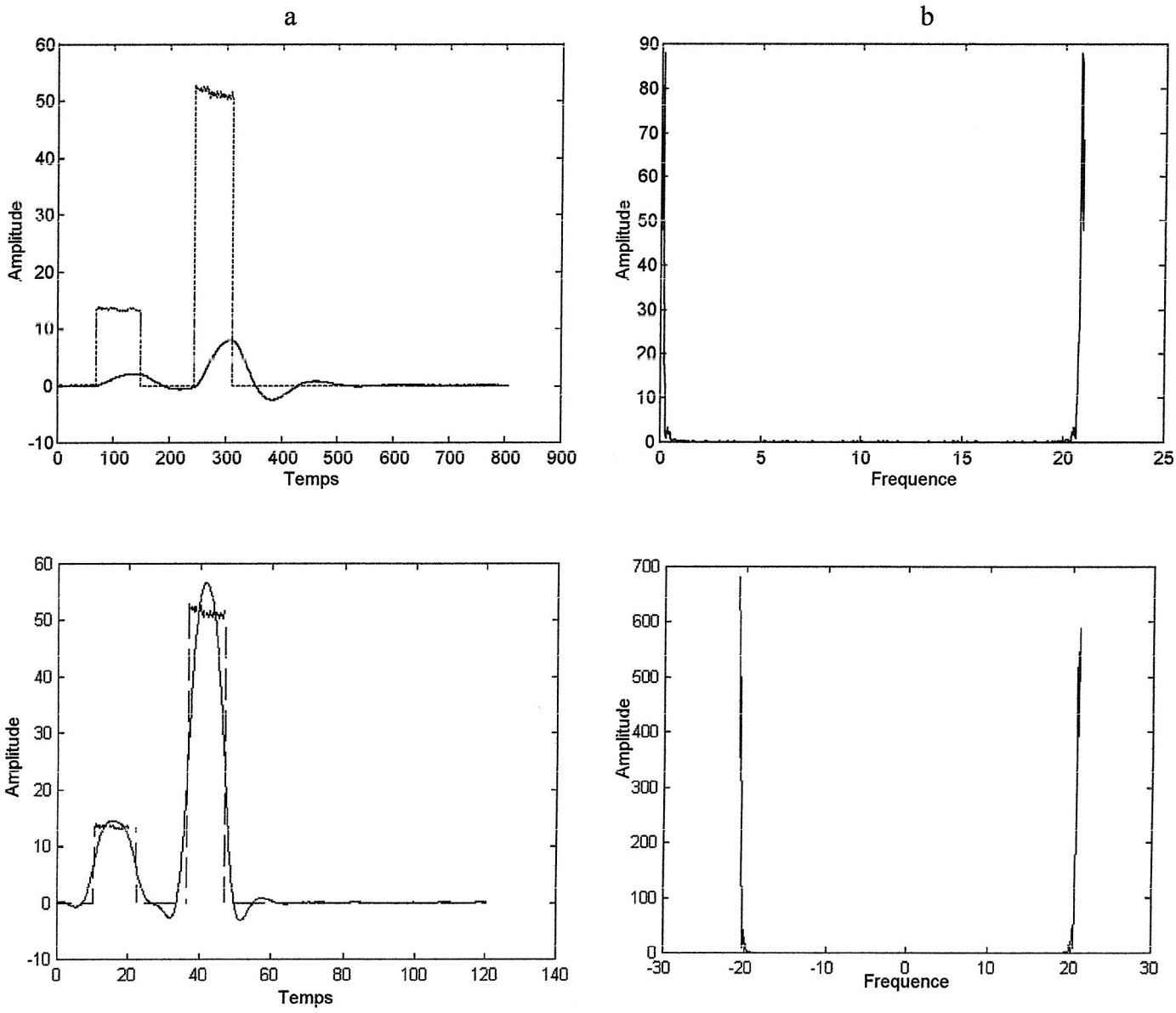
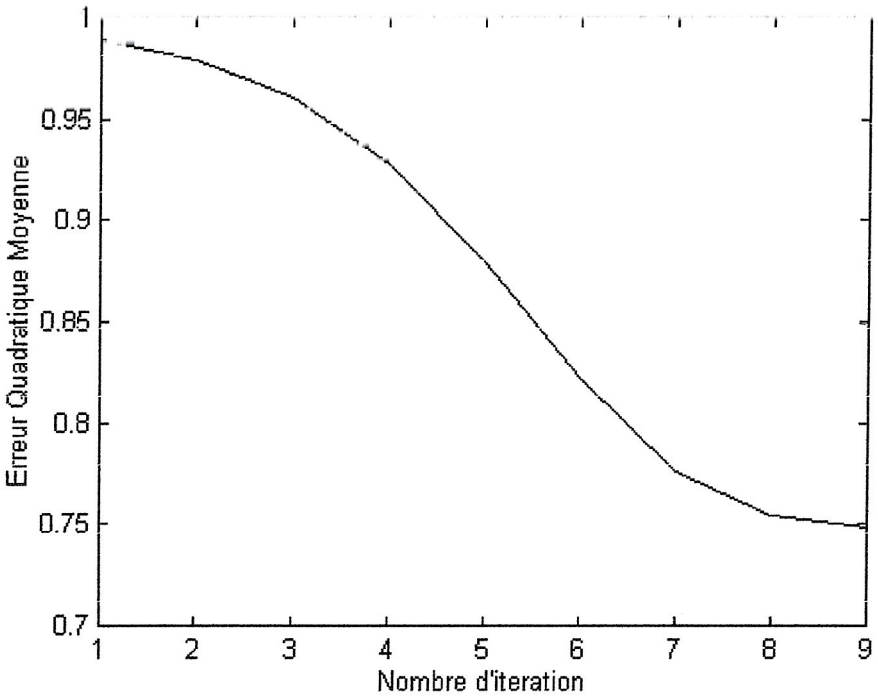


Figure (4.7) : Restauration par la méthode de Singh modifiée
après 9 itérations avec SNR=40 db pour l'approche proposée

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré



Variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Restauration par la méthode de Van-Cittert modifiée pour l'approche proposée :

Avec un SNR =10 db, en utilisant la contrainte de positivité

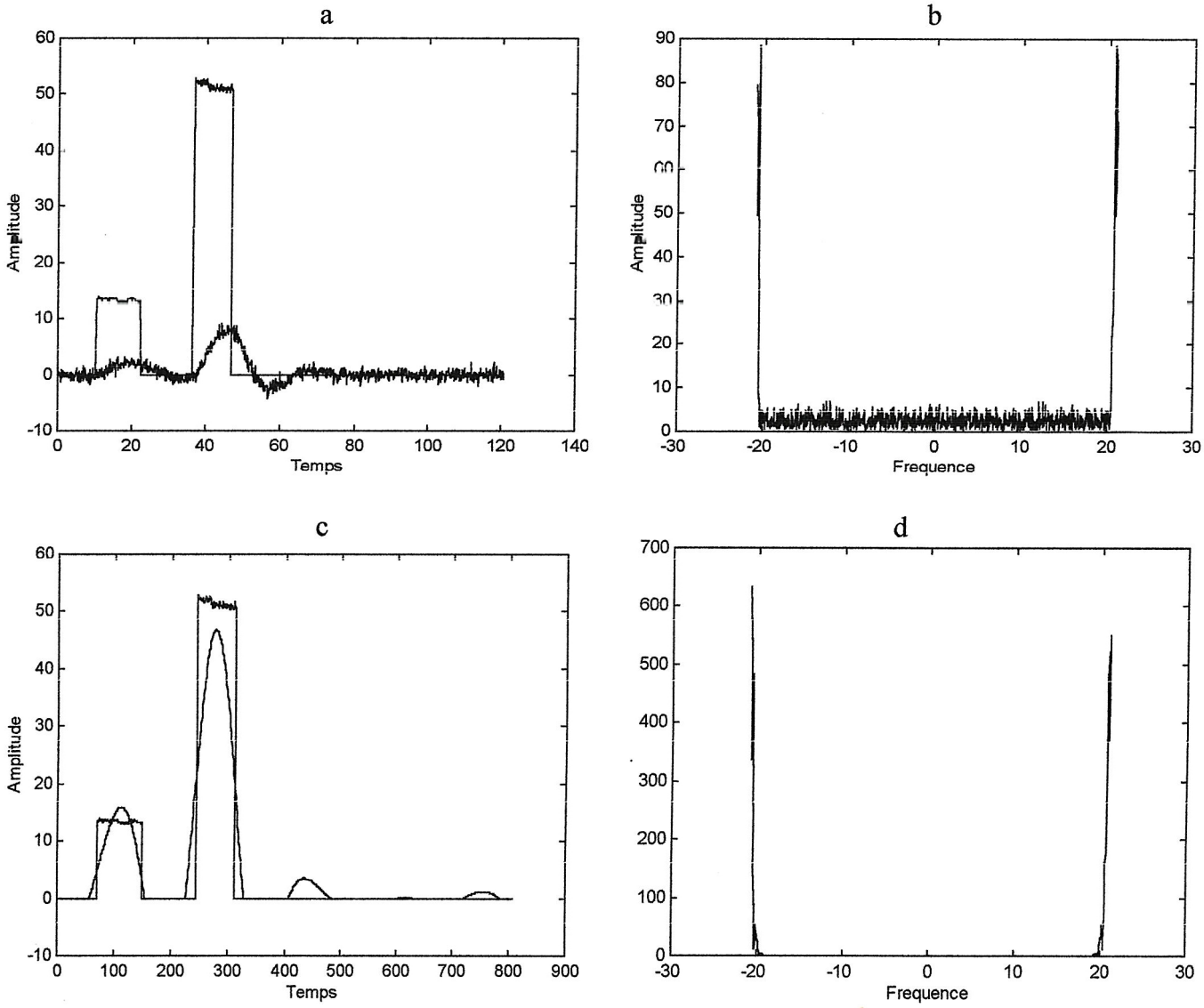
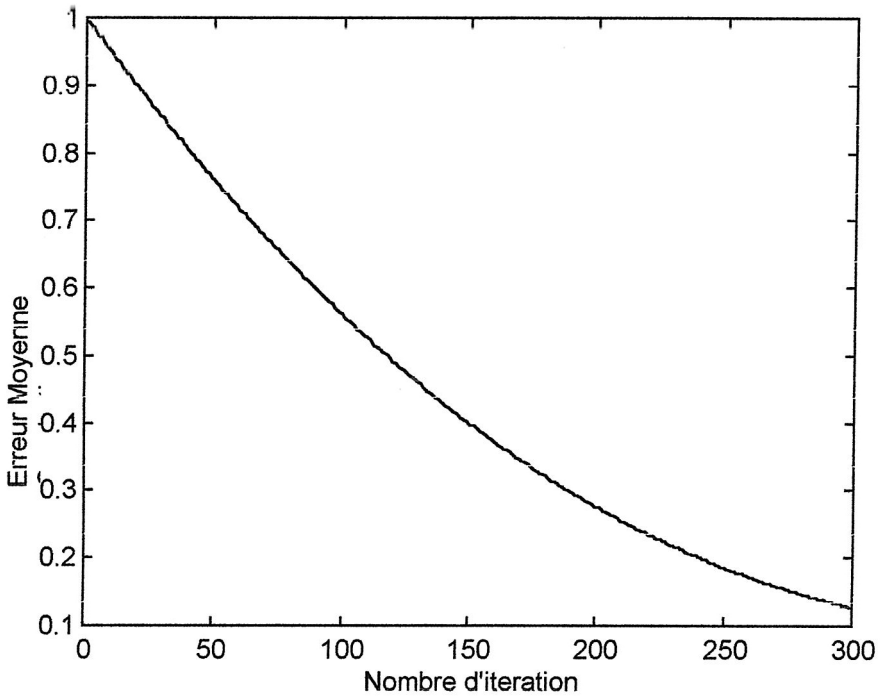


Figure 4.8 : Restauration avec contrainte de positivité par la méthode de Van-Cittert après 300 itérations avec SNR=10 db pour l'approche proposée

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré



Variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Restauration par la méthode de Singh modifiée pour l'approche proposée :

Avec un SNR =5 db, en utilisant la contrainte de positivité

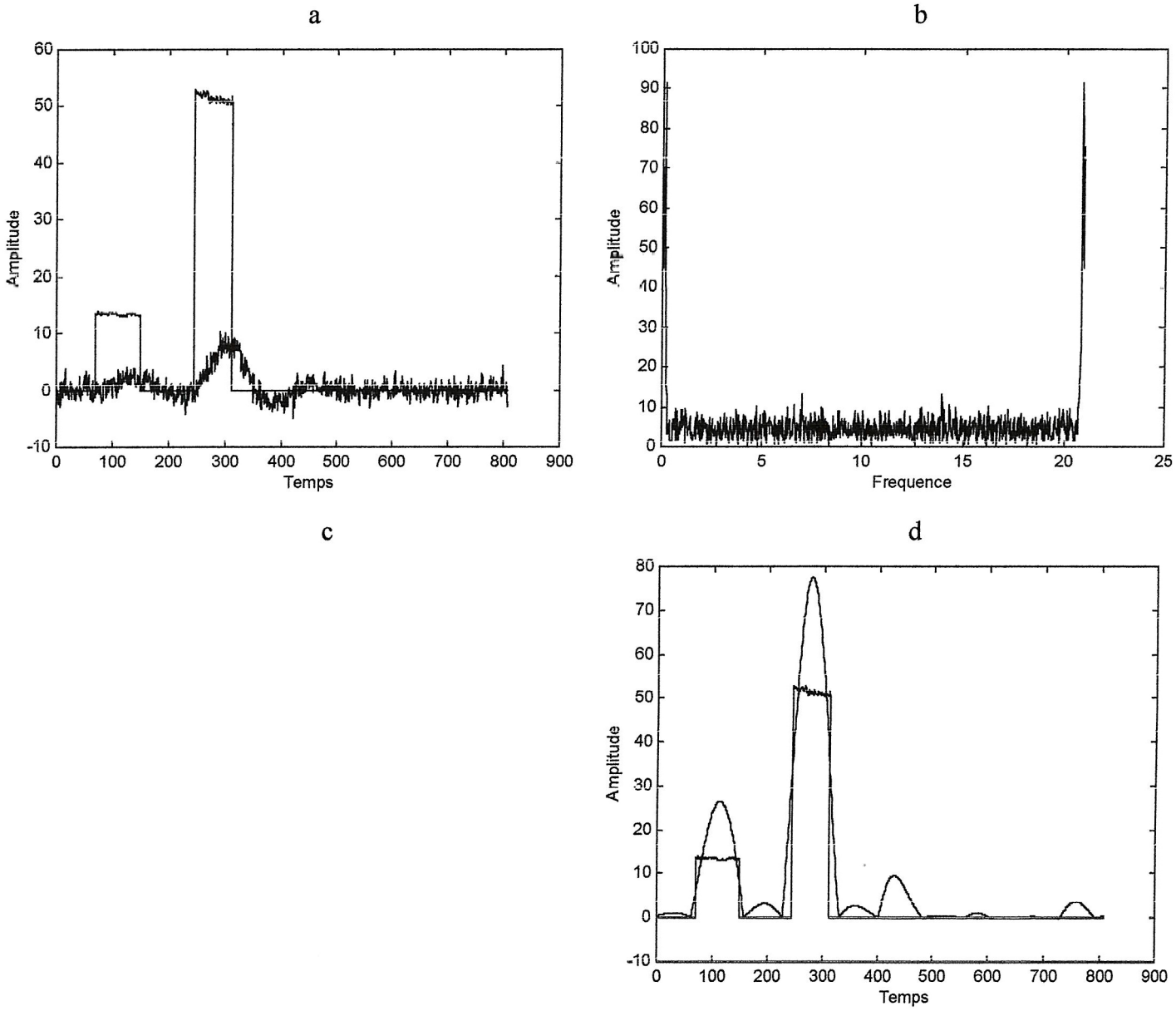
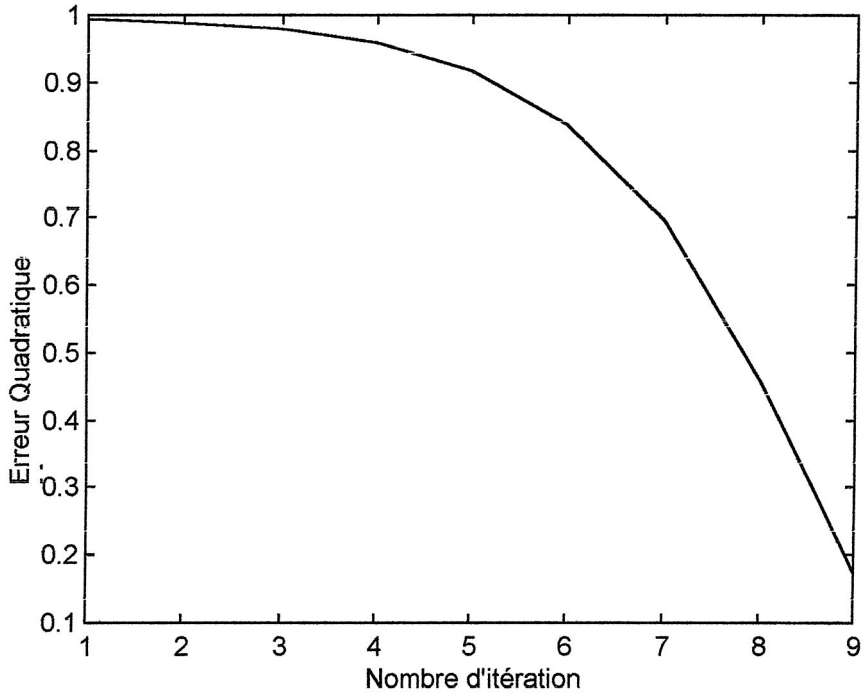


Figure 4.9 : Restauration avec contrainte de positivité par la méthode de Singh après 9 itérations avec SNR=5 db pour l'approche proposée

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré
d- Spectre du signal restauré



Variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Restauration par la méthode de Tikhonov-Miller :

Avec un SNR =40 db

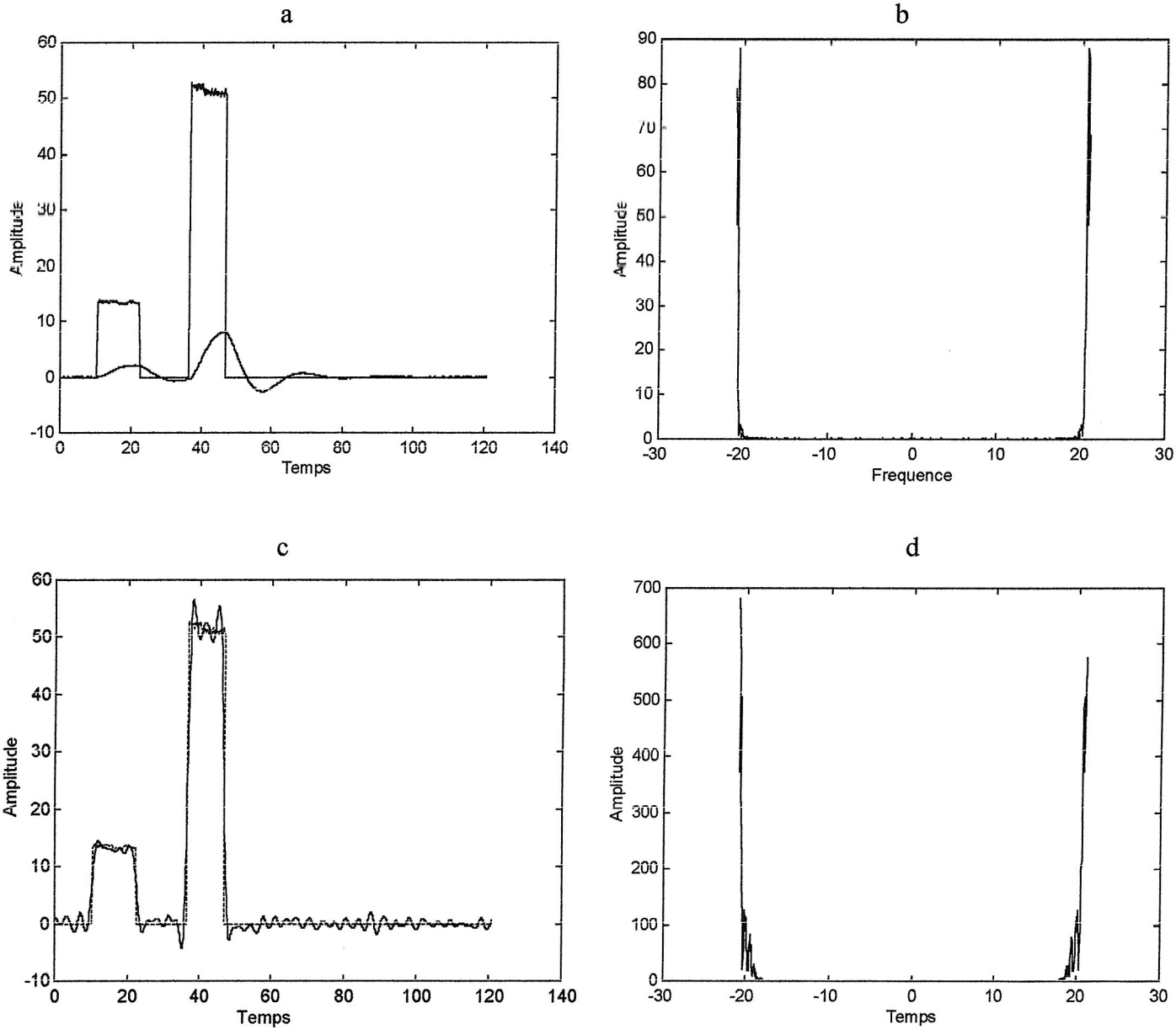
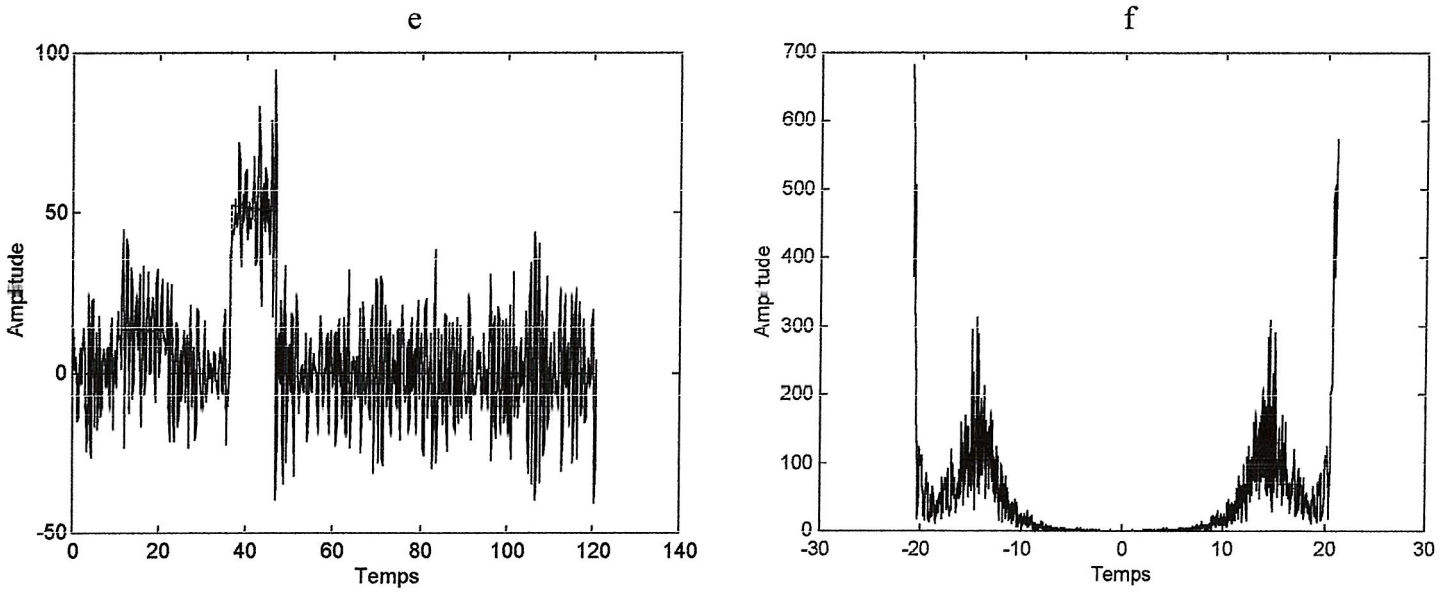
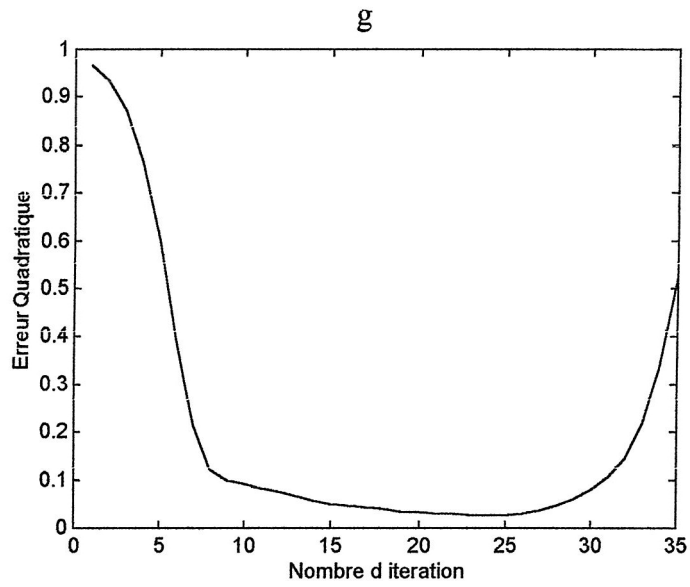


Figure 4.10 : Restauration par la méthode de Tikhonov-Miller pour SNR=40 db

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré après 20 itérations
d- Spectre du signal restauré





e- Signal test restauré après 35 itérations
f- Spectre du signal restauré
g- variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Restauration par l'approche proposée :

Avec un SNR =12 db

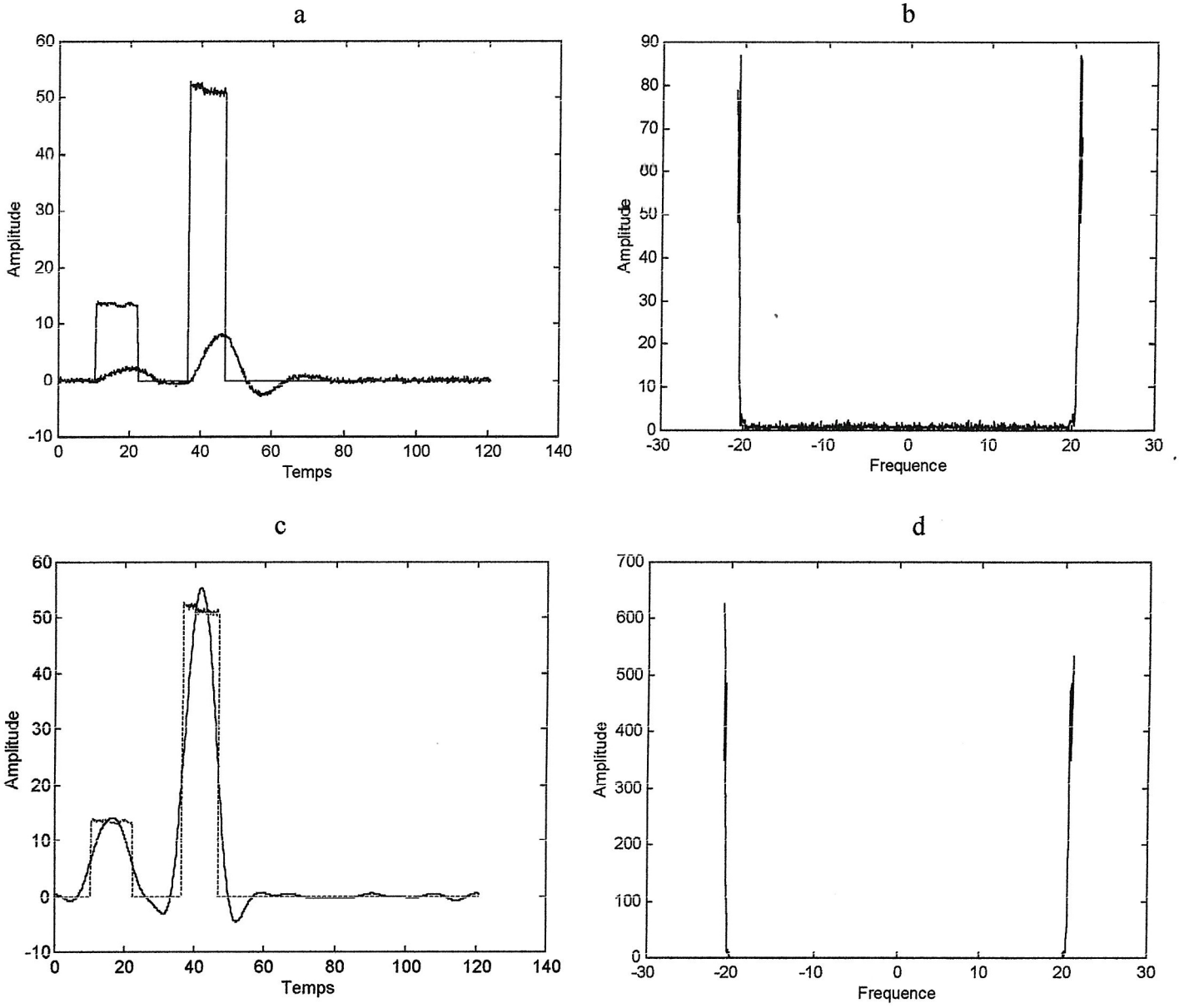
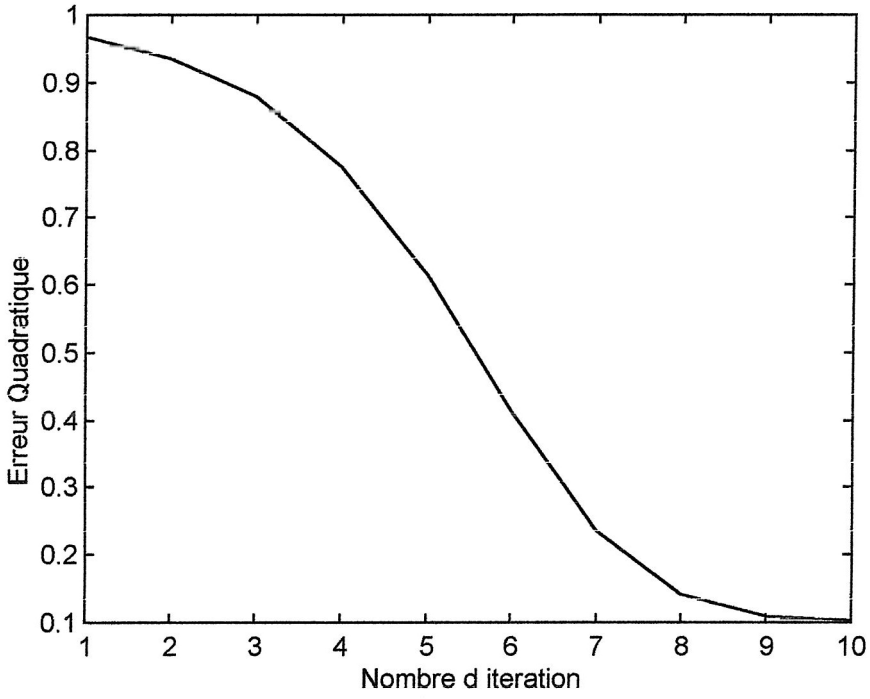


Figure 4.11 : Restauration par l'intégration du filtrage optimal dans la procédure de déconvolutione pour un SNR=12 db après 10 itérations

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré après 20 itérations
d- Spectre du signal restauré



Variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Restauration par l'approche proposée :

Avec un SNR =8 db

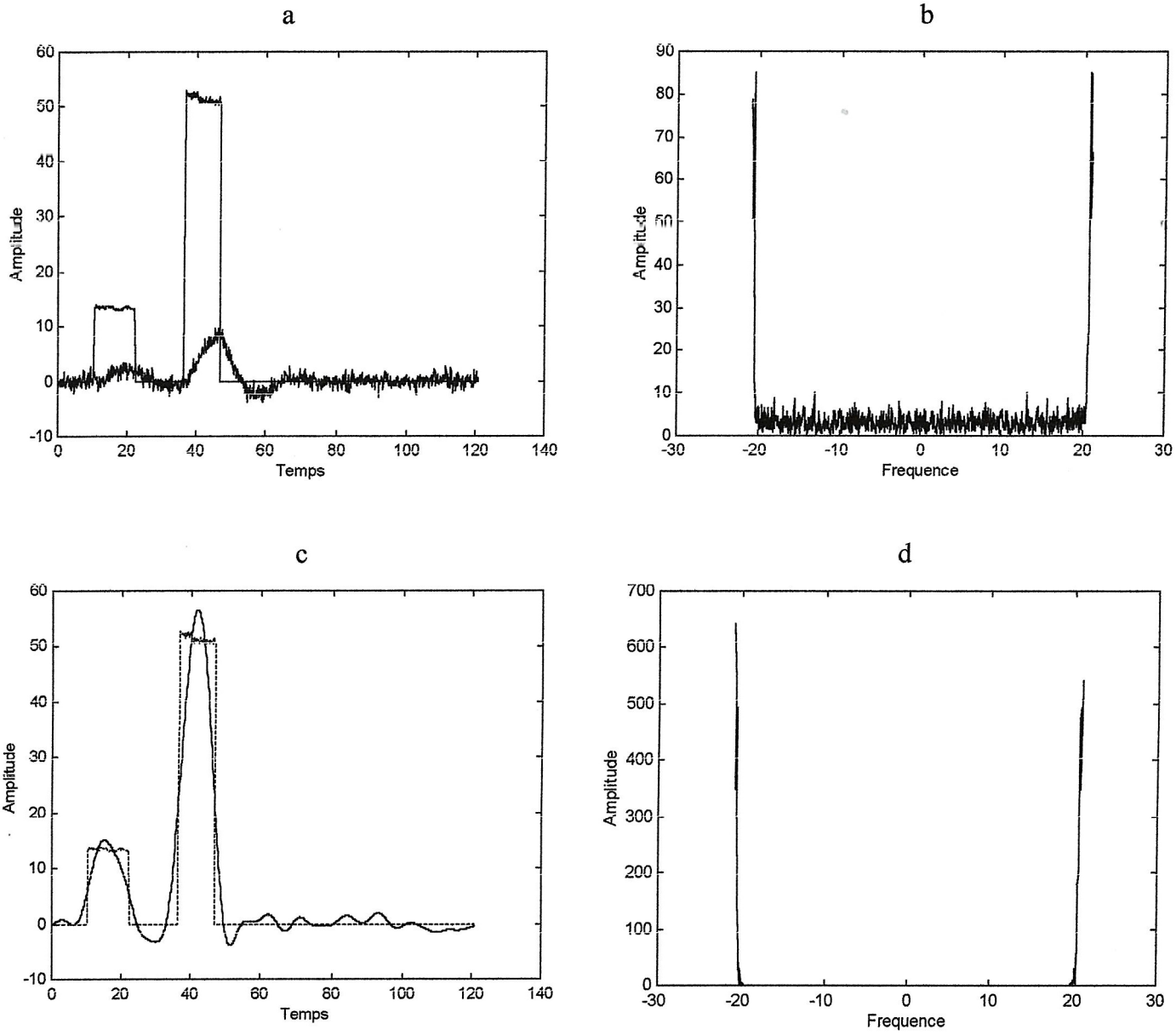
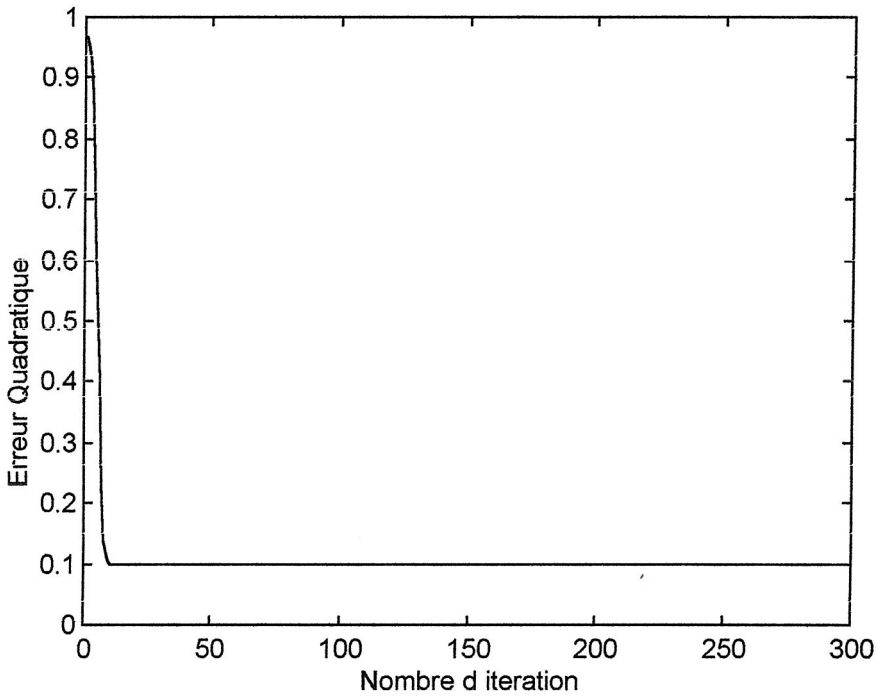


Figure 4.12 : Restauration par l'intégration du filtrage optimal dans la procédure de déconvolution pour un SNR=8 db après 300 itérations

a- Signal test et signal dégradé bruité
b- Spectre du signal dégradé et bruité
c- Signal test et signal restauré après 20 itérations
d- Spectre du signal restauré



Variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Cas 2D :

La robustesse de la méthode de Thikhonov-Miller est éprouvée en présence d'un bruit inévitable sur le signal enregistré. La nouvelle approche est plus robuste, elle repose sur deux paramètres de régularisation, résultant de la combinaison du filtrage optimale et de la déconvolution .

On remarque que les images restaurer par la méthode de Tikhonov-Miller (voir figure(4.13)) se dégradent au delà d'un certain nombre d'itérations. Ce phénomène est surmonté par l'intégration du filtrage optimal dans la procédure de restauration (voir figure (4.14)). Il apparaît clairement que l'introduction du filtrage optimal dans la procédure de restauration améliore la robustesse de la technique de Tikhonov-Miller.

méthode de Gradient conjugué et Singh modifié :

D'après les résultats obtenus, voir figures (4.15) et (4.16), on remarque que les images restaurées par l'algorithme de Singh sont obtenues pour un nombre d'itérations inférieure à celle de l'algorithme du Gradient conjugué comme le montre le graphe de la variation de l'erreur de chaque algorithme d'où l'algorithme de Singh possède une convergence rapide par rapport à l'algorithme du Gradient conjugué.

Image Originale :

Image dégradée par un flou carré et un bruit blanc (SNR =50 db) :

La restauration par la méthode de Tikhonov-Miller :

6

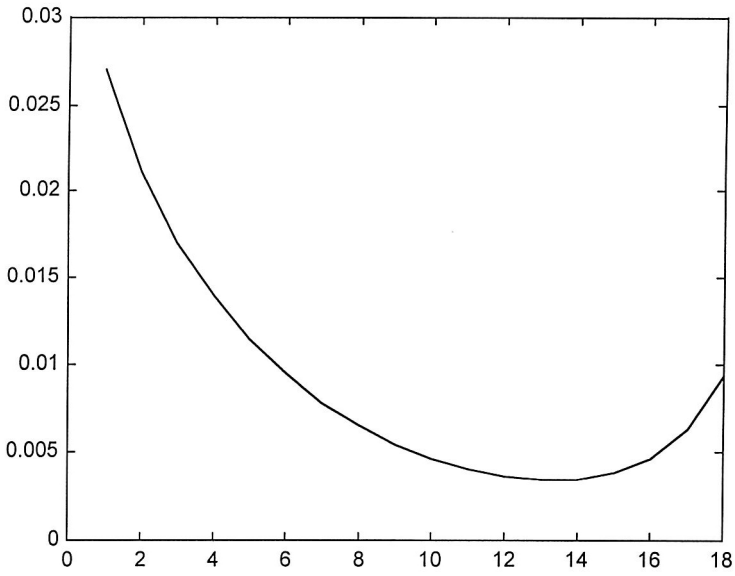
8

11

14

16

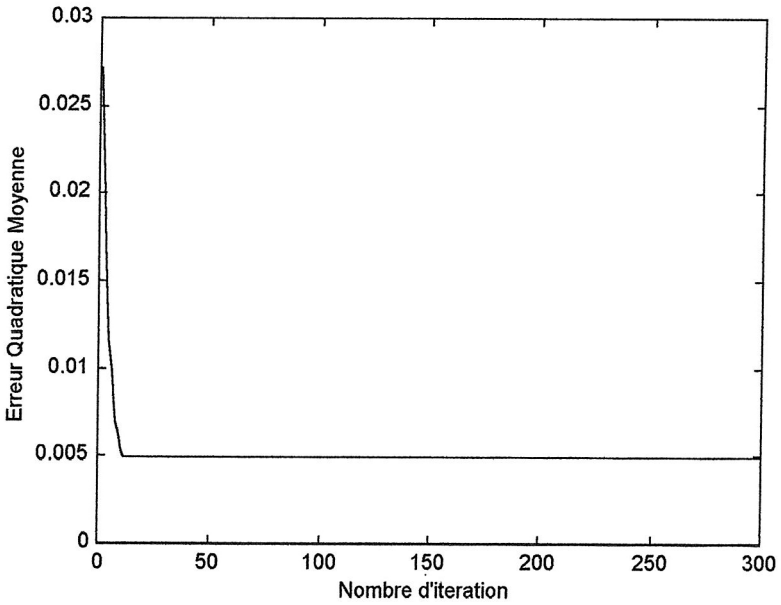
18



Variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Figure 4.13

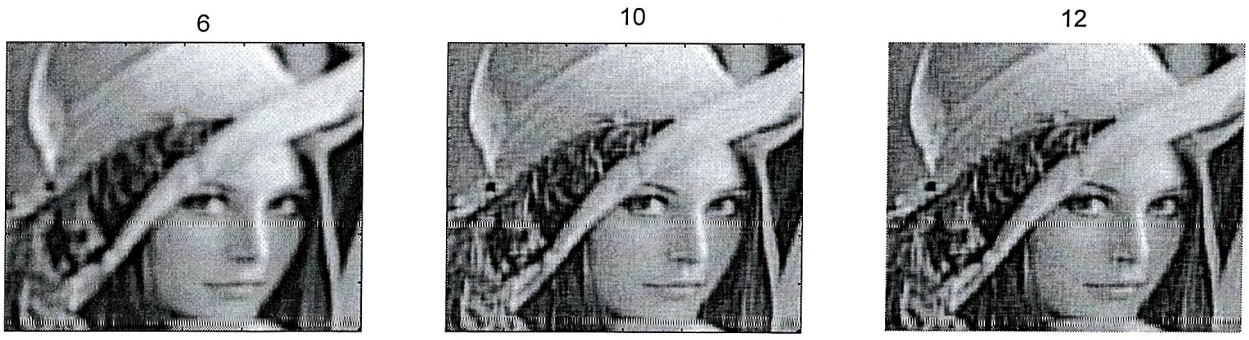
Restauration par la combinaison du filtrage optimal et la procédure de déconvolution :

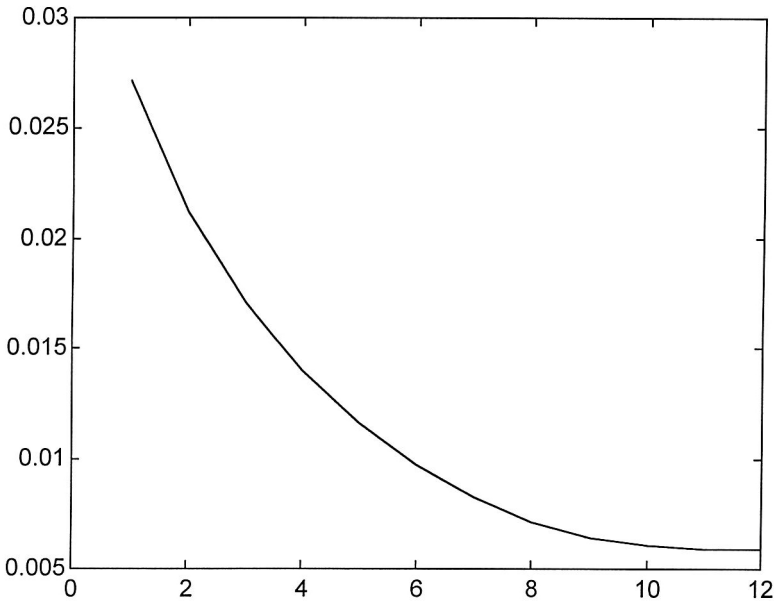


Variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Figure 4.14

La restauration par la méthode de Singh modifiée :

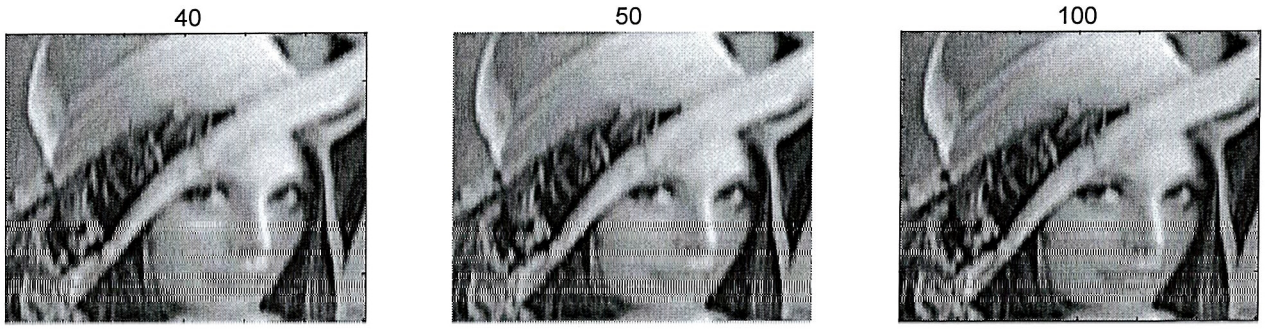


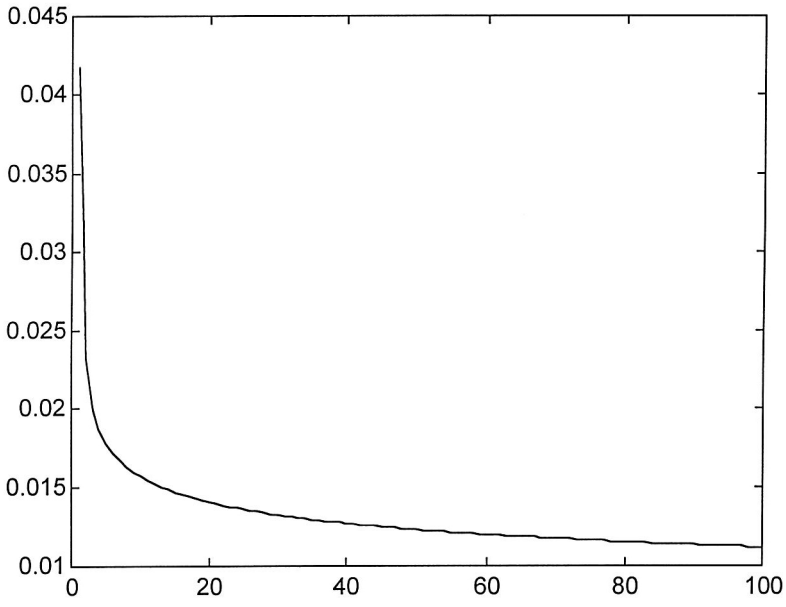


Variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Figure 4.15

La restauration par la méthode de Gradient conjugué :





Variation de l'erreur en fonction du nombre d'itérations

Figure 4.16

Conclusion :

Ce travail avait pour but une contribution à la déconvolution monodimentionnelle et bidimentionnelle de signaux dégradés par un processus linéaire et invariant. En effet, il nous a été possible de vérifier au cours de ce travail, que l'utilisation de la méthode de Moindre Carrée conduit à des solutions instables et dans lesquelles le bruit est amplifié.

Dans l'étude bibliographique s'est dégagée l'idée que toutes les méthodes de déconvloution utilisables devaient leur réussite à l'utilisation de diverses régularisations. Celles-ci reposent sur des propriétés déterministes des signaux traités mais aussi sur les propriétés statistiques.

L'étude comparative que nous avons entreprise à travers des exemples d'illustrations à montrés que les algorithmes itératifs sont attractifs par l'introduction de diverses informations a priori qui permettent d'accélérer la convergence de ces algorithmes.

Toutefois, nous avons pu constater que les algorithmes déterministes ne permettent pas de restaurer efficacement le signal d'entrée (image)en présence d'un bruit de faible SNR.

Afin de surmonter cette difficulté, nous avons recouru aux méthodes stochastiques basées sur le filtrage de Kalman et sur la combinaison du filtrage optimal et la procédure de restauration.

Nous avons vu que l'approche stochastique a l'avantage d'utiliser explicitement les paramètres statistiques du bruit. Nous avons montrer une interprétation bayésienne de l'approche de régularisation, l'équation (2.17)montre également l'effet régularisant de la méthode MAP.

Dans le cas de processus linéaires gaussiens centrés et pour un signal d'entrée qui peut être stationnaire, l'estimateur MAP conduit au filtre de Wiener, nous avons montrer que ce filtre présente plusieurs restrictions dues essentiellement à la stationnarité du signal original qui doit être un signal aléatoire.

Les méthodes itératives ont l'avantage d'introduire de diverses informations a priori sur le signal à estimer. elles ont améliorer la solution au sens de Moindre Carrée. Ces algorithmes n'est autre qu'une approximation du filtre inverse, mais elles ne réduisent pas l'effet du bruit sur la solution, on montre que pour des signaux de faible SNR la solution devienne instable au-delà d'un certain nombre d'itération. Le choix d'arrêt de ces algorithmes reste subjectif (critère visuel).

L'intégration du filtrage optimal dans la procédure de restauration permet d'améliorer la solution. On a vu que les images restaurées par cette approche donnent des solutions acceptables et l'erreur quadratique ($\|u-\hat{u}\|^2$) diminue d'une itération à l'autre.

L'utilisation de la méthode de Gradient conjugué dans le cas 2D, nous permet de distingué que la méthode de Singh qui est de convergence quadratique à une vitesse de convergence plus rapide à celle de Gradient conjugué.

Bibliographie :

[1] **G.E.B.Archer and D.M.Titterington,** "On some Bayesian regulaisation methods for image restoration", Dept. Statis., Univ. Of Glsgow, IEEE trans. Imageprocessing, vol.4, No 7, pp 989-995, 1995.

[2] **V.Badeva, V.Morosov** problèmes incorrectement posés, théorie et application, ed. Masson, 1991.

[3] **E.Sekko, P.Sarri, G.Thomas,** "Robust constrained deconvolution", presented at ICASSP 96, volume III PP 1976-1998.

[4] **S.Singh, S.N.Tandon,** an iterative restoration technique, signal processing, 11(1), pages 1-11, 1986.

[5] **D.Slepian,** "Linear last-square filtering of distored images", journal of the optical society of america, volume 57, pp 918-922, 1967.

[6] **N.Wiener,** "The extrapolation, interpolation and smothing of stationnary time series", New york : wiley, 1949.

[7] **Yu-li tou and M.Kaveh,** "A regularisation approch to joint blur identification and image restoration", IEEE trans.Image processing, vol 5, No 3, 1996.

[8] **R.E.Kalman and R.S.Bucy.** New results in linear filtering and prediction theory. J. Basic Eng, 83 : 95-107, 1960.

[9] **B.D.O.Anderson and J.B.Moore.** Linear optimal control, Prentice.hall, 1974.

[10] : **G. Demoment.** Déconvolution des signaux. Polycopié de l'ESE, 1987.

[11] : **K. Miller.** Least –squares methods for ill –posed problems with a prescribed bound. SIAM J. Math Anal, 14 : 651-667,1977.

[12] : **TIKHONOV A.N. & ARSENIN V.Y.,** « Solution of ill-posed problems », New york : Halsted, 1977.

[13] : **BIRAUD Y.G.,** «les méthodes de déconvolution et leurs limitations fondamentales », Revue de physique appliquée, T.11, N° 2, Mars 1976, pp. 203-214.

[14] **WILLSKY A.S.,** «Digital Signal Processing and Control and Estimation Theory», Cambridge, MA : M.I.T. Press, 1979.

[15] : **ANDERSON H.C & Hunt B.R.,** «digital Image Restoration », Prentice-Hall, Inc. ,Englewood Cliffs, NJ, 1977.

[16] : **Hunt B.R.,** « Bayesian Methods in Nonlinear Digital Image Restoration », IEEE Trans. Computers, vol. C-26, N° 3, 1977, pp.219-229.

[17] : **Demoment G.,** «les Aventures d'Adèle Blansec », Rapport Interne L2S, N° 82/066, 1982, pp.1-29.

[18] : **KTSAGGELOS A.K.,** « Iterative Image Restoration », Opt. Eng. , Vol. 28, 1989, pp. 735-748.

[19] **KATSAGGELOS A.K., BIEMOND J., SCHAFER R.E. & MERSERAU R.M.,** « A Regularized Iterative Image Restoration Algorithm », IEEE. Trans. Acoust. Speech Signal Processing, Vol. ASSP-39, 1991, pp. 914-929.

[20] : **ORTEGA J.M & RHEINBOLDT W.C.,** « Iterative Solution of Nonlinear Equations In Several Variables », Academic press, New York, 1970.

[21] : **THOMAS G.,** «an Improvemennt of the Van-Cittert's Method », Proc. IEEE ICASSP'81, Atlanta (USA), 1981, pp. 47-49.

[22] : **THOMAS.G.,** «reconstitution de signaux déformés par un système linéaire », Thèse de Doctrat d'Etat Es-Sciences, Université Claude Bernard Lyon I, N° 81-48, 1981.

[23] : **GOURDIN A. & BOUMAHRAT M.,** « Méthodes numériques Appliquées», OPU, Alger, 1991.

[24] : **BRACEWELL R.N., & ROBERTS J.A.,** « Aerial Smoothing in Radio-astronomy », Australian J. Physics, Vol. 7, 1954, pp. 615-640.

[25] : **HELSTROM C.W.,** « Image Restoration by the Method of Least squares », J. Opt. Soc. Amer. , Vol. 57, 1967, pp. 297.

[26] : **PEACOCK B. & TRETITEL S.,** «predictive Deconvolution : Theory and practice », Geophysics, Vol. 34, N° 2, 1969, pp. 155-169.

[27] : **RICE R.B.,** «inverse Convolution Filters », Geophysics, Vol. 27, N° 1,Feb. 1962, pp. 4-18.

[28] : **ROBINSON E.A & TREITEL S.,** « Geophysics Signal Analysis », Prentice-Hall, Signal Processing Series 1980.

[29] : **PHILIPS D.L.,** « A Technique for the Numerical Solution of Certain Integral Equations of the First Kind », J. Assoc. Comput. Mach. , Vol. 9, 1962, pp. 84-97.

[30] : **TWOMEY S.,** « The Application of Numerical Filtering to the Solution of Integral Equations Encountred in Indirect Sensing Mesurments », J. Franklin. Inst. , Vol. 279, N° 2, Feb. 1965, pp. 95-109.

[31] : **HUNT B.R.,** «the Inverse Problem of Radiiography », Math. Biose. , Vol. 8, 1970, pp. 161-179.

[32] : **KATSAGGELOS A.K., BIEMOND J., SCAFER R.W. & MERSEREAU R.M,** « A general Formulation of Constrained Iterative Restoration Algorithms », in Proc. IEEE ICASSP'85, TAMPA (USA), 1985, pp. 700-703.

[33] : **TURIN.G** «on The Estimation in the Presence of noise of the Impulse Response of a Random Linear Filter ». IRE. Trans. On inform. Theory, 157.

[34] : **WALTER.E and PRONZATO.L** «identification de Modèles Paramétriques à partir de Données Expérimentales. MASSON, 1994.

[35] : **Demoment.G, REYNAUD.R, and SEGALEN. A** «estimation sous Optimale Rapide pour la Déconvolution en temps réel. In Actes 9^e colloque CRETSI, pages 205-210, 1983.

[36] : **TRAMINI.S., ANTONINI, BARLAUD.M, and AUBERT. G** «filtrage non Linéaire Dynamique pour la Compression des Images ». Acres congrès GRETSI, Grenoble'97, pages 303-306, 1997.

[37] : **COMMENGES.D** «the Deconvolution Problem : Fast Algorithm Including the Preconditionned Conjugate-Gradient to Compute a map Estimator ». IEEE Trans. On Haut. Control, 29(3) : 229-243, 1984.

[38] : **ARCHER G.E and TITERINGHTON** « On Some Bayesian Regularisation Method for Image Restoration ». IEEE Trans. Image Processing, 4(7) : 989-995, 1995.

[39] : **LANNES A., ROQUES S. & CASANOVE M.J.,** « Resolution and Robustesse in Image Processing :A new Regularisation Principle», J. Opt. Soc. Amer., Vol. 4, 1987, pp. 189-199.

[40] : **DEMOMENT G.,** « Image Reconstruction and Restoration :Overview of Common Estimation Structures and Problems », IEEE Trans. ASSP, Vol. ASSP-37, No. 12, Dec. 1989, pp. 202-2036.

[41] : **BEEX A.A.L.,** « Iterative Reconstruction of Space-Limited Scenes from Noisy Frequency-Domain Mesurments », in proc. IEEE ICASSP'83, Boston (USA), 1983, pp. 147-150.

[42] : **STARK H.,** « Image Recovery : Theory and Application », Academic Press, Inc, New york 1987.