

N° ordre

2000

République Algérienne Démocratique Populaire

**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche
scientifique**

Centre Universitaire de 8 Mais 45-Guelma

Institut de Génie Electrique

Mémoire de Magister

En vue de l'obtention du diplôme de
Magister en Electronique

**Option : Informatique Industriel
et Imagerie**

CONTROLE DIFFUSIF D'UN BRAS FLEXIBLE

Présenté par : **Badreddine BOUDJEHEM**

Soutenu le : ././2000

Devant le jury :

Président	:	M. NEMAMCHA	Prof	C. U. de Guelma
Rapporteur	:	H. TEBBIKH	MC	C. U. de Guelma
Examineurs	:	N. DEBBACHE	MC	U. de Annaba
		M. BEHLOUL	MC	C. U. de Guelma
		B. BENZELTOUT	PhD	C. U. de Guelma

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer à mon rapporteur monsieur **H. TEBBIKH**, mes vifs remerciements et ma profonde gratitude pour son aide précieuse, sa disponibilité, sa compréhension, ses conseils judicieux tout le long de l'élaboration de ce travail.

Je remercie le professeur monsieur **M. NEMAMCHA**, qui me fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie également monsieur **N. DEBBACHE** d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie aussi messieurs **M. BEHLOUL** et **B. BENZELTOUT** d'avoir accepté de participer au jury.

Je remercie l'ensemble des enseignants de l'institut de Génie Electrique.

Enfin, je ne saurais oublier tous ceux qui m'ont encouragé au cours de la réalisation de ce travail.

SOMMAIRE

Introduction.....	05
-------------------	----

Chapitre 1 Modèle diffusif d'un intégrateur fractionnaire

1 Modèle mathématique.....	08
1.1 Calcul fractionnaire.....	08
1.2 Difficultés liées au calcul fractionnaire.....	10
1.3 Domaines d'application.....	10
1.4 Modèle diffusif.....	11
1.5 Dérivateur fractionnaire d'ordre α	13
1.6 Calcul direct de la mesure à partir de la transformée de Laplace.....	14
2. Approximation numérique.....	15
2.1 Principe.....	15
2.2 Remarques.....	17
2.3 Discrétisation en temps.....	17
2.4 Approximation numérique d'un dérivateur fractionnaire.....	18
2.5 Choix des paramètres de l'intégrateur.....	18
2.5.1 Choix du Réseau (des pôles).....	19
2.5.2 Choix de ξ_{\min}, ξ_{\max}	19
2.5.3 Choix des fonctions d'interpolations Λ_k	20
2.6 Erreur et convergence.....	21
3. Réalisation électronique de l'intégrateur fractionnaire.....	22
4. Simulation numérique.....	23

Chapitre 2 Contrôle absorbant

1. Dynamique du bras.....	27
1.1 Le modèle.....	27
1.2 proposition.....	29
2. Contrôle absorbant.....	30
2.1 Principe.....	30
2.2 Décomposition du bras suivant ses modes d'onde.....	31
2.3 Synthèse du contrôle.....	33
2.3.1 Cas où l'axe de l'articulation n'est pas fixe.....	33
2.3.2 Cas où l'axe de l'articulation est fixe.....	35
3. Analyse et discussion.....	38
3.1 Coefficients de réflexions.....	38
3.2 Fonction du transfert.....	41
3.3 Système global.....	41
4. Contrôle diffusif.....	42

4.1 Système augmenté.....	42
4.2 Stabilité du Système augmenté.....	44
5. Conclusion.....	46

Chapitre 3 Contrôle Modale du bras

1. Approximation modale.....	47
1.1 Principe.....	47
1.2 Représentation modale du bras.....	48
1.2.1 Calcul des fonctions propres du bras.....	50
1.2.2 Résolution du système.....	53
1.3 Discrétisation en temps.....	54
1.4 Système global approché.....	56
1.5 Calcul de l'énergie.....	57
2. Organigramme.....	59
3. Simulation numérique.....	63

Chapitre 4 Contrôle diffusif optimal

1. Contrôle optimal.....	69
1.1 Présentation du problème.....	69
1.2 Condition initiale de diffusion.....	70
2. Optimisation des conditions initiales de diffusion.....	71
2.1 Contrôle avec critère de suivi d'une trajectoire en couple.....	71
2.1.1 Position du problème.....	71
2.1.2 Solution analytique.....	72
2.1.3 Approximation numérique.....	73
2.1.4 Simulation numérique.....	74
2.2 Contrôle avec critère d'optimisation sur le positionnement et l'énergie du système.....	75
2.2.1 Position du problème.....	75
2.1.2 Solution numérique.....	75
2.1.3 Résultats de la simulation.....	76
2.3 Contrôle avec critère de minimisation de l'énergie et du système du bras pendant le déplacement.....	77
2.2.1 Position du problème.....	77
2.1.2 Solution numérique.....	78
2.1.3 Résultats de la simulation.....	78
Conclusion.....	81
Bibliographie.....	82
Annexes.....	84

NOMENCLATURE

$a_i(t)$: coefficients associées à θ
b_i	: coefficient concernant l'intégrateur
C_p	: coefficient de multiplicité
C_{12}	: coefficient du compensateur
E_z	: énergie globale
E_b	: énergie mécanique du bras
E_φ	: énergie associée aux variables diffusives
f	: entrée
F	: transformée de fourier
h	: réponse impulsionnelle
H	: réponse fréquentielle
I^α	: intégration d'ordre α
L	: transformée de Laplace
N_t	: nombre d'itérations en temps
p	: variable de Laplace
q	: raison
Q	: nombre de variables diffusives
r_{pp}	: coefficient de réflexion θ_{i1} vers θ_{r1}
r_{sp}	: coefficient de réflexion θ_{i2} vers θ_{r1}
r_{ps}	: coefficient de réflexion θ_{i1} vers θ_{r2}
r_{ss}	: coefficient de réflexion θ_{i2} vers θ_{r2}
S_r	: matrice de réflexion en boucle ouverte
S_{CL}	: matrice de réflexion en boucle fermée
$u(t)$: couple
$v(t)$: force
X	: variable d'état
y	: sortie de l'intégrateur
y_θ	: vecteur d'état $(\theta, \partial_x \theta, \partial_x^2 \theta, \partial_x^3 \theta)$
Y	: matrice de transformation
α	: ordre d'intégration
Δt	: pas de temps
∂_t^α	: dérivation d'ordre α
γ	: coefficient de propagation
$\varphi(x,t)$: fonction diffusive
$\hat{\varphi}$: transformé de fourier de $\varphi(x,t)$ en variable x
$\tilde{\varphi}$: valeur approchée
$\hat{\varphi}_k^n$: valeur discrétisée pour $\xi = \xi_k$ à l'instant $t = t_n$

Φ_i	: fonctions propres
η_i	: valeurs propres
κ	: nombre d'ondes
λ	: coefficient d'atténuation
μ	: mesure
μ_α	: mesure correspondante à α
ω	: pulsation
ξ	: variable spatiale de $\hat{\varphi}$
$\theta(x,t)$: déflexion en x
θ_{i1}	: amplitude d'onde progressive incidente
θ_{i2}	: amplitude d'onde champs proche incidente
θ_{r1}	: amplitude d'onde progressive réfléchie
θ_{r2}	: amplitude d'onde champs proche réfléchies
θ_i	: vecteur des ondes incidentes
θ_r	: vecteur des ondes réfléchies
w	: vecteur d'état des modes d'ondes
$\ \cdot \ $: norme

INTRODUCTION

Au cours de cette dernière décennie, une tendance s'est développée pour résoudre le problème de contrôle des systèmes dynamiques, qui consiste à réduire leur comportement instable lors de l'asservissement. La difficulté vient du fait qu'il faut supprimer les oscillations qui peuvent prendre naissance dans le système.

Ceci est d'autant plus vrai pour des systèmes dit flexibles qui sont des systèmes à paramètres répartis décrits par une équation aux dérivées partielles.

La commande active de vibrations, des structures flexibles, a suscité de grandes attentions ces dernières années. Mais elle présente généralement de graves inconvénients aux hautes fréquences et limite considérablement l'applicabilité des approches classiques telle que l'analyse modale.

Ces inconvénients sont essentiellement liés au grand nombre de modes de vibrations significatifs dont les fréquences et les formes propres sont très sensibles aux inévitables erreurs de modélisation. Alors, l'analyse modale ne peut pas fournir un modèle suffisamment précis sur une gamme modale riche en fréquences. D'autre part, la dynamique des actionneurs et des capteurs peut mener à déstabiliser les modes proches des bandes des actionneurs et des capteurs. Par conséquent, ce contrôle peut dans certaines conditions, aggraver les oscillations au lieu de les supprimer. Plus généralement, ces modèles deviennent inefficaces, dès que :

- Les exigences sur l'efficacité du contrôle sont sévères.
- Le contrôle considéré est construit à partir de qualités prédictives globales du modèle.

La nouvelle approche dite passive consiste à ne prendre en compte que les propriétés locales de vibration. Les propriétés de propagation sont locales et ne dépendent que de quelques paramètres physiques, contrairement aux modes et fréquences propres qui eux dépendent, en outre de la géométrie, du domaine de vibration.

La mise en évidence de l'atténuation des vibrations commence, dans beaucoup de cas, l'étude de la réponse de la structure flexible à une force typique, localement appliquée, en terme de déplacement de perturbations élastiques. Ensuite, il faut tenir compte des forces les plus grandes qui commencent généralement aux bords. Ce point de vue mène naturellement à penser qu'il peut être possible de modifier les chemins normaux des perturbations pour manœuvrer ou diriger autrement l'énergie dans la

structure. Alors, il n'est pas nécessaire d'observer les vibrations tout le long du bras pour réaliser le contrôle, il suffit de connaître celles qui arrivent au bout pour avoir un contrôle sur les ondes réfléchissantes indépendamment de la vibration globale. Pour cela, il s'agit donc d'observer ces ondes par une impédance terminale. Ce type de contrôle est nommé, dans le cas de l'équation d'onde monodimensionnelle, adaptation d'impédance.

Cette idée a été appliquée, en premier lieu, à des systèmes représentés par l'équation d'onde tels que la corde et le câble élastique [16] et récemment étendue à l'équation des poutres ainsi que d'autres structures flexibles.

Dans le cas de la poutre flexible encastrée - libre étudié dans [23], la fonction de transfert des compensateurs est une fonction irrationnelle. Sa réalisation a été effectuée expérimentalement par des compensateurs analogiques.

Le même problème a été étudié dans [11]. Dans ce cas, le compensateur absorbant, dont la fonction de transfert est irrationnelle, a été simulé numériquement.

En [7], le même problème a été abordé avec un autre principe basé sur la minimisation des effets des ondes réfléchissantes sur les ondes incidentes dans le sens que la norme H_{∞} de la matrice de réflexion est minimum. Les compensateurs trouvés ont des fonctions de transfert irrationnelles mais approchées par des polynômes rationnels en utilisant l'expansion fractionnaire continue (Annexe 2).

Ce travail est un prolongement naturel de cette série d'applications et à pour but de stabiliser un bras flexible articulé à l'une de ses extrémités et libre à l'autre par approche diffusive. Le bras est modélisé par la poutre vibrante uniforme d'Euler-Bernoulli.

Nous avons appliqué un couple au niveau de l'articulation qui sert à stabiliser le bras autour d'une position d'équilibre et de le ramener à une position désirée. La déviation du bras doit être petite pour assurer la linéarité du système.

La synthèse de tel contrôle, dans le domaine fréquentiel, fait apparaître d'opérateurs d'intégration non-standards d'ordre fractionnaire. Ce type de contrôle peut être nommé "contrôle en boucle fermée par retour fractionnaire".

Les difficultés liées à ces opérateurs rendent l'application des outils classiques en contrôle très difficile et limitée, notamment l'étude de la stabilité. L'inconvénient majeur réside sur leur comportement héréditaire ainsi que la nature du noyau de convolution.

Il existe un modèle très récent proposé dans [12] et développé ensuite dans [5], [9] et [6]. Ce modèle est basé sur le comportement entrée/sortie particulier de l'équation de diffusion, de nature dissipative, dont la dimension infinie de la variable d'état est en quelque sorte utilisée pour résumer l'histoire de l'entrée de telle sorte que les convolutions à mémoire longue définie par les opérateurs fractionnaires soient

disponibles en sortie. Le modèle diffusif a donné, pour le contrôle des systèmes viscoélastique [2] et absorption des ondes bidimensionnelles [21], de bons résultats.

Parmi les avantages de ce modèle, la souplesse de la mise en œuvre numérique. Pour cela, il est montré dans [11], que, si nous respectons quelques critères bien définis, il est possible d'avoir une bonne approximation des opérateurs fractionnaires.

Après la stabilisation du bras, nous abordons le problème de la position du bras qui a été formulé comme un problème d'optimisation sur l'état en minimisant une fonctionnelle de coût. La position désirée est imposée par les conditions initiales de diffusion en tenant compte de l'énergie globale du système et l'énergie mécanique du bras pendant le contrôle.

Cette étude est organisée en 4 chapitres :

Dans le chapitre 1 nous présentons les principales propriétés du calcul fractionnaire, les difficultés qui lui sont liées et le modèle diffusif d'un intégrateur d'ordre fractionnaire ainsi que son approximation numérique.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude et l'analyse théorique de la stabilisation du bras afin d'évaluer et construire des compensateurs dit "compensateurs absorbants d'ondes".

L'approximation numérique du système augmenté est l'objet du chapitre 3. Cette approximation est basée sur l'approche modale. Les principaux résultats obtenus sont présentés et interprétés.

Dans le chapitre 4, nous abordons le problème du contrôle de la position du bras, la mise au point des différents critères d'optimisations et la simulation numérique correspondante.

CHAPITRE 1

MODELE DIFFUSIF D'UN INTEGRATEUR FRACTIONNAIRE

L'idée du calcul fractionnaire est apparue depuis plus de trois siècles lorsqu'en 1695 le mathématicien Leibniz le mentionna dans une de ces communications adressée à l'Hospital. Il a fallu cependant attendre Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1853) et Heaviside (1892) pour que la théorie du calcul fractionnaire soit formalisée. Issue des problèmes purement théoriques, son champ d'application est actuellement très vaste et touche presque tous les domaines.

1. MODELE MATHEMATIQUE

1.1 Calcul fractionnaire

1.1.1 Définitions

Soit la fonction f définie sur R^+ à valeur dans R . L'intégrale d'ordre $\alpha \in [0 + \infty]$ de f est donnée par la formule de Riemann - Liouville :

$$I^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau \quad (I.01)$$

où Γ est la fonction Gamma définie par l'expression (I.02) :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt \quad (I.02)$$

A partir de (I.01), on peut assimiler l'intégral d'ordre α au produit de convolution de la fonction f avec un opérateur Y_α , en d'autres termes :

$$I^\alpha f(t) = (Y_\alpha * f)(t) \quad (I.03)$$

De même, on définit l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α (inverse de I^α), noté D_t^α , comme suit :

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(\tau) d\tau \quad (I.04)$$

La relation entre les deux opérateurs peut être alors définie par :

$$I^\alpha f(t) = y(t) \Leftrightarrow f(t) = D_t^\alpha y(t) \quad (I.05)$$

Pour passer d'une expression à l'autre, il suffit de remarquer que :

$$I^\alpha f(t) = y(t) \Rightarrow I^{[\alpha]+1-\alpha} y(t) = I^{[\alpha]+1-\alpha} I^\alpha f(t) \Rightarrow f(t) = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} I^{[\alpha]+1-\alpha} y(t) = D_t^\alpha y(t) \quad (I.06)$$

où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

L'opérateur modifié de dérivation d'ordre α est défini par :

$$\partial_t^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (I.07)$$

1.1.2 Remarque

Les opérateurs I^α , D_t^α et ∂_t^α sont des opérateurs "héréditaires" dans le sens qu'ils ne tiennent pas compte seulement de l'allure locale des fonctions f auxquelles ils s'appliquent, mais aussi à leurs comportements précédents.

Tout autre opérateur fractionnaire peut être déduit en utilisant la propriété des dérivées :

$$D_t^\beta f(t) = \frac{d^n}{dt^n} D_t^\alpha u(t) \quad (I.08)$$

avec $\beta = n + \alpha$ $0 < \alpha < 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

1.1.3 Propriétés

Soit f une fonction de $L(0, T)$, alors :

- Les relations suivantes sont toujours satisfaites :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I^\alpha f = f \quad (I.09)$$

$$D_t^\alpha I^\beta f = I^{\beta-\alpha} f \quad \beta \geq \alpha \quad (I.10)$$

$$D_t^\alpha D_t^\beta f = D_t^{\beta+\alpha} f \quad (\text{I.11})$$

- Lorsque la fonction f est absolument continue et $0 < \alpha < 1$, nous avons :

$$I^\alpha \partial_t^\alpha f(t) = f(t) - f(0) \quad (\text{I.12})$$

$$\partial_t^\alpha I^\alpha f(t) = f(t) \quad (\text{I.13})$$

$$\partial_t^\alpha f(t) = I^{|\alpha|+1-\alpha} \frac{d^{|\alpha|+1}}{dt^{|\alpha|+1}} f(t) \quad (\text{I.14})$$

- Lorsque $\sup f \in [0, \infty]$ et $F[f]$ existe, où F désigne la Transformée de Fourier, nous avons les relations suivantes :

$$F[D_t^\alpha f](\omega) = (i\omega)^\alpha F[f](\omega) \quad (\text{I.15})$$

$$F[\partial_t^\alpha f](\omega) = (i\omega)^\alpha [F[f](\omega) - (i\omega)^{\alpha-1} f(0)] \quad (\text{I.16})$$

- Lorsque $f(0) = 0$ les deux définitions de D_t^α et ∂_t^α coïncident.

1.2 Difficultés liées au calcul fractionnaire

Les difficultés rencontrées lors de l'étude des systèmes contenant des opérateurs fractionnaires proviennent essentiellement du fait que ces opérateurs sont héréditaires et à noyau singulier ce qui rend l'approximation numérique très difficile et demande un très grand stockage (une longue mémoire). Les opérateurs de convolution prennent en compte toute l'évolution passée du système d'autant que la singularité du noyau en 0 nécessite un pas d'intégration très petit alors que cette lente décroissance pour t tendant vers ∞ nécessite un intervalle d'intégration très long.

En outre, le système n'est pas sous la forme abstraite $\frac{dX}{dt} = AX + Bu$, ce qui rend l'application des outils classiques d'analyse des systèmes, telle que l'étude de la stabilité à travers une fonction de Lyapunov, très difficile.

1.3 Domaines d'application

L'application des méthodes basées sur les systèmes différentiels fractionnaires est de plus en plus fréquente dans les différents domaines scientifiques. Elles sont utilisées essentiellement comme outils de modélisation en Mécanique, Automatique, Rhéologie...etc.

A titre d'exemples, ces méthodes sont actuellement utilisées pour :

- Modéliser le comportement des matériaux.
- Réaliser des composants électroniques à impédance fractionnaire.
- Commander des machines électriques par des correcteurs fractionnaires.
- Modéliser asymptotiquement une flamme sphérique.

1.4 Modèle diffusif

Nous présentons une nouvelle approche basée sur le comportement des entrées-sorties d'une équation de diffusion. L'avantage principal de cette approche est qu'elle permet de réaliser l'opération d'intégration fractionnaire de façon non héréditaire et de remédier à tous les inconvénients précédents liés à l'application des outils classiques de l'analyse, de l'approximation et du contrôle qui deviennent utilisables.

1.4.1 Proposition

Considérons le problème de cauchy monodimensionnel de type diffusion :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(x, t) - \partial_x^2 \varphi(x, t) = f(t) \mu(x) \\ \varphi(., 0) = 0 \\ y(t) = \varphi(0, t) \end{cases} \quad (I.17)$$

où $f(t)$ est la fonction d'entrée à support dans R^+ , μ une mesure positive et $y(t)$ la fonction de sortie.

Par transformation de Fourier par rapport à la variable spatiale x , le système (I.17) devient :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\varphi}(\xi, t) + \xi^2 \hat{\varphi}(\xi, t) &= f(t) \hat{\mu}(\xi) \\ \hat{\varphi}(., 0) &= 0 \\ y(t) &= \frac{1}{2\pi_\xi} \int \hat{\varphi}(\xi, t) d\xi \end{aligned} \quad (I.18)$$

La solution de (I.18) est :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2(t-s)) f(s) \hat{\mu}(\xi) ds \\ y(t) &= \frac{1}{2\pi_\xi} \int \hat{\varphi}(\xi, t) d\xi \end{aligned} \quad (I.19)$$

La sortie est donc:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\xi}^{\xi} \exp(-\xi^2(t-s)) \hat{\mu}(\xi) d\xi] \mu(s) ds \quad (I.20)$$

Posons :

$$h(t-s) = \int_{-\xi}^{\xi} \exp(-\xi^2(t-s)) \frac{\hat{\mu}(\xi)}{2\pi} d\xi \quad (I.21)$$

Alors pour une valeur convenable de $\hat{\mu}$, on a :

$$h(t-s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi}^{\xi} \exp(-\xi^2(t-s)) \hat{\mu}(\xi) d\xi = (t-s)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)^{-1} \quad (I.22)$$

Ce qui donne :

$$y(t) = I^{\alpha} f(t) \quad (I.23)$$

Démonstration [2]

Posons $\tau = t-s$, $\zeta = \xi^2$, l'expression (I.22) devient :

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(-p\tau) \frac{\hat{\mu}(\sqrt{\zeta})}{\sqrt{\zeta}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} L \left[\frac{\hat{\mu}(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}} \right] \quad (I.24)$$

où L désigne l'opérateur Transformée de Laplace.

Si on pose $\hat{\mu}(\xi) = \beta_1 |\xi|^{\gamma-1}$ où β_1 est une constante, alors :

$$L \left[\frac{\hat{\mu}(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}} \right] = \beta_1 L \left[\tau^{\gamma/2-1} \right] = \beta_1 \frac{\Gamma(\gamma/2)}{2\pi(t-s)^{\gamma/2}} \quad (I.25)$$

D'où la nouvelle égalité :

$$(t-s)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)^{-1} = \frac{\beta_1}{2\pi} \Gamma(\gamma/2) (t-s)^{-\gamma/2} \quad (I.26)$$

En utilisant la propriété de la fonction gamma $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(x\pi)}$, nous obtenons les résultats finaux :

$$\beta_1 = 2 \sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \quad 0 < \frac{\gamma}{2} < 1 \quad (I.27)$$

$$\hat{\mu}(\xi) = \gamma \sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) |\xi|^{\gamma-1}, \quad \gamma = \gamma(1-\alpha) \quad (I.28)$$

En prenant $\alpha = \frac{1}{2}$, nous obtenons $\hat{\mu}(\xi) = 2$.

1.4.2 Remarques

- L'équation (I.28) montre qu'il y a une relation directe entre la valeur de α et la mesure $\hat{\mu}(\xi)$. Donc, pour chaque ordre d'intégration α , nous devons calculer la mesure $\hat{\mu}(\xi)$ convenable.
- Il est clair que le système (I.18) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= AX + Bf \\ y &= CX \end{aligned} \quad (I.29)$$

où A est un opérateur dissipatif à dimension infini, B est un opérateur de contrôle et C est un opérateur d'observation.

- Les propriétés de dissipativité et de stabilité asymptotique des opérateurs intégrodifférentiels fractionnaires est préservée par la réalisation diffusive [5] [12] et [6].
- L'état initial a été choisi nul pour satisfaire l'équation (I.01). Une donnée initiale non nulle doit être définie de manière à résumer l'éventuel passé du système avec mémoire, ce qui est évidemment possible [12].

1.5 Dérivation fractionnaire d'ordre α

Soit $z(t)$ la sortie d'un dérivateur fractionnaire d'ordre α et $f(t)$ son entrée, alors, nous pouvons écrire :

$$z(t) = \partial_t^\alpha f(t) = \partial_t (I^{1-\alpha} f(t)) = I^{1-\alpha} \partial_t f(t) \quad (I.30)$$

Le modèle mathématique qui réalise la dérivation d'ordre α est :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\psi}(\xi, t) + 4\pi^2 \xi^2 \hat{\psi}(\xi, t) &= f(t) \hat{\mu}(\xi) \\ \hat{\psi}(\cdot, 0) &= 0 \\ z(t) &= \int_{\xi} [\hat{\psi}(\xi, t) + \hat{v}(\xi) f(t)] d\xi \end{aligned} \quad (I.31)$$

En procédant de la même manière que pour le cas de l'intégration fractionnaire, nous obtenons :

$$\hat{\mu}(\xi) = -2(2\pi)^{1+2\alpha} \sin(\pi\alpha) |\xi|^{1+2\alpha} \quad (I.32)$$

$$\hat{\nu}(\xi) = -\frac{\hat{\mu}(\xi)}{4\pi^2 \xi^2} \quad (I.33)$$

1.6 Calcul direct de la mesure à partir de la transformée de Laplace

Il est possible de construire le modèle diffusif correspondant directement à partir des tables des transformées de Laplace. Pour cela, on note que :

- La relation qui lie le noyau de convolution et la mesure associée est :

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi} L \left[\frac{\hat{\mu}(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}} \right] = L(\hat{\mu}) \quad (I.34)$$

- La fonction de transfert associée à ce noyau est :

$$H(p) = L(h(\tau)) \quad (I.35)$$

- La transformée de Laplace est linéaire et inversible, la mesure $\hat{\mu}$ associée à la somme des deux fonctions $H_1(p)$ et $H_2(p)$ est alors la somme des mesures correspondantes. D'où :

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) \Rightarrow h(t) = h_1(t) + h_2(t) \Rightarrow \hat{\mu} = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 \quad (I.36)$$

- La mesure d'une dérivée peut être déduite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h(t) &= \frac{d}{dt} L(\hat{\mu}) = L(-\xi^2 \hat{\mu}) \\ \Rightarrow H(p) &= p H_1(p) \Rightarrow h(t) = \frac{d}{dt} h_1(t) \Rightarrow \hat{\mu} = -\xi^2 \hat{\mu}_1 \end{aligned} \quad (I.37)$$

- La mesure $\hat{\mu}$ associée au produit des deux fonctions $H_1(p)$ et $H_2(p)$ peut être calculée de la façon suivante :

$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \Rightarrow h(t) = (h_1 * h_2)(t) \Rightarrow \mu = \hat{\mu}_2 \left(\hat{\mu}_1 * \frac{1}{\xi} \right) + \hat{\mu}_1 \left(\hat{\mu}_2 * \frac{1}{\xi} \right) \quad (I.38)$$

2. APPROXIMATION NUMERIQUE

2.1 Principe

D'après le paragraphe précédent, la sortie est :

$$y(t) = \int_0^t \int_{\xi} [\exp(-\xi^2(t-s)) \hat{\mu}(\xi) d\xi] f(s) ds \quad (I.39)$$

Le terme exponentiel assure une décroissance rapide par rapport à ξ ce qui permet de tronquer les hautes fréquences (pour ξ grand) tout en garantissant une bonne approximation. On obtient alors un modèle numérique d'ordre réduit.

Considérons alors un réseau fini dans le domaine $[0, K]$ (c-à-d $\xi \in [0, K]$) et notons :

$$N_Q = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_Q\}, \quad \text{où} \quad 0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_Q = K$$

Alors la discrétisation spatiale du système différentiel (I.18) nous conduit à la forme :

$$\begin{aligned} \partial \hat{\phi}_k &= -\xi_k^2 \hat{\phi}_k + 2f(t) \\ \hat{\phi}_k(t) &= \hat{\phi}(\xi_k, t) \quad k = 1, \dots, Q \\ \hat{\phi}_k(0) &= 0 \end{aligned} \quad (I.40)$$

Si on considère l'interpolation linéaire sur $(\xi_k, \hat{\phi}_k(t))_{\xi_k \in N_k}$ définie par :

$$\tilde{\varphi}(\cdot, t) = \sum_{k=1}^Q \hat{\phi}_k(t) \Lambda_k(\xi) \quad (I.41)$$

où les Λ_k sont les fonctions d'éléments finis de support $[-K, K]$ [12], la sortie du système (I.18) devient :

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi, t) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{\xi} \sum_{k=1}^Q \hat{\phi}_k(t) \Lambda_k(\xi) \quad (I.42)$$

qui peut être écrite sous la forme :

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^Q \hat{\phi}_k(t) \beta_k \quad (I.43)$$

où les termes b_k correspondent aux intégrales sur les segments $[\xi_{k-1}, \xi_{k+1}]$ des fonctions d'éléments finis.

$$b_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_k d\xi = \int_{-\infty}^{\xi_{\min}} \Lambda_k d\xi + \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \Lambda_k d\xi + \int_{\xi_{\max}}^{+\infty} \Lambda_k d\xi \quad (I.44)$$

On note :

$$b_1 = \int_{-\infty}^{\xi_{\min}} \Lambda_k d\xi = \int_0^{\xi_{\min}} \Lambda_k d\xi \quad (I.45)$$

$$b_k = \int_{\xi_{\max}}^{+\infty} \Lambda_k d\xi \quad (I.46)$$

où $\xi_{\min} = \xi_1$ et $\xi_{\max} = \xi_Q = K$

Le principe d'approximation peut être schématisé par la figure I.1.

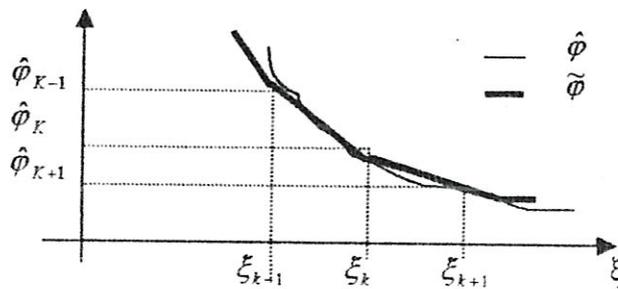


Figure I.1 : Approximation linéaire $\tilde{\varphi}$ de $\hat{\varphi}$.

La représentation d'état correspondante est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = AX(t) + Bf(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases} \quad (I.47)$$

avec : $X(t) = (\hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_2(t), \dots, \hat{\varphi}_k(t))^T$ $\hat{\varphi}_k(0) = 0$ (I.48)

$$A = \text{diag}(-\xi_1^2, \dots, -\xi_k^2, \dots, -\xi_Q^2) \quad (I.49)$$

$$B = (2 \dots \dots \dots 2)^T \quad ; \quad (I.50)$$

$$C = \frac{1}{\pi} (b_1, \dots, b_k, \dots, b_Q) \quad (I.51)$$

La fonction de transfert du système est :

$$\tilde{H}(p) = \sum_{k=1}^Q \frac{2b_k}{p + \xi_k} \quad (I.52)$$

2.2 Remarques

- Nous remarquons que le choix de l'approximation numérique sur les segments extrêmes pourra influencer sur la qualité de l'approximation, nous y reviendrons plus tard.
- Il n'existe pas a priori de contraintes sur les choix des pôles $(\xi_k)_{k=1, Q}$. Cette liberté de choix sera discutée ultérieurement.

2.3 Discrétisation en temps

Le principe de discrétisation par rapport au temps du système (I.18) est le suivant.

D'après la partie précédente, nous devons estimer la valeur de $\hat{\phi}_k$, $k=1, \dots, Q$ à chaque instant.

Posons $t_n = n\Delta t$, $\hat{\phi}(\xi_k, t_n) = \hat{\phi}_k^n$ où Δt est le pas du temps et supposons que f est constant par morceau sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. Comme la solution du système (I.18) est :

$$\hat{\phi}(\xi, t) = \int_0^t \exp(-\xi^2(t-s)) f(s) \hat{\mu}(\xi) ds \quad (I.53)$$

qui s'écrit, sous forme discrète :

$$\hat{\phi}_k^n = \int_0^{t_n} \exp(-\xi_k^2(t_n-s)) f(s) \hat{\mu}(\xi) ds \quad (I.54)$$

à l'instant $t = t_{n+1} = t_n + \Delta t$, cette solution s'écrit :

$$\hat{\phi}_k^{n+1} = \int_0^{t_{n+1}} \exp(-\xi_k^2(t_{n+1}-s)) f(s) \hat{\mu}(\xi) ds \quad (I.55)$$

D'où :

$$\hat{\varphi}_k^{n+1} = \exp(-\xi_k^2 \Delta t) \hat{\varphi}_k^n + \int_0^{\Delta t} 2 \exp(-\xi_k^2 s) f^n ds \quad (I.56)$$

En intégrant, on obtient une équation récursive donnée par :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_k^{n+1} = \exp(-\xi_k^2 \Delta t) \hat{\varphi}_k^n + 2 \left[\frac{1 - \exp(-\xi_k^2 \Delta t)}{\xi_k^2} \right] f^n & k = 1, \dots, Q \\ \hat{\varphi}_k^0 = 0 & n = 1, \dots, N_T \end{cases} \quad (I.57)$$

L'approximation numérique d'un tel intégrateur fractionnaire est :

$$y(t) = I^{1/2} f \Rightarrow \begin{cases} y(t) = y(n\Delta t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^Q \hat{\varphi}_k^n b_k \\ \hat{\varphi}_k^{n+1} = \exp(-\xi_k^2 \Delta t) \hat{\varphi}_k^n + 2 \left[\frac{1 - \exp(-\xi_k^2 \Delta t)}{\xi_k^2} \right] f^n \\ \hat{\varphi}_k^0 = 0 \end{cases} \quad (I.58)$$

2.4 Approximation numérique d'un dérivateur fractionnaire d'ordre 1/2

En suivant les mêmes étapes précédentes, nous obtenons :

$$z(t) = \partial_t^{1/2} f \Rightarrow \begin{cases} z(t) = z(n\Delta t) = -\sum_{k=1}^Q \psi_k^n \chi_k + \sqrt{2} f^n \sum_{k=1}^Q b_k \\ \psi_k^{n+1} = \exp(-4\pi^2 \xi_k^2 \Delta t) \psi_k^n + \sqrt{2} \left[\frac{1 - \exp(-4\pi^2 \xi_k^2 \Delta t)}{2\pi \xi_k} \right] f^n \\ \psi_k^0 = 0 \end{cases} \quad (I.59)$$

où $b_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_k d\xi$ et $\chi_k = 2\pi \xi b_k$.

2.5 Choix les paramètres de l'intégrateur

Pour garantir la convergence de la méthode, l'approximation de l'intégrateur nécessite un choix correct des paramètres influant directement sur les résultats tels que : $\xi_{\min}, \dots, \xi_{\max}, Q$, ainsi que d'autres paramètres à définir par la suite.

Dans les paragraphes suivants, nous expliquons comment effectuer ces choix.

2.5.1 Choix du Réseau (des pôles)

Le choix du réseau N_Q peut s'effectuer d'une façon très simple sans aucune crainte d'instabilité. Nous pouvons remarquer que les $-\xi_k^2$ peuvent être interprétés comme pôles pour le système (I.18). Il convient, donc, de les distribuer à l'intérieur d'une bande de fréquence utile $[-\xi_1^2, -\xi_Q^2]$ pouvant être déterminée d'après le contenu harmonique de f . Cette bande de fréquence constitue le domaine des pulsations sur lequel l'approximation de l'intégration fractionnaire sera correcte.

Il n'existe pas une méthodologie systématique déjà développée pour choisir les pôles ξ_k , mais il y a plusieurs choix de séquences qui peuvent être utilisées, nous citons :

- séquence arithmétique : $\xi_{k+1} = \xi_k + r$ où r est la raison de la séquence.
- séquence polynomiale : $\xi_{k+1} = K_1 r^k$ où K_1 est une constante.
- séquence géométrique : $\xi_{k+1} = r \xi_k$ où r est la raison de la séquence.

La séquence géométrique est largement utilisée dans la littérature, car elle produit une séquence linéaire en domaine fréquentiel, ce qui permet d'utiliser le diagramme de Bode,

En pratique, elle réalise un compromis entre la largeur de bande utile et la complexité de l'approximation résultante.

En outre, elle permet de couvrir la bande de fréquence avec une densité de pôles, dans les coordonnées logarithmiques, qui permet de décrire chaque échelle de temps avec le même nombre de variables d'états.

Au contraire, une séquence arithmétique conduit à une description exclusivement pauvre dans les basses fréquences.

Noter qu'avec une distribution géométrique de ξ_k , le nombre de décades significatives du système approximé est proportionnel à Q (r étant fixé). Du point de vue de complexité numérique, ce dernier point est très commode dans le cadre du contrôle des systèmes à paramètres distribués faiblement amortis, où la bande de fréquences couvre souvent plusieurs décades.

Le nombre Q doit être, donc, suffisamment grand pour avoir les meilleurs résultats possibles dans la bande utile.

Ces choix ne sont pas uniques d'autres choix peuvent être envisagés.

2.5.2 Choix de ξ_{\min} , ξ_{\max}

Les deux coefficients ξ_{\min} et ξ_{\max} déterminent la longueur du domaine. Comme nous avons utilisé la séquence géométrique, nous avons la relation suivante :

$$\xi_Q = r^{Q-1} \xi_1 \quad (\text{I.60})$$

Donc, nous pouvons en déduire r :

$$r = \exp\left(\ln \frac{\xi_Q}{\xi_1} / (Q-1)\right) \quad (\text{I.61})$$

L'équation de diffusion $\dot{\hat{\phi}} = -\xi^2 \hat{\phi} + 2f$, est une équation différentielle de première ordre de la forme $\dot{\hat{\phi}} = -\omega \hat{\phi}$. Il est, donc, évident qu'il y a une relation entre ω et ξ qui est :

$$2\pi f = \xi^2 \Rightarrow \begin{cases} \xi_{\min}^2 = 2\pi f_{\min} \\ \xi_{\max}^2 = 2\pi f_{\max} \end{cases} \quad (\text{I.62})$$

Donc, le choix de ξ_{\min} et ξ_{\max} dépend de la bande fréquentielle du système. Nous pouvons, alors, jouer sur ces deux coefficients pour translater la bande.

2.5.3 Choix des fonctions d'interpolations Λ_k

L'interpolation par les éléments finis correspond à une méthode standard en analyse numérique.

Nous utilisons les éléments finis d'ordre 1 qui sont des fonctions continues nulles à l'extérieur du segment $[\xi_{k-1}, \xi_{k+1}]$ affine sur chacun des segments $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ et prenant la valeur "1" en ξ_k , d'où :

$$\Lambda_k(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi < \xi_{k-1} \text{ ou } \xi > \xi_{k+1} \\ \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} & \text{si } \xi_{k-1} \leq \xi \leq \xi_k \\ \frac{\xi_{k+1} - \xi}{\xi_{k+1} - \xi_k} & \text{si } \xi_k \leq \xi \leq \xi_{k+1} \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

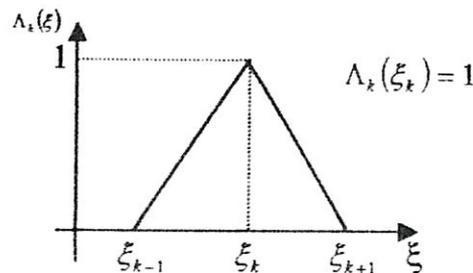


Figure I.2 : Choix de la fonction d'interpolation sur les segments internes.

Il est clair que la qualité d'approximation dépend aussi de la qualité de reconstitution de l'état $\tilde{\varphi}$ au sens des fonction d'interpolation Λ_k .

Sachant que $\hat{\varphi}(\xi, p)$ est la transformée de Laplace de $\varphi(\xi, t)$, où :

$$\hat{\varphi}(\xi, p) = \frac{\mu_\alpha(\xi) \hat{f}(p)}{p + \xi} \quad (I.64)$$

Alors :

$$\varphi(\xi, t) \cong \mu_\alpha(\xi) \int f(\tau) d\tau \quad \text{quand } \xi \rightarrow 0 \quad (I.65)$$

$$\varphi(\xi, t) \cong \frac{\mu_\alpha(\xi)}{\xi} f(t) \quad \text{quand } \xi \rightarrow \infty \quad (I.66)$$

Les fonctions d'interpolation sur les frontières sont donc :

$$\Lambda_1(\xi) \cong \mu_\alpha(\xi) \quad \text{quand } \xi \rightarrow 0 \quad (I.67)$$

$$\Lambda_Q(\xi) \cong \frac{\mu_\alpha(\xi)}{\xi} \quad \text{quand } \xi \rightarrow \infty \quad (I.68)$$

Dans le cas où $\alpha = 1/2$, on a $\mu_\alpha(\xi) = 2$.

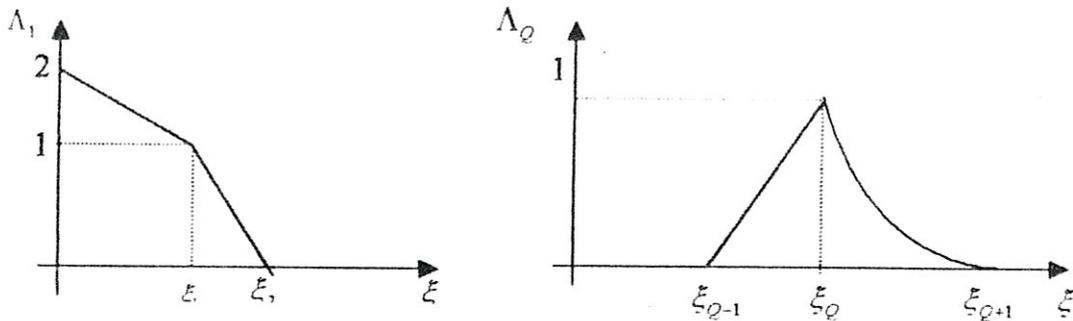


Figure I.3 : Choix de la fonction d'interpolation sur les segments extrêmes.

Ce choix, des fonctions d'interpolations au niveau des frontières, conduit aux coefficients b_k suivants :

$$b_1 = \frac{2\xi_1 + \xi_2}{2} \quad (I.69)$$

$$b_Q = \frac{1}{2}(\xi_Q - \xi_{Q-1}) + \xi_Q \ln\left(\frac{\xi_{Q+1}}{\xi_Q}\right) \quad (I.70)$$

$$b_k = \frac{\xi_{k+1} - \xi_{k-1}}{2} \quad 1 < k < Q \quad (I.71)$$

2.6 Erreur et convergence [11], [8], [12] et [6]

Un choix convenable des fonctions d'interpolations, pour $f \in L^2$ et $Q \rightarrow \infty$, conduit à :

$$\begin{aligned} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L^2} &\rightarrow 0 \\ \|y - \tilde{y}\| &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (I.72)$$

où $\tilde{\varphi}$ et \tilde{y} sont les valeurs approchées.

L'erreur est de la forme [8] :

$$|I^{1-\alpha} f(t_n) - \tilde{y}(t_n)| \leq \varepsilon(\xi_{\min}, \xi_{\max}, \rho, \Delta t) \quad (I.73)$$

où $\varepsilon \rightarrow 0$ pour ξ_{\min} assez petit et ξ_{\max} assez grand .

Donc, en choisissant $\Delta t, \rho$ et ξ_{\min} suffisamment petits et ξ_{\max} assez grand l'erreur devient pratiquement 0.

Comme nous l'avons signalé auparavant, une progression géométrique conduit à la meilleure précision.

3. REALISATION ELECTRONIQUE DE L'INTEGRATEUR

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que le calcul fractionnaire peut être effectué à l'aide de simulateurs incorporés dans des calculateurs. Même si cela représente la technique la mieux adaptée aux nouvelles technologies, il est utile de signaler que la réalisation des opérateurs d'intégration et dérivation fractionnaires est possible par des circuits analogiques.

Parmi les auteurs qui ont travaillé dans ce domaine, nous citons Carlson et Halijak qui sont les auteurs de la première réalisation (voir figure (I.4)) et Vaugh qui a proposé un circuit qui reproduit le comportement de $(i\omega)^{\frac{1}{2}}$ pour contrôler une poutre.

Ces inhabituelles performances sont basées sur le fait, bien connu, que l'impédance caractéristique d'une cellule RC en treille, comme le montre la fig.I.4, est

égale à $\frac{1}{\sqrt{i\omega R_s C_s}}$. Ainsi, en utilisant ce circuit comme réseau de contre réaction d'un amplificateur opérationnel, on peut réaliser un bon intégrateur fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$.

Pour implanter un demi dérivateur, on utilise une capacité comme une impédance d'entrée de l'amplificateur.

Pour implanter un demi-intégrateur, on utilise une résistance au lieu d'une capacité.

Pour réaliser des circuits d'intégration (dérivation) d'ordre différent de un demi, par exemple d'ordre $\frac{3}{2}$, Nous utilisons deux circuits en cascade, un intégrateur (dérivateur) et un demi-intégrateur (demi-dérivateur).

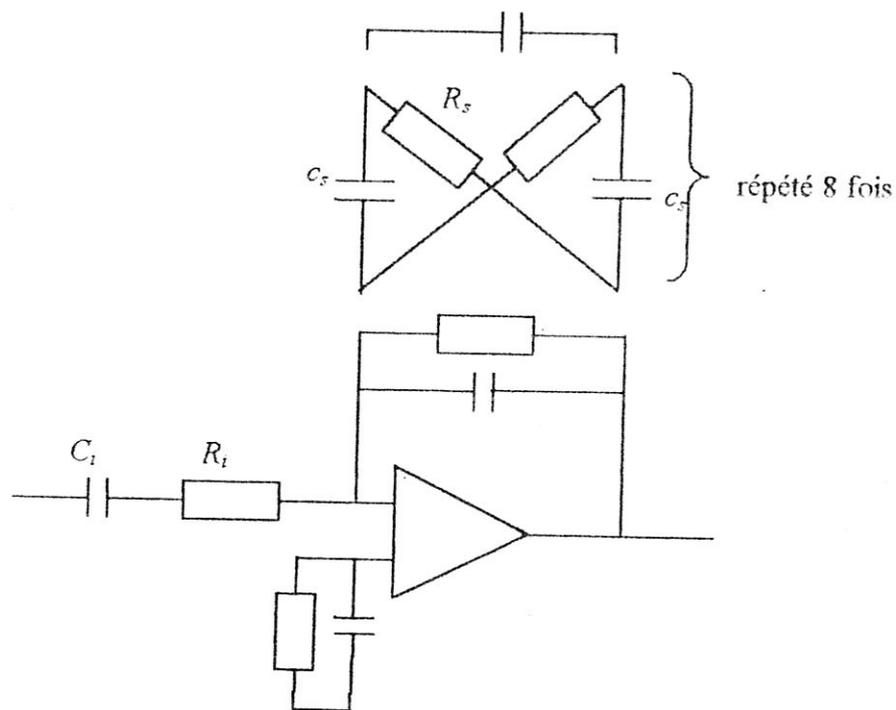


Figure I.4 : Réalisation analogique d'un intégrateur fractionnaire.

4. SIMULATION NUMERIQUE

Lorsque la fonction d'entrée du système (I.18) est une impulsion de Dirac $\delta(t)$, à $t = 0^+$, l'état de $\hat{\varphi}$ est $\hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}(0^+) = \hat{\mu}(\xi) = 2$. Dans ce cas, le système (I.18) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{\varphi}(\xi, t) &= -\xi^2 \hat{\varphi}(\xi, t) \\
y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\xi, t) d\xi \\
\varphi(\xi, 0) &= 2
\end{aligned} \tag{I.74}$$

La sortie y du système est la réponse impulsionnelle qui est :

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \tag{I.75}$$

Sous la forme discrète, le système (I.74) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{\varphi}_i &= -\xi_i^2 \hat{\varphi}_i \\
y(t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^Q b_i \hat{\varphi}_i(t) \\
\hat{\varphi}_i(0) &= 2
\end{aligned} \tag{I.76}$$

dont la solution est :

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_i(t) &= 2 \exp(-\xi_i^2 t) \\
\tilde{y}(t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^Q b_i \exp(-\xi_i^2 t)
\end{aligned} \tag{I.77}$$

Les résultats de la simulation ci-après illustrent l'efficacité de l'approximation utilisée.

Les valeurs de ξ_1 et ξ_Q sont choisies à partir de la relation (I.62). La valeur de N est choisie de telle façon d'obtenir une bande utile qui couvre toutes les fréquences.

Dans les figures de I.5 à I.7, nous représentons sur le même graphe la valeur exacte et la valeur approchée de la réponse impulsionnelle de l'intégrateur fractionnaire d'ordre 1/2. Ces figures montrent quelques propriétés de l'approche utilisée.

La figure I.5 montre les deux courbes présentées dans l'échelle temporelle. On constate que cette représentation ne permet pas de vérifier, de façon simple et claire, que l'approximation est correctement réalisée.

La figure I.6 présente les deux courbes précédentes mais cette fois dans une échelle loglog. Cette présentation permet de mettre facilement en évidence la pente - 1/2 qui est la caractéristique de la fonction $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ en loglog. La coïncidence des deux courbes apparaît clairement sans confusion.

Les paramètres de l'intégrateur choisis ; $N=10$, $\xi_1 = 0,166$ et $\xi_N = 100$ donne une coïncidence parfaite entre la valeur approchée et la valeur exacte dans une bande qui couvre tout le domaine fréquentiel de notre système $[10^{-1} \ 10^{-3}]$ Hz. La bande s'étend à quelques Hz, afin de réduire un peu l'effet de la troncature.

La figure I.7 illustre une propriété importante, qui consiste à translater la bande utile de quelques décades, par exemple, une division de ξ_i par dix, fait une translation de deux décades.

De la figure I.8, on remarque qu'un mauvais choix de paramètres de l'intégrateur donne une mauvaise approximation et ne correspond pas à la valeur exacte, c'est à dire la convergence de la méthode. Ceci est justifié par l'existence des ondulations et la non coïncidence des 2 courbes, ainsi que la bande utile ne couvre pas tout le domaine fréquentiel

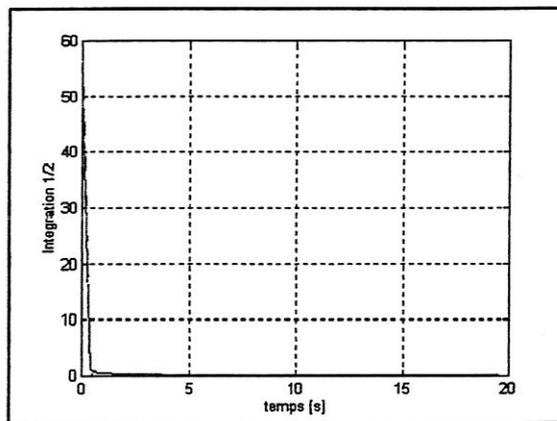


Figure I.5 : Représentation de $I^{1/2}$ dans une échelle temporelle

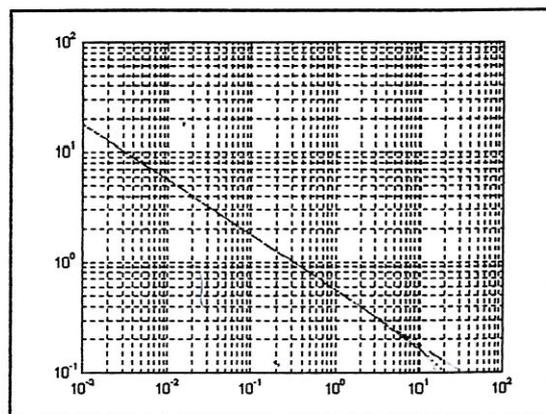


Figure I.6 : Représentation de $I^{1/2}$ dans une échelle log-log.

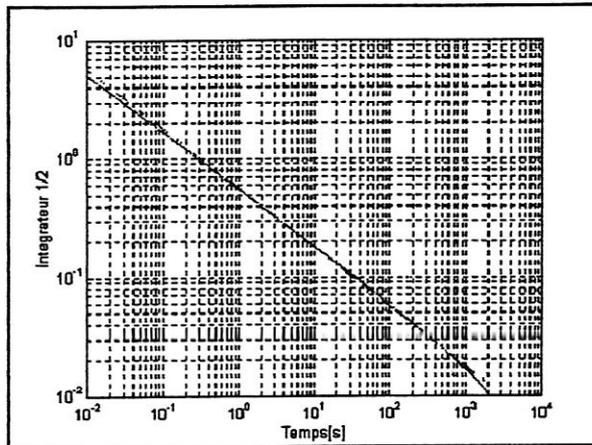


Figure 1.7 : Translation de la bande utile.

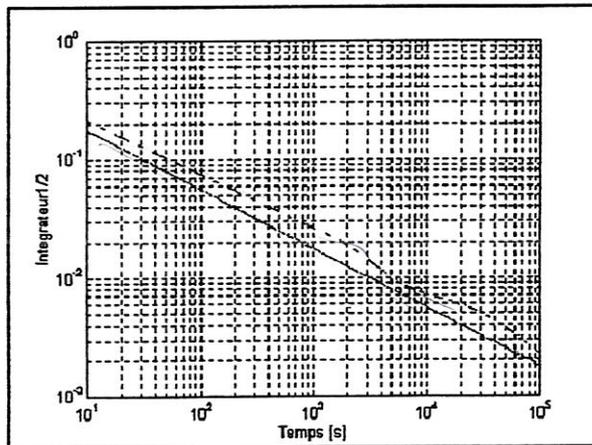


Figure 1.8 : mauvaise approximation de $I^{1/2}$.

CHAPITRE 2

CONTRÔLE ABSORBANT

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au problème de stabilisation du bras flexible. Pour cela, nous allons synthétiser et évaluer des contrôleurs stabilisants et étudier le comportement vibratoire spatio-temporel du bras flexible.

La théorie appliquée est basée sur le contrôle frontière par absorption d'ondes auquel sont associées des conditions aux limites particulières. Le principe de contrôle est de minimiser la valeur maximale de l'énergie entrante dans la structure, en d'autres termes, minimiser les effets des ondes incidentes sur les ondes réfléchissantes.

La synthèse de tels compensateurs, dans le domaine fréquentiel, fait intervenir des opérateurs différentiels fractionnaires. Pour réaliser ces opérateurs, nous avons utilisé un modèle très récent basé sur le comportement entrée-sortie de l'équation de diffusion, décrit dans le chapitre 1.

Le système global obtenu est sous la forme abstraite $\frac{dz}{dt} = \Lambda z$, où Λ est un générateur infinitésimal, qui est plus adaptée aux méthodes d'analyse traditionnelles.

1. DYNAMIQUE DU BRAS

1.1 Le modèle

Considérons le problème de stabilisation d'un bras flexible articulé en $(0, 0)$, par un couple en $x = 0$ autour d'une position d'équilibre et libre à l'autre extrémité (voir figure (II.1)).

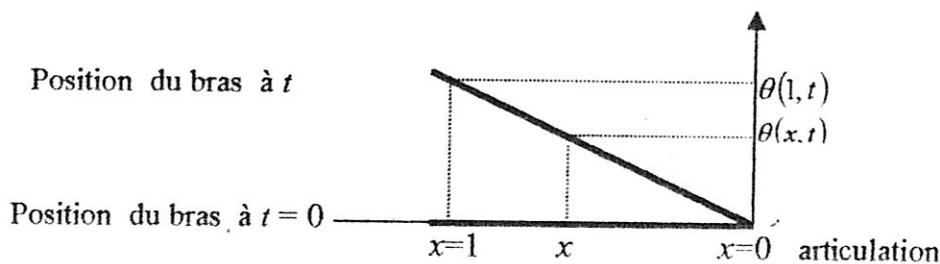


Figure II.1 : Bras flexible articulé.

La dynamique du bras est modélisée par l'équation aux dérivées partielles de la poutre vibrante d'Euler-Bernoulli. Avec la force de gravité $F_G(x) = \rho A g(L - x)$, cette équation s'écrit sous la forme :

$$EI \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left(F_G \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \rho A j_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} - EI j_2 \frac{\partial^3 \theta}{\partial t \partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.01})$$

où E est le module de young, I est le moment transversal d'inertie, ρ est la densité de masse et l est la longueur de la poutre.

Le 3^{ème} et le 4^{ème} terme de l'équation (II.01) représentent respectivement les amortissements viscosse et de Chen-Russel.

Les conditions aux limites, caractérisant le bras articulé en $x = 0$, sont :

$$\begin{aligned} \theta(0, t) &= 0 \\ \partial_x^2 \theta(1, t) &= 0 \\ \partial_x^3 \theta(1, t) &= 0 \\ \partial_x^2 \theta(0, t) &= u(t) \end{aligned} \quad (\text{II.02})$$

où $u(t)$ est le couple, appliqué en $x = 0$, qui sert à ramener le bras à l'état d'équilibre désiré ($\theta_d = k_p x$, $\partial_t \theta_d = 0$ où k_p est un coefficient de proportionnalité), $t \in]0, \infty[$ est la variable temporelle et $x \in [0, 1]$ est la coordonnée spatiale le long du bras.

La fonction $\theta(x, t)$ représente le déplacement du point du bras d'abscisse x à l'instant t , en d'autres termes, c'est la déflexion en x à l'instant t .

Dans ce qui suit, les termes d'amortissements et les forces de gravité sont ignorés. L'équation (II.01) devient, alors :

$$EI \partial_x^4 \theta(x, t) + \rho A \partial_t^2 \theta(x, t) = 0 \quad (\text{II.03})$$

L'étude est faite pour une poutre uniforme adimensionnelle, ceci peut être traduit par la supposition $EI = 1$, $\rho A = 1$.

Pour préserver la linéarité, nous supposons que les déviations qui peuvent être effectuée par le bras sont petites. L'équation du bras devient, alors :

$$\partial_t^2 \theta(x, t) + \partial_x^4 \theta(x, t) = 0 \quad (\text{II.04})$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned}\theta(x,0) &= \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x,0) &= 0\end{aligned}\tag{II.05}$$

L'espace d'énergie (de Hilbert) associé à (II.02), (II.04) et (II.05) est défini par :

$$\begin{aligned}H_p &:= H(0,1) \times L^2(0,1) \text{ avec} \\ H(0,1) &= \{f \in L^2(0,1); f', f'' \in L^2(0,1), f(0) = f'(0) = 0\}\end{aligned}\tag{II.06}$$

avec le produit scalaire associé :

$$((e, f)/(g, h))_{H_p} = \int_0^1 (e'' g'' + fg) dx\tag{II.07}$$

L'énergie mécanique du bras est définie par :

$$E_b(t) = \frac{1}{2} \|(\theta, \partial_t \theta)\|_{H_p}\tag{II.08}$$

1.2 Proposition

Dans le cas autonome où $u = 0$ le système est conservatif, c'est à dire l'énergie du système reste constante tout le temps.

Démonstration

De (II.08) et (II.06) l'énergie du bras devient :

$$E = \frac{1}{2} \|\partial_t \theta\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_x^2 \theta\|_{L^2(0,1)}^2\tag{II.09}$$

avec $\partial_x^2 \theta(0,t) = 0$ et $\partial_x^3 \theta(0,t) = 0$.

La dérivée de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \int_0^1 \partial_t \theta \cdot \partial_t^2 \theta \cdot dx + \int_0^1 \partial_x^2 \theta \cdot \partial_t \partial_x \theta \cdot dx \\ &= \int_0^1 -\partial_t \theta \cdot \partial_x^4 \theta \cdot dx + \int_0^1 \partial_t \partial_t^2 \theta \cdot \partial_x^2 \theta \cdot dx\end{aligned}$$

En intégrant par partie, avec les conditions aux limites dans le cas autonome, nous obtenons :

$$\frac{dE}{dt} = \left[\partial_x^2 \theta \cdot \partial_t \partial_x \theta - \partial_t \theta \cdot \partial_x^3 \theta \right]_b = 0 \quad \diamond$$

2. CONTROLE ABSORBANT

2.1 Principe

Le principe consiste à absorber toutes les ondes réfléchissantes en $x = 0$ par une impédance convenable, comme si on faisait un prolongement du bras vers $-\infty$, dans une certaine position initiale et avec une vitesse initiale nulle, par addition d'une poutre virtuelle semi-infinie. Il est clair que ce prolongement du bras empêche toute réflexion des ondes. La figure (II.2) montre la structure virtuelle proposée.

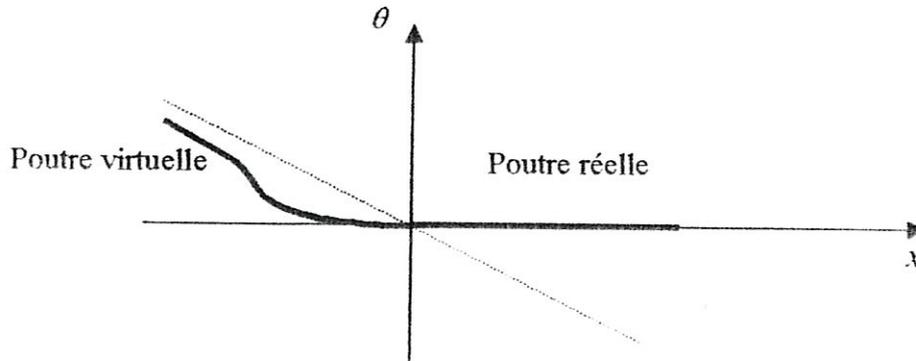


Figure II.2 système poutre réelle et poutre virtuelle.

La conception du contrôle qui modélise ce prolongement commence par l'utilisation d'une description basée sur la propagation des ondes dans la structure du bras. Ce modèle, dit local, donne la direction de propagation des ondes et leurs interférences et conduit à un contrôle local [22]. Il peut être présenté par le système (II.10), reliant les ondes incidentes et les ondes réfléchissantes :

$$\theta_r = S_{CL} \theta_i \quad (II.10)$$

où S_{CL} est la matrice de réflexion en boucle fermée, θ_r est le vecteur des ondes réfléchissantes et θ_i est le vecteur des ondes incidentes.

Considérons une jonction qui peut être une section d'intérêt particulier de la structure tel qu'un point de contrôle ou une discontinuité physique. Les modes de propagation sont séparés entre ceux qui arrivent à la jonction et ceux qui en partent. La figure (II.3) montre bien cette décomposition.

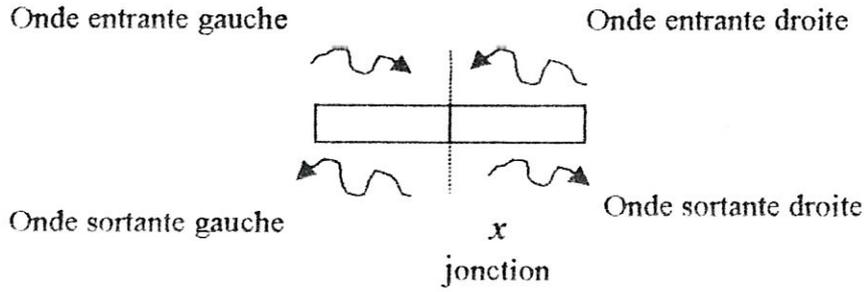


Figure II.3 décomposition des ondes.

Pour empêcher toute reflexion, la jonction doit être absorbante au maximum. L'énergie locale du système sera, alors, transférée par propagation vers $-\infty$, c'est à dire que l'énergie de la poutre réelle tend vers 0, ce qui garantie la stabilisation.

Si en plus, nous désirons que la poutre réelle prenne une position d'équilibre asymptotique, il faut l'imposer par l'asymptote oblique de la poutre virtuelle .

2.2 Décomposition du bras suivant ses modes d'onde

Introduisons, en premier lieu, le vecteur d'état suivant :

$$y_\theta = (\theta, \partial_x \theta, \partial_x^2 \theta, \partial_x^3 \theta)^T \quad (\text{II.11})$$

où $\partial_x \theta$ est la vitesse de déflexion, $\partial_x^2 \theta$ est le moment fléchissant interne et $\partial_x^3 \theta$ est la force tranchante interne.

Pour alléger la présentation, nous utiliserons ces mêmes notations pour l'image du vecteur d'état y_θ dans le domaine fréquentiel.

L'équation décrivant la dynamique du bras étant :

$$\partial_x^2 \theta = -\partial_x^4 \theta \quad (\text{II.04})$$

par transformée de fourier, elle devient :

$$\partial_x^4 \theta = \omega^2 \theta \quad (\text{II.12})$$

où ω est la pulsation.

Pour pouvoir entamer le problème de synthèse du contrôle absorbant, il est nécessaire de décrire la dynamique du bras en terme d'ondes progressives.

La représentation d'état de l'équation (II.12) est :

$$\frac{dy_\theta}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y_\theta \quad (\text{II.13})$$

Le système (II.13) peut être diagonalisé par la transformation suivante :

$$y_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{\omega} & -\sqrt{\omega} & i\sqrt{\omega} & \sqrt{\omega} \\ -\omega & \omega & -\omega & \omega \\ iM & -M & -iM & M \end{bmatrix} \cdot W = Y(\omega) \cdot W \quad (\text{II.14})$$

où $M = \omega^{3/2}$.

Cette diagonalisation peut être interprétée en terme d'ondes progressives où chaque terme du nouveau vecteur d'état transversal W est l'amplitude d'un mode d'onde. Ces modes d'ondes sont constitués de combinaisons dépendant de la fréquence des variables d'états transversaux, c'est à dire des colonnes de la matrice $Y(\omega)$, qui se propagent indépendamment l'un des autres le long du bras.

Les amplitudes de ces modes d'ondes varient en fonction de :

$$\frac{dW}{dx} = \begin{bmatrix} -i\sqrt{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\omega} \end{bmatrix} \cdot W \quad (\text{II.15})$$

Les termes de la matrice, opérateur de l'équation (II.15), sont les coefficients de propagations dont la forme est :

$$\gamma(\omega) = \lambda(\omega) + i\kappa(\omega) \quad (\text{II.16})$$

où la partie réelle $\lambda(\omega)$ est le coefficient d'atténuation et la partie imaginaire $\kappa(\omega)$ est le nombre d'onde.

Ces coefficients de propagation vont par paire, $(\gamma_j, -\gamma_j)$, et correspondent à des modes d'ondes similaires se propageant dans des directions opposées.

Le principe de conservation de l'énergie réduit ces coefficients de propagation au 1^{er} et 3^{ème} quadrant du plan complexe γ .

Les termes de W sont rangés selon l'ordre décrit par l'expression suivante :

$$W = (\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{r1}, \theta_{r2})^T \quad (\text{II.17})$$

où θ_{i1} et θ_{i2} sont les amplitudes des modes d'ondes entrants à l'extrémité articulée du bras et θ_{r1} et θ_{r2} sont ceux des modes d'ondes sortants de l'extrémité articulée du bras.

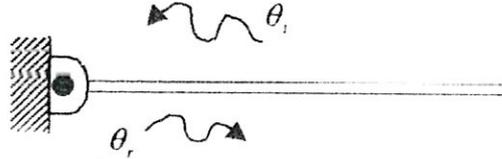


Figure II.4 : Ondes entrantes et sortantes à l'extrémité articulée.

θ_{i2} et θ_{r2} sont des ondes stationnaires, leur amplitude varie exponentiellement avec x , seulement elles contribuent peu à la dynamique du bras[23].

2.3 Synthèse du contrôle

2.3.1 Cas où l'axe de l'articulation n'est pas fixe

En tenant compte de la description de la dynamique du bras en coordonnées de modes d'ondes, les conditions aux limites s'écrivent en fonction du vecteur d'état y_θ et des forces du contrôle :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot y_\theta(0, \omega) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

où u et v sont respectivement le moment et la force du contrôle.

La transformation du système (II.18) en coordonnées des modes d'ondes :

$$\begin{bmatrix} -\omega & \omega & -\omega & \omega \\ iM & -M & -iM & M \end{bmatrix} \cdot W(0, \omega) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

En exprimant les ondes réfléchissantes en fonction des ondes incidentes, nous obtenons, après réarrangement, le nouveau système :

$$\begin{bmatrix} \theta_{r1} \\ \theta_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i+1}{i-1} & \frac{-2}{i-1} \\ \frac{2i}{i-1} & \frac{i+1}{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i1} \\ \theta_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega(i-1)} & \frac{-1}{M(i-1)} \\ \frac{i}{\omega(i-1)} & \frac{-1}{M(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

qui est de la forme :

$$\theta_r = S_r \cdot \theta_i + B \cdot F_{ext} \quad (\text{II.21})$$

où S_r est la matrice de réflexion en boucle ouverte et F_{ext} est le vecteur des forces agissantes sur le bras.

Le système (II.20) est la condition aux limites du système (II.18), exprimé en forme causale, à partir duquel, nous pouvons remarquer que les modes d'ondes θ_r sont produits par la réflexion des ondes incidentes.

De ce fait, le système (II.20) représente la base de construction des contrôleurs absorbants des ondes que nous allons utiliser à l'extrémité articulée ($x = 0$) du bras.

Dans cette étude, nous nous limitons aux « absorbeurs » d'ondes du type :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = C(\omega) \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \partial_x \theta \end{bmatrix}_{x=0} \quad (\text{II.22})$$

où θ est la déflexion, $\partial_x \theta$ est la pente (vitesse de déflexion) et C est la matrice du compensateur.

Nous allons montrer plus loin que ce modèle linéaire représente un ensemble suffisamment large de compensateurs pour la résolution de notre problème.

Pour évaluer et construire les compensateurs absorbants d'ondes de la forme (II.22), il est nécessaire de considérer le système {(II.20), (II.22)} en boucle fermée qui prend la forme souhaitée (II.10).

En coordonnées de modes d'onde, l'équation (II.22) s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y(\omega) \cdot W \quad (\text{II.23})$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{\omega} & -\sqrt{\omega} & i\sqrt{\omega} & \sqrt{\omega} \end{bmatrix} \cdot W \quad (\text{II.24})$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = C \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\omega} & -\sqrt{\omega} \end{bmatrix} \cdot \theta_i + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\omega} & \sqrt{\omega} \end{bmatrix} \theta_r \right\} \quad (\text{II.25})$$

En reportant (II.25) dans (II.20), nous obtenons la relation $\theta_r = S_{CL} \cdot \theta_i$ avec :

$$S_{CL} = \left\{ I - BC \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\omega} & \sqrt{\omega} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \left\{ S_r + BC \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\omega} & -\sqrt{\omega} \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{II.26})$$

Le compensateur qui conduit à $S_{CL} = 0$, appelé dans la littérature micro-onde contrôleur à Impédance Adaptée, permet de supprimer les ondes réfléchissantes.

Donc, pour $S_{CL} = 0$, nous avons :

$$C = -B^{-1} S_r \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\omega} & -\sqrt{\omega} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{II.27})$$

D'où :

$$C = \begin{bmatrix} -i\omega & -(1+i)\sqrt{\omega} \\ (i-1)M & i\omega \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Le contrôle correspondant est :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\omega & -\sqrt{2}i\omega \cdot (i\omega)^{-1/2} \\ \sqrt{2}i\omega \cdot (i\omega)^{1/2} & i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \partial_x \theta \end{bmatrix}_{x=0} \quad (\text{II.29})$$

avec :

$$\sqrt{i\omega} = \frac{(1+i)\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}} \quad (\text{II.30})$$

2.3.2 Cas où l'axe de l'articulation du bras est fixe

C'est le cas qui nous intéresse le plus dans cette étude et qui présente un grand intérêt dans les structures spatiales. Nous voulons construire des compensateurs qui permettent d'annuler ou de minimiser les oscillations qui peuvent prendre naissance au niveau de ces structures.

Pour cela, signalons, tout d'abord, la remarque suivante :

Une articulation en 0 s'interprète comme un amortisseur visqueux de constante très élevée et conduit à une valeur infinie de la composante C_{21} (2^{ième} ligne et 1^{er}

colonne) de la matrice d'impédance C . Ce qui entraîne $\partial_x \theta(0,t) = 0$ et $\theta(0,t) = 0$ et la force n'intervient plus dans l'équation d'état ce qui fixe le bras en 0 à $x = 0$.

En tenant compte de cette remarque, la matrice d'impédance adaptée en $x = 0$ et le contrôle correspondant prennent respectivement les formes suivantes :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.31})$$

$$u = C_{12} \partial_x \theta \Big|_{x=0} \quad (\text{II.32})$$

La matrice de réflexion devient alors :

$$S_{CL} = \frac{1}{-i(\omega + \sqrt{\omega} \cdot C_{12}(i-1))} \begin{bmatrix} -(\omega - \sqrt{\omega} \cdot C_{12}(i+1)) & -\omega(i-1) \\ i\omega(i-1) & \omega + \sqrt{\omega} \cdot C_{12}(i+1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Dans ce qui suit, nous proposons quatre compensateurs que nous allons analyser et comparer dans le paragraphe 3.

a/ Proposition 1

Le premier compensateur que nous proposons dérive directement de la matrice d'impédance adaptée du cas où l'articulation est non fixée.

En tenant compte des données propres au cas où l'articulation serait fixée, le système (II.29) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\omega & -\sqrt{2}i\omega \cdot (i\omega)^{1/2} \\ \sqrt{2}i\omega \cdot (i\omega)^{1/2} & i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_x \theta \Big|_{x=0} \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Ce qui donne :

$$C_{12} = -\sqrt{2} \frac{i\omega}{\sqrt{i\omega}} \quad (\text{II.35})$$

b/ Proposition 2

Désignons par r_{pp} , r_{ps} , r_{sp} , r_{ss} les éléments de la matrice de réflexion, tels que :

$$S_{CL} = \begin{bmatrix} r_{pp} & r_{sp} \\ r_{ps} & r_{ss} \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

où :

r_{pp} est le coefficient de réflexion θ_{11} vers θ_{r1} ,

r_{sp} est le coefficient de réflexion θ_{12} vers θ_{r1} ,

r_{ps} est le coefficient de réflexion θ_{i1} vers θ_{r2} ,
 r_{sr} est le coefficient de réflexion θ_{i7} vers θ_{r7} .

Nous pouvons remarquer que :

- les coefficients de la matrice de réflexion S_{CL} ne dépendent pas tous de C_{12} , donc il n'existe pas une condition qui les annule tous à la fois.
- r_{pp} est le coefficient responsable de la réflexion du mode d'ondes propagatifs dont l'influence est majeure sur tous les termes de la matrice de réflexion en boucle fermée.

C'est pour cela, que nous avons eu l'idée de chercher la valeur de C_{12} qui permet d'annuler r_{pp} .

De (II.33) nous avons :

$$r_{pp} = \frac{-\left(\omega - \sqrt{\omega} \cdot C_{12}(i+1)\right)}{-i\left(\omega + \sqrt{\omega} \cdot C_{12}(i-1)\right)} \quad (\text{II.37})$$

Alors, pour $r_{pp} = 0$, nous avons :

$$C_{12} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega}(i+1)} \quad (\text{II.38})$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$C_{12} = -i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i\omega}{\sqrt{i\omega}} \quad (\text{II.39})$$

c/ Proposition 3

La troisième solution que nous proposons correspond au cas dégénéré où le déterminant de la matrice de réflexion est nul.

Nous avons donc :

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} -\left(\omega - \sqrt{\omega} \cdot C_{12}(i+1)\right) & -\omega(i-1) \\ i\omega(i-1) & \omega + \sqrt{\omega} \cdot C_{12}(i+1) \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (\text{II.40})$$

La condition devient :

$$\left(\sqrt{\omega}C_{12}(1+i)\right)^2 = (i\omega)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\omega}C_{12}(i+1) = i\omega \\ \text{ou} \\ \sqrt{\omega}C_{12}(i+1) = -i\omega \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$C_{12} = \frac{-i\omega}{\sqrt{2}\sqrt{i\omega}} \quad (\text{II.42a})$$

ou :

$$C_{12} = \frac{i\omega}{\sqrt{2}\sqrt{i\omega}} \quad (\text{II.42b})$$

d/ Remarque

Les trois contrôleurs proposés, dans le domaine fréquentiel, sont tous de la forme :

$$u = C_{12} \partial_x \theta(x, \omega) \Big|_{x=0} \quad (\text{II.43})$$

où $C_{12} = C_p \frac{i\omega}{\sqrt{i\omega}}$

Ils correspondent, dans le domaine temporel, à la forme :

$$u(t) = C_p I^{1/2} \partial_x \theta(0, t) \quad (\text{II.44})$$

où $I^{1/2}$ est l'opérateur d'intégration fractionnaire et C_p est un coefficient de multiplicité.

3. ANALYSE ET DISCUSSION

Le but de cette analyse est de choisir, parmi les compensateurs proposés, lequel est le plus «absorbeur» d'ondes. Le critère de choix est le coefficient de réflexion.

3.1 Coefficients de réflexions

Le calcul des coefficients de réflexion des différents compensateurs, nous donne :

Cas 1 :

$$C_{12} = -\sqrt{2} \frac{i\omega}{\sqrt{i\omega}}$$

Les coefficients de réflexion correspondants sont :

$$r_{pp} = \frac{1+2i}{3i}, r_{sp} = \frac{i-1}{3i}, r_{ps} = -ir_{sp} \text{ et } r_{ss} = \frac{2i-1}{3i} \quad (\text{II.45})$$

dont les modules respectifs sont :

$$\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ et } \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\text{II.46})$$

Dans ce cas, nous remarquons que, tous les coefficients sont indépendants de la fréquence et leurs modules sont inférieurs à "1".

Cas 2 :

$$C_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}} i \frac{i\omega}{\sqrt{i\omega}}$$

Les coefficients de réflexion sont :

$$r_{pp} = 0, r_{sp} = 1, r_{ps} = -ir_{sp} \text{ et } r_{ss} = \frac{2}{i-1} \quad (\text{II.47})$$

dont les modules respectifs sont:

$$0, 1, 1 \text{ et } \sqrt{2} \quad (\text{II.48})$$

Trois coefficients ont un module supérieur ou égal à 1, nous pouvons constater qu'il y a plus de réflexion que d'absorption.

Cas 3a :

$$C_{12} = \frac{-i\omega}{\sqrt{2}\sqrt{i\omega}}$$

Les coefficients de réflexion sont :

$$r_{pp} = \frac{1+i}{2i}, r_{sp} = \frac{i-1}{2i}, r_{ps} = -ir_{sp} \text{ et } r_{ss} = -\frac{1-i}{2i} \quad (\text{II.49})$$

qui sont tous de module :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{II.50})$$

Au même titre que le premier cas, tous ces coefficients sont indépendants de la fréquence et leurs modules sont inférieurs à "1".

En plus, l'énergie transportée par les ondes réfléchissantes va diminuer de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ par rapport à celle des ondes incidentes, donc nous avons une décroissance d'énergie de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour chaque cycle, cette atténuation reste constante et ne dépend pas de la fréquence, parce que, si ce n'est pas le cas, les ondes réfléchissantes auront des modules plus grand que ceux des ondes incidentes et l'énergie croit en fonction de la fréquence. De (II.46) et (II.50) on constate que l'atténuation de l'énergie est plus petite que celle du cas 1.

Cas 3b :

$$C_{12} = \frac{i\omega}{\sqrt{2}\sqrt{i\omega}} \Rightarrow r_{FP} = \frac{\omega - i\omega}{i\omega - i\omega} \quad (\text{II.51})$$

Dans ce cas le coefficient n'est pas défini, ce qui laisse impossible la réalisation du compensateur.

Cas général :

Considérons le cas général où :

$$C_{12} = C_F \frac{i\omega}{\sqrt{i\omega}} \quad (\text{II.52})$$

Les coefficients de réflexion sont :

$$r_{FP} = \frac{1 - i\sqrt{2}C_p}{i(1 - C_p\sqrt{2})}, r_{sp} = \frac{i-1}{i(1 - C_p\sqrt{2})}, r_{ps} = -ir_{sp} \text{ et } r_{ss} = \frac{1 + iC_p\sqrt{2}}{-(1 - C_p\sqrt{2})} \quad (\text{II.53})$$

dont les modules respectifs sont:

$$\frac{\sqrt{1 + (\sqrt{2}C_p)^2}}{(1 - \sqrt{2}C_p)}, \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}C_p}, \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}C_p} \text{ et } \frac{\sqrt{1 + (\sqrt{2}C_p)^2}}{(1 - \sqrt{2}C_p)} \quad (\text{II.54})$$

Ces modules doivent être strictement inférieurs à 1, afin d'obtenir une réflexion, cette condition est remplie pour une valeur de C_p négative et différente de zéro. Nous avons :

$$\frac{d|r_{FP}|}{dC_p} = 2C_p + \sqrt{2}$$

donc pour $C_p = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ nous avons le compensateur le plus absorbant.

3.2 Fonction du transfert

La fonction de transfert des contrôleurs d'entrée $\partial_x \theta$ et de sortie u est de la forme :

$$H(\omega) = \frac{u(\omega)}{\partial_x \theta(0, \omega)} \quad (\text{II.55})$$

Le tableau suivant regroupe les fonctions de transferts des différents cas ainsi que les gains et les phases correspondants :

Cas	Fonction de transfert	Gain	Phase
1	$H(\omega) = -\sqrt{\omega}(i+1)$	$\sqrt{2\omega}$	$\frac{5\pi}{4}$
2	$H(\omega) = \frac{\sqrt{\omega}(1-i)}{2}$	$\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$
3	$H(\omega) = \frac{-\sqrt{\omega}(i+1)}{2}$	$\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}}$	$\frac{5\pi}{4}$
4	$H(\omega) = \frac{\sqrt{\omega}(i+1)}{2}$	$\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$

On remarque que :

- Les fonctions de transferts obtenues sont des fonctions irrationnelles. Ces fonctions peuvent être approximées par d'autres fonctions rationnelles en utilisant l'approximation polynomiale basée sur l'expansion fractionnaire continue (voir annexe 2) ou l'approximation de Padé dite « Padé approximation ». Pour les raisons décrites dans le chapitre 1, ces approximations ne sont pas utilisées dans ce travail.
- Le gain est constant avec la fréquence.
- Le gain croît avec la fréquence et dépend toujours de $(i\omega)^{1/2}$.

3.3 Système global

A partir des expressions (II.04), (II.02) et (II.43), le système global s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 \theta + \partial_x^4 \theta = 0 \\
&\theta(0, t) = 0 \\
&\partial_x^2 \theta(1, t) = 0 \\
&\partial_x^3 \theta(1, t) = 0 \\
&\partial_x^2 \theta(0, t) = u(t) \\
&u(t) = C_F I^{1/2} \partial_t \partial_x \theta(0, t)
\end{aligned}
\tag{II.56}$$

Le schéma bloc de ce système est donné par la figure (II.5).

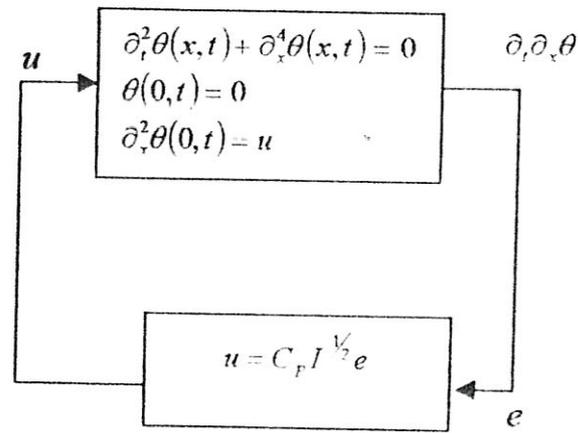


Figure II.5 : Schéma bloc du système global.

4. CONTROLE DIFFUSIF

4.1 Système augmenté

Le symbole $I^{1/2}$, dans l'équation (II.44), est l'opérateur d'intégration fractionnaire qui représente l'impédance adaptée en $x = 0$. Comme il est déjà mentionné dans le chapitre 1, sa réalisation est possible par un modèle mathématique non héréditaire.

En utilisant le modèle diffusif, l'équation (II.44) peut être représentée par :

$$\begin{aligned}
&\partial_t \varphi - \partial_x^2 \varphi = 2 \partial_t \partial_x \theta(0, t) \cdot \delta(x) \\
&\partial_x^2 \theta(0, t) = C_F \varphi(0, t)
\end{aligned}
\tag{II.57}$$

Ce système est équivalent par fourier à :

$$\partial_t \hat{\varphi}(\xi, t) + \xi^2 \hat{\varphi}(\xi, t) = 2 \partial_t \partial_x \theta(0, t)
\tag{II.58}$$

$$\partial_x^2 \theta(0, t) = C_p \int \hat{\phi} d\xi$$

Par cette réalisation, nous venons, donc, de simuler le prolongement vers $-\infty$ (vu depuis la poutre réelle (Bras)),

En introduisant le système (II.58) dans (II.56), nous obtenons le nouveau système augmenté :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta + \partial_x^4 \theta = 0 \\ \theta(0, t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(0, t) = C_p \int \hat{\phi} d\xi \\ \partial_x^2 \theta(1, t) = 0 \\ \partial_x^3 \theta(1, t) = 0 \\ \partial_t \hat{\phi} + \xi^2 \hat{\phi} = 2\partial_t \partial_x \theta(0, t), \hat{\phi}(\xi, 0) = \hat{\phi}_0(\xi) \in L^2(R) \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

Le schéma bloc de ce système est donné par la figure (II.6).

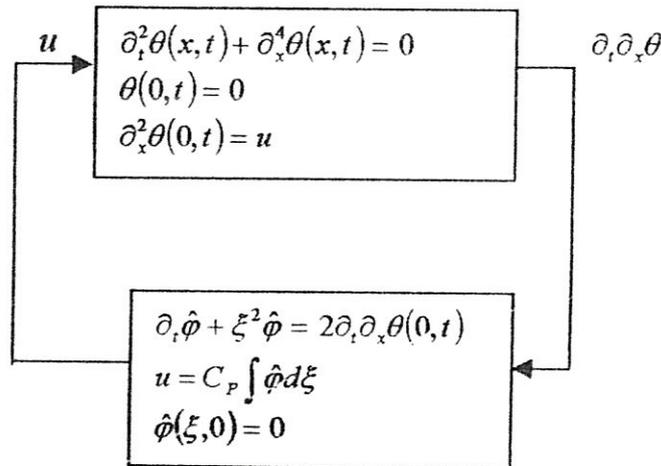


Figure II.6 Schéma bloc du système augmenté

Le contrôle du bras s'effectue par l'intermédiaire d'une variable diffusive, ce qui justifie la dénomination de contrôle diffusif.

D'après le système (II.59), nous pouvons remarquer que ; c'est la condition initiale de diffusion $\hat{\phi}$ qui va simuler la précontrainte de la poutre virtuelle (voir chapitre 4). De ce fait, le problème de réalisation du contrôle u par la condition de diffusion s'interprète comme un problème d'observation de l'état initial contraint.

Le système (II.59) peut apparaître plus complexe que le système (II.57) notamment du point de vue stabilité et robustesse, mais en réalité, il s'est grandement simplifié par la présence de variables d'état auxiliaires.

4.2 Stabilité du système augmenté

Considérons la fonctionnelle «énergie globale» du système (II.59) définie par :

$$E_z(t) = E_b(t) - C_p E_\varphi(t) \quad \text{avec } C_p < 0. \quad (\text{II.60})$$

où E_b est l'énergie mécanique du bras, E_φ est l'énergie associée aux variables diffusives.

Alors :

$$E_b(t) = \frac{1}{2} \|\partial_t \theta + \partial_x^2 \theta\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_t \theta)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x^2 \theta)^2 dx \quad (\text{II.61})$$

$$E_\varphi(t) = \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi)^2 d\xi \quad (\text{II.62})$$

Proposition 1

Le système (II.59) est dissipatif dans le sens que $\frac{dE_z(t)}{dt} \leq 0$, si le couple u est négatif.

Démonstration

On note que :

$$\frac{dE_z(t)}{dt} = \frac{dE_b(t)}{dt} - C_p \frac{dE_\varphi(t)}{dt}$$

Avec :

$$\frac{dE_\varphi(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \partial_t \varphi d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 \varphi^2 + 2\varphi u(t)) d\xi$$

$$\frac{dE_b(t)}{dt} = [\partial_x^2 \theta \cdot \partial_t \partial_x \theta - \partial_t \theta \cdot \partial_x^3 \theta]_b$$

La 2^{ème} équation, avec les conditions aux limites, devient :

$$\frac{dE_b(t)}{dt} = -u(t) \partial_t \partial_x \theta(0, t)$$

De (II.44) et pour un couple négatif nous avons :

$$\frac{dE_b(t)}{dt} = C_p \partial_t \partial_x \theta(0,t) \int \frac{1}{2} \partial_t \partial_x \theta(0,t)$$

De (II.58), la dérivée de l'énergie globale devient :

$$\begin{aligned} \frac{dE_z}{dt} &= C_p \partial_t \partial_x \theta(0,t) \cdot \int \hat{\phi}(\xi,t) d\xi - C_p \int \hat{\phi}(\xi,t) \partial_t \hat{\phi}(\xi,t) d\xi \\ &= C_p \partial_t \partial_x \theta(0,t) \cdot \int \hat{\phi}(\xi,t) d\xi - C_p \int \hat{\phi}(\xi,t) (-\xi^2 \hat{\phi} + 2\partial_t \partial_x \theta(0,t)) d\xi \\ &\quad - \frac{C_p}{2} \int \left(\xi^2 \hat{\phi}^2 - \frac{\partial_t \hat{\phi}^2}{2} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Comme $\hat{\phi}^2 \geq \frac{\partial_t \hat{\phi}^2}{2}$ alors $\frac{dE_z}{dt} \leq 0 \diamond$.

Proposition 2

Posons $z = (\theta, \partial_t \theta, \hat{\phi})$ et $H_G = H_p \times L^2(R)$. Alors, le système (II.59) peut se mettre sous la forme abstraite $\frac{dz}{dt} = \Lambda z$; où $z \in H_G$ et Λ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe dont l'étude s'avère moins complexe.

Démonstration

La démonstration est basée sur le théorème de Lumer-Phillipps. Λ est l'opérateur linéaire non borné suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\partial_x^4 & 0 & 0 \\ 0 & \langle \delta, \partial_x \cdot \rangle & -\xi^2 \end{vmatrix}$$

où $\langle \delta, f \rangle = f(0)$

le domaine de l'opérateur Λ est :

$$D(\Lambda) = \left\{ (\vartheta, \phi, \varphi)^T \in H_G, : \vartheta \in H^4(0,1), \phi \in H(0,1), -\xi^2 \varphi + \partial_x \phi \in L^2(R), \right. \\ \left. \partial_x^2 \theta(0, \cdot) - C_p \int \hat{\phi} d\xi = 0 \right\}$$

où $H^4 = \{ \vartheta \in L^2(R), : \vartheta, \partial_x \vartheta, \dots, \partial_x^4 \vartheta \}$

L'opérateur Λ est dissipatif (proposition 1) et l'application $(\lambda I - \Lambda)$ est surjective pour $\lambda > 0$ (voir [8]) \diamond .

Proposition 3

Le système (II.59) est asymptotiquement stable.

Démonstration

La fonctionnelle d'énergie globale est une fonction de Lyapunov.

Donc, d'après la proposition 1 et le principe d'invariance de Lasalle, la solution du système (II.59) converge vers zéro \diamond .

5. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons étudié l'aspect théorique du problème de stabilisation du bras flexible. Nous avons synthétisé et évalué des contrôleurs stabilisants. Il ne reste alors qu'à les vérifier numériquement, c'est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 3

CONTROLE MODAL DU BRAS

Ce chapitre est consacré à la simulation numérique des résultats théoriques du chapitre précédent qui ont porté sur le comportement dynamique du bras flexible autonome ou soumis à l'action d'un contrôle diffusif.

La technique adoptée pour la modélisation de la dynamique du bras flexible est basée sur les modes propres qui conduit à des contrôleurs dit modaux. L'approximation numérique de l'évolution du bras dans le temps est basée sur l'analyse modale où la solution est la superposition linéaire des solutions propres.

1. APPROXIMATION MODALE

1.1 Principe

La technique POD "Propre Orthogonal Decomposition" est une technique qui, en exploitant l'approche des éléments finis et la projection de Galerkin, permet de fournir une modélisation simplifiée du comportement dynamique du système. Seulement, il faut bien le signaler que cette technique est un outil de simulation et que par son utilisation nous ne prétendons pas pouvoir résoudre les équations aux dérivées partielles ni la substituer aux techniques de résolutions numériques.

Cette technique repose sur la décomposition d'une grandeur caractéristique du système et permet de substituer une équation aux dérivées partielles "EDP" par une autre aux dérivées ordinaires "EDO" de dimension infinie.

Si $\theta(x,t)$ est la solution de l'EDP, on peut l'écrire sous la forme :

$$\theta(x,t) = \Phi^T(x) \cdot a(t) \quad (\text{III.01})$$

où $\Phi^T(x)$ est le vecteur colonne de dimension infinie regroupent les "fonctions de forme" Φ_i qui constituent une base orthonormée vérifiant :

$$\int_{\Omega} \Phi_i(x) \cdot \Phi_j(x) \cdot dx = \delta_{ij} \quad (\text{III.02})$$

où δ_{ij} est l'opérateur de Kronecker.

En tenant compte de la propriété d'orthonormalité, l'injection de (II.01) dans l'EDP permet de substituer celle-ci par une EDO de dimension infinie de la forme :

$$\dot{a} = A(a) \quad (\text{III.03})$$

Où la fonction $A(a)$ est de nature similaire à celle de l'EDP, toutefois les états de $a(t)$ n'ont pas de signification physique claire [22].

Le choix des fonctions Φ_i est libre à priori, sous la seule contrainte qu'elles forment une base. Le meilleur choix correspond, alors, aux fonctions extraites à partir des conditions aux limites

Notons que :

- Pour une même EDP, des conditions aux limites différentes conduisent à des fonctions propres différentes.
- La projection de Galerkin préserve la dimension infinie de la solution.
- Les PODs incluant une phase de réduction permettent de sélectionner un nombre restreint de fonctions de forme.

En automatique, on appelle modes d'un système, les valeurs propres de sa dynamique. La particularité de ces modes est qu'ils n'ont pas, tous, la même importance pour décrire le comportement vibratoire du système. Au même titre que les modes, les composantes de l'EDO n'ont pas, toutes, les mêmes poids dans la construction de la solution. Il suffit, donc, de ne conserver que quelques valeurs propres les plus significatives. Les fonctions propres correspondantes ne forment plus une base exacte, mais elles sont supposées suffisamment complètes pour construire correctement la solution.

La solution devient alors :

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \cdot \Phi_i(x) \quad (\text{III.04})$$

$$a_i(t) = \int_{\Omega} \theta(x, t) \cdot \Phi_i(x) dx \quad (\text{III.05})$$

où N est le nombre de modes conservés et Ω est le domaine de définition de x .

1.2 Représentation modale du Bras

Le but de cette décomposition est de chercher les modes propres de vibration du bras avec les conditions aux limites.

Pour cela, considérons l'équation du bras :

$$\partial_t^2 \theta = -\partial_x^4 \theta \quad (\text{III.06})$$

avec les conditions initiales et aux limites :

$$\begin{aligned} \theta(0, t) &= 0 \\ \theta'(0, t) &= u(t) \\ \theta(1, t) &= 0 \\ \theta'(1, t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.07})$$

En multipliant les deux membres de l'équation (II.06) par Φ_j , et en intégrant, nous obtenons :

$$\left(\partial_t^2 \theta, \Phi_j \right)_{L^2(0,1)} = \left(-\partial_x^4 \theta, \Phi_j \right)_{L^2(0,1)} \quad (\text{III.08})$$

$$\text{où } (f, g)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 fg dx.$$

En utilisant (III.01), la première expression de (III.08) s'écrit :

$$\left(\partial_t^2 \theta, \Phi_j \right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \partial_t^2 a_i \cdot \Phi_i, \Phi_j \right) = \partial_t^2 a_j \quad (\text{III.09})$$

De même, la deuxième expression s'écrit :

$$\left(-\partial_x^4 \theta, \Phi_j \right)_{L^2(0,1)} = \left(-\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \partial_x^4 \Phi_i, \Phi_j \right)_{L^2(0,1)} \quad (\text{III.10})$$

Par intégration par partie, nous obtenons :

$$\left(-\partial_x^4 \theta, \Phi_j \right)_{L^2(0,1)} = \left(-\Phi_j''', \theta \right)_{L^2(0,1)} - \Phi_j'(0) \cdot u(t) \quad (\text{III.11})$$

Introduisons la notation suivante :

$$\left(-\Phi_j''', \Phi_j \right) = \lambda_j \Rightarrow \Phi_j''' = -\lambda_j \Phi_j \quad (\text{III.12})$$

Alors, l'équation (III.11) réécrite avec la notation (III.12), devient :

$$\left(-\partial_x^4 \theta, \Phi_j \right) = a_j(t) \lambda_j - \Phi_j'(0) u(t) \quad (\text{III.13})$$

De (III.09), (III.12) et (III.13), l'équation (III.08) devient :

$$\begin{cases} \partial_t^2 a_j(t) = \lambda_j a_j(t) - \Phi_j'(0) h(t) \\ \Phi_j''' = -\lambda_j \Phi_j \end{cases} \quad j=1, \dots, \infty \quad \begin{matrix} \text{(III.14a)} \\ \text{(III.14b)} \end{matrix}$$

où les Φ_j sont les fonctions propres et les λ_j sont les valeurs propres.

1.2.1 Calcul des fonctions propres du bras

Formellement, ces fonctions propres correspondent à celles de l'opérateur $-\partial_x^4$. En posant $\lambda = -\eta^4$, l'équation (III.12) devient :

$$-\Phi'''' = -\eta^4 \cdot \Phi \quad \text{(III.15)}$$

Nous cherchons une solution sous la forme :

$$\Phi(x) = e^{p \cdot x}.$$

En substituant cette dernière dans l'équation (III.15), nous obtenons comme valeurs propres :

$$p_{r1} = \eta, \quad p_{r2} = -\eta, \quad p_{r3} = i\eta \quad \text{et} \quad p_{r4} = -i\eta.$$

La solution de l'équation (III.15) s'écrit, alors :

$$\Phi(x) = \alpha_1 e^{p_{r1}x} + \alpha_2 e^{p_{r2}x} + \alpha_3 e^{p_{r3}x} + \alpha_4 e^{p_{r4}x} \quad \text{(III.16)}$$

Cette solution peut se mettre sous la forme :

$$\Phi(x) = A_1 s_1(\eta x) + B_1 c_1(\eta x) + C_1 s_2(\eta x) + D_1 c_2(\eta x) \quad \text{(III.17)}$$

où s_1, c_1, s_2 et c_2 sont les fonctions de Duncan définies par :

$$\begin{aligned} s_1(\eta x) &= \sin(\eta x) + sh(\eta x) \\ c_1(\eta x) &= \cos(\eta x) + ch(\eta x) \\ s_2(\eta x) &= -\sin(\eta x) + sh(\eta x) \\ c_2(\eta x) &= -\cos(\eta x) + ch(\eta x) \end{aligned} \quad \text{(III.18)}$$

Ces fonctions sont caractérisées par la propriété suivante :

$$c_2(\eta x) = \frac{1}{\eta} s_2'(\eta x) = \frac{1}{\eta^2} c_1''(\eta x) = \frac{1}{\eta^3} s_1'''(\eta x) \quad \text{(III.19)}$$

Les constantes A_I, B_I, C_I et D_I sont déterminées à partir des conditions aux limites.

La condition d'articulation permet d'écrire :

$$-\theta(0,t) = 0 \Rightarrow \Phi(0) = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\Phi(0) = A_1 s_1(0) + B_1 c_1(0) + C_1 s_2(0) + D_1 c_2(0) \Rightarrow B_1 = 0. \quad (\text{III.21})$$

$$-\theta''(0,t) = u \Rightarrow \Phi''(0) = u \quad (\text{III.22})$$

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= A_1 s_1'(\eta x) + B_1 c_1'(\eta x) + C_1 s_2'(\eta x) + D_1 c_2'(\eta x) \\ &\quad - \eta(A_1 c_1(\eta x) + B_1 s_1(\eta x) + C_1 c_2(\eta x) + D_1 s_2(\eta x)) \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

$$\begin{aligned} \Phi''(x) &= \eta^2(D_1 c_1(\eta x) + A_1 s_1(\eta x) + B_1 c_2(\eta x) + C_1 s_2(\eta x)) \\ \Phi''(0) &= \eta^2(A \cdot 0 + 0 + 2D) = u(t) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Les valeurs et les fonctions propres doivent être calculées dans le cas autonome, donc, $u(t) = 0$. Dans ce cas, l'équation (III.24) donne :

$$D_I = 0 \quad (\text{III.25})$$

Les conditions à l'extrémité libre donnent :

$$\begin{aligned} \theta''(1,t) = 0 &\Rightarrow \Phi''(1) = 0 \\ \theta'''(1,t) = 0 &\Rightarrow \Phi'''(1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

De (III.17), (III.21) et (III.25), nous obtenons :

$$\Phi''(x) = \mu^2(A_1 s_2(\eta x) + C_1 s_1(\eta x)) \quad (\text{III.27})$$

$$\Phi'''(x) = \mu^3(A_1 c_2(\eta x) + C_1 c_1(\eta x)) \quad (\text{III.28})$$

L'extrémité libre en $x = 1$ signifie que :

$$\begin{aligned} \Phi''(1) &= \eta^2(A_1 s_2(\eta) + C_1 s_1(\eta)) = 0 \\ \Phi'''(1) &= \eta^3(A_1 c_2(\eta) + C_1 c_1(\eta)) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

La solution $\eta=0$ correspond au mode rigide, ce qui est physiquement impossible. L'équation transcendante aux valeurs propres est, alors :

$$s_2(\eta)c_1(\eta) - c_2(\eta)s_1(\eta) = 0 \quad (\text{III.30})$$

Par substitution dans (III.18), nous obtenons :

$$-\sin \eta ch \eta + sh \eta \cos \eta = 0 \quad (\text{III.31})$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$tg \eta = th \eta \quad (\text{III.32})$$

Cette relation permet de calculer les valeurs propres. D'après Géradin [12], une solution itérative de (III.32) est donnée par le système suivant :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0, \quad \eta_2 = 3.927 \\ \eta_i &= (4i - 3) \frac{\pi}{4} \quad i > 2 \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

où i est le numéro du mode.

De (III.25) et (III.21), les fonctions propres deviennent :

$$\Phi_i(x) = A_i s_1(\eta_i, x) + C_i s_2(\eta_i, x) \quad i = 0, \dots, \infty \quad (\text{III.34})$$

Le système (III.29) permet de donner la relation entre les constantes A_i et C_i , qui s'écrit :

$$A_i = -\frac{s_1(\eta)}{s_2(\eta)} C_i \quad i = 0, \dots, \infty \quad (\text{III.35})$$

Les constantes C_i sont déterminées de telle sorte que les fonctions propres Φ_i forment une base orthonormée, c'est à dire :

$$(\Phi_i, \Phi_j) = \int_0^1 \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

Par un calcul simple, nous trouvons :

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{\sin 2\eta}{\eta}}} \cong 1 \quad (\text{III.37})$$

Les fonctions propres s'écrivent finalement :

$$\Phi_i(x) = -\frac{\sin \eta_i + sh \eta_i}{-\sin \eta_i + sh \eta_i} (\sin(\eta_i, x) + sh(\eta_i, x)) + sh(\eta_i, x) - \sin(\eta_i, x) \quad (\text{III.38})$$

où η_i est défini par (III.33) et $i = 1, \dots, \infty$.

D'après [4], les fonctions propres définies par (III.38) sont orthonormées.

Pour compléter l'approximation finale de la solution θ . Nous devons déterminer les coefficients a_i en résolvant le système (III.14) décrivant la dynamique du bras.

1.2.2 Résolution du système

Considérons l'équation différentielle (III.14a) :

$$\partial_t^2 a_i(t) = \lambda_i a_i(t) - \Phi_i'(0) u(t) \quad i=1, \dots, \infty \quad (\text{III.39})$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} a_i(0) &= (\theta_0, \Phi_i)_{L^2} \\ \partial_t a_i(0) &= (\theta_1, \Phi_i)_{L^2} \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

L'équation (III.39) est une équation différentielle du second ordre sous la forme $\partial_t^2 a(t) = -\omega^2 a(t)$. On en déduit que $\omega_i = \eta_i^2$.

On remarque que la fréquence temporelle est égale au carré de la fréquence spatiale.

Posons :

$$\begin{cases} a_i^{(1)} = a_i \\ a_i^{(2)} = \partial_t a_i^{(1)} \end{cases}$$

L'équation (III.39) peut être, alors, transformée au système d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants suivant :

$$\begin{cases} \partial_t a_i^{(1)} = \omega_i a_i^{(2)} \\ \partial_t a_i^{(2)} = -\omega_i a_i^{(1)} - \frac{\Phi_i'(0)}{\omega_i} u(t) \end{cases} \quad i=1, \dots, \infty \quad (\text{III.41})$$

Pour déterminer tous les coefficients a_i , il faut résoudre ce système pour chaque mode de vibration.

Le système (III.41) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \partial_t a_i^{(1)} \\ \partial_t a_i^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i^{(1)} \\ a_i^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Phi_i'(0)}{\omega_i} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (\text{III.42})$$

qui est de la forme :

$$\partial_t X_i = G_i X_i + S_i u \quad (\text{III.43})$$

avec $X_i = (\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)})$, $G_i = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{bmatrix}$ et $S_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\Phi_i'(0)}{\omega_i} \end{bmatrix}$.

La solution classique de ce système est :

$$X_i(t) = e^{G_i t} X_{i0} + \int_0^t \exp((t-\tau)G_i) S_i u(\tau) d\tau \quad (\text{III.44})$$

L'expression de $\exp(tG_i)$ est la matrice de rotation suivante :

$$\exp(tG_i) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i t) & \sin(\omega_i t) \\ -\sin(\omega_i t) & \cos(\omega_i t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

1.3 Discrétisation en temps

Le seconde terme de (III.44) ne peut être connu. C'est pourquoi, nous considérons que u est constant par morceaux sur les intervalles $[t_n, t_n + \Delta t]$, où le pas de temps Δt est très petit.

L'état de X_i à $t_n + \Delta t$ est :

$$X_i(t_n + \Delta t) = \exp(G_i(t_n + \Delta t)) X_{i0} + \int_0^{t_n + \Delta t} \exp((t_n + \Delta t - \tau)G_i) S_i u(\tau) d\tau \quad (\text{III.46})$$

En développant, nous obtenons :

$$X_i(t_n + \Delta t) = \exp(G_i \Delta t) X_i(t_n) + \int_0^{\Delta t} \exp((\Delta t - \tau)G_i) d\tau \cdot S_i u \quad (\text{III.47})$$

D'après (III.45), nous avons :

$$\exp((\Delta t - \tau)G_i) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i(\Delta t - \tau)) & \sin(\omega_i(\Delta t - \tau)) \\ -\sin(\omega_i(\Delta t - \tau)) & \cos(\omega_i(\Delta t - \tau)) \end{bmatrix} \quad (\text{III.48})$$

Rappelons que le contrôle $u(\tau)$ est constant et indépendant du temps sur l'intervalle $[t_n, t_n + \Delta t]$, alors, en intégrant terme par terme, nous obtenons :

$$\int_0^{\Delta t} \exp((\Delta t - \tau)X_i) = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} & \frac{1 - \cos(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \\ \frac{\cos(\omega_i \Delta t) - 1}{\omega_i} & \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \end{bmatrix} \quad (\text{III.49})$$

La solution du système (III.43), est alors :

$$X_i(t_n + \Delta t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i \Delta t) & \sin(\omega_i \Delta t) \\ -\sin(\omega_i \Delta t) & \cos(\omega_i \Delta t) \end{bmatrix} X_i(t_n) + \begin{bmatrix} \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} & \frac{1 - \cos(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \\ \frac{\cos(\omega_i \Delta t) - 1}{\omega_i} & \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \end{bmatrix} S_i u \quad (\text{III.50})$$

avec $i=1, \dots, \infty$

La solution obtenue est à dimension infinie, ce qui rend la simulation numérique impossible.

Comme nous l'avons déjà mentionné au début de ce chapitre, il est possible de limiter la dimension du vecteur d'état en modélisant cette solution avec un nombre restreint de modes les plus significatifs, avec des erreurs acceptables.

Supposons que le nombre de modes les plus significatifs est N et posons :

$$t_n = n\Delta t, \quad X_i(t_n + \Delta t) = X_i^{n+1}, \quad X_i(t_n) = X_i^n, \quad u(t_n) = u^n \quad \text{et} \quad N_T = \frac{t}{\Delta t}$$

Alors, de (III.50) nous obtenons N équations récurrentes explicites :

$$X_i^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i \Delta t) & \sin(\omega_i \Delta t) \\ -\sin(\omega_i \Delta t) & \cos(\omega_i \Delta t) \end{bmatrix} X_i^n + \begin{bmatrix} \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} & \frac{1 - \cos(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \\ \frac{\cos(\omega_i \Delta t) - 1}{\omega_i} & \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \end{bmatrix} S_i u^n \quad (\text{III.51})$$

où $i=1, \dots, N$ et $n=1, \dots, N_T$.

Revenons, maintenant, aux variables d'états $\partial_i a_i, a_i$. Sachant que :

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} &= a_i \\ \partial_i a_i^{(1)} &= \omega_i a_i^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

le système (III.51) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \alpha_i^{(1)n+1} \\ \alpha_i^{(2)n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i \Delta t) & \sin(\omega_i \Delta t) \\ -\sin(\omega_i \Delta t) & \cos(\omega_i \Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i^{(1)n} \\ \alpha_i^{(2)n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos(\omega_i \Delta t)}{\omega_i^2} \\ \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \end{bmatrix} u^n \quad (\text{III.53})$$

De (III.52) et (III.53), le système discrétisé final représenté par les variables d'états $\partial_t \alpha_i$ et α_i s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \alpha_i^{n+1} \\ \partial_t \alpha_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i \Delta t) & \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \\ -\omega_i \sin(\omega_i \Delta t) & \cos(\omega_i \Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i^n \\ \partial_t \alpha_i^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos(\omega_i \Delta t)}{\omega_i^2} \\ \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \end{bmatrix} u^n \quad (\text{III.54})$$

avec les conditions initiales : $(u, (0), \partial_t u, (0))$

$$\alpha_i(0) = \int_0^1 \theta_0 \Phi_i(x) dx \quad (\text{III.55})$$

$$\partial_t \alpha_i(0) = \int_0^1 \theta_1 \Phi_i(x) dx \quad (\text{III.56})$$

où θ_0 est la position initiale et θ_1 est la vitesse initiale.

1.4 Système global approché

L'approximation numérique du système global (II.55), décrit dans le chapitre 2, est :

$$\begin{bmatrix} \alpha_i^{n+1} \\ \partial_t \alpha_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i \Delta t) & \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \\ -\omega_i \sin(\omega_i \Delta t) & \cos(\omega_i \Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i^n \\ \partial_t \alpha_i^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos(\omega_i \Delta t)}{\omega_i^2} \\ \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \end{bmatrix} u^n$$

$$\partial_t \partial_x \theta^n = \sum_{i=1}^N \partial_t \alpha_i^n \cdot \Phi_i'(0) \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\hat{\varphi}_k^{n+1} = \exp(-\xi_k^2 \Delta t) \hat{\varphi}_k^n + 2 \frac{1 - \exp(-\xi_k^2 \Delta t)}{\xi_k^2} \partial_t \partial_x \theta^n(0) \quad k=1, \dots, Q \quad (\text{III.57})$$

$$u^n = \frac{1}{\pi} C_p \sum_{i=1}^Q b_i \hat{\varphi}_i^n \quad n=1, \dots, N_T.$$

D'autre part, les expressions de la pente de déflexion, de la vitesse de la déflexion et de la dérivée de la pente, sont respectivement :

$$\partial_x \theta^n = \sum_{i=1}^N \alpha_i^n \cdot \Phi_i'(0) \quad (\text{III.58})$$

$$\partial_i \theta^n = \sum_{i=1}^N \partial_i \alpha_i^n \cdot \Phi_i(0) \quad (\text{III.59})$$

$$\partial_i \partial_x \theta^n(x) = \sum_{i=1}^N \partial_i \alpha_i^n \cdot \Phi_i'(x) \quad (\text{III.60})$$

Le système global (III.57) est de dimension finie et peut se mettre sous la forme :

$$X^{n+1} = A \cdot X^n \quad (\text{III.61})$$

où X est le vecteur d'état $(\alpha, \partial_i \alpha, \varphi)$ et la matrice A est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 \Delta t) & 0 & \frac{\sin(\omega_1)}{\omega_1} & 0 & b_1 C_1 & b_N C_1 \\ 0 & \cos(\omega_N \Delta t) & 0 & \frac{\sin(\omega_N)}{\omega_N} & b_1 C_N & b_N C_N \\ -\omega_1 \sin \omega_1 & 0 & \cos(\omega_1 \Delta t) & 0 & b_1 d_1 & b_N d_1 \\ 0 & -\omega_N \sin \omega_N & 0 & \cos(\omega_N \Delta t) & b_1 d_Q & b_N d_Q \\ 0 & 0 & epp_1 \cdot \Phi_1' & epp_1 \cdot \Phi_N' & ep_1 & 0 \\ 0 & 0 & epp_Q \cdot \Phi_1' & epp_Q \cdot \Phi_N' & 0 & ep_Q \end{bmatrix} \quad (\text{III.62})$$

Avec :

$$ep_k = e^{-\xi_k^2 \Delta t} \quad (\text{III.63})$$

$$epp_k = C_p \frac{(1 - e^{-\xi_k^2})}{\xi_k^2} \quad k=1, \dots, Q \quad (\text{III.64})$$

$$C_i = C_p \cdot 1,9 \frac{(1 - \cos(\omega_i \Delta t))}{\omega_i^2} \Phi_i'(0) \quad (\text{III.65})$$

$$d_i = C_p \frac{\sin(\omega_i \Delta t)}{\omega_i} \Phi_i'(0) \quad i=1, \dots, N \quad (\text{III.66})$$

1.5 Calcul de l'énergie

L'énergie mécanique du bras est donnée par :

$$E = \frac{1}{2} \left\{ \|\partial_t \theta\|_{L^2}^2 + \|\partial_x \theta^2\|_{L^2}^2 \right\} \quad (\text{III.67})$$

La solution approchée de θ est :

$$\theta(x,t) = \sum_1^Q a_i(t) \Phi_i(x) \quad (\text{III.68})$$

$$\partial_x^2 \theta(x,t) = \sum a_i(t) \partial_x^2 \Phi_i(x) \quad (\text{III.69})$$

$$\partial_t \theta(x,t) = \sum \partial_t a_i(t) \Phi_i(x) \quad (\text{III.70})$$

A partir des équations (III.69), (III.70) et de la propriété d'orthonormalité des fonctions propres, nous avons les normes suivantes :

$$\|\partial_t \theta\|^2 = \|\partial_t a\|^2 \quad (\text{III.71})$$

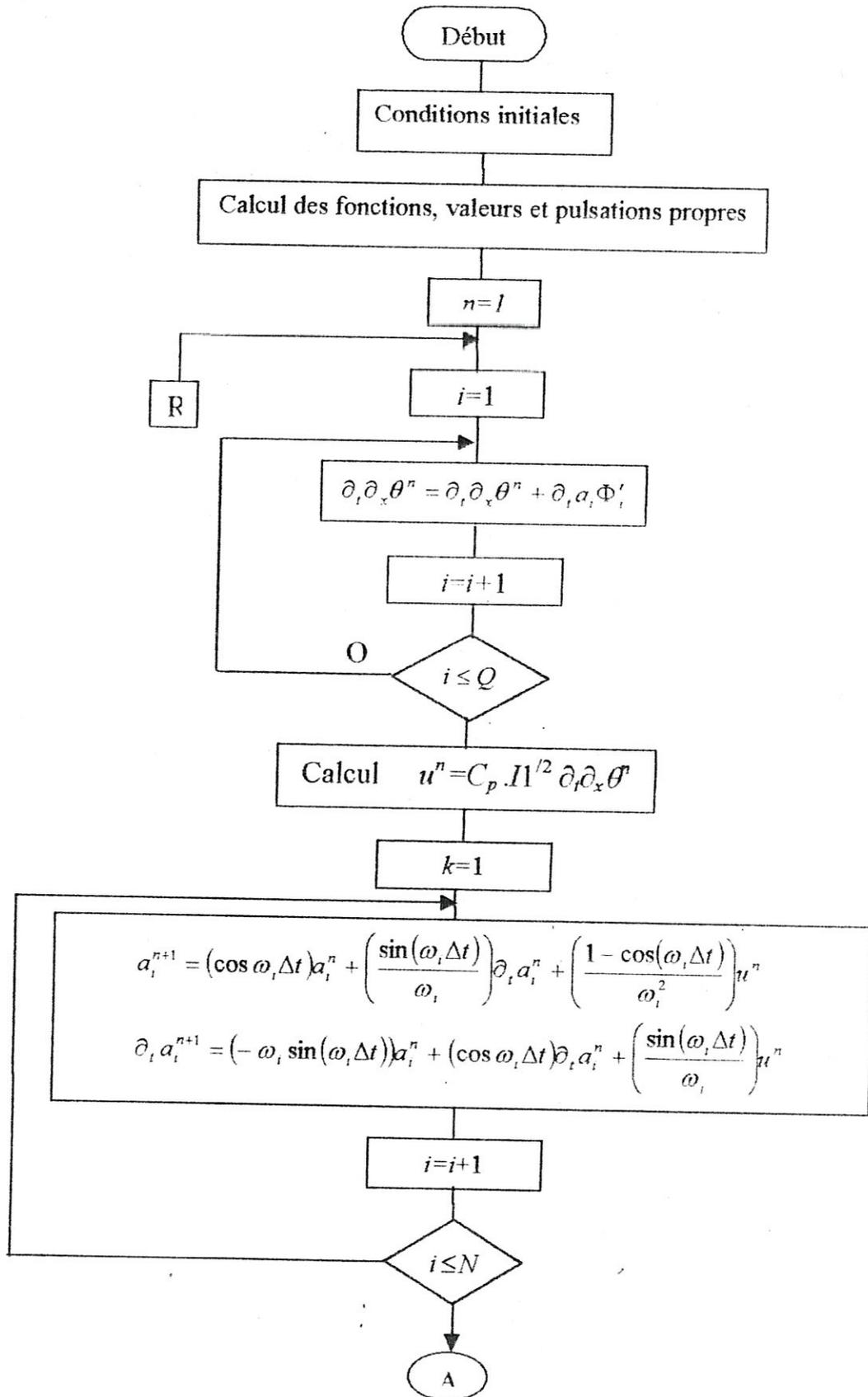
$$\|\partial_x^2 \theta\|^2 = \|\omega_i a_i\|^2 \quad (\text{III.72})$$

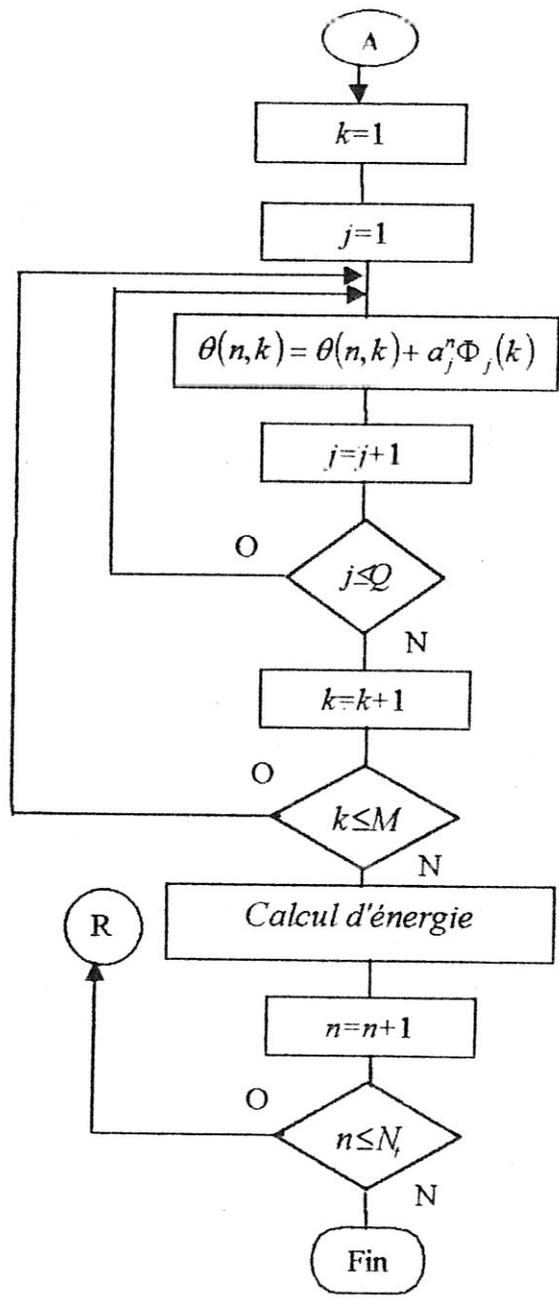
L'énergie mécanique approchée s'écrit finalement :

$$E_t = \frac{1}{2} \sum_1^N \left((\omega_i a_i)^2 + (\partial_t a_i)^2 \right) \quad (\text{III.73})$$

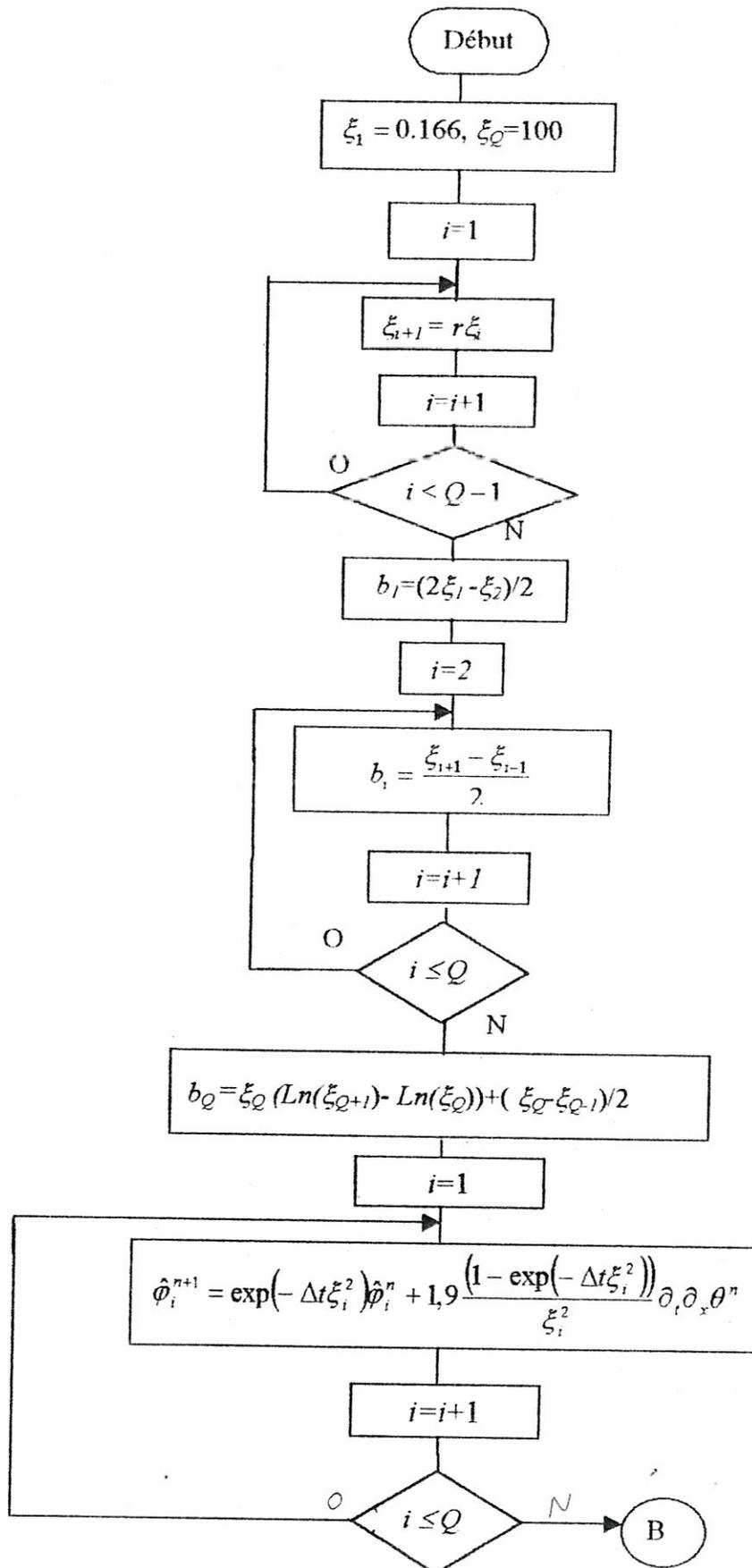
2. ORGANIGRAMMES

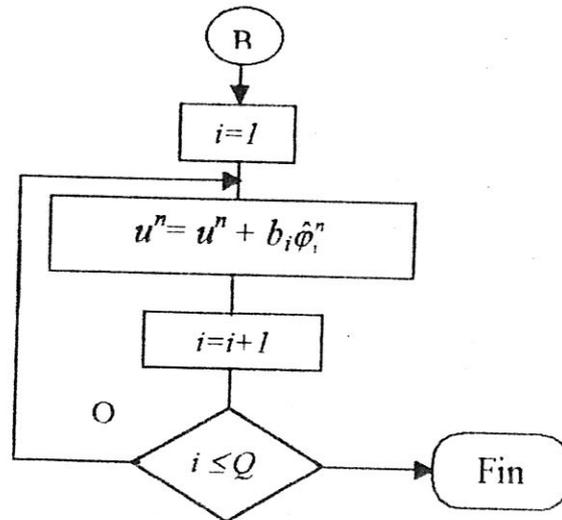
2.1 Organigramme global



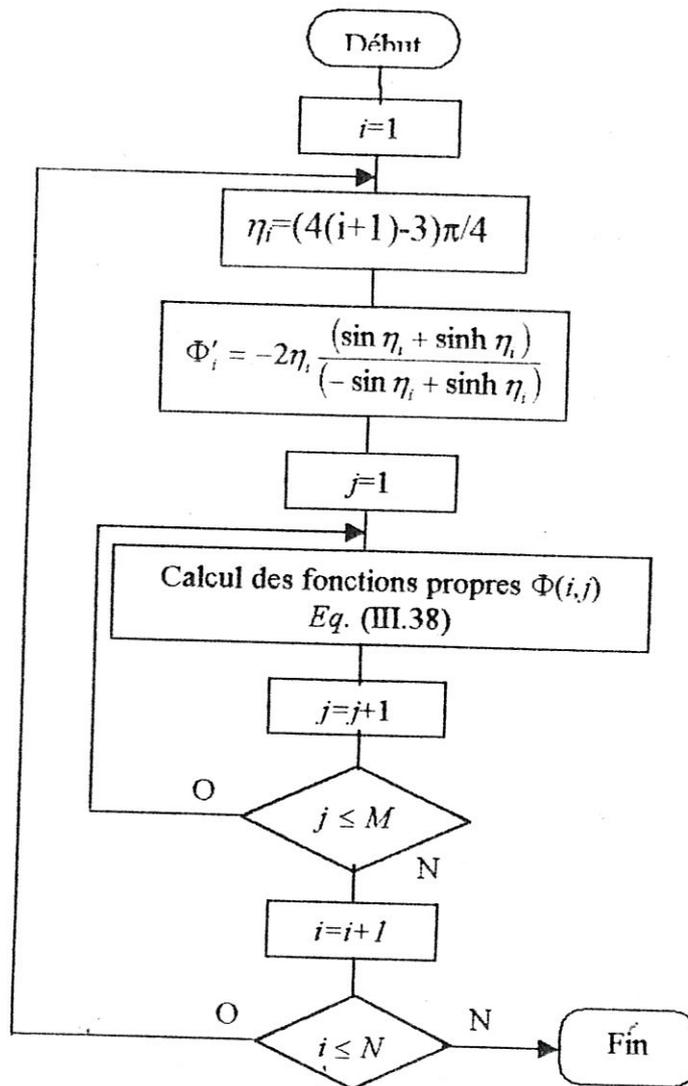


2.2 Organigramme de $I^{1/2}$





2.3 Organigramme valeurs et fonctions propres



3. SIMULATION NUMERIQUE

3.1 Données de la simulation

La mise en œuvre numérique a été réalisée à l'aide du logiciel Matlab. Le choix des paramètres est effectué de façon à avoir une bonne approximation et en particulier de pouvoir visualiser clairement l'effet du contrôle appliqué au bras.

Pour le choix du nombre de modes, il est démontré dans la littérature (voir par exemple [11] et [13]) qu'en utilisant les 10 modes les plus significatifs, on peut modéliser correctement une structure unidimensionnelle telle qu'une poutre ou un bras.

Le pas du temps Δt est choisi à partir de la fréquence des modes les plus hauts.

Le temps de simulation T est choisi à partir de la fréquence des modes les plus bas.

Le choix des conditions initiales est arbitraire, du fait que le contrôle doit être efficace pour n'importe quelle position initiale du bras.

3.2 Interprétation des Résultats

Les figures (III.1.a et b) montrent l'évolution du bras dans le cas autonome avec $T = 0.2s$. Elles mettent en évidence le comportement vibratoire complexe du bras.

D'autre part, nous constatons que le temps de vibration verticale du bras est le même celui de la propagation des ondes élastiques.

Les figures (III.2.a et b) présentent l'évolution du bras dans les mêmes conditions, que celles du cas (III.1), mais avec un temps de simulation égal à 2s. Nous constatons que, malgré que le temps de simulation est 10 fois plus grand, la vibration du bras reste la même. Cela prouve que le système est conservatif.

La représentation en 2D montre clairement la propagation des ondes élastiques avec des vitesses non constantes ainsi que leurs réflexions sur les bords.

Les figures (III.3.a et b) illustrent la déflexion du bras avec contrôle. Elles montrent clairement l'effet du contrôle utilisé sur le bras. La propagation des ondes est très nette au début de l'évolution mais presque il n'y a aucune réflexion qui a été en accord avec la matrice de réflexion.

Les figures (III.4.a) et (III.4.b) montrent l'évolution du bras après un temps 2s. Le but est de montrer l'effet du contrôle sur les modes basses et confirmer que les ondes rapides sont absorbées.

La déflexion du bras est diminuée presque 10 fois, on peut dire que la stabilisation du bras est atteinte.

Les figures (III.5.a) et (III.5.b) présentent l'évolution de l'extrémité libre (déflexion en $x=1$) dans le cas autonome (en bleu) et celle avec contrôle (en rouge).

On remarque qu'il y a une grande différence entre les 2 courbes :

Pour $0 < t < 0.2s$, l'extrémité libre dans le cas autonome anime (trace) une allure symétrique par rapport à l'axe Ox. Par contre dans le cas contrôlé la déflexion du même point reste toujours positive.

Pour $0.2s < t < 2s$, le bras, dans le cas autonome, poursuit sa vibration avec une allure sinusoïdale symétrique par rapport à l'axe Ox, avec une l'amplitude presque constante. Tandis que dans le cas contrôlé, l'allure est une sinusoïde non symétrique d'amplitude décroissante qui tend vers une valeur constante, ce qui met en évidence la stabilité de l'extrémité libre.

La figure (III.6) montre la forme initiale du bras (en pointillés) ainsi que les formes finales aux instants 0.2s et 2s pour les deux cas autonome (en bleu) et contrôlé (en rouge). On remarque que dans le cas contrôlé, la forme finale du bras est presque la même pour les 2 instants. Par contre dans l'autre cas, le bras prend 2 formes très différentes, cela implique que le contrôle a stabilisé le bras.

La figure (III.7) met en évidence l'évolution décroissante dans le temps de l'énergie mécanique du bras.

On remarque que cette décroissance est très rapide au début, ce qui justifie que le contrôle est efficace aux hautes fréquences pour lesquelles les ondes se propagent rapidement et par ailleurs elles sont absorbées aussi rapidement à la frontière.

On remarque aussi que l'énergie n'arrive pas à zéro (fig.III.7.b). Ceci est dû à la présence des ondes stationnaires et à l'effet de la troncature du nombre de modes.

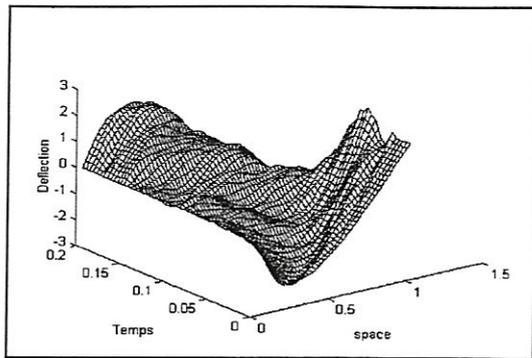
La figure (III.8) présente l'effet du 1^{er} compensateur ($C_p = -\sqrt{2}$) sur le bras. En comparant avec la figure (III.3), on peut dire que la déflexion du bras dans ce cas est plus grande que celle du 3^{ème} compensateur ($C_p = -\frac{1}{\sqrt{2}}$).

Il faut noter que malgré la différence qui existe entre les deux cas, cette figure ne donne que peu d'informations sur lesquelles on peut juger lequel des deux compensateurs est le plus absorbant.

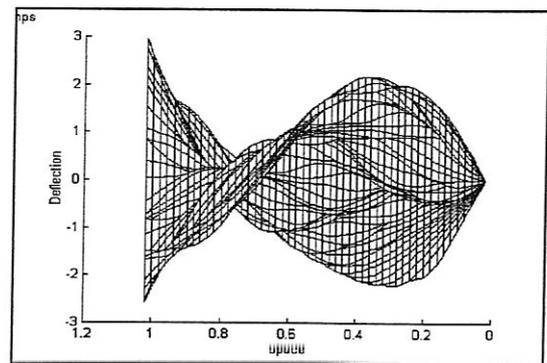
La figure (III.9) montre l'évolution de l'énergie mécanique du bras dans les deux cas précédents. Elle met en évidence la différence nette entre les deux compensateurs.

On remarque que les 2 courbes coïncident au début et se différent après un certain instant. L'énergie dissipée avec le 3^{ème} compensateur est plus importante que celle avec le 1^{er} compensateur. Ce qui confirme les résultats du chapitre 2.

La figure (III.10) montre la forme finale du bras pour les deux compensateurs. Du point de vue stabilisation, cette figure affirme encore plus la différence entre les deux compensateurs ; le bras est plus stable avec le 3^{ème} compensateur qu'avec le 1^{er}.

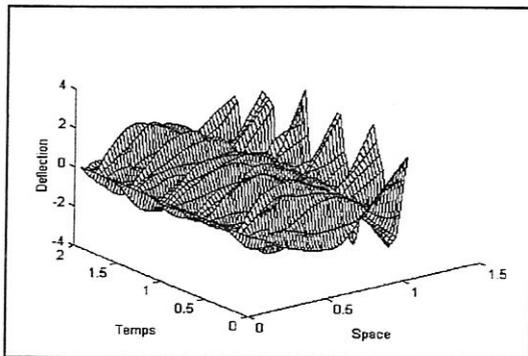


(a)

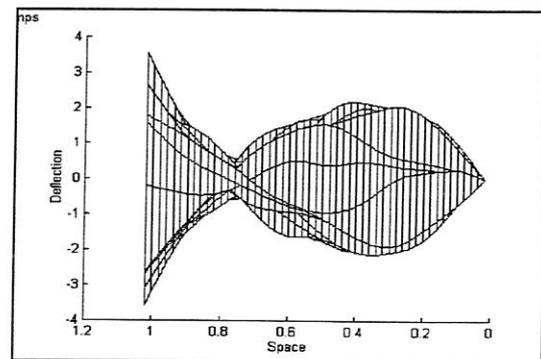


(b)

FigureIII.1: Déflexion du bras cas Autonome $t=0.2s$

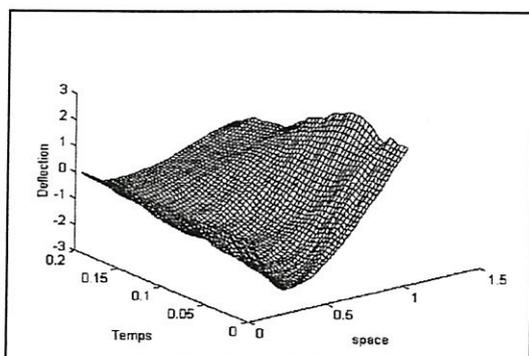


(a)

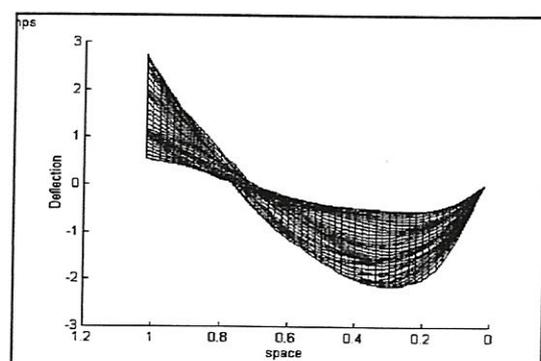


(b)

FigureIII.2: Déflexion du bras cas Autonome $t=2s$

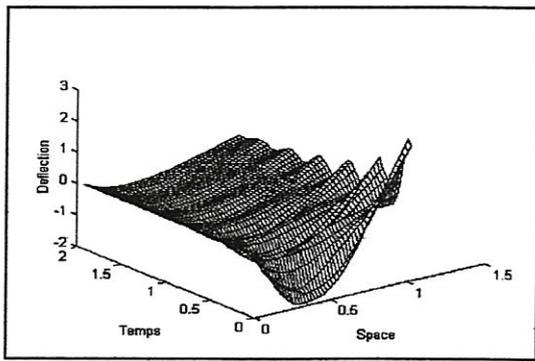


(a)

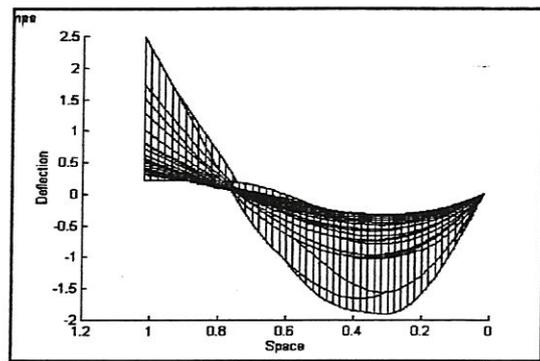


(b)

FigureIII.3: Déflexion du bras avec Contrôle $t=0.2s$

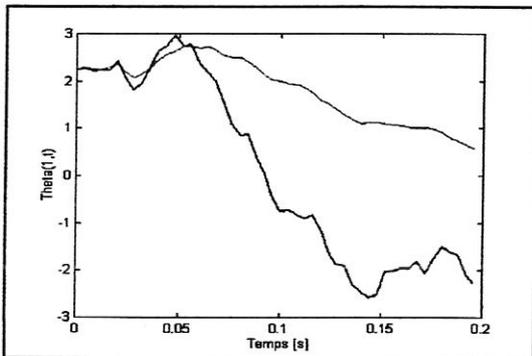


(a)

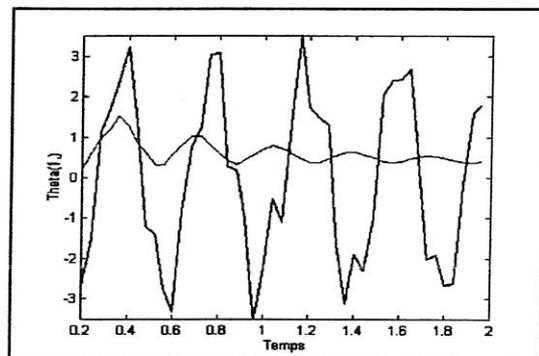


(b)

Figure III.4: Déflexion du bras avec Contrôle $t=2s$

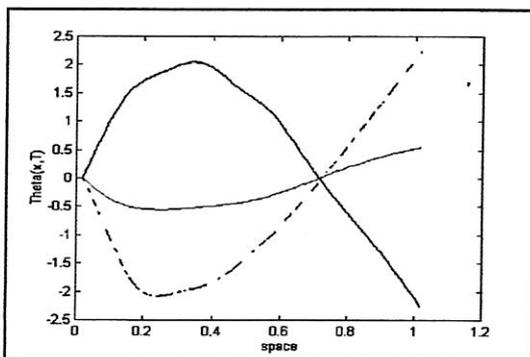


(a)

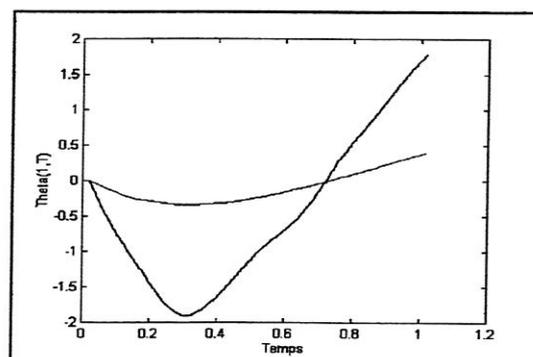


(b)

Figure III.5 Evolution de l'extrémité libre $x=1$

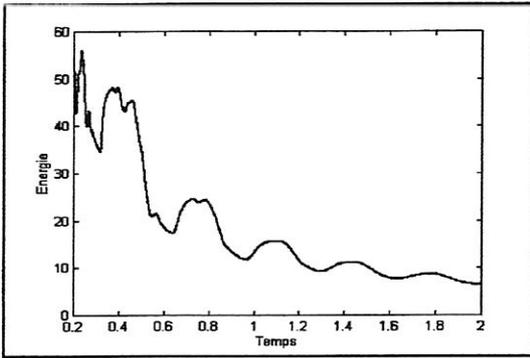


(a)

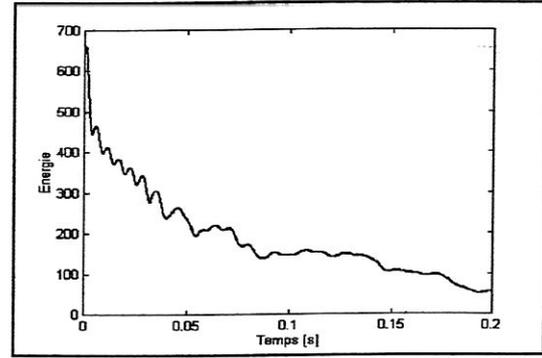


(b)

Figure III.6: Forme final du bras

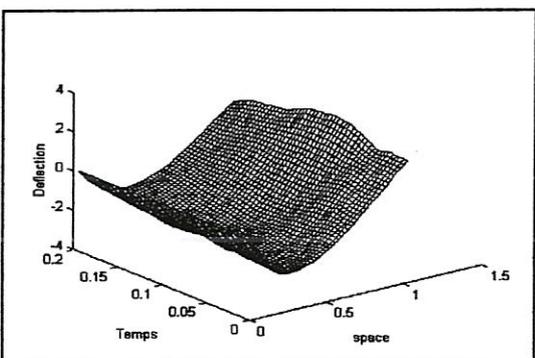


(a)

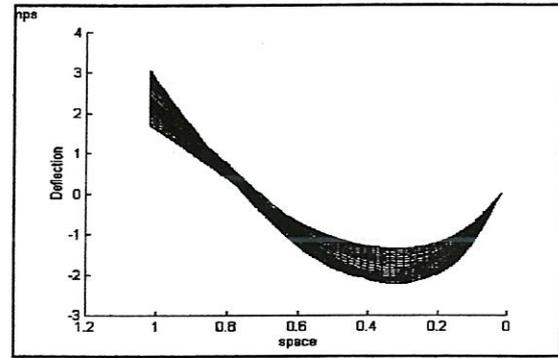


(b)

Figure III.7 Energie mécanique

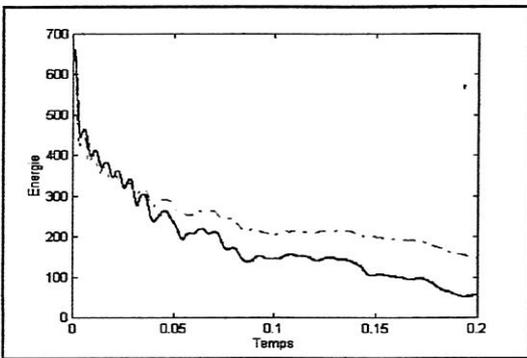


(a)

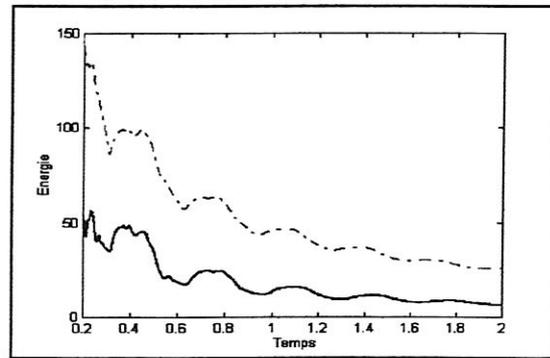


(b)

Figure III. 8 Déflexion du bras avec $C_p = -1.4$

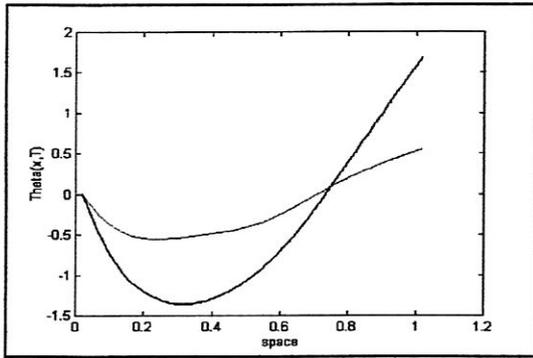


(a)

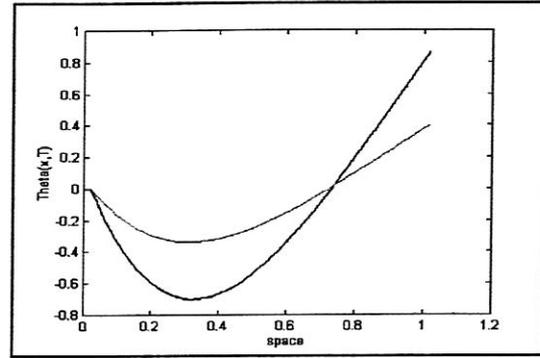


(b)

Figure III.9 : Energie mécanique



(a)



(b)

Figure III.10 : forme du bras pour les 2 compensateurs

CHAPITRE 4

CONTROLE DIFFUSIF OPTIMAL

Nous avons vu précédemment, comment procéder pour stabiliser le bras autour d'une position initiale, avec des conditions initiales de diffusion nulles, ce qui a pu mettre en évidence l'efficacité de la représentation diffusive.

Nous allons maintenant montrer comment ces conditions initiales de diffusion «CID» permettent d'influencer directement sur le comportement total du système. En effet, ces conditions initiales vont simuler une situation initiale de déformation de la poutre virtuelle (voir chapitres précédents) qui soumise à son régime libre s'allonge selon sa position asymptotique et ramène avec elle le bras flexible qui tourne vers cette direction en préservant toujours sa stabilité.

Le problème de contrôle optimal du bras, que nous allons aborder dans cette partie, revient alors à déterminer ces CID qui minimisent certains critères, en particulier l'énergie globale du bras, afin d'obtenir les meilleures performances en matière de stabilisation et de contrôle.

1. CONTROLE OPTIMAL

1.1 Présentation du problème

Dans le chapitre 2, nous avons vu que le système (bras +diffusion) pouvait se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \Lambda \cdot z \\ z(0) &= z_0 \end{aligned} \tag{IV.01}$$

où $z = (\theta, \dot{\theta}, \theta, \dot{\phi})$.

Le couple appliqué au bras peut s'écrire aussi sous forme d'une équation d'état :

$$u = C \cdot z \tag{IV.02}$$

Le problème posé, après la stabilisation du bras, est de ramener le bras à une position désirée à partir d'une position initiale.

Les conditions initiales de la déflexion et de la vitesse sont nulles, donc le bras est initialement en position horizontale, mais les conditions initiales de diffusion, qui vont simuler le prolongement du bras vers $-\infty$ (stabilisation du bras) et la position asymptotique de la poutre virtuelle (direction finale du bras), ne sont plus nulles. Alors, il est possible de poser le problème d'optimisation directement sur les conditions initiales de diffusion (C.I.D).

Nous pouvons donc formuler le problème du contrôle optimal en boucle ouverte comme suit :

Déterminer $\hat{\phi}_0$ qui minimise une fonctionnelle du coût satisfaisant un critère bien déterminé.

1.2 Conditions initiales de la poutre virtuelle

Le problème du choix de la condition initiale de la poutre virtuelle se ramène à un problème d'observation d'état, puisqu'il s'agit de configurer géométriquement celle-ci pour qu'elle produise un couple en $x=0$ qui colle mieux au contrôle précalculé.

Nous pouvons faire les remarque suivantes concernant la condition initiale :

- La condition d'encastrement de la poutre virtuelle est nécessaire pour la compatibilité des raccordements entre les deux poutres (réelle et virtuelle). L'énergie doit être finie, ce qui interdit les points anguleux (dérivée seconde dans L^2). Cette condition sera automatiquement vérifiée dans le cas d'une condition initiale de diffusion dans $L^2(R_\xi)$, qui simule impédance avec passé connectée à la poutre en $x=0$ de façon naturelle, c'est dire avec condition de raccord portant sur la position et la pente implicitement réalisée. Une rotation de la poutre virtuelle autour du point $(0,0)$ nécessaire pour un tel raccordement ne modifierait pas l'énergie de celle-ci.
- Une discontinuité en $t=0$ de $\partial_x^2 \theta(0,t)$ conduit à un contenu harmonique très riche de la poutre réelle, consécutif à une telle sollicitation qui par ailleurs s'avère inacceptable en pratique (cassure du bras). La condition de compatibilité initiale s'écrit aussi par :
$$\sum_{i=1}^Q b_i \hat{\phi}_i(0) = \sum_{i=1}^N \partial_x^2 \Phi_i a_i(0).$$
- La poutre virtuelle étant semi-infinie, des oscillations de fréquences très basses sont possibles. En pratique, on pourra coupler un dispositif de rappel en $x=0$ ayant une fréquence de coupure en deçà des fréquences propres du bras flexible et constituant un terme de rappel additionnel. Il est possible que cela soit réalisé automatiquement en choisissant ξ_{\min} très petit.

2.OPTIMISATION DES C.I.D

2.1 Contrôle avec critère de suivi d'une trajectoire en couple

2.1.1 Position du problème

Notre objectif est de montrer que des valeurs des conditions initiales de diffusion permettent d'appliquer un couple prédéterminé (désiré) sur une période de durée T .

Pour illustrer ce problème, nous choisissons de suivre le couple u^* donné par la figure IV.4 :

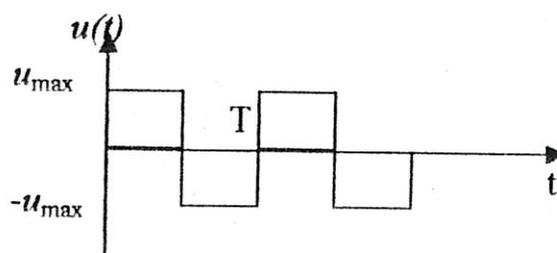


Figure IV.1 : Couple désiré

Le problème, donc, consiste à déterminer $\hat{\phi}_0$ tel que u en boucle fermé sera le plus voisin possible de u^* .

Mathématiquement, on peut écrire :

$$\text{Min}_{\hat{\phi}_0} \|u - u^*\|_{L^2(R)}^2 ; \hat{\phi}_0 \in L^2(R) \quad (\text{IV.03})$$

La solution classique de (IV.01) est :

$$z = z_0 e^{T\Lambda} \quad (\text{IV.04})$$

Donc, le couple u peut écrire :

$$u = C \cdot e^{T\Lambda} z_0 = \Gamma \hat{\phi}_0 \quad (\text{IV.05})$$

avec $z_0 = (0, 0, \hat{\phi}_0)$

Le problème (IV.03) devient alors : Trouver $\hat{\phi}_0$ qui minimise

$$\|\Gamma \hat{\phi}_0 - u^*\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (\text{IV.06})$$

La solution de ce problème au sens de la méthode des moindres carrés est :

$$\hat{\phi}_0 = \Gamma^+ u^* \quad (\text{IV.07})$$

où $\Gamma^+ = (\Gamma^* \Gamma)^{-1} \Gamma^*$ la matrice pseudo-inverse de Γ et Γ^* est la matrice transposée conjuguée.

Il suffit, donc, de calculer Γ^* pour obtenir $\hat{\phi}_0$.

2.1.2 Solution théorique

Nous donnons ici la solution analytique du problème précédent, mais la résolution sera effectuée numériquement.

Notons :

$$Q_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_d \end{bmatrix} \quad (\text{IV.08})$$

où I_d est la matrice d'identité.

De (IV.05), la matrice Γ peut écrire :

$$\Gamma = C \cdot e^{T\Lambda} Q \quad (\text{IV.09})$$

On a :

$$\begin{aligned} (\Gamma^* u / \hat{\phi})_{L^2(\phi)} &= (u / \Gamma \hat{\phi})_{L(0,T)} = \int_0^T u(t) \cdot C e^{T\Lambda} Q_d \cdot \hat{\phi} \cdot dt \\ &= \frac{C_p}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^T u(t) e^{t\Lambda} \cdot dt Q_d \right] \hat{\phi} d\xi \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Et

$$(\Gamma^* u / \hat{\phi})_{L^2(\phi)} = \int_{\mathbb{R}} \Gamma^* u \hat{\phi} d\xi \quad (\text{IV.11})$$

De (IV.10) et (IV.11), nous obtenons :

$$\Gamma^* u = \frac{C_p}{2\pi} \int_0^T u(t) e^{t\Lambda} dt Q_d \quad (\text{IV.12})$$

Pour un couple u^* présenté par la figure IV.1, nous obtenons :

$$\Gamma^* u^* = \frac{C_p}{2\pi} \Lambda^{-1} \left(2e^{T/2\Lambda} - I_d - e^{T\Lambda} \right) Q_d \quad (\text{IV.13})$$

Il faut, donc, déterminer Λ pour trouver Γ^* puis Γ^+ . Du fait que Λ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe, le calcul analytique devient assez lourd et difficile. C'est pourquoi, nous adoptons une solution numérique basée sur l'approximation obtenue dans le chapitre précédent (voir paragraphe suivant).

2.1.3 Approximations numériques

Dans le chapitre 3, nous avons montré que le système approché (III.57) peut se mettre sous la forme :

$$X^{n+1} = AX^n \quad (\text{III.61})$$

où $X = (a, \partial_t a, \hat{\varphi})$

Le contrôle appliqué au bras est donné par :

$$u = \int \hat{\varphi} d\xi \quad (\text{IV.14})$$

Sa valeur numérique approchée est :

$$u^n = \sum_{i=1}^{\varrho} b_i \hat{\varphi}_i^n \quad (\text{IV.15})$$

où $X_0 = (0, 0, \hat{\varphi}_0)$

Le contrôle peut écrire en fonction de $\hat{\varphi}_0$, comme suit :

$$u^n = (0, 0, b^T) \cdot X^n \quad (\text{IV.16})$$

En utilisant (III.61), (IV.16) devient :

$$u^n = (0, 0, b^T) \cdot A^n Q_d \hat{\varphi}_0 \quad (\text{IV.17})$$

Donc :

$$u^n = K \hat{\varphi}_0 \quad (\text{IV.18})$$

où $K = (0, 0, b^T) \cdot A^n Q_d$ $n=1, \dots, N_t$.

Le problème de minimisation (IV.03) devient alors : Trouver $\hat{\varphi}_0$ qui minimise

$$\|K\hat{\phi}_0 - u^*\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (IV.19)$$

Ce problème a pour solution :

$$\hat{\phi}_0 = K^+ u^* \quad (IV.20)$$

où $K^+ = (K^*K)^{-1}K^*$

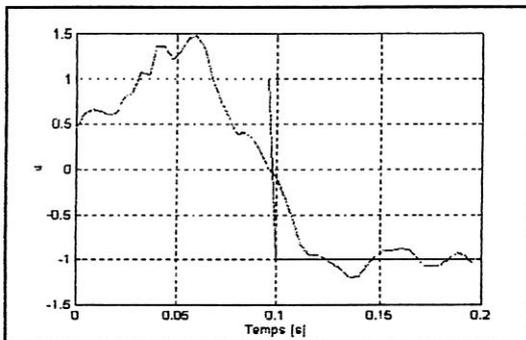
2.1.4 Simulation numérique

Pour illustrer les résultats de la simulation numérique, nous avons choisi le couple présenté dans la figure (IV.1) avec $u_{\max} = 1$ et 5 et $T=0.2s$ et 2s

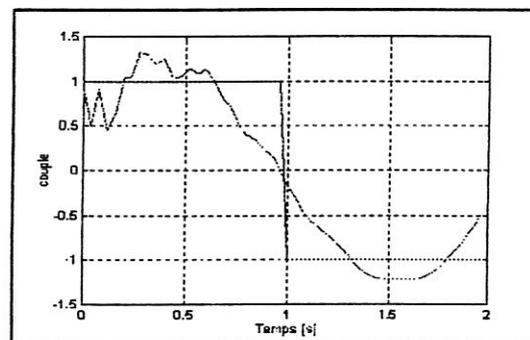
Les figures (IV.2a) et (IV.2b) présente une comparaison entre le couple désiré et le couple simulé.

On remarque que le couple simulé qui est imposé par les conditions initiales de diffusion en boucle ouverte, a presque la même allure que celui prédéterminé.

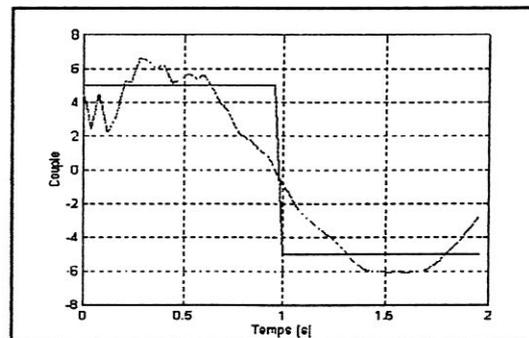
L'existence des ondulations autour des valeurs maximales et minimales et le passage incliné entre les valeurs crêtes du couple mettent en évidence qu'un couple de forme de la figure IV.1 est pratiquement impossible. Cela est plus vrai lorsqu'il est appliqué à une structure flexible. La figure IV.2c montre aussi les même remarques pour un couple de valeur $u_{\max} = 5$.



(a) $u_{\max}=1, T=0.2s$



(b) $u_{\max}=1, T=0.2s$



(c) $u_{\max}=5, T=2s$

Figure IV.2 : Suivi d'un couple

2.2 Contrôle avec critère d'optimisation sur le positionnement et l'énergie du système

2.2.1 Position problème

Nous cherchons un contrôle dont les conditions initiales de diffusion répondent aux critères suivants :

- L'énergie du système global (bras + diffusion) doit être minimale ou nulle à $t=T$, pour assurer une relative immobilité du bras pour $T > 0$.
- La position du bras est très proche d'une position désirée, nous signalons que c'est le 1^{er} mode uniquement qui nous intéresse.

Le problème peut être formulé mathématiquement par :

$$\text{Min}_{\hat{\phi}_0} \left\{ \varepsilon_1 \|z(T)\|_{H_g}^2 + \varepsilon_2 \|a_1(T)\Phi_1 - P_d\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right\} \quad (\text{IV.21})$$

$z(T)$ est le vecteur d'état à l'instant T et sa norme représente l'énergie totale du système à cet instant.

$\|a_1(T)\Phi_1 - P_d\|_{L^2}^2$ est la distance entre le 1^{er} mode du bras à l'instant T et la position désirée à ce même instant.

ε_1 et ε_2 sont deux coefficients positifs qui assurent un compromis entre les 2 quantités.

2.2.2 Solution numérique

Les normes précédentes de (IV.21) peuvent être transformée sous une autre norme équivalent comme suit.

$$\|z\|_{H_g}^2 = \|(\theta, \partial_t \theta, \hat{\phi})\|_{H_g}^2 = \|\theta\|_{H(0,1)}^2 + \|\partial_t \theta\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (\text{IV.22})$$

qui était équivalent à

$$\|z\|_{H_g}^2 = \|a\|_{L^2}^2 + \|\partial_t a\|_{L^2}^2 + \|\hat{\phi}\|_{L^2}^2 = \|(a, \dot{a}, \hat{\phi})\|_{L^2}^2 \quad (\text{IV.23})$$

nous avons aussi :

$$X^n = A^n X_0 = A^n Q_d \hat{\phi}_0 \quad (\text{IV.24})$$

Donc, le vecteur d'état s'écrit en fonction de $\hat{\phi}_0$:

$$X^n = V \hat{\phi}_0 \quad (\text{IV.25})$$

A $t=T$ nous avons :

$$\|a_1(T)\Phi_1 - P_d\|^2 = \|a_1(T)\Phi_1 - a_d\Phi_1\|^2 \quad (\text{IV.26})$$

qui est équivalent à :

$$\|a_1(T) - a_d\|^2 \quad (\text{IV.27})$$

Posons $T = N_1\Delta t$ la valeur de a_1 s'écrit aussi en fonction de $\hat{\varphi}_0$ par :

$$a_1^T = V_1\hat{\varphi}_0 \quad (\text{IV.28})$$

où V_1 est un vecteur de dimension $1 \times Q$.

Le problème de minimisation (IV.21) devient :

$$\text{Min}_{\hat{\varphi}_0} \left\{ \varepsilon_1 \|V\varphi_0\|_{L^2}^2 + \varepsilon_2 \|V_1\varphi_0 - a_d\|_{L^2}^2 \right\} \quad (\text{IV.29})$$

qui est équivalent à :

$$\text{Min}_{\hat{\varphi}_0} \left\{ \|\tilde{V}\varphi_0 - d\|_{L^2}^2 \right\} \quad (\text{IV.30})$$

où $d = \begin{bmatrix} a_d \\ 0 \end{bmatrix}$ de dimension $(1+2N+Q) \times 1$.

La solution de ce problème d'optimisation est la matrice pseudo-inverse :

$$\varphi_0 = \tilde{V}^+ d \quad (\text{IV.31})$$

où $\tilde{V}^+ = (\tilde{V}^* \tilde{V})^{-1} \tilde{V}^*$

2.2.3 Résultats de la simulation

Lors de la simulation numérique nous étions surpris par l'apparition d'une matrice mal conditionnée pour certaines valeurs de T . En outre, le plus grave que l'énergie mécanique du bras est très élevée pendant le contrôle voir figure (IV.3), cela est dû aux valeurs initiales de diffusion qui sont tous de l'ordre 10^8 .

La figure (IV.5) montre la position du bras à $t=0^+$ et $t=T$. Nous constatons qu'il y a un risque de cassure du bras. Bien que pour $t=0.2s$ nous obtenions la position désirée (fig.IV.4), ce résultat ne permet d'avoir des informations suffisantes sur l'efficacité du critère utilisé,

Dans cette situation et pour remédier à ce problème, nous tournons vers une autre fonctionnelle de coût mieux adapté qui peut prendre en compte l'énergie du bras pendant le déplacement.

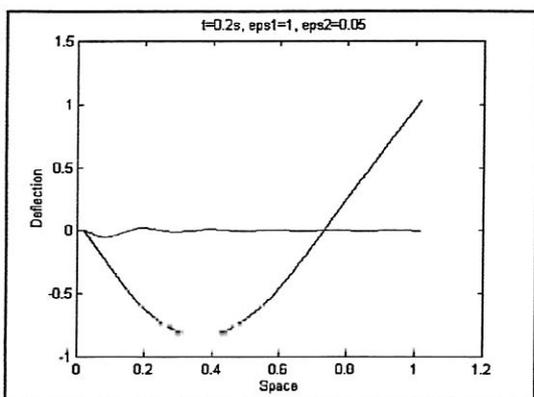


Figure IV.4 : Déflexion du bras
 ◆ à $t=T$ ◆ à $t=0^+$

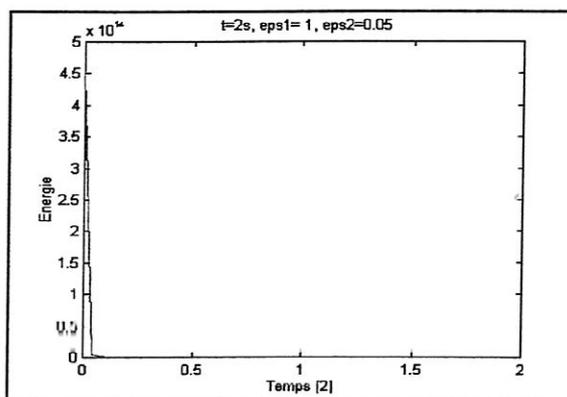


Figure IV.3 : Energie mécanique du bras

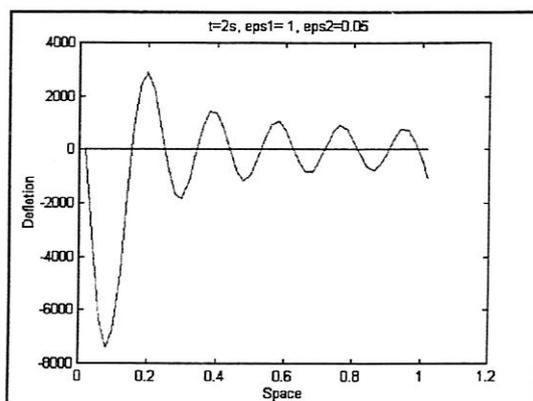


Figure IV.5 : Déflexion du bras ◆ à $t=2s$ ◆ à $t=0^+$

2.3. Contrôle avec critère de minimisation de l'énergie du bras pendant le déplacement

2.3.1 Présentation du problème

Notre but dans cette partie est d'avoir un déplacement du bras avec une énergie minimale, tout au long de ce déplacement.

Donc, nous rajoutons une condition sur l'intégrale de la norme du vecteur noté $z_\theta(t)$ qui correspond au vecteur d'état du bras uniquement.

La fonctionnelle s'écrit alors :

$$\text{Min}_{\hat{\phi}_0} \left\{ \varepsilon_1 \|z(T)\|_{H_\theta}^2 + \varepsilon_2 \|a_1(T) \Phi_1 - P_d\|_{L^2}^2 + \varepsilon_3 \int_0^T \|z_\theta(t)\|^2 dt \right\} \quad (\text{IV.32})$$

Alors, le problème est de déterminer les conditions initiales de diffusion qui :

- Minimisent l'énergie globale.
- Minimisent l'énergie du bras pendant le déplacement.
- Ramènent le bras à une position désirée repérée par le 1^{er} mode.

2.3.2 Résolution numérique

La solution théorique du problème précédent n'est pas évidente, tandis que l'approche numérique s'avère très facile à utiliser, ainsi que très souple.

Maintenant, nous devrions récrire le troisième terme de (IV.32) en fonction de $\hat{\phi}_0$

Soit :

$$\begin{aligned} M & R^Q \rightarrow L^2(H_\theta) \\ \hat{\phi}_0 & \rightarrow X_\theta(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \|X_\theta(t)\|_{L^2(H_\theta)}^2 &= \int (M\hat{\phi}_0 / M\hat{\phi}_0)_{L^2(H_\theta)} = \left(\hat{\phi}_0 / \int M^* M \hat{\phi}_0 \right)_{R^Q} \\ &= \left\| \sqrt{\int M^* M \hat{\phi}_0} \right\|_{R^Q} = \left\| \left(0, 0, \sqrt{\int M^* M \hat{\phi}} \right) \right\|_{H_\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

De (IV.25), (IV.28) et (IV.33) le problème (IV.32) devient :

$$\text{Min}_{\hat{\phi}_0} \left\| \tilde{M} \cdot \hat{\phi}_0 - d \right\| \quad (\text{IV.34})$$

où $d = \begin{bmatrix} a_d \\ 0 \end{bmatrix}$ de dimension $(1+2N+Q) \times 1$.

2.3.3 Résultats de la simulation

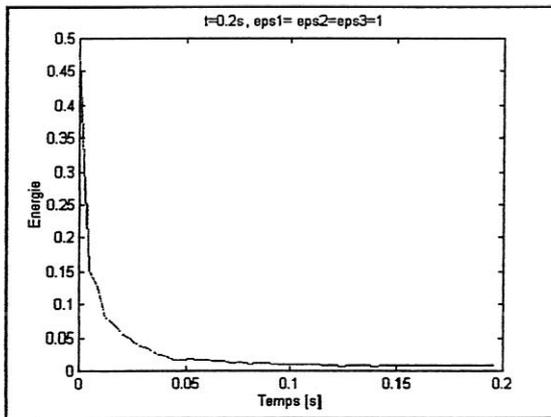
Afin de présenter les résultats du nouveau critère amélioré, nous avons pris comme données de la simulation numérique $a_d = 0.5$ et $a_d = 1$ avec $T = 0.2s$ et $2s$. Les coefficients ε_1 , ε_2 et ε_3 sont variables.

Pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ et $T = 0.2s$ et $T = 2s$, nous avons obtenu une énergie mécanique très faible (fig. IV.6a), mais la valeur de a_1 est très loin de a_d . La figure (IV.6b) présente une comparaison entre la position initiale à $t = 0^+$ et finale du bras avec $T = 0.2s$ et $a_d = 0.5$.

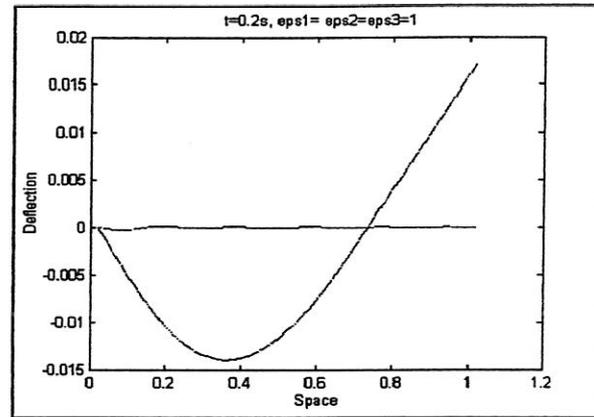
Après plusieurs simulations, nous avons considéré $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.05$ et $\varepsilon_2 = 1$, pour lesquels nous avons obtenu une valeur de a_1 plus proche à a_d tels que $a_1 = 0.43$ pour $a_d = 0.5$, et $a_1 = 0.89$ pour $a_d = 1$, mais l'énergie mécanique du bras reste un peu élevée.

Pour $\varepsilon_1 = 0.05$, $\varepsilon_2 = 1$ et $\varepsilon_3 = 0.1$ nous avons obtenu les mêmes valeurs de a_1 avec une énergie très faible (figure IV.7a). Toutes les autres valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 supérieures ou inférieures à ceux mentionnés ci-dessus donnent soit une énergie plus grande, soit une valeur non exacte de a_1

Les figures (IV.9a) et (IV.9b) montrent l'évolution du bras. On constate que le bras s'est déplacé d'une position initialement horizontale à une autre position imposée par les conditions initiales de diffusion.

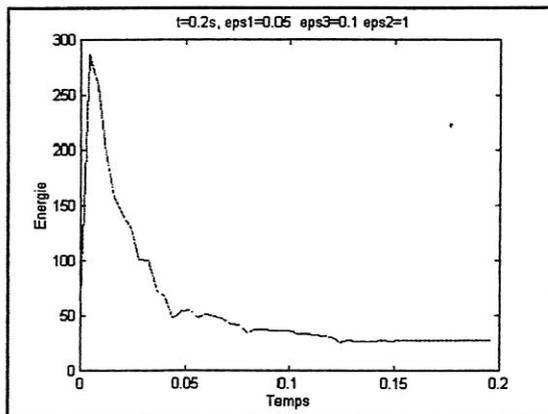


(a) Energie mécanique du bras

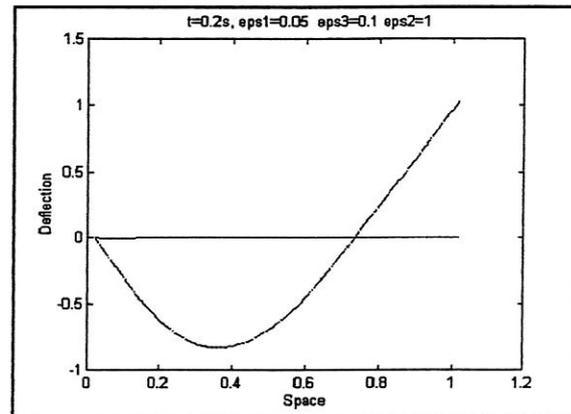


(b) Déflexion du bras ♦ à t=0.2s ♦ à t=0⁺

Figure IV.6: Contrôle avec critère d'optimisation 2 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ à t=0.2s

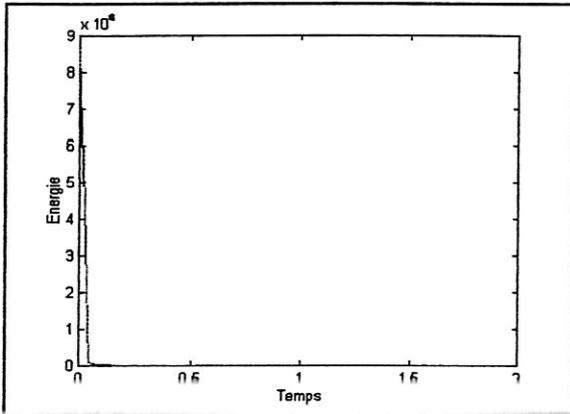


(a)Energie mécanique du bras

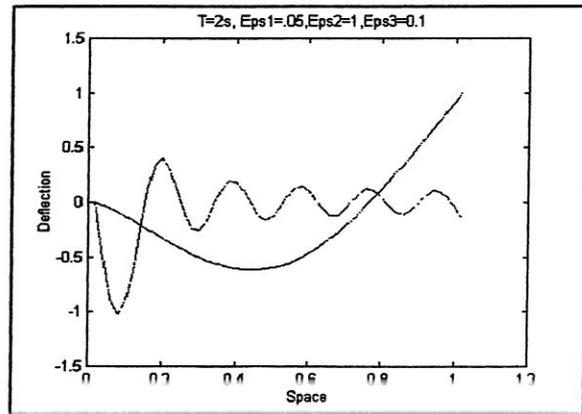


(b) Déflexion du bras ♦ à t=0.2s ♦ à t=0⁺

Figure IV.7: Contrôle avec critère d'optimisation 2 $\varepsilon_1 = 0.05$, $\varepsilon_2 = 1$ et $\varepsilon_3 = 0.1$ à t=0.2s



(a) Énergie mécanique du bras



(b) Déflexion du bras \blacklozenge à $t=2s$ \blacklozenge à $t=0^+$

Figure IV.8 : Contrôle avec critère d'optimisation 2 $\epsilon_1=0.05$, $\epsilon_2=1$ et $\epsilon_3=0.1$ à $t=2s$

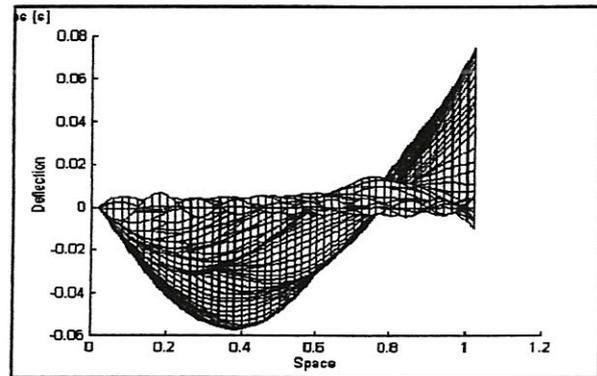
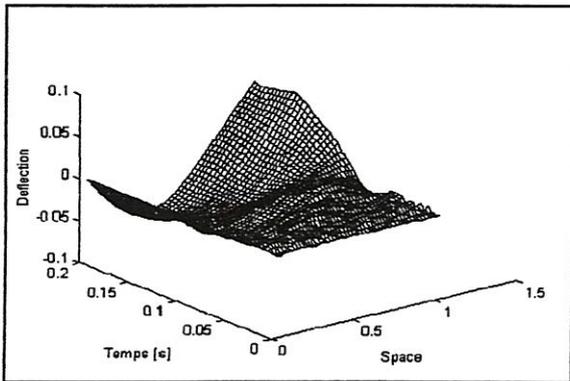


Figure VI. 9 : Déflexion du bras avec critère d'optimisation 2 $T=0.2s$

CONCLUSION

Le but de cette étude était la stabilisation d'un bras flexible articulé (en $x=0$) et libre à l'autre extrémité autour d'une position désirée qui consistait à réduire ou supprimer les oscillations qui pouvaient y prendre naissance.

Le principe du contrôle utilisé a consisté de minimiser les effets des ondes incidentes sur les ondes réfléchissantes. Ce contrôle a fait apparaître des opérateurs pseudo-différentiels ; en l'occurrence des intégrateurs fractionnaires. La réalisation diffusive de ces opérateurs a permis d'obtenir un système augmenté sous la forme abstraite $\frac{dX}{dt} = \Lambda X$ où Λ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe. Ainsi le retour fractionnaire effectué a permis de réaliser les conditions absorbantes considérées, sans avoir recourt à aucune expression convolutive dans l'équation d'état globale

La fonctionnelle d'énergie globale est non croissante dans le temps. Elle présente une fonction de Lyapunov ce qui a mis en évidence la stabilité du système global. La nature globalement passive du système bouclé confère aussi au contrôle une nature robuste inconditionnelle.

L'approximation numérique du système global a été basée sur l'approche modale qui est la plus convenable à la modélisation dynamique des structures vibrantes. Les résultats obtenus montrent que la stabilisation du bras est atteinte malgré la présence des petites oscillations de basses fréquences qui peuvent être supprimées par un contrôle actif.

Nous avons abordé ensuite le problème de la position du bras, en minimisant une fonctionnelle du coût. Le problème d'optimisation en boucle ouverte a été posé directement sur les conditions initiales de diffusion par laquelle nous devons imposer au bras la position désirée. Parmi les critères d'optimisation utilisée, le critère le plus répondu de " contrôle avec critère de minimisation de l'énergie du bras pendant le déplacement " a donné les meilleures performances. Dans ce cas, nous avons déplacé le bras à une position désirée avec une énergie mécanique minimale du bras ce qui a permis d'assurer l'immobilité du bras en cette position.

Les extensions de cette étude sont multiples, Nous citons par exemple :

- Trouver d'autres fonctions d'interpolation de l'intégration fractionnaire afin d'obtenir une bande utile recouvrant un grand nombre de modes.
- Etudier le problème du contrôle optimal en boucle fermé.
- Faire la même étude pour le cas non linéaire afin de pouvoir actionner de grandes déviations du bras.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Dandrieu "Contrôle d'une poutre vibrante par la méthode d'adaptation d'impédance", Mémoire DEA, Mathématique Appliquée UPS, Toulouse, 1994.
- [2] S. Duhem "Intégration fractionnaire non héréditaire- application aux systèmes viscoélastique", Mémoire DESS de math., UPS, Toulouse, 1994.
- [3] S. Gandelle, G. Montseny "Contrôle diffusif d'un bras articulé flexible", Rapport LAAS 97360 sept 97.
- [4] M. Geradin, D. Rexen "Théorie des vibrations Application à la dynamique des structures ", Masson 1993.
- [5] D. Helescheuwits, D. Matignon "diffusive realisation of fractional integrodifferential operator structurals - Analysis under approximation", IFAC conference Nantes, France, july 8-10.1998
- [6] D. Matignon "Stability general properties for diffusif system" Journées thématique ENST, ESAIM Proc.vol.5. Paris 3-4 Dec 1998
- [7] K. Matsuda, H. Fujii, "H_∞ optimized wave- absorbing control : analytical and experimental results", J. Guidance, Control and Dynamics, vol. 16 N° 6, pp 1146 – 1153, Nov – Déc. 1993.
- [8] M. Mbodjie "Analyse et contrôle de certain modèle viscoélastique via une réalisation non héréditaire des opérateurs integrodifférentiels fractionnaire", Thèse de Doctorat, Com.opt.et Auto. Toulouse 1995.
- [9] G. Montseny "Diffusive representation of pseudo-differential time- operators", Journées thématique ENST, ESAIM Proc.vol.5. Paris 3-4 Dec 1998
- [10] G. Montseny " Propagation, Dispersion et contrôle optimal duffisif pour la poutre d'Euler-Bernoulli", Rapport LAAS n° 95475, Nov.95.
- [11] G. Montseny, J. Audounet "Diffusif wave-absorbing feedback controls for the boundray stabilisation of flexible beam", submitted to publication, Sep.3 1997.
- [12] G. Montseny, J. Audounet "Modèles non héréditaire pour l'analyse et le contrôle de systèmes à mémoire longue de type fractionnaire ", Journées d'étude "Les systèmes d'ordre non entier en automatique", Bordeaux (France), 1995.

- [13] G. Montseny, J. Audounet " **Stabilisation robuste d'une poutre vibrante par absorption frontière diffusif** ", Rapport LAAS n° Sept.1996.
- [14] G. Montseny, J. Audounet, D. Matignon " **Fractional integrodifferential boundry contro of the Euler-Bernoulli beam** " 3thIEEE. CDC. Conference SanSiego USA 97.
- [15] G. Montseny, J. Audounet, B. Mbodje " **Optimal models of fractional integrators and application to systems with fading memory**", Conférence IEEE SMC, le Touquet (France), 1993.
- [16] Ö. Morgul " **Stabilization and disturbance rejection for the wave equation** " IEEE Trans. Auto. Cont. Vol.43 n° 1 Jan1998.
- [17] M. Pedro, P.Pahud " **Mécanique vibratoire**" Press plytech.romand 1989.
- [18]] M. Soutif " **Vibration-Propagation-Difusion**", Dunod Université 1970.
- [19] M. Roseau " **Vibration des systèmes mécanique -méthodes analytiques et application**" Masson 1984.
- [20] H. Tebbikh, G. Montseny, B. Boudjehem " **Opérateurs pseudo-différentiels et stabilisation des structures vibrantes** "2^{ième} Col.Nat.de Mathématique 7-8-9 Mai 2000
- [21] V.Teulière " **Réalisation diffusive d'opérateur héréditaire de type psuedo-différentiel- Application à l'absorption des ondes bidimensionnelle** ", Mémoire DEUA Aut. Inf.ind. 1995.
- [22] P. Villedier, P. Monyon, S. Prydsen " **Méthodologie pour le contrôle actif des systèmes régis par des EDP**" Rapport ONERAT n°1997.
- [23] A. H. Von Flotow and B. Schäfer, " **Wave-absorbing controllers for a flexible beam**", J. of Guidance Control and Dynamics, vol. 9, N° 6, pp 673 – 680, Nov – Déc 1986.

ANNEXE 1

1. SEMI-GROUPE

1.1 Définition

On appelle semi-groupe de Classe C_0 une famille $\{S(t), t \geq 0\}$ d'opérateur $O(E)$ vérifiant les axiomes suivants :

- (i) $S(\cdot)z : [0, \infty) \rightarrow E$ est continue (continue à droite en 0).
- (ii) $S(0) = I_E$
- (iii) $S(t+r) = S(t)S(r)$

1.2 Proposition

Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe sur E alors il existe des constantes M et w_0 telle que :

$$\|S(t)\|_{O(E)} \leq M \cdot \exp(w_0 t), \quad \forall t \geq 0.$$

Lorsque $M=1$ et $w_0=0$ le semi-groupe est appelé semi-groupe de contraction.

1.3 Définition

Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe sur E , on appelle générateur infinitésimal de $S(t)$ l'opérateur linéaire de E défini par :

$$\Lambda z = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)z - z}{h}$$

1.4 Théorème (Lumer-Phillips):

Soit un opérateur linéaire à domaine $D(\Lambda)$ dense dans E , espace de Hilbert.

- Si Λ est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que l'image de $\lambda_0 I - \Lambda$ coïncide avec E , alors Λ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction.
- Si Λ est un générateur d'un semi-groupe de contraction dans E , alors l'image de $\lambda_0 I - \Lambda$ coïncide avec E pour tout $\lambda > 0$ et Λ est dissipatif.

2 STABILITE DES SYSTEME DYNAMIQUES

2.1 Définition 1

- Soit $z \in E$, l'ensemble:

$$w(z) = \{y \in E \mid \exists t_n \rightarrow \infty, S(t_n)z \rightarrow y \text{ lorsque } n \rightarrow \infty\}$$

est appelé ensemble w-limite de z

- un élément $z \in E$ est dit point d'équilibre de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si :

$$\forall t \geq 0, S(t)z = z$$

2.2 Définition 2

- Une fonction $\Xi \in C^0(E, \mathbb{R}^+)$ est appelé fonction de Lyapunov pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si :

$$\Xi(S(t)z) \leq \Xi(z) \quad \forall z \in E \text{ et } \forall t \geq 0$$

Une fonction de Lyapunov Ξ pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est appelé fonction de Lyapunov strict si tout point z de l'ensemble :

$$\{z \mid \Xi(S(t)z) = \Xi(z), \forall t \geq 0\}$$

est point d'équilibre.

2.3 Théorème (Principe d'invariance de LaSalle)

Soit Ξ est une fonction de Lyapunov pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ et soit $z \in E$ tel que $\bigcup_{t \geq 0} \{S(t)z\}_{t \geq 0}$ soit relativement compact dans E , alors:

- $l := \lim_{t \rightarrow \infty} \Xi(S(t)z)$ existe.
- $\Xi(y) = l, \forall y \in w(z)$

De plus, si Ξ est une fonction de Lyapunov stricte, alors :

- L'ensemble E_{eq} des points d'équilibre de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un sous-ensemble fermé non vide de E .
- $$\inf_{m \in E_{eq}} \|S(t)z - m\|_E \rightarrow 0 \text{ Lorsque } t \rightarrow \infty$$

ANNEXE 2

Approximation rationnelle polynomial par l'expansion fractionnaire continué

Soit l'ensemble de x_k , où $k=0,1,\dots$, l'expansion fractionnaire continue d'une fonction $f(x)$ est :

$$f(x) = \ell_0 + \frac{x - x_0}{\ell_1 + \frac{x - x_2}{\ell_2 + \dots}} \quad (\text{A2.1})$$

où $\ell_k = v_k(x_k)$

$v_k(x)$ est définie par :

$$v_0(x) = f(x), \quad v_{k-1}(x) = \frac{(x - x_k)}{(v_k(x) - v_k(x_k))} \quad k=0,1,2,\dots \quad (\text{A2.2})$$

L'approximation rationnelle $f_n(x)$ de la fonction $f(x)$ est obtenue par une troncature de la fraction continue, équation. (A2.1), après le $n^{\text{ième}}$ terme. Le polynôme $f_n(x)$ peut être propre ou impropre en fonction de la parité de n . Notons que $f_n(x) = f(x_k)$ est toujours satisfaite.

Résumé

Le but de cette étude est la stabilisation autour d'une position désirée d'un bras flexible (articulé en $x=0$ et libre à l'autre extrémité) qui consiste à réduire ou supprimer les oscillations qui peuvent y prendre naissance.

Le principe du contrôle utilisé consiste à minimiser les effets des ondes incidentes sur les ondes réfléchissantes. Ce contrôle fait apparaître des opérateurs pseudo-différentiels ; en l'occurrence des intégrateurs fractionnaires. La réalisation diffusive de ces opérateurs permet d'obtenir un système augmenté sous la forme abstraite $\frac{dX}{dt} = \Lambda X$ où Λ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe. Ainsi le retour fractionnaire effectué permet de réaliser les conditions absorbantes considérées, sans avoir recours à aucune expression convolutive dans l'équation d'état globale.

L'approximation numérique du système global est basée sur l'approche modale qui est la plus convenable à la modélisation dynamique des structures vibrantes. Les résultats obtenus montrent que la stabilisation du bras est atteinte malgré la présence des petites oscillations de basses fréquences qui peuvent être supprimées par un contrôle actif.

Nous abordons ensuite le problème de la position du bras, en minimisant une fonctionnelle du coût. Le problème d'optimisation en boucle ouverte est posé directement sur les conditions initiales de diffusion par laquelle nous devons imposer au bras la position désirée. Parmi les critères d'optimisation utilisés, le critère le plus répondu de " contrôle avec critère de minimisation de l'énergie du bras pendant le déplacement " donne les meilleures performances. Dans ce cas, nous déplaçons le bras à une position désirée avec une énergie mécanique minimale du bras ce qui permet d'assurer l'immobilité du bras en cette position.

Mots clés : Contrôle absorbant, Opérateur fractionnaire, Bras flexible, Approche diffusive