

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

69x.026

Mémoire de Magister

Présenté à l'Université de GUELMA

Faculté des Sciences de l'ingénierie

Département de : GENIE CIVIL

Spécialité : Mécanique Des Sols et Structures

Présenté par : OUCHENANE Karima

**ANALYSE PAR ELEMENTS FINIS DES FISSURES
DANS LES STRUCTURES EN BETON ARME**

« SIMULATION DU TEST D'ARRACHEMENT »

Sous la direction de : BEN MERLAOUI Rabah

20 Octobre 2002.

Soutenue le : 20 / 10 / 2002 devant la commission d'examen.

¤ JURY ¤

GUENFOUD Mohamed	Prof. Université de GUELMA.	Président
BENMERI.AOUI Rabah	M.C. Université Mentouri, Constantine.	Rapporteur
HOUARI Hacène	M.C. Université Mentouri, Constantine.	Examinateur
BENOUIS Abd-el-halim	Dr. Université de GUELMA.	Examinateur
BOUZERD hamoudi	Dr. Université de SKIKDA.	Examinateur

R

ésumé :

La représentation du comportement interne des structures en béton armé ne peut être abordée que grâce au développement des méthodes numériques. La fissuration est l'une des principales causes de déformation et de dommage dans ces structures.

Pour prédire exactement ces comportements, il est préférable d'utiliser la méthode des éléments finis qui est certainement la mieux adaptée à la discrétisation d'un ensemble de matériaux à comportement très différents.

Il existe deux techniques de modélisation des fissures par éléments finis :

La première méthode est la modélisation continue des fissures (smeared crack models), qui consiste à modéliser le matériau par un changement des propriétés constitutives des éléments finis que par la topographie du réseau en éléments finis.

La deuxième méthode est la modélisation discrète des fissures (discret crack models), qui modélise la fissure comme une quantité géométrique. Ces fissures sont modélisées par déformation du maillage qui mettent en ordre la propagation des fissures.

C'est cette dernière approche qui sera traitée dans cette publication. Le test de simulation utilisé pour étudier la propagation des fissures est l'arrachement d'une barre d'acier inclue dans un prisme de béton et dont la liaison entre ces deux matériaux a été modélisée par des éléments d'interfaces. A l'intérieur du matériau béton, un simple critère de résistance à la traction est utilisé pour initier les fissures dans le béton, il en résulte donc une propagation des fissures le long de la frontière des éléments sur lequel la fissuration à lieu par fractionnement des noeuds.

À la fin, une comparaison complète est donnée entre les résultats expérimentaux et la simulation du test en utilisant la MEF tout en calculant le déplacement total longitudinal ainsi que la glissement entre l'acier et le béton pour les différents pas de chargement.

A bstract :

The internal representation of the reinforced concrete of structures can not be studied only by numerical methods development. Fracture is one of the principal causes of deformation and damage in these structures.

To predict exactly these behaviours, it is preferably to use finite element methods, which is certainly the adapted to the discretisation of a set of materials with different behaviours.

The two dominant techniques used in finite element modelling of fracture are:

The first approach is the smeared crack models, which consists to represent cracks by changing the constitutive properties of the finite elements than changing the topography of the finite element grid.

The second approach is the discrete crack models, which treats a crack as a geometrical entity. Discrete cracks are usually modelled by altering the mesh to accommodate propagating cracks.

The last approach is the one used in this study. Using the discrete approach carried numerical simulation of test pullout.

In the test set-up, prismatic specimens were axially loaded in tension by applying forces directly to the steel bar protruding from concrete encasement, and the contact between this two material is modelled by the interface element. In this approach, a simple tensile strength cracking criterion is used to split nodes, and crack propagation results from the coalescence of split nodes along existing element boundaries.

Finally, a complete comparison between the result of test "pullout" and simulation using finite element method is illustrated.

ملخص :

يتناول هذا البحث التحليل باستعمال الطرق التقريبية للتشققات داخل المنشآت المكونة من الإسمنت المسلح. لذلك فإن تمثيل السلوك الداخلي لهذه المنشآت لن يكون ممكنا إلا باستعمال الطرق التقريبية .

إن ظهور التشققات يعتبر من أهم الأسباب الرئيسية التي تحدث التشوهات و التصدعات لثل هذه المنشآت.

و للتنبؤ الحقيقي لسلوك هذه المنشآت ، يستحسن استعمال طريقة العناصر المتماثلة الصغر التي تعتبر الأكثر تطابقا في الحقيقة لدبرئنة مجموعه من المواد ذات سلوكات متشوحة . لذا ، توجد تقنيتان أساسيتان لإبراز نموذج التشقق باستعمال طريقة العناصر المتماثلة الصغر .

- الطريقة الأولى : و هي تقديم نموذج مستمر للتشقق ، و الذي يتمثل في تغيير الخواص المكونة لهذه العناصر المتماثلة الصغر بدلا من تغيير طبوغرافية شبكة هذه العناصر .

- الطريقة الثانية : و التي تمثل في تقديم نموذج مجزء للتشققات ، و هو يكمن في اعطاء نموذج للتشققات كمقدار هندسي. هذه التشققات تعتمد على تشوهات تخزنة العناصر و التي تظهر مدى درجة انتشار التشقق.

هذه الطريقة الأخيرة هي التي اعتمدنا عليها في تقديم هذا البحث.
التجربة المستعملة لدراسة انتشار التشقق هو تشبيه تجربة استعمال قضيب من الفولاذ الصلب موجود داخل حجم من الإسمنت ، بحيث الرابط بين هاتين المادتين ممثلة بواسطة عناصر الحافات .

في داخل مادة الإسمنت المسلح ، استعملنا معيار سهل للمقاومة . في حالة الشد ، لرؤية أيمن التشقق يبدأ. نستخلص من هذا أن توزيع التشقق يكون على طول العناصر الحدية التي يتم فيها حدوث التشقق بانتشار العقد .

و في الأخير ، مقارنة شاملة بين النتائج المتحصل عليها من خلال التجربة والأخرى المتحصل عليها من خلال التحليل باستعمال طريق العناصر المتماثلة الصغر ، وذلك بحساب كل من : الإزاحة الكلية الطولية ، الإنزلاق بين الفولاذ والإسمنت المسلح خلال مراحل التحميل .

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- mes très chers parents :

- ❖ *pour les efforts que vous avez fournis pour moi;*
- ❖ *pour tous les conseils que vous m'avez donnés;*
- ❖ *pour votre grandeur d'esprit;*
- ❖ *pour tous ce que vous m'avez fait afin que je soit ainsi.*

Je vous souhaite une excellente santé, que dieu vous accorde une longue vie, pleine de joie.

- Mes frères : Amar, Mohamed, Mahfoud;*
- Mes soeurs : Leila, Ouafia, Meriem;*
- Mon beau frère et mes belles sœurs;*
- Mon neveu Kheireddine et mes nièces Sara & Manar.*

Remerciement

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur BENMERLAOUI Rabah, mon directeur de thèse, Maître de conférence à l'université Mentouri, Constantine.

Je le remercie de m'avoir honorer en acceptant de m'encadrer; de m'avoir fait profiter de sa compétence, pour son aide considérable, ses conseils et soutien au long de ce travail.

Respectivement à :

- *Mr : Guenfoud Mohamed, Proff. à l'université de GUELMA, pour avoir accepté de présider le jury.*
- *Mr : BENOUIS Abd Al Hlim, Dr. à l'université de GUELMA.*
- *Mr : HOUARI Hacène, M.C. à l'université Mentouri Constantine.*
- *Mr : BOUZERD hamoudi, Dr. à l'université SKIKDA.*

Pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Sincèrement à :

- *Tous les enseignants de l'institut de Génie Civil de GUELMA.*
- *Tous les enseignants de l'institut de Génie Civil de de l'université Mentouri Constantine.*
- *Tout le personnel de l'A.P.C, IBN ZIAD, Constantine.*

Je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

SOMMAIRE

	Page
<i>Résumé</i>	i
<i>Abstract</i>	ii
<i>ملخص</i>	iii
<i>Dédicaces</i>	iv
<i>Remerciement</i>	v
<i>Sommaire</i>	vi
<i>Index des notations</i>	x
<i>Liste des figures</i>	xv
<i>Liste des tableaux</i>	xix
<i>Introduction générale</i>	1
<i>Chapitre 01 : Problématique.</i>	
1.1) Introduction à la fissuration :	2
1.1.1) Prévenir.....	3
1.1.2) Guérir.....	3
1.1.3) Exécution.....	4
1.2) Causes des dégradations et mesures de protection :	4
1.2.1) Causes de dégradations survenant lors de la construction.....	4
1.2.2) Contraintes thermiques.....	5
1.2.3) Absorption d'eau par le béton.....	6
1.2.4) Corrosion des armatures.....	6
1.2.5) Retrait lors du durcissement (déformation sans charge du béton) :	7
1.2.5.1) Influence de la composition du béton sur le retrait.....	8
1.2.5.2) Conséquences du retrait.....	9
1.2.6) Désordres dus aux effets des variations dimensionnelles.....	9
1.3) Indice de fissuration.....	9

Chapitre 02 : Etude bibliographique.

2.1)	Introduction.....	15
2.2)	Généralités sur les bétons et bétons armés.....	17
2.3)	Caractérisation de l'évolution des microfissures :.....	20
2.3.1)	Les techniques d'observations « directes ».....	20
2.3.2)	Les techniques d'observations « indirectes ».....	21
2.4)	Analyse expérimentale du comportement des matériaux tenaces :....	22
2.4.1)	Déformabilité.....	23
2.4.2)	Rupture.....	24
2.5)	Modélisation et interprétation :.....	25
2.5.1)	Modélisation physique des géomatériaux fissurés.....	25
2.5.2)	Modèles mécaniques du comportement des géomatériaux fissurés.....	26
2.5.2.1)	Les modèles monophasiques.....	27
2.5.2.2)	Modèles di phasiques.....	28
2.6)	La modélisation discrète des fissures (discret crack model) :.....	30
2.6.1)	Historique du modèle.....	30
2.6.2)	La mécanique linéaire élastique de rupture (LEFM).....	33
2.6.2.1)	Les critères de rupture (K,G le modèle en mode mixte)	34
2.6.2.2)	Méthode des éléments finis (MEF) pour la modélisation des singularités et les facteurs d'intensités de contraintes.....	34
2.6.3)	La modélisation des fissures fictifs (FCM fictitious crack model).....	35
2.6.4)	Algorithme du maillage automatique.....	37
2.7)	La modélisation continue des fissures (smeared crack model).....	38
2.7.1)	Historique du modèle.....	38
2.7.2)	Types de limiteurs de localisation :.....	39
2.7.2.1)	Modèle de la bande de fissure.....	39
2.7.2.2)	La continuité non locale.....	39
2.7.2.3)	Modèle gradient.....	41
2.8)	Application de la méthode des éléments finis (MEF) et la mécanique de rupture dans les structures en béton et en béton armé:.....	42

Chapitre 03 : Analyse théorique.

3.1)	Introduction.....	56
3.2)	Les notions utilisées dans la méthode des éléments finis :.....	57
3.2.1)	Élément de structure.....	58
3.2.2)	Problèmes d'équilibres de valeurs propres et de propagation.	59
3.3)	Présentation matricielle de la méthode des éléments finis.....	60
3.4)	La M.E.F pour les éléments triangulaires axisymétriques.....	60
3.5)	Formulation numérique du problème de contact par des éléments d'interfaces :.....	68
3.5.1)	Définition de l'interface.....	68
3.5.2)	Divers modèles d'élément d'interface.....	68
3.5.3)	Formulation d'un élément d'interface bidimensionnelle.....	69
3.6)	Formulation numérique du problème de fissuration par des éléments en ressort :	72
3.6.1)	Critères d'initiation de la fissure.....	73
3.6.2)	Relations entre largeur de fissure, les contraintes de traction normale et les forces nodales.	74
3.7)	Méthode de résolution.....	79
3.8)	Critère de convergence.....	81

Chapitre 04 : Interprétation des résultats.

4.1)	Modèle numérique.....	87
4.2)	Simulation numérique du test de GOTO'S n°1.....	88
4.3)	Propagation des fissures de plus d'importance.....	89
4.4)	Fissure de séparation longitudinale.....	89
4.5)	Résistance à la compression du béton.....	90
4.6)	Calcul des contraintes d'adhérence et de glissement d'adhérence...	90
4.7)	La perte d'adhérence progressive.....	93
4.8)	La variation locale de l'adhérence.....	94
4.9)	Courbe rigidité tangentielle des éléments d'interfaces en fonction du chargement.	94
4.10)	Test de validation du programme de la barre d'acier.....	98
4.11)	Variation de la convergence en fonction du pas de charge.....	98
4.12)	Variation des contraintes d'adhérences le long de la barre d'acier.....	98

Chapitre 05 : Conclusions générales.

121

Bibliographie.

Annexe A : Critères de rupture.

A.1)	Critères macroscopiques de rupture.....	1
A.2)	Mécanique de rupture.....	1
A.3)	Critères de ruine en mode I de rupture.....	3
A.4)	Critères de rupture en mode mixte.....	4

Annexe B : Validation du programme.

B.1)	Le test de validation du programme de la barre d'acier.....	7
------	---	---

Annexe C : Programmes en

FORTRAN 2000 et les résultats correspondant.

Index des Notations

B.A	Béton Armé.
C	Cohésion.
C.O.D	Déplacement d'ouverture de fissure (crack opening displacement).
C.S.D	Déplacement de glissement de fissure (crack sliding displacement).
[C]	Matrice d'amortissement.
1D	Une dimension.
2D	Deux dimensions.
3D	Trois dimensions.
[D]	Matrice d'élasticité.
$\underline{\underline{d}}$	Matrice de rigidité des éléments d'interface de type ressort.
D.D.L	Degrés de liberté.
D	Diamètre.
E_s	Module d'élasticité longitudinale de l'acier.
E	Module de déformation longitudinale.
E.F	Elément finis.
f_e	Limite d'élasticité de l'acier.
F.P.Z	Le processus de la zone de rupture (fracture process zone).
f_{ck}	Résistance à la compression à 'j' jours à partir d'un cylindre.
f_{tj}	Résistance à la traction à 'j' jours à partir d'un cylindre.
F.C.M	Le modèle de fissure fictive (fictitious crack model).
$\{F\}$	Vecteur force totale.
$\{F^e\}$	Vecteur de sollicitation élémentaire.
$\{F^{1,2,3}\}$	Vecteur de sollicitation au noeuds d'un élément 1, 2 et 3.
F_x, F_y	Composantes des forces selon les axes x & y.
f'_t	Résistance à la traction à partir d'un cylindre.
F_{wi}	Forces associées à W_i .
f'_{th}	Résistance à la traction dans la direction circonférentielle.
g	Accélération de la pesanteur.

G	Le module d'élasticité transversale.
G_I, G_{II}, G_{III}	L'aux ou bien le changement d'énergie potentielle par unité d'extension de fissure.
[H]	Matrice des fonctions de transformation de la géométrie.
I	Inertie.
I.P.Z	Le processus de l'interface de rupture (interface process zone).
[I]	Tenseur d'identité.
I_f	Indice de fissuration.
J=det([J])	Le jacobien de transformation linéaire des coordonnées globale en coordonnées locale.
J4	Elément d'interface à 4 noeuds.
J6	Element d'interface à 6 noeuds.
[K^e]	Matrice de rigidité élémentaire.
k_s, k_n	Les rigidités tangentielles et normales.
<u>k</u>	Matrice de rigidité d'élément d'interface.
k_{Wi}	Rigidité du ressort associée à W _i .
k	Fonction du coefficient de poisson.
K_I, K_{II}, K_{III}	Facteurs d'intensités de contrainte en Mode I, II, III.
[K]	Matrice de rigidité totale.
L	<ul style="list-style-type: none"> - Longueur du cylindre. - Longueur d'élément d'interface ou de la fissure.
L.E.F.M	La mécanique linéaire élastique de rupture (linear elastic fracture mechanics).
L.D	Petite dimension (least dimension).
M	Moment de flexion en travée.
M.E.F	Méthode des éléments finis (finite element method).
Mode I	Mode d'ouverture de fissure.
Mode II	Mode de glissement plan.
Mode III	Mode de glissement anti-plan.
[M]	Matrice masse.
N°	Numéro d'intervalle.
[N(x,y)]	Fonctions d'interpolations.
P(%)	Probabilité en %.
P	<ul style="list-style-type: none"> - Charge de compression. - Les contraintes principales aux noeuds.

Q_i	Force de déséquilibre dû à l'ouverture et la propagation des fissures.
r_m	Rayon moyen de la section = aire / périmètre.
$r(t)$	Fonction du temps.
\underline{R}	Matrice de rotation.
$\{R(t)\}$	Vecteur des résidus.
r	<ul style="list-style-type: none"> - Rayon entourant le bout de la fissure. - La direction radiale des coordonnées cylindriques.
S_{RB}	Le glissement dans la direction radiale.
S_{LB}	Le glissement dans la direction longitudinale.
$\langle S \rangle$	Les tractions aux noeuds dans les directions x & y.
S_{IARB}	Le glissement moyen de chaque intervalle dans la direction radiale.
S_{IALB}	Le glissement moyen de chaque intervalle dans la direction longitudinale.
S_{SARB}	Le glissement d'adhérence du spécimen dans la direction radiale.
S_{SALB}	Le glissement d'adhérence du spécimen dans la direction longitudinale.
t	Age du béton en jours.
$T3$	Triangle à 3 noeuds.
$T6$	Triangle à 6 noeuds.
U_{IARB}	Le glissement moyen dans l'acier.
U_{IALB}	Le glissement moyen dans le béton.
U_{SARB}	Le glissement du spécimen dans l'acier.
U_{SALB}	Le glissement du spécimen dans le béton.
$\{U\}$	Vecteur des variables inconnues.
U_x, U_y	Les composantes des déplacements selon les axes x & y.
V	Volume de la structure.
V_r	Volume représentant le matériau, pour lequel l'hétérogénéité du matériau peut être considérée comme continue.
W_{ext}	Le travail extérieur.
W_{int}	Le travail intérieur.
W_i	Coefficient de pondération.
W	Largeur de fissure.
W_c	Largeur de fissure critique.
$X(x,y,z)$	Le vecteur de coordonnée en espace.
Y_u	La position de l'A.N à la fibre la plus comprimée.
Z	La direction axiale.
$\Delta l/l$	Déformation relative longitudinale.

$\Delta R/R$	Déformation relative transversale.
Δl	Longueur d'arc à la fissure.
ΔW_c	Incrément d'énergie requis pour le développement de la fissure.
ΔW	Incrément du travail externe.
ΔU	Incrément d'énergie de déformation.
Δ	L'aire du triangle.
α	Fonction du poids.
β_t	L'angle entre la contrainte principale et la normale au côté.
$\{\delta\}$	Vecteur des déplacements total.
$\{\delta'\}$	Vecteur des déplacements élémentaires.
$\{\delta^{1,2,3}\}$	Vecteur des déplacements aux noeuds 1,2 & 3.
ϵ_r	Déformation due au retrait final.
ϵ_n	Déformation due au fluage.
$\epsilon_p, \epsilon_{p_t}$	Déformation permanente longitudinale et transversale (plastique).
ϵ^m	Déformation maximale atteinte.
$\epsilon(x)$	Déformation à un point de l'espace définie par le vecteur de coordonnée 'x'.
ϵ_x	Déformation radiale.
ϵ_y	Déformation axiale.
ϵ_θ	Déformation tangentielle.
$\{\epsilon(x,y)\}$	Vecteur des Déformations en chaque point de l'élément.
ϕ	Diamètre de la barre.
γ_{xy}	Déformation de cisaillement.
γ	Inclinaison des faces des nervures / à l'axe de la barre.
η	Facteur de convergence de charge.
η	Les coordonnées curvilignes.
ϕ	Angle de frottement.
λ	Facteur de charge.
θ	Inclinaison des axes locaux / axes globaux.
ρ_s	Coefficient de réduction pour le retrait «géné».
σ_{tw}	La contrainte de traction associée à W.
σ_{IARB}	Les contraintes moyennes de chaque intervalle dans la direction radiale.
σ_{IALB}	Les contraintes moyennes de chaque intervalle dans la direction longitudinale.
σ_{SARB}	Les contraintes d'adhérences du spécimen dans la direction radiale.

σ_{SALB}	Les contraintes d'adhérences du spécimen dans la direction longitudinale.
σ_n	Contrainte normale.
σ_t	Contrainte tangentielle.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Les contraintes principales selon les axes 1,2 & 3.
σ_{max}	La contrainte max.
$\{\sigma(x,y)\}$	Vecteur de contrainte interne.
σ_x	Contrainte radiale.
σ_y	Contrainte axiale.
σ_θ	Contrainte tangentielle.
τ_{xy}	Contrainte de cisaillement.
τ_s	Contrainte d'adhérence.
ν	Coefficient de poisson
ν_0	Caractéristique initiale.
ϖ	Densité du béton.
ξ	Coordonnées curvilignes.
ψ_s	Coefficient de frottement.

Liste des figures

	Page	
Figure 1.1	Ecoulement plastique au cours d'un essai de chargement d'une poutre en béton armé.....	11
Figure 1.2	Fissure due au tassement de la fondation pendant la construction.....	11
Figure 1.3	Fissure due aux mouvements des coffrages pendant la prise du béton....	12
Figure 1.4	Fissures dues à la ségrégation et au tassement du béton frais.....	13
Figure 1.5	Fissures dues aux variations thermiques dans un bâtiment.....	14
Figure 1.6	Fissuration et épaufrage du béton dus à la corrosion des armatures.....	14
Figure 2.1	Le premier modèle en élément fini d'une poutre en .B.A.....	44
Figure 2.2	Diagramme de fluage (chargement constant dans le temps).....	44
Figure 2.3	Essais de traction.....	44
	.a) Directe;	
	.b) Par fendage;	
	.c) par flexion.	
Figure 2.4	Résultats de l'observation par rayon X sur une éprouvette en compression (d'après Robinson) [21].....	45
Figure 2.5	Evolution de la microfissuration dans un essai de compression obtenu par observation microscopique (d'après Dhir et Sangha).....	46
Figure 2.6	Variation du temps de propagation d'ondes ultra sonores au travers d'un cylindre de béton chargé en compression uni axiale (d'après Benouniche).....	46
Figure 2.7	Localisation et cumul des événements acoustiques sur une poutre en béton armé fléchie (Mazars-Walter).....	47
Figure 2.8	Les deux modèles extrêmes de matériaux granulaires.....	47
Figure 2.9	Ecarts au comportement élastique linéaire.....	47
Figure 2.10	Evolution des caractéristiques mécaniques dans un essai de compression (d'après Benouniche) :	48
	.a) Contrainte déformation longitudinale;	
	.b) Contrainte déformation transversale.	
Figure 2.11	Courbe contrainte déformation en traction uni axiale (d'après Terrien)..	49
Figure 2.12	Classes de comportement à la rupture (WAWERSIK).....	49

Figure 2.13	Microfissuration d'un granite (PERAMI).....	50
Figure 2.14	Modèles physiques de géomatériaux fissurés.....	50
Figure 2.15	Critère « composite » / courbe limite dans le plan σ_1/σ_3	51
Figure 2.16	Modèle de Griffith-Lino, domaine limite d'élasticité.....	51
Figure 2.17	Modèle de Lorrain-Calvet, trace de la surface limite (élasticité).....	52
Figure 2.18	Courbe d'états limites obtenues par le modèle de Lino.....	52
Figure 2.19	Exemples montrant le concept de « petite dimension L.D » associés au bout de la fissure.....	53
Figure 2.20	Terminologie et concepts associés à la modélisation des fissures fictifs (<i>FCM</i>).....	54
Figure 2.21	La bande de fissure devient longue et étroite plus que le maillage est raffiné, si le modèle constitutive est indépendant de la taille d'élément..	54
Figure 2.22	L'hétérogénéité du béton à la taille réduite d'agrégat.....	55
Figure 3.1	.a) élément à symétrie axiale;.....	82
	.b) solide à symétrie axiale.	
Figure 3.2	Systèmes de coordonnées et numérotation des noeuds pour l'élément de solide à symétrie axiale.....	82
Figure 3.3	.a) élément sans épaisseur développé par Goodman ;.....	82
	.b) élément de type ressort développé par Ngo & d'autres;	
	.c) élément d'interface avec épaisseur.	
Figure 3.4	.a) élément joint dans le système globale;.....	83
	.b) élément de référence dans son repère globale.	
Figure 3.5	Critères de fissuration à l'intérieur du béton.....	83
Figure 3.6	.a) Acier en contact avec le béton après perte d'adhérence;.....	83
	.b) Acier en dehors du béton après perte d'adhérence.	
Figure 3.7	Variation des contraintes normales le long de la fissure.....	84
Figure 3.8	Courbe contrainte de traction / largeur de fissure.....	84
Figure 3.9	Relation bilinéaire : contrainte normale de traction / largeur de fissure..	84
Figure 3.10	L'élément d'interface utilisé pour modéliser la fissure.....	85
Figure 3.11	Courbe des forces nodales équivalentes.....	85
Figure 3.12	.a) Méthode incrémentale a une itération de Newton-Raphson;.....	85
	.b) Méthode de substitution, le cas de convergence.	
Figure 3.13	Définition des intervalles le long de la barre d'acier.....	86

Figure 4.1	Maillage de l'éprouvette axisymétrique.....	101
Figure 4.2	La surface carrée de l'éprouvette et le modèle axisymétrique en section équivalente circulaire.....	101
Figure 4.3	La propagation des fissures pour les quatre derniers cas de charge :.....	
.a)	maillage utilisé;	102
.b)	3 ^{ème} cas de charge;	103
.c)	4 ^{ème} cas de charge;	104
.d)	5 ^{ème} cas de charge;	105
.e)	9 ^{ème} cas de charge;	106
Figure 4.4	Contraintes dans l'acier / Déplacement axial du test & l'analyse.....	107
Figure 4.5	Déformations du béton autour de la barre d'acier.....	107
Figure 4.6	.a) Contraintes moyennes de chaque intervalle dans la direction radiale;	108
	.b) Contraintes moyennes de chaque intervalle dans la direction longitudinale.	
Figure 4.7	.a) Contraintes dans l'acier / contrainte moyenne du spécimen dans la direction radiale;	109
	.b) Contraintes dans l'acier / contrainte moyenne du spécimen dans la direction longitudinale.	
Figure 4.8	.a) Glissement moyenne de chaque intervalle dans la direction radiale;	110
	.b) Glissement moyenne de chaque intervalle dans la direction longitudinale.	
Figure 4.9	.a) Contraintes dans l'acier / glissement moyen du spécimen dans la direction radiale;	111
	.b) Contraintes dans l'acier / glissement moyen du spécimen dans la direction longitudinale.	
Figure 4.10	Modes de déformations de l'élément d'interface à 4 noeuds dans le cas d'une intégration de Newton-Cotes, pour les différents cas de charge :.	
.a)	cas où $\theta = 0^\circ$;	112
.b)	cas où $\theta = 123,69^\circ$;	113
.c)	cas où $\theta = 33,69^\circ$;	114
Figure 4.11	Rigidité tangentielle des éléments d'interfaces / contraintes dans l'acier.	115
Figure 4.12	Variation de la convergence pour chaque pas de charge.....	115
Figure 4.13	Variation des contraintes d'adhérence le long de la barre pour tous les cas de charges.....	116
Figure 4.14	Contraintes d'adhérences moyennes de chaque intervalle.....	120
Figure 4.15	Contraintes d'adhérences moyennes du spécimen.....	120

Figure 5.1	Éléments en béton et en acier proposés ainsi que l'élément d'interface correspondant.....	124
Figure A.1	Facteur critique d'intensité de contrainte -- Eprouvette de traction compacte C.T--.....	6
Figure B.1	Courbe contrainte dans l'acier / déplacement absolu axial sur le périmètre de la barre.....	8
Figure B.2	Courbe contrainte dans l'acier / déplacement absolu radial sur le périmètre de la barre.....	8
Figure B.3	Courbe contrainte dans l'acier / déplacement relative axial sur le périmètre de la barre.....	9
Figure B.4	Courbe contrainte dans l'acier / déplacement relative radial sur le périmètre de la barre.....	9
Figure B.5	Courbe contrainte dans l'acier / coefficient de poisson.....	10
Figure B.6	Courbe contrainte dans l'acier / les déplacements absous radial sur les nervures.....	10
Figure B.7	Courbe contrainte dans l'acier / les déplacements absous axial sur les nervures.....	10
Figure C.1	Fractionnement d'un noeud lors d'une fissuration.....	61

Liste des tableaux

	Page
Tableau 1.1 Degré d'endommagement d'une structure en béton armé (B.Λ).....	10
Tableau 4.1 Caractéristiques géométriques de la barre d'Acier (Φ19)	87
Tableau 4.2 Contraintes dans l'acier / déplacement axial du test et d'analyse.....	88
Tableau 4.3 Contraintes moyennes de chaque intervalle :	
.a) dans la direction radiale (σ_{IARB} the interval averaged radial stress).....	90
.b) dans la direction longitudinale (σ_{IALB} the interval averaged longitudinal stress).....	91
Tableau 4.4 Contraintes d'adhérences moyennes du spécimen :	
.a) dans la direction radiale (σ_{SARB} the interval averaged radial stress).....	91
.b) dans la direction longitudinale (σ_{SALB} the interval averaged longitudinal stress).....	91
Tableau 4.5 Le glissement moyen de chaque intervalle :	
.a) dans la direction radiale (S_{IARB} the interval averaged radial slip).....	92
.b) dans la direction longitudinale (S_{IALB} the interval averaged longitudinal slip).....	92
Tableau 4.6 Le glissement moyen du spécimen :	
.a) dans la direction radiale (S_{SARB} the interval averaged radial stress).....	93
.b) dans la direction longitudinale (S_{SALB} the interval averaged longitudinal stress).....	93
Tableau 4.7 Rigidité tangentielle des éléments d'interfaces en fonction du chargement.....	95
Tableau 4.8 Modes de comportement à l'interface entre deux structures.....	97
Tableau 4.9 Valeur de convergence de chaque test en fonction du pas de charge.	98
Tableau 4.10 Valeur des contraintes d'adhérences en fonction du pas de charge le long de la barre d'acier.....	100

Introduction générale

Durant ces dernières années, le béton armé a été utilisé avec une augmentation très sensible dans la construction des structures complexes.

La connaissance du comportement de ces structures sous les sollicitations mécanique est un facteur essentiel pour la prévision de leurs résistance et durabilité.

Le comportement et la rupture du béton sont le résultat de l'existence et du développement des microfissures au sein du matériau béton.

La représentation fine de ces comportements ne peut être abordées qu'avec succès, que grâce au développement des méthodes numériques. La fissuration est un mode très important de déformation et de dommage dans ces structures. Pour prédire exactement son comportement, il est nécessaire d'utiliser la méthode des éléments finis (*MEF*) qui est certainement la mieux optée à la discréétisation d'un ensemble de matériaux à comportement différents. Cette méthode consiste à intégrer en variables locales ou globales un modèle rhéologique du matériau composite « béton armé », prenant en compte certaines de ses particularités comme la fissuration ou le comportement non linéaire de l'acier et le béton sous charges complexes.

Ces non linéarités proviennent non seulement de la fissuration du béton, de la plastification des aciers et des bétons, mais aussi de l'interface entre acier et béton.

La méthode des éléments finis (*MEF*) utilise pour la modélisation des fissures dans les structures en béton armé deux techniques : l'approche discrète et l'approche continue (discret and smeared crack approach).

Dans le cas général, il convient d'attribuer à la fissure une représentation utilisant les deux modèles en même temps.

Ces dernières années, l'analyse non linéaire des structures en béton armé a pris un grand essor avec le développement des méthodes numériques. Elle nous renseigne sur le comportement de ces structures jusqu'à leurs ruines. L'approche utilisée dans ce cas est la modélisation discrète des fissures, qui modélise la fissure comme une quantité géométrique. Ces fissures sont modélisées par déformation du maillage qui met en ordre sa propagation.

Le but de notre étude est l'analyse par la méthode des éléments finis des fissures dans les structures en béton armé. Ce travail consiste à simuler le test d'arrachement d'une barre d'acier inclue dans un prisme de béton, et modéliser la liaison entre l'acier et le béton en utilisant des éléments d'interfaces.

Des critères de résistance sont utilisés pour le matériau acier et pour initier les fissures dans le matériau béton.

Une comparaison complète entre les résultats des tests expérimentaux et la simulation du test d'arrachement « pull-out », utilisant la méthode des éléments finis est traitée dans cette étude (thèse).

Les résultats numériques ainsi obtenus nous serviront dans un proche avenir pour d'éventuels tests expérimentaux, qui seront élaborés dans le cadre d'une prochaine étude doctorale.

C chapitre 01

PROBLEMATIQUE

SOMMAIRE

- 1.1) Introduction à la fissuration
 - 1.1.1) Prévenir.
 - 1.1.2) Guérir.
 - 1.1.3) Exécution.
- 1.2) Causes des dégradations et mesures de protection :
 - 1.2.1) Causes de dégradations survenant lors de la construction.
 - 1.2.2) Contraintes thermiques.
 - 1.2.3) Absorption d'eau par le béton.
 - 1.2.4) Corrosion des armatures.
- 1.2.5) Retrait lors du durcissement (déformation sans charge du béton).
- 1.2.6) Désordres dus aux effets des variations dimensionnelles.
- 1.3) Indice de fissuration.

1.1) Introduction à la fissuration :

La rupture est un mode très important de déformation et de dommage dans les structures en béton et en béton armé (*B.A.*). Pour prédire exactement le comportement à la rupture de ces structures, il est nécessaire d'utiliser la méthode des éléments finis (*MEF*).

L'hétérogénéité du béton est la cause de l'existence de zones à faible résistance mécanique dans lesquelles naissent et se développent les microfissures. Les phénomènes complexes liés à l'hydratation du ciment (mouvements thermiques ou de retrait...) provoquent la création de défauts plus particulièrement localisés dans la zone, faible, de liaison pâte - granulat. C'est à partir de ces liaisons que se développent les micros ruptures lors des sollicitations mécaniques.

Le problème de fissuration du béton est mal connu. Il est presque toujours une cause de difficulté où on considère en général, cette fissure comme un signe de mauvaise conception ou de mauvaise qualité des matériaux.

Dans la plupart des cas, les fissures se produisent presque partout, sauf dans les ouvrages très rudimentaires ou dans les éléments indépendants. Lorsque les conditions d'exposition et d'utilisation sont telles que toute fissure potentielle n'est pas soumise à une charge hydrostatique et par conséquent ne peut laisser passer l'eau, et lorsque les détériorations provoquées par les fuites n'ont pas de graves conséquences, il suffit de prévoir un nombre suffisant de joints de dilatation de façon que les grosses fissures ne se produisent pas (ou encore de prévoir des armatures largement calculées dans le même but), et de laisser les petites fissures se former. Si des fissures se sont produites, donc il faut les réparer.

Le comportement et la rupture du béton sont donc le résultat de l'existence et du développement d'une microfissuration au sein du matériau béton.

La connaissance du comportement du béton sous sollicitations mécaniques est l'un des facteurs essentiels pour la prévision de la résistance des structures en béton armé.

Les lois de comportement proposées pour le béton armé (*B.A.*) sont en général des lois élastoplastiques ou des lois d'endommagement qui prévoient la diminution de la résistance du béton sous le chargement, l'apparition de la fissure et parfois la dégradation de la liaison entre l'acier et le béton.

Des lois plus complexes sont en cours d'élaboration ou de validation afin de prendre en compte deux effets importants par exemple :

L'influence de la vitesse de chargement (qui ne peut pas être négligée pour les études de chocs) et l'anisotropie de comportement (modèle couplant la viscoélasticité et l'endommagement) [32].

Une structure en *B.A.* se fissure très tôt, habituellement sous les charges de service et, parfois même, avant tout chargement, sous l'effet du retrait.

Cette fissuration, fraction de l'aptitude de l'interface acier-béton à transmettre les efforts correspondants (adhérence), autorise l'exploitation des capacités de résistance de l'acier.

Au voisinage des fissures, l'état de contraintes est redistribué selon l'orientation des fissures et la disposition des armatures.

Les *B.A.* présentent un comportement non linéaire. La relation entre la contrainte et la déformation est généralement divisée en trois parties successives (*Figure 1.1*).

Une première partie (*OA*) élastique (matériau non fissuré), une seconde partie (*AB*) correspondant à la propagation de la fissuration et une troisième partie (*BC*) décrivant l'écoulement plastique du matériau.

Les non linéarités du comportement proviennent non seulement de la fissuration du béton, de la plastification des armatures et du béton à des compressions, mais aussi de l'interface entre le béton et les armatures.

Lorsqu'une barre déformée est utilisée comme renforcement, les caractéristiques des

fissures qui se forment autour de la barre sont différentes de ceux qui se forment autour d'une barre lisse. Les caractéristiques de la barre déformée définissent la mécanique d'adhérence entre la barre et l'acier.

Pour bien définir ces caractéristiques et surtout le comportement des fissures, des expériences ont été effectuées sur un spécimen tendu soumis à une charge axiale. Ce spécimen est composé d'une barre d'acier entourée par un prisme de béton, les deux bouts de cette barre sont soumis à une force axiale de traction.

Ces expériences sont difficiles à simuler, à cause de la présence des fissures discrètes, le glissement longitudinal et le comportement de l'interface. Les deux techniques dominantes utilisées dans la méthode des éléments finis (*MEF*) pour modéliser la rupture sont : la modélisation discrète et continue des fissures (*discrete and smeared crack approach*). Un exemple de simulation du test d'arrachement d'une barre d'acier haute adhérence (*HA*) entourée par un prisme du béton est traitée par la *MEF* utilisant la modélisation discrète des fissures.

Pour l'ingénieur, le problème de la dégradation et l'entretien comporte deux aspects fondamentaux : prévenir et guérir. Mis à part la nécessité de connaître dans les deux cas la nature des dommages qui peuvent se produire, ces deux aspects sont distincts et seront traités séparément dans cette partie [31].

1.1.1) Prévenir :

Il faut que l'ingénieur chargé des études, choisisse des matériaux adaptés aux conditions atmosphériques et au site. Il doit étudier l'ouvrage de façon à empêcher que se produisent des détériorations graves (du moins durant la vie prévue de l'ouvrage), et aussi exiger que l'exécution soit correcte. Pour cela, la connaissance de ce qu'il faut éviter et celle des diverses formes de détériorations possibles, et de leurs causes, nécessitent de prendre en compte ces trois points : qualité des matériaux, qualité des plans de détails et qualité de réalisation.

1.1.2) Guérir :

Si l'on n'est pas parvenu à empêcher la dégradation, il convient d'abandonner, de remplacer ou de réparer l'ouvrage; habituellement on répare. L'exécution d'une réparation de ce genre nécessite une technique minutieuse comportant cinq (5) étapes fondamentales :

- ★ Découvrir la dégradation;
- ★ Déterminer sa cause;
- ★ Evaluer la résistance de l'ouvrage dans son état actuel;
- ★ Evaluer les réparations à faire et;
- ★ Choisir et mettre au point une méthode de réparation.

On note ici que la détermination de la cause de dégradation est l'étape la plus difficile et la plus importante de toutes; car il n'est pas possible d'évaluer l'importance des réparations à faire ni de choisir les meilleures méthodes de réparations si la cause des dommages n'est pas connue.

Pour le béton, il est fréquent que l'on ne puisse pas identifier la cause des dommages, soit par ce que les données pour trouver l'origine du mal sont insuffisantes, soit par ce que plusieurs agents destructeurs agissent en même temps. On peut toutefois éliminer des possibilités jusqu'à ce qu'il n'en reste que quelques-unes et choisir alors une méthode de réparation qui améliorera l'état présent et empêchera l'extension des dommages dus à tous les agents destructeurs.

1.1.3) Exécution :

La dégradation des ouvrages est due en grande partie à des négligences ou oublis minimes dans le détail de la conception ou de l'exécution. C'est pour cela, qu'il est devenu nécessaire d'apporter des correctifs, il ne faut pas laisser commettre des négligences similaires lors des travaux de réparation.

En résumé, la façon dont un ingénieur aborde le problème de la dégradation d'un ouvrage implique la constatation du mal, le diagnostic et le remède (la nécessité de prévenir le mal) de ce problème. L'ingénieur doit connaître les différentes formes de dégradation, dont les manifestations sont connues là où les causes des différents types de dégâts, et la façon de redresser la situation.

1.2) Causes des dégradations et mesures de protection :

Les trois principaux symptômes de la dégradation d'un ouvrage en béton sont :

Les fissures, l'épauprissage, et la désagrégation (que l'on peut la définir comme un pourrissement de toute la surface, avec une perte de ciment et libération des agrégats). Chacun d'eux est visible et peut être facilement décelé et différencié des autres. En conséquence, diagnostiquer la cause de la dégradation du béton est une opération très délicate; comme on a vu précédemment on résout ce problème en recherchant toutes les causes possibles de l'état observé et en procédant par élimination [31].

La fissuration est un phénomène courant dans les ouvrages de bâtiments, qui peuvent se manifester très rapidement dès la phase de la réalisation et pendant la vie de la construction.

Deux questions passionnantes que les constructeurs se sont posées depuis longtemps : quelles sont les causes de ce phénomène généralisé? et que peut on faire pour y remédier?; aux quelles il est difficile de répondre car le problème est vaste, et met en cause de nombreux paramètres.

1.2.1) Causes de dégradations survenant lors de la construction :

La qualité du béton peut être affectée par l'utilisation des méthodes inadéquates ou négligence pendant une phase quelconque de la construction. Aussi une mauvaise mise en œuvre puisse être la porte aux agents agressifs, elle est rarement une cause directe de détérioration, sauf dans les cas suivants :

a) Tassements localisés des surfaces de coulage :

Le tassement localisé du béton frais sous l'effet de son poids propre peut être du à la présence de zones de résistances inégales dans les surfaces de coulage, de poches d'air ou de vides sous les tapis de protections (Figure 1.2). Pour éviter ce phénomène, il convient d'empêcher les ouvriers de marcher sur le papier de collage, surveiller de près le compactage et le drainage de la surface de travail, supprimer les poches d'air. Les fissures de ce type seront bouchées lors du réglage de la surface du béton, sauf si ce réglage est fait immédiatement après le coulage. Par conséquent, dans la mesure du possible, il faut retarder ce réglage tant que le béton reste, en surface maniable (les fissures qui ont été bouchées, ne reparaisse pas).

b) Déplacements des coffrages :

Tout mouvement du coffrage se produisant entre le moment où le béton commence à perdre sa fluidité et le moment où il a fait prise, provoque l'apparition de fissures (Figure 1.3). Dans ces conditions elles constituent un danger potentiel car elles forment une poche d'eau dans la masse du béton qui, en gelant, fait éclater la surface. La corrosion des armatures causée par ces poches d'eau est également dangereuse.

Pour empêcher l'absorption d'humidité, donc le gonflement du bois; il faut aussi que le coffrage soit bien conçu, bien revêtu, pour empêcher l'apparition de telles fissures.

c) Vibrations :

Des fissures courantes dues aux vibrations se produisent pendant la prise du béton. Ces vibrations peuvent être dues à la circulation des véhicules, au battage de pieux, à des tires de mines, à un compactage par vibration tardif ou à une vibration accidentelle causée par les heurts de l'outillage. Pour éviter ces inconvénients, il ne faut pas laisser les ouvriers se servir des coffrages comme d'établis pendant la prise, ne pas laisser les camions de béton heurter le coffrage, et éviter toute circulation routière intense proche du chantier.

d) Ségrégation du béton frais :

Pendant les trois ou quatre heures qui séparent la fin du bétonnage et de vibration, du début de la prise, le béton est un mélange d'eau et de grains en suspension, dans lequel se produit un phénomène de sédimentation des particules les plus lourdes (*Figure 1.4*).

Comme le béton durcit d'abord en surface, si un obstacle rompt l'homogénéité de cette sédimentation, il aura fissuration (une armature fixe peut être un tel obstacle). Quand les armatures forment un tapis serré, il risque de se produire au lieu des fissures en surface, un plan de séparation qui provoque des dégâts par gel de l'eau captivée et corrosion des aciers.

Par mesure de protection, les fissures superficielles peuvent être colmatées : il suffit de différer le réglage des fissures.

e) Retrait de prise du béton :

Les variations de volume au début de la prise du béton tendent à provoquer la formation en surface de petites fissures. Les mesures préventives sont les mêmes que celles décrites au paragraphe « d ».

f) Décoffrage prématué :

La vitesse et l'économie actuellement recherchée dans la construction ont pour conséquence que l'on retire souvent les étais ou le coffrage avant que le béton ait acquis une résistance suffisante. Il apparaît alors souvent dans le béton des fissures qui peuvent être graves. Il suffit pour les éviter de laisser les étais et les coffrages en places jusqu'à ce que le béton soit assez résistant.

1.2.2) Contraintes thermiques :

Les variations de la température au sein du béton durci entraînent des changements de forme et de volume; qui, lorsqu'ils sont entravés par la structure de l'ouvrage, il en résulte des contraintes qui peuvent engendrer des tensions dans le béton, donc des fissures (*Figure 1.5*).

La détérioration est causée par des variations non uniformes de la température, c'est-à-dire par un gradient thermique, qui peut aussi être une élévation de la température de la surface du béton, non compensée par la réaction exothermique dans la masse.

La solution consiste à prévoir des joints destinés à réduire les contraintes thermiques subies par l'ouvrage, et des armatures pour répartir ces contraintes. On a aussi la possibilité de faire appel à l'isolation thermique pour réduire les effets de la température sur les éléments du béton.

Les variations de volume du béton peuvent aussi être dues à des variations de la température interne. Si ces variations de volume ou de forme ne peuvent pas se faire librement, des contraintes et des fissures se produisent.

Les mesures préventives : il convient également de tenir compte de la présence possible d'agrégats dont les coefficients de dilatations thermiques sont incompatibles avec celui du béton ou bien utiliser du ciment et des agrégats d'origine connu et éprouvé.

1.2.3) Absorption d'eau par le béton :

A des degrés divers, tout béton est poreux. Certains ouvrages sont gravement détériorés tandis que d'autres sont saines (Figure 1.6). Cela est dû généralement aux différences de quantité d'eau absorbée par le béton selon ses conditions d'utilisations et selon sa porosité, elle-même fonction de la qualité d'exécution. Quand la teneur en eau augmente, le béton gonfle. Si le gonflement est entravé, il se produit des fissures et l'épauffrage. En général, il n'est pas possible d'empêcher le gonflement dû à l'augmentation de la teneur en eau. Le remède est soit de tenir compte de la dilatation du béton dans les ouvrages soumis à des cycles d'humidifications et de séchage, soit de maintenir le béton humide en le gainant dans une sorte d'épais manchon de bois empêchant la dessiccation de la masse.

1.2.4) Corrosion des armatures :

En général, la construction en béton contient des armatures d'acier. Ces armatures sont volontairement et presque invariablement placées à quelques centimètres de la surface (Figure 1.6).

Si l'armature est en contact avec l'air ou l'eau elle se corrode. Le volume de l'oxyde produit provoque des fissures et épauffrage du revêtement du béton.

A noter également que c'est dans les parties humides que la détérioration est la plus avancée et que les endroits secs restent en bon état. Pour empêcher la corrosion des armatures due aux agents chimiques, il faut que l'acier ne soit pas en contact avec l'eau contenant de l'oxygène dissous ou avec l'eau en présence d'oxygène. La meilleure méthode pour cela est de gêner les barres dans une masse de béton fermée d'épaisseur suffisante.

L'utilisation de matériaux défectueux ou sales provoque des variations de volume du béton, des réseaux de fissures et toutes sortes de dommages imprévisibles. Les symptômes de l'attaque chimique sont la désagrégation et l'épauffrage des surfaces, l'agrandissement des fissures et des joints. Il y'a aussi une désintégration générale de la masse du béton et un gonflement de l'ouvrage. Les agrégats sont expulsés de la matrice, et le ciment perd ses propriétés du liant. Il peut aussi se former des réseaux de fissures qui s'agrandissent et s'approfondissent jusqu'à ce que les éléments soient détruits par épauffrage. Pour y remédier, il faut utiliser un béton dense de bonne qualité.

Le béton peut aussi être un obstacle à la circulation d'agents qui provoquent la corrosion, il constitue un milieu alcalin, qui empêche le processus de corrosion, cette dernière protection est réduite par la carbonatation, ce qui permet donc le développement de la corrosion. Lorsque la corrosion continue à augmenter, on constate un gonflement de l'espace occupé par l'armature dû au développement de la rouille autour de la barre d'acier et finalement l'apparition des fissures longitudinales. Notons qu'il est souvent difficile de savoir si c'est la corrosion ou la perte d'adhérence qui est à l'origine de la désolidarisation de l'acier du béton le long d'une barre.

Enfin, en présence d'agents corrosifs extérieur attaquant le béton, ce dernier sera plus facilement endommagé, si ces produits peuvent pénétrer par des fissures et y circuler sous l'effet du mouvement de celle ci.

1.2.5) Retrait lors du durcissement (déformation sans charge du béton) :

Depuis plus de 50 ans, ce phénomène de retrait a été observé dès les premières utilisations des liants hydrauliques pour la confection du mortier, du béton, et du béton armé. Avant la fin de la prise, ou au cours de la prise, la contraction peut résulter des processus suivants : réaction d'hydratation (retrait endogène sans évaporation ; évaporation de l'eau de gâchage; tassement du béton ou des mortiers frais (par gravité, par ségrégation, et ressauage de l'eau); contraction thermique (lors du refroidissement) résultant de la réaction exothermique de l'hydratation (ce phénomène dépend de la nature, de la finesse du ciment et de la masse des pièces)).

C'est surtout la fissuration due aux effets du retrait qui, en pratique, constitue la conséquence la plus préoccupante pour la qualité et la durabilité des matériaux de construction à base de liants hydrauliques. Plusieurs mécanismes du retrait sont actuellement proposés. Le siège du retrait se situe dans la pâte du ciment en cours du durcissement. Une importante explication du mécanisme résulte de la connaissance du processus de l'action de l'eau, qui dans la pâte, peut se trouver sous différentes formes (c'est-à-dire qui présente des liaisons plus ou moins nombreuses avec les particules solides). Cette énergie de liaison engendre dans les espaces inter granulaires, des matériaux provoquant le retrait. Il est indispensable de se contenter de se référer à des études technologiques donnant des valeurs expérimentales du retrait. En pratique, on distingue plusieurs phases du phénomène « retrait » [31].

a) Avant durcissement :

Dans cette phase, le retrait du béton et du mortier frais est avant la prise (retrait plastique durant la prise du liant). Les variations thermos hygrométriques du béton commencent avant ou au moment même du début de la prise et constituent une première phase du retrait. La prise et le durcissement d'un liant s'accompagnent d'une variation de son volume apparent.

La pâte constituée par l'eau et le ciment subit une contraction du volume. Cette diminution du volume absolue est appelée « dessiccation interne », par contre le volume apparent augmente en présence d'un excès d'eau pendant les premières heures, où l'eau de gâchage n'est pas encore liée aux constituants du ciment. Elle n'est retenue que physiquement et mécaniquement, c'est-à-dire qu'elle peut s'évaporer plus ou moins facilement surtout si l'ouvrage en béton présente une grande surface libre (exemple les planchers), et si les conditions atmosphériques se prêtent à une telle évaporation. L'eau peut aussi être absorbée par un coffrage en bois trop sec ou par des granulats poreux non humidifiés. Ces deux cas d'évaporation et d'absorption d'eau se traduisent par un tassement du béton. Le retrait peut provoquer de profondes fissures caractéristiques et visibles. Le retrait avant la prise est parfois appelé « premier retrait » ou « retrait plastique ». Il est plus faible pour le mortier que pour la pâte pure du ciment, et encore plus faible pour le béton, car le squelette de granulats s'oppose au mouvement du retrait durant cette phase de pré durcissement. Après ça, le retrait est plus important que celui observé et il est irréversible (5 à 10 fois plus élevée). Il s'observe particulièrement avec des pièces minces (non protégées) comme les enduits, dalles, planchers, etc.

b) Après durcissement (Retrait hydraulique due au départ d'eau) :

Le retrait hydraulique est la dessiccation ou le retrait d'un béton durci dans l'eau apparaît par suite de l'évaporation. Lorsque le béton est placé dans l'air ambiant, l'eau contenue dans le béton peut être, en simplifiant, se diviser sous trois formes : eau combinée chimiquement au ciment, eau liée physiquement, et une eau libre.

Le départ de l'eau liée physiquement provoque le retrait à la température ambiante. Dans les capillaires, les ménisques d'eau tendent à se mettre en équilibre avec l'humidité relative de

l'atmosphère. L'importance de ce retrait est fonction de la rigidité de la structure interne du béton et des conditions ambiantes.

c) Retrait thermique :

Ce retrait est du à l'abaissement de la température succèdent soit à l'échauffement occasionné par la chaleur d'hydratation du ciment (réaction exothermique), soit à la variation thermique du milieu de conservation. Ces contraintes s'additionnent parfois aux effets du retrait de dessiccation.

1.2.5.1) Influence de la composition du béton sur le retrait :

a) Dosage en eau :

Le retrait après la prise du béton durci est relativement peut augmenter par l'accroissement du dosage en eau (à condition de rester dans les limites acceptables). On observe que la couche d'eau en excès tend à recouvrir la surface du béton dès la fin de mise en place, en ce qui concerne le retrait plastique "avant la prise". La valeur du retrait plastique atteinte en 24 heures est sensiblement plus faible quand la quantité d'eau dans le béton, au-delà d'une certaine limite, entraîne une fissuration ou un faïençage préjudiciable à la qualité du béton [31], [32].

b) Nature du ciment :

Plusieurs paramètres de la construction du ciment influent sur le retrait du mortier ou du béton durci qui peut varier dans des proportions de 1 à 3, parmi les plus importantes on peut par exemple citer la finesse de mouture. On constate que le retrait croît, sensiblement (proportionnellement) quand la finesse des grains du ciment augmente.

c) Dosage en ciment :

Le retrait du mortier et du béton augmente avec le dosage en ciment.

d) Composition granulométrique et nature des agrégats :

Le retrait du béton durci dépend surtout de celui de la pâte pure, les granulats s'opposent à la déformation de l'ensemble. Plus la composition du mélange (sable et gravillons) permet par une étude judicieuse, d'imbriquer les grains fins dans les vides les plus gros, plus la compacité du squelette sera élevée. La plus grande rigidité de la structure inerte constituée par les granulats réduit le retrait. De même les granulats constitués de roches avec un module d'élasticité élevé conduit à des retraits plus faibles. Un excès d'éléments très fins augmente le retrait où la surface latérale des grains est plus grande, ce qui nécessite d'avantage d'eau pour que la maniabilité du béton, ou du mortier soit identique. Mais un manque d'éléments fins, entraîne des vides dans le squelette et augmente aussi le retrait. L'augmentation du diamètre max. Des granulats entraîne une diminution du retrait car dans un mélange, l'accroissement de la qualité de gros granulats nécessite moins de mortier (sable et pâte de ciment) pour obtenir un mélange compact.

e) Dimension des éléments et conditions extérieures :

Les ouvrages en grande masse ont généralement un retrait faible qui évolue plus lentement. Les dalles, les planchers et les routes ont un retrait plus important. Si le rapport « surface d'évaporation / volume apparent » augmente, cela implique que le retrait augmente aussi. Le retrait débute à la surface des pièces et la vitesse de pénétration de la dessiccation est très lente pour un béton compact (faible diffusivité). Il en résulte donc que l'évolution du retrait est différente entre la surface et le cœur des éléments, ces différences sont d'autant plus importantes que la pièce soit plus massive.

f) Evaporation (ventilation, hygrométrie relative de l'air) :

Il existe une corrélation linéaire directe entre la perte d'eau, le degré hygrométrique de l'air et le retrait d'un mortier ou d'un béton. Plus la différence entre la température du béton et l'air ambiant est forte, plus la perte d'eau par évaporation est plus grande. L'influence des conditions extérieures sur le retrait est plus marquée avant la fin du durcissement pour les deux raisons suivantes :

- ★ La structure moins rigide offre moins de résistance à la contraction ;
- ★ La pâte de ciment en cours d'hydratation a un pouvoir de rétention d'eau plus réduit.

1.2.5.2) Conséquences du retrait :*a) Fissuration du béton :*

Les raccourcissements du béton soumis à la dessiccation dans l'atmosphère ambiante donnent naissance à des tensions de tractions. Si ces mouvements sont générés, si la valeur de ces contraintes dépassent les valeurs de la résistance maximale à la traction ou la valeur max. à la déformation d'extension ou allongement admissible, une ou des ruptures se reproduit (des fissures ou microfissures).

b) Mise en courbure des dalles, retrait différentiel :

La dessiccation en surface amène une redistribution de l'eau interne du béton par circulation capillaire, le décalage entre l'évaporation superficielle et le flux de l'eau venant de l'intérieur crée un gradient du retrait ou retrait différentiel.

1.2.6) Désordres dus aux effets des variations dimensionnelles :

Les variations dimensionnelles libres du béton sont de deux sortes : [31], [32], [15]

a) La dilatation :

La dilatation est un phénomène purement thermique, lié au comportement conjugué des agrégats et du ciment hydraté.

b) Le retrait ou le gonflement :

Le retrait ou gonflement est un phénomène purement hygrométrique. Le retrait caractéristique du ciment hydraté et de l'eau retenue dans les capillaires est lié à la désorption de l'eau contenue dans le matériau. Ces désordres tiennent une place particulièrement importante dans la pathologie des constructions en B.A. Leurs caractères de gravité sont variables, ils peuvent entraîner des réfactions coûteuses lorsqu'il y'a pénétration d'eau.

L'étude du sinistre montre qu'il se produit très souvent, dans les bâtiments de forme rectangulaire allongée ou carrée de grande dimension, des fissures dans les angles extrêmes. Ces fissures sont les plus souvent perpendiculaires aux bissectrices de ces angles. Pour limiter ces ouvertures, il convient, soit de disposer dans ces angles des armatures parallèles aux bissectrices, soit de prévoir un quadrillage d'armature renforcé dans les angles.

1.3) Indice de fissuration :

Une indication globale sur l'importance de la fissuration est ainsi rapidement disponible, sous forme chiffrée et objective, par la valeur de l'ouverture cumulée moyenne par mètre, que l'on dénomme « Indice de fissuration I_f ». Cet indice peut être calculé pour chaque axe, ou évaluer au niveau de la zone où en effectuant une moyenne des indices suivant chaque axe.

D'après l'expérience et en tenant compte de la décroissance rapide de l'ouverture des fissures, cette dernière peut être réalisé au degré d'endommagement d'une structure en B.A. ferraillé suivant les règles de l'art comme l'indique le Tableau 1.1.

Tableau 1.1 Degré d'endommagement d'une structure en béton armé.

<i>Echelle de caractérisation de la fissuration D'une structure en B.A.</i>	
<i>Indice de fissuration I_f (mm / m)</i>	<i>Degré d'endommagement</i>
0 ÷ 0,5	Négligeable
0,5 ÷ 1	Faible
1 ÷ 2	Modéré
2 ÷ 5	Fort
5 ÷ 10	Très fort
>10	Considérable

Le bon comportement dans le temps d'une structure en B.A et sa durabilité, dépendent d'une large mesure de la qualité du béton mise en œuvre et notamment de sa régularité. Il faut se méfier notamment :

- Des compositions granulaires trop théoriques entraînant des difficultés, implique des impossibilités de bétonnage;
- De l'excès d'eau ou plus encore d'une quantité d'eau insuffisante;
- Des défauts résultant de ferraillage trop dense (composition granulaire inadaptée);
- De l'absence, à défaut de véritable cure, de protection contre une dessiccation trop rapide par la chaleur ou le vent;
- De l'utilisation d'adjuvants non agréée ou de la mauvaise utilisation d'adjuvants agréé.

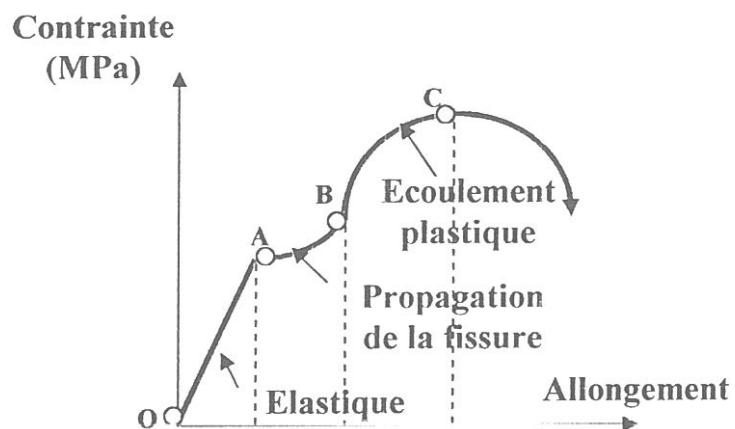


Fig.1.1 Ecoulement plastique au cours d'un essai de chargement
D'une poutre en béton armé [25].

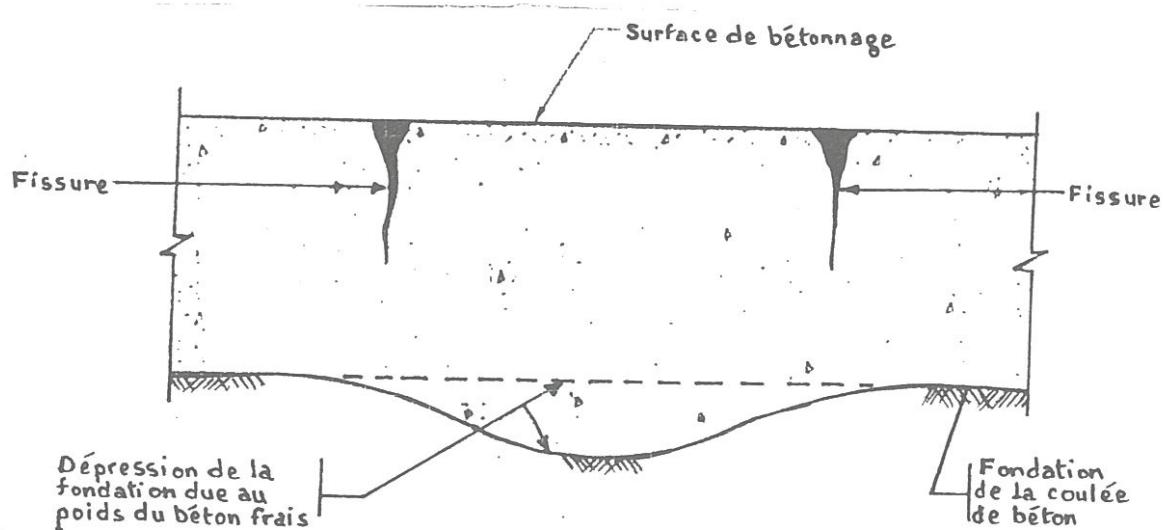


Fig.1.2 Fissure due au tassemement de la fondation pendant la construction [31].

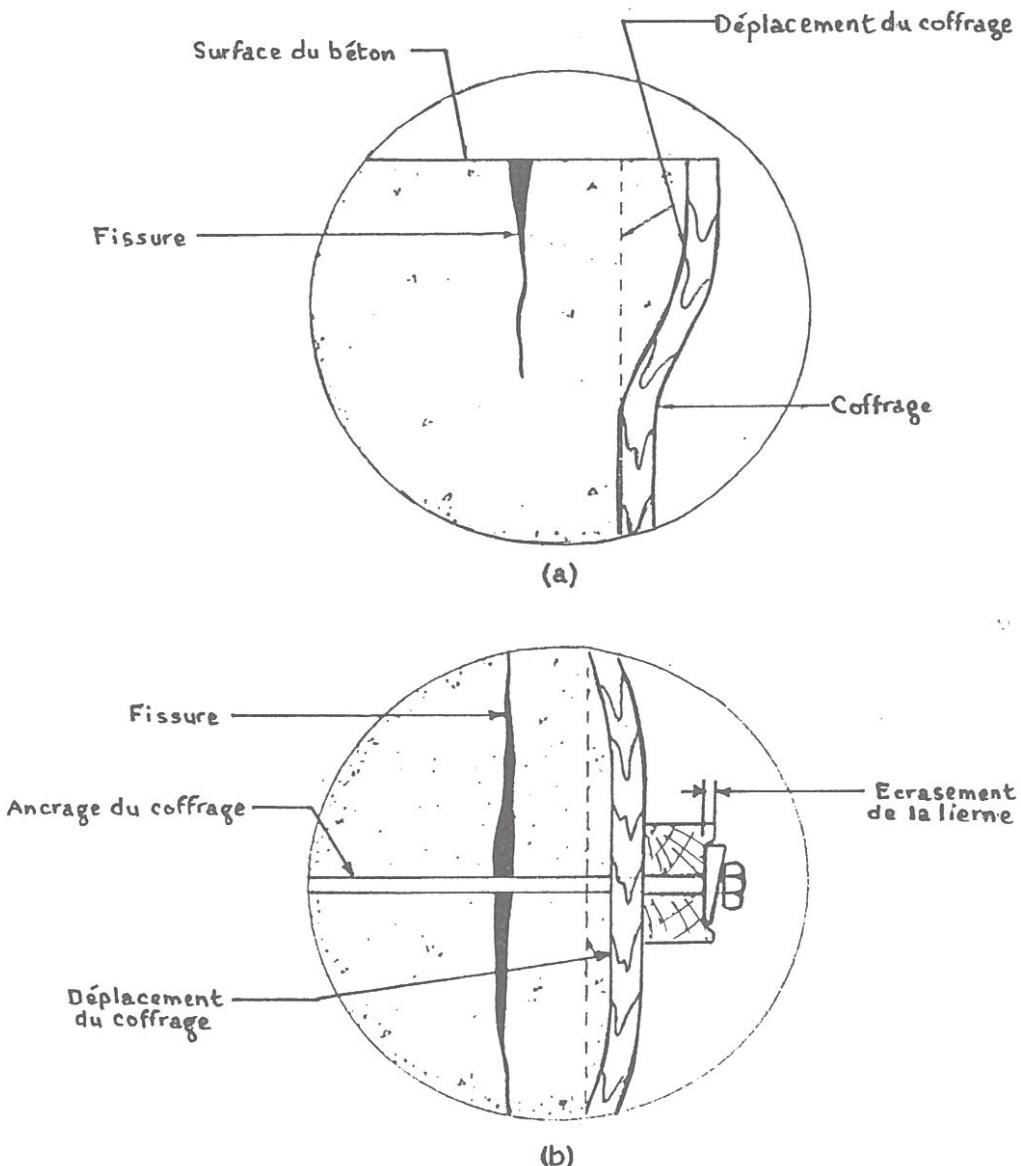


Fig.1.3 Fissure due aux mouvements des coffrages pendant la prise du béton [31].

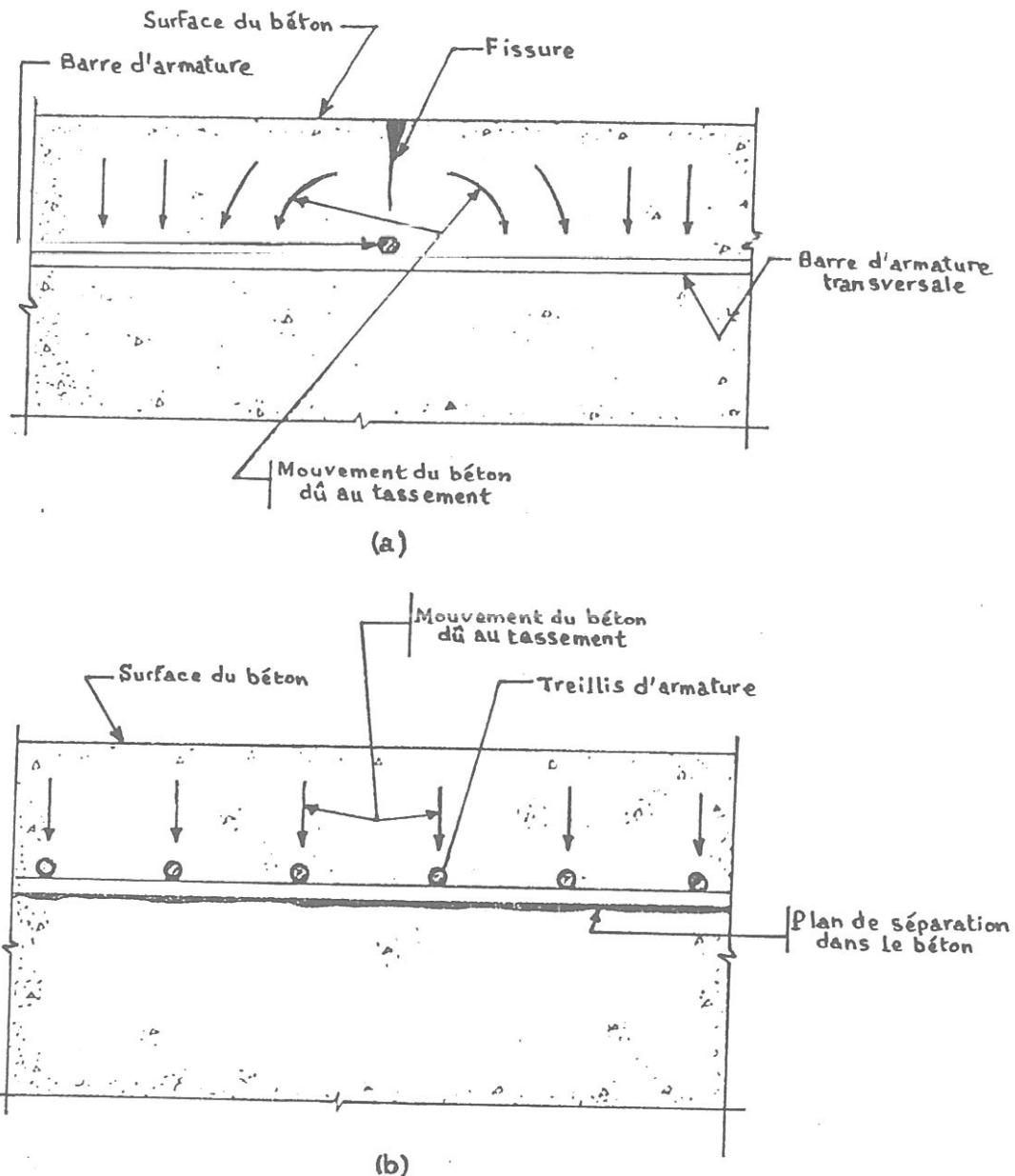


Fig.1.4 Fissures due à la ségrégation et au tassement du béton frais [31].

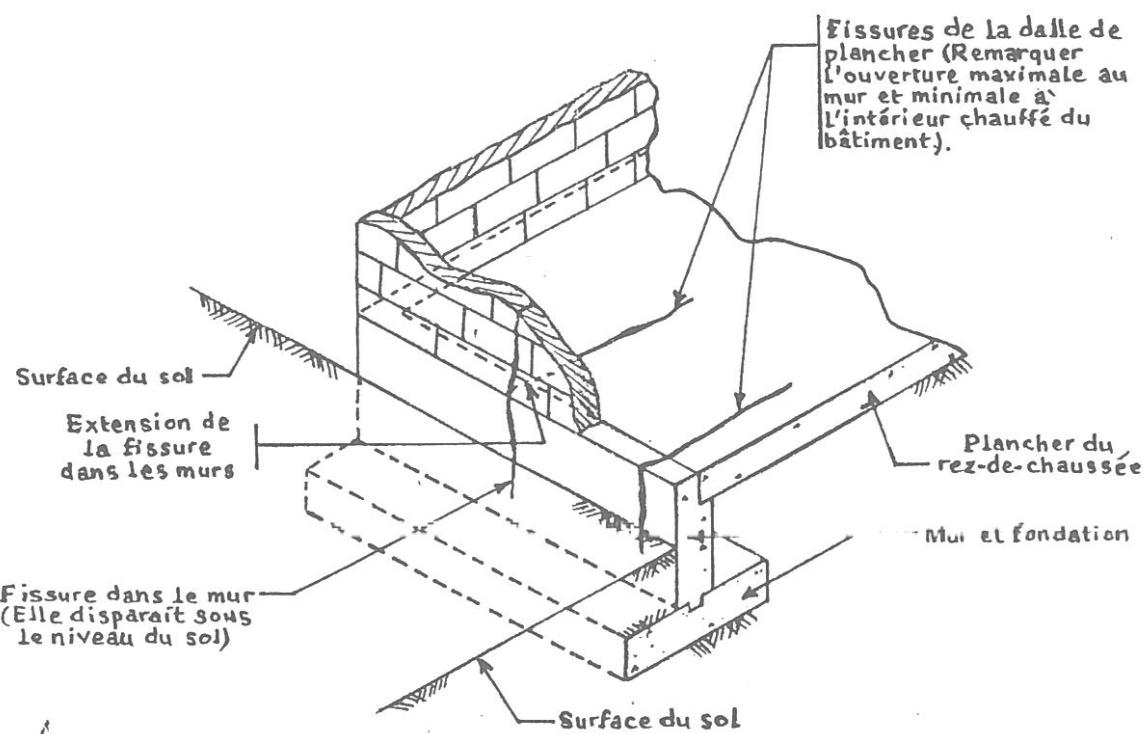


Fig.1.5 Fissures dues aux variations thermiques dans un bâtiment [31].

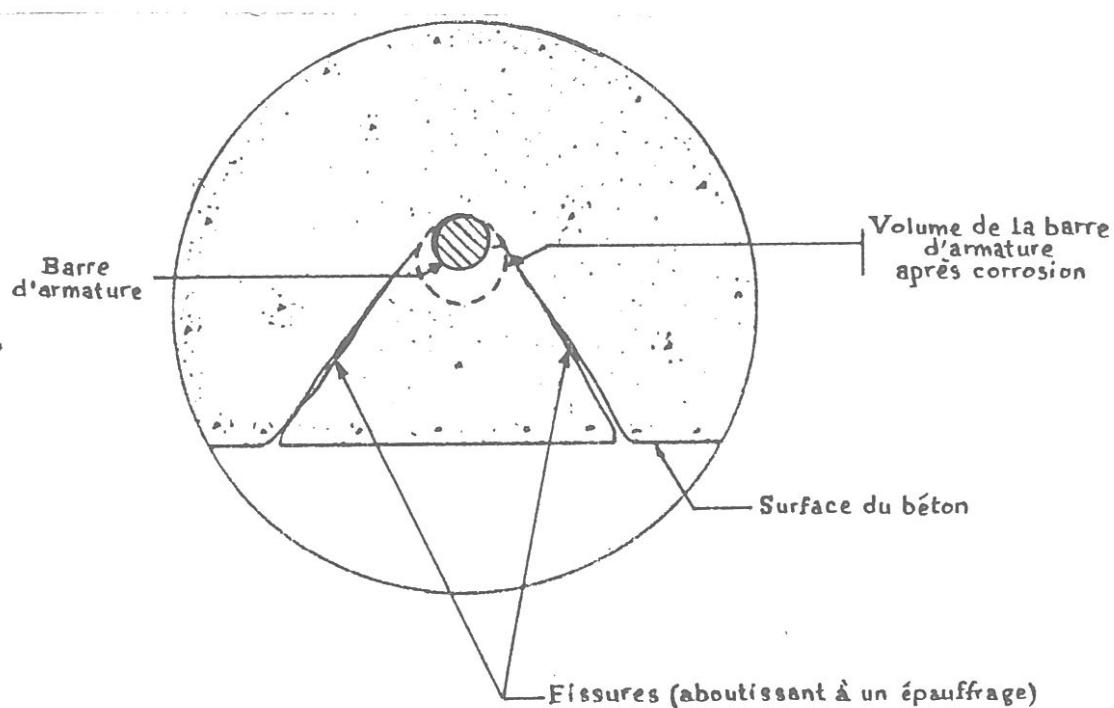


Fig.1.6 Fissuration et épauffrage du béton dus à la corrosion des armatures [31].

C chapitre 02

Etude bibliographique

SOMMAIRE

- 2.1) Introduction.
- 2.2) Généralités sur les bétons et bétons armés.
- 2.3) Caractérisation de l'évolution des microfissures:
 - 2.3.1) Les techniques d'observations « directes ».
 - 2.3.2) Les techniques d'observations « indirectes ».
- 2.4) Analyse expérimentale du comportement des matériaux tenaces :
 - 2.4.1) Déformabilité.
 - 2.4.2) Rupture.
- 2.5) Modélisation et interprétation:
 - 2.5.1) Modélisation physique des géomatériaux fissurés.
 - 2.5.2) Modèles mécaniques du comportement des géomatériaux fissurés.
- 2.6) La modélisation discrète des fissures (discret crack models) :
 - 2.6.1) Historique du modèle.
 - 2.6.2) La mécanique de rupture linéaire élastique (LEFM) :
 - 2.6.2.1) Critères de rupture (K, G le modèle en Mode mixte).
 - 2.6.2.2) Méthode des éléments finis (MEF) pour la modélisation des Singularités et les facteurs d'intensités de contraintes.
 - 2.6.3) Modélisation des fissures fictifs (FCM fictitious crack model).
 - 2.6.4) Algorithme du maillage automatique.
- 2.7) La modélisation continue des fissures (smeared crack model) :
 - 2.7.1) Historique du modèle.
 - 2.7.2) Types de limiteurs de localisation :
 - 2.7.2.1) Modèle de la bande de fissure.
 - 2.7.2.2) La continuité non locale.
 - 2.7.2.3) Le modèle gradient.
- 2.8) Application de la méthode des éléments finis (MEF)
et la mécanique de rupture dans les structures en
béton et en béton armé.

2.1) Introduction :

La représentation fine du comportement des structures en béton armé et béton ordinaire ne peut être abordée que grâce au très grand développement des méthodes numériques [31]; car la fissuration est un mode très important de dommage dans ces structures. Pour prédire exactement son comportement, il est nécessaire d'utiliser la méthode des éléments finis qui est certainement celle la mieux adaptée à la discréttisation d'un ensemble de matériaux à comportement très différents [2]. Cette méthode consiste à intégrer en variables locales ou globales un modèle rhéologique du composite « Béton armé » prenant en compte certaines de ses particularités comme la fissuration ou le comportement non linéaire de l'acier et du béton sous différentes charges.

Les deux techniques dominantes utilisées dans la modélisation par la méthode des éléments finis (*MEF*) des fissures sont : la représentation discrète et continue (the discrete and the smeared crack approach). Dans certains cas il est nécessaire d'utiliser une représentation exacte des fissures dans l'analyse par la *MEF* des structures. En général, il convient d'attribuer à la fissure une représentation utilisant les deux approches discrète et continue en même temps. Ces dernières années, l'analyse non linéaire des structures en *B.A.* a pris un grand essor avec le développement des méthodes numériques. Elle nous renseigne sur le comportement de ces structures jusqu'à leurs ruines. Ce type d'analyse est particulièrement important pour certaines structures; telles que : centrales nucléaires, ouvrages d'art, etc...[1].

Des études expérimentales sur ce type de structures sont impossibles à réaliser. Parce que les approches empiriques, seules, ne sont pas suffisantes pour une évaluation adéquate de leurs sécurités. Une analyse non linéaire par *MEF* s'impose, donc, comme seule moyen permettant d'avoir une solution optimale à l'équation « économie sécurité » posée par ces structures.

Au début du 19^{ème} siècle, les ingénieurs constatent que certains aspects du comportement du béton ne sont pas décrits ou prévus ; sont basés surtout sur la résistance classique des matériaux. Après le développement de la mécanique de rupture, il est devenu très clair d'associer ce développement à l'analyse des structures en béton.

Le but d'utiliser la mécanique de rupture résulte du fait que la mécanique classique des matériaux est inadéquate pour remédier aux différents cas où plusieurs discontinuités telles que les fissures existent dans le matériau. La mécanique de rupture a été développée pour prévoir des techniques qui prédiront le comportement du matériau lors de la propagation des fissures.

Par exemple : pour un champ de traction, les contraintes au bout de la fissure tend vers l'infinie dans les matériaux supposés élastique. Aucun matériau ne supporte des contraintes infinies, parce qu'une région du comportement non élastique (plastique) doit donc entourer le bout de la fissure. Les techniques classiques n'utilisent pas ces phénomènes complexes.

Le premier qui a appliqué les concepts de la mécanique de rupture aux poutres en béton est Westergard [34].

Avec l'apparition de l'ordinateur en 1940, et le développement rapide de la *MEF* (*FEM* finite element method), les ingénieurs ont pu analyser les structures en béton en utilisant la *MEF*. Il est devenu apparent, que ces structures ne se comportent pas de la même façon avec les suppositions de la mécanique classique continue (Bazant [3]).

Par la suite, la *MEF* a été généralisée pour modéliser le phénomène de la mécanique continue ainsi que le phénomène discret (comme les fissures et les interfaces).

Les ingénieurs réalisant l'analyse par *MEF* des structures en *B.A.* durant les 30 dernières années, ont graduellement admis (reconnus) l'importance du comportement discret du béton.

La mécanique de rupture peut être définie comme le début des idées et des concepts qui décrivent le passage du comportement continu au discret avec l'apparition d'une séparation dans le matériau. Les deux principales méthodes utilisées dans l'analyse par *MEF* pour la représentation des fissures dans les structures en béton sont :

La représentation discrète des fissures (discrete crack approach); et la représentation continue des fissures par application de la théorie équivalente de la mécanique continue (smeared crack approach). Une 3^{ème} méthode existe par la modélisation des constituants hétérogènes du béton dans un modèle réduit d'agrégats [2].

Le premier qui a réalisé une expérience physique observant la mécanique de rupture dans les structures en béton est Kaplan [20]. Il a appliqué la théorie de rupture de Griffith [27] (Modifier au milieu du 20^{ème} siècle pour devenir la théorie de la mécanique de rupture linéaire élastique ou bien *LEFM*) en évaluant des expériences sur des poutres en béton avec des fissures simulées en V (Notches ≡ coupure en V). Il a conclu avec quelques réserves, que le concept de Griffith (le taux de restitution d'énergie potentielle critique ou les facteurs d'intensité de contraintes critiques deviennent les conditions de propagation de la fissure) est applicable au béton. Mais récemment, il a été démontré que *LEFM* ne s'applique pas à des structures en béton typiques.

Hillerborg; Modeer et Petersson [17] étudiaient le processus de la zone de rupture (*FPZ* : fracture process zone) au bout de la fissure dans les structures en béton et observant si elle est longue et limitée (rétrécie). Ceci introduit le développement de la représentation des fissures fictifs (*FCM*: fictitious crack model), qui est l'une des plus simples représentation discrète de la mécanique de rupture non linéaire applicable aux structures en béton.

Analyse par éléments finis a été appliquée aux fissures des structures en béton par Ngo et Scordolis [23] modélisant les fissures discrètes, comme l'indique la *Figure 2.1*, mais ils ne s'adressent pas au problème de propagation des fissures. Plutard, Nilson [24] modélisait la propagation des fissures discrètes, non par l'utilisation de la mécanique de rupture, mais par l'utilisation des critères de résistances, avec non modélisation de la singularité des contraintes au bout de la fissure.

Ensuite, plusieurs recherches et développements pour la modélisation numérique des fissures discrètes dans les structures en béton ont été réalisés par Ingraffea et Al [19] et par Hillerborg et Al [17].

Une autre approche plus importante pour la modélisation des fissures dans les structures en béton est la représentation continue des fissures (smeared crack model) [26]. Dans cette méthode, les fissures sont modélisées par un changement des relations constitutives contraintes-déformations du solide continu au niveau des fissures.

Bazant [3] est le premier à réalisé cela, parce que pour la nature du comportement du béton lors de l'amollissement en déformation, le béton ne peut pas se modéliser comme un pur continu.

Les zones de dommages tendent à se localiser au niveau des modèles réduits du même ordre de grandeur que les agrégats.

Malgré que le béton été considéré comme continu, le calcul doit prendre en compte la taille de la structure hétérogène du matériau. Ceci implique que la taille maximale des éléments finis utilisés pour la modélisation du comportement amolli par déformation doit être liée à la taille

des agrégats. Si la taille de la structure est petite, cela ne présente pas un problème particulier. Par contre, si la taille de la structure est grande en comparaison avec celle de sa structure interne (la taille des agrégats), les facteurs d'intensité de contraintes (paramètres fondamentales dans LEFM) peuvent introduire plusieurs approches efficaces pour la modélisation de la propagation des fissures (Griffith [27]; Bazant [3]). Plusieurs structures sont entre ces deux tailles extrêmes. Les deux approches couramment utilisées pour ces cas sont la mécanique de rupture discrète et la mécanique de rupture continue.

Il est acceptable que la *MEF* (*FEM* : finite element method) peut être utilisée pour la résolution de plusieurs problèmes où les solutions classiques ne sont pas valables. Malgré l'utilisation de l'outil numérique, il est difficile de les appliquer lorsque la résistance de la structure ou l'un de ces membres est exposée aux fissures.

Il est maintenant clair, qu'un manque de succès dans ces modèles n'est pas dû à des faiblesses de la *MEF*, mais beaucoup plus à des approches incorrectes pour la modélisation des fissures. Dans la plupart des cas, le succès peut être atteint seulement si les principes de la mécanique de rupture sont seulement apportés aux problèmes de fissuration du béton et du B.A. Ces techniques ne sont pas seulement établies pour être puissante, mais pour prévoir des explications concernant le comportement du matériau et pour prédire la réponse structurale qui doit être réellement faite ou mal comprise.

Des recherches préliminaires pour la modélisation par *MEF* des fissures dans les structures tridimensionnelles peuvent être établies [1].

2.2) Généralités sur les bétons et bétons armés :

Le béton est une sorte de pierre artificielle moulable puis durcissable. C'est un mélange de granulats (sable, graviers et éventuellement cailloux) liés entre eux par une pâte de ciment (ciment + eau); le béton armé est le matériau obtenu en enrobant dans le béton des aciers disposés de manière à équilibrer les efforts auxquels le béton résiste mal par lui-même, c'est-à-dire les efforts de traction.

Dans l'association béton - acier que forme le béton armé, on peut répartir schématiquement le rôle de chacun des constituants de la manière suivante :

★ Le béton résiste aux efforts de compression ;

★ L'acier résiste aux efforts de traction et, éventuellement, aux efforts de compression si le béton ne peut y suffire à lui seul [15], [25].

Le béton présente des avantages, tels que :

★ Son économie d'entretien;

★ Sa résistance au feu;

★ Sa résistance aux efforts accidentels;

★ La possibilité d'obtenir des éléments préfabriqués [11].

Et des inconvénients, tels que :

★ Son poids : les ouvrages en B.A. sont plus lourds, nécessitant des fondations plus importantes, donc un prix de revient plus élevé;

★ Les sujétions d'exécutions : ces sujétions proviennent principalement :

- des armatures doivent être mises en place avec précision;

- de la fabrication des coffrages qui représente souvent un travail de charpente important, et ces coffrages demeurent immobilisés jusqu'à ce que le béton ait atteint une résistance;

- pendant et après la mise en place du béton, des précautions sont à prendre durant un certain temps pour protéger le béton contre le gel ou contre une dessiccation trop rapide.

* La brutalité des accidents : il est juste de dire que des accidents sont toujours imputables à des fautes graves contre les règles élémentaires de construction;

* La difficulté de modifier un ouvrage en BA existant [11].

La masse volumique du béton peut augmenter suivant les modalités de mise en œuvre, avec une forte vibration [11]. Son coefficient de poisson varie avec le dosage en ciment, il est d'autant plus grand que le dosage est plus élevé. Il dépend en particulier de la nature et de la grosseur des granulats ainsi que des qualités propres du béton [11], [15].

Au cours de sa vie, le béton subit une variation de volume, c'est un phénomène de raccourcissement qui accompagne la prise du ciment. Lorsque le béton est conservé dans une atmosphère sèche, son volume diminue et ses dimensions se raccourcissent : c'est le retrait.

On peut l'assimiler à l'effet d'un abaissement de température entraînant un raccourcissement.

Le durcissement sous l'eau diminue beaucoup les effets du retrait. C'est pourquoi il convient de tenir les pièces humides en les arrosant pendant leur durcissement (cure du béton) à une époque où le béton très jeune n'a encore qu'une faible résistance en traction et se fissurerait facilement sous l'effet du retrait.

Il convient de distinguer le retrait par dessiccation (l'évaporation de l'eau provoque la fissuration et le faïençage des ouvrages); le retrait thermique; le retrait sous charges et le retrait chimique [32].

Le retrait sous charge ou fluage est un phénomène de déformation différée sous l'effet d'une charge indéfiniment appliquée (voir *Figure 2.2*). Si le béton est soumis à un effort de traction, le retrait diminue, c'est précisément ce qui se passe dans le béton armé où les armatures tendent à s'opposer au retrait du béton et le soumettent à un effort de traction [15].

Les phénomènes de retrait et de fluage sont en réalité bien plus complexes qu'il n'apparaît par la simple application des formules, car elles sont essentiellement empiriques et ne donnent que des ordres de grandeur, à peu près valables, sous réserve que les coefficients aient été choisis avec discernement et bon sens.

Le béton et l'acier présentent la propriété d'adhérer fortement entre eux lorsque les armatures sont convenablement enrobées du béton [11]. C'est là une propriété fondamentale qui a permis la réalisation du BA, par ce que c'est grâce à elle que les efforts peuvent se transmettre de l'acier au béton et du béton à l'acier. Enfin, l'adhérence permet de réaliser la jonction des armatures par simple recouvrement [22].

La résistance du béton a été longtemps considérée comme la qualité essentielle, pour ne pas dire la seule, à rechercher pour un béton [15].

Sa résistance à la compression se mesure à partir d'un cylindre droit de révolution d'une hauteur double de leur diamètre [22].

Tandis que la résistance à la traction peut se déterminer à travers trois essais différents :

a) en traction directe :

La mesure de la résistance se fait par mise en traction de cylindres, mais l'essai est assez délicat à réaliser car il nécessite, après sciage des extrémités, le collage de têtes de traction parfaitement centrée, l'opération devant avoir lieu sans aucun effort de flexion parasite (Figure 2.3.a).

b) en traction par fendage :

L'essai consiste à écraser un cylindre du béton suivant deux génératrices opposées entre les plateaux d'une presse, cet essai souvent appelé « essai brésilien » (Figure 2.3.b).

c) en traction - flexion :

C'est l'essai le plus couramment utilisé. Il consiste à rompre en flexion une éprouvette prismatique de côté « a » et de longueur « 4a » (Figure 2.3.c).

Les expériences montrent que les résistances en traction directe ou par fendage sont inférieures de 40 % aux résistances mesurées en traction - flexion ; ceci peut s'expliquer par la plastification du béton dans la phase de pré rupture ; où ne sont plus valables les lois d'élasticité.

Une partie importante de la résistance (surtout en traction) est fonction de l'adhérence du mortier sur la surface des graviers. Cette qualité peut même être plus importante que la résistance et la dureté du gravier lui-même.

Il ne faut pas perdre de vue qu'un béton tire du granulat une bonne part de sa résistance et plus particulièrement du gros granulat.

La résistance du béton frais intéresse plus particulièrement les préfabriquants pour le démoulage immédiat (avant prise du ciment) d'éléments de grande série [15].

Le coefficient d'élasticité est le module de déformation longitudinale (module de young) définit : $E = \text{contrainte unitaire} / \text{déformation relative} = \frac{f_{c0}}{\Delta l/l}$ [15].

Le module d'élasticité instantané peut se déterminer expérimentalement :

- par un chargement statique direct d'éprouvette du béton avec mesure de la déformation correspondante;
- par mise en vibration d'éprouvettes prismatiques;
- par vitesse du son, E_i étant proportionnel au carré de la vitesse du son en (m/s).

Module tangent et Module sécant :

Si l'on trace la courbe contrainte-déformation, on s'aperçoit que le béton ne se comporte pas comme un corps parfaitement élastique, sauf pour des contraintes faibles. Le module d'élasticité correspondant est alors appelé module tangent. Ce n'est pas cette valeur qu'il faudra prendre en compte si l'on veut calculer la déformation sous une contrainte par exemple, mais le module sécant correspondant à la déformation effective sous cette contrainte. On pourra admettre à titre d'approximation de résultats expérimentaux que le module sécant est égal au module tangent diminué de 10 % environ dans la zone des contraintes de service habituelle (Module sécant = 0,9.module tangent).

En compression, comme en traction, la déformation longitudinale (dans le sens de l'effort) est accompagnée d'une déformation transversale : le coefficient de poisson est le rapport entre la déformation transversale et la déformation longitudinale en valeurs relatives [15].

2.3) Caractérisation de l'évolution des microfissures :

La connaissance du comportement des bétons sous sollicitations mécaniques est un facteur essentiel pour la prévision de la résistance des structures, donc un outil fondamental pour le projeteur. C'est à travers des recherches que nous proposons de décrire, d'une part les méthodes les plus utilisées pour caractériser l'évolution de la dégradation du matériau et, d'autre part les différentes approches possibles pour la modélisation de ces phénomènes.

Le béton est un matériau granulaire, tenaces et cohérent. Les interactions entre grains sont faites essentiellement de frottement, et les forces inter granulaires restent faibles, surtout lorsque la grosseur des grains fait que la surface spécifique demeure faible. On notera par ailleurs que les matériaux graveleux peuvent, sous certaines conditions de morphologie et d'arrangement des grains qui les constituent, présenter une cohésion d'imbrication. La modélisation du comportement mécanique des bétons implique que l'on ait une bonne connaissance de la nature des liaisons inter granulaires et de leur importance effective [21].

L'hétérogénéité du béton est la cause de l'existence de zones à faible résistance mécanique dans lesquelles naissent et se développent les microfissures. Les phénomènes complexes liés à l'hydratation du ciment (mouvements thermiques ou de retrait) provoquent la création de défauts plus particulièrement localisés dans la zone faible, de liaison pâte - granulat où se développent les microfissures lors des sollicitations mécaniques.

Le comportement et la rupture du béton sont donc le résultat de l'existence et du développement d'une microfissuration au sein du matériau. Pour bien cerner le phénomène de microfissuration et formuler des hypothèses cohérentes pour sa modélisation mécanique, l'analyse doit s'effectuer à deux niveaux :

- Au niveau local, par l'utilisation de techniques d'observation qui renseigneront sur les paramètres les plus influants;
- Au niveau global, en étudiant l'évolution des caractéristiques mécaniques en fonction de la dégradation du matériau.

Les techniques d'observation : peuvent être classer en deux catégories :

2.3.1) Les techniques d'observation « directes » :

Les techniques d'observations directes permettent la localisation de la dégradation et le suivi de son évolution.

a) Observations par rayons X :

Cette méthode consiste en l'obtention d'un cliché, par exposition aux rayons X, d'un volume de béton sous charge [21]. Les microfissures sont décelables si leur plan de développement est de 5 à 10 degrés près, parallèle à la direction des rayons X; une observation simultanée dans plusieurs directions est donc nécessaire si on veut cerner l'ensemble des phénomènes, lesquels sont présentés sur la *Figure 2.4*, les résultats obtenus sur une éprouvette de section carrée (7 cm x 7 cm) [21] sollicitée en compression uni axiale; (le matériau est un micro béton, [15]).

➤ *Figure 2.4.a* confirme la présence de défauts avant tout chargement et montre que leur développement est faible jusqu'à 50 % de la charge de rupture;

➤ *Figure 2.4.b* permet de constater qu'il y'a une évolution très importante de l'état de microfissuration entre 60 % et 90 % de la charge de rupture, inclut un accroissement des

microfissures déjà existantes et la création de nouveaux foyers de micro ruptures, la direction générale de développement des microfissures étant parallèle à celle de l'effort.

b) Observation par microscope optique :

Des cylindres de béton ont été chargés en compression à différents niveaux de sollicitation, et extraire par sciage une tranche longitudinale de l'éprouvette et enduit la surface sciée d'une encre au pouvoir mouillant élevé, de façon à ce qu'elle puisse pénétrer dans la masse du matériau [21]. L'observation s'effectue au microscope optique (grossissement de 30 fois) et les relevés permettent d'obtenir une carte de la microfissuration. Celle-ci est caractérisée par sa densité en mm/mm^2 et les résultats donnés par la *Figure 2.5* font apparaître deux types de microfissures :

- D'une part des microfissures à l'interface pâte - grains (parmi les plus gros) en différenciant celles qui sont dans la moitié inférieure des grains et celles qui sont dans la moitié supérieure, le sens de coulage étant du haut vers le bas;
- D'autre part à travers le mortier.

L'analyse de ces courbes montre :

- Une microfissuration préexistante plus particulièrement localisée dans la partie inférieure des grains;
- Un développement des microfissures au niveau de l'interface inférieure pâte -grains;
- A partir de 60 % ou 70 % de la charge de rupture, un accroissement des microfissures atteint la partie supérieure des granulats;
- Au-delà de 90 % de la charge de rupture, une progression des microfissures à travers le mortier conduit à la rupture de l'éprouvette.

Si ces résultats fournissent une information précise sur l'état de la microfissuration pour un niveau de sollicitation donné, il est à signaler que la méthode utilisée pour les obtenir est délicate et fastidieuse dans son application (une dizaine d'heures d'observation microscopique par tranche de matériau).

2.3.2) Les techniques d'observation « indirectes » :

Ces techniques intègrent sur un certain volume l'ensemble des effets locaux, et qui sont généralement faciles à mettre en œuvre [21].

a) Mesure de la célérité d'ondes ultrasonores :

Le principe de cette méthode est le suivant : A partir d'un émetteur, on envoie un train d'ondes au travers du matériau, le départ du train d'onde coïncide avec le déclenchement d'un chronomètre dont l'arrêt est commandé par l'arrivée du signal sur un récepteur; le temps affiché et la distance parcourue permettent de déduire la vitesse moyenne de traversée. Les capteurs génèrent des ondes longitudinales ou transversales fournissant des renseignements très précis sur le comportement dynamique du matériau. La *Figure 2.6* montre l'évolution du temps de parcours d'ondes longitudinales, au travers d'une section diamétrale d'une éprouvette cylindrique comprimée, en fonction de la charge appliquée. Ce type de mesure est dit «par transparence»; par opposition à la mesure dite «par réflexion». L'augmentation du temps de parcours correspond à une augmentation du nombre «d'obstacles» qui sont dans ce

cas des lames d'air créés par l'accroissement de la microfissuration. Les résultats présentés permettent de constater :

- ❖ Une faible influence de la sollicitation jusqu'à 50 ÷ 60 % de la charge maximale;
- ❖ Une augmentation très sensible du parcours au-delà de cette valeur, particulièrement lorsque la contrainte maximale a été atteinte, ce qui correspond à la formation de fissures traversantes : de 15 % à la contrainte maximale, l'augmentation relative croît très rapidement pour dépasser les 100 % en fin de courbe;
- ❖ Une quasi-réversibilité du phénomène de microfissuration lors des phases de déchargement - rechargement et leur évolution lors des phases de sur chargement, confirment ainsi la nature irréversible de la dégradation.

Une étude de mesure *in situ* permet de caractériser la qualité des bétons et d'établir des relations empiriques entre résistance en compression et vitesse de propagation.

b) Analyse de l'émission acoustique :

On utilise dans cette méthode le fait que toute dégradation du béton soit source de « Bruit » [21]. Suivant la complexité du matériel de mesure utilisé, il est possible de détecter, de cumuler, de localiser, d'analyser les signaux reçus, appelés « Événements acoustiques ». La Figure 2.7 montre les résultats obtenus sur une poutre en béton armé sollicitée en flexion trois points, deux capteurs sont placés sur la partie inférieure de la poutre et permettent de localiser les événements sur un segment dont ils constituent les extrémités. Chaque événement est mémorisé, on obtient ainsi leur cumul dans une section donnée de la poutre. Pour la Figure 1.12 de gauche on constate une concentration d'événements à l'abscisse (-2 cm) correspondant après dégradation à l'ouverture d'une première fissure. Dans un deuxième temps (Figure 2.7 de droite) outre la propagation de la première fissure, on observe la naissance à l'abscisse (-10 cm) d'une deuxième fissure, correspond exactement aux observations visuelles qui ont pu être faites ultérieurement.

2.4 Analyse expérimentale du comportement des matériaux tenaces :

Pour l'analyse expérimentale du comportement des matériaux tenaces on considère un modèle granulaire, où la grosseur des grains est comparée à celle de l'objet étudié, c'-à-d les éléments de structure ou le volume du matériau concerné. Un objet suffisamment grand devant les grains qui le constituent pourra être traité comme un milieu continu ; dans le cas contraire, il conviendra de le considérer comme un assemblage de blocs plus ou moins rigides. Dans ces conditions (Figure 2.8) nous envisageons, dans un premier temps, deux modèles extrêmes : celui d'un matériau constitué de grains simplement juxtaposés, et celui d'un matériau dont les grains sont fortement liés, cimentés, ces deux modèles peuvent être considéré comme continus. Deux essais types (traction et compression uni axiale) permettent de souligner l'évolution des caractéristiques mécaniques lorsqu'il y'a accroissement des sollicitations. Pour les matériaux à grains fortement liés (c'est le modèle qui convient pour les matériaux tenaces, roches et bétons), il correspond un comportement de milieu continu élastique, et il peut être nettement fragile selon les données cristallographiques et minéralogiques. L'analyse des constructions expérimentales concernant la déformation et la rupture est systématiquement associé à la dilatation, et met l'accent sur le rôle essentiel de fissuration joué, pour ce type de comportement des matériaux tenaces.

2.4.1) Déformabilité :

Deux essais types (traction et compression uni axiale), permettent de suivre l'évolution des caractéristiques mécaniques lorsqu'il y'a accroissement des sollicitations [21].

a) Comportement en compression uni axiale [22] :

La réalisation, dans une éprouvette, d'un champ homogène de compression mono axiale se révèle très délicate. L'analyse des courbes contrainte-déformation, habituelle en mécanique des roches, permet de distinguer cinq phases de comportement en compression uni axiale.

La prise en compte de la fissuration se traduit par des écarts au comportement des modèles, élastique-linéaires.

Le calcul de dimensionnement des ouvrages et structures peuvent être conduits en utilisant les modules d'élasticité sécants et tangents, ainsi déterminés; ce qui permet une certaine intégration des phénomènes différés ou irréversibles (modèles rhéologiques proposés sont présentés dans [13]).

C'est ainsi notamment qu'on se référant à la *Figure 2.9*, en conditions statiques pour les roches à serrage, qu'on définit un module de premier chargement E_l , un module de chargement E_c et un module de déchargement E_d , qui fournissent une valeur approchée de ce que serait le module d'young de la roche non fissurée [13].

L'essai présenté sur la *Figure 2.10* [13] a été réalisé avec une machine asservie en déplacement sur une éprouvette cylindrique ($\phi 16$ cm); les déformations ont été mesurées grâce à un extensomètre ENSET de conception originale autorisant, sans les gêner, les gonflements de l'éprouvette qui sont également mesurés. La sollicitation a été menée par phase de chargement - déchargement, de façon à contrôler l'évolution des caractéristiques mécaniques du matériau. Sur la *Figure 2.10* est tracé le diagramme contrainte - déformation longitudinale et transversale; les retours en arrières donnent, pour un état de sollicitation atteint, le module d'élasticité E , le coefficient de poisson « ν » et les déformations permanentes longitudinales et transversales ε_l^p , ε_t^p . Les résultats peuvent être synthétisés de la façon suivante (les valeurs numériques données sont dans les ordres de grandeur suivant) :

Phase élastique :

$$\varepsilon_l^m \leq \varepsilon_{db} (\cong 10^{-4}); E = E_0 (\cong 35000 \text{ Mpa}); \nu = \nu_0 (\cong 0,2)$$

$$(E_0, \nu_0, \text{caractéristiques initiales}); \varepsilon_l^p = \varepsilon_t^p = 0$$

Il y'a une réversibilité des déformations ;

Phase de microfissuration quasi - isotrope :

$$\varepsilon_{db} < \varepsilon_l^m \leq \varepsilon_{d0} (\cong 2.10^{-4}); E \downarrow; \nu = \nu_0; \varepsilon_l^p \uparrow \text{Reste très faible};$$

Phase de microfissuration anisotrope :

$$\varepsilon_l^m \geq \varepsilon_{d0}; E \downarrow \text{jusqu'à 0,5 fois } E_0; \varepsilon_l^p \uparrow \text{jusqu'à } 0,5 \cdot 10^{-3}; \nu \uparrow \text{jusqu'à 3 fois } \nu_0;$$

$$\varepsilon_t^p \uparrow \text{jusqu'à } 1,10^{-3}.$$

Où :

ε^m_t représente la déformation relative transversale maximale atteinte;

ε_{db} représente la déformation relative transversale représentant la limite d'élasticité;

et ε_{dp} représente la déformation relative transversale représentant la limite de plasticité.

Les trois phases décrites précédemment, confirment l'orientation des fissures parallèlement à la direction de l'effort (troisième phase) et se traduisant par un accroissement important du coefficient de poisson (jusqu'à trois fois sa valeur initiale).

b) Comportement en traction :

L'étude de la déformabilité en traction a beaucoup moins été développé, car ces matériaux « travaillent » peu en traction, et l'expérimentation en est délicate [13], [21]. La distinction entre phases successives de comportement est, en particulier beaucoup moins accessible. De plus la fragilité des liaisons entre éprouvette et dispositifs de traction oblige à développer des essais indirects, sondage diamétral ou flexion, par exemple, à champs hétérogènes de contrainte. La Figure 2.11 représente la courbe complète contrainte - déformation en traction uni axiale. Cet essai a été réalisé sur éprouvette cylindrique de micro béton et a fait apparaître distinctement deux phases :

Phase 1 :

Avant d'atteindre le pic de chargement, la courbe contrainte - déformation s'écarte peu de la droite élastique, ce pic correspond à une déformation relative transversale égale à $0.7 \cdot 10^{-4}$ (du même ordre que ε_{db} noté en compression). Les bétons étudiés dans ces deux essais sont de compositions différentes. La légère courbure de ce diagramme est la conséquence de l'apparition des premiers désordres, qui restent peu nombreux et stables.

Phase 2 :

Après le pic de chargement, cette phase correspond à un développement rapide de la microfissuration se traduisant par une chute brutale de contrainte et ne peut être obtenu que sur une machine asservie en déplacement et en raideur suffisante.

De ces résultats, on retient deux importantes observations : d'une part la déformation possible en traction peut être quatre fois supérieure à celle correspondant au pic ; et d'autre part, le développement de la microfissuration se traduit par une chute importante de la raideur. Dans le cas présent, le module d'élasticité en fin d'essai est de l'ordre du quinzième du module initial.

2.4.2) Rupture :

La rupture présente, très souvent, un caractère prononcé de fragilité des matériaux avec dilatance et consiste en la propagation plus ou moins soudaine de fractures. Il s'agit donc d'un phénomène localisé impliquant soit une hétérogénéité de la structure du matériau, soit une hétérogénéité du champ de contrainte. Dans ces conditions, on ne peut pas traiter la rupture sans prendre en compte la fissuration du matériau. C'est ainsi que l'allure des courbes de déformation longitudinale, en phase de rupture et de post-rupture, en compression mono axiale (Figure 2.12) [13]; permet de distinguer deux classes du comportement des matériaux fissurés.

Pour les matériaux de *classe I*, un apport d'énergie est nécessaire à la propagation de la fracture. Pour les matériaux de *classe II*, la rupture ne peut être contrôlée que si l'on extrait l'énergie du matériau. Plus les matériaux sont poreux ou fissurés, mieux il se contrôle à la rupture. Le mode de rupture, fragile ou ductile, est ici très sensible à la contrainte moyenne. Pour les sollicitations de traction ou faiblement compressives, la rupture est à dominante fragile, cependant que sous une contrainte moyenne élevée, la part de ductilité augmente.

2.5) Modélisation et interprétation:

Le comportement du béton représente l'effet cumulatif d'une microfissuration progressive dont la stabilité dépend du type de sollicitation. Deux voies d'études sont particulièrement développées à l'heure actuelle :

- » L'étude sur modèle à une ou plusieurs phases dont l'intérêt est la mise en évidence des phénomènes locaux et leurs conséquences sur le comportement global du matériau;
- » et l'étude du comportement global, soit par des relations mathématiques reliant contraintes et déformations, soit par l'utilisation de théories de la mécanique des milieux continus telles que « plasticité », « endommagement », etc. [13].

2.5.1) Modélisation physique des géomatériaux fissurés :

a) Fissures et discontinuités de la matrice (micro fissuration) :

On peut distinguer les discontinuités intra granulaire, inter granulaire [13], et micro fracture (Figure 2.13) comme suit :

- » Discontinuités intra granulaires : Ce sont des surfaces de faiblesse du réseau cristallin des minéraux constitutifs du matériau (dislocation, plans de clivage, etc.) qu'il convient d'adoindre des micro craquelures, fractures d'origine mécanique, notamment dans les minéraux à clivage malaisé (quartz).
- » Discontinuités inter granulaires : Ce sont les joints de grains qui, selon qu'il y'a ou non, développement de liaison inter granulaire, peuvent constituer des zones de faiblesse. Dans les matériaux à grains fortement liés, cimentés, imbriqués (quartzites), les joints de grains ne constituent pas de zones de faiblesse.
- » Micro fractures : D'origine mécanique, ce sont des discontinuités trans granulaires dont la genèse est déterminée, à la fois par les sollicitations subies par l'agrégat et par sa structure : les micro fractures sont donc formées par une succession de discontinuités intra et inter granulaires.

b) Fissures et discontinuités de massif (macro fissuration) :

Ces discontinuités, souvent disposées en familles caractérisées par une même orientation et une nature identique : schistosité, joints de stratifications, etc. individualisent, pour la plupart d'entre elles, des volumes rocheux, panneaux et blocs. Leur prise en compte mécanique consiste essentiellement en la formulation et la résolution des problèmes de contact et de mouvements relatifs des masses qu'elles délimitent.

c) Modèles physiques adaptés à l'étude des géomatériaux fissurés :

Les constatations physico mécanique rapportées ci-dessus conduisent, suivant la taille des objets et des discontinuités, à considérer les géomatériaux de différentes manières (*Figure 2.14*) :

- Des structures à grains très fortement liés, dont la fissuration est très peu marquée, faite de discontinuités petites devant la taille de la structure étudiée et peuvent être assimilées à un milieu continu, élastique ou viscoélastique à rupture fragile ou ductile (*Figure 2.14.A*) [13].
- Des structures à grains fortement liés, mais dont la fissuration est interne, faite de nombreuses petites discontinuités, sont assimilées au milieu « continu fissuré » à serrage et dilatance (*Figure 2.14.B*) [13].
- Des structures, constituées de matériaux à fissuration généralisée avec une maille petite devant la taille de la structure étudiée, sont assimilées à un milieu granulaire à grains simplement juxtaposés, pouvant éventuellement présenter une cohésion d'imbrication (*Figure 2.14.C*) [13].
- Des matériaux à fissuration généralisée, individualisant des volumes rocheux non négligeables devant le volume de la structure étudiée justifient une approche relevant de la mécanique des blocs (*Figure 2.14.D*) [13].
- Les structures en fin, qui comportent un nombre réduit de discontinuités étendues seront analysées à l'aide des méthodes de la mécanique des solides indéformables.

On vérifiera ainsi plus particulièrement la stabilité au glissement et au renversement du volume rocheux préalablement individualisé (*Figure 2.14.E*) [13].

Remarque : Les problèmes concernant la rupture fragile, par propagation de fracture localisée au sein d'un milieu continu nécessitent, pour leur résolution, l'élaboration d'un modèle réduit de fissure. Deux modèles ont ainsi été proposés : la fissure de Griffith et

Dugdale - Barenblatt (*Figure 2.14.F*) [13].

2.5.2) Modèles mécaniques du comportement des géomatériaux fissurés :

Le comportement des géomatériaux fissurés peut être traité avec les outils habituels : l'élasticité linéaire ou non, instantanée ou différée [13], [21]. Le concept de milieu « Continu-fissuré » justifie la détermination de plusieurs modules de déformation. Le comportement des matériaux humides et saturés peut être abordé en utilisant les notions de contraintes totales, contraintes inter granulaires et pression interstitielle. Cette approche satisfaisante pour les matériaux poreux à porosité de pores importante, pose des problèmes dans le cas des matériaux de type « continu-fissuré » à faible porosité, où prédomine la porosité de fissures [13].

Dans cette étude utilisée on représente l'élément de volume du béton par une cellule, en général cubique, incluant plusieurs éléments, images des différentes phases du matériau, ou bien un défaut initial susceptible de s'amplifier sous l'action d'efforts extérieurs. Les phénomènes étudiés sont principalement l'apparition des premières « irréversibilités des déformations » et quelque fois l'évolution ultérieure des fissures. A partir d'hypothèses sur le comportement local, on déduit le comportement global de la cellule ou d'un assemblage de cellules, qui sera alors comparé au comportement expérimental du béton [21].

2.5.2.1) les modèles monophasiques :

a) Modèle de Griffith - Lino [13], [21] :

Ce critère d'initiation de fracture considère une cellule (milieu) élastique continue tridimensionnelle affaiblie par des fissures planes circulaires, ou bien une fissure elliptique non chargée à sa périphérie (Figure 2.15). La rupture se produite lorsque la contrainte principale tangente à la paroi, à la périphérie de la fissure, est de traction et égale à $(-\sigma_t)$. Il s'agit donc d'une extension au milieu « continu - fissuré » du critère de traction maximale.

A fin de se ramener à un problème plan, deux hypothèses sont adoptées :

- Les fissures les plus défavorables se propagent dans le plan de la contrainte intermédiaire σ_2 ;
- Une fissure parallèle à ce plan dans un milieu tridimensionnel se comporte, dans le plan des contraintes extrêmes, comme une fissure linéaire en déformations planes.

Le matériau est considéré comme étant élastique linéaire et le modèle utilise les critères suivants :

- ★ Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, par une combinaison des *modes I et II* de rupture (Annexe A sur les critères de ruptures) :

$$G = (1 - \nu^2) \cdot (K_I^2 + K_{II}^2) / E ; \text{ le critère de Griffith (} G_c = 2 \gamma_c \text{).}$$

- ★ Sur les faces de la fissure, le critère de frottement de Coulomb : $|\sigma_t| \leq \tan \varphi_c |\sigma_n|$

Avec : σ_n = contrainte normale;

σ_t = contrainte tangentielle;

φ = angle de frottement limite.

La fracture s'initie à partir d'une fissure dont le grand axe fait, avec la contrainte principale majeure σ_1 , un angle φ_c :

- égale à zéro lorsque $\sigma_3 / \sigma_1 < -1/3$

$$- \text{ et égal à } \frac{1}{2} \cdot \arccos \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)} \right] \text{ lorsque } \frac{\sigma_3}{\sigma_1} > -\frac{1}{3} \text{ (Figure 2.15).}$$

Ce critère admet une certaine fragilité, avec une contrainte de rupture en compression σ_c égale à $8\sigma_t$. La Figure 2.16 montre le domaine d'état - limite élastique obtenu dans le plan des contraintes extrêmes. On peut noter que dans la zone qui correspond au mode I d'ouverture de la fissure, on retrouve le critère de Rankine (critère de traction maximale). Quant l'évolution de ces valeurs au-delà du domaine élastique permet de retrouver :

- ★ Une propagation instable de la fissure qui se développent perpendiculairement à la contrainte moyenne, quand la traction est prépondérante;
- ★ Une propagation instable se développant parallèlement à la direction de la compression, quand la compression est prépondérante.

b) Modèle de Bamberger - Marigo - Cannard [21] :

Ce modèle a été construit pour caractériser l'état de la microfissuration du matériau à partir de la célérité de propagation d'ondes ultrasonores. Selon le même principe du modèle précédent, la cellule élémentaire comporte, en son centre, une fissure aplatie. On étudie l'assemblage d'une série de cellules dont les fissures ont des longueurs et des directions distribuées de manière aléatoire. Par une technique d'homogénéisation, on montre qu'une cellule fissurée constituée d'un matériau M , considéré élastique linéaire, a même énergie de déformation qu'une cellule non fissurée, donc homogène, formée d'un matériau M^* qui est anisotrope à six coefficients indépendants. Le modèle théorique permet de déduire la célérité de propagation d'ondes pour une densité de microfissuration donnée. Lorsque les sollicitations extérieures évoluent, l'état de microfissuration également et les célérités de propagation d'ondes s'en trouvent modifiées. Ce modèle s'utilise en tant qu'outil de mesure de la fissuration. A partir des résultats expérimentaux donnant l'évolution de la propagations d'ondes ultrasonores suivant les trois directions de l'espace dans le matériau réel, ce modèle donne des informations quantitatives telles que :

- ★ La variation de la densité moyenne de microfissuration;
- ★ L'orientation moyenne des microfissures et l'écart type par rapport à cette valeur.

2.5.2.2) Modèles diphasiques :

Les deux phases de ce modèle représente, d'une part les grains les plus gros par l'intermédiaire d'inclusions généralement cylindriques (modèles plans) ou sphériques (Modèles tridimensionnels) et, d'autre part, du mortier par l'intermédiaire d'une matrice homogène et isotrope.

a) Modèle Lorrain - Calvet [21] :

Il s'agit d'un modèle plan, la matrice est considérée élastique fragile, l'inclusion circulaire disposée au centre est supposée rigide par rapport à la matrice. Un autre cas d'étude est celui où l'inclusion est un trou, ceci pour simuler la présence d'un défaut (Bulle d'air, pore...). La détermination théorique des champs de contrainte et de déformation, a été faite en utilisant la notion de la variable complexe en élasticité linéaire par la méthode de Muskhelishvili. Différents critères locaux dans ce modèle ont été utilisés (Annexe A) et la trace du domaine limite d'élasticité dans le plan $\sigma_3 = 0$ a été comparé à divers résultats expérimentaux [21]. Par ailleurs, une étude expérimentale sur un mortier et à pâte pure avec inclusion métallique adhérente ou non, ou trou libre, a permis notamment d'observer l'origine des premières fissures. L'ensemble des études montre que le critère local le plus convenable est le critère d'extension maximale de Saint - Venant (Figure 2.17).

b) Modèle de Lino [21] :

Ce modèle est bâti sur le même principe que le précédent. Il s'intéresse non seulement à l'état limite d'élasticité, mais également à l'évolution des microfissures au-delà de cette limite. Les principales hypothèses utilisées dans ce cas sont :

- ★ Le modèle est plan et infini, les inclusions circulaires de rayon « r » sont réparties uniformément suivant une maille carrée de côté « d » (le seul paramètre géométrique est r/d);

★ Le comportement de la matrice ($E = 3.10^4 \text{ MPa}; \nu = 0,25$) et l'inclusion ($E = 6.10^4 \text{ MPa}; \nu = 0,25$) est élastique - linéaire;

★ La liaison matrice inclusion est conditionnée, en cas de séparation, par le critère de traction maximale ($\sigma_3 = 2 \text{ MPa}$); et en cas de glissement, par le critère de Coulomb avec cohésion ($C = 2 \text{ MPa} ; \varphi = 33^\circ$).

Par ailleurs, pour prendre en compte la localisation préférentielle de la microfissuration initiale sous les agrégats, on libère la liaison matrice - inclusion à la base de celle-ci suivant un angle au centre de l'inclusion égale à 2α ($\alpha = \pi/8$).

Ce modèle permet, malgré quelques faiblesses, de retrouver qualitativement les différentes phases du comportement réel du matériau dans le cas de sollicitations planes, notamment la limite du domaine d'élasticité, et le début de la deuxième phase de microfissuration, au-delà de laquelle il y'a augmentation brutale des fissures dans le mortier. La Figure 2.18 donne les résultats dans le plan des contraintes extrêmes et on peut noter la dissymétrie des traces par rapport à la première bissectrice. Cette dissymétrie est due à la présence d'une microfissuration initiale sous les grains.

c) Modèle de MAZARS [21] :

Il s'agit d'une étude expérimentale dont le but est la mise en évidence de l'influence des différents paramètres sur l'énergie spécifique de rupture (obtenue par intégration de la courbe effort-déplacement) du modèle considéré. Les paramètres étudiés sont :

- ★ Pour le modèle à une inclusion, le diamètre D de celle-ci et le rapport E_0/E_1 des modules d'élasticités de l'inclusion et de la matrice;
- ★ Pour le modèle à deux inclusions, leur distance L ;
- ★ Pour le modèle constitué de mortier, la concentration en granulat C et leur dimension d .

En conclusion, Mazars [21] a constaté qu'accroître le pourcentage des grains les plus gros, accroît le nombre des microfissures, ce qui confirme la faiblesse des interfaces pâte - granulat.

Si l'on exclut les sollicitations qui provoquent une consolidation (compression triaxiale), le processus de rupture du béton est le résultat du développement d'une microfissuration dont l'observation permet de décrire les différentes phases de fissuration. Très schématiquement, on peut proposer la chronologie suivante :

- ★ Il existe avant tout chargement des microfissures ou micros vides, plus particulièrement localisés entre les grains les plus gros et le mortier;
- ★ Ces microfissures progressent les premières en suivant le contour des interfaces;
- ★ La charge s'élevant, les microfissures dans le mortier commencent à croître et à former « ponts » entre les microfissures de joints;
- ★ Le développement de la microfissuration se fait perpendiculairement aux directions d'extension ($\varepsilon > 0$) et conduit à la formation d'une ou plusieurs fissures traversantes qui amènent à la rupture. Le type de sollicitation influe sur la stabilité des phénomènes (en terme volumique).

Détermination d'états - limites : L'utilisation locale d'un critère en extension maximale ou d'un critère en contrainte maximale doublé d'un critère de frottement de Coulomb conduit à des traces d'états - limites en bon accord avec les études expérimentales.

Influence de la nature des inclusions : La résistance à la fissuration croit avec la rigidité relative des inclusions par rapport à la matrice.

Influence de la concentration : Il existe un seuil de concentration limite au-delà duquel les granulats n'ont pas d'influence. Au-delà de cette concentration limite, la résistance à la fissuration croit avec elle quand la rigidité des grains est supérieure à celle de la matrice.

Caractérisation de l'état de microfissuration : La densité et l'orientation moyenne des microfissures peuvent être quantifiées par le biais de mesures de la célérité des ondes ultrasonores à travers le matériau.

Il reste bien des études à réaliser avant de déboucher le calcul des structures, notamment :

- ✿ L'influence de la répartition aléatoire d'inclusions dans la matrice (une étude en ce sens est actuellement développée par Arnould [21]);
- ✿ L'influence de la forme des inclusions;
- ✿ Le passage aux problèmes tridimensionnels.

Il n'en demeure pas moins que les résultats déjà obtenus à partir de ces modèles, permettent de justifier certains mécanismes de rupture et de dégager les paramètres les plus influents.

2.6) La modélisation discrète des fissures :

Ce modèle traite la fissure comme une quantité géométrique. Dans cette modélisation discrète des fissures par la *MEF*, le chemin de la fissure est connu en avance. Ces fissures discrètes sont modélisées par déformation du maillage qui mette en ordre la propagation des fissures.

Dans le passé, le maillage était un travail difficile, surtout dans l'analyse, mais dès l'apparition de l'ordinateur, des techniques nouvelles ont été mises pour résoudre les problèmes en deux dimensions (2D). Une zone du comportement non élastique du matériau, nommée le processus de la zone de rupture (*FPZ*) existe au bout de la fissure discrète, dans laquelle les deux cotés de la fissure sont soumis à des tractions. Celles-ci sont généralement représentées par une loi non linéaire en fonction des déplacements relatifs entre les 2 cotés de la fissure.

2.6.1) Historique du modèle :

La modélisation discrète des fissures par éléments finis dans les poutres en béton a été traitée pour la première fois par Ngo et Scordelis [23], par introduction des fissures dans le maillage par *MEF*, par séparation des éléments le long de la trajectoire de la fissure, comme l'indique la *Figure 2.1*. Donc, ils n'ont pas essayé de modéliser la propagation de la fissure.

Cette modélisation conduit à plusieurs problèmes, commençant par le fait que les contraintes au bout de la fissure croissent sans limitation avec la réduction de la taille de l'élément, et ne convergent pas (les contraintes au bout de la fissure) vers la solution qui doit être obtenue. Des conclusions bien éclaircies conduisent à ce qu'une région amollie de déformation graduelle, avec une longueur significative au bout d'une fissure dans le béton, ne

modélise pas les fissures avec une surface qui libère des tractions. Il est notable que Ngo et Scordelis se sont trouvés devant des difficultés théoriques, telles que la connexion entre les éléments de renforcement avec ceux du béton nommé les éléments d'interfaces.

Nilson [24] est le premier à représenté la *MEF* pour la propagation des fissures discrètes dans les structures en béton.

Les problèmes associés à cette approche dans l'analyse de la propagation des fissures discrètes sont de trois sortes :

- ❖ Les fissures dans les structures en béton pour des modèles réduits typiques se développent graduellement plus que s'est prévus;
- ❖ La procédure force les fissures pour coïncider à la frontière des éléments prédéfinis;
- ❖ L'énergie dissipée lors de la propagation de la fissure est probablement plus grande que celle que possède la structure, résultant des évolutions prévues.

En 1970, des concepts sont introduits dans la modélisation par *LEFM* (linear elastic fracture mechanics). Un nombres large d'éléments finis triangulaire à contrainte constante est recommandé pour obtenir des facteurs d'intensité de contraintes exactes à partir des solutions utilisant la technique d'interpolation basée sur un champ de déplacement (environ 2000 *DDL* sont recommandés pour obtenir une exactitude de 5 % dans la solution donnant les facteurs d'intensité de contraintes). A ce moment, des *EF* singulier ne sont pas encore été développés (des éléments singulier modélisent exactement l'état de contrainte au bout de la fissure). Il y'a trois manières d'obtenir les facteurs d'intensité de contraintes dans la solution par *MEF* : interpolation du champ de déplacement; interpolation du champ de contrainte; et la méthode du taux d'énergie libérer (intégrale linéaire ou bien l'approche d'énergie potentielle dérivée).

En 1971 un élément fini triangulaire singulier au bout de la fissure était développé nommé l'élément de Tracey. Il nécessite des *DDL* beaucoup plus que ceux que demande l'analyse avec des éléments réguliers pour obtenir les facteurs d'intensité de contraintes exactes. Ensuite des éléments finis singuliers Hybride au bout de la fissure ont été développés (incluant les facteurs d'intensité de contraintes, et les composantes de déplacement comme des *DDL*).

Le changement des noeuds au milieu des cotés adjacents des éléments quadrilatères à 8 noeuds vers les noeuds des coins à 1/4 de la longueur des côtés des éléments, implique que le jacobien de transformation devient nul aux noeuds des coins de l'élément. Ceci conduisait à d'autres découvertes. Le changement attribué au champ de contrainte singulière modélise exactement le matériau élastique. L'élément quadratique standard avec des noeuds au milieu des côtés, se déplacent vers les points de quart, peut être utilisé comme un élément singulier à $r^{-1/2} = 1/\sqrt{r}$ pour la modélisation des contraintes au bout de la fissure en moyenne linéaire élastique.

La méthode d'extension virtuelle de la fissure pour le calcul des facteurs d'intensité de contraintes en *Mode I* était développée indépendamment [2]. Dans cette méthode, « *G* » est le taux ou bien le changement d'énergie potentielle par unité d'extension de la fissure, qui est calculée par la méthode des différences finies. Cette approche ne demande pas l'utilisation des éléments singuliers pour obtenir les facteurs d'intensité de contraintes en *Mode I* (*Mode d'ouverture de fissure*). Récemment, la décomposition du champ de déplacement en deux composantes symétrique et antisymétrique permet le calcul du taux de libération d'énergie et les facteurs d'intensité de contraintes en *Mode II* (*Mode de glissement plan*) et en *Mode III* (*Mode de glissement anti-plan*) [13].

En arrivant au calcul des facteurs d'intensité de contraintes utilisant la *MEF*, l'étape suivante est de modéliser la propagation linéaire élastique de la fissure utilisant les principes de la mécanique de rupture.

Cette approche facilite le processus de propagation des fissures discrètes à travers le traitement automatique de la trajectoire des fissures et le maillage semi-automatique qui permettrait la modélisation de la propagation des fissures discrètes.

Actuellement, les difficultés principales des techniques traitées pour la modélisation des fissures par *LEFM* sont en trois dimensions (*3D*).

Dans les applications en deux dimensions (*2D*), la propagation automatique et la marche des algorithmes ont été améliorées. Pour les applications en *3D*, les algorithmes du maillage automatique ont été suffisamment développés pour modéliser la propagation de la fissure générale ; et la programmation, a juste après, le pouvoir de résoudre exactement les problèmes de géométrie complexes causés par la propagation d'un nombre de fissure discrète.

Un autre développement de cette méthode est que *LEFM* ne s'applique pas à des éléments structuraux de dimension normale, parce que *FPZ* (*fracture process zone*) dans le béton est relativement plus grande en comparaison avec la dimension de cet élément. Ceci mettra le développement par introduction du modèle de fissure fictif (*FCM: fictitious crack model*) dans la modélisation par *EF* de la rupture discrète non linéaire, dans laquelle la fissure est considérée d'être une zone amollie de déformation modélisée par des forces nodales de cohésion ou bien par des éléments d'interfaces.

Le modèle de la distribution discrète des fissures dans le béton a été proposé dans l'analyse par *MEF* des structures en *B.A.* par Yao et Murray [37]. Dans cette approche, un critère simple de fissuration basé sur la résistance à la traction est utilisé pour séparer les noeuds et la propagation des fissures résulte de cette séparation existante sur les frontières de ces éléments. Différents critères, d'initiation de la fissure sont utilisés pour le fractionnement des noeuds qui se trouve à l'intérieur du matériau béton continu plus que ceux de l'interface Acier - Béton.

Des éléments de liaisons (de connexion) sont installés pour connecter les noeuds séparer sur les cotés de la fissure et la réponse du matériau amolli de traction représente proprement l'énergie de rupture.

La contrainte de traction associée à la largeur de la fissure sur ces deux faces est intégrée pour obtenir les forces nodales équivalentes, qui sont ensuite utilisées pour calculer la rigidité de ces éléments de liaisons.

Cette procédure peut être programmée par une analyse itérative. Le contrôle de largeur de la fissure et d'énergie de rupture a été proposé comme une solution en contrainte auxiliaire pour traiter la convergence des problèmes de fissuration. L'identification et le traitement des mécanismes sont proposés pour éviter des singularités dans le processus de résolution.

Une technique d'énumération très complète pour les noeuds de fractionnement permet à tous les modèles de fissure possible dans le maillage par *EF* d'être représenter par activation et désactivation d'un nombre de noeuds de fractionnement (Yao et Murray, [38]). Un nombres de tests de « force-traction » (traction-pull) a été adoptés en dehors, dans lequel une barre de renforcement entourée par un prisme concentré est influencée à ces deux extrémités avancées par une force de traction [39].

Ces tests sont pratiquement difficile à simuler parce que plusieurs fissures apparaissent et se sont distribuées partout dans l'élément. Cette approche est seulement applicable pour examiner « la distribution des force discrètes dans le béton » autour du renforcement, et pour la

simulation numérique des tests de force - traction. Les nervures sont explicitement incluses dans cette modélisation par *EF*. Les auteurs croient que « les micro mécanismes d'adhérence et de glissement » entre la barre déformée et le béton qui l'entoure peut être clarifiées par comparaison des résultats des tests et d'analyses par *MEF*.

2.6.2) Mécanique de rupture linéaire élastique (LEFM : linear elastic fracture mechanics) :

LEFM est une approche très importante pour la modélisation de la rupture des structures en béton, elle s'applique seulement à des fissures plus grandes (plusieurs mètres en longueur).

Pour les fissures qui sont petites, *LEFM* en plus, prévoit le chargement où la fissure peut se propager. On doit déterminer donc, la dimension de l'état du solide du processus de la zone de rupture (*FPZ* : *fracture process zone*) comparé à la plus petite dimension associée au bout de la fissure.

FPZ peut être définie comme la surface entourant le bout de la fissure à l'intérieur de laquelle apparaît un comportement non élastique du matériau. La dimension de *FPZ* croît si un chargement est appliqué à la fissure. Cette dernière se développe vers d'autres points où elle commence à se propager. Si la dimension de *FPZ* est petite en comparaison avec d'autres dimensions de la structure, les hypothèses de *LEFM* permettent de conclure que *FPZ* ne provoque aucun changement sur les caractéristiques de la fissure propagée. La dimension de l'état du solide à *FPZ* dépend seulement des propriétés du matériau béton.

Dans le béton, à l'opposé de l'acier, souvent il donne l'intention au phénomène de séparation à l'interface accompagnée de peu de dommage volumique. Les caractéristiques de l'état du solide à *FPZ* dépendent de la taille des agrégats, de sa forme, et de sa résistance, et des détails microstructurales des bétons particuliers. *FPZ* a été étudiée premièrement par Hillerborg [17]. Sa dimension dépend du modèle utilisé. Par exemple, pour l'analyse de Ingraffea et Gerstle [19], d'un béton normalement renforcé, *FPZ* se met en rang de longueur comprise entre 150 mm et 1m.

LD (*least dimension* = *petite dimension*) associée au bout de la fissure est bien définie grâce à la *Figure 2.19*. Cette petite dimension (*LD*) est utilisée pour calculer le rayon approximatif entourant le bout de la fissure à l'intérieur duquel un champ de contrainte singulier peut garantir une solution dominante. Elle est définie comme la distance du bout de la fissure à la discontinuité la plus proche qui cause une distribution locale du champ de contrainte.

Figure 2.19.a indique le cas où *LD* est contrôlée par la proximité du bout de la fissure à la surface libre;

Figure 2.19.b indique le cas où *LD* est la longueur même de la fissure;

Figure 2.19.c indique le cas où *LD* est contrôlée par le bout de la fissure et la barre de renforcement [si la barre de renforcement est considérée continue (plutôt que discrète), les constituants du matériau composé béton - renforcement ne peut se modéliser discrètement; les relations constitutive et *FPZ* doivent inclure l'effet de continuité de la barre de renforcement];

Figure 2.19.d indique le cas où *LD* est contrôlée par la dimension du ligament (ce qui

reste est la dimension non fissurée du membre);

Figure 2.19.e indique le cas où LD est contrôlée par l'entortillement de la fissure;

Figure 2.19.f indique le cas où LD est contrôlée par le rayon de courbure de la fissure.

L'hypothèse fondamentale de *LEFM* est que *FPZ* est négligeable (c'est-à-dire pas plus de 1 % de *LD* associé au bout de la fissure). C'est cette hypothèse qui permet la distribution des contraintes théoriques près du bout de la fissure dans les matériaux linéaire élastique, dans laquelle les contraintes varient avec $r^{-1/2}$, où « *r* » est la distance au bout de la fissure.

FPZ dans le béton peut être dans l'ordre de 1,3 (m) ou plus en longueur. Pour la majorité des structures en béton, *LD* est inférieure à plusieurs pieds (1 ft = 0,3 m). Par conséquent, la rupture dans ce type de structure doit être modélisée par la mécanique de rupture non linéaire.

Pour les structures en béton de grande importance, telles que les barrages, les digues utilisant des agrégats de grande dimensions, on remarque, dans le modèle réduit d'un mètre, que *LEFM* ne peut pas s'appliquer parce qu'elle correspond à une dimension très grande de *FPZ*.

2.6.2.1) Critères de rupture (*K*, *G*, le modèle de fissuration en Mode mixte) :

Les facteurs d'intensité de contraintes K_I , K_{II} , K_{III} sont définis par les magnitudes des champs de contraintes remarquable respectivement en *Mode I*, *II*, *III* de fissuration. Si *FPZ* n'est pas petite en comparaison avec *LD*, les champs de contraintes remarquables peuvent ne pas exister, et par conséquent, K_I , K_{II} , K_{III} ne sont pas définis au bout de la fissure. Ces facteurs d'intensité de contraintes ou bien le taux de libération d'énergie G_I , G_{II} , G_{III} peuvent être utilisés dans *LEFM* pour prédire les conditions d'équilibre de la fissure et les trajectoires de fissuration. Pour remédier à ça, plusieurs théories, incluent pour les problèmes quasi-statique, la théorie de contrainte circonférentielle maximale ; la théorie du taux de libération d'énergie maximale; et la théorie de la densité d'énergie de déformation minimale. Ces théories donnent pratiquement les mêmes trajectoires et chargement où l'extension de la fissure a lieu, donc le choix d'une telle théorie dépend principalement de la commodité d'exécution. Chacune de ces théories peut aussi être appliquée aux problèmes dynamiques de propagation de la fissure.

Comme dans le métal, la propagation des fissures de fatigue sous chargement cyclique dans le béton peut être modélisée utilisant un modèle de paris avec la conjonction des théories de propagation de la fissure en mode mixte. Il est rare que les structures en béton non renforcé : qui sont suffisamment grandes, méritent un traitement par *LEFM* et sont sujet à la charge de fatigue.

L'obtention des résultats exacts peut aussi se faire non seulement par la modélisation des contraintes singulières, mais aussi par le calcul du taux de libération d'énergie de rupture.

2.6.2.2) Méthode des éléments finis (MEF) pour la modélisation des Singularités

et les facteurs d'intensité de contraintes :

Des éléments finis singulier ont été créés tout en introduisant les facteurs d'intensité de contraintes explicitement comme des *DDL*. Cependant, il y'a aussi des éléments *Hybride*

spécialement proposés, mais qui ne sont pas inclus dans les codes d'éléments finis basés sur les déplacements des éléments de Tracey et les éléments iso paramétriques triangulaires quadratiques avec des points au quart (quarter point).

Malheureusement, Plusieurs codes d'éléments finis ne prévoient pas l'élément de Tracey, mais elles incluent des éléments triangulaires à six noeuds qui peuvent être utilisés comme des éléments singuliers au bout de la fissure avec un point au quart.

Après le développement de la *MEF*, les facteurs d'intensité de contraintes peuvent s'extraire de plusieurs approches. Les méthodes les plus exactes sont les approches énergétique: l'intégrale de J ; l'extension de la fissure virtuelle; et les méthodes des dérivées de rigidité. Ces approches ne sont pas facilement applicables aux cas de propagation de fissure en mode mixte, mais elles s'appliquent rarement aux problèmes tridimensionnels.

On peut appliquer simplement les techniques d'interpolation des déplacements (la mécanique de rupture en mode mixte), parce que ces techniques prélèvent des déplacements locaux en différents points, et s'interpolent ensuite avec un champ de déplacement théorique associé au bout de la fissure. Ils ne sont généralement pas exacts comme les approches énergétique, qui utilisent l'intégration.

L'interpolation des déplacements est généralement utilisée lorsqu'on utilise des éléments singuliers, tandis que, les approches énergétiques sont utilisées pour la détermination du taux de libération d'énergie de fissuration qui peut ou ne pas être discrétisé à l'aide des éléments singuliers. L'interpolation des déplacements et les contraintes assume que la solution donnée par les éléments finis au bout de la fissure est de la même forme que celle donnée par *LEFM*.

Bien que, trois équations seulement sont nécessaires pour obtenir les facteurs d'intensité de contraintes, plusieurs plans sont possible pour cette interpolation. Ceci inclut des réponses nodales assorties seulement sur les surfaces de la fissure et le petit carré approprié à toutes les réponses nodales associées aux éléments singuliers.

La méthode d'interpolation du champ de déplacement est plus exacte que celle du champ de contrainte parce que celle des déplacements convergent plus rapide que celle des contraintes utilisées dans la *MEF*.

2.6.3) La modélisation des fissures fictifs (FCM : fictitious crack model) :

Utilisant la prolongation en mode mixte du modèle de la fissure fictive de Hillerborg [17], une approche pratique par *MEF* d'interface est utilisée pour la modélisation de la propagation des fissures discrètes. Une fissure imaginaire se propage perpendiculairement à la contrainte principale maximale de traction à son bout lorsque la résistance à la traction est atteinte. Des éléments d'interface ont été utilisés avant la modélisation de telle fissure. La technologie du logiciel qui est en cours de développement, met des preuves de possibilités de modélisation de la propagation des fissures non linéaires.

Le concept du processus de la zone de rupture est élargi au processus de la zone d'interface, incluant le comportement non linéaire de *FPZ* comme une bonne face de fissure de conjonction, derrière *FPZ*.

Les développements mettent en évidence des méthodes efficaces qui préserve une exactitude dans le modèle de fissure imaginaire. Cette fissure est représentée par des éléments d'interfaces avec une variation linéaire des déplacements [32].

Bazant et Al [3] ont trouvés que *LEFM* n'est pas applicable aux structures en béton de volume normal et ayant des propriétés souvent différentes.

FPZ varie de quelque centaine de millimètre à 1 mètre de longueur. Elle dépend largement de comment *FPZ* est définie et des propriétés des bétons particulier à considérer [17], [19]. La largeur de *FPZ* est très petite en comparaison avec sa longueur.

Bien que *LEFM* n'est pas applicable à des structures petites. Elle peut encore s'appliquer à des grandes structures telles que les barrages.

Cependant, pour les structures grandes, lorsqu'on est en présence du mode mixte de fissuration, *FPZ* peut aller jusqu'à plusieurs mètres. Ceci est du à des forces normales de cisaillement et de compression (ou de traction), causées par le frottement (friction); interférence (conjonction); et la dilatation (expansion, développement entre les deux cotés de la fissure. Pour clarifier cette notion, Gerstle et Xie [33] ont utilisés « *IPZ processus de la zone d'interface* (*IPZ : interface process zone*) » pour modéliser *FPZ*.

FCM est devenue plus populaire pour la modélisation des structures en béton.

La Figure 2.20.a,b indique la terminologie et les concepts associés à *FCM*. *FPZ* est caractérisée par « la courbe contrainte normale / le déplacement d'ouverture de fissure *COD* ». La Figure 2.20.b est considérée comme une propriété essentielle du matériau fissuré.

FCM assume aussi que *FPZ* s'effondre en ligne pour le cas en 2D ou en surface pour le cas en 3D. On peut aussi employer des éléments d'interface dans l'analyse par *MEF*. Le premier élément d'interface a été présenté par Goodman et Al [16], ensuite, utilisé pour la modélisation des joints rocheux. Après ça, plusieurs types d'éléments d'interface et d'éléments de faible épaisseur ont été développés et sont généralement utilisés dans l'ingénierie géotechnique. Des éléments d'épaisseurs nulles sont généralement utilisés comme interface typique, avec comme variables constitutives à travers l'interface : les contraintes normales, de cisaillement et les déplacements relatifs.

FCM a été incorporée dans les codes d'*EF* utilisant des éléments d'interface. Ingraffea et Al [19] étendraient *FCM* pour simuler l'analyse de propagation de fissure en mode mixte utilisant des éléments d'interfaces à 6 noeuds [1].

Gerstle et Xie [33] utilisaient un élément d'interface à 4 noeuds avec déplacement linéaire qui est plutôt modifié pour attribuer une distribution arbitraire des tractions le long de la fissure. Dans *FCM*, la rigidité des éléments d'interfaces est une fonction non linéaire des déplacements d'ouverture de la fissure (*COD: crack opening displacement*), donc une solution non linéaire est recommandée. Les calculs menés par *MEF* avec des éléments d'interfaces se conduisent conformément à *FCM* qui recommande une stratégie de solution non linéaire. Des techniques variées telles que l'itération classique de Newton, la relaxation dynamique, et la longueur d'arc ont été utilisées avec des résultats satisfaisants donnés par la littérature [19].

Lorsqu'on utilise des éléments d'interfaces pour la modélisation de *FPZ*, ces dernières doivent être si rigide avant l'initiation de la fissure qui représentent le matériau non fissuré (tenir les deux cotés de la fissure potentielle en même temps). Cependant, une attention ne doit pas prendre en considération une rigidité très élevée par ce qu'elle cause la non convergence numérique de la solution donnée par *MEF*.

D'autres chercheurs ont utilisait par succès des éléments d'interfaces avec une rigidité axiale égale à 50 fois la rigidité des éléments de béton adjacents sans difficultés numériques.

Plusieurs investigateurs, ont distribués avec des éléments d'interfaces, la simulation de *FPZ* utilisant l'approche des fonctions d'influence dans laquelle les forces de cohésion sont appliquées aux faces des fissures.

De multiples pondérations sont utilisées dans la superposition des solutions données par *MEF* pour satisfaire l'équilibre général, la compatibilité et les relations contraintes - largeur de la fissure à l'intérieur de *FPZ*. Dans certains cas, il est approprié de linéariser la relation entre *COD* (*crack opening displacement*) et les tractions sur *FPZ*, donc les équations linéaires peuvent être résolues pour obtenir une solution efficace [2].

Extension de *FCM* utilisant des éléments d'interfaces au mode mixte de fissuration exige une relation constitutive à l'interface, dans laquelle les contraintes de cisaillements et normales, et les déplacements relatives sont complètement couplées. Les conditions d'ouverture et de fermeture de la fissure sont exprimées en fonction de la surface de défaillance bi axiale dans l'espace des contraintes normales et de cisaillements. Les déplacements à la surface fissuré, ainsi, ont deux composantes : ouverture et glissement (*COD* et *CSD* (*crack sliding displacement*)). Plusieurs approches ont été proposées récemment sur ce sujet, basées toutes sur le même principe d'associer le travail de plasticité, pour obtenir une formulation parfaitement compatible (cohérente, logique) et des paramètres d'énergie de rupture. Après, que la fissure soit complètement ouverte, ce modèle empêche l'interpénétration et il prévoit un type de frottement de Coulomb entre les surfaces de la fissure.

2.6.4) Algorithme du maillage automatique :

En 1981, un travail était complété dans le code de propagation des fissures en *2D* utilisant un calcul graphique à interaction simple pour la propagation de la fissure par Saoumaa [29].

Ce travail inclut le maillage semi-automatique qui permet l'avancement de la fissure mais le processus est limité par la prise en considération des contraintes, le maillage déformé, les facteurs d'intensité de contraintes et les prédictions basées sur les théories de propagation de la fissure en mode mixte.

Par la suite [3], des chercheurs ont développés une seconde génération d'éléments finis en *2D* à interaction graphique simulant la rupture, basé sur les données typologique de la structure sur ces frontières. Gerstle et Xie [33], avec la collaboration d'autres chercheurs, développaient des éléments finis à interaction graphique capable de représenter et propager automatiquement les fissures dans les problèmes en *2D*.

Un nombre d'algorithme a été introduit pour le maillage automatique du modèle solide [1]. Ces algorithmes sont classés en trois grandes catégories : l'extraction d'éléments; la triangulation du domaine et la décomposition spatiale répétitif. Bien que, ça existe des différences importantes entre ces 3 familles; chaque algorithme entraîne le développement d'une représentation géométrique de la structure, qui fournit les bases de construction du maillage par éléments finis.

Il est à noter que, ce maillage n'est pas recommandé si :

- ❖ Le chemin de la fissure est connu en avance du à la symétrie, à des expériences précédentes ou à des expériences analytiques des structures de même géométrie; ou
- ❖ Des éléments d'interfaces sont placés le long de tous les chemins possibles de la fissure.

2.7) La modélisation continue des fissures (smeared crack models) :

Au début de l'application d'analyse par éléments finis dans les structures en béton (Rashid [26]), il est devenu très clair qu'il est commode de représenter la fissure par le changement des propriétés constitutive des éléments finis que de changer la topographie du réseau en *EF*. Les premières procédures entraînent une réduction de la rigidité du matériau béton qui tend vers zéro dans la direction de contrainte principale de traction, une fois que les contraintes calculées dépassent la résistance à la traction du béton. Simultanément, les contraintes dans le béton qui sont libérées sont ré appliquée à la structure comme charge résiduelle. Ce modèle fait preuve d'un système de distribution de fissure continue.

La modélisation continue des fissures devrait être capable de représenter la propagation d'une seule fissure. Durant des années, un nombre de problèmes numériques et pratiques a été traités avec l'application du modèle continu de fissuration. Les principales entre eux, entraînent le phénomène « des déformations localisées ». Lorsque les microfissures se forment, elles tendent souvent à croître non uniformément dans un cadre étroit (strict) (nommé « fissures »).

Sous ces conditions, les déformations sont concentrées à un cadre étroit, tandis que le reste de la structure est soumis à de plus petite déformation ; parce que le cadre de déformation localisée est si étroit que la mécanique continu conventionnelle ne s'applique plus. Plusieurs « limitateurs de localisation » ont été développés.

2.7.1) Historique du modèle :

Cette approche, introduit par Rashid [26], est devenue l'approche la plus généralement utiliser en pratique pour les trois raisons suivantes :

- ☆ La procédure est commodément (facilement) programmable (automatisable);
- ☆ La distribution des dommages en général et la distribution dense des fissures parallèle en particulier sont souvent observées dans les structures (les mesures du son entre l'emplacement des sources d'émission et de réception indiquent une zone de distribution des dommages dans le front de la rupture);
- ☆ Dans beaucoup de modèles réduits, la fissure dans le béton n'est pas droite mais hautement torturées, de telle fissure doit être adéquatement représentée par la bande de fissure continue.

Il y'a cependant, des problèmes sérieux à la modélisation continue classique des fissures. Ils sont principalement non objective, à ce moment on peut montrer un faux maillage [2], car les résultats dépendaient du choix de la taille du maillage (la taille de l'élément) utilisé dans l'analyse. Par exemple, dans les panneaux rectangulaires en béton, avec un maillage utilisant des éléments finis rectangulaire, les fissures se localisent dans un élément de bande large. Cette dernière devient étroite et augmente en longueur plus que le maillage est raffiné, comme l'indique la *Figure 2.21* [1].

L'énergie apparente consommée (ou dissipée) durant la fissuration dépend de la taille du maillage et tend vers zéro lorsque la taille du maillage tend vers zéro.

Un tel comportement est rencontré non seulement dans la fissure avec un abaissement soudain des contraintes, mais aussi pour une formation graduelle de la fissure avec une pente finie du diagramme contrainte - déformation après le pic de déformation à la traction, est

indépendant de la taille de l'élément [3]. Ces problèmes rendent l'approche continue classique de fissure inacceptable, bien que dans certaines structures de telle faute d'objectivité puisse être quand même négligeable [ce dernier comportement apparaît spécialement lorsque la défaillance est contrôlée par le rendement du renforcement plutôt que la fissuration du béton]. Pour éviter la non objectivité ou la sensibilité d'un maillage, un moyen mathématique nommé « limiteur de localisation » doit être introduit.

2.7.2) Types de limiteurs de localisation :

Il existe différents types parmi eux on site :

2.7.2.1) Modèle de la bande de fissure :

Un simple limiteur de localisation obtient la relation entre la taille de l'élément et le modèle constitutif, donc l'énergie totale dissipée aille bien avec le matériau qui va se fissurer. Ceci peut être dû par ajustement de la pente vers le bas de la courbe contrainte - déformation, équivalent à la valeur de ε_{\max} indiquée dans la *Figure 2.21* comme un élément de taille modifié. Cette procédure, connue sous le nom du modèle de la bande fissurée, a une limitation pour le maillage grossé (des éléments larges), ε ne peut pas se réduire au dessous de sa valeur ε_{\max} correspondant au pic des contraintes σ_{\max} (ε_{\max} augmente avec la réduction de la taille de l'élément).

Plusieurs modèles constitutifs basés sur les théories de plasticité et de dommage ne montrent pas la relation contrainte - déformation présentée dans la *Figure 2.21*. Ce modèle peut toujours être applicable si l'énergie de rupture locale est inclue dans les paramètres de modélisation [1].

Pratiquement, le futur le plus important du modèle de la bande fissurée est qu'on peut représenter l'effet de la taille de la structure sur :

- ☆ La capacité maximale de la structure (Bazant [5]) et;
- ☆ La pente du diagramme contrainte - déformation après le pic.

Du point de vue physique, la largeur de la zone fissurée lors d'une rupture continue (ex : *FPZ*) est représentée par un seul élément de bande très étendue qui ne peut pas se subdiviser. Par conséquent, des variations possibles dans le processus de dimensionnement de cette zone, cause une variation effective d'énergie de rupture, peut ne pas se capturer et l'état de contrainte et de déformation à travers *FPZ* peut ne pas se résoudre. La procédure a été donc appliquée largement et par succès.

2.7.2.2) La continuité non locale :

a) Approche phénoménologique :

Un limiteur de localisation général est fourni par le concept de continuité non locale et la moyenne spatiale (Bazant [3]).

La continuité non locale est la continuité dans laquelle quelques variables du champ sont soumis à une moyenne spatiale au voisinage de ce point.

Par exemple, la déformation moyenne (non locale) est définie comme suit :

$$\tilde{\varepsilon}(x) = \frac{1}{V_r(x)} \int_V \alpha(x-s) \cdot \varepsilon(s) \cdot dV(s) = \int_V \alpha'(x,s) \varepsilon(s) \cdot dV(s) \quad (2.1)$$

$$\text{Où : } V_r(x) = \int_V \alpha(x-s) \cdot dV(s) \quad (2.2)$$

$$\text{et : } \alpha'(x,s) = \frac{\alpha(x-s)}{V_r(x)} \quad (2.3)$$

$\varepsilon(x)$: est la déformation à un point dans l'espace définie par le vecteur de coordonnée x;

V : le volume de la structure;

V_r : le volume représentant le matériau (*Figure 2.22*) c'est le plus petit volume pour lequel l'hétérogénéité du matériau peut être traitée comme continue (V_r est déterminé par sa longueur caractéristique « L », considérée comme propriété du matériau);

α : est fonction du poids, qui se décompose en fonction de la distance du point x et tend vers zéro aux points suffisamment éloignés de x.

La variable interne « s » représente le vecteur de coordonnée spatiale dans l'intégral.

Pour la forme la plus simple de la fonction du poids, on peut considérer $\alpha = 1$ pour un certain volume représentatif V_0 centré autour du point x, et $\alpha = 0$ à l'extérieur de ce volume. La convergence de la solution numérique, est mieux si « α » est une fonction sous forme d'une cloche, telle que par exemple :

$$\begin{cases} \alpha = \left[1 - \left(\frac{r}{\rho_0 \cdot L} \right)^2 \right]^2 & \text{si } |r| < \rho_0 \cdot L \\ \alpha = 0 & \text{si } |r| > \rho_0 \cdot L \end{cases} \quad (2.4)$$

Où : $r = |x - s|$ distance du point x;

L : longueur caractéristique (propriété du matériau), et;

ρ_0 : coefficient choisi de telle sorte que le volume donné par l'équation précédente de α est égale au volume donné par la fonction de $\alpha = 1$ pour $r < L/2$ et $\alpha = 0$ pour $r > L/2$ (qui représente un segment en ligne droite en une dimension (1D), un cercle en 2D, et une sphère en 3D).

Pour les points où la distance à toutes les frontières est plus grande que $\rho_0 \cdot L$, $V_r(x)$ est constant; autrement dit, le volume moyen dépasse l'extérieur du corps et doit être calculé pour chaque domaine moyen local unique (*Figure 2.22.b*). Dans la programmation par EF, l'intégral moyen spatial est remplacé par une somme finie sur les points d'intégration de tous les EF de la structure.

Cette approche rend possible le raffinement du maillage recommandé par les considérations structurales. Le volume représentatif à travers lequel la moyenne spatiale prenne place est traité comme une propriété du matériau. La convergence vers une solution continue exacte devient significative et la distribution des contraintes et des déformations à travers FPZ peut être résolues.

Le modèle de continuité traité par Bazant [3] entraîne une déformation moyenne non locale $\tilde{\epsilon}$ comme variable cinématique fondamentale.

La programmation de ce modèle est très compliquée, due à la forme non standard des équations différentielles, des conditions d'équilibres et de frontières (ex : les considérations d'énergie entraînent une déformation non locale $\tilde{\epsilon}$).

Ces problèmes conduisent à l'idée d'une continuité non locale partielle dans laquelle les contraintes sont basées sur les déformations non locale qui sont retenues. Chaque modèle non local, dit « continuité non locale avec déformation locale » (Bazant [6]) est facilement applicable dans la programmation par *EF*.

Dans cette formulation, la relation constitutive usuelle de déformation est simplement modifiée dont toutes les variables d'états qui caractérisent cette déformation sont calculées dans le cas non local plutôt que les déformations locales.

Pratiquement parlons, le future le plus important du modèlc non local par *EF* est qu'on peut correctement représenter l'effet de la taille de la structure sur sa capacité ultime, surtout sur la pente du diagramme charge - déflexion après le pic de déformation à la traction.

b) Approche micromécanique :

Un autre modèle non local pour les solides avec interaction de microfissures, dans laquelle la non localité est introduite dans les bases d'interactions, appliqué ensuite dans l'analyse de l'effet de la taille et de la localisation des dommages dus à la fissuration [7]. Ce modèle représente le système d'interaction de la fissure utilisant des équations à intégrale, qui diffère du modèle non local phénoménologique. Il fournit un intégral spatial qui représente l'interaction des microfissures basées sur la mécanique de rupture. A long terme, l'intégrale de la fonction du poids se décompose avec des carrées ou des cubes de la distance respectivement en 2D ou 3D. Ce modèle, combiné avec le modèle micro plan, fournit des résultats logiques dans l'analyse par *MEF* de la rupture comparés à des tests expérimentaux sur des spécimens [7], [38].

2.7.2.3) Modèle gradient :

Un autre modèle général introduit le limiteur de localisation est d'utiliser la relation constitutive, dans laquelle la contrainte est fonction non seulement de la déformation mais aussi de la première ou la seconde dérivée spatiale de cette déformation (les dérivées d'ordre « n » de la déformation). Cette idée est d'origine de la théorie d'élasticité. Une forme spéciale de cette idée, dite « continuité de Cosserat » est caractérisée par la présence du couple de contrainte, introduite par Cosserat [12] comme une approximation continue du comportement d'un treillis cristallin du modèle réduit. Une généralisation de ce modèle entraîne la rotation des points du matériau, c'est la continuité micropolaire. Bazant et Al [7] ont remarqués que le gradient spatial des déformations ou bien des variables de déformations apparent peut servir comme des limiteurs de localisation.

Il a été démontré par Bazant [4] que le développement de l'intégral moyen donné par l'équation 2.1 en série de Taylor, produit généralement une relation constitutive dans laquelle les contraintes dépendent de la dérivées seconde spatiale de déformation \star si le domaine moyen est symétrique et ne dépasse pas l'extérieur, et \star si ce domaine est antisymétrique et dépasse l'extérieur du corps aux points les plus proches des frontières (Figure 2.22.b). Donc,

l'utilisation du gradient spatial, peut être considéré comme une approximation continue non locale, ou comme un cas spécial.

Dans les recherches sur le matériau béton, l'idée du gradient spatial apparaît par le travail de Bazant et Al [7], qui découvraient les différences entre les observations sur un petit spécimen et un grand spécimen. Le retraitement de la fissure dépend non seulement de la diminution des contraintes mais aussi de leurs gradient spatial (Bazant [6]). C'est probablement la première apparition du concept non local de la rupture. Le gradient de la contrainte (ou de la déformation) influe sur la réponse du matériau.

L'intégral moyen non local est seulement significatif si les EF ne sont pas plus grand que $1/3$ du volume représentatif V_r [7]. Cette approche offre aussi la possibilité d'utiliser la MEF avec des volumes plus grand que le volume représentatif V_r et d'utiliser un nombre très petit d' EF dans l'analyse.

Cependant, la programmation devient de plus en plus compliquée et de moins d'application de l'intégral moyen spatial. Le problème est que la continuité inter élément doit être appliquée non seulement pour les déplacements, mais aussi pour les déformations.

Ceci exige l'utilisation des EF d'ordre plus élevé. Si les éléments du premier ordre sont préférés, on utilise un champ de déformation indépendant avec séparation des EF d'ordre un (du premier ordre).

2.8) Applications de la méthode des éléments finis (MEF) et la mécanique de rupture dans les structures en béton et béton armé :

Un nombre d'analyse représentative est utilisé pour la modélisation en EF des structures en béton et en *B.A.*, pour traiter le comportement à la rupture de ces structures ; où, c'est possible de comparer les problèmes résolus par l'approche discrète des fissures à ceux résolus par l'approche continue de fissure.

Le terme « effet de taille (size effect) » prend une signification spéciale pour les matériaux quasi-fragile (presque cassant), tels que le béton et la roche.

Pour le béton, il n'est pas clair si les paramètres de rupture qui gouvernent la défaillance, sont d'une propriété du matériau, ou bien dépendent de la taille (volume) de la structure. Ce dernier point ne donne pas une signification générale du terme « effet de taille ». En opposition, dans le champ de rupture des métaux, le terme « effet de taille » est applicable seulement aux paramètres de la rupture.

Les structures en béton non renforcé sont exposées à des ruptures sensibles, tandis que le renforcement en acier dans la pratique introduit une résistance à la traction, où plusieurs des structures (ou des parties de la structure), pour des raisons ou d'autres, sont non renforcés. Il est logique d'étudier l'analyse des structures en béton ordinaire, parce qu'elles fournissent des tests sévères du comportement à la rupture, et parce que les résultats de ces analyses peuvent ajouter un aperçu sur d'autres comportement complexe évidents des structures en *B.A.* tels que : *rupture par traction, rupture par compression, rupture par cisaillement dans les poutres et rupture par arrachement.*

L'Analyse de la mécanique de rupture des structures en *B.A.* est beaucoup plus difficile que celle des structures en béton ordinaire.

Le renforcement en acier peut être modélisé discrètement (utiliser des éléments de bandages) ou d'une manière continue, introduisant l'acier dans le modèle constitutif utilisé pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire (de chaque élément). Dans les deux cas, il est difficile de modéliser correctement l'effet d'adhérence et de glissement entre l'acier et le béton, bien que cette modélisation n'apparaisse pas d'être critique aux solutions d'autres problèmes.

Souvent, mais pas certainement, l'addition du renforcement en acier aux structures rend la rupture insensible. Parfois les structures se fissurent par fracturation selon un chemin non attendu. C'est la raison du développement de la *MEF* qui est capable de prédire le comportement en mode de fissuration. Le terme « la rigidité à la traction » est utilisé pour définir quelques modèles. Ce terme est adressé au chemin numérique utiliser pour limiter le taux dans lequel les contraintes à travers la fissure continue tend vers zéro une fois que la fissure se forme. La rigidité à la traction représente le comportement physique de la fissure traversé par l'acier et sert à la stabilisation de la solution numérique. Ce modèle inclut la rigidité à la traction, ne prend pas dans le calcul le fait que la méthode inhérente représente l'énergie de rupture. Par conséquent, l'application de la rigidité à la traction ne fournit pas une représentation exacte de la mécanique de rupture et sert principalement à réduire le taux (%) où les contraintes résiduelles sont réimposées à la structure (ou à un membre de la structure) qui va se fissurer tels que : *Les membranes en B.A* ; *les Poutres et ossature (charpente)*; *Les plaques et les coques*.

A la fin, presque toutes les analyses ratent l'inclusion d'étude convergente pour déterminer l'effet du maillage raffiné sur les solutions. Analyse par la *MEF* discrète et continue des fissures résout avec succès le problème sensible à la rupture. Cependant, la plupart des problèmes résolus à ce jour ont été presque insignifiants dans leurs géométries simplifiées. Le défi maintenant, est d'appliquer une exacte mécanique de rupture principale dans l'analyse efficace des structures, telles que les solides en *B.A.*, comme l'ossature en charpente, les plaques et les coques. Il n'est pas apparent que l'approche discrète est « meilleure » que l'approche continue et vice versa. Il est intéressant de coupler ces deux approches pour une meilleure modélisation du comportement du béton soumis à une compression multiaxiale de petit spécimen en *LEFM* dans les structures larges (grandes) [1].

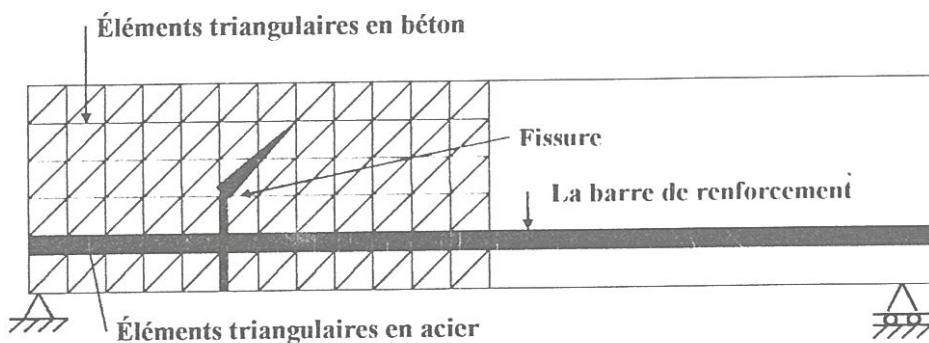


Fig.2.1 Le premier modèle en élément fini d'une poutre en B.A. [1].

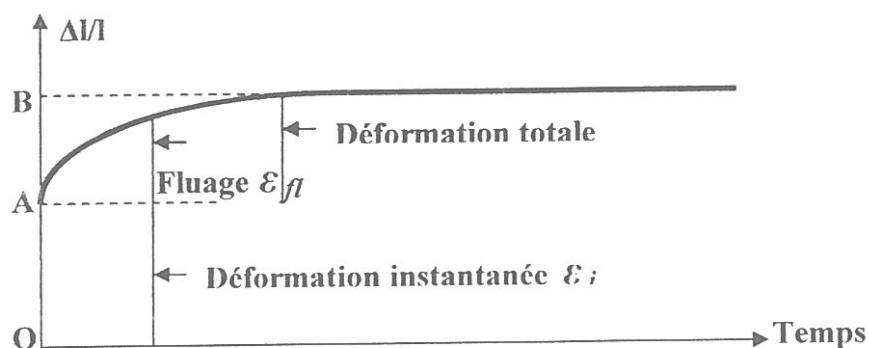


Fig.2.2 Diagramme de fluage (chargement constant dans le temps) [15].

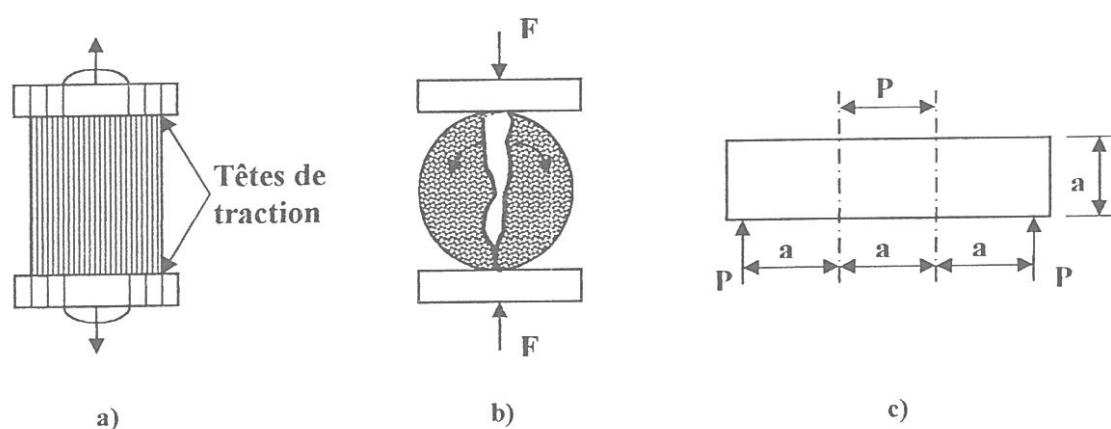
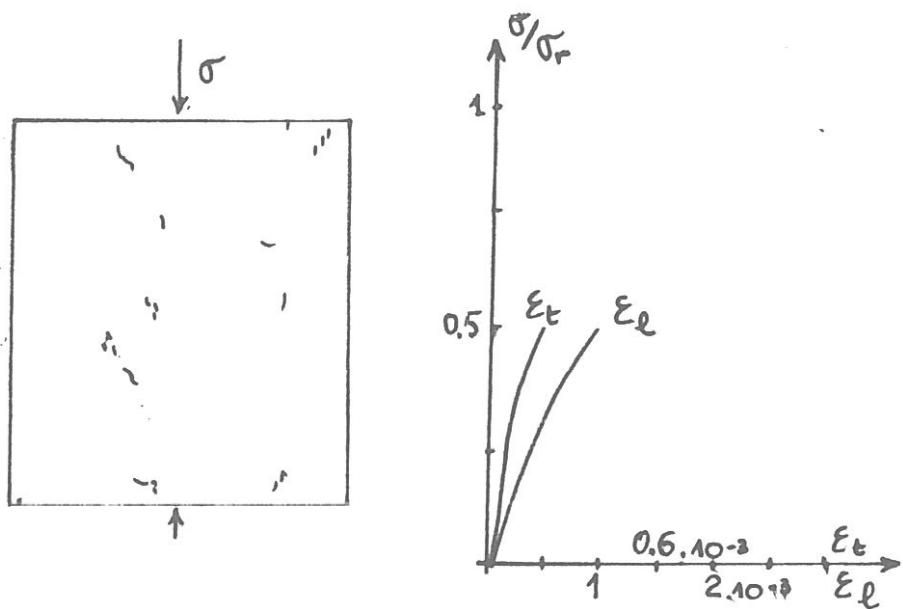
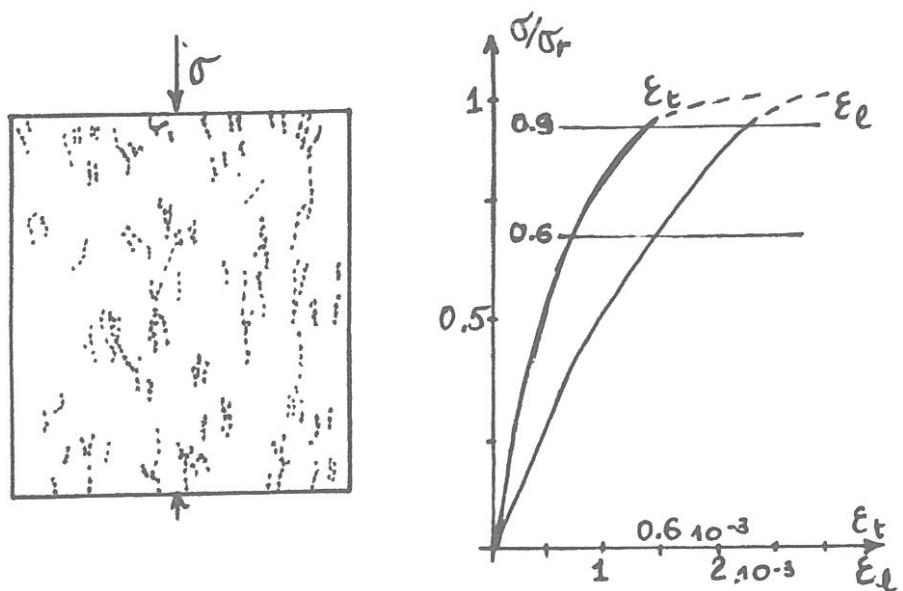


Fig.2.3 Essais de traction [15] & [25] :

- .a) Directe;
- .b) Par fendage;
- .c) Par flexion.



a) — avant chargement σ/σ_r entre 0 et 0,5



b) — $\sigma/\sigma_r = 0,6$ σ/σ_r entre 0,6 et 0,9

Fig.2.4 Résultats de l'observation par rayon X sur une Éprouvette en compression (d'après Robinson) [21].

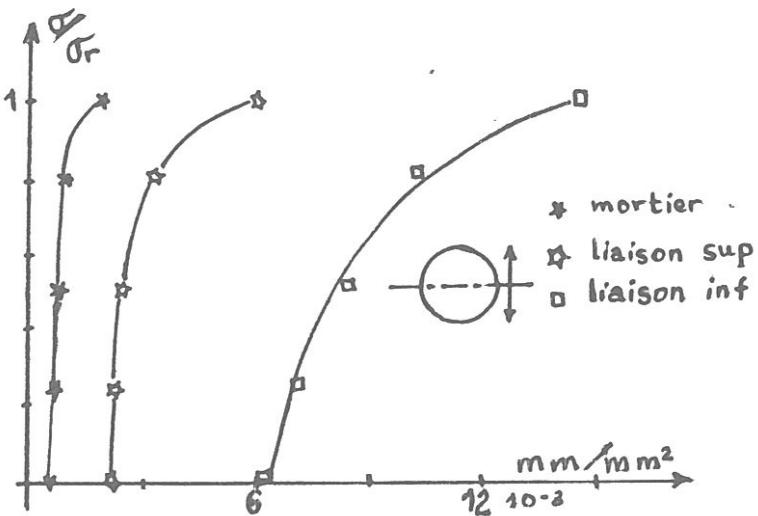


Fig.2.5 Evolution de la microfissuration dans un essai de compression
Obtenu par observation microscopique (d'après Dhir et Sangha) [21].

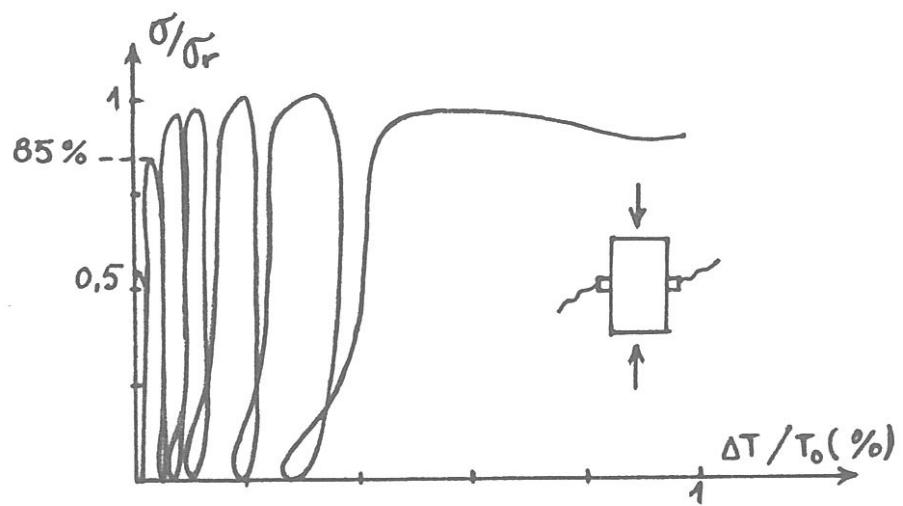


Fig.2.6 Variation du temps de propagation d'ondes ultra sonores au travers d'un Cylindre de béton chargé en compression uni axiale (d'après Benouniche) [21].

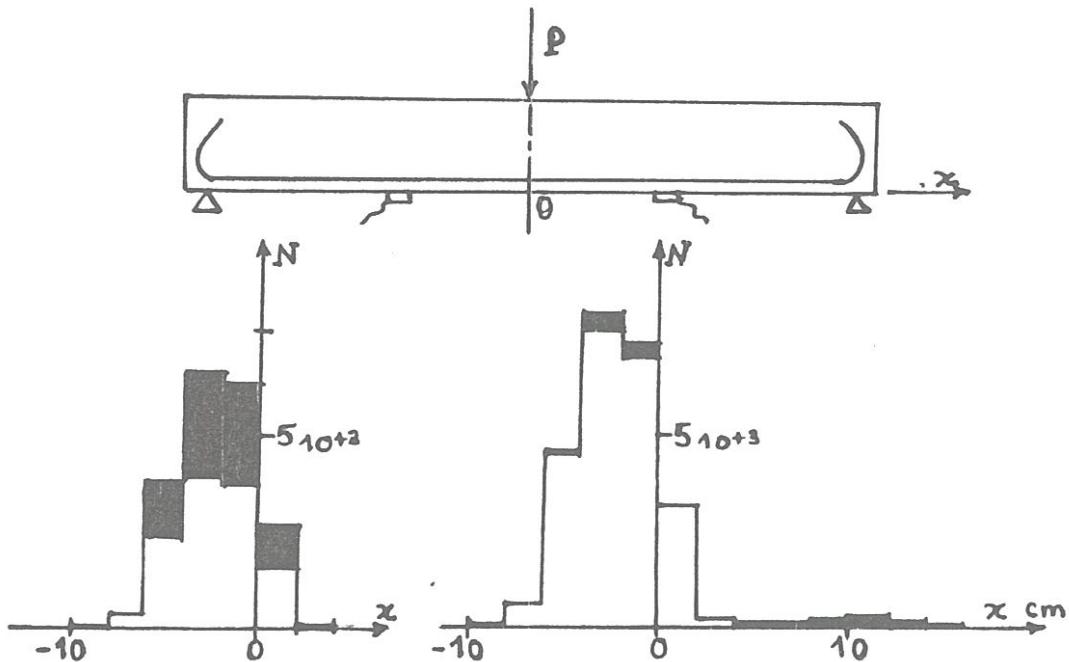


Fig.2.7 Localisation et cumul des événements acoustiques
Sur une poutre en béton armé fléchie (Mazars-Walter) [21].

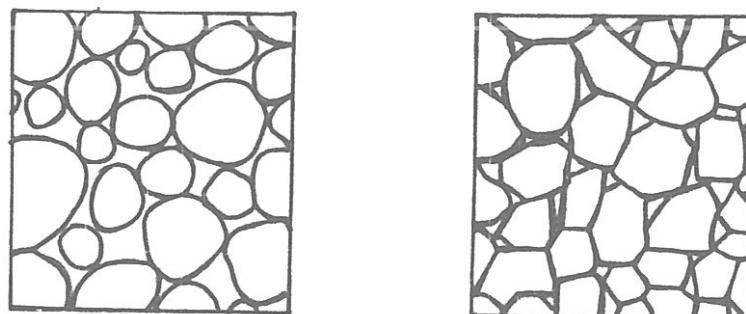


Fig.2.8 Les deux modèles extrêmes de matériaux granulaires [13].

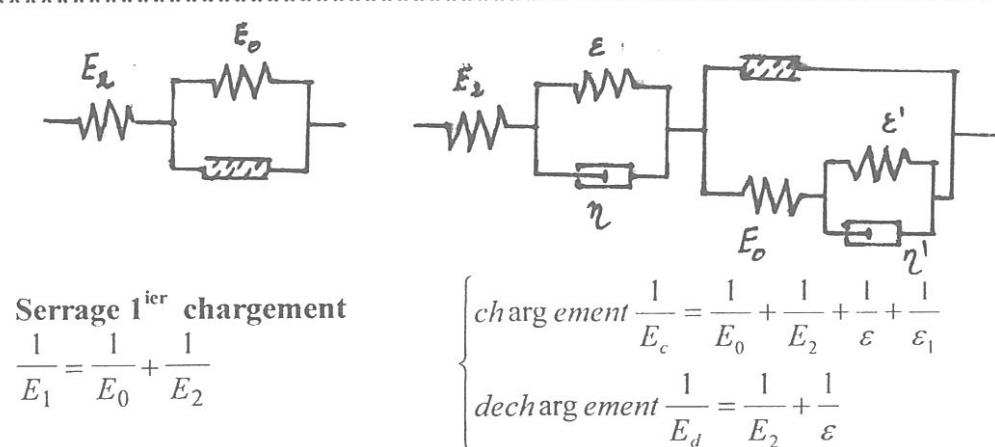
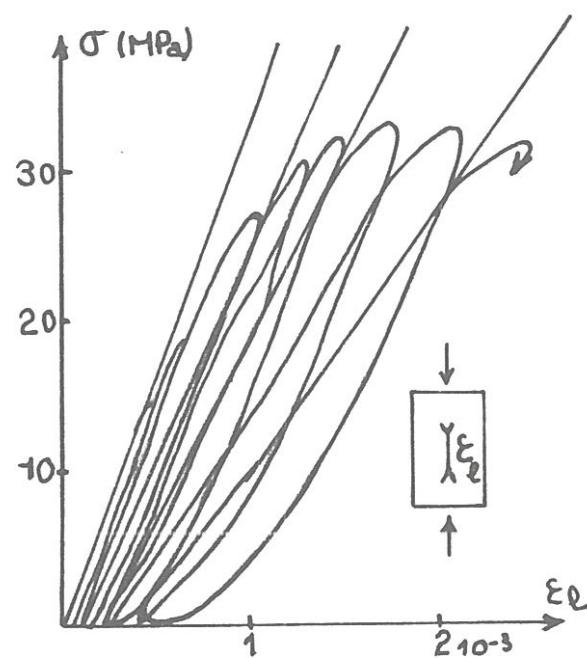
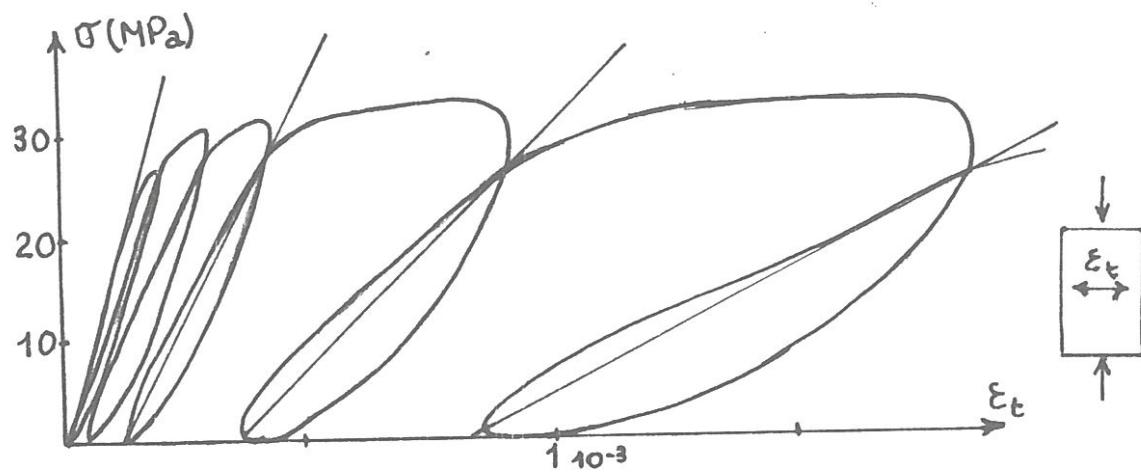


Fig.2.9 Ecarts au comportement élastique - linéaire [13].



a)



b)

Fig.2.10 Evolution des caractéristiques mécaniques dans un essai

De compression (d'après Benouniche) [21] :

- .a) Contrainte - déformation longitudinale;
- .b) Contrainte - déformation transversale.

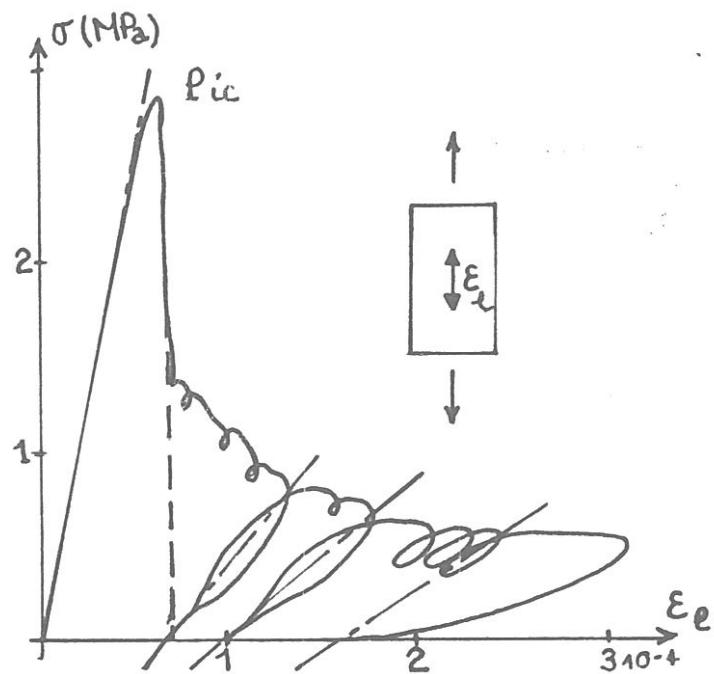


Fig.2.11 Courbe Contrainte - déformation en traction uni axiale (d'après Terrien) [21].

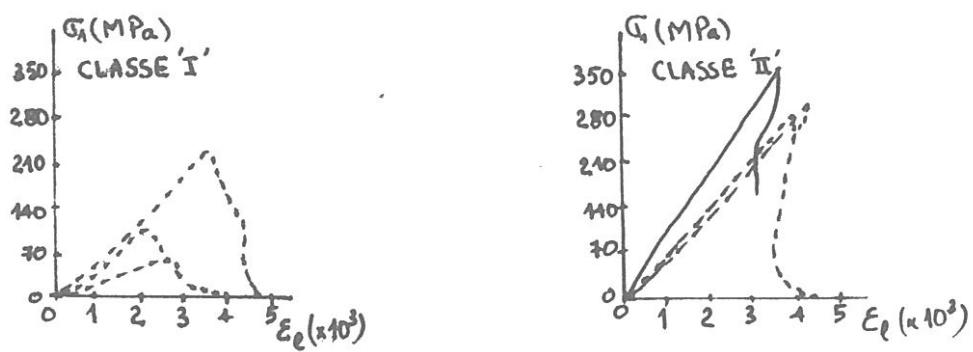


Fig.2.12 Classes de comportement à la rupture (Wawersik) [13].

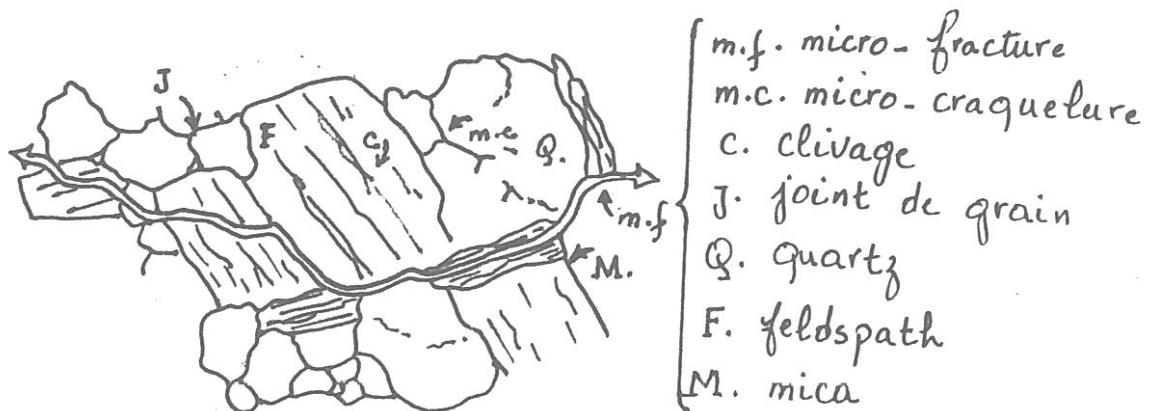


Fig.2.13 Microfissuration d'un granite (Perami) [13].

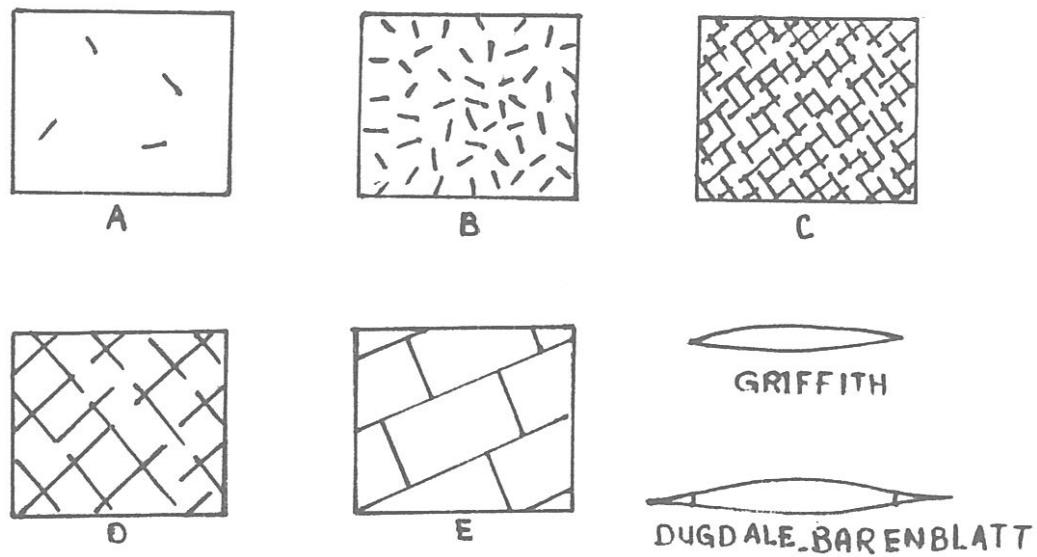


Fig.2.14 Modèles physiques de géomatériaux fissurés [13].

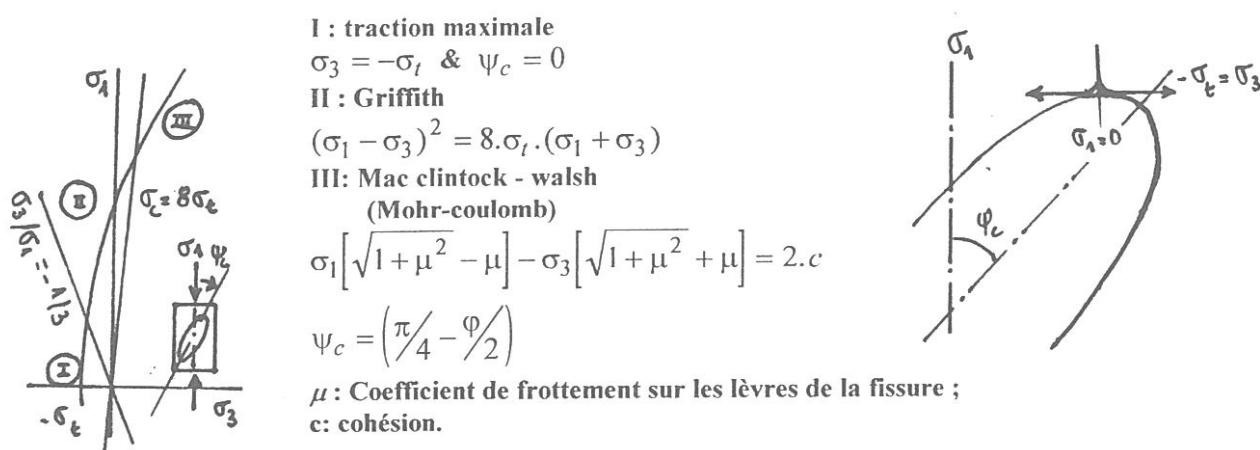


Fig.2.15 Critère «composite» / courbe limite dans le plans σ_1 / σ_3 [13].

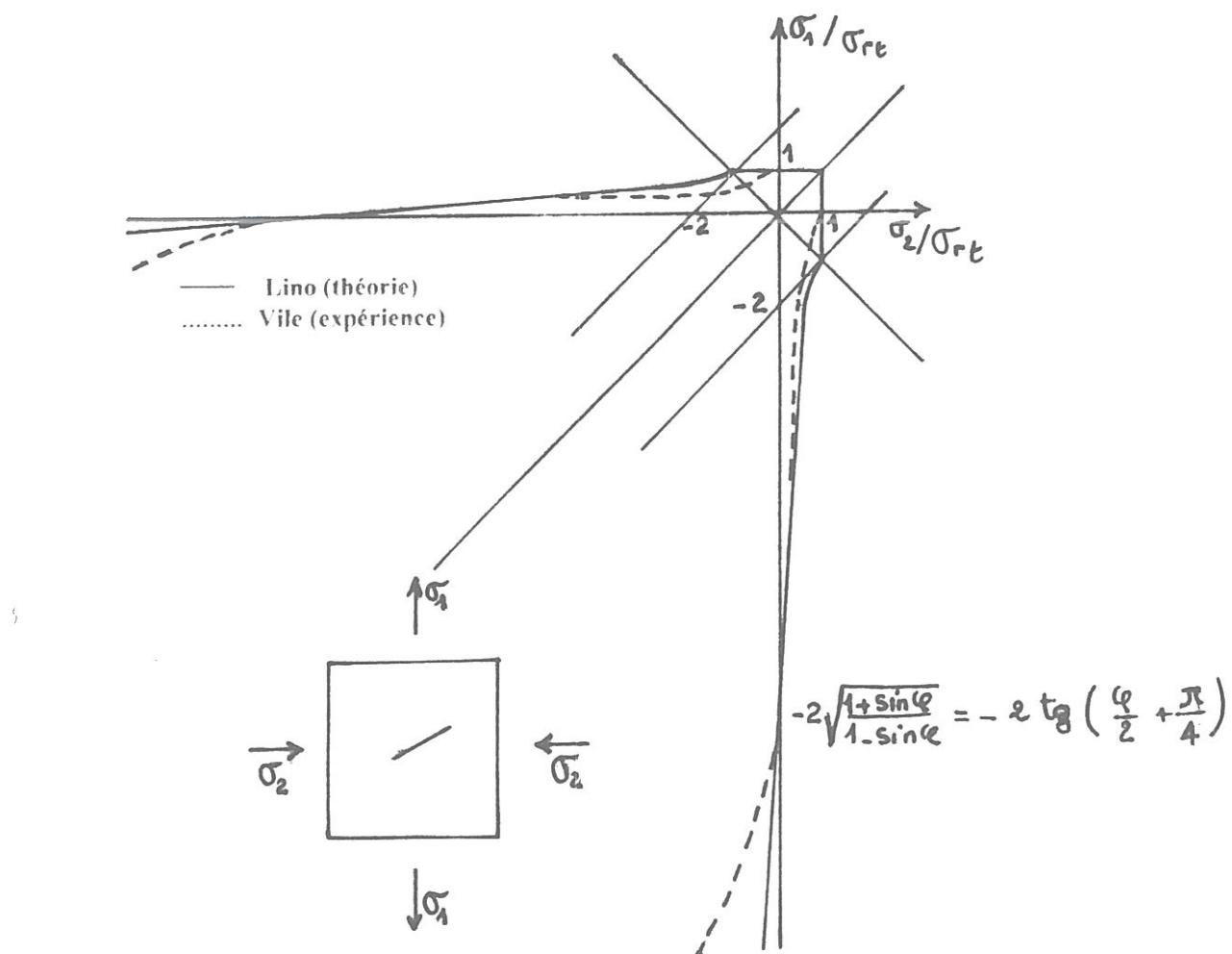


Fig.2.16 Modèle de Griffith - Lino, domaine limite d'élasticité [21].

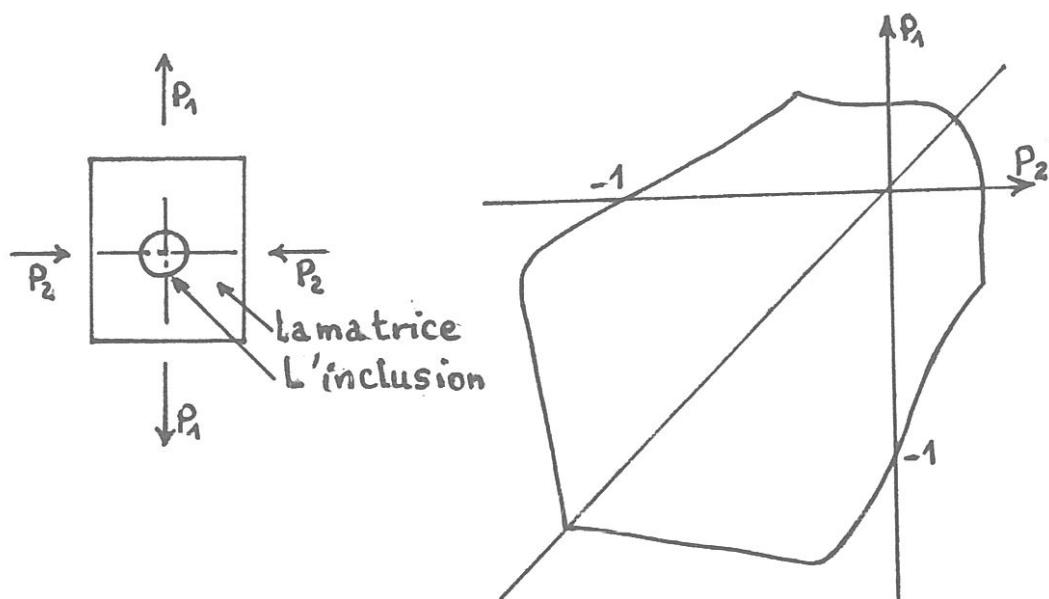


Fig.2.17 Modèle de Lorrain - Calvet, trace de la surface limite (élasticité) [21].

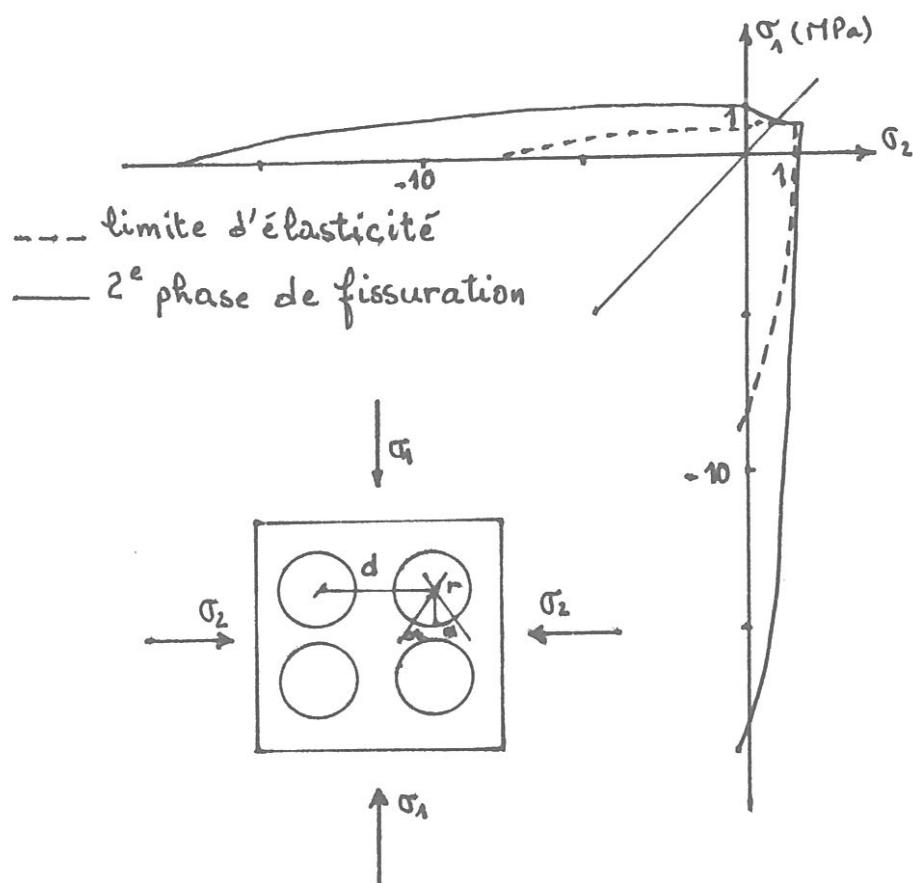
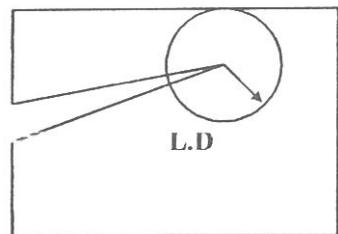
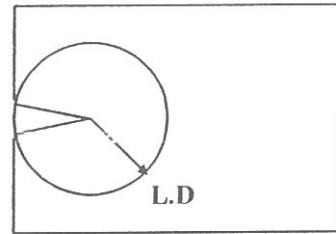


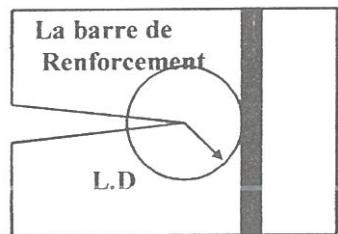
Fig.2.18 Courbe d'états - limites obtenues par le modèle de Lino [21].



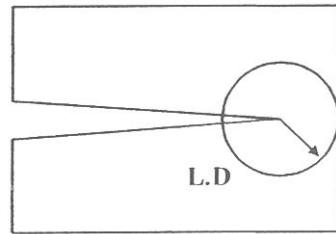
a)



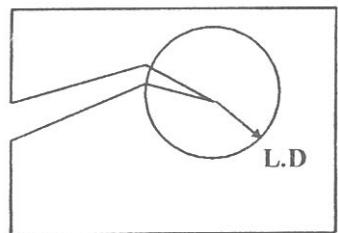
b)



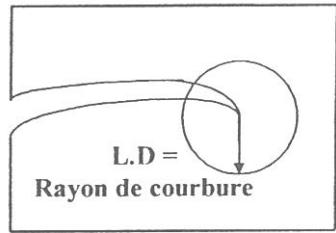
c)



d)

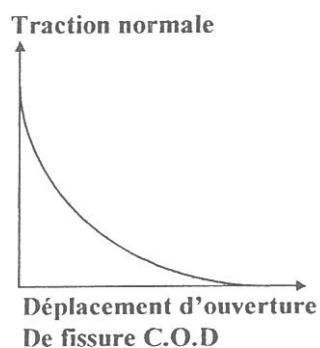


e)

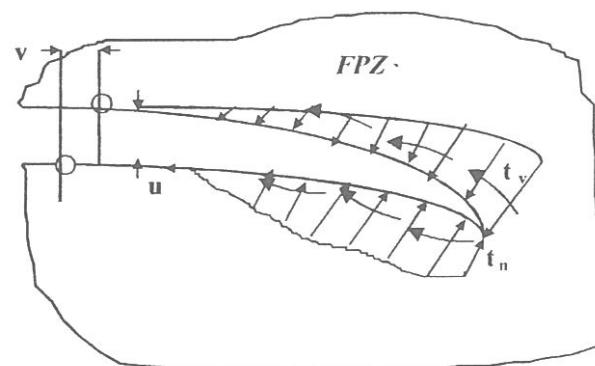


f)

Fig.2.19 Exemples montrant le concept de «petite dimension L.D»
Associés au bout de la fissure [1].

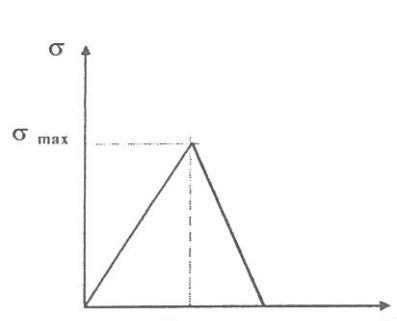


a)



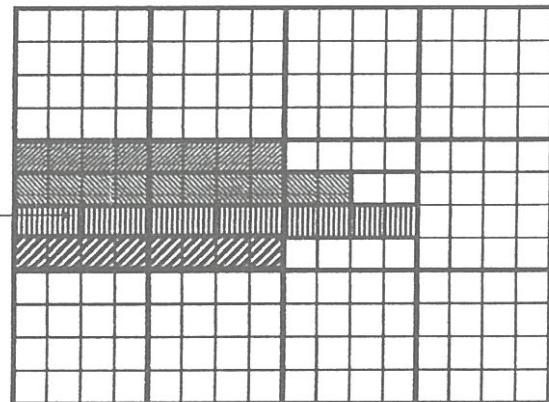
b)

Fig.2.20 Terminologie et concepts associés à la modélisation
Des fissures fictives (FCM) [1].



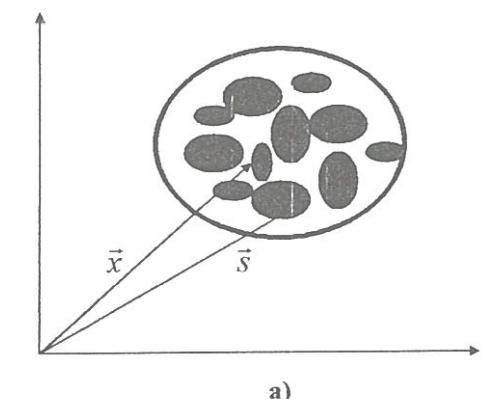
a)

La bande
De fissure

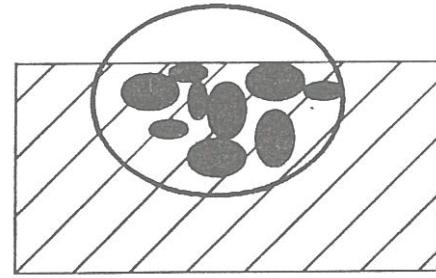


b)

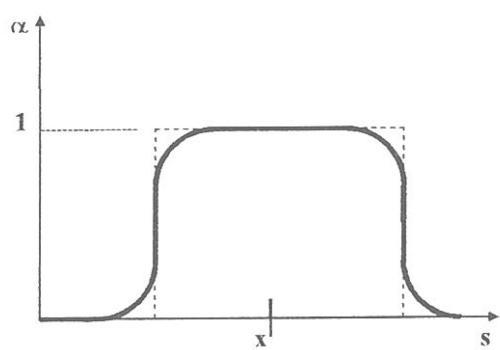
Fig.2.21 La bande de fissure devient longue et étroite plus que le maillage est raffiné
si le modèle constitutif est indépendant de la taille d'élément [1].



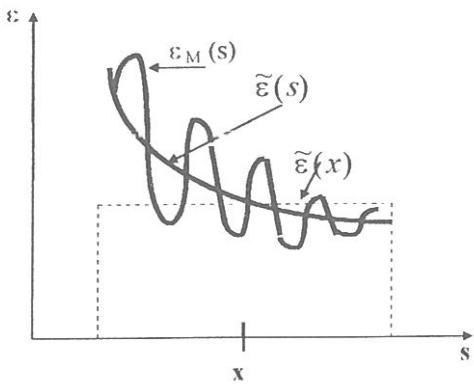
a)



b)



c)



d)

Fig.2.22 L'hétérogénéité du béton à la taille réduite d'agrégat [1].

C chapitre 03

Analyse théorique

SOMMAIRE

- 3.1) Introduction.**
- 3.2) Les notions utilisées dans la méthode des éléments finis:**
 - 3.2.1) Elément de structure.**
 - 3.2.2) Problèmes d'équilibres de valeurs propres et de propagation.**
 - 3.3) Présentation matricielle de la méthode des éléments finis.**
 - 3.4) La M.E.F pour les éléments triangulaires axisymétriques.**
 - 3.5) Formulation numérique du problème de contact par des éléments d'interfaces:**
 - 3.5.1) Définition de l'interface.**
 - 3.5.2) Divers modèles d'élément d'interface.**
 - 3.5.3) Formulation d'un élément d'interface bidimensionnelle.**
 - 3.6) Formulation numérique du problème de fissuration par des éléments en ressort:**
 - 3.6.1) Critères d'initiation de la fissure.**
 - 3.6.2) Relations entre largeur de fissure, les contraintes de traction normale et les forces nodales.**
 - 3.7) Méthode de résolution.**
 - 3.8) Critère de convergence.**

3.1) Introduction :

Durant les dernières années, le béton renforcé a été utilisé avec une augmentation très sensible dans la construction des structures complexes. Ces structures sont sujet à des variations de la charge d'environnement, y compris le séisme, le vent et la neige.

Généralement, deux types de modélisations de la fissure sont utilisées dans l'analyse: la modélisation discrète et continue.

Dans les premiers temps d'investigations; le béton fissuré a été représenté par l'approche discrète avec une prédefinition du modèle de la fissure. Plutôt, ces approches ont été généralisées pour la propagation de plusieurs fissures réelles, qui sont ajoutées à l'analyse par éléments finis.

Une approche discrète a été proposée pour la modélisation de la fissure dans le béton et pour simuler le test en force de traction « pull-out ». La modélisation par éléments finis introduit explicitement la traîner (nervures ≡ lugs) sur la surface de la barre de renforcement comme un solide. Aspect du comportement précédemment rapporté dans les tests a été comparé aux résultats donnés par la simulation en éléments finis.

La fissure discrète, et le comportement d'interface sont identifiés et la progression de ces mécanismes durant l'histoire de chargement est aussi représentée.

La distribution discrète des fissures a été proposée dans l'analyse par éléments finis des structures en béton renforcé par *Yao et Murray* [38]. Dans cette approche un simple critère de résistance basé sur la résistance à la traction est utilisé pour le fractionnement des noeuds et la propagation de la fissure, résultant donc de la coalescence de ces noeuds le long des frontières des éléments existants.

Différents critères d'initiation de la fissure sont utilisés, situer à l'intérieur du matériau béton continu plus que ceux de l'interface acier-béton.

Des éléments de liaisons sont installés pour connecter les noeuds de fractionnement sur les deux cotés de la fissure et la réponse du matériau sous la traction est utilisée pour représenter proprement l'énergie de rupture. Les contraintes de tractions associées à la largeur de la fissure sur ces deux faces sont intégrées pour obtenir les forces nodales équivalentes, ces dernières sont aussi utilisées pour calculer la rigidité des éléments de liaisons.

Cette procédure a été automatisée pendant l'analyse itérative. Un contrôle de la largeur de la fissure de rupture avait été proposé comme une solution en contrainte auxiliaire qui donne une convergence de ces problèmes.

L'identification et le traitement de ce mécanisme sont proposés pour éviter la singularité dans le processus de solution.

Une technique d'énumération complète pour le fractionnement des noeuds permet à tous les modèles de fissure possible dans le maillage par éléments finis d'être représenté par activation et désactivation d'un nombre de noeuds de fractionnement (*Yao et Murray* [37]).

Un nombre de tests traitant l'influence de la traction « tension - pull » avaient été portés dehors, dans lequel une seule barre de renforcement entourée par un prisme concentrique est influencée sur ces deux extrémités avancer par cette force de traction [38].

Ce test est particulièrement difficile à simuler par ce que plusieurs fissures apparaissent et se distribuent partout dans l'éprouvette.

Les chercheurs croient que « la micromécanique de liaison - glissement » [38] entre la barre déformée et le béton qui l'entoure peut se clarifier par comparaison entre l'analyse par éléments finis et le résultats des tests.

Dans cette étude, on assume que la mécanique d'interaction entre l'acier et le béton sur leurs interfaces est incorporée dans la technique de simulation par éléments finis, dans la tentative de reproduire le phénomène observé durant le test d'influence à la traction.

De telle technique sert à éclaircir la nature de la progression structurelle de détérioration associée à l'adhérence et le développement des fissures.

3.2) Notions utilisées dans la méthode des éléments finis :

- » Un système physique est caractérisé par un ensemble de variables qui peuvent dépendre des coordonnées d'espace $X = (x, y, z)$ et du temps. Le système est dit stationnaire si ces variables ne dépendent pas du temps [14].
- » Certaines variables « d » du système sont connues à priori : propriétés physiques, dimensions du système, sollicitations, conditions aux limites, etc. [14].
- » Un modèle mathématique du système permet d'écrire des relations entre « u » et « d » en utilisant des lois physiques [14].
- » Le nombre de *DDL* du système est le nombre de paramètres nécessaires pour définir « u » à un instant donné « t ».
- » Un système est discret s'il possède un nombre de *DDL* fini; et il est continu s'il possède un nombre de *DDL* infini. Le comportement d'un système discret est représenté par un système d'équations algébriques. Celui d'un système continu est le plus souvent représenté par un système d'équation aux dérivées partielles ou intégro différentielles associée à des conditions aux limites en espace et en temps [14], [40].
- » Depuis l'apparition des calculateurs électroniques, les problèmes discrets peuvent être en général résolus directement même si le nombre d'éléments est très grand; les équations algébriques des systèmes peuvent être résolus par les méthodes numériques. Par contre, les équations des systèmes continus ne peuvent en général pas être résolus directement. Lorsque la capacité d'ordinateur est finie, ces problèmes continus ne pourront être résolus exactement que par des opérations mathématiques, pour surmonter l'impossibilité de résoudre ces problèmes. Différentes méthodes de discréétisation ont été présentées. Toutes ces méthodes impliquent une approximation dont on espère qu'elle approche aussi précisément que possible la solution du problème continu lorsque le nombre de variables discrètes augmente. La *MEF* est l'une des méthodes qui peuvent être utilisée pour faire cette discréétisation.
- » Pour l'analyse des problèmes discrets [40], une méthode classique de résolution a été développée au cours des années. Dans le domaine de la mécanique des structures, l'ingénieur détermine tout d'abord les relations entre forces et déplacements pour chaque éléments de la structure, puis il assemble ces relations en un système global selon une procédure telle que l'équilibre local en chaque « *noeud* » ou point de connexion de la structure soit satisfait. À partir des équations ainsi obtenues, on peut calculer la solution exprimée en fonction des déplacements.

• L'existence d'un traitement classique unifié des structures discrètes standard nous conduit à adopter une première définition de la *MEF* considérée comme une méthode d'approximation de problèmes continus tels que :

- le milieu continu est subdivisé en un nombre d'éléments finis dont le comportement est défini par un nombre fini de paramètres;
- la relation de la structure globale obtenue par l'assemblage de ses éléments respecte précisément les mêmes règles que celles qui régissent les structures discrètes [13].

3.2.1) Elément de structure utilisé :

À titre d'introduction au concept général des structures discrètes nous considérons tout d'abord un exemple de calcul des structures en cas général [40].

En écrivant les forces agissant sur tous les noeuds (au nombre de trois dans le cas présent) de l'élément (1) sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\{F^1\} = \begin{Bmatrix} \{F_1^1\} \\ \{F_2^1\} \\ \{F_3^1\} \end{Bmatrix} \text{ Avec } \{F_1^1\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Où les $\{F_i^e\}$ sont les sollicitations connues de l'élément « e » aux noeuds « I » de cet élément; et $\{F^1\}$ le vecteur de sollicitation totale de l'élément '1', de même pour les déplacements noraux correspondants :

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ \vdots \\ \{\delta^{N^e}\} \end{Bmatrix} ; \{\delta^1\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^1\} \\ \{\delta_2^1\} \\ \{\delta_3^1\} \end{Bmatrix} \text{ pour un élément} ; \{\delta_1^1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \text{ chaque noeud} \quad (3.2)$$

Où : $\{\delta\}$ Le vecteur total des déplacements noraux ;

$\{\delta^{N^e}\}$ Le vecteur total des déplacements noraux d'un élément « N^e » ;

$\{\delta_i^{N^e}\}$ Le vecteur total des déplacements noraux d'un élément « N^e » au noeud « I ».

Chaque $\{F^e\}$ et $\{\delta^e\}$ possède le même nombre de composante ou *DDL*.

3.2.2) Problèmes d'équilibres de valeurs propres et de propagation :

Les problèmes concernant les systèmes discrets et continus peuvent être classés en trois catégories, que nous allons définir brièvement. En supposant que les lois de l'élasticité linéaire s'appliquent au comportement de l'élément.

a) Problèmes d'équilibre ou de valeurs aux limites :

Ils consistent à calculer « u » dans un cas stationnaire, les équations de comportement pour un système discret peuvent en général s'écrire sous forme matricielle :

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (3.3)$$

Où : $[K]$ est la matrice caractérisant le système, dénommée la matrice de rigidité ou de raideur;

$\{U\}$ est le vecteur des variables inconnues;

$\{F\}$ est le vecteur des sollicitations connues.

b) Problèmes de valeurs propres ou de valeurs critiques :

Ils constituent une extension d'un problème d'équilibre dans laquelle nous évaluons « U » correspondant à des valeurs critiques de certains paramètres λ , dites les valeurs propres. Les équations correspondantes s'écrivent :

$$[K].\{U\} = \lambda.[M].\{U\} \quad (3.4)$$

Où : $[M]$ est la matrice masse.

c) Les problèmes de propagation ou de valeurs initiales :

Ils constituent à évaluer $u(x,t)$ pour $t > t_0$ dans un système non stationnaire, $u(x,t_0)$ étant connu. Pour un système discret :

$$[M].\frac{d^2\{U(t)\}}{dt^2} + [C].\frac{d\{U(t)\}}{dt} + [K].\{U(t)\} = \{F(t)\} \quad (3.5)$$

Avec les conditions initiales :

$$\{U\} = \{U_0\} \text{ et } \frac{d\{U\}}{dt} = \left\{ \overset{\circ}{U}_0 \right\} \text{ pour } t = t_0 \quad (3.6)$$

Où : $[C]$ est la matrice d'amortissement.

Pour plus de détail concernant les systèmes continus voir [14].

Une notion couramment employée pour caractériser les équations des systèmes physiques est un système discret est linéaire si les termes de $[K], [M], [C]$ et $\{F\}$ sont des constantes indépendantes de « U ».

3.3) Présentation matricielle de la méthode des éléments finis [14] :

Nous allons présenter une organisation matricielle qui facilite le passage de la formulation à la programmation [40].

Dans tous les cas le nombres de points de connexion entre un « élément fini » quelconque isolé par une frontière imaginaire et les éléments voisins est infini. Il est difficile de saisir à première vue comment de tels problèmes peuvent être discrétisés de la manière décrite dans le cas de structures plus simples. La difficulté peut être surmontée de la façon suivante :

- a) le milieu continu est subdivisé en un certain nombre d'éléments finis séparés par des lignes ou des surfaces imaginaires;
- b) les éléments sont supposés interconnectés en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières. Les déplacements de ces points nodaux seront les inconnues de base du problème, exactement comme dans le cas simple du calcul d'une structure discrète;
- c) le choix d'un ensemble de fonctions permettre de définir de façon unique les déplacements en tout point interne de l'élément en fonction des déplacements nodaux;
- d) l'état de déformation à l'intérieur d'un élément sera alors déterminé de façon unique en fonction des déplacements nodaux. L'état de contraintes sera alors déterminé dans ces éléments, ainsi que sur les frontières à partir de ces déformations déjà calculées, des déformations initiales éventuelles et des propriétés constitutives du matériau;
- e) un système de « forces » concentrées aux noeuds équilibrant les contraintes s'exerçant aux frontières et les charges réparties seront déterminées, ce qui conduira à une équation de raideur de type (3.5) [40].

Tout d'abord nous définissons la *MEF* comme la méthode de discrétisation des formes intégrales globale W remplacer par des formes intégrales élémentaires W^e , puis discrétisé celle-ci en utilisant une approximation par *MEF*. Ceci conduit à la définition de convergence et présentons la technique dite du patch test utile pour vérifier la convergence des éléments non conformes.

La technique d'assemblage, caractéristique de la *MEF*, permet de passer des matrices et vecteurs élémentaires à des matrices et vecteurs globales, ainsi que les diverses techniques de stockage de celle-ci et en fin nous décrivons les différentes manières d'introduire les conditions aux limites dans le système d'équation finale.

3.4) Méthode des éléments finis (MEF) pour les éléments triangulaires Axisymétrique :

Lorsque les solides sont axisymétriques, la dimension de l'espace de travail peut être réduite et l'étude d'un problème 3D est ramenée à l'étude d'un problème 2D (*Figure 3.1*).

L'étude des corps solides axisymétriques, ou à symétrie de révolution autour d'un axe (*oy*), revêt un grand intérêt pratique. En effet, de nombreuses constructions sont à symétrie de révolution et leur calcul peut être notablement simplifié lorsque les charges appliquées et les conditions aux limites sont également axisymétriques.

Cependant, à cause de sa simplicité et sa souplesse d'utilisation, nous présentons maintenant les étapes de bases pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire d'un élément triangulaire de révolution [25], [27] :

L'étape 1 : Choisir un système de coordonnées convenable et numérotter les noeuds.

Nous utilisons les coordonnées cylindriques ($r \equiv x, z \equiv y$) et les noeuds sont numéroté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (Figure 3.2).

Leurs coordonnées sont : $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$ respectivement. On suppose que chaque noeud à 2 DDL dans le plan, cela fait un total de 6 DDL pour l'élément triangulaire $6 = (2DDL).(3noeuds)$ qui sont : $\{u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3\}^T$; les forces correspondantes sont $\{F_{x1}, F_{y1}; F_{x2}, F_{y2}; F_{x3}, F_{y3}\}^T$.

En utilisant la relation matricielle, le vecteur de déplacements au noeud 1 s'écrit :

$$\{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (3.7); \quad \text{et le vecteur de force correspondant : } \{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Les vecteurs forces et déplacements pour l'élément triangulaire s'écrivent :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.9) \quad ; \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

les déplacements nodaux

les forces appliquées aux noeuds

Parce que chaque terme contient 6 termes, la matrice de rigidité de l'élément triangulaire est une matrice d'ordre 6 :

$$\{F^e\}_{(6*1)} = [K^e]_{(6*6)} \{\delta^e\}_{(6*1)} \quad (3.11)$$

L'étape 2 : Choisir une fonction de déplacement $[f(x, y)]$ qui définit le déplacement

$[\delta(x, y)]$ En chaque point de l'élément.

Puisqu'il y'a 6 DDL, on a besoins de 6 inconnues $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_5)$ dans le polynôme d'interpolation qui se réduisent en 3 seulement.

La représentation la plus simple est donnée par les deux expressions linéaires suivantes des coordonnées géométriques (avec $x \equiv r; y \equiv z$ du cylindre et θ reste la même) :

$$\begin{cases} u(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ v(x, y) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 y \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Puisqu'ils sont à la foi linéaire en « x » et « y » la continuité des déplacements est assurée le long de l'interface entre deux éléments adjacents.

Ou plus simplement : $\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)].\{\alpha\}$ (3.14)

L'étape 3 : Exprimer les déplacements $\{\delta(x, y)\}$ dans l'éléments en fonction des déplacements nodaux $\{\delta^e\}$.

Pour exprimer les déplacements $\{\delta(x, y)\}$ dans l'élément en fonction des déplacements nodaux $\{\delta^e\}$, les coefficients α_i peuvent être déterminés comme suit :

En remplaçant les valeurs des coordonnées nodales dans l'équation (3.14), nous obtenons :

$$\{\delta_1(x_1, y_1)\} = \begin{Bmatrix} u(x_1, y_1) \\ v(x_1, y_1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (3.15.a)$$

$$\{\delta_2(x_2, y_2)\} = \begin{Bmatrix} u(x_2, y_2) \\ v(x_2, y_2) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (3.15.b)$$

$$\{\delta_3(x_3, y_3)\} = \begin{Bmatrix} u(x_3, y_3) \\ v(x_3, y_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (3.15.c)$$

En combinant les vecteurs de déplacements pour l'élément, on obtient :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Ce qui peut être écrit : $\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$ (3.17)

$$\text{où : } [A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

On remarque que tous les termes de la matrice $[A]$ sont connus, puisque se sont simplement les coordonnées des noeuds.

Les coefficients inconnus $\{\alpha\}$ sont alors déterminés à partir de l'équation (3.14) en inversant la matrice $[A]$ pour conduire à :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta^e\} \quad (3.19)$$

On peut vérifier facilement que : $[A]^{-1} \cdot [A] = [I]$ (la matrice d'identité).

On peut maintenant déterminer les déplacements noraux par l'utilisation de l'équation (3.11), nous obtenons :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta^e\} = [N(x, y)] \cdot \{\delta^e\} \quad (3.20)$$

Avec : $[f(x, y)] \cdot [A]^{-1} = [N(x, y)]$ sont les fonctions d'interpolations.

L'inverse de la matrice $[A]$ est présenté par l'équation suivante :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & -x_1 y_3 + x_3 y_1 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2 y_3 - x_3 y_2 & 0 & -x_1 y_3 + x_3 y_1 & 0 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Avec : $2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2 \times \text{aire du triangle}$

$$\Rightarrow 2\Delta = x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_1$$

$$\Rightarrow 2\Delta = x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \quad (3.22)$$

L'étape 4 : Relier les déformations $\{\varepsilon(x, y)\}$ en chaque point de l'élément aux déplacements $\{\delta(x, y)\}$ et donc aux déplacements noraux $\{\delta^e\}$.

En utilisant la théorie d'élasticité, les quatre composantes des déformations pour un solide à symétrie axiale sont :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Dans le cas général, les relations déformations - déplacements de l'élasticité peuvent se mettre sous la forme suivante en coordonnées cylindrique avec $x \equiv r; y \equiv z$:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} \\ 2\varepsilon_{y\theta} = \gamma_{y\theta} \\ 2\varepsilon_{x\theta} = \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{x} + \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 3} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad (3.24)$$

Dans le cas de chargement de révolution, la solution est complètement axisymétrique :

$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0; v = 0; \gamma_{y\theta} = 2\varepsilon_{y\theta} = 0; \gamma_{x\theta} = 2\varepsilon_{x\theta} = 0$; D'où les composantes possibles (non nulles) d'une déformation axisymétrique (un solide à symétrie axiale) sont :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Où : ε_x est la déformation relative radiale;

ε_y est la déformation relative axiale;

ε_θ est la déformation relative tangentielle;

γ_{xy} est la déformation de cisaillement.

Donc les relations entre déformations et déplacements s'écrivent :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{u}{x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \quad (3.26)$$

En remplaçant « u » et « v » par leurs valeurs dans l'équation (3.19) :

$$\varepsilon_x = \alpha_1; \varepsilon_y = \alpha_5; \varepsilon_\theta = \frac{\alpha_0}{x} + \alpha_1 + \alpha_2 \frac{y}{x}; \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \alpha_2 + \alpha_4$$

$$\Rightarrow \{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{x} & 1 & \frac{y}{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 6} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix}_{6 \times 1} \quad (3.27)$$

$$\text{Ou simplement : } \{\varepsilon(x, y)\} = [C]\{\alpha\} \quad (3.28)$$

En remplaçant $\{\alpha\}$ par l'équation (3.19), on obtient :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C].[A]^{-1}.\{\delta^e\} \quad (3.29)$$

$$\text{Donc : } \{\varepsilon(x, y)\} = [B].\{\delta^e\} \quad (3.30)$$

Où : $[B] = [C].[A]^{-1}$ qui peut être donnée par l'équation suivante :

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_3 - x_1 & 0 & x_2 - x_1 \\ \frac{x_2 y_3 - y_2 x_3}{x} & \frac{x_3 y_1 - y_3 x_1}{x} & \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x} & 0 & 0 & 0 \\ + (y_2 - y_3) & 0 & + (y_3 - y_1) & 0 & + (y_1 - y_2) & 0 \\ + \frac{y}{x} (x_3 - x_2) & + \frac{y}{x} (x_1 - x_3) & + \frac{y}{x} (x_2 - x_1) & 0 & 0 & 0 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}_{4 \times 6} \quad (3.31)$$

$$\text{Où : } 2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2 \times \text{aire du triangle}$$

L'étape 5 : Relier les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ aux déformations $\{\varepsilon(x, y)\}$ et aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$.

Ces contraintes pour un solide de révolution à symétrie axiale sont :

σ_x est la contrainte radiale ;

σ_y est la contrainte axiale ;

σ_θ est la contrainte tangentielle ;

τ_{xy} est la contrainte de cisaillement.

Ces contraintes sont liées aux déformations par la relation suivante :

$$\{\sigma(x, y)\}_{4 \times 1} = [D]_{4 \times 4} \cdot \{\epsilon(x, y)\}_{4 \times 1} \quad (3.32)$$

Pour un matériau isotrope, la matrice [D] d'élasticité plane est :

$$[D]_{4 \times 4} = \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2 \cdot (1-\nu)} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (3.33)$$

L'étape 6 : Remplacer les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ par des forces nodales

statiquement équivalentes $\{F^e\}$ et obtenir la matrice de rigidité [K].

En utilisant le principe des travaux virtuels pour déterminer l'ensemble des charges nodales qui sont statiquement équivalentes aux contraintes internes. La condition d'équivalence peut être exprimée comme suit :

Durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total dû aux charges nodales doivent être égal au travail interne total des contraintes. On choisit un ensemble arbitraire de déplacements nodaux virtuels représentés par le vecteur $\{\delta^{*e}\}$ où :

$$\{\delta^{*e}\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^{*e}\} \\ \vdots \\ \{\delta_n^{*e}\} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Le travail extérieur W_{ext} des forces nodales est donné par :

$$W_{ext} = \{\delta_1^{*e}\} \cdot \{F_1^e\} + \{\delta_2^{*e}\} \cdot \{F_2^e\} + \cdots + \{\delta_n^{*e}\} \cdot \{F_n^e\} = \{\delta^{*e}\} \cdot \{F^{*e}\} \quad (3.35)$$

Si les déplacements arbitrairement imposés produisent des déformations $\{\epsilon^*(x, y)\}$ aux points de l'élément où les contraintes réelles sont les $\{\sigma(x, y)\}$, alors le travail interne par unité de volume est donné par :

$$W_{int} = \{\epsilon^*(x, y)\}^T \cdot \{\sigma(x, y)\} \quad (3.36)$$

Ce dernier est obtenu en intégrant sur le volume total de l'élément c'-à-d :

$$\int_v W_{int} = \int_v \{\epsilon^*(x, y)\}^T \cdot \{\sigma(x, y)\} \cdot d(vol) \quad \text{Avec :}$$

$$\begin{aligned} \{\epsilon(x, y)\} &= [B] \cdot \{\delta^e\} \Rightarrow \{\epsilon^*(x, y)\} = [B] \cdot \{\delta^{*e}\} \\ &\Rightarrow \{\epsilon^*(x, y)\}^T = [[B] \cdot \{\delta^{*e}\}]^T = \{\delta^{*e}\}^T \cdot [B]^T \\ &\& \{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta^e\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Donc on obtient :

$$\int_v W_{int} \cdot d(vol) = \int_v \{\delta^{*e}\}^T \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \{\delta^e\} \cdot d(vol)$$

$$\& W_{ext} = \{\delta^{*e}\}^T \cdot \{F^e\}$$

En égalant le travail interne à l'externe pendant les déplacements virtuels nous obtenons :

$$\{F^e\} = \left[\int_v [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d(vol) \right] \{\delta^e\} \quad (3.38)$$

$$\text{Où : } [K^e]_{6 \times 6} = \int_v [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d(vol) \quad (3.39)$$

Qui est la matrice de rigidité élémentaire.

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta^e\} = [H] \cdot \{\delta^e\} \quad (3.40)$$

La matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ est symétrique et explicitement déterminée car $[B]$ et $[D]$ ne contiennent que des termes constantes et pour $\int_v d(vol)$ dans le cas d'un corps de révolution (cas d'utilisation des éléments axisymétriques), le volume de référence est :

$$d(vol) = 2\pi x dx dy \quad (3.41)$$

$$\Rightarrow [K^e] = 2\pi \iint_s [B]^T \cdot [D] \cdot [B] x dx dy$$

Si on calcule $[B]$ au point correspondant au *cdg* de l'élément, on obtient de bons résultats, ce qui implique que « x » et « y » sont remplacés par :

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{3} \& \bar{y} = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{3} \text{ Donc :}$$

$$[K^e] = 2\pi \cdot [\bar{B}]^T \cdot [D] \cdot [\bar{B}] \cdot \bar{x} \cdot \Delta \quad (3.42)$$

Où on remplace x et y de la matrice $[B]$ par \bar{x} et \bar{y} ce qui nous donne $[\bar{B}]$ et

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{Aire du triangle}$$

Donc on a :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta^e\} \quad (3.43)$$

$$\{\sigma(x, y)\} = [H] \cdot \{\delta^e\} \quad (3.44)$$

3.5) Formulation numérique du problème de contact par des éléments d'interfaces :

3.5.1) Définition de l'interface :

Du point de vue géométrique, l'interface est en général une fine zone du matériau (quelques diamètres moyens de grains), comprise entre l'inclusion et une surface fictive située dans le matériau (dans notre cas l'inclusion et la barre de renforcement en acier tandis que le matériau est le Béton). En raison de la difficulté d'isoler cette zone et de la étudier en tant que milieu continu, nous caractérisant son comportement mécanique à l'aide des variables agissant sur ces frontières. Le comportement des interfaces acier-béton est considéré donc comme un comportement de contact avec frottement.

L'hétérogénéité des propriétés mécaniques dans les ouvrages et tout spécialement à un contact acier / béton ou sol / structure, fait apparaître des zones siège d'une forte localisation des déformations assimilables à des déplacements relatifs. Ces discontinuités cinématique deviennent rapidement des zones de moindre résistance en raison de l'endommagement se développant en leur sein.

Ces zones spéciales sont modélisées par des éléments finis particuliers appelés éléments d'interfaces ou éléments joints. La discrétisation et le comportement des interfaces acier / béton ont été inspirés de celle entre sol / structure.

Cette partie comporte la formulation numérique en déplacement relatif d'un élément d'interface à 4 noeuds $J4$ (à 8 DDL) compatible avec les éléments $T3$ (à 6 DDL) utilisés dans les éléments axisymétriques.

En effet, d'après des publications récentes, l'intégration numérique de ce problème pose de sérieux problèmes d'oscillations des contraintes. Une partie de notre étude concernant l'élément d'interface a été orientée dans cette direction afin d'apporter quelques éléments de réponse à ce problème.

3.5.2) Divers modèles d'élément d'interface :

Deux approches ont été développées pour décrire, par la méthode des éléments finis les interactions statiques structure / structure et sol / structure :

a) L'approche par une formulation hybride :

Cette approche a été fondée sur l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange dans la formulation variationnelle du problème mécanique. Ces multiplicateurs représentent en fait les déplacements relatifs aux interfaces. Ainsi, le problème d'interface est introduit dans la formulation variationnelle sous la forme de conditions de liaisons particulières (adhérence, glissement, décollement, recollement) [25].

b) L'approche par une formulation de type déplacement :

De grands types d'éléments de contact sont définis : les éléments d'épaisseur nulle; les éléments de type ressort et les éléments de très faible épaisseur (ou éléments de couche mince) [25].

➤ *Les éléments d'interfaces d'épaisseur nulle :*

Pour ces éléments, l'interface est assimilée à un matériau fictif auquel est adjoint une loi de comportement de type élastoplastique. Les propriétés de surface des discontinuités pour les structures peuvent être exprimées en dédoublant les noeuds aux interfaces.

Pratiquement le premier élément de ce type a été imaginé par Goodman. Il s'agit d'un élément joint à 4 noeuds J4 (Figure 3.3.a) coïncident deux à deux avant tout déplacement relatifs et assurant le contact entre des éléments de massif triangulaires T3 [24].

➤ *Les éléments d'interfaces de type ressort :*

Ces éléments de liaison qui peuvent être vu comme des ressorts, associent à chaque noeud dédoublé de l'interface deux ressorts; un tangentielle et un normal à la surface de contact (Figure 3.3.b). Dans un système local, la matrice de comportement associée à cet élément est de la forme :

$$\underline{\underline{d}} = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

➤ *Les éléments d'interfaces d'épaisseur très faible :*

Ces éléments sont formés en considérant que l'interface est une zone de faible épaisseur, constituée par un certain matériau possédant une loi de comportement propre. Les paramètres physiques (déformations, résistance) sont obtenus à partir d'essais de cisaillement direct (Figure 3.3.c).

3.5.3) Formulation d'un élément d'interface Bidimensionnelle :

a) Transformation géométrique :

Les coordonnées globales (x, y) de l'élément sont transformées en coordonnées locales, exprimées dans le plan de référence (ξ, η) (Figure 3.4) [30]. Dans le cas d'une transformation linéaire on aura :

$$x = [H_1 \quad H_3] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [H_2 \quad H_4] \cdot \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad (3.46.a)$$

$$y = [H_1 \quad H_3] \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{Bmatrix} = [H_2 \quad H_4] \cdot \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (3.46.b)$$

Les fonctions de transformations géométriques H_i sont données par :

$$H_1 = H_2 = \frac{1-\xi}{2} \quad ; \quad H_3 = H_4 = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.47)$$

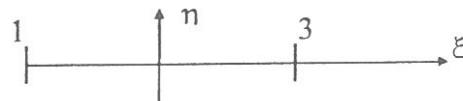
b) Interpolation des déplacements relatifs :

L'évaluation des déplacements relatifs dans un système (ξ, η) nécessite l'introduction d'une matrice de passage, contenant les composantes des vecteurs unitaires tangentes et normales à la surface de contact :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^2 - u^1 \\ v^2 - v^1 \end{Bmatrix} = \underline{\underline{R}} \begin{Bmatrix} u^2 - u^1 \\ v^2 - v^1 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Où : u, v sont les déplacements relatifs tangentielle et normal. u^1, v^1 et u^2, v^2 sont les déplacements selon x et y dans le système global, correspondant respectivement aux faces inférieure et supérieure de l'élément d'interface.

On utilise une interpolation linéaire le long de l'interface dans un repère local:



$$\begin{cases} x = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x \\ y = \alpha_2 + \alpha_3 \cdot y \end{cases} \quad (3.49)$$

$$x = [N_1 \quad N_3] \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [N_2 \quad N_4] \cdot \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad (3.50.a)$$

$$y = [N_1 \quad N_3] \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{Bmatrix} = [N_2 \quad N_4] \cdot \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (3.50.b)$$

Avec :

$$N_1 = N_2 = \frac{1-\xi}{2} \quad \& \quad N_3 = N_4 = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.51)$$

Et $\sum N_i = 1$

Donc le polynôme choisi est complet.

En substituant les équations (3.40) dans (3.39) nous obtenons :

$$\{u\} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \{U\} \quad (3.52)$$

Avec :

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \& \quad \underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & -N_1 & 0 & N_2 & 0 & -N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & -N_1 & 0 & N_2 & 0 & -N_2 \end{bmatrix}_{2 \times 8} \quad (3.53)$$

Le vecteur de déplacement absolu restreint à l'élément est donné par :

$$\{U\} = \{U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad U_3 \quad V_3 \quad U_4 \quad V_4\} \quad (3.54)$$

Les fonctions d'interpolation N_i ne dépendent que de la variable ξ_i . Ce qui se traduit par la matrice de rigidité auxiliaire :

$$\underline{\underline{k}} = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \underline{\underline{b}}^T \cdot \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{d}}_0 \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \det J \cdot d\xi \quad (3.56)$$

Où : J est le Jacobien (constant) de transformation linéaire des coordonnées globales en coordonnées locales, défini par :

$$J = \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right] = \frac{L}{2} \quad (3.57)$$

Où : L est la longueur de l'élément d'interface. Avant l'assemblage de la matrice de rigidité élémentaire $\underline{\underline{k}}$ dans la matrice de rigidité globale, il faut que celle-ci soit exprimée dans les axes globaux. Nous avons retenu la méthode la plus simple qui consiste à transformer directement la matrice élastique auxiliaire $\underline{\underline{d}_0}$ dans les axes globaux, soit à deux dimensions :

$$\underline{\underline{d}_0^*} = \underline{\underline{R}^T} \cdot \underline{\underline{d}_0} \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} k_s \cdot \cos^2 \theta + k_n \cdot \sin^2 \theta & \frac{k_s - k_n}{2} \cdot \sin 2\theta \\ \frac{k_s - k_n}{2} \cdot \sin 2\theta & k_s \cdot \sin^2 \theta + k_n \cdot \cos^2 \theta \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (3.58)$$

Comme pour la matrice de rigidité d'un milieu volumique, la matrice $\underline{\underline{k}}$ est évaluée par une méthode d'intégration numérique; pour un élément d'interface rectiligne et des propriétés mécaniques uniformes, l'intégration exacte de la relation (3.56) est immédiate.

En utilisant une intégration réduite de Newton - Cotes, l'équation (3.56) devient :

$$\underline{\underline{k}} = \sum_{i=1}^n \underline{\underline{b}_i^T} \cdot \underline{\underline{R}^T} \cdot \underline{\underline{d}_0} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{b}_i} \cdot \det J \cdot W_i \quad (3.59)$$

Deux noeuds \Rightarrow on utilise un polynôme du premier degré [32] où : W_i sont les coefficients de pondération des (n) points d'intégration dont les positions et les points correspondant, sont donnés respectivement aux tableaux suivant :

nombre de points	ξ_i	W_i
2	± 1	1

Comme nous avons :

$$\begin{cases} N_1(-1) = 1 \\ N_1(+1) = 0 \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} N_2(-1) = 0 \\ N_2(+1) = 1 \end{cases}$$

L'intégrale de l'équation (3.56) devient :

$$n_1 = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} N_1^2 \cdot \frac{L}{2} \cdot d\xi = \frac{L}{2} \cdot \sum_{i=1}^2 [N_1(\xi_i)]^2 \cdot W_i = \frac{L}{2} \quad (3.60.a)$$

$$n_2 = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} N_2^2 \cdot \frac{L}{2} \cdot d\xi = \frac{L}{2} \cdot \sum_{i=1}^2 [N_2(\xi_i)]^2 \cdot W_i = \frac{L}{2} \quad (3.60.b)$$

Comme $n_1 = n_2 = \frac{L}{2}$ la matrice de rigidité élémentaire d'un élément d'interface s'écrit :

$$k = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & -d_1 & -d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & d_2 & -d_3 & -d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_3 & d_1 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_3 & -d_2 & d_3 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_3 & -d_1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & d_2 & -d_3 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_1 & -d_3 & d_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_3 & -d_2 & d_3 & d_2 \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad (3.61)$$

Avec :

$$\begin{cases} d_1 = k_s \cdot \cos^2 \theta + k_n \cdot \sin^2 \theta \\ d_2 = k_n \cdot \cos^2 \theta + k_s \cdot \sin^2 \theta \\ d_3 = \frac{k_s - k_n}{2} \cdot \sin 2\theta \end{cases} \quad (3.62)$$

3.6) Formulation numérique du problème de fissuration par des éléments en ressort :

On représente dans ce cas le modèle de fissuration ainsi que le type de propagation de la fissure pour prévoir le comportement du béton.

Ce modèle est basé sur : le critère d'initiation de la fissure et le critère de propagation. Si le critère d'initiation de fissure est satisfait (qui est défini comme le dépassement / ou non de la contrainte principale à la résistance de traction du béton), la rigidité du béton à ce point est réduite dans la direction parallèle à la contrainte principale. Ce critère est introduit implicitement pour déterminer l'initiation de la fissure ; de même, si une fissure se créer le long de deux éléments adjacents, il y'a propagation de cette fissure.

Pour la modélisation des fissures discrète, la fissure est représentée par une séparation de deux faces. Ce critère d'initiation et de propagation de la fissure s'annonce comme suit :

Là où la contrainte principale dépasse la résistance à la traction du béton, une fissure se forme le long de la direction perpendiculaire à cette contrainte principale.

Une fois la fissure est initiée, sa longueur peut être calculée par un critère de propagation.

Cette approche premièrement proposée par Ngo [23] fractionne les noeuds le long des frontières des éléments où la contrainte principale dépasse la résistance à la traction.

Elle introduit précisément la fissure dans le plan des contraintes principales de traction. Ceci exige que le maillage doit être redéfini pour chaque incrément de charge, en introduisant l'incrément sur la longueur de fissuration.

Cette méthode permet d'obtenir une relation entre force de traction normale et largeur de fissure durant l'intégration des contraintes de traction normale le long des faces fissurées, ce qui nous permet de calculer la matrice de rigidité et le vecteur force nodale du ressort qui modélise la fissure.

3.6.1) Critères d'initiation de la fissure :

On opte dans notre cas un critère d'initiation de fissure basé sur la résistance à la traction du béton au noeud.

Premier cas : Critère d'initiation de fissure le long des deux côtés d'éléments adjacents en béton.

A l'intérieur du matériau béton supposé continu, l'orientation de la fissure doit être perpendiculaire à l'orientation des contraintes principales calculées au noeud. Une tolérance β_t appelée « seuil » est choisie, donc si l'angle entre la direction de la normale à ce côté et l'orientation des contraintes principales de traction est inférieure à β_t , une fissure peut s'initier à ce noeud dans une direction perpendiculaire à la normale de ce côté comme l'indique la Figure 3.5.a, b.

Le vecteur \mathbf{P} représente les contraintes principales au noeud commun 'K', pour un état de contrainte déterminé par la moyenne des contraintes nodales de tous les éléments adjacents incident à ce noeud, et le vecteur unitaire \mathbf{n} représente les deux orientations possibles de fissuration du côté (CG). Si l'angle entre \mathbf{n} et \mathbf{P} est inférieur à β_t , il y'a fissuration à ce noeud à l'intérieur du matériau béton. Mathématiquement, ces deux conditions se traduisent par les équations suivantes :

$$P \geq f_t \quad (3.63)$$

&

$$\cos(P \wedge n) \geq \cos(\beta_t) \Rightarrow (P \wedge n) \leq \beta_t \quad (3.64)$$

Où : P est la norme du vecteur \mathbf{P} ; et

$P \wedge n$ est l'angle entre \mathbf{P} et \mathbf{n} .

La valeur de β_t utilisée pour fractionner les noeuds est choisie égale à 22.5° .

Deuxième cas : Interface entre Acier - Béton.

Ce cas simule la frontière entre les éléments constituants la barre de renforcement et le béton qui l'entoure. A cause de la discontinuité du matériau au niveau de cette interface, cette dernière possède une résistance d'adhérence f_{cs}' moins importante que la résistance à la traction du béton f_t' ; donc seule la composante des contraintes dans le béton perpendiculaire à cette interface est prise en compte. Si cette contrainte dépasse la résistance d'adhérence ceci implique qu'il y'a perte d'adhérence entre Acier - Béton et par conséquent formation des fissures le long de cette interface.

Une séparation complète et une perte d'adhérence ou de contact sur les faces derrières les nervures résultent du soulèvement du béton de la barre de renforcement en Acier [38], [37]. Elle ne représente pas réellement l'interface entre l'acier et le béton, mais l'augmentation du mouvement de la barre, garde le béton en contact avec l'acier sur les faces des nervures. Le contact entre l'acier et le béton doit être maintenu, s'il se perde, il en résulte une perte d'adhérence complète, ceci se traduit mathématiquement par l'équation :

$$|S_{RB}| \cdot \cos \gamma \geq |S_{LB}| \cdot \sin \gamma \Rightarrow \frac{|S_{RB}|}{|S_{LB}|} > \operatorname{tg} \gamma \quad (3.65)$$

Où : $|S_{RB}|$ est la valeur absolue du glissement dans la direction radiale;

$|S_{LB}|$ est la valeur absolue du glissement dans la direction longitudinale;

et γ l'angle d'inclinaison des faces de nervures par rapport à l'axe de la barre

(Figure 3.7).

3.6.2) Relations entre largeur de fissure, les contraintes de traction normale et les forces nodales :

a) Détermination de la largeur de fissure :

L'introduction d'une relation d'amollissement après fissuration est une partie essentielle dans l'analyse en éléments finis des structures en béton.

Dans l'analyse des fissures continues (smeared crack models), la relation d'amollissement est réalisée à travers la relation contrainte - déformation aux points d'intégration à l'intérieur de l'élément solide.

Mais dans l'analyse des fissures discrètes (discrete crack models), la fissure est simulée par séparation des noeuds le long des frontières communs entre les éléments.

Une relation Force - Déplacement basée sur la mécanique de rupture du béton est définie sur les deux faces de la fissure dans le béton, pour lesquelles les contraintes normales à la fissure sont directement liées à la largeur de fissure.

Les contraintes de cisaillement qui doivent se transmettre à travers cette surface fissurée sont négligeable (Figure 3.8).

Considérons deux noeuds fractionner numérotés 1 et 2 le long d'une fissure, représentés par deux composantes U_1 et U_2 autour de la position d'origine (initiale) ; le déplacement relative entre ces deux noeuds est différent de zéro ; il est noté U_{12} et défini : $U_{12} = U_1 - U_2$.

La projection de U_{12} sur le vecteur unitaire \mathbf{n} , perpendiculaire à \mathbf{L} est notée ΔU_n . Comme cette valeur représente la distance entre les deux faces d'une fissure nommée « largeur de fissure » est notée W , définie mathématiquement par la magnitude de ΔU_n comme suit :

$$W = |\Delta U_n| = U_{12} \cdot n \quad (3.66)$$

b) Le mot amollissement après fissuration du béton est un terme utilisé pour décrire la réduction des contraintes moyenne de traction transférée à travers la section fissurée former.

La magnitude des contraintes de traction augmente si la largeur de fissure augmente, ce concept est établi par un nombre de test d'investigation.

Cette relation de contrainte comme l'indique la Figure 3.8 est déterminée par une analyse expérimentale [37].

Analyse des résultats de ces tests, indique que W_c peuvent être estimée constante et égale à $W_c = 0,0327\text{mm}$ pour les différents matériau en béton.

Des idéalisations des courbes de déformations utilisent des relations linéaires et bilinéaires entre les contraintes de traction normale et largeur de fissure.

Une relation linéaire discontinue entre largeur de fissure et contrainte de traction normale illustrée à la *Figure 3.9* est utilisée pour modéliser le comportement des fissures [33].

- Relation linéaire (Hillerborg 1985) :

Dans ce cas les contraintes de traction sur les deux faces de la fissure tend vers zéro lorsque W_c augmente. Si la largeur de fissure est inférieure à W_c , la contrainte de traction associée à W est σ_{tw} définie par l'équation d'une droite :

$$\begin{cases} \sigma_{tw} = f_t \left(1 - \frac{W}{W_c} \right) & \dots \dots \dots 0 \leq W \leq W_c \\ \sigma_{tw} = 0 & \dots \dots \dots W > W_c \end{cases} \quad (3.67)$$

Où : f_t est la résistance à la traction du béton.

- Relation Bilinéaire (Gerstle et Al 1982) :

Cette relation est généralement utilisée pour simuler le comportement amolli du béton. Sur la *Figure 3.9* la ligne *AE* est utilisée pour diviser l'axe des coordonnées (de déformation \equiv largeur de fissure) en deux parties :

- La partie sur la droite représente la largeur de fissure. Si on suppose que l'aire du diagramme à droite de la *Figure 3.9* est égale à l'aire du diagramme d'une relation linéaire, la largeur de fissure ultime dans ce cas doive être dans l'ordre de quatre fois W_c définie dans une relation linéaire, de ce fait $W_c^* = 4,083 \cdot W_c$.
- La partie sur la gauche représente la déformation ε .

- Relation linéaire Discontinue :

La branche d'amollissement de la courbe bilinéaire inclut deux segments de droite *AB* et *BC*. La ligne *AB* a une pente négative, avec une magnitude considérable, par ce que les contraintes à ce segment produisent plus de déplacement (cette zone est plus sensible au déplacement). L'extension de la ligne *CB* de la *Figure 3.9* vers la verticale (la ligne *AE*) au point *D*, nous donne la ligne *DC*, qui est utilisée pour approximer la relation entre les contraintes de traction et la largeur de fissure.

De ce fait, les contraintes de traction sont représentées par les lignes *OADBC*, mais elles ne sont pas continues dès l'apparition de la fissure.

c) La détermination de la rigidité tangentielle k_s et les forces nodales équivalente à la distribution des contraintes de traction normale des éléments d'interfaces fissurés:

La distribution des tractions normale entre les deux faces de la fissure est simulée par des éléments en ressort connectant deux paires de noeuds fractionner, similaire aux éléments

d'interface proposé par Ngo et Scordolis (1967) [23], qui simule aussi l'adhérence entre Acier-Béton.

On contribue à cet élément de ressort une rigidité k_{w_i} et des forces F_{w_i} associées à la largeur de fissuration W_i au noeud « I ».

La Figure 3.10 représente un élément d'interface de fissure calculé par le même principe des éléments d'interfaces simulant l'adhérence entre Acier - Béton. Il en résulte donc, que la matrice de rigidité du ressort entre les deux noeuds fractionner est la suivante :

$$[k_{W_i}] = n_1 \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & -d_1 & -d_3 \\ d_3 & d_2 & -d_3 & -d_2 \\ -d_1 & -d_3 & d_1 & d_3 \\ -d_3 & -d_2 & d_3 & d_2 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (3.68)$$

$$\text{Où : } \begin{cases} n_1 = \frac{L}{2} \\ d_1 = k_s \cdot \cos^2 \theta + k_n \cdot \sin^2 \theta \\ d_2 = k_s \cdot \sin^2 \theta + k_n \cdot \cos^2 \theta \\ d_3 = \frac{k_s - k_n}{2} \cdot \sin 2\theta \end{cases} \quad (3.69)$$

Comme ce ressort possède une rigidité normale égale à la rigidité tangentielle : $k_s = k_n = k_{W_i}$.

Pour une relation linéaire discontinue entre largeur de fissure et force nodale équivalente (Figure 3.11 [37]). La force appliquée au ressort est donnée par :

$$F_{W_i} = k_{W_i} \cdot (W_i - W_c^*) \quad \text{pour } 0 \leq W_i \leq W_c^* \quad (3.70)$$

Où : k_{W_i} est la pente de la courbe entre la force nodale F_{w_i} et la largeur de fissure W_i .

Donc la rigidité du ressort k_{w_i} correspondant à la largeur de fissure W_i , est la pente de la courbe, la valeur de k_{w_i} est négative par ce que F_{w_i} est positive et W_i est inférieure à W_c^* .

Alors, l'élément de liaison en ressort simulant le changement des forces nodales de traction normale et la largeur de fissure, a une rigidité k_{w_i} donnée par l'équation :

$$k_{w_i} = \frac{F_{W_i}}{W_i - W_c^*} \quad (3.71)$$

On se référant à l'équation (3.57), on trouve que :

$$k_s = k_n = k_{W_i} \Rightarrow [k_{W_i}] = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & -d_2 \\ -d_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 & d_2 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (3.72)$$

Ce qui coïncide avec la rigidité du ressort à 2 noeuds et 1 DDL par noeud :

$$\left[k_{W_i} \right]_{2x2} = \begin{bmatrix} k_{w_i} & k_{w_i} \\ k_{w_i} & k_{w_i} \end{bmatrix}_{2x2} \quad (3.73)$$

Le vecteur force correspondant aux contraintes de traction normale appliquée le long de la fissure est obtenu par intégration sur la longueur de la fissure en utilisant le principe de travail virtuel :

$$\langle F \rangle \cdot \{ \delta U_n \} = \int_L S \cdot \delta U_n \cdot dL = \int_L \{ N \}^T \cdot \{ S \} \cdot dL \quad (3.74)$$

Où : $\langle F \rangle = \{ F \}^T = \begin{pmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{2x} & F_{2y} \end{pmatrix}$ est le vecteur de force nodale;

$\langle S \rangle = \begin{pmatrix} t_{1x} & t_{1y} & t_{2x} & t_{2y} \end{pmatrix}$ Sont les tractions aux noeuds dans les directions x et y;

$$\{ N \} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ -N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 \end{pmatrix}_{4x2} \quad \text{Sont les fonctions d'interpolations définies précédemment}$$

par l'équation (3.40) pour un élément d'interface simulant l'adhérence entre Acier - Béton. Il en résulte donc :

$$F_t = \int_0^L N^T \cdot t \cdot dL = \int_{-1}^1 N^T \cdot t \cdot \det J \cdot d\xi = \frac{L}{2} \cdot \int_{-1}^1 \{ N^T \} \cdot \{ t \} \cdot d\xi \quad (3.75)$$

Dans le repère local (ξ, η) de la fissure, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} f_{\xi 1} \\ f_{\eta 1} \\ f_{\xi 2} \\ f_{\eta 2} \end{pmatrix} = \frac{L}{2} \cdot \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ -N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t_{\xi_1} \\ t_{\eta_1} \end{pmatrix} \cdot d\xi \quad (3.76)$$

$$\text{Avec : } \int_{-1}^1 N_1 \cdot d\xi = \int_{-1}^1 \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \cdot d\xi = +1 \quad (3.77)$$

$$\text{Nous obtenons donc : } \begin{pmatrix} f_{\eta_1} \\ f_{\eta_2} \end{pmatrix} = \frac{L}{2} \cdot t_n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

Où : $t_n = \sigma_{tw}$ est la contrainte appliquée le long de la fissure.

Les forces $\{ F_t \}$ et la rigidité $\left[k_{W_i} \right]$ sont assemblées dans le vecteur de charge totale $\{ F \}$ et la matrice de rigidité totale $[K]$ par le même principe d'assemblage.

Stratégie de résolution [37] :

Trois techniques différentes sont possibles pour écrire les équations constitutives :

★ La méthode n°1 : basée sur un contrôle du déplacement ; définie mathématiquement par : $\{ \delta U_i \}^T \cdot \{ \delta U_i \} = (\Delta l)^2$ (3.79)

Où : Δl = Longueur d'arc à la fissure;

δU_i = Déplacement accumulé pour chaque étape de chargement.

* La méthode n°2 : basée sur un contrôle de la largeur de fissure, ce contrôle est généralement utilisé là où il y'a formation de fissure (fractionnement des noeuds), donc un calcul de la norme de fissuration est recommandé. Elle se définit mathématiquement par :

$$\{W_i\}^T \cdot \{W_i\} = (\Delta l)^2 \quad (3.80)$$

Où :

W_i = est le vecteur de largeur de fissure, définit par le déplacement relatif des deux paires de noeuds.

* La méthode n°3 : basée sur un contrôle d'énergie de rupture. C'est le critère de base du mécanisme de rupture linéaire - élastique. Il est nommé le critère d'énergie de rupture définit comme suit : la propagation de la fissure apparaît lorsque l'énergie libérée lors de la fissuration est suffisante pour fournir toutes l'énergie nécessaire au développement de cette fissure, elle est exprimée mathématiquement par :

$$\Delta W_c + \Delta U \leq \Delta W \quad (3.81)$$

Où : ΔW_c = L'incrément d'énergie requis pour le développement de la fissure ;

ΔW = L'incrément du travail externe ;

ΔU = L'incrément d'énergie de déformation.

La condition de propagation d'une ou plusieurs fissure est contrôlée par l'énergie d'équilibre associée à l'incrément de fissure prolongée, elle est définie comme suit :

$$\Delta W_c > \Delta W - \Delta U \quad (3.82.a)$$

Pour une seule fissure stable

$$\Delta W_c = \Delta W - \Delta U \quad (3.82.b)$$

Pour l'agrandissement des fissures naissantes (l'équilibre d'énergie)

$$\Delta W_c < \Delta W - \Delta U \quad (3.82.c)$$

Pour une propagation des fissures (un type de fissuration instable)

Où : ΔW_c = la somme d'énergie requis pour former l'ouverture de la fissure dans la structure;

et $\Delta W - \Delta U$ = l'énergie totale disponible à la propagation de la fissure.

- l'équation (3.82.a) désigne que l'énergie disponible à la propagation de la fissure est inférieure à l'énergie requise pour l'ouverture de la fissure; cette condition définit le type de distribution des fissures stable.

- l'équation (3.82.c) désigne que l'énergie disponible à la fissuration est supérieure à l'énergie requise pour former l'ouverture de la fissure. Ceci résulte de la propagation des fissures instables.

- il est extrêmement très difficile d'atteindre l'équilibre indiqué par l'équation (3.82.b). Cette équation est utilisée comme équation constitutive.

Pour cela un facteur de convergence de charge η est utilisé [37] à condition que $\eta < \eta_s = 0,6$

$$\text{Avec : } \eta = \frac{\|Q_i\|}{\|\lambda_i \cdot F_i\|} \quad (3.83)$$

Où : Q_i = La force de déséquilibre dû à l'ouverture et la propagation des fissures;

$\lambda_i F_i$ = L'incrément du vecteur de charge extérieure.

3.7) Méthodes de résolution :

Des non linéarités apparaissent dans la formulation de problèmes physique pour deux raisons :

- les paramètres physiques supposés indépendants de U_n dans un modèle linéaire, tels que le module d'Young, les coefficients, etc., deviennent des fonctions de U_n . C'est par exemple le cas de la plasticité ;

- des termes non linéaires par rapport aux inconnues du problème apparaissent dans les équations aux dérivées partielles, même lorsque les propriétés physiques sont indépendantes de U_n .

La méthode des éléments finis conduit à une formulation discréte des problèmes non linéaires qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :

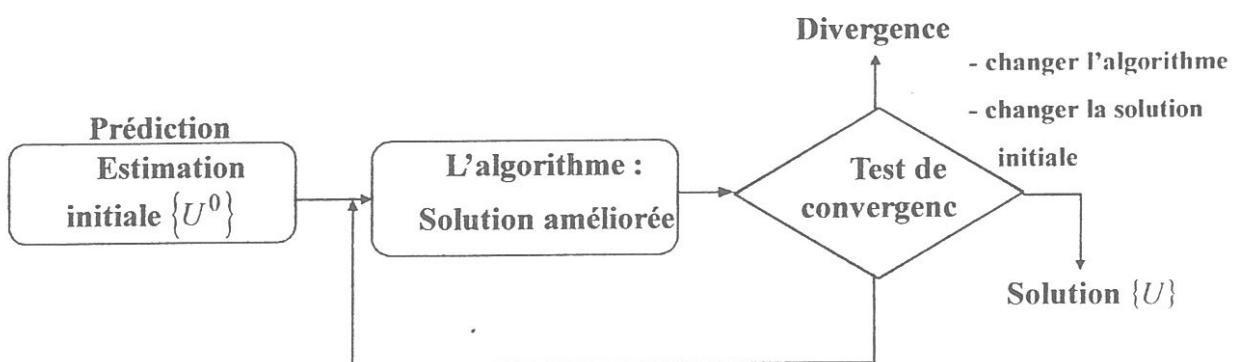
$$W = \langle \delta U_n \rangle \cdot ([K(U_n)] \cdot \{U_n\} - \{F\}) = 0 \quad \text{Pour tout } \langle \delta U_n \rangle \quad (3.84)$$

Où en remplaçant U_n par U pour simplifier les notations :

$$[K(U)] \cdot \{U\} = \{F\} \quad \text{ou} \quad \{R(U)\} = \{F\} - [K(U)] \cdot \{U\} = 0 \quad (3.85)$$

Résoudre le système d'équation précédent revient à chercher le vecteur $\{U_n\}$ qui rend le résidu $\{R(U)\}$ aussi proche que possible de zéro. La solution exacte rend $\{R(U)\}$ nul.

La recherche de $\{U\}$ se fait de manière itérative selon l'organigramme suivant [37] :



La majorité des algorithmes conduit à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération (pour chaque pas de charge). Le choix d'un algorithme de résolution doit tenir compte de plusieurs facteurs :

- le type des non linéarités;

- l'existence d'une ou plusieurs solutions;
- la disponibilité d'une méthode de construction d'une solution approchée;
- la précision et la rapidité de convergence désirées;
- le risque de convergence.

En pratique, il n'existe pas de méthode valable pour tous les cas; la stratégie de résolution doit s'adapter, par expérience, à une classe de problèmes données, en faisant appel à une combinaison de trois méthodes de bases suivantes :

- Méthode de Substitution;
- Méthode de Newton-Raphson;
- Méthode Incrémentale.

La méthode choisie dans notre cas est la Méthode Incrémentale (ou Pas a Pas) (*Figure 3.12*) [14].

La solution initiale joue un rôle important dans les méthodes itératives. Selon le choix de cette solution, les méthodes peuvent diverger ou converger vers une solution non acceptable (*Figure 3.12.a*).

La méthode incrémentale consiste à remplacer la résolution de l'équation :

$$[K(U)].\{U\} = \lambda.\{F_0\} = \{F\} \quad (3.86)$$

Par la résolution successive de :

$$[K(U_j)].\{U_j\} = \lambda_j.\{F_0\} \quad (3.87)$$

Ou : $\lambda_j = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda$

La solution initiale utilisée pour calculer U_j est la solution U_{j-1} obtenue à l'étape précédente. Chaque étape constitue un problème non linéaire qui se résout avec une ou plusieurs itérations de la méthode de substitution ou la méthode de Newton-Raphson.

La méthode incrémentale utilisant une itération de Newton-Raphson à chaque étape, s'écrit pour un niveau donné de sollicitations λ_i :

$$\begin{aligned} \{R(U_{j-1})\} &= \lambda_{j-1}.\{F_0\} - [K(U_{j-1})]\{U_{j-1}\} \\ [K_i(U_{j-1})].\{\Delta U_j\} &= \{R(U_{j-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1}).\{F_0\} \\ \{U_j\} &= \{U_{j-1}\} + \{\Delta U_j\} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Cet algorithme est présenté graphiquement pour une variable sur la *Figure 3.12.a, b*.

Cette méthode s'écrit pour un niveau donné de sollicitations λ_j :

$$\begin{aligned} [K_i(U_j^{i-1})].\{\Delta U_j^i\} &= \{R(U_j^{i-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1}).\{F_0\} \\ \{U_j^i\} &= \{U_j^{i-1}\} + \{\Delta U_j^i\}; i = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.89)$$

La valeur de $\{U_j^{i-1}\}$ étant connue, nous pouvons construire les matrices élémentaires $[k(u^{i-1})]$, puis les assembler pour obtenir $[K(U^{i-1})]$ et enfin résoudre le système d'équation linéaire (3.73) en $\{\Delta U^i\}$.

L'algorithme de substitution :

Calculer une solution approchée $\{U^0\}$, éventuellement nulle.

Construire $\{F\}$ par assemblage des vecteurs élémentaires $\{f\}$.

Pour chaque pas de charge $\lambda_j = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda$

Pour chaque itération $i = 1, 2, \dots$

Extraire les valeurs $\{u^{i-1}\}$ de $\{U^{i-1}\}$

Calculer $[k(u^{i-1})]$

Calculer le résidu élémentaire $\{r\} = \{f\} - [k].\{u^{i-1}\}$

Assembler comme dans un problème linéaire :

$[k]$ Dans $[K]$

$\{r\}$ Dans $\{R\}$

Résoudre comme dans un problème linéaire : $[K].\{\Delta U^i\} = \{R^i\}$

Construire la nouvelle estimation de la solution :

$\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \omega.\{\Delta U^i\}$

Calculer la norme $\|n\|$ de $\{\Delta U^i\}$

Test de convergence utilisant $\|n\|$.

Avec : ω est le facteur de sur relaxation, permet d'améliorer la vitesse de convergence. Sa valeur dépend du problème; elle est déterminée par expérimentation numérique.

3.8) Critère de convergence :

La convergence peut être appréciée d'une manière globale ou locale. En pratique nous utilisons souvent des normes relatives [14]. En terme global, le processus itératif est dit avoir convergé si la condition suivante à l'itération « i » est satisfaite :

$$\|n\| = \frac{\sqrt{\langle \Delta U^i \rangle \cdot \langle \Delta U^i \rangle}}{\sqrt{\langle U^i \rangle \cdot \langle U^i \rangle}} \quad (\text{Critère en déplacement}) \quad (3.89)$$

Le processus itératif est arrêté lorsque :

$\|n\| < \varepsilon$ Avec, par exemple : $\varepsilon = 0.05$ (5%).

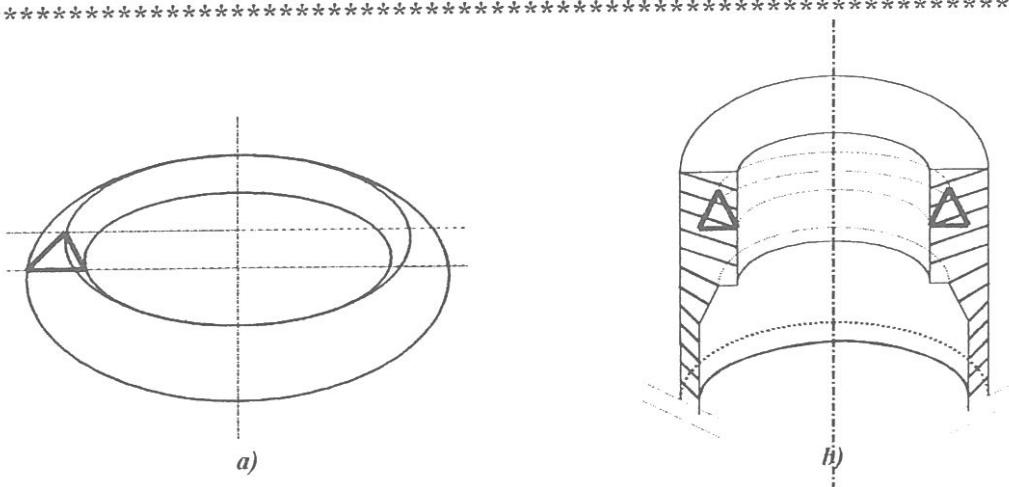


Fig.3.1.a) élément à symétrie axiale;
b) solide à symétrie axiale [27].

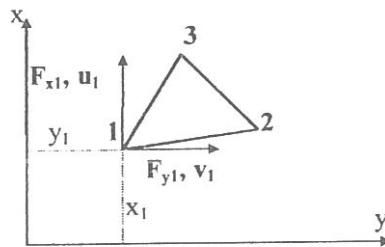


Fig.3.2 Systèmes de coordonnées et numérotation des noeuds
Pour l'élément de solide à symétrie axiale [27].

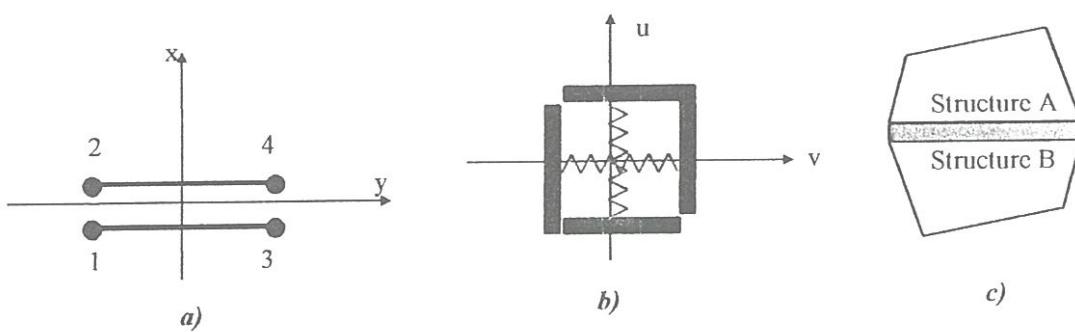


Fig.3.3.a) élément sans épaisseur développé par Goodman;
b) élément de type ressort développé par Ngo & Al;
c) élément d'interface avec épaisseur [27].

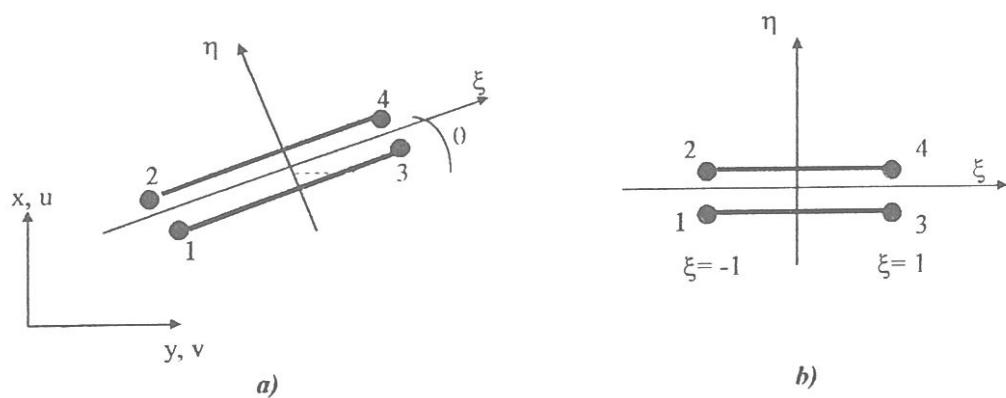


Fig.3.4.a) élément joint dans le système global;
b) élément de référence dans son repère globale [28].

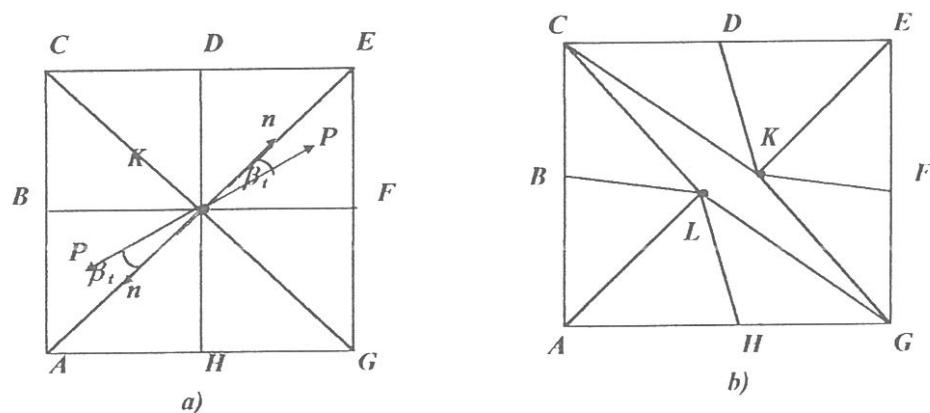


Fig.3.5 Critères de fissuration à l'intérieur du béton [28].

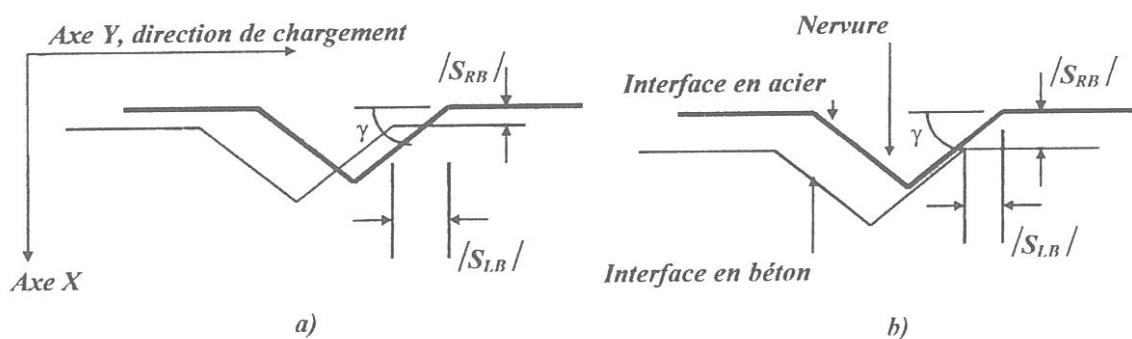


Fig.3.6.a) Acier en contact avec le béton après perte d'adhérence;
b) Acier en dehors du béton après perte d'adhérence [37].

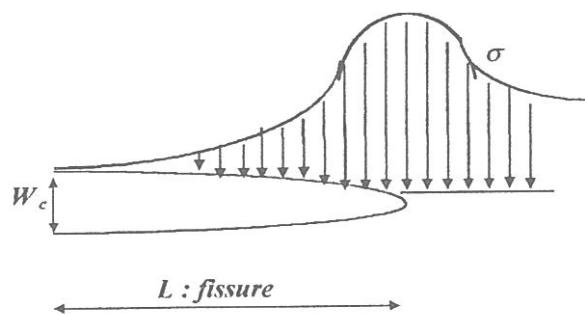


Fig.3.7 La variation des contraintes normales le long de la fissure [33].

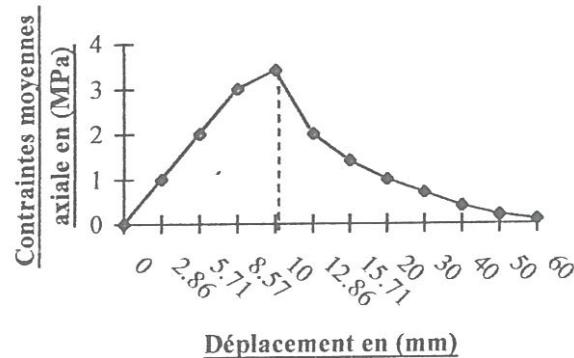


Fig.3.8 Courbe contrainte de traction / largeur de fissure [37].

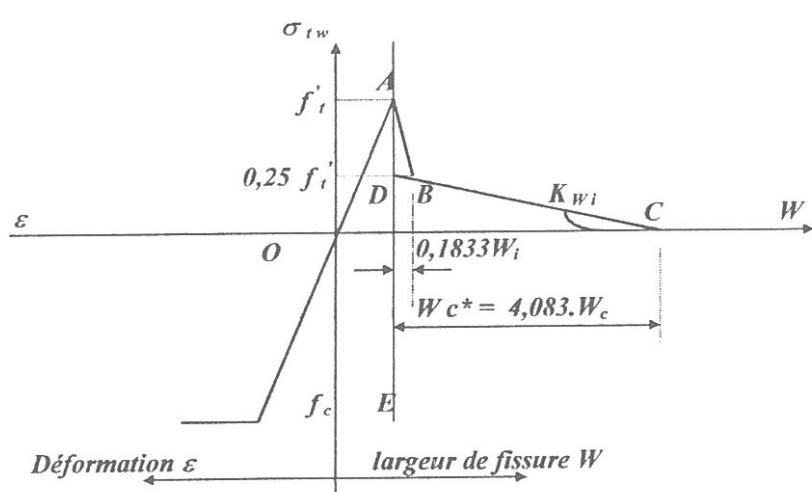


Fig.3.9 Relation Bilinéaire : contrainte normale de traction / largeur de fissure [37].

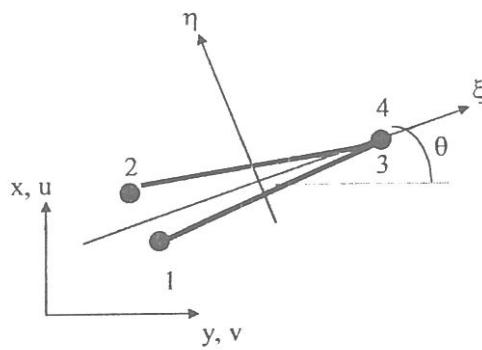


Fig.3.10 L'élément d'interface utilisé pour modéliser la fissure.

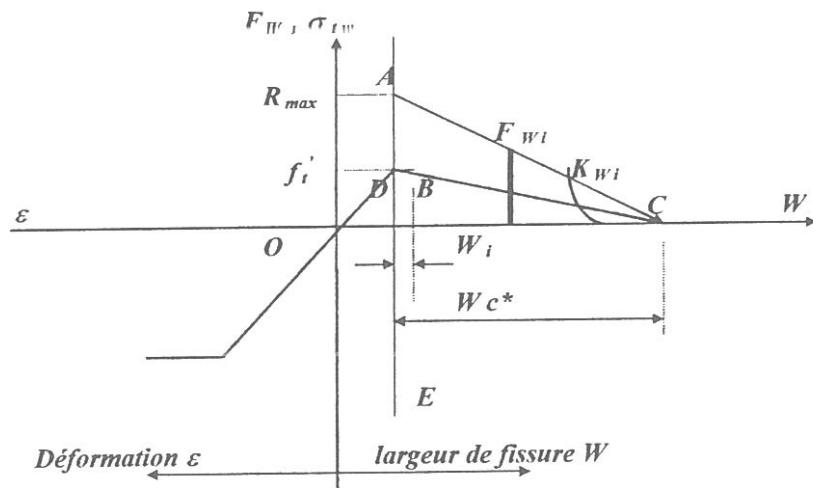


Fig.3.11 Courbe des forces nodales équivalentes [37].

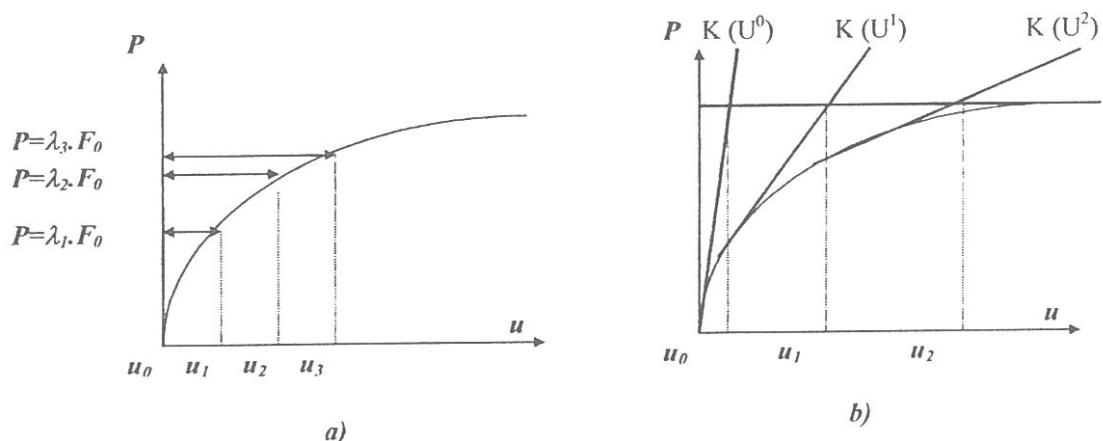


Fig.3.12.a) Méthode incrémentale à une itération de Newton-Raphson;

.b) Méthode de substitution, le cas de convergence [14].

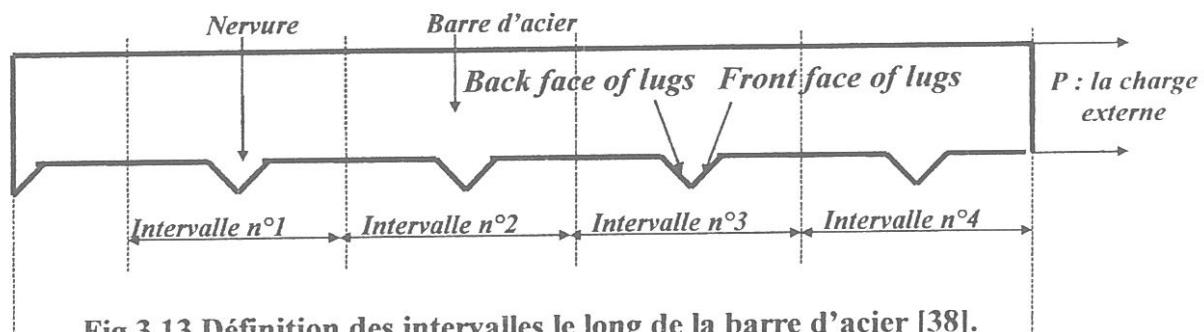


Fig.3.13 Définition des intervalles le long de la barre d'acier [38].

C chapitre 04

Interprétation des résultats

SOMMAIRE

- 4.1) Modèle numérique.**
- 4.2) Simulation numérique du test de GOTO'S N°1.**
- 4.3) Propagation des fissures de plus d'importance.**
- 4.4) Fissure de séparation longitudinale.**
- 4.5) Résistance à la compression du béton.**
- 4.6) Calcul des contraintes d'adhérence et de glissement d'adhérence.**
- 4.7) La perte d'adhérence progressive.**
- 4.8) La variation locale de l'adhérence.**
- 4.9) Courbe rigidité tangentielle des éléments d'interfaces en fonction du chargement.**
- 4.10) Test de validation du programme de la barre d'acier.**
- 4.11) Variation de la convergence en fonction du pas de charge.**
- 4.12) Variation des contraintes d'adhérences le long de la barre d'acier.**

4.1) Modèle numérique utilisé :

On utilise dans l'analyse une éprouvette cylindrique de longueur L , symétrique par rapport au plan central A , comme l'indique la *Figure 4.1.a*.

Donc seule la moitié de l'élément est utilisée. Modéliser le problème axisymétrique en 3 dimensions (3D) peut être traité à travers l'utilisation d'analyse par éléments finis en deux dimensions (2D) d'éléments axisymétriques. Il résulte donc, qu'un quart du plan de la section transversale à travers les axes de symétrie est seulement modélisé, comme l'indique la *Figure* précédente.

Des éléments triangulaires régulier avec deux angles à 45° et un angle de 90° sont utilisés pour le béton (*Figure 4.1.b*). La taille du maillage dépend de l'espacement entre les nervures « lugs » de la barre de renforcement ayant un diamètre $d = 19\text{mm}$ (*Figure 4.1.c*) [18]. Le *Tableau 4.1* indique toutes les caractéristiques géométriques de la barre d'acier utilisée.

Tableau 4.1 Caractéristiques géométriques de la barre d'acier ($\phi 19$).

Barre		Nervure		
Diamètre (mm)	Surface (mm ²)	espacement (maximum) (mm)	Hauteur (minimum) (mm)	largeur (maximum) (mm)
19	283,53	16,76	1,27	3,81

Dans les tests, une éprouvette prismatique axialement chargée par application d'une force de traction directe à la barre d'acier « *Pull-out* » est entourée par un prisme concentrique en béton. Le prisme a une section carrée de côté « a » et la barre de renforcement est de diamètre « d ». La solution par la méthode des éléments finis (MEF) consiste à transformer la section transversale carrée en une section circulaire équivalente (*Figure 4.2*) [38].

Données du modèle :

$d = 19\text{mm}$: Diamètre de la barre;

$a = 120\text{mm}$: Côté du carré;

$E_c = 24822\text{ MPa}$: Module d'élasticité du béton;

$E_s = 199955\text{ MPa}$: Module d'élasticité de l'acier;

$f_c' = 29\text{ MPa}$: Résistance à la compression d'un cylindre du béton;

$f_t' = 0,623\sqrt{f_c'} = 3,4475(\text{MPa})$: Résistance à la traction du béton;

$f_{cs}' = 1,72(\text{MPa})$: Résistance d'adhérence entre Acier-Béton.

4.2) Simulation numérique du test de GOTO'S :

Ce test correspond à une éprouvette de longueur $L = 150\text{mm}$. La simulation consiste à transformer la section carrée en une section transversale équivalente. Le diamètre est obtenu par égalité des surfaces : *Surface du carré = surface du cercle* (on obtient le diamètre externe du béton et le diamètre interne des points de mesure des déplacements par l'intermédiaire des jauge extenso métriques).

Nous obtenons le diamètre externe du béton et le diamètre interne des points de mesure des déplacements par l'intermédiaire des jauge extenso métriques.

$$\frac{\pi \cdot D_{\text{ext}}^2}{4} = a^2 \Rightarrow D_{\text{ext}} = \sqrt[2]{\frac{4 \cdot a^2}{\pi}} = 135,4\text{mm} \quad (4.1)$$

$$\frac{\pi \cdot D_{\text{int}}^2}{4} = a_{\text{int}}^2 \Rightarrow D_{\text{int}} = \sqrt[2]{\frac{4 \cdot a_{\text{int}}^2}{\pi}} = 67,7\text{mm} \quad \text{Avec : } a_{\text{int}} = \frac{a}{2} = 60\text{mm} \quad (4.2)$$

La simulation du test d'arrachement « *pull – out* » de cette barre a été faite par la méthode des éléments finis (*MEF*) en utilisant le logiciel de programmation *FORTRAN 2000* (*Annexe C*), qui contient les programmes de calcul de ce test pour le deuxième cas de chargement et pour les différentes itérations. Les résultats obtenus sont : les déplacements nodaux ; la valeur de convergence ; les contraintes normales et principales appliquées aux noeuds.

Le maillage utilisé et la distribution des fissures et l'agrandissement du maillage pour le 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} et 9^{ème} cas de chargement sont représentés par les *Figures 4.3, a, b, c, d et e* dans un ordre croissant de chargement (146,875; 184,375; 221,875 et 371,875 MPa). Le chemin de fissuration indiqué dans ces *Figures* est tracée par des tirées représentant respectivement les frontières externes de la structure ; et l'ouverture des fissures avec une largeur supérieure à W_c (largeur critique d'ouverture de la fissure).

La comparaison de l'elongation de l'éprouvette entre l'expérimental et l'analyse numérique est représentée par la *Figure 4.4*. Ces tests correspondent à l'emplacement des jauge extenso métriques pour le test expérimental et au cercle interne équivalent pour l'analyse numérique. Leurs valeurs numériques sont représentées par le *Tableau 4.2* correspondant aux huit cas de chargement.

Tableau 4.2 Contraintes dans l'acier / Déplacement axial du test et d'analyse.

contraintes dans l'acier (MPa)	71,875	109,375	146,875	184,375	221,875	259,375	296,875	334,375
déplacement axial dû au test (10^{-3}) (mm)	13,16	26,32	47,37	52,63	63,16	73,68	100,00	110,53
déplacement axial dû à la MEF (10^{-3}) (mm)	13,35	26,77	47,35	52,75	63,62	73,74	100,13	110,93

4.3) Propagation des fissures :

Les fissures naissent sur les faces arrière des nervures (*back faces*) et elles se propagent vers les faces externes de l'éprouvette. Lors de l'augmentation du chargement, on remarque que les fissures se propagent lentement mais progressivement comme l'indique la *Figure 4.3*; ces fissures n'atteignent pas la surface extérieure de l'éprouvette même pour les grandes valeurs de chargement ($\sigma_8 = 334,375 \text{ MPa}$) (*Figure 4.5*).

Lorsqu'une fissure se propage et apparaît comme une fissure importante; d'autres fissures peuvent diminuer leurs largeurs ou bien elles se ferment.

La perte d'adhérence entre l'acier et le béton apparaît surtout sur les faces arrière des nervures (*back faces*). La partie de l'interface entre l'acier et le béton qui se trouve à l'arrière des nervures est plus exposé à la fissuration, avec apparition d'un vide entre la barre d'acier et le béton.

Une séparation apparente du contact entre l'acier et le béton sur les faces arrière des nervures résulte de la déformation produite par cette scission, mais elle ne représente pas l'interface entre l'acier et le béton. Ce contact est traité complètement par les contraintes d'adhérence locale à l'interface. Dans cette étude la résistance à la traction dans la direction circonférentielle (*hoop direction*) notée f_{th}' est prise égale à f_t' .

4.4) Fissure de séparation longitudinale :

On remarque la formation des fissures longitudinales sur les côtés du spécimen pour un niveau de contrainte $\approx 146,875 \text{ (MPa)}$, où la contrainte circonférentielle pour les deux derniers noeuds d'interfaces entre acier / béton dépassent la résistance à la traction du béton notée f_{th}' . Ce type de fissuration est modélisé par le modèle continu de fissure (*smeared approach*). Cette approche se définit comme suit : Lorsque la contrainte circonférentielle atteint la résistance à la traction du béton en un point, il y'a formation des fissures longitudinales et la largeur de la fissure est donc continue dans la direction circonférentielle. On peut considérer qu'il y'a compatibilité avec l'état de déformation plane plus que les conditions d'axisymétrie.

Les lignes en pointillés de la *Figure 4.1.b* représente les frontières des éléments qui ne sont pas susceptible de se fissurer lorsque la résistance à la traction dans la direction circonférentielle est atteinte.

On remarque aussi que des fissures longitudinales se développent seulement autour de l'interface acier - béton, et ne se propagent pas à l'intérieur du béton. Elles sont dans notre cas représentés graphiquement par des triangles bleu au noeuds sur la *Figure 4.3*. Les points où la contrainte radiale est supérieure à la résistance à la compression sont représentés graphiquement par des cercles rouge au noeuds sur la *Figure 4.3* à la fin les points où la contrainte radiale est supérieure à la résistance d'adhérence entre l'acier et le béton sont représentés graphiquement par des carrés vert au noeuds sur la *Figure 4.3*.

4.5) Résistance à la compression du béton :

La résistance à la compression dans le béton se développe sur les faces frontales des nervures (*front faces of lugs*). Les points où cette dernière est atteinte et pour lesquels des déformations plastique apparaissent sont représentés sur la *Figure 4.3* par des cercles rouge au nœuds sur l'axe de la barre de renforcement.

4.6) Calcul des contraintes d'adhérence et le glissement d'adhérence :

Sur l'interface acier - béton, il existe des forces (ou des contraintes) d'adhérence. La magnitude de ces forces appliquées sur la barre de renforcement est la même que celle appliquée sur le béton mais avec de signes contraires.

La composante de ces forces nodales assemblées par l'intégration des contraintes dans les éléments en Acier aux noeuds, représente les forces d'adhérences appliquées par la barre d'acier au béton.

Les forces nodales d'adhérence dans l'intervalle centré par les nervures sont calculées puis divisées par la surface nominale d'interface pour obtenir *les contraintes d'adhérences moyennes dans l'intervalle* notée σ_{IARB} , σ_{IALB} respectivement dans la direction radiale et longitudinale (σ_{IARB} , σ_{IALB} *interval averaged radial or longitudinal bond stress*). Les valeurs de ces contraintes respectivement dans la direction radiale et longitudinale sont indiquées dans les *Tableaux 4.3* et représentées graphiquement par les *Figures 4.6*.

Tableau 4.3.a Contraintes moyennes de chaque intervalle dans la direction radiale :

(σ_{IARB} the interval averaged radial stress).

Numéros d'intervalles	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4
contraintes dans l'acier (MPa)	σ_{IARB}	σ_{IARB}	σ_{IARB}	σ_{IARB}
0	0	0	0	0
71,875	-0,95	-1,29	-1,51	-0,82
109,375	-1,97	-2,73	-3,27	-2,00
146,875	-4,16	-5,78	-6,40	-4,26
184,375	-4,35	-5,63	-4,50	-7,17
221,875	-5,76	-7,69	-6,17	-10,04
259,375	-6,65	-8,87	-7,10	-11,60
296,875	-9,22	-12,48	-10,09	-15,94
334,375	-10,20	-13,79	-11,14	-17,65

Tableau 4.3.b Contraintes moyennes de chaque intervalle dans la direction longitudinale :
(σ_{IALB} the interval averaged longitudinal stress).

Numéros d'intervalles	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4
contraintes dans l'acier (MPa)	σ_{IALB}	σ_{IALB}	σ_{IALB}	σ_{IALB}
0	0	0	0	0
71,875	-0,39	-0,54	-0,66	-0,52
109,375	-0,79	-1,11	-1,37	-1,12
146,875	-1,65	-2,32	-2,73	-4,77
184,375	-1,73	-2,25	-3,80	-7,62
221,875	-2,20	-2,88	-4,61	-8,67
259,375	-2,54	-3,32	5,23	-10,02
296,875	-3,50	-4,63	-7,38	-13,60
334,375	-3,88	-5,12	-8,16	-15,06

Cette valeur de contrainte dans chaque intervalle pour le même état de chargement extérieure est prise en moyenne pour obtenir **les contraintes d'adhérences moyennes du spécimen** notée σ_{SARB} , σ_{SALB} (*the specimen averaged radial or longitudinal bond stress*) respectivement dans la direction radiale et longitudinale, leurs valeurs sont représentées dans les Tableaux 4.5 et représentées graphiquement par les Figures 4.7.a, b.

Tableau 4.4.a Contraintes d'adhérences moyennes du spécimen dans la direction radiale :
(σ_{SARB} the specimen averaged radial stress).

contraintes dans l'acier (MPa)	71,875	109,375	146,875	184,375	221,875	259,375	296,875	334,375
σ_{SARB} (MPa)	-1,14	-2,49	-5,15	-5,41	-7,42	-8,56	-11,93	-13,19

Tableau 4.4.b Contraintes d'adhérences moyennes du spécimen dans la direction longitudinale : (σ_{SALB} the specimen averaged longitudinal stress).

contraintes dans l'acier (MPa)	71,875	109,375	146,875	184,375	221,875	259,375	296,875	334,375
σ_{SALB} (MPa)	-0,53	-1,10	-2,87	-3,85	-4,59	-5,30	-7,27	-8,06

Pour chaque intervalle, les déplacements des noeuds à l'interface Acier / Béton notés U_x , U_y respectivement dans la direction radiale et longitudinale, sont calculés séparément pour chaque type de matériau. La différence entre le déplacement moyen de l'acier noté U_{IARS} (U_{IALS}) et celui du béton noté U_{IARC} (U_{IALC}) est défini comme **le glissement moyen dans la direction radiale et longitudinale**, qui est exprimé mathématiquement par :

$$\begin{cases} S_{IARB} = U_{IARS} - U_{IARC} \\ S_{IALB} = U_{IAIS} - U_{IAIC} \end{cases} \quad (4.3)$$

Les valeurs de ce glissement moyen (*interval averaged radial or longitudinal slip*) de chaque intervalle dans la direction radiale et longitudinale sont indiquées dans les Tableaux 4.5 et représentées graphiquement par les Figures 4.8.

Tableau 4.5.a Glissement moyen de chaque intervalle dans la direction radiale :

(S_{IARB} the interval averaged radial slip).

Numéros intervalles	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4
contraintes dans l'acier (MPa)	S_{IARB}	S_{IARB}	S_{IARB}	S_{IARB}
0	0	0	0	0
71,875	$-3,23.10^{-4}$	$-2,95.10^{-4}$	$-2,81.10^{-4}$	$-3,75.10^{-4}$
109,375	$-4,11.10^{-4}$	$-3,46.10^{-4}$	$-3,06.10^{-4}$	$-3,89.10^{-4}$
146,875	$-3,42.10^{-4}$	$-1,98.10^{-4}$	$-1,38.10^{-4}$	$-9,12.10^{-4}$
184,375	$-5,59.10^{-4}$	$-4,49.10^{-4}$	$-7,67.10^{-4}$	$-1,55.10^{-3}$
221,875	$-6,05.10^{-4}$	$-4,34.10^{-4}$	$-7,84.10^{-4}$	$-1,55.10^{-3}$
259,375	$-7,20.10^{-4}$	$-5,24.10^{-4}$	$-9,28.10^{-4}$	$-1,81.10^{-3}$
296,875	$-5,88.10^{-4}$	$-2,95.10^{-4}$	$-8,39.10^{-4}$	$-1,99.10^{-3}$
334,375	$-6,89.10^{-4}$	$-3,67.10^{-4}$	$-9,71.10^{-4}$	$-2,26.10^{-3}$

Tableau 4.5.b Glissement moyen de chaque intervalle dans la direction longitudinale :

(S_{IALB} the interval averaged longitudinal slip).

Numéros intervalles	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4
contraintes dans l'acier (MPa)	S_{IALB}	S_{IALB}	S_{IALB}	S_{IALB}
0	0	0	0	0
71,875	$2,39.10^{-3}$	$4,81.10^{-3}$	$7,29.10^{-3}$	$9,81.10^{-3}$
109,375	$3,39.10^{-3}$	$6,85.10^{-3}$	$1,04.10^{-2}$	$1,41.10^{-2}$
146,875	$4,00.10^{-3}$	$8,11.10^{-3}$	$1,24.10^{-2}$	$1,74.10^{-2}$
184,375	$5,41.10^{-3}$	$1,10.10^{-2}$	$1,72.10^{-2}$	$2,19.10^{-2}$
221,875	$6,41.10^{-3}$	$1,31.10^{-2}$	$2,06.10^{-2}$	$2,67.10^{-2}$
259,375	$7,53.10^{-3}$	$1,53.10^{-2}$	$2,41.10^{-2}$	$3,14.10^{-2}$
296,875	$7,97.10^{-3}$	$1,63.10^{-2}$	$2,60.10^{-2}$	$3,37.10^{-2}$
334,375	$9,05.10^{-3}$	$1,85.10^{-2}$	$2,95.10^{-2}$	$3,82.10^{-2}$

Ce glissement pour chaque pas de chargement est pris en moyenne sur tous les intervalles pour donner le glissement moyen du spécimen S_{SARB} (S_{SALB}) respectivement dans la direction radiale et longitudinale. Leurs valeurs sont indiquées aux Tableaux 4.6 et représentées graphiquement par les Figures 4.9.

Tableau 4.6.a Glissement moyen du spécimen dans la direction radiale :
(S_{SARB} the specimen averaged radial slip).

contraintes dans l'acier (MPa)	71,875	109,375	146,875	184,375	221,875	259,75	296,875	334,375
$S_{SARB} \cdot 10^{-4}$ (mm)	-3,18	-3,634	-3,97	-8,30	-8,43	-9,96	-9,30	-10,72

Tableau 4.6.b Glissement moyen du spécimen dans la direction longitudinale :
(S_{SALB} the specimen averaged longitudinal slip).

contraintes dans l'acier (MPa)	71,875	109,375	146,875	184,375	221,875	259,375	296,875	334,375
$S_{SALB} \cdot 10^{-3}$ (mm)	6,07	8,69	10,48	13,89	16,70	19,60	20,99	23,81

On remarque que les contraintes dans la direction radiale augmentent rapidement à partir du 3^{ème} cas de charge. Cette augmentation coïncide avec la formation de la première fissure, et elle se traduit par une dissipation d'énergie au niveau de la fissure.

4.7) La perte d'adhérence progressive :

Comme l'indique la Figure 4.6.b on remarque que σ_{ALB} augmente au niveau du au 4^{ème} intervalle pour le 3^{ème} cas de charge, avec formation de la fissure au niveau de cette nervure. Ces fissures se propagent graduellement vers l'extérieur (surface externe du béton) avec apparition de nouvelles fissures en se rapprochant vers le centre de symétrie de l'éprouvette (3^{ème} intervalle pour le 4^{ème} cas de charge et le 2^{ème} intervalle pour le 9^{ème} cas de charge). La progression de la détérioration se fait, avec l'augmentation de la contrainte dans l'acier.

On remarque aussi une perte d'adhérence progressive entre l'acier et le béton due à la séparation du béton de la barre d'acier et à la propagation des fissures au niveau des faces arrière des nervures (*back faces of lugs*). Une augmentation du mouvement de la barre d'acier maintient une certaine adhérence au niveau des faces frontales de nervures et par conséquent des forces nodales de compression peuvent apparaître sur ces faces grâce au contact Acier / Béton. Cette perte d'adhérence peut être exprimé mathématiquement par :

$$|S_{RB}|x \cos \gamma \geq |S_{LB}|x \sin \gamma \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow \frac{|S_{RB}|}{|S_{LB}|} \geq \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}$$

Où : $|S_{RB}|$ & $|S_{LB}|$ sont les valeurs absolues du glissement dans la direction radiale et longitudinale, et γ représente l'angle d'inclinaison des faces des nervures par rapport à l'axe de la barre de renforcement.

En plus de cette condition, il faut que $\sigma_x > f_{cs}'$, cette dernière aura lieu au niveau du 5^{ème} cas de charge pour le dernier noeud modélisant la liaison acier / béton. Cette perte d'adhérence se traduit par une perte de la rigidité du ressort qui modélise l'interface acier / béton à ce noeud.

Là où il y'a apparition d'une fissure dominante et dès qu'il y'a propagation des fissures longitudinales, les contraintes d'adhérences à cet intervalle se situant sur les faces arrière des fissures sont presque entièrement perdues à la montée de $|S_{RB}|$ (formation d'une fissure non potentielle donc non chargée).

La perte d'adhérence entre l'acier et le béton se propage vers l'axe de symétrie de la barre d'acier où aura lieu une perte de rigidité du ressort d'interface modélisant l'interface acier/béton au noeud juste avant le précédent pour le 7^{ème} cas de charge.

4.8) Variation locale de l'adhérence :

On remarque que σ_{IALB} dans l'intervalle n°4 à partir du 3^{ème} cas de charge possède une magnitude inférieure à celle des autres intervalles (plus grande en valeur absolue), se traduisant par l'apparition de la première fissure au niveau de la nervure de cet intervalle, qui est le résultat du glissement entre l'acier et le béton. Par conséquent, les contraintes d'adhérence longitudinales sont réduites.

On observe ensuite une deuxième réduction des σ_{IALB} dans l'intervalle n°3 à partir du 4^{ème} cas de charge qui correspond à la formation de la deuxième fissure.

On remarque qu'il y'a aussi apparition d'une compression due à l'apparition de la première fissure au niveau de la nervure du 4^{ème} intervalle pour le 3^{ème} cas de charge.

Dans l'intervalle n°3 où il y'a apparition de la seconde fissure, on remarque une autre augmentation légère des contraintes.

4.9) Courbe rigidité tangentielle des éléments d'interfaces en fonction du chargement:

Dans le but de mieux comprendre le phénomène d'oscillation des contraintes [28], et étant donné que ce problème est lié aux modes de déplacement relatif de l'élément d'interface, il est clair que les valeurs propres de la matrice de rigidité élémentaire des éléments d'interface $\underline{\underline{k}}$ peuvent nous renseigner sur ces oscillations.

A cet effet, nous calculons les valeurs propres de la matrice de rigidité élémentaire des éléments d'interface $\underline{\underline{k}}$ dans le cas d'une intégration de Newton - Cotes. Ces valeurs propres sont représentées sur les Figures 4.10 pour tous les cas de chargement et pour toutes les inclinaisons.

Le paramètre variant utilisé pour définir le comportement de l'interface est la rigidité tangentielle k_s tout en considérant que la rigidité normale k_n est prise constante pendant la variation du chargement. Les valeurs de la rigidité tangentielle sont indiquées dans le Tableau 4.7, et représentées graphiquement sur la Figure 4.11.

Tableau 4.7 Rigidité tangentielle des éléments d'interfaces en fonction du chargement.

Contraintes dans l'acier (MPa)	71,875	109,375	146,875	184,375	221,875	259,375	296,875	334,375
La rigidité tangentielle k_s (N/mm) (10^{+4})	1,00	1,5	2,85	2,25	2,65	2,60	3,50	3,40

La matrice de rigidité élémentaire d'un élément d'interface est :

$$k = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & -d_1 & -d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & d_2 & -d_3 & -d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_3 & d_1 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_3 & -d_2 & d_3 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_3 & -d_1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & d_2 & -d_3 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_1 & -d_3 & d_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_3 & -d_2 & d_3 & d_2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Arrangée selon les $DDL u, v$ des noeuds 1, 2, 3, 4. Pour la face inférieure entre 1, 3. La matrice est :

$$k = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & 0 & 0 \\ d_3 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & d_3 \\ 0 & 0 & d_3 & d_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Pour la recherche des valeurs principales, il faut résoudre le système d'équations :

$$[k]\{U_i\} = \lambda [I]\{U_i\} \quad (4.7)$$

Pour trouver les valeurs λ , il faut que le déterminant soit nul :

$$\det([k] - \lambda [I]) = 0 \quad (4.8)$$

$$\det([k] - \lambda [I]) = 0$$

$$\Rightarrow \det = \left(\frac{L}{2} d_1 - \lambda \right) \begin{vmatrix} \frac{L}{2} d_2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} d_1 - \lambda & \frac{L}{2} d_3 \\ 0 & \frac{L}{2} d_3 & \frac{L}{2} d_2 - \lambda \end{vmatrix} - \left(\frac{L}{2} d_3 \right) \begin{vmatrix} \frac{L}{2} d_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} d_1 - \lambda & \frac{L}{2} d_3 \\ 0 & \frac{L}{2} d_3 & \frac{L}{2} d_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \det([k] - \lambda [I]) = \left[\left(\frac{L}{2} d_1 - \lambda \right) \left(\frac{L}{2} d_2 - \lambda \right) - \frac{L^2}{4} \cdot d_3^2 \right]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \frac{L}{2} \cdot (d_1 + d_2) \cdot \lambda - \frac{L^2}{4} \cdot d_3^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\frac{L}{2} \cdot (d_1 + d_2) \mp \sqrt{\frac{L^2}{4} \cdot (d_1 + d_2)^2 - L^2 \cdot (d_1 d_2 - d_3^2)}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{L}{4} \cdot \left\{ (d_1 + d_2) \mp \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + 4d_3^2} \right\}$$

Avec : L est la longueur de l'élément d'interface;

$$\begin{cases} d_1 = k_s \cdot \cos^2 \theta + k_n \cdot \sin^2 \theta \\ d_2 = k_n \cdot \cos^2 \theta + k_s \cdot \sin^2 \theta \\ d_3 = \frac{k_s - k_n}{2} \cdot \sin 2\theta \end{cases}$$

On remarque que pour les éléments d'interfaces qui sont parallèles à la barre d'acier ($\theta = 0^\circ$) $\Rightarrow d_3 = 0$; les valeurs propres sont les mêmes que les rigidités principales $\frac{L}{2} d_1$ & $\frac{L}{2} d_2$ pour chaque cas de charge.

Selon la représentation de la *Figure 4.10.a*; on remarque que lorsqu'un noeud subit un déplacement relatif, les noeuds voisins sont influencés par ce dernier dans la même direction et que la moitié des DDL sont nuls ; parce qu'il n'existe pratiquement pas de couplage entre les différents degrés de liberté de l'élément (u, v). Ceci s'explique, vu la position des points d'intégration qui coïncident avec les noeuds, par le fait que l'élément peut être considéré comme des liaisons au niveau de chaque paire de noeuds, chacune étant indépendante des autres.

Pour les éléments où $\theta \neq 0^\circ$ que se soit $\theta = 123,69^\circ$ où $\theta = 33,69^\circ$ (les éléments d'interfaces modélisant la nervure), on remarque qu'il y'a couplage des DDL, cela veut dire que lorsqu'un noeud subit un déplacement relatif le noeud voisin subit le même déplacement mais au sens opposé.

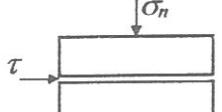
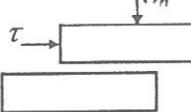
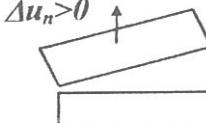
On remarque que la rigidité tangentielle augmente avec l'augmentation du chargement extérieur ($10^3 \leq k_s \leq 1,5 \cdot 10^4$ entre le 1^{er} et le 2^{ème} cas de charge). Pour le 2^{ème} cas de charge il y'a formation de la première fissure donc augmentation de la rigidité tangentielle ($k_s = 1,5 \cdot 10^4$). Pour le 3^{ème} cas de charge cette rigidité augmente ($k_s = 2,85 \cdot 10^4$) parce qu'il y'a formation d'une seconde fissure donc propagation de la fissure le long de l'interface acier/béton. Pour le 4^{ème} cas de charge, on remarque que les fissures ne se propagent pas sur l'interface acier/béton, mais elles se propagent à l'intérieur du matériau béton, donc réduction de la rigidité ($k_s = 2,25 \cdot 10^4$). A partir du 5^{ème} cas de charge, $k_s \uparrow$ et on remarque que $\sigma_{LARB} \uparrow$ vers le centre jusqu'au 9^{ème} cas de charge où il y'a formation de la 3^{ème} fissure sur l'interface acier/béton. Dans tous ces cas, les modes propres de déformations sont les mêmes.

La rigidité tangentielle est influencée par la formation de nouvelles fissures sur l'interface acier / béton, ce qui donne plus de déformations et donc plus d'oscillations de contraintes.

D'après les modes rigides de déformations de l'élément d'interface à 4 noeuds indiqués dans la *Figure 4.9*, et dans le cas d'une intégration de Newton - Cotes, pour les différents cas de

charge, on remarque que le comportement d'interface est représenté par le critère de frottement de Coulomb, combiné avec le critère de résistance à la traction (autoriser ou non le décollement et permettre le recollement) et un critère de non pénétration des structures (en respectant la mécanique des solides) permettant une description simple du comportement d'interface. Ces modes de déformations coïncidant avec les modes de comportement d'interface acier - béton comme l'indique le *Tableau 4.8* [25].

Tableau 4.8 Modes de comportement à l'interface entre deux structures.

Modes d'interactions	Représentation	Déplacements	Contraintes
<i>Adhérence</i>		$\Delta u_n = 0$ $\Delta u_t = 0$	$\sigma_n > 0$ $\tau < C_a + \sigma_n \cdot \tan \delta$
<i>Cisaillement</i>		$\Delta u_n = 0$ $\Delta u_t \neq 0$	$\sigma_n > 0$ $\tau < C_a + \sigma_n \cdot \tan \delta$
<i>Décollement</i>		$\Delta u_n > 0$ (dès que $\sigma_n = f_t$) $\Delta u_t \neq 0$	$\sigma_n > 0$ $\tau < C_a + \sigma_n \cdot \tan \delta$

Remarque : Une autre approche peut être utilisée, basée sur l'étude spectrale de la matrice de transfert des contraintes entre le volume et l'interface. L'étude explore, à partir des valeurs propres de la matrice de transfert, la possibilité de supprimer ou d'amplifier le phénomène d'oscillations des contraintes [28]. Pour utiliser cette approche il faut connaître le tenseur de contrainte des éléments d'interfaces entre l'acier et le béton ; ce dernier est défini grâce à leurs lois de comportement. Cette loi de comportement peut être définie comme une relation fonctionnelle entre la réponse du matériau, par exemple l'état de contrainte (le vecteur de contrainte pour les interfaces) et la sollicitation qui lui est appliquée (pour notre exemple la grandeur cinématique - déplacement relatif pour les interfaces- décrivant la déformation du matériau).

Cette fonctionnelle est difficile à expliciter dans le cas général du fait des irréversibilités plastiques, qui rendent cette dernière singulière d'une part et de toute l'histoire antérieure du matériau qui n'est pas connue d'autre part.

La connaissance de cette fonctionnelle fait l'objet d'une autre recherche du modèle définissant la loi de comportement des interfaces, des caractéristiques les plus dominantes, ainsi que la dégradation résultant de la rupture des grains provoquant une chute considérable de contrainte normale après le pic de rupture comme l'indique la *Figure 3.8* du *chapitre 03*, qui est un aspect essentiel pris en compte dans la formulation de cette loi.

4.10) Test de validation du programme de la barre d'acier :

Ce programme a été testé pour une barre d'acier soumise à la traction simple, toutes les valeurs de calcul et les comparaisons nécessaires entre l'analyse et la théorie sont indiqués dans l'Annexe B.

4.11) Variation de la convergence en fonction du pas de charge :

La convergence de la simulation des tests est calculée à partir de la norme relative définie dans le chapitre 03 par l'équation (3.78). Pour tous les pas de charge, la convergence est assurée à partir de la deuxième itération, sa valeur pour les différents cas de charge est mentionnée dans le Tableau 4.9; et représentée graphiquement sur la Figure 5.12.

Tableau 4.9 Valeur de convergence de chaque test en fonction du pas de charge.

Contraintes dans l'acier en (MPa)	71,875	109,375	146,875	184,375	221,875	259,375	296,875	334,375
$\ n\ $	0,24 $.10^{-3}$	0,11 $.10^{-3}$	0,33 $.10^{-3}$	0,19 $.10^{-3}$	0,42 $.10^{-3}$	0,12 $.10^{-3}$	0,08 $.10^{-3}$	0,11 $.10^{-3}$

On remarque que la convergence est vérifiée (la condition $\|n\| \leq 0.05$ (5%) est assurée) à partir de la deuxième itération sauf pour le 5^{ème} cas de charge où la convergence est assurée à partir de la troisième itération. Cette convergence est de l'ordre de 10^{-3} .

4.12) Variation des contraintes d'adhérence le long de la barre d'acier :

Théoriquement la variation des contraintes d'adhérence τ le long de la barre d'acier (l'axe y) où la position zéro représente le bout de la barre d'acier, est :

➤ Soit une loi de variation le long de la barre selon la formule théorique N°1 [20] suivante :

$$\tau = \frac{1}{\pi \cdot d} \cdot \frac{dF}{dy} \quad (4.9)$$

Où : dF L'incrément sur la force de traction dans la barre;

dy L'incrément de longueur le long de la barre;

& d Diamètre nominal de la barre.

➤ Soit une loi de variation exponentielle le long de la barre selon la formule théorique N°2 [36] suivante :

$$\tau(y) = -\frac{\beta \cdot A_c \cdot F_{tot}}{\pi \cdot d \cdot (A_c + n \cdot A_s)} e^{-\beta \cdot y} \quad (4.10)$$

Où : A_c la section du béton;

A_s la section d'acier;

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad \text{Coefficient d'équivalence;}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \quad \text{Avec:}$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi E_c \cos^2 \alpha} \cdot \left[\frac{\ln\left(\frac{2}{3} \cdot m\right)}{\sin^2 \alpha} + \frac{3}{2} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \frac{0,48148 \cdot m^2 + 1,08333}{m^2 - 1} \right]$$

$$\& A_2 = \frac{1}{A_s \cdot E_s} + \frac{1}{A_c \cdot E_c}$$

$$\& m = \frac{D}{d}; \alpha = 56,309926^\circ$$

E_s Module d'élasticité de l'acier ; E_c module d'élasticité du béton.

α Angle d'inclinaison des fissures internes, généralement compris entre 45° & 80° par rapport à l'axe de la barre d'acier. Dans ce cas on prend cet angle égal à l'inclinaison des nervures.

Les valeurs de la contrainte d'adhérence données par la simulation et ces deux théories sont indiquées par le *Tableau 4.10* et représentées graphiquement par les *Figures 4.13* pour les différents cas de charge.

Tableau 4.10 Valeur des contraintes d'adhérences en fonction du pas de charge
Le long de la barre d'acier.

<i>Contraintes dans l'acier en (MPa)</i>		71,875	109,375	146,875	184,375	221,875	259,375	296,875	334,375
<i>n°0</i> (centre)	<i>Simulation</i>	0,20	0,39	0,80	0,86	1,07	1,24	1,683	1,86
	<i>Théorie N°1</i>	0,84	1,27	1,71	2,15	2,59	3,03	3,46	3,90
	<i>Théorie N°2</i>	1,019	1,54	2,07	2,60	3,13	3,66	4,19	4,72
<i>n°1</i>	<i>Simulation</i>	0,65	1,28	2,62	2,81	3,50	4,04	5,51	6,10
	<i>Théorie N°1</i>	1,08	1,64	2,20	2,76	3,33	3,89	4,45	5,01
	<i>Théorie N°2</i>	1,18	1,81	2,43	3,05	3,67	4,29	4,91	5,52
<i>n°2</i>	<i>Simulation</i>	1,31	2,61	5,37	5,52	6,81	7,87	10,78	11,94
	<i>Théorie N°1</i>	1,51	2,30	3,08	3,87	4,66	5,45	6,23	7,02
	<i>Théorie N°2</i>	1,38	2,11	2,83	3,55	4,27	4,99	5,72	6,44
<i>n°3</i>	<i>Simulation</i>	1,98	3,96	8,20	5,147	6,36	7,35	10,13	11,22
	<i>Théorie N°1</i>	2,51	3,83	5,14	6,45	7,76	9,08	10,39	11,70
	<i>Théorie N°2</i>	1,63	2,48	3,33	4,18	5,03	5,88	6,73	7,57
<i>n°4</i>	<i>Simulation</i>	2,56	5,13	6,85	11,90	13,96	16,14	21,71	24,09
	<i>Théorie N°1</i>	7,55	11,48	15,42	19,36	23,29	27,23	31,17	35,10
	<i>Théorie N°2</i>	1,91	2,90	3,90	4,89	5,89	6,88	7,87	8,87
<i>La moyenne</i> $= \sum / 5$	<i>Simulation</i>	1,38	2,68	4,77	5,25	6,34	7,33	9,96	11,04
	<i>Théorie N°1</i>	2,70	4,10	5,51	6,92	8,33	9,73	11,14	12,55
	<i>Théorie N°2</i>	1,42	2,17	2,91	3,65	4,39	5,14	5,88	6,63

On remarque que la loi de variation des contraintes d'adhérences moyennes le long de la barre au niveau de chaque intervalle (*Figure 4.14*) et pour chaque cas de charge comme l'indique le tableau précédent suit une loi de variation qui se trouve entre les deux analyse théorique (N°1 et N°2).

Donc on peut dire que la contrainte de cisaillement des éléments utilisés peut simuler l'adhérence entre l'acier et le béton (*Figure 4.15*).

Une réduction de la contrainte d'adhérence s'opère au niveau du 4^{ème} intervalle pour le 3^{ème} cas de charge, et pour le 3^{ème} intervalle à partir du 4^{ème} cas de charge. Cette réduction correspond à la formation de la première fissure (3^{ème} cas de charge) et la deuxième fissure (4^{ème} cas de charge); elle se traduit par une perte d'adhérence donc perte de contact entre l'acier et le béton.

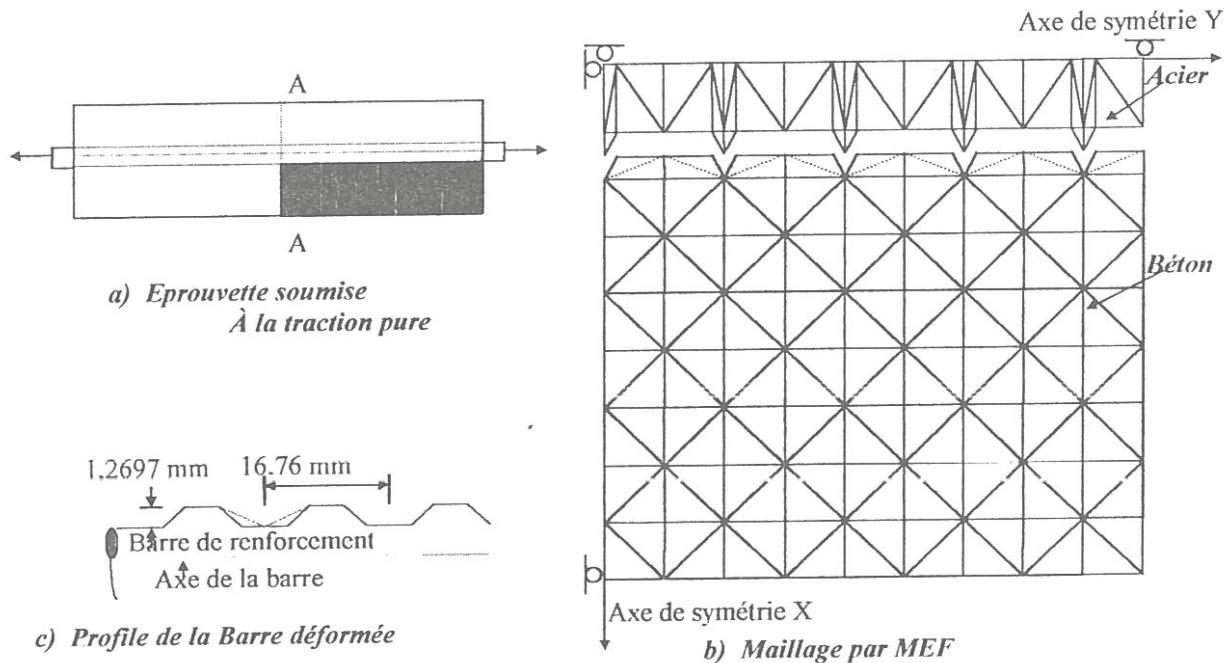


Fig.4.1 Maillage de l'éprouvette axisymétrique [38].

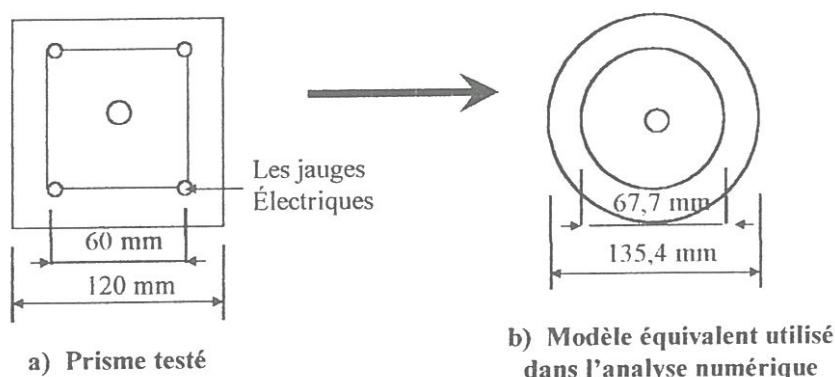


Fig.4.2 La surface carrée de l'éprouvette et le modèle Axisymétrique en section équivalente circulaire [38].

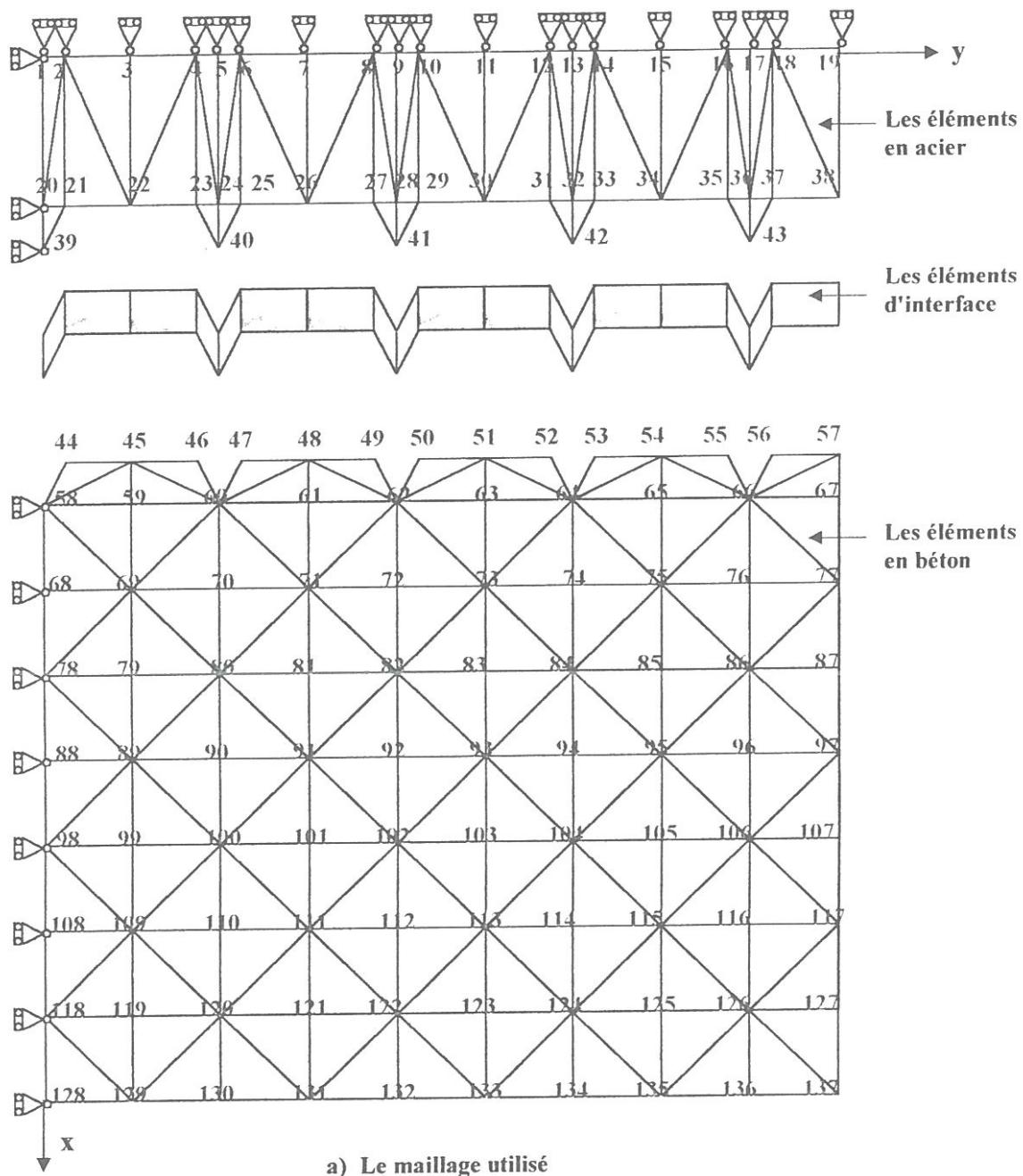
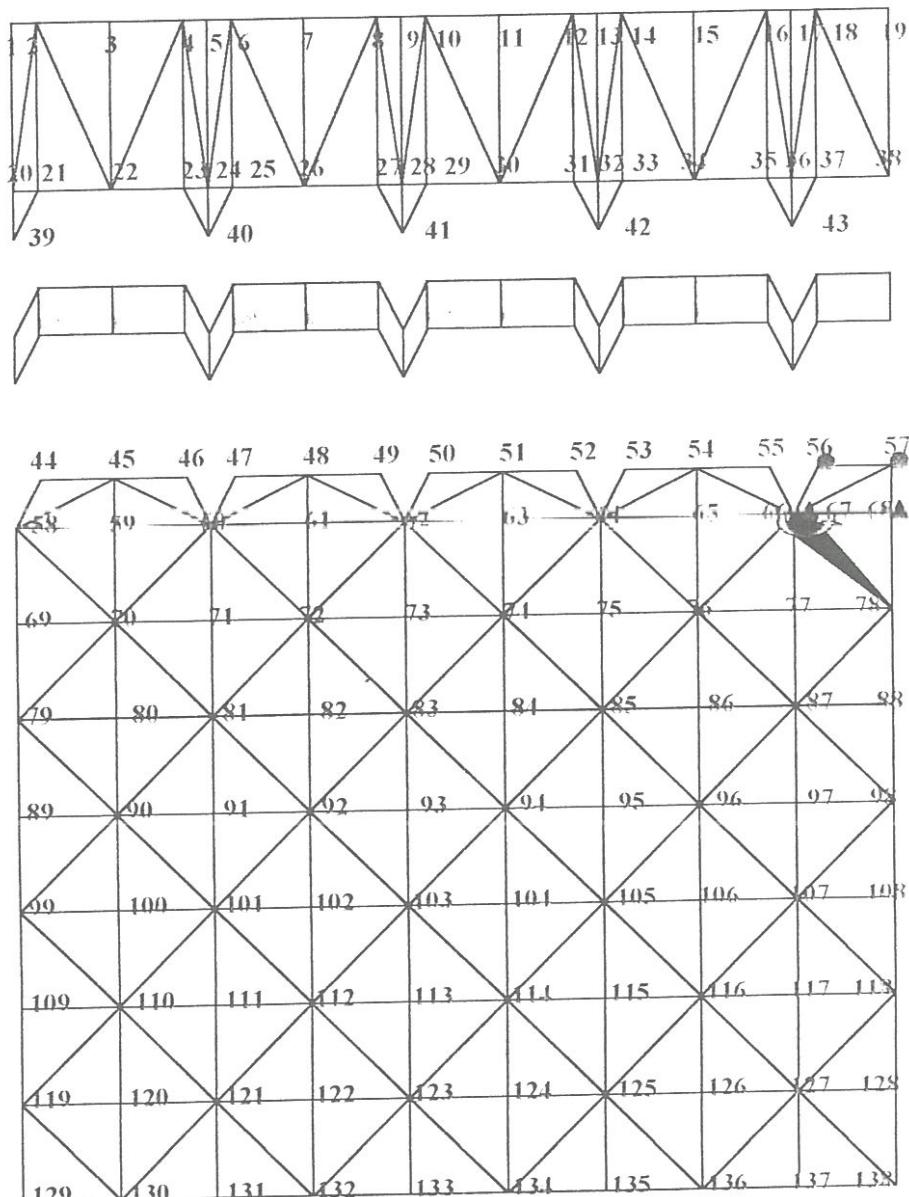


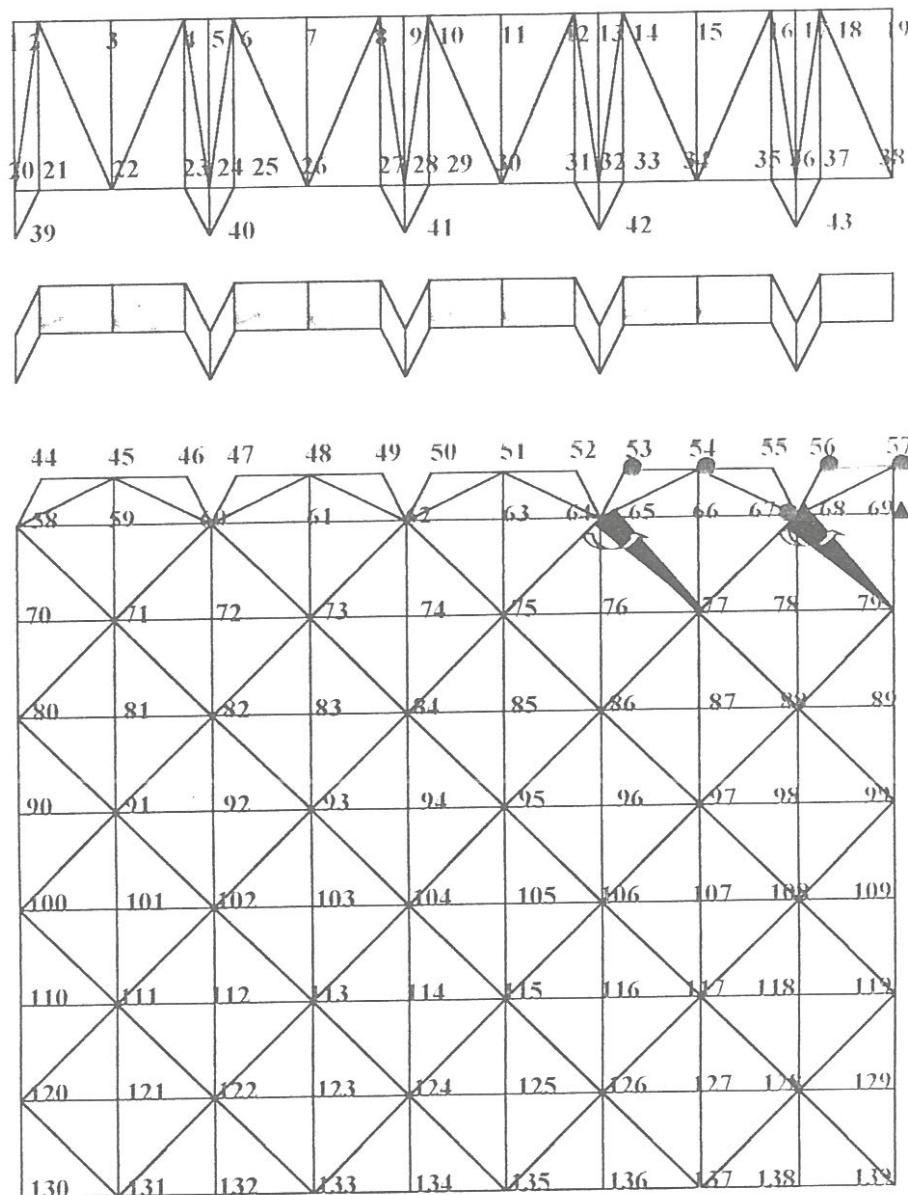
Fig.4.3 La propagation des fissures pour les quatre derniers cas de charge.



b) 3^{ème} cas de charge

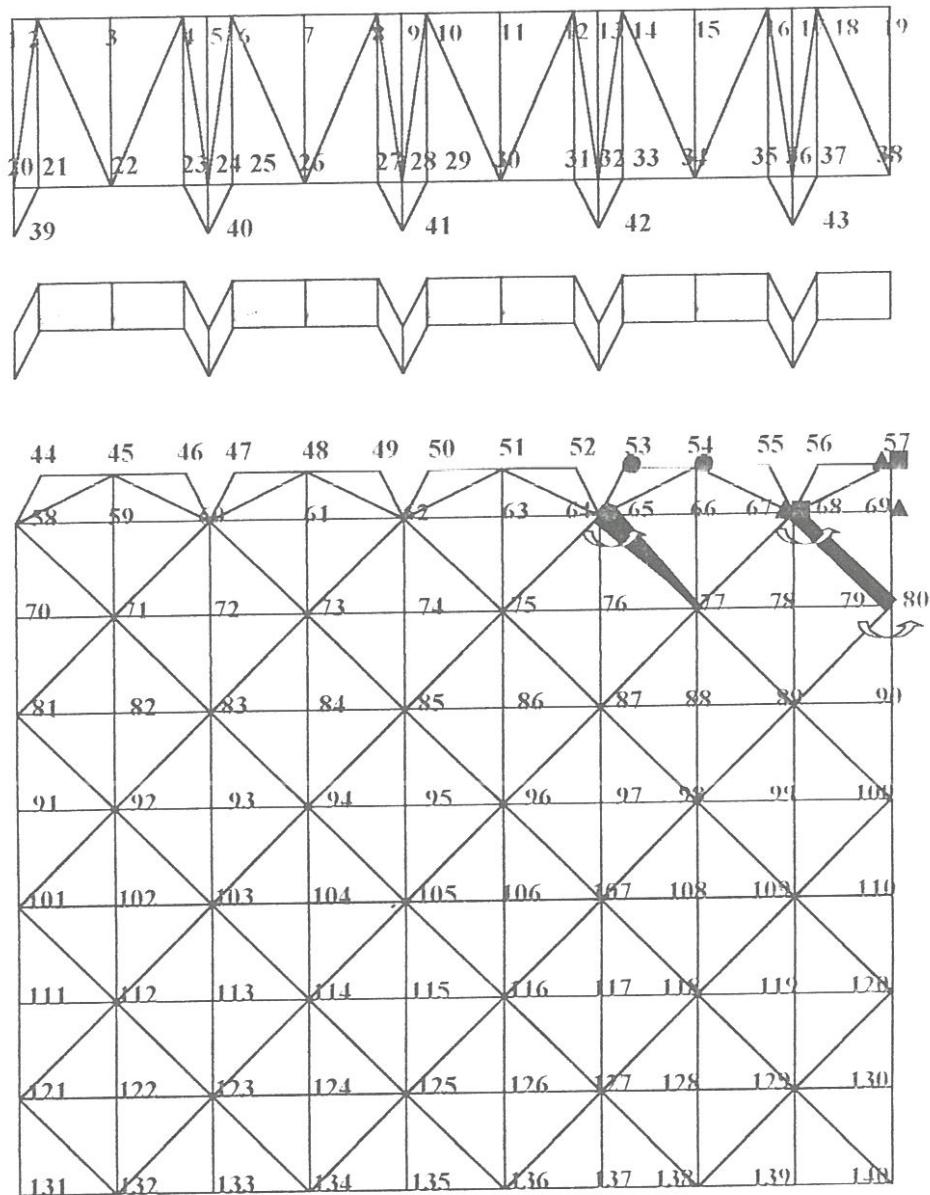
- La contrainte radiale est supérieure à la résistance à la compression du béton
- ▲ La contrainte circonférentielle est supérieure à la résistance à la traction du béton
- La contrainte radiale est supérieure à la résistance d'adhérence entre l'acier et le béton

Suite de la Fig.4.3

c) 4^{ème} cas de charge

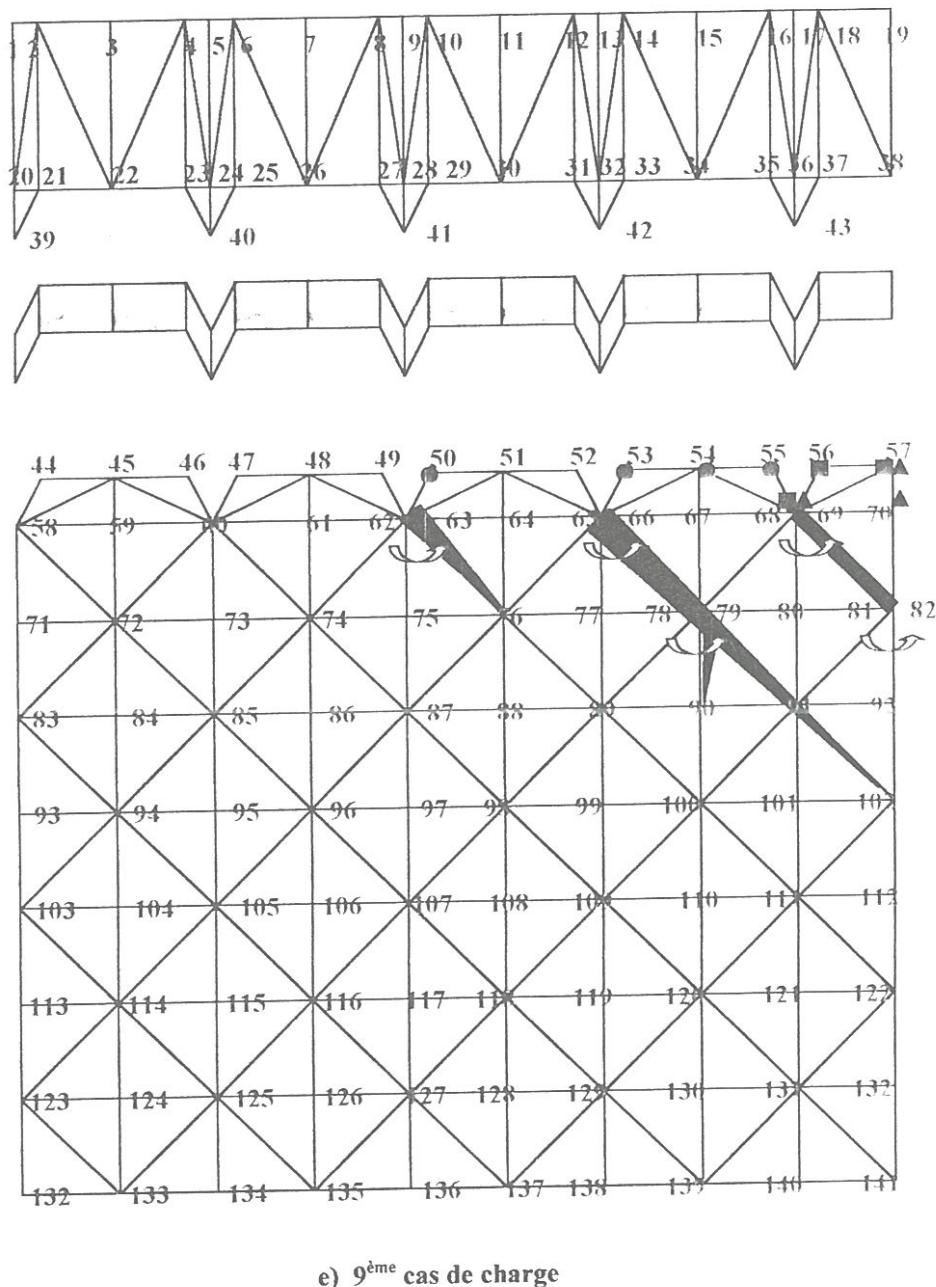
- La contrainte radiale est supérieure à la résistance à la compression du béton
- ▲ La contrainte circonférentielle est supérieure à la résistance à la traction du béton
- La contrainte radiale est supérieure à la résistance d'adhérence entre l'acier et le béton

Suite de la Fig.4.3

d) 5^{ème} cas de charge

- La contrainte radiale est supérieure à la résistance à la compression du béton
- ▲ La contrainte circonférentielle est supérieure à la résistance à la traction du béton
- La contrainte radiale est supérieure à la résistance d'adhérence entre l'acier et le béton

Suite de la Fig.4.3



- La contrainte radiale est supérieure à la résistance à la compression du béton
- ▲ La contrainte circonférentielle est supérieure à la résistance à la traction du béton
- La contrainte radiale est supérieure à la résistance d'adhérence entre l'acier et le béton

Suite de la Fig.4.3

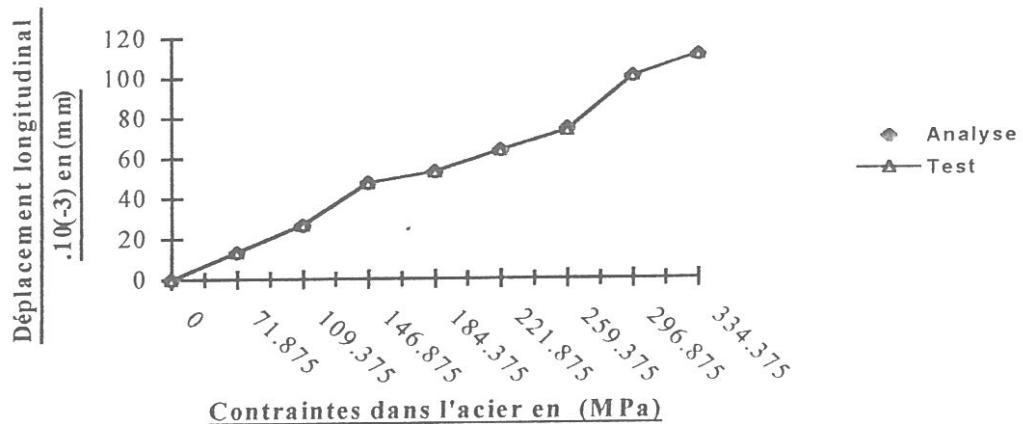


Fig.4.4 Contraintes dans l'acier / Déplacement axial du test et de l'analyse.

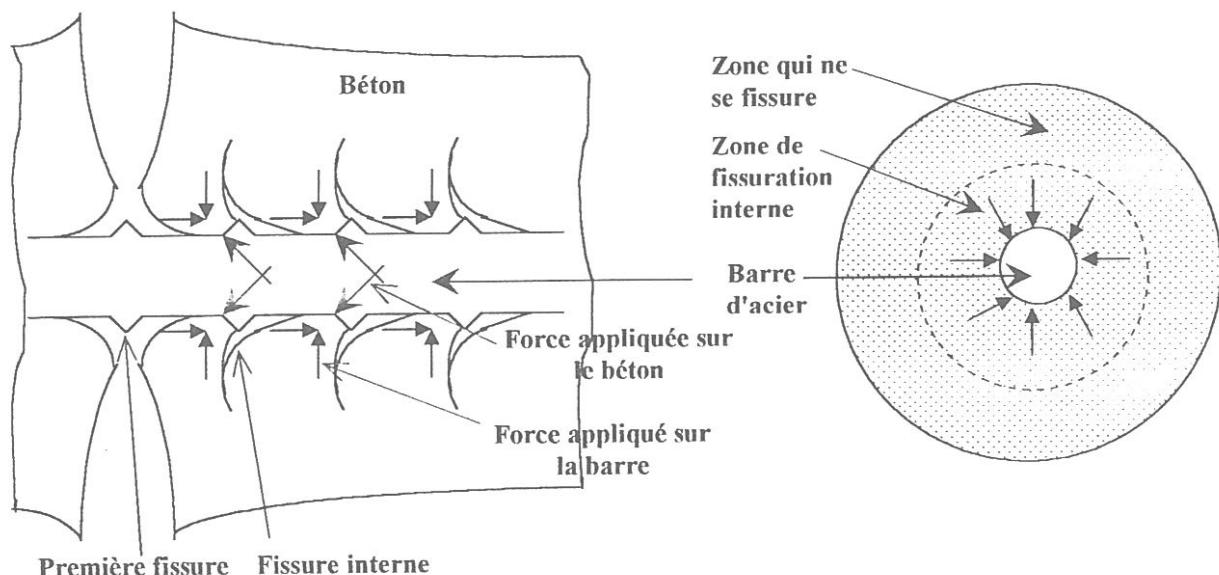
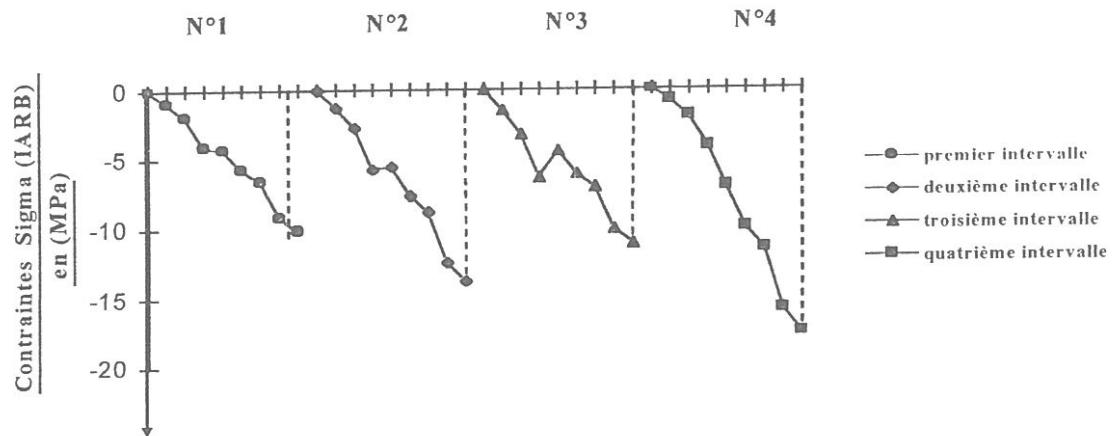
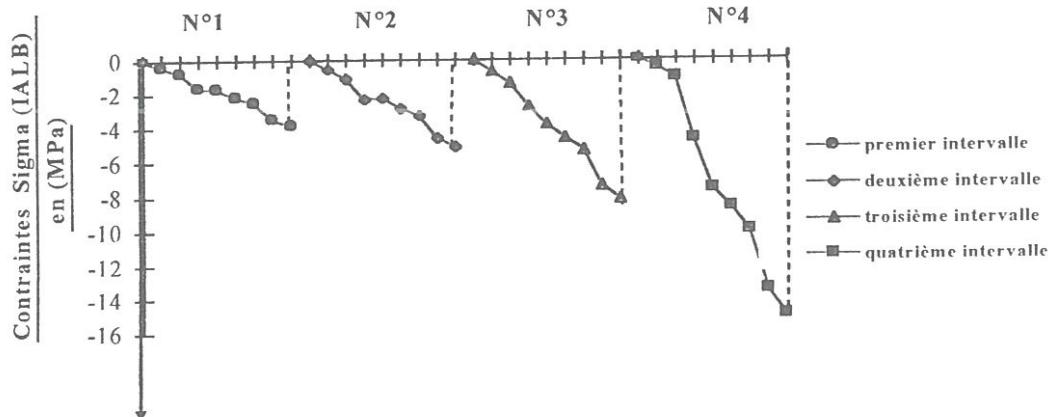


Fig.4.5 Déformation du béton autour de la barre d'acier.



a) Contraintes moyennes de chaque intervalle

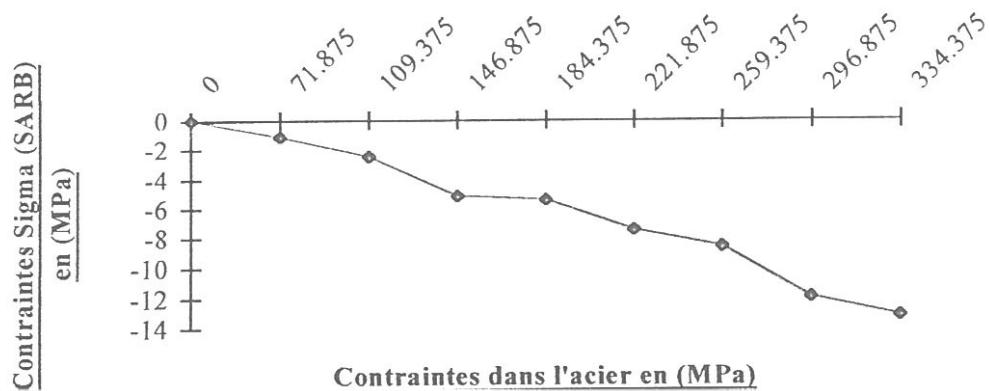
Dans la direction radiale;



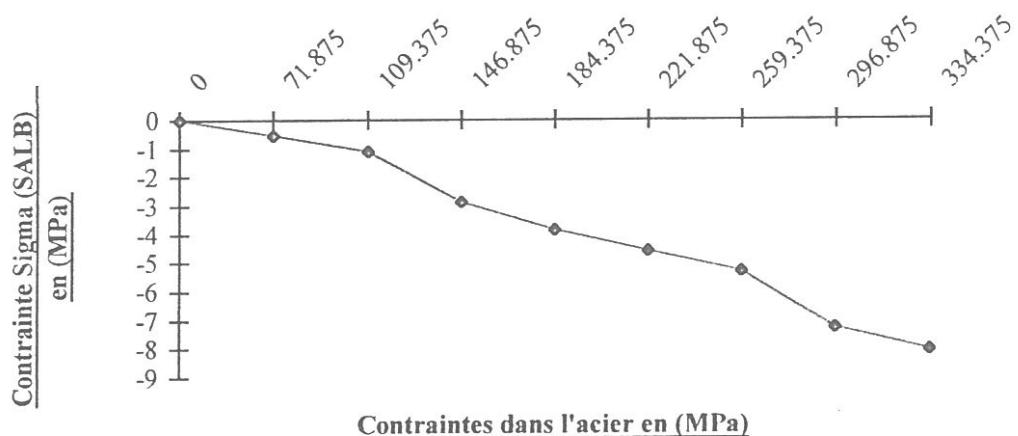
b) Contraintes moyennes de chaque intervalle

Dans la direction longitudinale.

Fig.4.6.

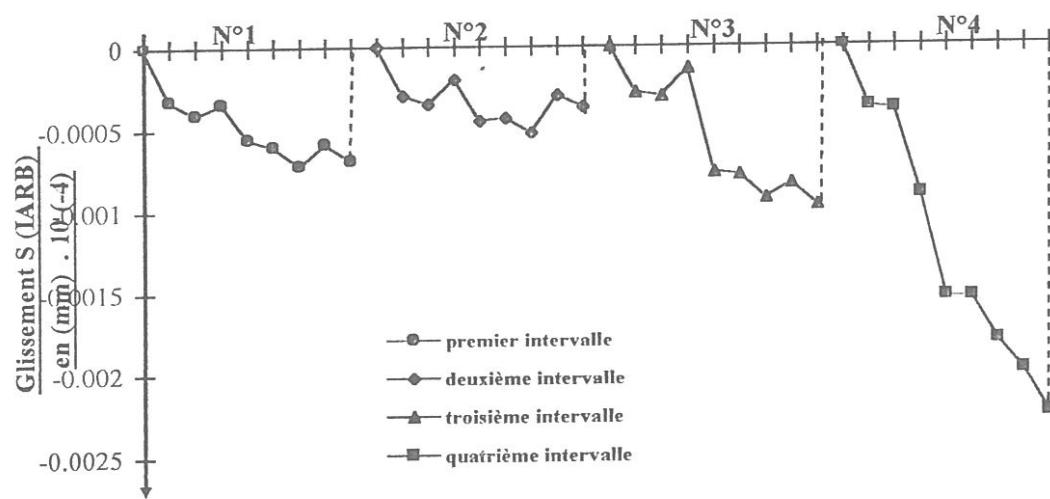


a) Contraintes dans l'acier / Contrainte moyenne du spécimen : dans la direction radiale;

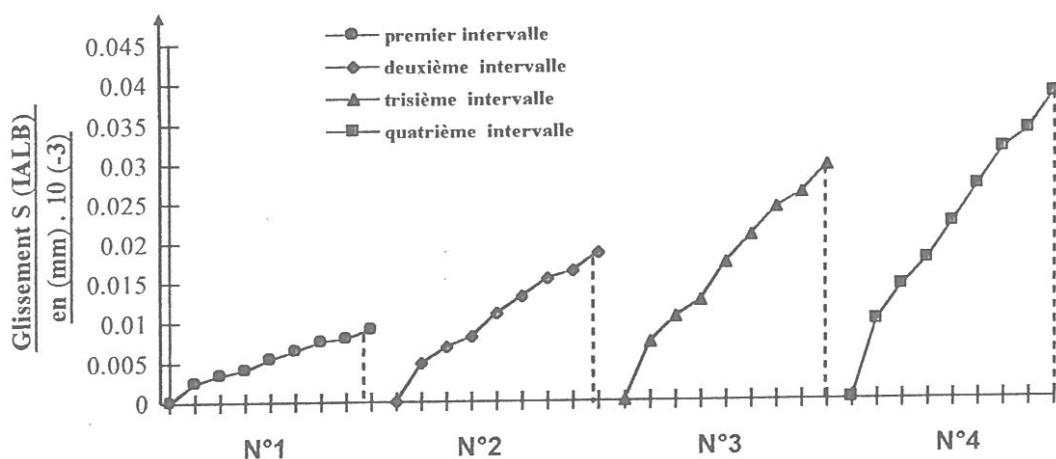


b) Contraintes dans l'acier / Contrainte moyenne du spécimen : dans la direction longitudinale.

Fig.4.7.

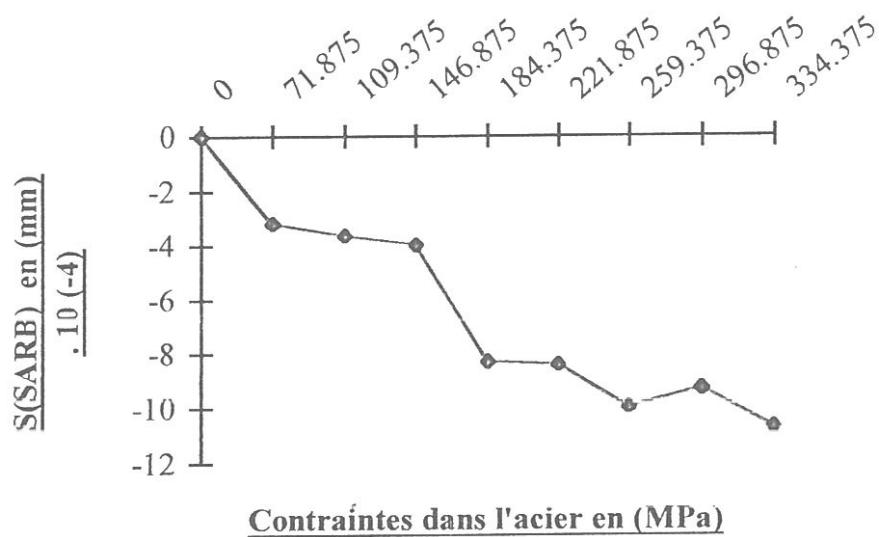


a) Glissement moyen de chaque intervalle :
Dans la direction radiale;

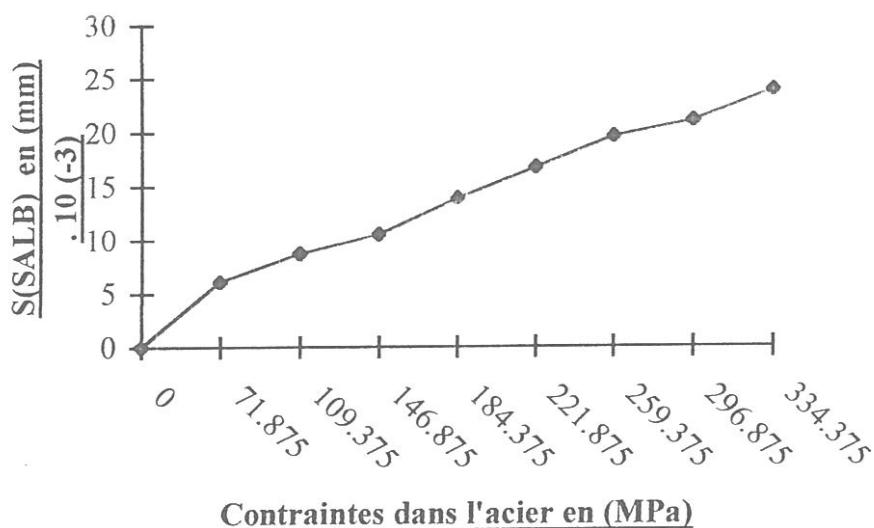


b) Glissement moyen de chaque intervalle :
Dans la direction longitudinale.

Fig.4.8.

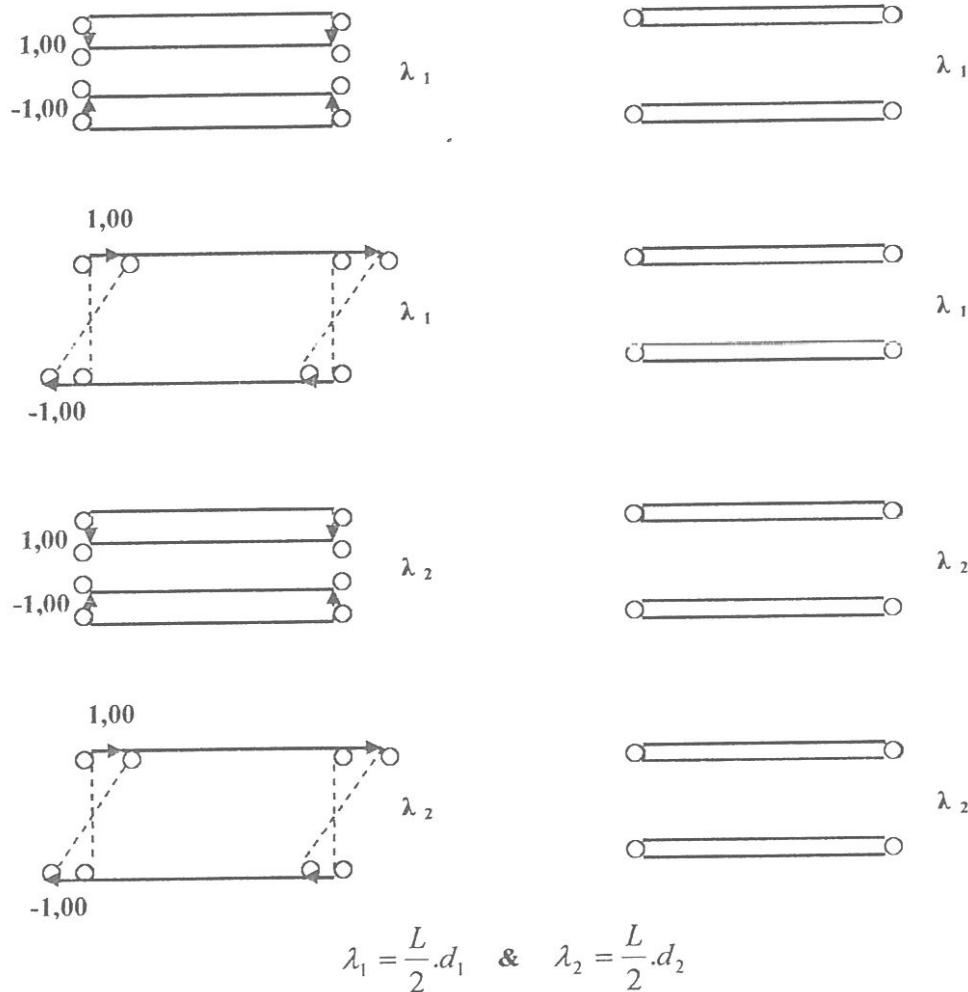


a) Contraintes dans l'acier / Glissement moyen du spécimen :
Dans la direction radiale;



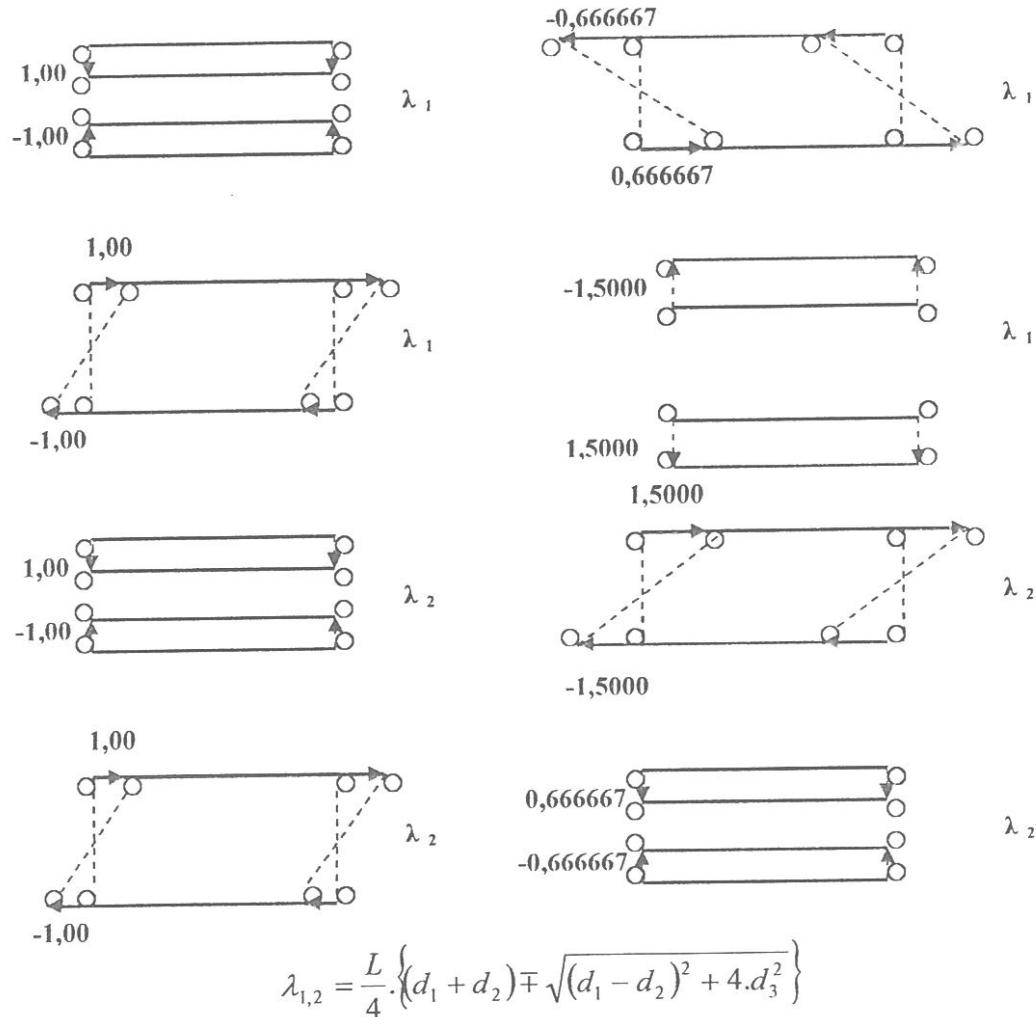
b) Contraintes dans l'acier / Glissement moyen :
Dans la direction longitudinale.

Fig.4.9.

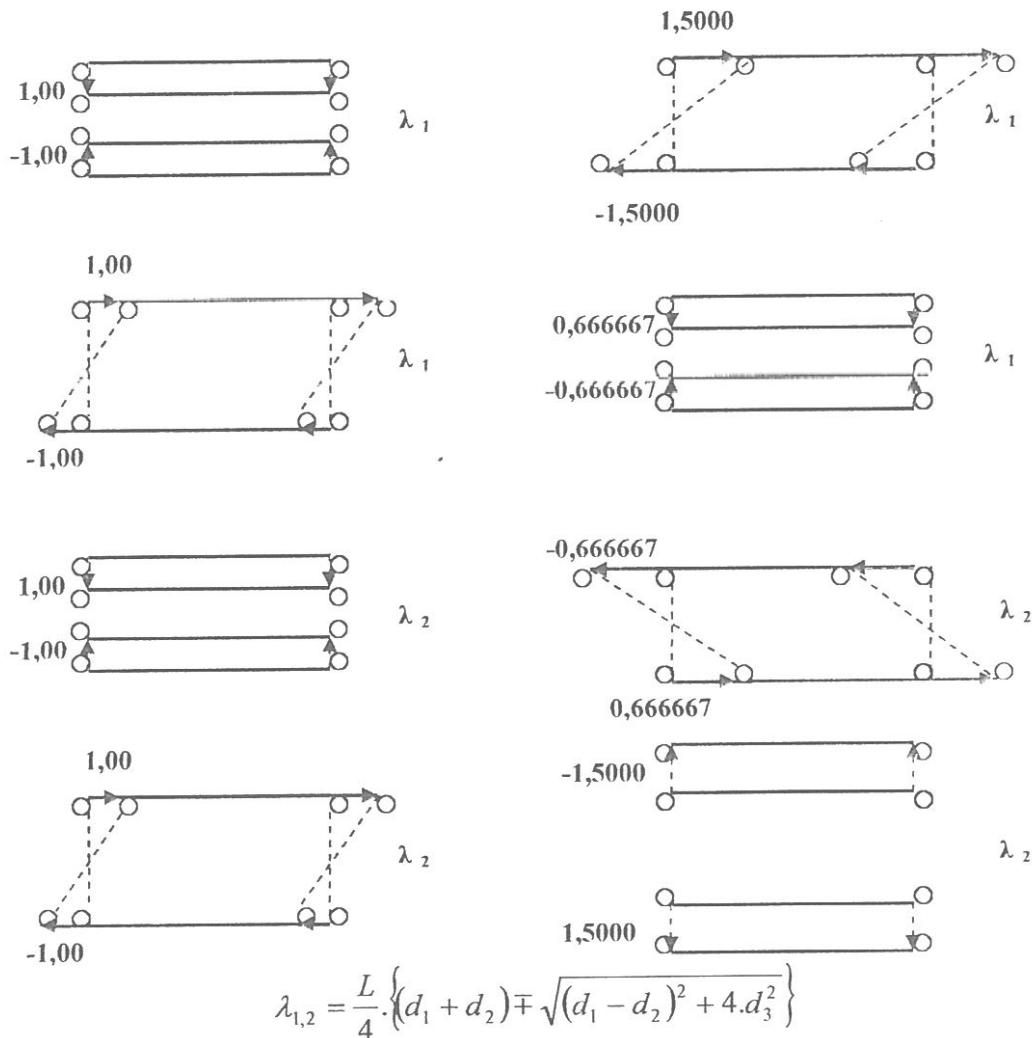


a) Cas où $\theta = 0^\circ$

Fig.4.10 Modes de déformations de l'élément d'interface à 4 noeuds dans le cas D'une intégration de Newton - Cotes, pour les différents cas de charge.

b) cas où $\theta = 123.69^\circ$

Suite de Fig.4.10

c) cas où $\theta = 33.69^\circ$

Suite de Fig.4.10

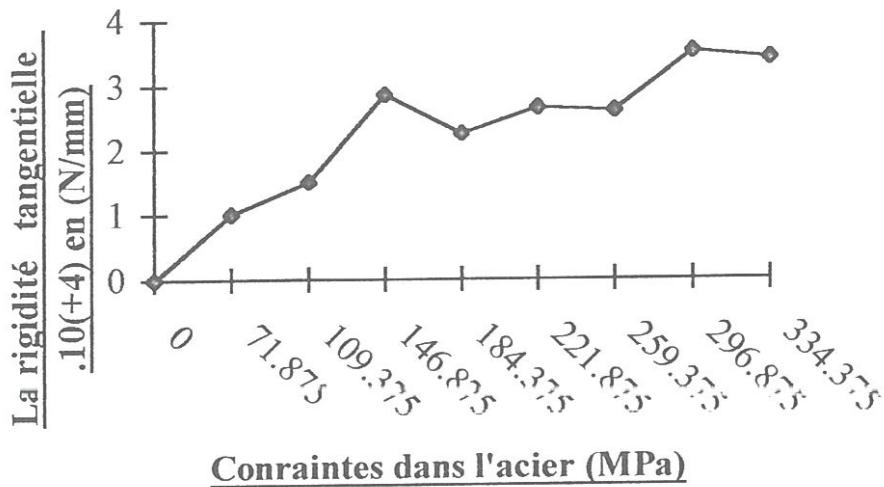


Fig.4.11 Rigidité tangentielle des éléments d'interfaces / Contraintes dans l'acier.

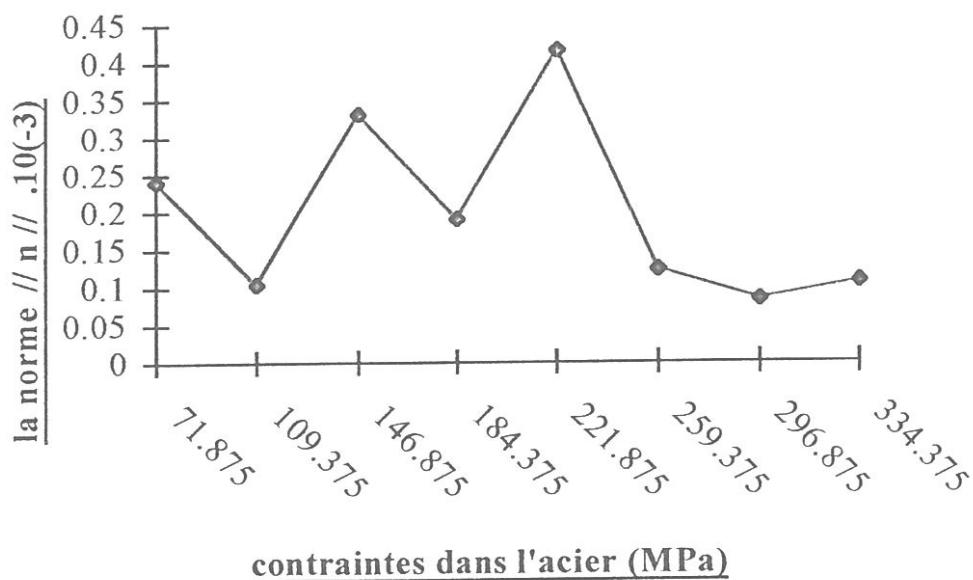
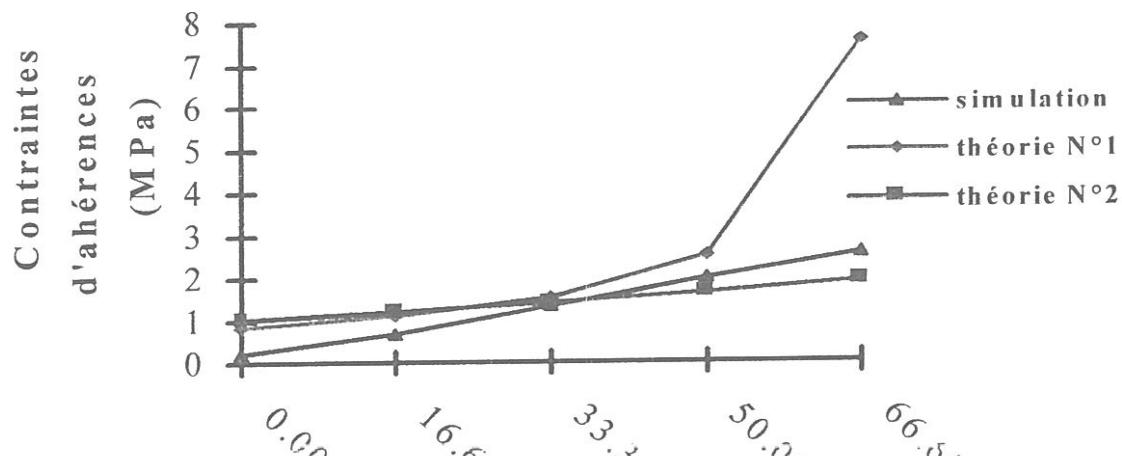
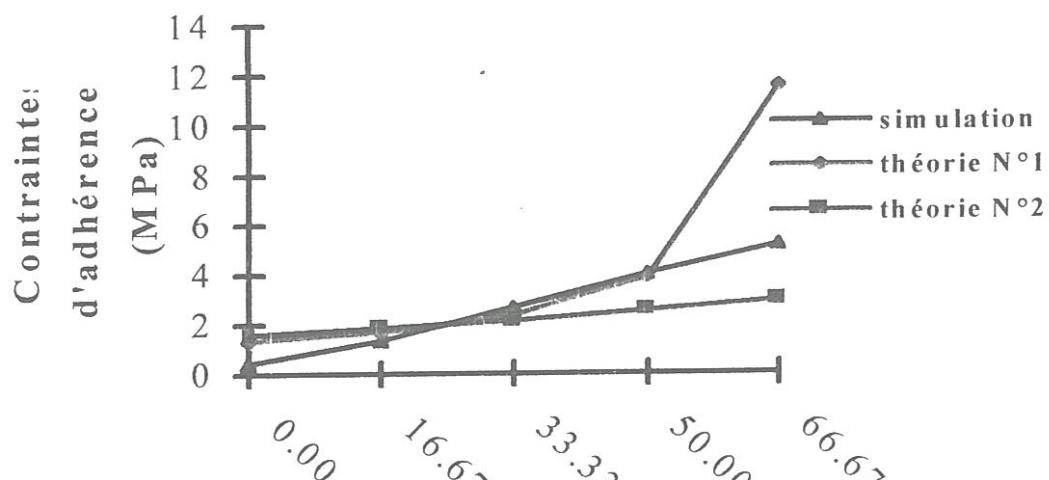


Fig.4.12 Variation de la convergence pour chaque pas de charge.

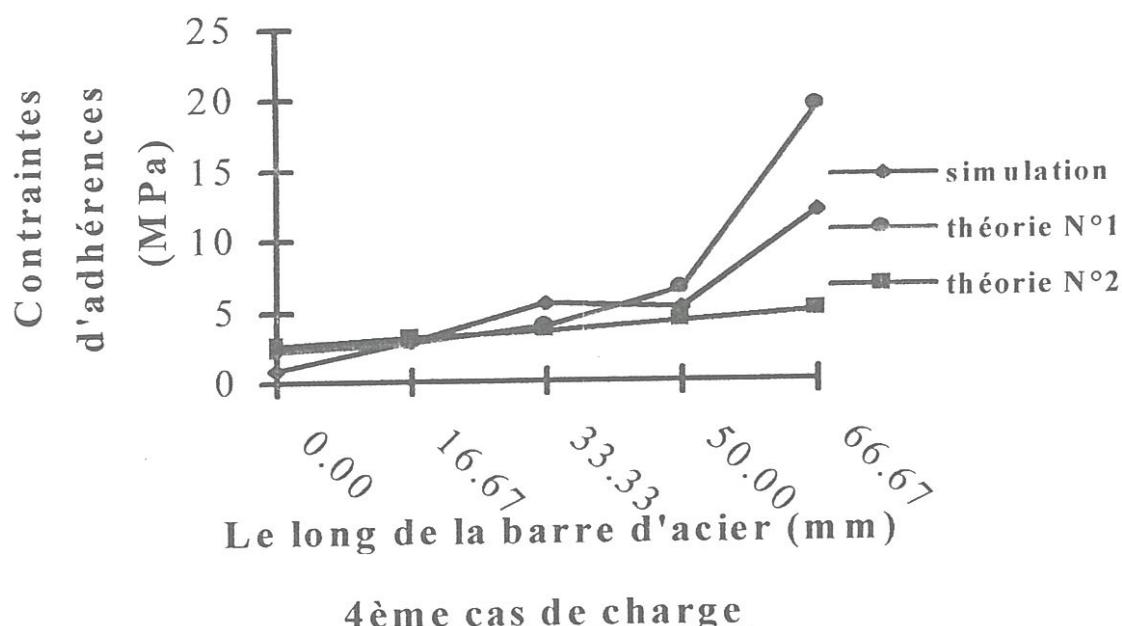
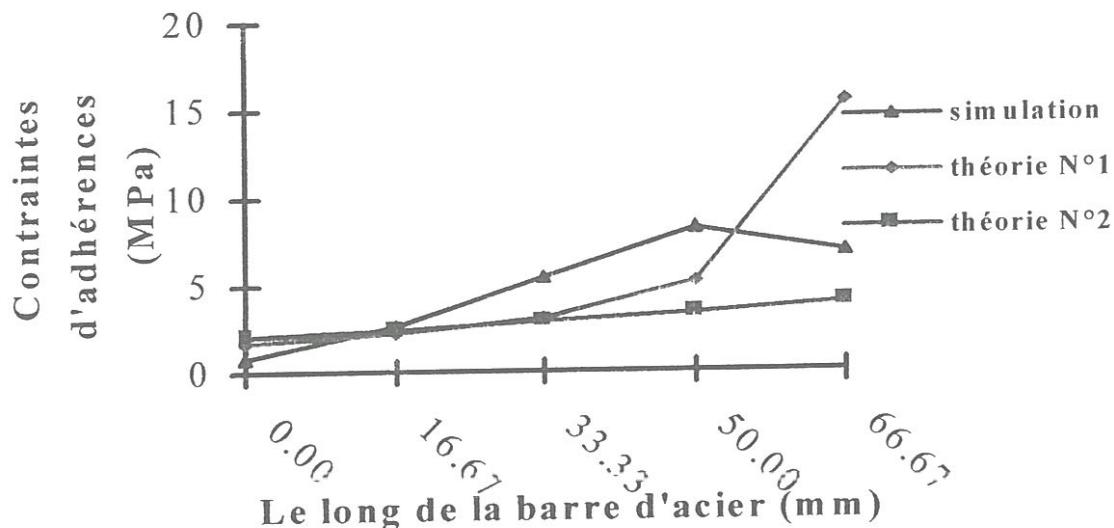


1ier cas de charge

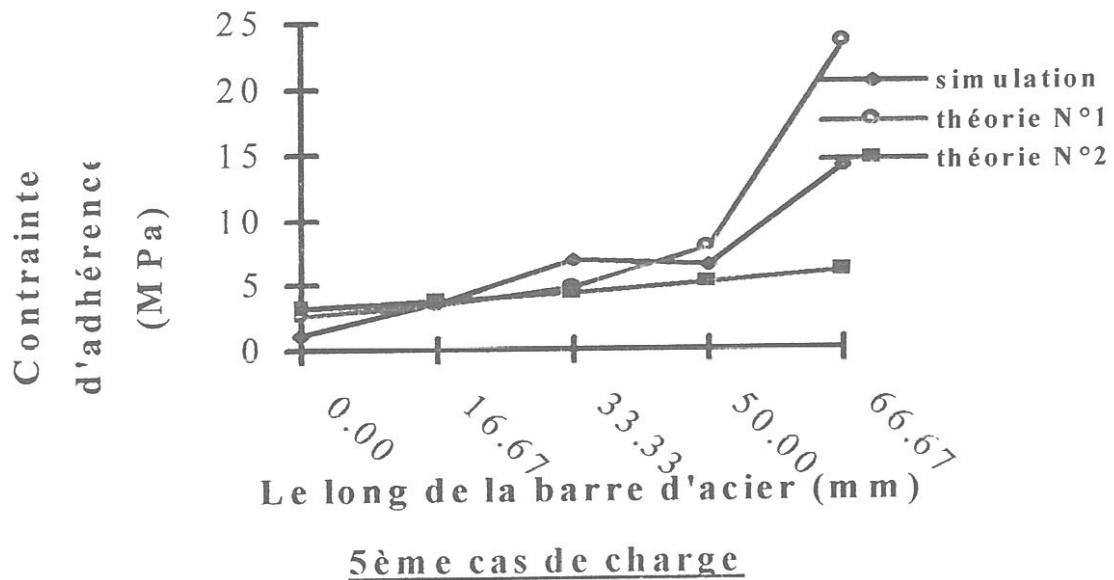
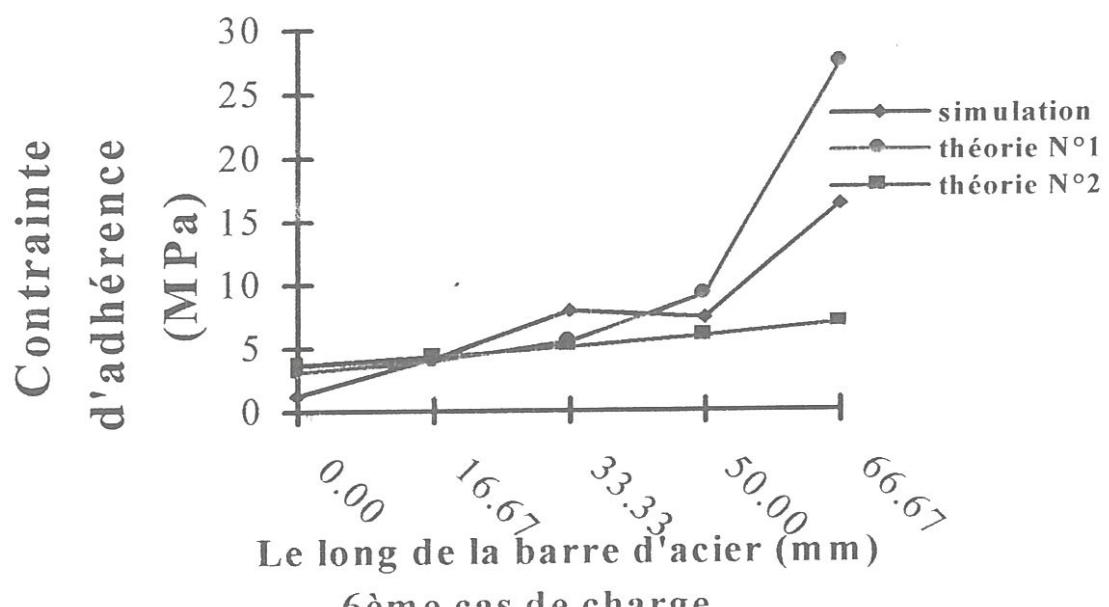


2ème cas de charge

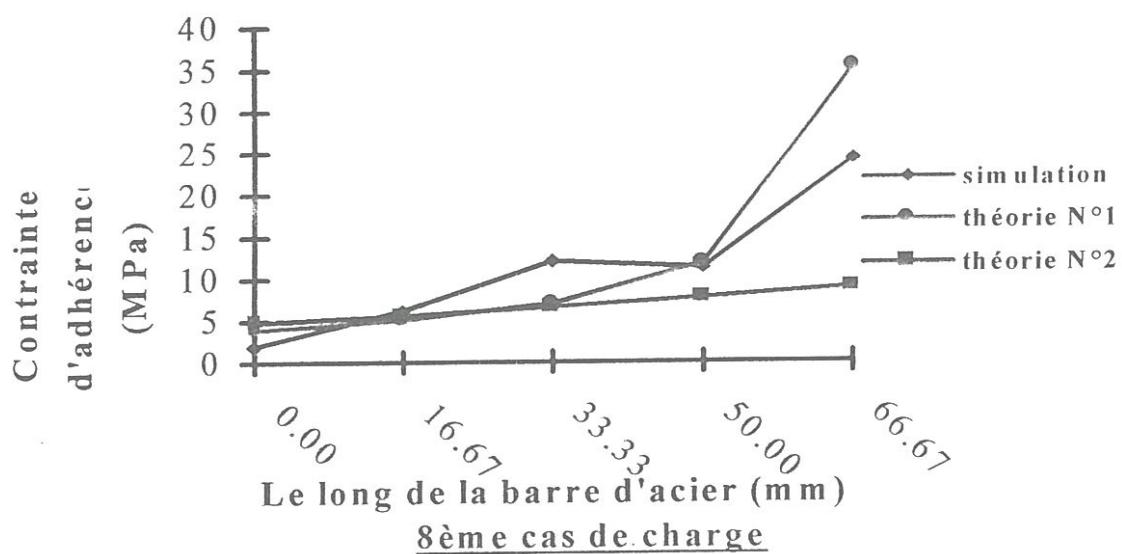
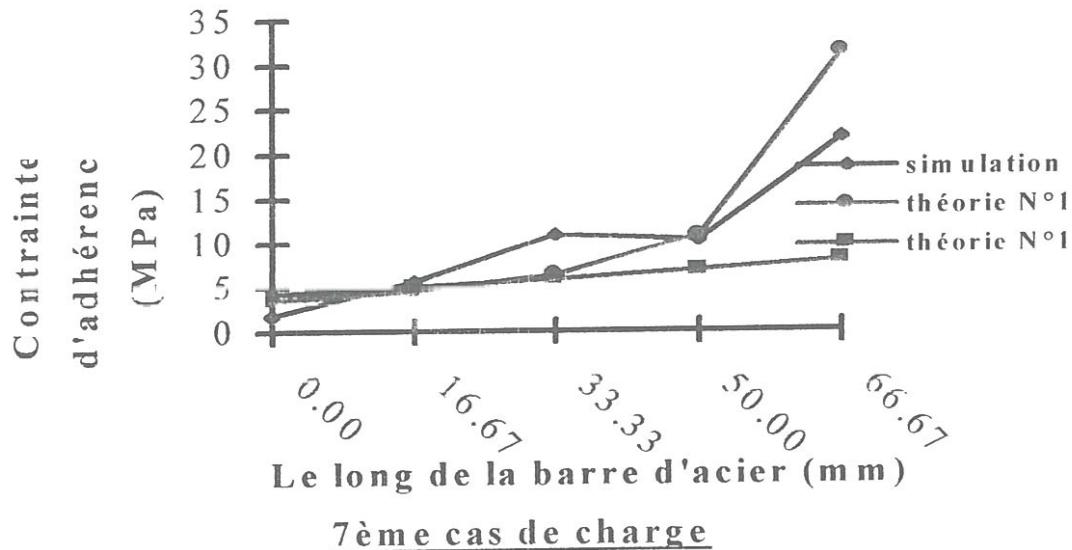
Figure.4.13 Variation des contraintes d'adhérence
Le long de la barre pour tous les cas de charges.



Suite de la Figure.4.13

5ème cas de charge6ème cas de charge

Suite de la Figure.4.13



Suite de la Figure.4.13

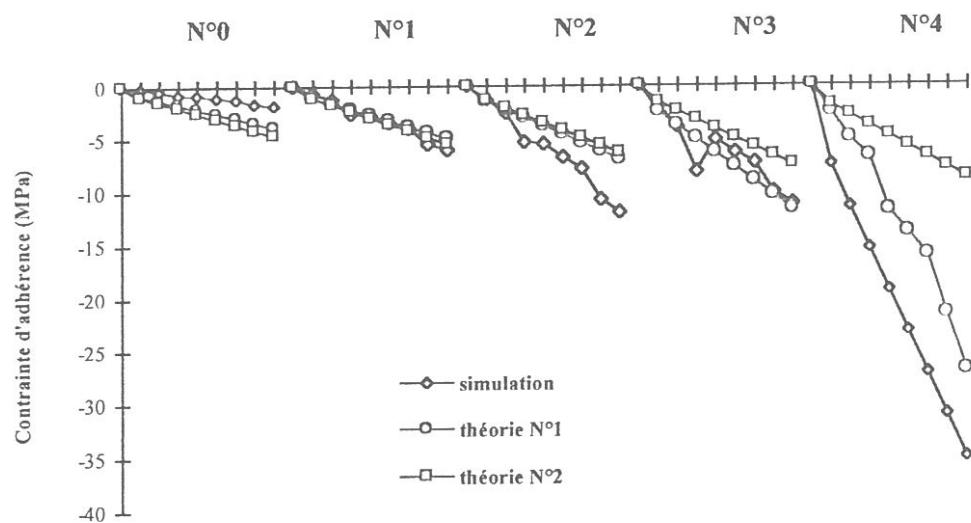


Fig.4.14 Contraintes d'adhérences moyennes de chaque intervalle.

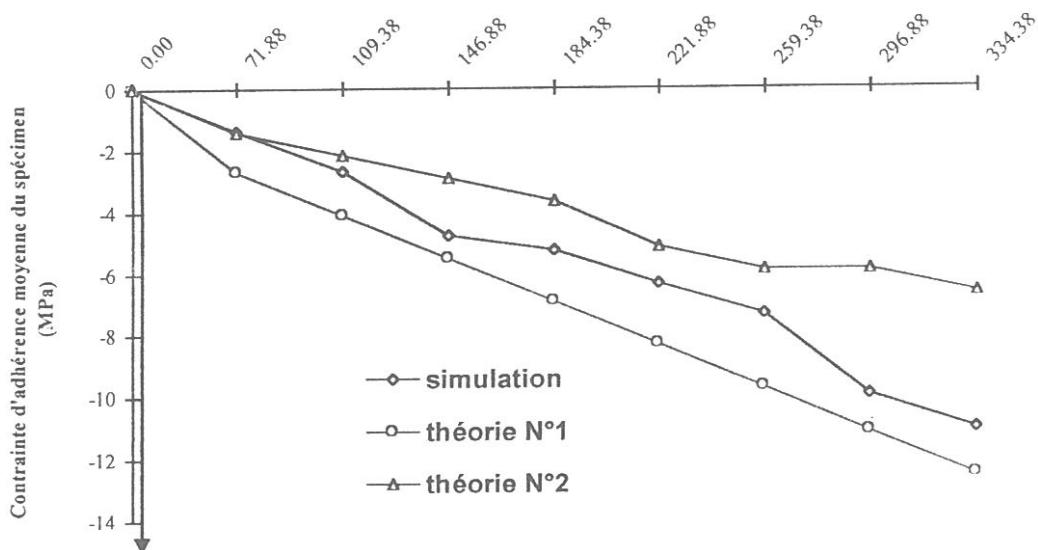


Fig.4.15 Contraintes d'adhérences moyennes du spécimen.

C chapitre 05 :

Conclusions générales

Le travail effectué dans le cadre de cette étude, et dont l'objectif principal est la modélisation discrète des fissures dans les structures en béton armé, utilisant la simulation par éléments finis du test d'arrachement « pull-out ».

La fissure dans la méthode des éléments finis (*MEF*) est traitée comme une fissure discrète individuelle entre les éléments du béton ; ou par une distribution discrète de la fissure à l'intérieur des éléments finis par fixation ou rotation de la direction de fissuration.

En général, la proposition du modèle de distribution discrète des fissures peut simuler et prévoit la progression des fissures autour de la barre de renforcement dans les structures en béton armé.

Pour prédire le type de distribution discrète des fissures dans les structures en B.A., une approche a été proposée pour voir l'évolution des fissures, et leurs propagations.

Différentes techniques utilisant la *MEF* peuvent être employées ; telles que :

- Maillage régulier ;
- Initiation des fissures ;
- Fractionnement automatique des noeuds ;
- Utilisation des éléments de liaison ;
- Et le Contrôle de la fissure.

Ces techniques nécessitent l'utilisation de la mécanique de la rupture du béton (comme la déformation après fissuration avec un contrôle d'énergie de rupture).

Les résultats des expériences du test d'arrachement « pull-out » ont été utilisés pour déterminer les caractéristiques des fissures internes. Des fissures longitudinales se forment autour de la barre de renforcement, et ce cas est observé uniquement lorsqu'une barre déformée (*HA barre haute adhérence*) est soumise en traction.

L'exemple de simulation du test d'arrachement « pull-out », a prouvé la capacité de cette approche de prévoir le type de progression des fissures, des détails de comportement à l'interface et la corrélation entre comportement et fissuration.

Plusieurs comparaisons entre les résultats des tests et la simulation numérique ont été nécessaires. Des formules analytiques existent pour le calcul du glissement, de l'adhérence et la distribution des contraintes dans l'acier, mais ces formules dépendent largement de quelques facteurs empiriques (constantes empiriques) qui sont déterminé directement par les tests.

Des fissures internes se forment à l'intérieur du béton, s'initier surtout sur la surface entourant la barre de renforcement. Celles-ci sont dues à la formation des fissures latérales et transversales, ces dernières se forment et se propagent selon plusieurs directions.

Cette simulation indique que le glissement longitudinal entre l'acier et le béton a une influence importante sur l'adhérence, et il est nécessaire d'introduire son effet tridimensionnel dans l'analyse pour bien définir le comportement d'adhérence.

L'adhérence entre l'acier et le béton est un comportement fondamental des structures en béton armé, où la distribution interne des forces, la rigidité effective et la résistance des membres dépend de celle-ci.

Les bétons armé représentent divers comportement complexes tels que : la non élasticité; la fissuration; la dépendance du temps; et l'effet d'interface qui doivent être pris en considération pour une simulation numérique réelle de la réponse de la structure.

L'approche utilisée nous permette de connaître la loi constitutive locale adhérence - glissement; qui peut être utilisée pour définir la rigidité des éléments de liaison (d'interfaces) entre Acier / Béton lorsqu'une représentation discrète de la barre d'acier est adoptée.

Dans ce cas, un effet global d'adhérence (la rigidité à la traction) peut être introduit par la modification du comportement de l'acier et du béton après fissuration.

Un choix de la représentation de l'acier, du béton et de la fissure doit être bien définit.

A' partir des résultats obtenus par la méthode des éléments finis (*MEF*), un travail futur peut être consacré à l'expression d'un modèle rhéologique qui permet d'établir des lois de comportement des éléments fissurés et des interfaces.

Une amélioration du tcst de simulation peut être faite en utilisant au lieu de *T3* (triangle à 3 noeuds avec 6 *DDL*) des *T6* (triangle à 6 noeuds avec 12 *DDL*) qui améliore l'approximation du champ de déplacements. Ce qui nous permet aussi d'utiliser pour les éléments d'interfaces au lieu de *J4* (éléments rectangulaires à 4 noeuds avec 8 *DDL*) des *J6* (éléments rectangulaires à 6 noeuds avec 12 *DDL*) qui améliore l'approximation du champ de déplacements relatives à travers l'interface acier / béton (*Figure 5.1.b*).

On peut aussi utiliser au lieu de *T3* (triangle à 3 noeuds avec 6 *DDL*) des *T15* (triangle à 15 noeuds avec 30 *DDL*) [14] qui améliore l'approximation du champ de déplacements. Ce qui nous permet aussi d'utiliser pour les éléments d'interfaces au lieu de *J10* (éléments rectangulaires à 10 noeuds avec 20 *DDL*) des *J6* (éléments rectangulaires à 6 noeuds avec 12 *DDL*) qui améliore l'approximation du champ de déplacements relatifs à travers l'interface acier/béton [28] (*Figure 5.1.c*).

D'après [28], amélioré le type d'intégration numérique (au lieu de l'intégration de Newton-Cotes on utilise l'intégration de Gauss et Lobatto) nous permet de diminuer les oscillations de contraintes des éléments d'interfaces. Donc il faut comparer les résultats de cette simulation en utilisant l'intégration de Newton-Cotes avec celle de Gauss et Lobatto, et voire son effet sur l'oscillation des contraintes.

La surface fissurée dans les éléments en béton armé est mesurée dans la matrice de rigidité. En plus de la surface fissurée, des fissures internes seconde se développent autour de la barre d'acier.

La compatibilité des déformations entre Acier / Béton n'est plus maintenue, due à la formation des fissures entre les éléments en B.A.

L'accumulation de la différence des déformations produit des déplacements relatifs.

Les caractéristiques des contraintes d'adhérences / glissement sur la barre de renforcement ont une influence sur la largeur de fissure, l'espacement des fissures et la rigidité à la traction du béton.

Travail futur :

- Comparer le test de GOTO'S N°1 [39] utilisé dans notre étude avec son deuxième tests N°2, tout en gardant la même section transversale d'un carré de côté $a = 120mm$ avec une longueur $L = 300mm$ (longueur double de la première);
- De comparer l'élongation du périmètre entre les deux tests car l'expérience montre que le rapport entre les deux élongation est de l'ordre de 5 (l'élongation du spécimen de longueur $L = 300mm$ / l'élongation du spécimen de longueur $L = 150mm \approx 5$) donc le spécimen de longueur $L = 300mm$ se déplace plus que le spécimen de longueur $L = 150mm$ [38];
- Vérifier l'analogie des résultats des expériences avec ceux de la simulation numérique donnée par MEF de ce deuxième test, et de l'effet de la longueur de la barre sur le déplacement axial et sur la déformation;
- L'expérience a montrée que les fissures dans le cas du deuxième test se propagent jusqu'à atteindre la surface du béton tandis que pour le premier test elles n'atteignent que le $\frac{1}{4}$ du rayon du spécimen;
- Cette comparaison nous permet de définir l'influence de la longueur du spécimen sur l'évolution des fissures; leurs propagation ; la formation des fissures longitudinales et la perte d'adhérence entre acier / béton, etc.;
- Trouver une loi de comportement de l'interface acier / béton à partir des paramètres variant utilisés dans cette simulation, citant par exemple la rigidité tangentielle k_s des éléments d'interface, le pas de chargement (df), et la contrainte de cisaillement entre acier / béton.
- Les approches de fissure continue et discrète demandent des développements de plus qui sont utile pour l'analyse des solides en trois dimensions ($3D$) ;
- Les approches numériques dans la représentation de l'interaction entre le renforcement et le béton sont actuellement à l'état primitif et non satisfaisant ;
- Effet du comportement des bétons sous un chargement cyclique, ignorés dans le modèle numérique du comportement du béton.

A la fin, malgré les progrès réalisés dans la recherche, le développement exact et la modélisation numérique des structures en béton armé et en béton ordinaire restent un champ vaste à exploiter.

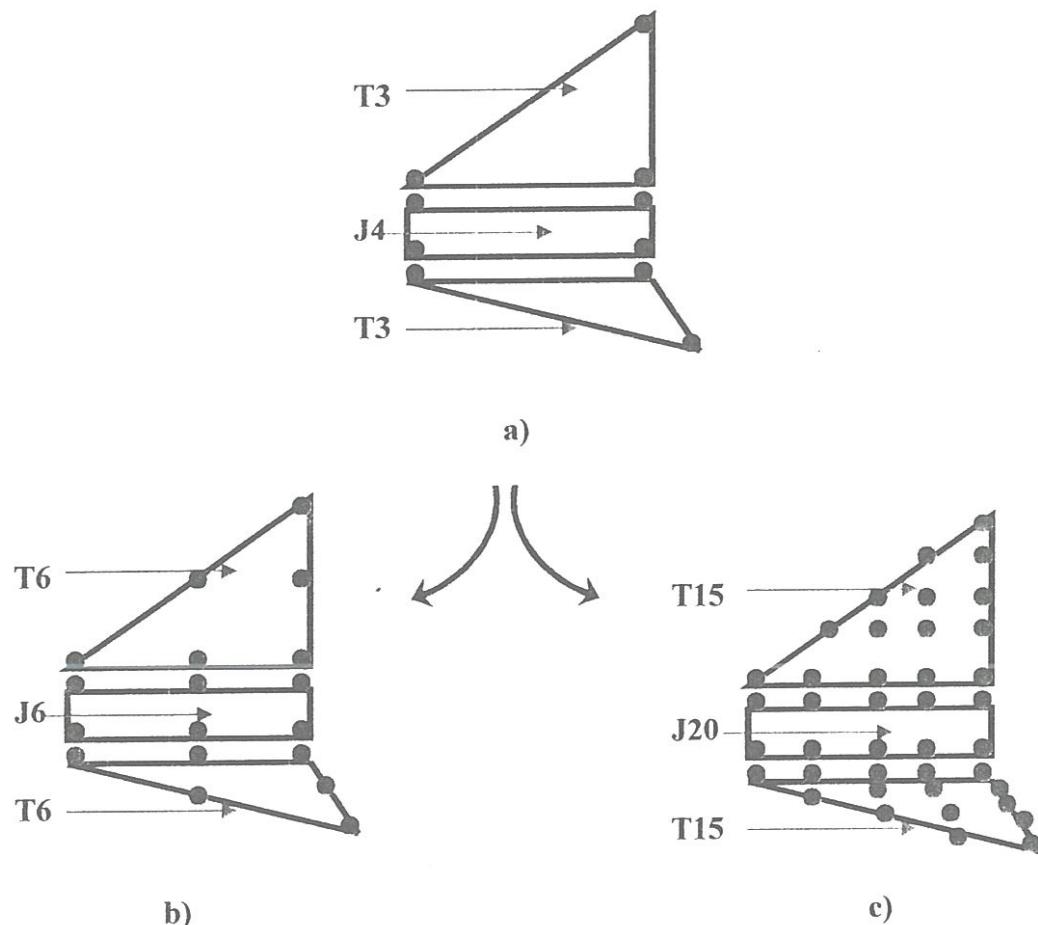


Fig.5.1. éléments en béton et en acier proposés ainsi que l'élément d'interface correspondant

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ACI committee 446JR-97. « Finite Element Analysis of Fracture in Concrete Structures », State of the Arts; (October 16,1997).
- [2] Barthélémy Bernard. « Notions pratiques de Mécaniques de la rupture », Edition Eyrolle (Paris; 1980).
- [3] Bazant, Z.P., « Instability, Ductility and size effect in strain-softening concrete », J.Engre, Mech, Div, ASCE, V.102, No.EM2, (Apr., pp.331-344, 1976).
- [4] Bazant, Z.P., « Mechanics of distributed cracking », ASME Appl. Mech. Rev., V.39, No.5, (May, pp-675-705, 1986).
- [5] Bazant, Z.P.,1986, and Cedolin, L., « Blunt Crack Band Propagation in finite Element Analysis », J.Engrg. Mech, ASCE, V.105, No.2, (Feb, pp.297-315, 1979).
- [6] Bazant, Z.P., and Cedolin, L.,1983, « Fracture Modeling of Crack Band Propagation », J.struct. Engrg., ASCE, V.109, No.2, (Feb., pp.69-92, 1986).
- [7] Bazant, Z.P., and Jirasek, M., « Damage Nonlocality due to Microcrack Interactions : Statically Determination of Crack Influence Function », Fracture and Damage in Quasibrittle Structures : Experiment, Modeling, and Computer Analysis, Z.P. Bazant, Z. Bitmar, M. Jirasek, and J. Mazars, eds., & FN Spon, London, pp.3-17, (1986).
- [8] Bazant, Z.P, and Lin, F.B., « Non Local Smeared Crack Model for Concrete Fracture », J.Engrg. Mech, ASCE, V.114, No.11, (Non,pp.2493-2510, 1988).
- [9] Berhein Madeleine, « Fortran 99, Mode d'emploi »(Inter-editions).
- [10] Charon Pierre, « Exercices de BA selon les règles BAFL83 ». 3^{ème} éditions, Edition Eyrolle, (1987).
- [11] Charon Pierre, « Le calcul et la vérification des ouvrages en BA (Théorie et application) ». 8^{ème} éditions, Edition Eyrolle, (1979).
- [12] Cosserat, E., and Cosserat, F., « Théorie des corps déformables », Hermen,(Paris, 1909).
- [13] Darve Félix, « Manuel de Rhéologie des géomatériaux ». Presses de l'école nationale des ponts et chaussées (France, 1987).
- [14] Dhatt Gouri & Gilbert Touzot, « Une présentation de la méthode des éléments finis ». Deuxième édition (1984).
- [15] Dreux Goerge, Jean Festa. «Nouveau guide du béton et de ses constituants ». 8^{ème} éditions, Edition Eyrolle (1998).
- [16] Goodman, R.E ; Taylor, R.L ; and Brekke, T.L., « A Model for the Mechanics of Jointed Rock », J.Soil Mech, and Found Div., ASCE, V.94, No.3, pp.637-659, (1968).
- [17] Hillerborg, A.; Modder, M. ; and Peterson, P.E, « Analysis of Crack Formation and

Crack Growth in Concrete by means of Fracture Mechanics and Finite Elements », Cem. and Conc. Res., V.6, 773-782, (1976).

- [18] Hughes,B.P, & C.V. Videla, « Design Criteria for early-age Bond strength in reinforced concrete ». (Materials and structures, 25, 445-463, (1992)).
- [19] Ingraffea, A.R., and Gerstle, W.H., « Non Linear- Fracture Models for discrete Crack Propagation », Application of Fracture Mechanics to cementitious composites. NATO- ARW , edited by S.P.Shah, September 4-7, 1984, Martinus- Nijhoff, pp.247-285, (1985).
- [20] Kaplan, M.F., « Crack Propagation and the Fracture of Concrete », ACI Journal, Proceedings V.58, No.5, (May, pp.591-610, 1961).
- [21] Mazars Jacky, « Evolution de la microfissuration dans les bétons : formation de fissures ». Laboratoire de mécanique et technologie de l'école normale supérieure de l'enseignement technique (ENSET, 1981).
- [22] Mochdoudjian Armond, « Cours de RA · Règles BAFI, et CCBA68 », Edition Eyrolle, (1980).
- [23] Ngo and Scordolis, A.C., « Finite Element Analysis of reinforced concrete Beams », ACI Journal, Proceedings, V.64, No.3, (Mar, pp-152-163, 1967).
- [24] Nilson, A.H., « Finite Element Analysis of Reinforced Concrete », PHD Thesis, Dept. Of civil Engineering, University of California, Berkeley, CA, (1967).
- [25] Prat Michel et le concours de Phillippe Bisch; Phillippe Mestat; Alain Millard; Gilles Bijaudier-Cabot. « La modélisation des ouvrages AFPC- Emploi des éléments finis en Génie Civil ». Edition Hermes (Paris, 1995).
- [26] Rashid, Y.R., « Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels ». Nuclear Engineering and Design, V.7, pp-334-344, (1968).
- [27] Rokcy Lenneth & William Griffiths & Roy Evans & David Nethercot, « introduction à la méthode des éléments finis », (1979).
- [28] Rouainia Mohamed, « Modélisation de l'interaction sol-structure par éléments finis de haute précision et loi d'interface incrémentale non linéaire ». Application aux pieux, (17 Septembre, 1992).
- [29] Saouma, V.E., « Interactive Finite Element Analysis of Reinforced Concrete : A Fracture Mechanics Approach », PHD Thesis, Dept, of strcut. Engrg., Cornell Univ., Ithaca, (1981).
- [30] Schellekens J.C.J. and R.DE Borst, « On the numerical Integration of Interface elements ». The Netherlands, Vol. 36, 43-66, (1993).
- [31] Sidney, M. Johnson, traduit par Michel Londez, « Dégradation, Entretien, et réparation des ouvrages du Génie Civil ». Edition Eyrolle (Paris, 1969).
- [32] Steopoe Al, « La durabilité du béton ». Edition Eyrolle (1970).
- [33] Walter H.Gerstle, and Xie, and Ming Xie. FEM, « Modeling of Fictitious Crack Propagation in Concrete ». Part of the journal of engineering Mechanics, Vol.118 N°2 (February, 1992).
- [34] Westergard, H.M., « Stresses at a Crack, Size of the Crack, and the Bending of

Reinforced concrete ». ACI Journal Proceeding, V.30, pp.93-102, (1934).

- [35] Yamaguchi Eiki and Wai-Fah Chen Members, ASCE, « Cracking Model For Finite Element Analysis of Concrete Materials ». Part of the journal of engineering Mechanics, Vol.116, N°6 (June, 1990).
- [36] Yankelevsky, D.Z, « Bond Action Between Concrete and a deformed Bar-a New Model », (January-February, 1986).
- [37] Yao Budan and D.W. Murray, Member of ASCE, « Prediction of Distributed Discrete Concrete Cracking in RC Analysis ». Part of the journal of structural Engineering, Vol. 119, n°10 (October, 1993).
- [38] Yao Budan and D.W. Murray, « Study of Concrete Cracking and Bond using a Distributed Discrete Crack Finite Element (FE) Model ». ACI MATERIALS JOURNAL TECHNICAL paper, V92, N°1 (January, February, 1994).
- [39] Yukimasa Goto. « Crack formed in Concrete Around Deformed Tension Bars ». ACI journal (April, 1971).
- [40] Zienkiewicz, O.C., R.L. Taylor, « La Méthode des éléments finis : formulation de Base et problèmes linéaires ». Afnor technique (France; Septembre, 1991).

A nnexe A :

Critères de ruptures

A-1) Critères macroscopiques de rupture [6] :

Les critères macroscopiques de rupture plastique (Figure 2.15 du chapitre 02), Misses, Mohr - Coulomb, et surtout Tresca, ne représentent pas la totalité des modes de rupture observés. Il faut donc leur adjoindre des critères acceptant la fragilité souvent prononcée de ces matériaux.

a) Critère de traction maximale :

Postule qu'il y a rupture lorsque la contrainte principale mineure est de traction, égale à la résistance du matériau en traction soit : $\sigma_3 = -\sigma_1$ (compression positive).

Les surfaces de ruptures sont les isostatiques majeurs. Il ne peut pas, dans ces conditions, représenter les ruptures se produisant en compression. Cependant il fournit pour certains problèmes, un outil tout à fait acceptable et relic valablement, lorsque $\sigma_3/\sigma_1 < -\frac{1}{3}$, les autres critères. Pour cela il faut déterminer la résistance à la traction du matériau.

b) Critère de Mac Clintock et Nalsh :

Prenant en compte la fermeture des fissures, en compression, il subsiste, pour les fortes contraintes moyennes, le critère de Mohr - Coulomb ou critère de Griffith.

c) Critère de rupture utilisant des surfaces limites empiriques :

Les surfaces limites, le plus souvent paraboliques, sont déterminées comme vérifiant une fonction simple de plusieurs paramètres considérés comme caractéristique intrinsèque du matériau. C'est ainsi que le critère de Fairhurst admet, dans le plan $\sigma_1 - \sigma_3$, une courbe parabolique construite à l'aide des valeurs σ_c et σ_l du matériau.

Remarque :

Les critères macroscopiques ci-dessus conviennent bien pour la plupart des problèmes pratiques. Leurs déterminations expérimentales se fait assez simplement, à l'aide des essais de compression, mono axiale et triaxiale et des essais de traction directe ou indirecte (Essai brésilien). En fait, selon la nature et la structure du matériau, le comportement réel associe plusieurs critères macroscopiques.

A-2) Mécanique de rupture :

a) Modes de rupture :

On distingue 3 modes de ruptures par extension d'une fissure préexistante au sein d'un solide (Figure A.1).

Le mode I a été le plus étudié, car facile à réaliser. Il dérive directement du modèle de Griffith et l'expérimentation. Ce mode est considéré comme intervenant rarement seul dans les structures qui nous concernant, son étude sur les géomatériaux n'a pas été développée, dans un premier temps. Il est nécessaire de prendre en compte le mode II, et le mode III, intervenant soit seul soit en compagnie du mode I, appelé mode mixte.

b) Facteurs d'intensité de contraintes :

Considérant une fissure d'extrémité (o), dans un solide élastique - linéaire, continu, sans force de volume, les faces de la fissure n'étant pas chargées, l'élasticité donne, en contrainte ou en déformation plane, les expressions des déplacements et des contraintes en un point M :

on constate que les contraintes, en $r^{-1/2} = 1/\sqrt{r}$ tendent vers l'infini au voisinage de "o".

Ces contraintes ont été calculées par Irwin, à l'aide de la théorie d'élasticité [2] :

Mode I :

$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \Rightarrow u = \frac{K_I}{G} \cdot \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] \Rightarrow v = \frac{K_I}{G} \cdot \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \quad w = 0 \text{ (déformation plane)}$$

Mode II :

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \right] \Rightarrow u = \frac{K_{II}}{G} \cdot \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \Rightarrow v = \frac{K_{II}}{G} \cdot \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \right] ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \Rightarrow w = 0 \text{ (déformation plane)}$$

Mode III :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad ; \quad u = v = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = \frac{-K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \quad ; \quad \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \quad ; \quad W = \frac{K_{III}}{G} \cdot \left(\frac{2r}{\pi} \right)^{1/2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}$$

Avec : ν est le coefficient de poisson, G le module de cisaillement relié au module d'young par la relation : $2G(1+\nu) = E$.

On définit ainsi les facteurs K qui vont permettre l'élaboration d'un critère de rupture :

Ces facteurs K_I , K_{II} , K_{III} caractérisent à la fois la géométrie du détail de la fissure, et la nature des sollicitations. Ils sont aussi appelés facteurs d'intensité de contrainte et s'expriment en $MPa\sqrt{m}$. Il aura rupture, lorsque le facteur correspondant au mode concerné atteindra une valeur critique K_c [21] : $K - K_c = 0$.

En mode I, K_{IC} est considéré comme une caractéristique du matériau, sa ténacité. Dans un problème plan, K_I est fonction de la géométrie de la structure, la longueur "l" de la fissure préexistante notamment à des conditions de chargement. Les valeurs de K sont obtenues, soit analytiquement, soit numériquement, soit de façon semi - analytique.

La détermination expérimentale de K_{IC} peut se faire à l'aide d'un essai de flexion 3 points ou bien à l'aide d'une éprouvette CT de traction (Figure A.1). Quelque soit la forme de l'éprouvette testée, il faut garder une épaisseur de ligament ($w-l$ pour une éprouvette CT) du même ordre que

la longueur de fissure "l", ceci pour limiter le développement d'une zone plastique au font de fissure; Ces éprouvettes sont assez épaisses.

Pour les géomatériaux, la réalisation d'éprouvettes de traction se révèle très délicate, particulièrement la réalisation d'une fissure de fatigue, en extrémité de pré entaille. Les essais sur éprouvette en flexion 3 points sont plus aisément réalisables. Ils se prêtent assez bien à la détermination de K_c .

A-3) Critère de ruine en mode I [2]:

a) Bilan énergétique :

Considérons un solide de surface initiale S_0 , dans lequel on crée une fissure de surface $\Lambda(t)$ variable dans le temps. L'équilibre thermodynamique donne :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dT}{dt} + \frac{dD}{dt} \quad \text{Avec : (U) le travail effectué par les forces extérieures ;}$$

(V) L'énergie cinétique élastique récupérable stockée dans le solide ; (T) l'énergie cinétique.

(D) La somme de toutes les énergies dissipées de façon irréversible.

$$S(t) = S_0 + \Lambda(t) \Rightarrow \frac{dD}{dt} = \gamma \cdot \frac{dA}{dt} \quad \text{avec : } \frac{dD}{dA} = \gamma \text{ est l'énergie nécessaire à la création d'une surface de rupture unitaire.}$$

L'équation de bilan énergétique devient en situation quasi-statique ($\frac{dT}{dt} = 0$) :

$$\frac{d(U - V)}{dA} = \gamma \quad \text{Avec : } \gamma \text{ est l'énergie nécessaire à cette rupture ; } \frac{d(U - V)}{dA} \text{ l'énergie disponible pour la rupture.}$$

Suivant le signe de : $\frac{d}{dA} \left[\frac{d(U - V)}{dA} - \gamma \right]$ on peut dire que :

Si cette dérivée $> 0 \Rightarrow$ la rupture est instable ;

Si cette dérivée $< 0 \Rightarrow$ la rupture est stable ;

Si cette dérivée $= 0 \Rightarrow$ la rupture est en équilibre.

Dans le cas du mode I : si on prend $\theta = 0 \Rightarrow \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$.

Le déplacement v pour $r < 0$ peut s'écrire, en ne conservant que le terme du premier ordre :

$$v = \frac{2K_I \sqrt{-2r/\pi}}{E_1} \quad \text{Avec : } E_1 = \frac{E}{1 - v^2} \quad \text{en état plan de déformation ;}$$

$$\& \quad E_1 = E \quad \text{en état plan de contrainte.}$$

Si l'on pose $r = x - a$, on peut écrire : $dV = -2 \int_a^{a+da} \frac{1}{2} \cdot \sigma_y(x) \cdot v(x - da) dx$.

En utilisant les expressions de σ_y et v on obtient : $dV = \frac{-K_I^2}{E_1} da$.

Si l'on pose de plus que la fissure se propage sans que se déplacent les points d'applications des charges extérieures, on a : $dU = 0 \Rightarrow \frac{d(U - V)}{da} = \frac{K_I^2}{E_1}$.

b) Critère de ruine :

$G = \frac{d(U - V)}{da} = \frac{K_I^2}{E_I}$ est appelée la force d'extension de la fissure, celle-ci se propage

lorsque $G_I = G_{rc}$ la valeur critique, caractéristique du matériau, ou bien, si :

$K_I \approx K_{rc}$ = Condition pour laquelle la fissure ne se propage de façon instable. K_{ic} est la résistance du matériau à la propagation plane des fissures en mode I. Sa valeur est indépendante de la géométrie du détail et des conditions de chargement, à condition que le matériau soit isotrope.

A.1) Critères de ruptures en mode mixte :

Lorsque seul existe le mode I de propagation, l'instabilité se produit quand $K_I = K_{rc}$. Il est beaucoup plus difficile de proposer un critère de rupture lorsque 2 ou 3 modes de sollicitations existent simultanément, c'est-à-dire si 2 ou 3 facteurs d'intensité de contrainte sont non nuls.

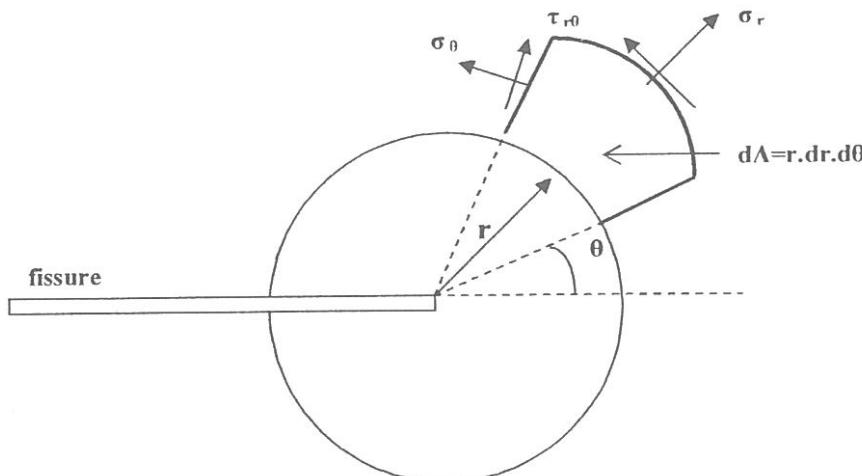
Plusieurs critères de ruptures ont été proposés, sans qu'aucun n'emporte une adhésion générale.

a) En 1963 :

Erdogan et Sih, firent les 2 hypothèses suivantes, dans le cas du mode I, II :

- La fissure se propage dans la direction pour laquelle la contrainte tangentielle σ_{θ} max;
- La fissure devient instable lorsque : $\sigma_g \cdot \sqrt{2 \cdot r \cdot \pi} = K_{IC}$.

Les contraintes sont avec les notations de la figure suivante :



$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cdot (3 - \cos \theta) \cdot \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} \cdot (3 \cdot \cos \theta - 1) \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right] + \dots$$

$$\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cdot (1 + \cos \theta) \cdot \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} \cdot (3 \cdot \sin \theta) \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right] + \dots$$

$$\tau_{r0} = \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cdot \sin \theta \cdot \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} \cdot (3 \cdot \cos \theta - 1) \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right] + \dots$$

Pour que σ_θ soit max., on doit chercher θ_0 ensuite déterminer K_I , K_{II} , K_{III} .

b) En 1975 :

Palniswany et Knauss, proposèrent la relation empirique suivante :

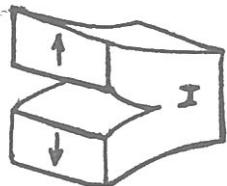
$$\frac{K_I}{K_{IC}} + 3 \left(\frac{K_{II}}{K_{IC}} \right)^2 = 2 \text{ ou bien } \frac{K_I}{K_{IC}} + \left(\frac{K_{II}}{2 \cdot K_{IC}} \right)^2 = 1.$$

c) En 1974 :

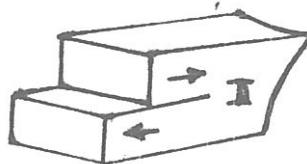
Pour les aciers à HR, Shah propose la valeur critique suivante :

$$K_I + K_{II} = K_{IC}$$

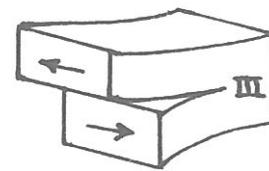
Ces trois critères précédemment énoncés concernent les problèmes plans. D'autres existent concernant les problèmes tridimensionnels comme : critère de Shih et Erdogan.



Ouverture



Glissement plan



Glissement anti-plan

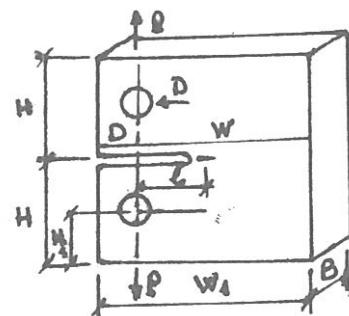
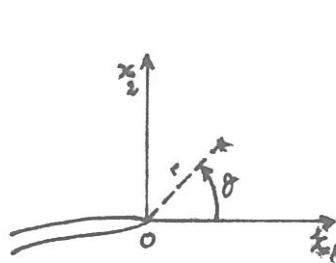


Fig.A.1 Facteur critique d'intensité de contrainte
--Eprouvette de traction compacte CT--

A nnexe B :

Validation du programme

A *nnexe C :*

*Programmes en
FORTRAN 2000 et les
résultats correspondants*

B.1) Le test de validation du programme de la barre d'acier :

Ce programme a été testé pour la barre d'acier soumise à la traction simple, tous les valeurs de calculs et les comparaisons nécessaires entre l'analyse et la théorie est indiquée dans cet annexe B.

On compare la valeur du déplacement absolu donné par la théorie et l'analyse par *MEF*, selon les deux directions (x, y) qui sont $(\Delta R, \Delta L) \equiv (U, V)$ en fonction de chaque pas de charge, sur le périmètre de la barre (*Figure B.1 et B.2*).

$\sigma (MPa)$	<i>Analyse</i>		<i>Théorie</i>	
	$U \equiv \Delta R (mm)$	$V \equiv \Delta L (mm)$	$U \equiv \Delta R (mm)$	$V \equiv \Delta L (mm)$
71,875	$-0,648833.10^{-3}$	$0,188377.10^{-1}$	$0,875275.10^{-3}$	$0,269592.10^{-1}$
109,375	$0,987553.10^{-3}$	$0,286733.10^{-1}$	$-0,133194.10^{-2}$	$0,410248.10^{-1}$
146,875	$-0,132641.10^{-2}$	$0,385125.10^{-1}$	$-0,178860.10^{-2}$	$0,550905.10^{-1}$
184,375	$-0,166538.10^{-2}$	$0,483574.10^{-1}$	$-0,224527.10^{-2}$	$0,691562.10^{-1}$
221,875	$-0,200451.10^{-2}$	$0,582061.10^{-1}$	$-0,270193.10^{-2}$	$0,832218.10^{-1}$
259,375	$-0,234373.10^{-2}$	$0,680567.10^{-1}$	$-0,315860.10^{-2}$	$0,972875.10^{-1}$
296,875	$-0,268312.10^{-2}$	$0,779151.10^{-1}$	$-0,361527.10^{-2}$	$1,113532.10^{-1}$
334,375	$-0,302263.10^{-2}$	$0,877775.10^{-1}$	$-0,407193.10^{-2}$	$1,254188.10^{-1}$

De même pour la valeur du déplacement relative donné par la théorie et l'analyse par *MEF*, selon les deux directions (x, y) qui sont $\left(\frac{\Delta R}{R}, \frac{\Delta L}{L}\right) \equiv (\varepsilon_t, \varepsilon_l)$ en fonction de chaque pas de charge, sur le périmètre de la barre (*Figure B.3 et B.4*).

$\sigma (MPa)$	<i>Analyse</i>		<i>Théorie</i>	
	$\varepsilon_t = \frac{\Delta R}{R}$	$\varepsilon_l = \frac{\Delta L}{L}$	$\varepsilon_t = \frac{\Delta R}{R}$	$\varepsilon_l = \frac{\Delta L}{L}$
71,875	$-7,993833.10^{-5}$	$2,511693.10^{-4}$	$-1,078368.10^{-4}$	$3,594559.10^{-4}$
109,375	$-1,216697.10^{-4}$	$3,823107.10^{-4}$	$-1,640995.10^{-4}$	$5,469980.10^{-4}$
146,875	$-1,634180.10^{-4}$	$5,135000.10^{-4}$	$-2,203621.10^{-4}$	$7,345403.10^{-4}$
184,375	$2,051802.10^{-4}$	$6,447654.10^{-4}$	$-2,766247.10^{-4}$	$9,220824.10^{-4}$
221,875	$-2,469621.10^{-4}$	$7,760814.10^{-4}$	$-3,33328874.10^{-4}$	$1,109625.10^{-3}$
259,375	$-2,887552.10^{-4}$	$9,074227.10^{-4}$	$-3,891500.10^{-4}$	$1,297167.10^{-3}$
296,875	$-3,305691.10^{-4}$	$1,038868.10^{-3}$	$-4,454128.10^{-4}$	$1,484709.10^{-3}$
334,375	$-3,723978.10^{-4}$	$1,170367.10^{-3}$	$-5,016753.10^{-4}$	$1,672251.10^{-3}$

Il en résulte donc le coefficient de poisson qui est le rapport de la déformation transversale sur la déformation longitudinale; $\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L}$ (Figure B.5).

Au niveau des nervures :

Pour chaque intervalle et en fonction de chaque pas de charge (Figure B.6 et B.7).

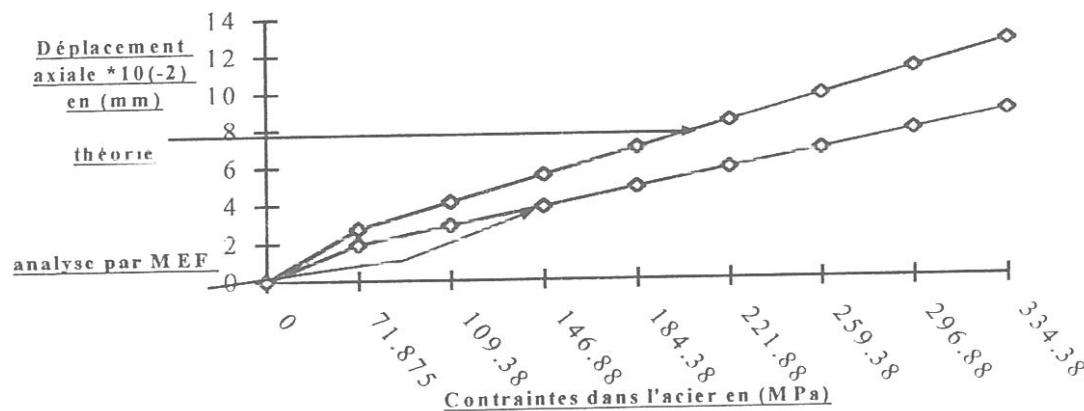


Fig.B.1 Courbe contrainte dans l'acier / déplacement absolu axial sur le périmètre de la barre.

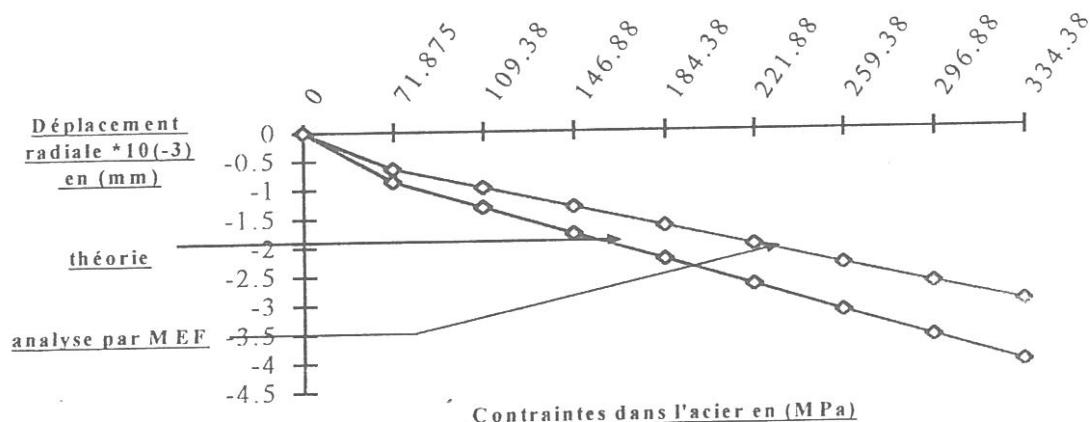


Fig.B.2 Courbe contrainte dans l'acier / déplacement absolu radial
Sur le périmètre de la barre.

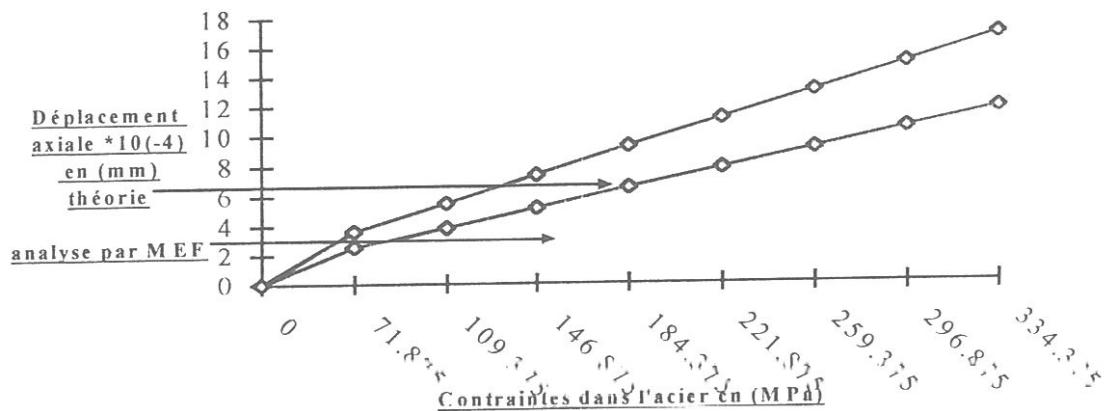


Fig.B.3 Courbe contrainte dans l'acier / déplacement relative axial
Sur le périmètre de la barre.

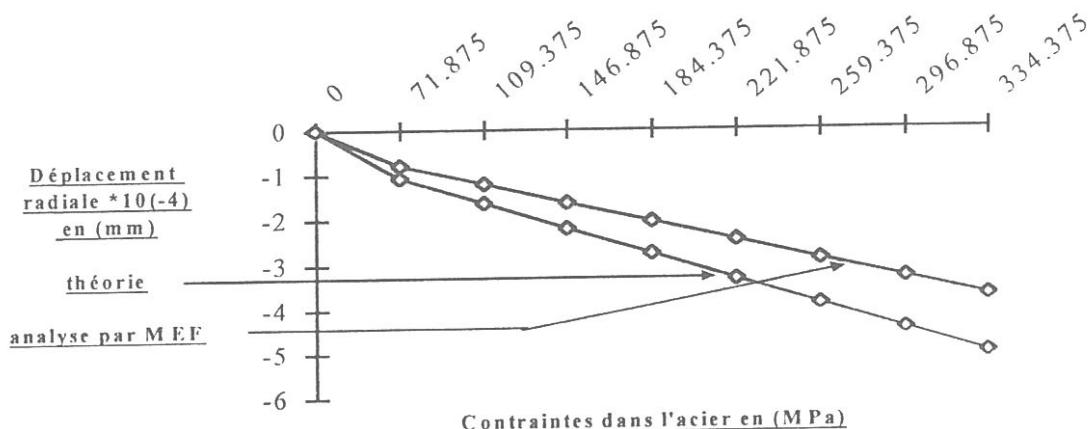


Fig.B.4 Courbe contrainte dans l'acier / déplacement relative radial
Sur le périmètre de la barre.

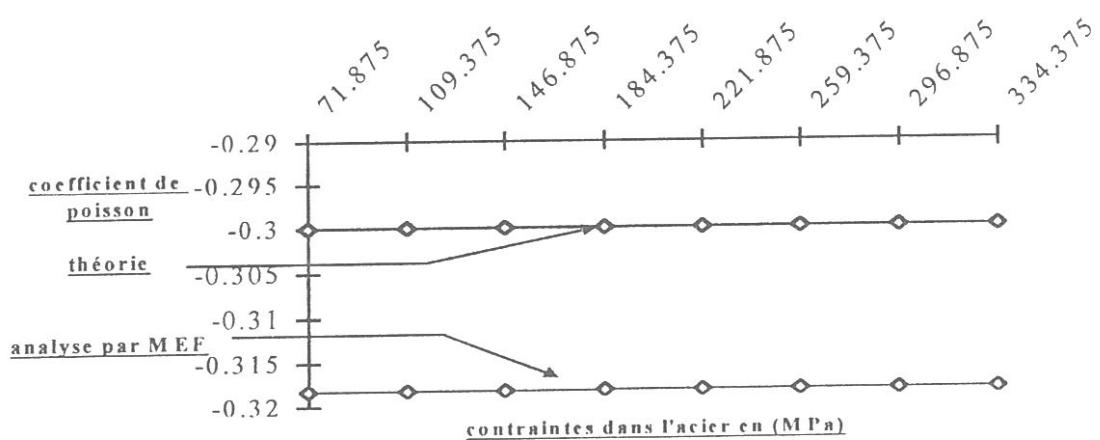


Fig.B.5 courbe contrainte dans l'acier / coefficient de poisson.

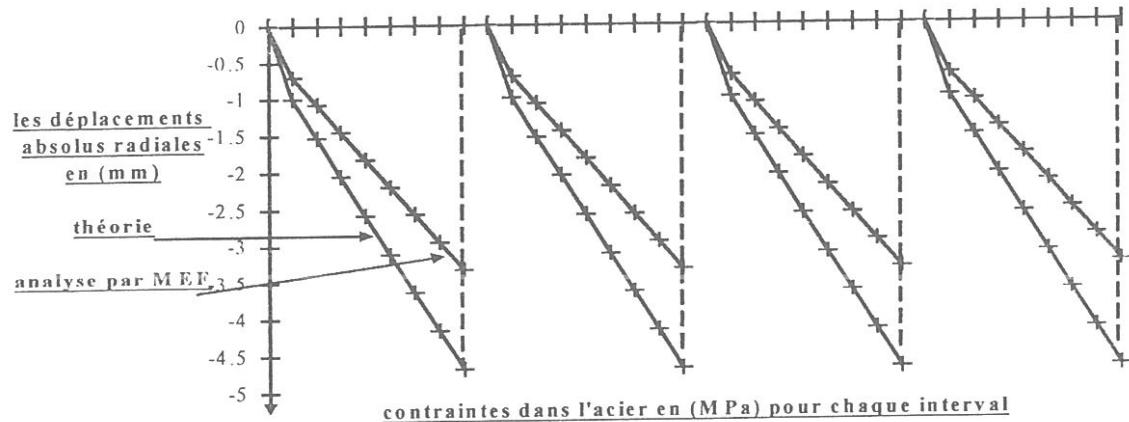


Fig.B.6 Courbe contrainte dans l'acier / les déplacements absolus Radiaux sur les nervures.

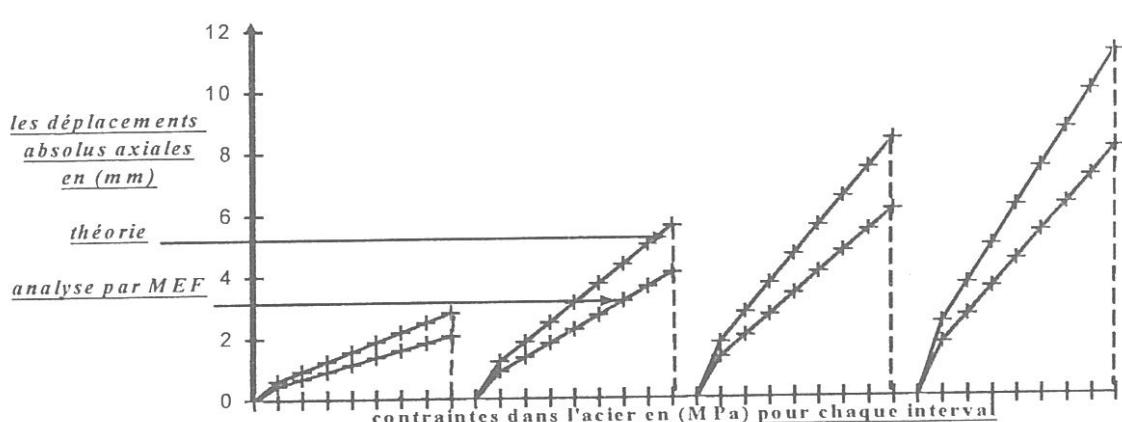


Fig.B.7 Courbe contrainte dans l'acier / les déplacements absolus axiaux sur les nervures.

A nnexe C :

*Programmes en
FORTRAN 2000 et les
résultats correspondants*

Deuxièmes cas de charge et première itération :

```

      do 80 I=1,NN,1
      s1=(s1)+(U1(I)**2)
80    continue
      z=(sqrt(s))/(sqrt(s1))
      write (4,100) (U1(I),I=1,274)
100   format (2x,274(2x,E30.6))
      close (2)
      close (4)
      stop
      end
      ****
      c subroutine TRIANG (VKG,R,
      implicit real (A-H,Q-Z)
      parameter (NNT=137,NN=2*NNT)
      dimension VKG(NN,NN),R(NN)
      data ZERO/0.D0/
      call RESIDU (VKG,R)
      do 10 J=1,NN-1
      if (VKG(J,J).eq.0) then
      L=J+1
      if (VKG(L,J).eq.0) then
      L=L+1
      go to 20
      else
      do 30 K=1,NN
      c=VKG(J,K)
      VKG(J,K)=VKG(L,K)
      VKG(L,K)=c
      continue
      c3=R(J)
      R(J)=R(L)
      R(L)=c3
      endif
      endif
      do 40 I=1,NN-1,1,-1
      s=ZERO
      do 50 J=I+1,NN,1
      s=(s)+(VKG(I,J))*(U(J))
50    continue
      U(I)=((R(I))-s)/(VKG(I,I))
40    continue
      c
      do 60 I=1,NN,1
      U1(I)=U(I)+U0(I)
60    continue
      s=ZERO
      do 70 I=1,NN,1
      s=(s)+(U(I)**2)
70    continue
      s1=ZERO

```

```

50      VKG(I,L)=VKG(I,L)-c*VKG(J,L)
      continue
      40      continue
      do 60 K=J+1,NN
      VKG(K,J)=ZERO
      continue
      60      continue
      10      continue
      return
end
***** subroutine RESIDU (VKG,R)
c deuxieme test
c programme de calcul de la matrice de rigidité élémentaire
c des éléments rectangulaires et triangulaires
c ainsi que la matrice de rigidité totale [VKG]
c implicit real (A-H,Q-Z)
parameter (NDIM=2,NN=137,NN=2*NNT,Ri=3.1416D0)
dimension AT(6,6),AIT(6,6),C1(4,6),BT(4,6),BTT(6,4),EA(4,4)
dimension GT(6,4),VKET(6,6),HKET(6,6),LOCET(6,1:189),EB(4,4)
dimension KCONET(3,1:189),VCORG(2,137),KCONER(4,190:207)
dimension LOCER(8,190:207),VFT(NN),VKT(NN,NN),VKG(NN,NN)
dimension R(NN),U0(NN),VKERI(8,8),U1(274)
data ZERO/0.D0/,UN/1.D0/,DEUX/2.D0/,C1(4,6)/0.D0/,VKERI(8,8)/0.D0/
data BT(4,6)/0.D0/,BTT(6,4)/0.D0/,GT(6,4)/0.D0/,HKET(6,6)/0.D0/
data VKT(274,274)/0.D0/,AT(6,6)/0.D0/,AIT(6,6)/0.D0/
c
call INTRO (VCORG)
call KCONNNEC (KCONET,KCONER)
call CHARGE (VFT)
c la matrice d'élasticité d'acier et le module d'young de l'acier
E2=199955.D0
c le coefficient de poisson
CP2=0.30D0
D1=(E2)*((UN)-(CP2))/(((UN)+(CP2))*(((UN)-(DEUX))*(CP2)))
D2=(CP2)*(D1)/((UN)-(CP2))
D3=(E2)/((DEUX)*((UN)+(CP2)))
EA(1,1)=D1
EA(1,2)=D2
EA(1,3)=D2
c la matrice d'élasticité du béton et le module d'young du béton
E1=24822.D0
c le coefficient de poisson
CP1=0.20D0
D1=(E1)*((UN)-(CP1))/(((UN)+(CP1))*(((UN)-2*(CP1))))
D2=(CP1)*(D1)/((UN)-(CP1))
D3=(E1)/((DEUX)*((UN)+(CP1)))
EB(1,1)=D1
EB(1,2)=D2
EB(1,3)=D2
EB(1,4)=ZERO
EB(2,1)=D2
EB(2,2)=D1
EB(2,3)=D2
EB(2,4)=ZERO
EB(3,1)=D2
EB(3,2)=D2
EB(3,3)=D1
EB(3,4)=ZERO
EB(4,1)=ZERO
EB(4,2)=ZERO
EB(4,3)=ZERO
EB(4,4)=D3
c les éléments triangulaires
do 10 IE=1,189,1
  if (IE.le.45) then

```



```

40      BTT(I,J)=BTT(I,J)
        continue
      c
        do 50 I=1,6
        do 50 J=1,4
        c=ZERO
          do 60 K=1,4
            c0=c+(BTT(I,K))*(EA(K,J))
            c=c0
          continue
            GT(I,J)=c
      50      continue
      c    le calcul de la matrice de rigidité élémentaire [VKETA]
        do 70 I=1,6
        do 70 J=1,6
        c=ZERO
          do 80 K=1,4
            c0=c+(GT(I,K))*(BT(K,J))
            c=c0
          continue
            HKET(I,J)=c
            coef=ZERO+(Ri)*(XG)*(detAT)
            VKET(I,J)=ZERO+(HKET(I,J))*(coef)
      80      continue
        do 90 K=1,6
        I=LOCET(K,IE)
        do 100 L=1,6
        J=LOCET(L,IE)
        VKT(I,J)=(VKT(I,J))+(VKET(K,L))
        continue
        continue
      70      continue
        do 90 K=1,6
        I=LOCET(K,IE)
        do 100 L=1,6
        J=LOCET(L,IE)
        VKT(I,J)=(VKT(I,J))+(VKET(K,L))
        continue
        continue
      100     continue
      90      continue
      else
      c    des éléments en béton
        N1=KCONET(1,IE)
        N2=KCONET(2,IE)
        N3=KCONET(3,IE)
        LOCET(1,IE)=N1*2-1
        LOCET(2,IE)=N1*2
        LOCET(3,IE)=N2*2-1
        LOCET(4,IE)=N2*2
        LOCET(5,IE)=N3*2-1
        LOCET(6,IE)=N3*2
        X1=ZERO+VCOE3(I,N1)
        X2=ZERO+VCOEG(I,N2)
        X3=ZERO+VCORG(I,N3)
        Y1=ZERO+VCORG(2,N1)
        Y2=ZERO+VCORG(2,N2)
        Y3=ZERO+VCORG(2,N3)
        AT(1,1)=UN
        AT(1,2)=ZERO+(X1)
        AT(1,3)=ZERO+(Y1)
        AT(2,4)=UN
        AT(2,5)=ZERO+(X1)
        AT(2,6)=ZERO+(Y1)
        AT(3,1)=UN
        AT(3,2)=ZERO+(X2)
        AT(3,3)=ZERO+(Y2)
        AT(4,4)=UN
        AT(4,5)=ZERO+(X2)
        AT(4,6)=ZERO+(Y2)
        AT(5,1)=UN
        AT(5,2)=ZERO+(X3)
        AT(5,3)=ZERO+(Y3)
        AT(6,4)=UN
        AT(6,5)=ZERO+(X3)
        AT(6,6)=ZERO+(Y3)
        detAT=ZERO+(X1)*((Y2)-(Y3))+(X2)*(X3)*(Y1)+(X3)*(Y1)-(Y2))
        AT(1,1)=ZERO+((X2)*(Y3)-(Y2)*(X3))/((detAT))
        AT(2,1)=ZERO+((Y2)-(Y3))/((detAT))
        AT(3,1)=ZERO+((X3)-(X2))/((detAT))
        AT(4,2)=ZERO+((X2)*(Y3)-(X3)*(Y2))/((detAT))
        AT(5,2)=ZERO+((Y2)-(Y3))/((detAT))
        AT(6,2)=ZERO+((X3)-(X2))/((detAT))
        AT(1,3)=ZERO+(-(X1))*(Y3)+(X3)*(Y1))/((detAT))
        AT(2,3)=ZERO+((Y3)-(Y1))/((detAT))
        AT(3,3)=ZERO+((X1)-(X3))/((detAT))
        AT(4,4)=ZERO+(-(X1)*(Y3)+(X3)*(Y1))/((detAT))
        AT(5,4)=ZERO+((Y3)-(Y1))/((detAT))

```

```

c=c0
450   continue
      GT(I,J)=c
440   continue
c   le calcul de la matrice de rigidité élémentaire [VKETB]
      do 460 I=1,6
      do 460 J=1,6
      c=ZERO
      do 470 K=1,4
      c0=c+(GT(I,K))* (BT(K,J))
      c=c0
      continue
      HKET(I,J)=c
      coef=ZERO+(RJ)* (XG)*(jetAT)
      VKET(I,J)=ZERO+(HKET(I,J))*(coef)
      continue
      do 480 K=1,6
      I=LOCET(K,IE)
      do 490 L=1,6
      J=LOCET(L,E)
      VKT(I,J)=(VKT(I,J))+VKET(K,L))
      continue
      continue
      endif
      10  continue
c   les éléments d'interfaces rectangulaires
      do 340 IE=190,206,4
      a=2.288978/2
      Rks=1.5*(10**4)
      Rkn=10**3
      data=2.158799
      d1=a*((Rks)*((cos(deta)**2)-(Rkn)*((sin(deta)**2)))
      d2=a*((Rkn)*((cos(deta)**2)-(Rks)*((sin(deta)**2)))
      d3=a*(((Rks)-(Rkn))/2)*(sin(Z**data)))
      VKERI(1,1)=d1
      VKERI(1,2)=d3
      VKERI(1,7)=-d1
      VKERI(1,8)=-d3
      VKERI(2,1)=d3

AIT(6,4)=ZERO+((X1)-(X3))/(detAT)
AIT(1,5)=ZERO+((X1)*(Y2)-(X2)*(Y1))/(detAT)
AIT(2,5)=ZERO+((Y1)-(Y2))/(detAT)
AIT(3,5)=ZERO+((X2)-(X1))/(detAT)
AIT(4,6)=ZERO+((X1)*(Y2)-(X2)*(Y1))/(detAT)
AIT(5,6)=ZERO+((Y1)-(Y2))/(detAT)
AIT(6,6)=ZERO+((X2)-(X1))/(detAT)
c   la position du C,D,G de l'élément
XG=ZERO+((X1)+(X2)+(X3))/3
YG=ZERO+((Y1)+(Y2)+(Y3))/3
c   le calcul de la matrice [C]
C1(1,2)=UN
C1(2,6)=UN
C1(3,1)=ZERO+UN/(XG)
C1(3,2)=UN
C1(3,3)=ZERO+(YG)/(XG)
C1(4,3)=UN
C1(4,5)=UN
c   la construction de la matrice [BT]
do 410 I=1,4
do 410 J=1,6
c=ZERO
do 420 K=1,6
c0=c+(C1(I,K))*(AIT(K,J))
c=c0
continue
BT(I,J)=c
continue
son transposée [BTT]
do 430 I=1,6
do 430 J=1,4
BTT(I,J)=ZERO+(BT(J,I))
BTT(I,J)=BTT(I,J)
continue
do 440 I=1,6
do 440 J=1,4
c=ZERO
do 450 K=1,4
c0=c+(BTT(I,K))*(EB(K,J))

```



```

VKERI(1,2)=d3
VKERI(1,7)=-d1
VKERI(1,8)=-d3
VKERI(2,1)=d3
VKERI(2,2)=d2
VKERI(2,7)=-d3
VKERI(2,8)=-d2
VKERI(3,3)=d1
VKERI(3,4)=d3
VKERI(3,5)=-d1
VKERI(3,6)=-d3
VKERI(4,3)=d3
VKERI(4,4)=d2
VKERI(4,5)=-d3
VKERI(4,6)=-d2
VKERI(5,3)=-d1
VKERI(5,4)=-d3
VKERI(5,5)=d1
VKERI(5,6)=-d2
VKERI(6,3)=-d3
VKERI(6,4)=-d2
VKERI(6,5)=d1
VKERI(6,6)=d3
VKERI(6,7)=-d3
VKERI(6,8)=d2
VKERI(7,1)=-d1
VKERI(7,2)=-d3
VKERI(7,7)=d1
VKERI(7,8)=d3
VKERI(8,1)=-d3
VKERI(8,2)=-d2
VKERI(8,3)=d2
VKERI(8,7)=d3
VKERI(8,8)=d2
360  continue
do 370 1E=193,205,4
a=2.288978/2
Rks=1.5*(10**4)
Rkn=10**3
370  continue
do 380 1E=190,207,1
NI=KCONER(1,1E)
N2=KCONER(2,1E)
N3=KCONER(3,1E)
N4=KCONER(4,1E)
d1=a*((Rkn)*(cos(data)**2)+(Rkn)*(sin(data)**2))
d2=a*((Rkn)*(cos(data)**2)+(Rkn)*(sin(data)**2))

```

```

LOCERI(1,IE)=(N1)*2-1
LOCERI(2,IE)=(N1)*2
LOCERI(3,IE)=(N2)*2-1
LOCERI(4,IE)=(N2)*2
LOCERI(5,IE)=(N3)*2-1
LOCERI(6,IE)=(N3)*2
LOCERI(7,IE)=(N4)*2-1
LOCERI(8,IE)=(N4)*2
do 390 K=1,8
  I=LOCERI(K,IE)
  do 400 L=1,8
    J=LOCERI(L,IE)
    VKT(I,J)=VKT(I,J)+VKERI(K,L)
    continue
  400  continue
  380  continue
  c
    do 110 I=1,NN,1
    do 110 J=1,NN,1
      VKG(I,J)=ZERO+(VKT(I,J))
    110  continue
    c  introduction des conditions aux limites
      VKG(1,1)=UN
      do 120 I=2,NN,1
    120  VKG(I,1)=ZERO
      do 130 J=2,NN,1
    130  VKG(1,J)=ZERO
    c
      VKG(1,2)=ZERO
      VKG(2,2)=UN
      do 140 I=3,NN,1
    140  VKG(I,2)=ZERO
      VKG(2,1)=ZERO
      do 150 J=3,NN,1
    150  VKG(2,J)=ZERO
    c
      do 160 J=3,37,2
        VKG(J,J)=UN
        do 170 K=1,J-1,1

```

```

do 320 I=1,NN,1
  s=ZERO
  do 330 J=1,NN,1
    s=(s)+(VKG(I,J))*(U0(J))
  330  continue
    RI=(VFT(I))-s
  320  continue
    close (2)
    return
  end
  ****
  subroutine INTRO (VCORG)
  c
  c sous programme de calcul des coordonnées des noeuds VCORG
  c IN indice des noeuds
  c NNT nombre total des noeuds
  implicit real (A-H,Q-Z)
  parameter (NDIM=2,NNT=137,F1=9.366689D0,F2=8.096972D0,
  /F3=1.904545D0,F4=6.428788D0,F5=8.333333D0)
  dimension IN(1,274),VCORG(NDIM,NNT),U0(274),U1(274)
  data IN(1,274)/0.D0/,ZERO/0.D0/
  c
  c sous programme de calcul des coordonnées des noeuds VCORG
  c IN indice des noeuds
  c NNT nombre total des noeuds
  open (2,file='karima11.res',status='old')
  read (2,170) (U1(I),I=1,274)
  170  format (2x,274(2x,E30.6))
  do 160 I=1,274
    U0(I)=ZERO+(U1(I))
  160  continue
  c
  c les noeuds dans l'acier
  VCORG(1,1)=ZERO
  VCORG(2,1)=ZERO
  do 10 I=3,19,2
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-2)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-2)+F5
  10  continue
  c
  VCORG(1,2)=ZERO
  VCORG(2,2)=F3
  do 20 I=6,18,4

```

```

VCORG(1,I)=VCORG(1,I-3)
VCORG(2,I)=VCORG(2,I-3)+2*F5
90  continue
    VCORG(1,46)=F2
    VCORG(2,46)=F5+F4
    do 100 I=49,55,3
        VCORG(1,I)=VCORG(1,I-3)
        VCORG(2,I)=VCORG(2,I-3)+2*F5
100  continue
    VCORG(1,58)=F1
    VCORG(2,58)=ZERO
    do 110 I=68,128,10
        VCORG(1,I)=VCORG(1,I-10)+F5
        VCORG(2,I)=VCORG(2,I-10)
110  continue
    do 120 N=59,67,1
        VCORG(1,N)=VCORG(1,N-1)
        VCORG(2,N)=VCORG(2,N-1)+F5
        KK=N+70
        do 130 NN=N+10,KK,10
            VCORG(1,NN)=VCORG(1,NN-10)+F5
            VCORG(2,NN)=VCORG(2,N)
130  continue
120  continue
    c  vecteur des noeuds
    do 140 I=1,274
        140  IN(1,I)=IN(1,I)+1
    c  do 150 J=1,137
        VCORG(1,J)=VCORG(1,J)+U0(2*(J)-1)
        VCORG(2,J)=VCORG(2,J)+U0(2*(J))
    150  continue
    close (2)
    return
    end
    ****
    subroutine KCONNEC (KCONET,KCONER)
    subroutine INTRO (VCORG,KCONER,KCONET,KCONERI)
    c  la table de connectivité KNONE

```

```

KCONET(1,4)=IN(1,3)
KCONET(2,4)=KCONET(1,4)-1
KCONET(3,4)=KCONET(1,4)+19
do 60 IE=12,36,8
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
  KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
  KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
60  continue
  KCONET(1,5)=IN(1,4)
  KCONET(2,5)=KCONET(1,5)-1
  KCONET(3,5)=KCONET(1,5)+18
  do 70 IE=13,29,8
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
70  continue
  KCONET(1,6)=IN(1,4)
  KCONET(2,6)=KCONET(1,6)+18
  KCONET(3,6)=KCONET(1,6)+19
  do 80 IE=14,30,8
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
80  continue
  KCONET(1,7)=IN(1,24)
  KCONET(2,7)=KCONET(1,7)-20
  KCONET(3,7)=KCONET(1,7)-1
  do 90 IE=15,31,8
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
90  continue
  KCONET(1,8)=IN(1,5)
  KCONET(2,8)=KCONET(1,8)-1
  KCONET(3,8)=KCONET(1,8)+19
  do 100 IE=16,32,8
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
100 continue
  KCONET(1,37)=IN(.,21)
  KCONET(2,37)=KCONET(1,37)-1
  KCONET(3,37)=KCONET(1,37)+18
  do 110 IE=39,45,2
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-2)+4
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-2)+4
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-2)+1
110 continue
  KCONET(1,38)=IN(1,24)
  KCONET(2,38)=KCONET(1,38)-1
  KCONET(3,38)=KCONET(1,38)+16
  do 120 IE=40,44,2
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-2)+4
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-2)+4
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-2)+1
120 continue
c  les éléments triangulaires en béton (IEB=46:189)
  KCONET(1,46)=IN(1,45)
  KCONET(2,46)=IN(1,44)
  KCONET(3,46)=IN(1,58)
  do 130 IE=50,62,4
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+3
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+3
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
130 continue
  do 140 IE=47,63,4
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
    KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
140 continue
  do 150 IE=48,60,4
    KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
    KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
150 continue
  do 160 IE=49,61,4
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)+1

```

```

      KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE-1)
160  continue
      KCONET(1,64)=IN(1,69)
      KCONET(2,64)=IN(1,58)
      KCONET(3,64)=IN(1,68)
      do 170 IE=68,80,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
      KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
      KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
170  continue
      do 180 IE=100,172,36
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-36)+20
      KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-36)+20
      KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-36)+20
180  continue
      do 190 IE=104,116,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
      KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
      KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
190  continue
      do 200 IE=140,152,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
      KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
      KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
200  continue
      do 210 IE=176,188,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
      KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
      KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
210  continue
      do 220 IE=65,81,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
      KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
      KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
220  continue
      do 230 IE=101,117,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
      KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
      KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
230  continue
      do 240 IE=137,153,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
      KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
      KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
240  continue
      do 250 IE=173,189,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
      KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
      KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
250  continue
      do 260 IE=66,78,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
      KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
      KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
260  continue
      do 270 IE=102,114,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
      KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
      KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
270  continue
      do 280 IE=138,150,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
      KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
      KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
280  continue
      do 290 IE=174,186,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
      KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
      KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
290  continue
      do 300 IE=67,79,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
      KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
      KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE-1)
300  continue
      do 310 IE=103,115,4
      KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
      KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
      KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
310  continue

```

```

310  KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
      continue
      do 320 IE=139,151,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
      320  continue
      do 330 IE=175,187,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
      330  continue
        KCONET(1,82)=IN(1,69)
        KCONET(2,82)=IN(1,68)
        KCONET(3,82)=IN(1,78)
        do 340 IE=118,154,36
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-36)+20
          KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-36)+20
          KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-36)+20
      340  continue
      do 350 IE=86,98,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
      350  continue
      do 360 IE=122,134,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
      360  continue
      do 370 IE=158,170,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
      370  continue
      do 380 IE=83,99,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE-1)
      380  continue
      do 390 IE=119,135,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
      390  continue
      do 400 IE=155,171,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
      400  continue
      do 410 IE=84,96,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
      410  continue
      , do 420 IE=120,132,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
      420  continue
      do 430 IE=156,168,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
      430  continue
      do 440 IE=85,97,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
      440  continue
      do 450 IE=121,133,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
      450  continue
      do 460 IE=157,169,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE-1)
      460  continue

```

```

KCONERI(2,IE)=KCONERI(2,IE-4)+2
KCONERI(3,IE)=KCONERI(3,IE-4)+1
KCONERI(4,IE)=KCONERI(4,IE-4)+4
460  continue
c   les éléments rectangulaires d'interfaces (IE=190:207)
   KCONERI(1, 190)=IN(1,58)
   KCONERI(2, 190)=IN(1,44)
   KCONERI(3, 190)=IN(1,21)
   KCONERI(4, 190)=IN(1,39)
   do 470 IE=194,206,4
      KCONERI(1,IE)=KCONERI(1,IE-4)+2
      KCONERI(2,IE)=KCONERI(2,IE-4)+3
      KCONERI(3,IE)=KCONERI(3,IE-4)+4
      KCONERI(4,IE)=KCONERI(4,IE-4)+1
   470  continue
      KCONERI(1,191)=IN(1,44)
      KCONERI(2,191)=IN(1,45)
      KCONERI(3,191)=IN(1,22)
      KCONERI(4,191)=IN(1,21)
      do 480 IE=195,207,4
         KCONERI(1,IE)=KCONERI(1,IE-4)+3
         KCONERI(2,IE)=KCONERI(2,IE-4)+3
         KCONERI(3,IE)=KCONERI(3,IE-4)+4
         KCONERI(4,IE)=KCONERI(4,IE-4)+4
   480  continue
      KCONERI(1,192)=IN(1,45)
      KCONERI(2,192)=IN(1,46)
      KCONERI(3,192)=IN(1,23)
      KCONERI(4,192)=IN(1,22)
      do 490 IE=196,204,4
         KCONERI(1,IE)=KCONERI(1,IE-4)+3
         KCONERI(2,IE)=KCONERI(2,IE-4)+3
         KCONERI(3,IE)=KCONERI(3,IE-4)+4
         KCONERI(4,IE)=KCONERI(4,IE-4)+4
   490  continue
      KCONERI(1,193)=IN(1,46)
      KCONERI(2,193)=IN(1,60)
      KCONERI(3,193)=IN(1,40)
      KCONERI(4,193)=IN(1,23)
      do 500 IE=197,205,4
         KCONERI(1,IE)=KCONERI(1,IE-4)+3

```



```

30      continue
      c3=R(J)
      R(J)=R(L)
      R(L)=c3
      endif
      endif
      do 40 I=J+1,NN
      c=VKG(I,J)/VKG(J,J)
      R(I)=R(I)-c*R(J)
      do 50 L=J+1,NN
      VKG(I,L)=VKG(I,L)-c*VKG(J,L)
      continue
      continue
      do 60 K=J+1,NN
      VKG(K,J)=ZERO
      continue
      continue
      return
end ****
subroutine RESIDU (VKG,R)
c deuxième test
c programme de calcul de la matrice de rigidité élémentaire
c des éléments rectangles et triangulaires
c ainsi que la matrice de rigidité totale [VKG]
c implicit real (A-H,Q-Z)
parameter (NDIM=2,NNT=137,NN=2*NNT,Ri=3.1416D0)
dimension A(1:6,6),BT(6,6),C(1:4,6),BT(4,6),BT(6,4),EA(4,4)
dimension GT(6,4),VKET(6,6),HKET(6,6),LOCET(6,1:189),EB(4,4)
dimension KCONET(3,1:189),VCORG(2,137),KCONER(4,190:207)
dimension LOCER(8,190:207),VFT(NN),VKT(NN,NN),VKG(NN,NN)
dimension R(NN),U(0:NN),VKERI(8,8),U(1:274)
data ZERO/0.D0/,UN/1.D0/,DEUX/2.D0/,C1(4,6)/0.D0/,VKERI(8,8)/0.D0/
data BT(4,6)/0.D0/,BT(6,4)/0.D0/,GT(6,4)/0.D0/,HKET(6,6)/0.D0/
data VKT(274,274)/0.D0/,AT(6,6)/0.D0/,AIT(6,6)/0.D0/
c
call INTRO (VCORG)
call KCONNNEC (KCONET,KCONER)
call CHARGE (VFT)

```

```

EB(3,2)=D2
EB(3,3)=D1
EB(3,4)=ZERO
EB(4,1)=ZERO
EB(4,2)=ZERO
EB(4,3)=ZERO
EB(4,4)=D3
c   les éléments triangulaires
do 10 IE=1,189,1
  if (IE.le.45) then
    des éléments en acier
    N1=KCONET(1,IE)
    N2=KCONET(2,IE)
    N3=KCONET(3,IE)
    LOCET(1,IE)=N1*2-1
    LOCET(2,IE)=N1*2
    LOCET(3,IE)=N2*2-1
    LOCET(4,IE)=N2*2
    LOCET(5,IE)=N3*2-1
    LOCET(6,IE)=N3*2
    X1=ZERO+VCORG(1,N1)
    X2=ZERO+VCORG(1,N2)
    X3=ZERO+VCORG(1,N3)
    Y1=ZERO+VCORG(2,N1)
    Y2=ZERO+VCORG(2,N2)
    Y3=ZERO+VCORG(2,N3)
    AT(1,1)=UN
    AT(1,2)=ZERO+(X1)
    AT(1,3)=ZERO+(Y1)
    AT(2,4)=UN
    AT(2,5)=ZERO+(X1)
    AT(2,6)=ZERO+(Y1)
    AT(3,1)=UN
    AT(3,2)=ZERO+(X2)
    AT(3,3)=ZERO+(Y2)
    AT(4,4)=UN
    AT(4,5)=ZERO+(X2)
    AT(4,6)=ZERO+(Y2)
    AT(5,1)=UN
    AT(5,2)=ZERO+(X3)
    AT(5,3)=ZERO+(Y3)
    AT(6,4)=UN
    AT(6,5)=ZERO+(X3)
    AT(6,6)=ZERO+(Y3)
    detAT=ZERO+(X1)*(Y2)-Y3)+(X2)*(Y3)-(X3)*(Y1)+(X3)*(Y1)-(Y2))
    AIT(1,1)=ZERC+(X2)*(Y3)-(X3)*(Y2))/(detAT)
    AIT(2,1)=ZERC+(Y2)-(Y3))/(detAT)
    AIT(3,1)=ZERC+(X3)-(X2))/(detAT)
    AIT(4,2)=ZERC+(X2)*(Y3)-(X3)*(Y2))/(detAT)
    AIT(5,2)=ZERC+((Y2)-(Y3))/(detAT)
    AIT(6,2)=ZERC+((X3)-(X2))/(detAT)
    AIT(1,3)=ZERC+(-X1)*(Y3)+(X3)*(Y1))/(detAT)
    AIT(2,3)=ZERC+((Y3)-(Y1))/(detAT)
    AIT(3,3)=ZERC+((X1)-(X3))/(detAT)
    AIT(4,4)=ZERC+(-X1)*(Y3)+(X3)*(Y1))/(detAT)
    AIT(5,4)=ZERC+((Y3)-(Y1))/(detAT)
    AIT(6,4)=ZERC+((X1)-(X3))/(detAT)
    AIT(1,5)=ZERC+((X1)*(Y2)-(X2)*(Y1))/(detAT)
    AIT(2,5)=ZERC+((Y1)-(Y2))/(detAT)
    AIT(3,5)=ZERC+((X2)-(X1))/(detAT)
    AIT(4,6)=ZERC+((X1)*(Y2)-(X2)*(Y1))/(detAT)
    AIT(5,6)=ZERC+((Y1)-(Y2))/(detAT)
    AIT(6,6)=ZERC+((X2)-(X1))/(detAT)
    c   la position du C.D.G de l'élément
    XG=ZERO+((X1)+(X2)+(X3))/3
    YG=ZERO+((Y1)+(Y2)+(Y3))/3
    le calcul de la matrice [C]
    C1(1,2)=UN
    C1(2,6)=UN
    C1(3,1)=ZERO+UN,"XG)
    C1(3,2)=UN
    C1(3,3)=ZERO+(YC1)/(XG)
    C1(4,3)=UN
    C1(4,5)=UN
    c   la construction de la matrice [BT]
    do 20 I=1,4
    do 20 J=1,6
      c=ZERO

```

```

do 30 K=1,6
  c0=c+(C1(I,K))*(AIT(K,J))
  c=c0
  continue
  BT(I,J)=c
  continue
  son transposée [BTT]
  do 40 I=1,6
  do 40 J=1,4
    BTT(I,J)=ZERO+(BT(J,I))
    BTT(I,J)=BTT(I,J)
    continue
  do 50 I=1,6
  do 50 J=1,4
    c=ZERO
    do 60 K=1,4
      c0=c+(BTT(I,K))*(EA(K,J))
      c=c0
      continue
      GT(I,J)=c
      continue
      le calcul de la matrice de rigidité élémentaire [VKET(A]
      do 70 I=1,6
      do 70 J=1,6
        c=ZERO
        do 80 K=1,4
          c0=c+(GT(I,K))*(BT(K,J))
          c=c0
          continue
          HKET(I,J)=c
          coef=ZERO+(Ri)*(XG)*(detAT)
          VKET(I,J)=ZERO+(HKET(I,J))*(coef)
          continue
          do 90 K=1,6
            I=LOCET(K,IE)
            do 100 L=1,6
              J=LOCET(L,IE)
              VKET(I,J)=(VKT(I,J))+(VKET(K,L))
              AT(I,1)=ZERO+((Y2)*
              AT(I,1)=ZERO+((Y3))
              AT(1,2)=ZERO+(Y2)
              AT(1,3)=ZERO+(Y1)
              AT(2,4)=UN
              AT(2,5)=ZERO+(X1)
              AT(2,6)=ZERO+(Y1)
              AT(3,1)=UN
              AT(3,2)=ZERO+(X2)
              AT(3,3)=ZERO+(Y2)
              AT(4,4)=UN
              AT(4,5)=ZERO+(X2)
              AT(4,6)=ZERO+(Y2)
              AT(5,1)=UN
              AT(5,2)=ZERO+(X3)
              AT(5,3)=ZERO+(Y3)
              AT(6,4)=UN
              AT(6,5)=ZERO+(X3)
              AT(6,6)=ZERO+(Y3)
              detAT=ZERO+(X1)*(Y2)-
              AT(1,1)=ZERO+((Y2)-

```



```

350  continue
      do 360 1E=192,204,4
      a=6.428788/2
      Rks=1.5*(10**4)
      Rkn=10**3
      data=2.158799
      d1=a*((Rks)*((cos(data))**2)+(Rkn)*((sin(data))**2))
      d2=a*((Rkn)*((cos(data))**2)+(Rks)*((sin(data))**2))
      d3=a*(((Rks)-(Rkn))/2)*(sin(2*data)))
      VKERI(1,1)=d1
      VKERI(1,2)=d3
      VKERI(1,7)=-d1
      VKERI(1,8)=-d3
      VKERI(2,1)=d3
      VKERI(2,2)=d2
      VKERI(2,7)=-d3
      VKERI(2,8)=-d2
      VKERI(3,3)=d1
      VKERI(3,4)=d3
      VKERI(3,5)=-d1
      VKERI(3,6)=-d3
      VKERI(4,3)=d3
      VKERI(4,4)=d2
      VKERI(4,5)=-d3
      VKERI(4,6)=-d2
      VKERI(5,3)=-d1
      VKERI(5,4)=-d3
      VKERI(5,5)=d1
      VKERI(5,6)=d3
      VKERI(6,3)=-d3
      VKERI(6,4)=-d2
      VKERI(6,5)=d3
      VKERI(6,6)=d2
      VKERI(7,1)=-d1
      VKERI(7,2)=-d3
      VKERI(8,1)=-d3
      VKERI(8,2)=-d2
      VKERI(8,7)=d3
      VKERI(8,8)=d2
      do 370 1E=193,205,4
      a=2.288978/2
      Rks=1.5*(10**4)
      Rkn=10**3
      data=2.158799
      d1=a*((Rks)*((cos(data))**2)+(Rkn)*((sin(data))**2))
      d2=a*((Rkn)*((cos(data))**2)+(Rks)*((sin(data))**2))
      d3=a*(((Rks)-(Rkn))/2)*(sin(2*data)))
      VKERI(1,1)=d1
      VKERI(1,2)=d3
      VKERI(1,7)=-d1
      VKERI(1,8)=-d3
      VKERI(2,1)=d3
      VKERI(2,2)=d2
      VKERI(2,7)=-d3
      VKERI(2,8)=-d2
      VKERI(3,3)=d1
      VKERI(3,4)=d3
      VKERI(3,5)=-d1
      VKERI(3,6)=-d3
      VKERI(4,3)=d3
      VKERI(4,4)=d2
      VKERI(4,5)=-d2
      VKERI(4,6)=-d3
      VKERI(5,5)=d1
      VKERI(5,6)=d3
      VKERI(6,3)=-d3
      VKERI(6,4)=-d2
      VKERI(6,5)=d3
      VKERI(6,6)=d2
      VKERI(7,1)=-d1
      VKERI(7,2)=-d3
      VKERI(7,7)=d1
      VKERI(7,8)=d2
      VKERI(8,1)=-d3
      VKERI(8,2)=-d2

```

```

VKERI(8,1)=-d3
VKERI(8,2)=-d2
VKERI(8,7)=d3
VKERI(8,8)=d2
370 continue
do 380 IE=190,207,1
  N1=KCONERI(1,IE)
  N2=KCONERI(2,IE)
  N3=KCONERI(3,IE)
  N4=KCONERI(4,IE)
  LOCERI(1,IE)=(N1)**2-1
  LOCERI(2,IE)=(N1)**2
  LOCERI(3,IE)=(N2)**2-1
  LOCERI(4,IE)=(N2)**2
  LOCERI(5,IE)=(N3)**2-1
  LOCERI(6,IE)=(N3)**2
  LOCERI(7,IE)=(N4)**2-1
  LOCERI(8,IE)=(N4)**2
  do 390 K=1,8
    I=LOCERI(K,IE)
    do 400 L=1,8
      J=LOCERI(L,IE)
      VKT(I,J)=VKT(I,J)+VKERI(K,L)
    400 continue
    390 continue
  c
    do 110 I=1,NN,1
    do 110 J=1,NN,1
      VKG(I,J)=ZERO+(VKT(I,J))
    110 continue
  c introduction des conditions aux limites
    VKG(1,1)=UN
    do 120 I=2,NN,1
  120      VKG(I,I)=ZERO
    do 130 J=2,NN,1
  130      VKG(1,J)=ZERO
  c
    VKG(1,2)=ZERO

```

```

do 300 K=J+1,NN,1
300  VKG(J,K)=ZERO
260  continue
c
open (4,file='karima2.res',status='old')
read (4,500) (U1(I),I=1,274)
500  format (2x,274(2x,E30.6))
do 310 I=1,274
U0(I)=ZERO+U1(I)
310  continue
do 320 I=1,NN,1
s=ZERO
do 330 J=1,NN,1
s=(s)+(VKG(I,J))*(U0(J))
330  continue
R(I)=(VFT(I))-s
320  continue
close (4)
return
end
c
***** subroutine INTRO (VCORG)
c
c sous programme de calcul des coordonnées des noeuds VCORG
c IN indice des noeuds
c NNT nombre total des noeuds
c implicit real (A-H,Q-Z)
parameter (NDIM=2,NNT=137,F1=9.366689D0,F2=8.096972D0,
/F3=1.904545D0,F4=6.428788D0,F5=8.333333D0)
dimension IN(1,274),VCORG(NDIM,NNT),U0(274),U1(274)
data IN(1,274)/0.D0/,ZERO/0.D0/
c
c sous programme de calcul des coordonnées des noeuds VCORG
c IN indice des noeuds
c NNT nombre total des noeuds
open (4,file='karima2.res',status='old')
read (4,170) (U1(I),I=1,274)
170  format (2x,274(2x,E30.6))
do 160 I=1,274
U0(I)=ZERO+U1(I)
160  continue
c
c les noeuds dans l'acier
VCORG(1,1)=ZERO
VCORG(2,1)=ZERO
do 10 I=3,19,2
  VCORG(1,I)=VCORG(1,I-2)
  VCORG(2,I)=VCORG(2,I-2)+F5
10  continue
  VCORG(1,2)=ZERC
  VCORG(2,2)=F3
do 20 I=6,18,4
  VCORG(1,I)=VCORG(1,I-1)
  VCORG(2,I)=VCORG(2,I-1)+F3
20  continue
  do 30 I=4,16,4
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-1)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-1)+F4
30  continue
    VCORG(1,20)=F2
    VCORG(2,20)=ZERO
do 40 I=22,38,2
  VCORG(1,I)=VCORG(1,I-2)
40  continue
  VCORG(2,I)=VCORG(2,I-2)+F5
  VCORG(1,21)=F2
  VCORG(2,21)=F3
do 50 I=25,37,4
  VCORG(1,I)=VCORG(1,I-1)
  VCORG(2,I)=VCORG(2,I-1)-F3
50  continue
  do 60 I=23,35,4
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-1)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-1)-F4
60  continue
    VCORG(1,39)=F1
    VCORG(2,39)=ZERO
do 70 I=40,43,1
  VCORG(1,I)=VCORG(1,I-1)
  VCORG(2,I)=VCORG(2,I-1)-2*F5
70  continue

```

```

c les noeuds dans le béton
VCORG(1,44)=F2
VCORG(2,44)=F3
do 80 I=47,56,3
  VCORG(1,I)=VCORG(1,I-3)
  VCORG(2,I)=VCORG(2,I-3)+2*F5
80  continue
  VCORG(1,45)=F2
  VCORG(2,45)=F5
  do 90 I=48,57,3
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-3)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-3)+2*F5
90  continue
  VCORG(1,46)=F2
  VCORG(2,46)=F5+F4
  do 100 I=49,55,3
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-3)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-3)+2*F5
100 continue
  VCORG(1,58)=F1
  VCORG(2,58)=ZERO
  do 110 I=68,128,10
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-10)+F5
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-10)
110  continue
  do 120 N=59,67,1
    VCORG(1,N)=VCORG(1,N-1)
    VCORG(2,N)=VCORG(2,N-1)+F5
    KK=N+70
    do 130 NN=N+10,KK,10
      VCORG(1,NN)=VCORG(1,NN-10)+F5
      VCORG(2,NN)=VCORG(2,NN)
130  continue
120  continue
c vecteur des noeuds
  do 140 I=1,274
    IN(I,I)=IN(I,I)+1
140  IN(1,1)=IN(1,1)+1
c
  do 150 J=1,137

```

```

KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
40  continue
    KCONET(1,3)=IN(1,22)
    KCONET(2,3)=KCONET(1,3)-20
    KCONET(3,3)=KCONET(1,3)-1
    do 50 IE=11,35,8
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
50  continue
    KCONET(1,4)=IN(1,3)
    KCONET(2,4)=KCONET(1,4)-1
    KCONET(3,4)=KCONET(1,4)+19
    do 60 IE=12,36,8
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
60  continue
    KCONET(1,5)=IN(1,4)
    KCONET(2,5)=KCONET(1,5)-1
    KCONET(3,5)=KCONET(1,5)+18
    do 70 IE=13,29,8
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
70  continue
    KCONET(1,6)=IN(1,4)
    KCONET(2,6)=KCONET(1,6)+18
    KCONET(3,6)=KCONET(1,6)+19
    do 80 IE=14,30,8
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
80  continue
    KCONET(1,7)=IN(1,24)
    KCONET(2,7)=KCONET(1,7)-20
    KCONET(3,7)=KCONET(1,7)-1
    do 90 IE=15,31,8

```

```

    KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
140  continue
    do 150 IE=48,60,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
    150  continue
    do 160 IE=49,61,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE-1)
    160  continue
        KCONET(1,64)=IN(1,69)
        KCONET(2,64)=IN(1,58)
        KCONET(3,64)=IN(1,68)
    do 170 IE=68,80,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
    170  continue
    do 180 IE=100,172,36
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-36)+20
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-36)+20
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-36)+20
    180  continue
    do 190 IE=104,116,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
    190  continue
    do 200 IE=140,152,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
    200  continue
    do 210 IE=176,188,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
    210  continue
    do 220 IE=65,81,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
    220  continue
    do 230 IE=101,117,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
    230  continue
    do 240 IE=137,153,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
    240  continue
    do 250 IE=173,189,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
    250  continue
    do 260 IE=66,78,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
    260  continue
    do 270 IE=102,114,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
    270  continue
    do 280 IE=138,150,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
    280  continue
    do 290 IE=174,186,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1

```

```

KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
290  continue
do 300 IE=67,79,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
  KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
300  continue
do 310 IE=103,115,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
  KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
310  continue
do 320 IE=139,151,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
  KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
320  continue
do 330 IE=175,187,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
  KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
330  continue
  KCONET(1,82)=IN(1,69)
  KCONET(2,82)=IN(1,68)
  KCONET(3,82)=IN(1,78)
do 340 IE=118,154,36
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-36)+20
  KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-36)+20
  KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-36)+20
340  continue
do 350 IE=86,98,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
  KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
  KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
350  continue
do 360 IE=122,134,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
  KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+1
360  continue
do 370 IE=158,170,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
  KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
  KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
370  continue
do 380 IE=83,99,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
  KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
380  continue
do 390 IE=119,135,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
  KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
390  continue
do 400 IE=155,171,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
  KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
400  continue
do 410 IE=84,96,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
  KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
410  continue
do 420 IE=120,132,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
  KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
420  continue
do 430 IE=156,168,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
  KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
430  continue
do 440 IE=85,97,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1

```

```

KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
440 continue
do 450 IE=121,133,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
  KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
450 continue
do 460 IE=157,169,4
  KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
  KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
  KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
460 continue
c   les éléments rectangulaires d'interfaces (IE=190:207)
  KCONER(1,190)=IN(1,58)
  KCONER(2,190)=IN(1,44)
  KCONER(3,190)=IN(1,21) .
  KCONER(4,190)=IN(1,39)
  do 470 IE=194,206,4
    KCONER(1,IE)=KCONER(1,IE-4)+2
    KCONER(2,IE)=KCONER(2,IE-4)+3
    KCONER(3,IE)=KCONER(3,IE-4)+4
    KCONER(4,IE)=KCONER(4,IE-4)+1
470 continue
  KCONER(1,191)=IN(1,44)
  KCONER(2,191)=IN(1,45)
  KCONER(3,191)=IN(1,22)
  KCONER(4,191)=IN(1,21)
  do 480 IE=195,207,4
    KCONER(1,IE)=KCONER(1,IE-4)+3
    KCONER(2,IE)=KCONER(2,IE-4)+3
    KCONER(3,IE)=KCONER(3,IE-4)+4
    KCONER(4,IE)=KCONER(4,IE-4)+4
480 continue
  KCONER(1,192)=IN(1,45)
  KCONER(2,192)=IN(1,46)
  KCONER(3,192)=IN(1,23)
  KCONER(4,192)=IN(1,22)
  do 490 IE=196,204,4

```

c subroutine CHARGE 'VFT'

c programme de calcul du vecteur de charge élémentaire {VFE} et globale {VFT}

```

c le premier pas de charge F1
implicit real (A-H,Q-Z)
parameter (NDIM=2,NNT=137,NN=2*NNT,C=34434.909930D0,A=0.3271D0)
dimension VFT(NN)
data ZERO/0.D0/
do 20 I=1,NN
  VFT(I)=ZERO
20  continue
c le vecteur de charge totale {VFT}
c la charge est appliquée dans le sens "y"
  VFT(38)=VFT(38)+A*(C)/2
  VFT(76)=VFT(76)+A*(C)/2
c
  return
end
c ****

```

Calcul des contraintes normales et principales aux noeuds :

```

c deuxième test
c le calcul des contraintes de chaque élément à chaque noeuds
c programme de calcul de la matrice de rigidité élémentaire
c des éléments rectangles et triangulaires
c ainsi que la matrice de rigidité totale [VKT]
implicit real (A-H,Q-Z)
parameter (NDIM=2,NNT=137,NN=2*NNT)
dimension AT(6,6),AIT(6,6),VCORG(2,137),KCONE(T(3,1:189))
dimension LOCET(6,1:189),U1(NN),EB(4,4),C1(4,6),BT(4,6),GTB(4,6)
dimension SITF(4,137),SIT(4,3),SITP(4,137),EA(4,4)
data AT(6,6)/0.D0/,AIT(6,6)/0.D0/,ZERO/0.D0/,UN/1.D0/,DEUX/2.D0/
data C1(4,6)/0.D0/,BT(4,6)/0.D0/,GTB(4,6)/0.D0/
data SITF(4,137)/0.D0/,SIT(4,3)/0.D0/,SITP(4,137)/0.D0/
open (6,file='karima22.res')
call INTRO (VCORG)
call KCONNIEC (KCONE(T)
open (5,file='karima21.res',status='old')
read (5,1000) (U1(I),I=1,274)
1000 format (2x,274(2x,E30.6))
c la matrice d'élasticité d'acier et le module d'young de l'acier

```

```

EB(3,3)=D1
EB(3,4)=ZERO
EB(4,1)=ZERO
EB(4,2)=ZERO
EB(4,3)=ZERO
EB(4,4)=D3
c   les éléments triangulaires dans le béton
do 10 IE=46,189,1
  N1=KCONET(1,IE)
  N2=KCONET(2,IE)
  N3=KCONET(3,IE)
  LOCET(1,IE)=N1*2-1
  LOCET(2,IE)=N1*2
  LOCET(3,IE)=N2*2-1
  LOCET(4,IE)=N2*2
  LOCET(5,IE)=N3*2-1
  LOCET(6,IE)=N3*2
  X1=ZERO+VCORG(1,N1)
  X2=ZERO+VCORG(1,N2)
  X3=ZERO+VCORG(1,N3)
  Y1=ZERO+VCORG(2,N1)
  Y2=ZERO+VCORG(2,N2)
  Y3=ZERO+VCORG(2,N3)
  AT(1,1)=UN
  AT(1,2)=ZERO+(X1)
  AT(1,3)=ZERO+(Y1)
  AT(2,4)=UN
  AT(2,5)=ZERO+(X1)
  AT(2,6)=ZERO+(Y1)
  AT(3,1)=UN
  AT(3,2)=ZERO+(X2)
  AT(3,3)=ZERO+(Y2)
  AT(4,4)=UN
  AT(4,5)=ZERO+(X2)
  AT(4,6)=ZERO+(Y2)
  AT(5,1)=UN
  AT(5,2)=ZERO+(X3)
  AT(5,3)=ZERO+(Y3)
  AT(6,4)=UN

```

```

  AT(6,5)=ZERO+(X3)
  AT(6,6)=ZERO+(Y3)
  detAT=ZERO+(X1)*((Y2)-(Y3))+(X2)*((Y3)-(Y1))+(X3)*((Y1)-(Y2))
  AT(1,1)=ZERO+(((X2)*(Y3)-(X3)*(Y2))/(detAT)
  AT(2,1)=ZERO+(((Y2)-(Y3))/(detAT)
  AT(3,1)=ZERO+(((X3)-(X2))/(detAT)
  AT(4,2)=ZERO+(((X2)*(Y3)-(X3)*(Y2))/(detAT)
  AT(5,2)=ZERO+(((Y2)-(Y3))/(detAT)
  AT(6,2)=ZERO+(((X3)-(X2))/(detAT)
  AT(1,3)=ZERO+(-(X1)*(Y3)+(X3)*(Y1))/(detAT)
  AT(2,3)=ZERO+((Y3)-(Y1))/(detAT)
  AT(3,3)=ZERO+((X1)-(X3))/(detAT)
  AT(4,4)=ZERO+(-(X1)*((Y3)+(X3)*(Y1))/(detAT)
  AT(5,4)=ZERO+((Y3)-(Y1))/(detAT)
  AT(6,4)=ZERO+((X1)-(X3))/(detAT)
  AT(1,5)=ZERO+((X1)*(Y2)-(X2)*(Y1))/(detAT)
  AT(2,5)=ZERO+((Y1)-(Y2))/(detAT)
  AT(3,5)=ZERO+((X2)-(X1))/(detAT)
  AT(4,6)=ZERO+((X1)*(Y2)-(X2)*(Y1))/(detAT)
  AT(5,6)=ZERO+((Y1)-(Y2))/(detAT)
  AT(6,6)=ZERO+((X2)-(X1))/(detAT)
c   c'est des éléments en béton à partir de IE=46
do 100 M=1,3
  N=KCNET(M,IE)
  X=VCORG(1,N)
  Y=VCORG(2,N)
c   le calcul de la matrice [C]
  C1(1,2)=UN
  C1(2,6)=UN
  C1(3,1)=ZERO+UN/X
  C1(3,2)=UN
  C1(3,3)=ZERO+Y/X
  C1(4,3)=UN
  C1(4,5)=UN
c   la construction de la matrice [BT]
  do 110 I=1,4
    do 110 J=1,6
      c=ZERO
      do 120 K=1,N

```

```

c0=c+C1(I,K)*AIT(K,J)
120  continue
     c=c0
     BT(I,J)=c
110  continue
     do 130 I=1,4
     do 130 J=1,6
     c=ZERO
     do 140 K=1,4
     c0=c+EB(I,K)*BT(K,J)
     c=c0
     continue
     GTB(I,J)=c
130  continue
     do 150 I=1,4
     c=ZERO
     do 160 K=1,4
     c2=LOCET(K,IE)
     c0=c+(GTB(I,K))*(U1(c2))
     c=c0
     continue
     SIT(I,M)=c
     SITF(I,N)=SITF(I,N)+SIT(I,M)
150  continue
100  continue
10   continue
close (2)
c   le calcul des contraintes moyennes
     do 190 IN=45,54,3
     do 700 I=1,4
     SITF(I,IN)=SITF(I,IN)/4
700  continue
190  continue
IN=57
     do 200 I=1,4
     SITF(I,IN)=SITF(I,IN)/2
200  continue
IN=58
     do 210 I=1,4
     SITF(I,IN)=SITF(I,IN)/2

```

```

290 continue
do 300 IN=69,75,2
L=IN+40
do 790 K=IN,L,20
do 310 I=1,4
SITF(I,K)=SITF(I,IN)/8
310 continue
790 continue
300 continue
do 320 IN=80,86,2
L=IN+40
do 800 K=IN,L,20
do 330 I=1,4
SITF(I,K)=SITF(I,IN)/8
330 continue
800 continue
320 continue
do 340 IN=70,76,2
L=IN+40
do 810 K=IN,L,20
do 350 I=1,4
SITF(I,K)=SITF(I,IN)/4
350 continue
810 continue
340 continue
do 360 IN=79,85,2
L=IN+40
do 820 K=IN,L,20
do 370 I=1,4
SITF(I,K)=SITF(I,IN)/4
370 continue
820 continue
360 continue
do 380 IN=129,135,2
do 770 I=1,4
SITF(I,IN)=SITF(I,IN)/4
770 continue
380 continue
do 390 IN=130,136,2

```

```

SITP(4,IN)=SITF(3,IN)
410  continue
do 890 IN=79,87,1
SITP(1,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2+
/ (SQR((SITF(1,IN)-SITF(2,IN))**2+4*((SITF(4,IN))**2))/2
SITP(2,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2-
/ (SQR((SITF(1,IN)-SITF(2,IN))**2+4*((SITF(4,IN))**2))/2
890  continue
SITP(4,IN)=SITF(3,IN)
do 900 IN=89,97,1
SITP(1,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2+
/ (SQR((SITF(1,IN)-SITF(2,IN))**2+4*((SITF(4,IN))**2))/2
SITP(2,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2-
/ (SQR((SITF(1,IN)-SITF(2,IN))**2+4*((SITF(4,IN))**2))/2
SITP(4,IN)=SITF(3,IN)
900  continue
do 910 IN=99,107,1
SITP(1,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2+
/ (SQR((SITF(1,IN)-SITF(2,IN))**2+4*((SITF(4,IN))**2))/2
SITP(2,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2-
/ (SQR((SITF(1,IN)-SITF(2,IN))**2+4*((SITF(4,IN))**2))/2
SITP(4,IN)=SITF(3,IN)
910  continue
do 920 IN=109,117,1
SITP(1,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2+
/ (SQR((SITF(1,IN)-SITF(2,IN))**2+4*((SITF(4,IN))**2))/2
SITP(2,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2-
/ (SQR((SITF(1,IN)-SITF(2,IN))**2+4*((SITF(4,IN))**2))/2
SITP(4,IN)=SITF(3,IN)
920  continue
do 930 IN=119,127,1
SITP(1,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2+
/ (SQR((SITF(1,IN)-SITF(2,IN))**2+4*((SITF(4,IN))**2))/2
SITP(2,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2-
/ (SQR((SITF(1,IN)-SITF(2,IN))**2+4*((SITF(4,IN))**2))/2
SITP(4,IN)=SITF(3,IN)
930  continue
do 940 IN=129,137,1
SITP(1,IN)=(SITF(1,IN)+SITF(2,IN))/2-

```

```

VCORG(2,1)=ZERO
do 10 I=3,19,2
  VCORG(1,I)=VCORG(1,I-2)
  VCORG(2,I)=VCORG(2,I-2)+F5
10  continue
  VCORG(1,2)=ZERO
  VCORG(2,2)=F3
  do 20 I=6,18,4
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-1)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-1)+F3
20  continue
  do 30 I=4,16,4
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-1)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-1)+F4
30  continue
  VCORG(1,20)=F2
  VCORG(2,20)=ZERO
  do 40 I=22,38,2
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-2)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-2)+F5
40  continue
  VCORG(1,21)=F2
  VCORG(2,21)=F3
  do 50 I=25,37,4
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-1)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-1)+F3
50  continue
  do 60 I=23,35,4
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-1)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-1)+F4
60  continue
  VCORG(1,39)=F1
  VCORG(2,39)=ZERO
  do 70 I=40,43,1
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-1)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-1)+2*F5
70  continue
  c  les noeuds dans le béton
  VCORG(1,44)=F2

80  continue
  VCORG(1,45)=F2
  VCORG(2,45)=F5
  do 90 I=48,57,3
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-3)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-3)+2*F5
90  continue
  VCORG(1,46)=F2
  VCORG(2,46)=F5+F4
  do 100 I=49,55,3
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-3)
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-3)+2*F5
100 continue
  VCORG(1,58)=F1
  VCORG(2,58)=ZERO
  do 110 I=68,128,10
    VCORG(1,I)=VCORG(1,I-10)+F5
    VCORG(2,I)=VCORG(2,I-10)
110 continue
  do 120 N=59,67,1
    VCORG(1,N)=VCORG(1,N-1)
    VCORG(2,N)=VCORG(2,N-1)+F5
    KK=N+70
    do 130 NN=N+10,KK,10
      VCORG(1,NN)=VCORG(1,NN-10)+F5
      VCORG(2,NN)=VCORG(2,N)
130 continue
  120 continue
  c  vecteur des noeuds
  do 140 I=1,137
    IN(1,I)=IN(1,I)+I
140  IN(1,I)=IN(1,I)+I
    do 150 J=1,137
      VCORG(1,J)=VCORG(1,J)+U0(2*(J)-1)
      VCORG(2,J)=VCORG(2,J)+U0(2*(J))
150  continue

```

```

close (5)
return
end
***** ****
c subroutine KCONNNEC (KCONET)
c la table de connectivité KNONE
c et la table de localisation LOCE
c NELT nombre d'élément total
implicit real (A-H,Q-Z)
parameter (NDIM=2,NNT=137,NELT=207,NNELT=3,NNERI=4)
dimension IN(1,NNT),IEL(1,NNELT),KCONET(NNELT,1:189)
dimension LOCET(3*NDIM,1:189),KCONERI(NNERI,190:207)
dimension LOCERI(4*NDIM,190:207)
data IN(1,137)/0.0D0/,IEL(1,207)/0.0D0/
c vecteur des noeuds
do 10 I=1,137
  IN(I,1)=IN(1,I)+1
10  c vecteur d'éléments
do 20 J=1,207
  IEL(1,J)=IEL(1,J)+J
20  c pour les éléments triangulaires en acier (IE=45)
  KCONET(1,1)=IN(1,2)
  KCONET(2,1)=KCONET(1,1)-1
  KCONET(3,1)=KCONET(1,1)+18
do 30 IE=9,33,8
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
  KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
  KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
30  c continue
  KCONET(1,2)=IN(1,2)
  KCONET(2,2)=KCONET(1,2)+18
  KCONET(3,2)=KCONET(1,2)+19
do 40 IE=10,34,8
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
  KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
  KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
40  c continue
  KCONET(1,3)=IN(1,22)
  KCONET(2,3)=KCONET(1,3)-20

```

```

KCONET(2,8)=KCONET(1,8)-1
KCONET(3,8)=KCONET(1,8)+19
do 100 IE=16,32,8
  KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-8)+4
  KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-8)+4
  KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-8)+4
100  continue
  KCONET(1,37)=IN(1,21)
  KCONET(2,37)=KCONET(1,37)-1
  KCONET(3,37)=KCONET(1,37)+18
  do 110 IE=39,45,2
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-2)+4
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-2)+4
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-2)+1
110  continue
  KCONET(1,38)=IN(1,24)
  KCONET(2,38)=KCONET(1,38)-1
  KCONET(3,38)=KCONET(1,38)+16
  do 120 IE=40,44,2
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-2)+4
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-2)+4
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-2)+1
120  continue
c   les éléments triangulaires en béton (IEB=46:189)
  KCONET(1,46)=IN(1,45)
  KCONET(2,46)=IN(1,44)
  KCONET(3,46)=IN(1,58)
  do 130 IE=50,62,4
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+3
    KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+3
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
130  continue
  do 140 IE=47,63,4
    KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
    KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
    KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
140  continue
  do 150 IE=48,60,4
    KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1

```

```

KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
220  continue
      do 230 IE=101,117,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
          KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
          KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
230  continue
      do 240 IE=137,153,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
          KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
          KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
240  continue
      do 250 IE=173,189,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
          KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
          KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
250  continue
      do 260 IE=66,78,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
          KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
          KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
260  continue
      do 270 IE=102,114,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
          KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
          KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
270  continue
      do 280 IE=138,150,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
          KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
          KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
280  continue
      do 290 IE=174,186,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)+1
          KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
          KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
290  continue
      do 300 IE=67,79,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
300  continue
      do 310 IE=103,115,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
          KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
          KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
310  continue
      do 320 IE=139,151,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
          KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
          KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
320  continue
      do 330 IE=175,187,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
          KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
          KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
330  continue
      do 340 IE=118,154,36
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-36)+20
          KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-36)+20
          KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-36)+20
340  continue
      do 350 IE=86,98,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
          KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
          KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
350  continue
      do 360 IE=122,134,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
          KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
          KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
360  continue
      do 370 IE=158,170,4
          KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-4)+2
          KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-4)+2
370  continue

```

```

KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-4)+2
370  continue
      do 380 IE=83,99,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
      380  continue
      do 390 IE=119,135,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
      390  continue
      do 400 IE=155,171,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(2,IE)=KCONET(3,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(2,IE)+1
      400  continue
      do 410 IE=84,96,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
      410  continue
      do 420 IE=120,132,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
      420  continue
      do 430 IE=156,168,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(3,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(1,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(3,IE-1)
      430  continue
      do 440 IE=85,97,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
      440  continue
      do 450 IE=121,133,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
      450  continue
      do 460 IE=157,169,4
        KCONET(1,IE)=KCONET(2,IE-1)+1
        KCONET(2,IE)=KCONET(2,IE-1)
        KCONET(3,IE)=KCONET(1,IE-1)
      460  continue
      c   les éléments rectangles d'interfaces (IE=190:207)
        KCONERI(1, 190)=IN(1,58)
        KCONERI(2, 190)=IN(1,44)
        KCONERI(3, 190)=IN(1,21)
        KCONERI(4, 190)=IN(1,39)
      do 470 IE=194,206,4
        KCONERI(1,IE)=KCONERI(1,IE-4)+2
        KCONERI(2,IE)=KCONERI(2,IE-4)+3
        KCONERI(3,IE)=KCONERI(3,IE-4)+4
        KCONERI(4,IE)=KCONERI(4,IE-4)+1
      470  continue
        KCONERI(1,191)=IN(1,44)
        KCONERI(2,191)=IN(1,45)
        KCONERI(3,191)=IN(1,22)
        KCONERI(4,191)=IN(1,21)
      do 480 IE=195,207,4
        KCONERI(1,IE)=KCONERI(1,IE-4)+3
        KCONERI(2,IE)=KCONERI(2,IE-4)+3
        KCONERI(3,IE)=KCONERI(3,IE-4)+4
        KCONERI(4,IE)=KCONERI(4,IE-4)+4
      480  continue
        KCONERI(1,192)=IN(1,45)
        KCONERI(2,192)=IN(1,46)
        KCONERI(3,192)=IN(1,23)
        KCONERI(4,192)=IN(1,22)
      do 490 IE=196,204,4
        KCONERI(1,IE)=KCONERI(1,IE-4)-3
        KCONERI(2,IE)=KCONERI(2,IE-4)-3
        KCONERI(3,IE)=KCONERI(3,IE-4)-4
        KCONERI(4,IE)=KCONERI(4,IE-4)-4
      490  continue

```

```

KCONERI(1,193)=IN(1,46)
KCONERI(2,193)=IN(1,60)
KCONERI(3,193)=IN(1,40)
KCONERI(4,193)=IN(1,23)
do 500 IE=197,205,4
  KCONERI(1,IE)=KCONERI(1,IE-4)+3
  KCONERI(2,IE)=KCONERI(2,IE-4)+2
  KCONERI(3,IE)=KCONERI(3,IE-4)+1
  KCONERI(4,IE)=KCONERI(4,IE-4)+4
500  continue
      do 510 IE=1,189,1
        LOCET(1,IE)=KCONET(1,IE)*2-1
        LOCET(2,IE)=KCONET(1,IE)*2
        LOCET(3,IE)=KCONET(2,IE)*2-1
        LOCET(4,IE)=KCONET(2,IE)*2
        LOCET(5,IE)=KCONET(3,IE)*2-1
        LOCET(6,IE)=KCONET(3,IE)*2
      510  continue
      do 520 IE=190,207,1
        LOCERI(1,IE)=KCONERI(1,IE)*2-1
        LOCERI(2,IE)=KCONERI(1,IE)*2
        LOCERI(3,IE)=KCONERI(2,IE)*2-1
        LOCERI(4,IE)=KCONERI(2,IE)*2
        LOCERI(5,IE)=KCONERI(3,IE)*2-1
        LOCERI(6,IE)=KCONERI(3,IE)*2
        LOCERI(7,IE)=KCONERI(4,IE)*2-1
        LOCERI(8,IE)=KCONERI(4,IE)*2
      520  continue
      return
    end
  ****
  C

```

Déplacements de chaque noeud dans les deux directions (x, y) notes (u, v) :

.186276E-03	.732746E-03	.248335E-04	.156579E-03
-.155172E-03	-.000000E+00	.923583E-04	.153827E-03
-.153160E-03	.814036E-04	-.164195E-03	-.000000E+00
-.163149E-03	.161794E-03	-.161839E-03	.231057E-04
-.161980E-03	.238463E-03	-.158862E-03	.449158E-04
-.169013E-03	.312064E-03	-.149050E-03	.637123E-04
-.156131E-03	.377580E-03	-.135659E-03	.790980E-04
-.144074E-03	.433909E-03	-.110653E-03	.897396E-04
-.930006E-04	.471593E-03	-.777493E-04	.961461E-04
-.801658E-05	.483789E-03	-.308367E-04	.987588E-04
-.163818E-03	.493844E-03	-.239033E-04	.980475E-04
-.1586668E-03	.000000E+00	.837822E-04	.976215E-04
-.162380E-03	.605098E-04	-.162516E-03	.000000E+00
-.160285E-03	.118742E-03	-.161819E-03	.179712E-04
-.161383E-03	.175005E-03	-.156217E-03	.338044E-04
-.153056E-03	.225214E-03	-.148056E-03	.463181E-04
-.140328E-03	.269975E-03	-.131047E-03	.536639E-04
-.111234E-03	.302894E-03	-.108634E-03	.562955E-04
-.623405E-04	.3233361E-03	-.728398E-04	.543875E-04
-.159050E-04	.333043E-03	-.296952E-04	.499185E-04
-.132812E-03	.324139E-03	-.242457E-04	.458910E-04
-.164915E-03	.000000E+00	.798875E-04	.4266676E-04
-.162011E-03	.439721E-04		
-.162645E-03	.868623E-04		
-.155089E-03	.126243E-03		
-.146642E-03	.162168E-03		
-.124903E-03	.190829E-03		
-.942356E-04	.212475E-03		
-.442178E-04	.224823E-03		
.235365E-04	.226371E-03		
.109654E-03	.230563E-03		
-.163419E-03	.000000E+00		
-.164345E-03	.319328E-04		
-.159159E-03	.622968E-04		
-.153608E-03	.904576E-04		
-.138509E-03	.114197E-03		
-.117498E-03	.133578E-03		
-.325583E-04	.146582E-03		
-.355865E-04	.153337E-03		

.104833E-03

Norme relative

Contraintes normales aux noeuds notes ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_\theta, \tau_{xy}$):

Contraintes normales aux noeuds notes ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_\theta, \tau_{xy}$):

IN 44	• 11006E+01
IN 45	• 12373E+01
IN 46	• 13270E+01
IN 47	• 13911E+01
IN 48	• 18598E+01
IN 49	• 22443E+01
IN 50	• 28395E+01
IN 51	• 32751E+01
IN 52	• 25049E+01
IN 53	• 53882E+01
IN 54	• 43981E+01
IN 55	• 28583E+01
IN 56	• 20489E+01
IN 57	• 83465E+01
IN 58	• 77076E+01
IN 59	• 94258E+00
IN 60	• 53580E+01
IN 61	• 62498E+01
IN 62	• 19541E+00
IN 63	• 22443E+01
IN 64	• 71179E+00
IN 65	• 60820E+00
IN 66	• 17515E+01
IN 67	• 34352E+01
IN 68	• 18902E+00
IN 69	• 35668E+01
IN 70	• 63179E+00
IN 71	• 27752E-01
IN 72	• 20030E+01
IN 73	• 17227E+01
IN 74	• 29905E+01
IN 75	• 77142E+01
IN 76	• 51769E+00
IN 77	• 59691E+01
IN 78	• 38629E-01
IN 79	• 10607E+01
IN 80	• 97281E-01
IN 81	• 38998E+01
IN 82	• 45630E+00
IN 83	• 98304E-01

• 52962E+00	• 36831E+00	• 58946E+00	• 29285E+00
• 23138E-01	- .17701E+00	.55600E-01	- .45864E+00
IN 70		IN 83	
• 64518E+00	• 47192E+00	.59873E+00	• 32320E+00
• 10964E+00	- .34366E+00	.10995E+00	- .54980E+00
IN 71		IN 84	
• 66291E+00	• 39036E+00	.52761E+00	• 23389E+00
• 29695E-01	- .50469E+00	.49271E-01	- .62596E+00
IN 72		IN 85	
• 79876E+00	• 49142E+00	.41453E+00	• 17180E+00
• 12477E+00	- .66540E+00	.72929E-01	- .64522E+00
IN 73		IN 86	
• 77642E+00	• 40050E+00	.28163E-01	• 25868E-01
• 37944E-01	- .81610E+00	.50736E-02	- .63440E+00
IN 74		IN 87	
• 88216E+00	• 45735E+00	.75361E+00	• 90703E+00
• 13205E+00	- .95424E+00	- .25403E+00	- .64956E+00
IN 75		IN 88	
• 69418E+00	• 32820E+00	.55349E+00	• 31418E+00
• 44108E-01	- .10604E+01	.11623E+00	- .10307E+00
IN 76		IN 89	
• 54531E+00	• 16985E+00	.53828E+00	• 25874E+00
• 91287E-01	- .10358E+01	.71442E-01	- .88690E-01
IN 77		IN 90	
• 12409E+00	• 27681E+00	.56651E+00	• 30719E+00
• 27610E+00	- .99061E+00	.11685E+00	- .17347E+00
IN 78		IN 91	
• 51493E+00	• 30249E+00	.54465E+00	• 24673E+00
• 52521E-01	- .64591E-01	.70855E-01	- .25247E+00
IN 79		IN 92	
• 54624E+00	• 37235E+00	.55689E+00	• 27504E+00
• 11070E+00	- .12490E+00	.11111E+00	- .32034E+00
IN 80		IN 93	
• 55030E+00	• 30217E+00	.48887E+00	• 20328E+00
• 53825E-01	- .24110E+00	.62415E-01	- .38009E+00
IN 81		IN 94	
• 59347E+00	• 36540E+00	.43341E+00	• 18281E+00
• 11455E+00	- .35479E+00	.33074E-01	- .40883E+00
IN 82		IN 95	

.23122E+00	.87208E-01	.55871E+00	.23048E+00
.29916E-01	-.42858E+00	.11809E+00	-.10256E+00
IN 96		IN 109	
-.11127E-01	-.36259E-03	.54241E+00	.19838E+00
.34459E-02	-.38578E+00	.88206E-01	-.44851E-01
IN 97		IN 110	
-.21150E+00	.38863E-01	.54598E+00	.21923E+00
.37416E-01	-.38375E+00	.11433E+00	-.85898E-01
IN 98		IN 111	
.54438E+00	.22693E+00	.50764E+00	.17783E+00
.82361E-01	-.32492E-01	.81059E-01	-.12397E+00
IN 99		IN 112	
.55966E+00	.26486E+00	.48035E+00	.17997E+00
.11781E+00	-.63428E-01	.98379E-01	-.14909E+00
IN 100		IN 113	
.53902E+00	.21900E+00	.39008E+00	.12728E+00
.80693E-01	-.12384E+00	.60609E-01	-.17344E+00
IN 101		IN 114	
.54233E+00	.24302E+00	.29517E+00	.10033E+00
.11199E+00	-.17701E+00	.59023E-01	-.17198E+00
IN 102		IN 115	
.49182E+00	.18824E+00	.11822E+00	.36859E-01
.72080E-01	-.22487E+00	.18035E-01	-.18176E+00
IN 103		IN 116	
.44963E+00	.18289E+00	-.78176E-01	-.17583E-01
.90201E-01	-.25343E+00	-.13112E-01	-.15824E+00
IN 104		IN 117	
.32349E+00	.11389E+00	.18597E+00	.49164E-02
.46390E-01	-.27911E+00	-.25192E-02	-.16917E+00
IN 105		IN 118	
.17851E+00	.63515E-01	.54175E+00	.18134E+00
.35554E-01	-.26709E+00	.93130E-01	-.15896E-01
IN 106		IN 119	
-.85284E-01	-.16472E-01	.54895E+00	.19987E+00
-.10090E-01	-.27067E+00	.11593E+00	-.30845E-01
IN 107		IN 120	
-.48429E+00	-.45911E+00	.52263E+00	.16972E+00
-.15681E+00	-.30539E+00	.88653E-01	-.59937E-01
IN 108		IN 121	

• 50632E+00	• 17312E+00	• 25468E+00	• 53779E-01
• 10473E+00	- .81272E-01	.61692E-01	- .70342E-01
IN 122		IN 135	
• 44281E+00	• 13253E+00	• 94463E-01	• 23958E-01
• 72527E-01	- .10086E+00	.18240E-01	- .89998E-01
IN 123		IN 136	
• 37817E+00	• 11617E+00	- .82108E-01	- .31774E-01
• 75736E-01	- .10264E+00	- .22776E-01	- .53685E-01
IN 124		IN 137	
• 25005E+00	• 66139E-01	- .15665E+00	• 29423E-01
• 38857E-01	- .11174E+00	- .10801E-01	- .34690E-01
IN 125			
• 10891E+00	• 28838E-01		
• 21104E-01	- .93383E-01		
IN 126		IN 44	
- .84452E-01	- .22627E-01	• 29838E+01	• 10951E+01
- .13920E-01	- .10250E+00	.00000E+00	.38909E+00
IN 127		IN 45	
- .32735E+00	- .23095E+00	.30917E+01	• 84273E+00
- .94146E-01	- .13371E+00	.00000E+00	.45073E+00
IN 128		IN 46	
.55829E+00	.19533E+00	.20407E+01	• 58150E+00
.15072E+00	- .20083E+00	.00000E+00	- .57622E-01
IN 129		IN 47	
.53616E+00	.16270E+00	.61411E+01	- .26727E+00
.11011E+00	- .26620E-01	.00000E+00	.52996E+00
IN 130		IN 48	
.53750E+00	.17835E+00	.62261E+01	- .34471E+00
.14317E+00	- .47205E-01	.00000E+00	.68743E+00
IN 131		IN 49	
.48987E+00	.14333E+00	.43513E+01	• 73252E+00
.99496E-01	- .70816E-01	.00000E+00	.19541E+00
IN 132		IN 50	
.45310E+00	.12876E+00	.99767E+01	- .19753E+01
.11637E+00	- .73705E-01	.00000E+00	.71179E+00
IN 133		IN 51	
.35768E+00	.98495E-01	.95053E+01	- .16424E+01
.71319E-01	- .92094E-01	.00000E+00	.94258E+00
IN 134			

IN 52	65	• 86811E+00 • 67125E+01 • 00000E+00	-.29918E+01 .63179E+00
IN 53		• 49396E+00	
IN 54		-.39348E+01 • 13691E+02 • 00000E+00	
IN 55		• 88939E+00 -.33571E+01 • 12366E+02 • 00000E+00	
IN 56		• 11438E+01 • 89555E+01 • 00000E+00	
IN 57		• 10607E+01 -.72619E+01 • 15399E+02 • 00000E+00	
IN 58		• 95538E+00 -.11014E+02 • 11523E+02 • 00000E+00	
IN 59		• 40012E+00 • 70196E+00 -.39352E+00	
IN 60		• 22916E+00 • 23122E+01 • 00000E+00	
IN 61		• 10545E+00 -.31830E-01 • 27950E+01 • 00000E+00	
IN 62		• 10000E+00 • 46535E+01 • 00000E+00	
IN 63		• 15724E+00 -.81185E+00 • 62922E+01 • 00000E+00	
IN 64		• 15697E+01 • 60820E+00 -.17495E+01 • 63982E+01 • 00000E+00	
IN 65		• 78575E+01 • 00000E+00	
IN 66		-.35848E+01 • 67064E+01 • 00000E+00	
IN 67		• 41930E+01 • 00000E+00 IN 68	
IN 69		• 51769E+00 -.98304E-01 • 64349E+00 • 25444E+00 • 23138E-01	
IN 70		• 91296E+00 • 00000E+00 IN 71	
IN 72		• 00000E+00 • 10494E+01 • 00000E+00 IN 73	
IN 74		• 13280E+01 • 00000E+00 IN 75	
IN 76		• 14259E+01 • 00000E+00 IN 77	
IN 78		• 16473E+01 • 00000E+00 IN 79	
IN 80		• 15873E+01 • 00000E+00 IN 81	
IN 82		• 14103E+01 • 00000E+00	

IN	77	IN	90	.22028E+00
				.65342E+00
				.00000E+00
		IN	91	.11685E+00
IN	78	IN		
				.10256E+00
				.68883E+00
				.00000E+00
		IN	92	.70855E-01
				.65999E-01
				.11111E+00
IN	79	IN		
				.76594E+00
				.00000E+00
				.59952E-01
		IN	93	.62415E-01
				.11949E+00
				.75211E+00
				.00000E+00
		IN	94	.83074E-01
				.11455E+00
				.73571E+00
				.59380E+00
				.00000E+00
		IN	95	.27537E+00
				.29916E-01
				.53825E-01
				.38007E+00
				.00000E+00
		IN	96	.39156E+00
				.34459E-02
				.10677E+00
				.40866E-01
				.55600E-01
				.10583E+00
				.10995E+00
		IN	97	.39156E+00
				.34459E-02
				.10278E+01
				.00000E+00
				.26221E+00
				.49271E-01
				.31733E+00
				.00000E+00
		IN	98	.48997E+00
				.37416E-01
				.10237E+01
				.00000E+00
				.94971E+00
				.72929E-01
				.32492E-01
				.36338E+00
				.54438E+00
				.57272E+00
				.00000E+00
				.58135E+00
				.25179E+00
				.22693E+00
				.11781E+00
				.82361E-01
				.94971E+00
				.50736E-02
				.54438E+00
				.60738E+00
				.50736E-02
				.58135E+00
				.17667E+00
				.00000E+00
				.80693E-01
				.14844E+01
				.25403E+00
				.31418E+00
				.11623E+00
				.55349E+00
				.10307E+00
				.62447E+00
				.00000E+00
				.61134E+00
				.23297E+00
				.56405E+00
				.71442E-01
				.00000E+00

IN 103	IN 116	-.20900E+00
.60264E+00	.11324E+00	-.13112E-01
.00000E+00	.00000E+00	
IN 104	IN 117	-.28477E+00
.51683E+00	.10371E+00	-.25192E-02
.00000E+00	.00000E+00	
IN 105	IN 118	
.39423E+00	.54175E+00	.18134E+00
.00000E+00	-.15896E-01	.93130E-01
IN 106	IN 119	
.22197E+00	.55166E+00	.19717E+00
.00000E+00	.00000E+00	.11593E+00
IN 107	IN 120	
-.16605E+00	.53253E+00	.15982E+00
.00000E+00	.00000E+00	.88653E-01
IN 108	IN 121	
.55871E+00	.52509E+00	.15435E+00
-.10256E+00	.00000E+00	.10473E+00
IN 109	IN 122	
.54816E+00	.47271E+00	.10262E+00
.00000E+00	.00000E+00	.72527E-01
IN 110	IN 123	
.56719E+00	.41360E+00	.80749E-01
.00000E+00	.00000E+00	.75736E-01
IN 111	IN 124	
.54904E+00	.30281E+00	.13385E-01
.00000E+00	.00000E+00	.38857E-01
IN 112	IN 125	
.54178E+00	.17048E+00	.32728E-01
.00000E+00	.00000E+00	.21104E-01
IN 113	IN 126	
.47627E+00	.53518E-01	.16060E+00
.00000E+00	.00000E+00	.13920E-01
IN 114	IN 127	
.39541E+00	.41082E-01	.42129E+00
.00000E+00	.60609E-01	.94146E-01
IN 115	IN 128	
.26380E+00	.91991E-04	.19533E+00
.00000E+00	.59023E-01	.15072E+00

IN 129	53	beta en degre	-35.6369
.53805E+00	54	beta en degre	-39.4488
.00000E+00	55	beta en degre	-37.4440
IN 130	56	beta en degre	-38.5085
.54360E+00	57	beta en degre	-40.7806
.00000E+00	58	beta en degre	-18.0995
IN 131	59	beta en degre	-28.5135
.50378E+00	60	beta en degre	-32.6848
.00000E+00	61	beta en degre	-35.2853
IN 132	62	beta en degre	-36.3626
.46907E+00	63	beta en degre	-37.0723
.00000E+00	64	beta en degre	-38.2520
IN 133	65	beta en degre	-38.9671
.38707E+00	66	beta en degre	-42.5354
.00000E+00	67	beta en degre	-43.7092
IN 134	68	beta en degre	-36.3303
.27686E+00	69	beta en degre	-32.7516
.00000E+00	70	beta en degre	-37.9254
IN 135	71	beta en degre	-37.4445
.15587E+00	72	beta en degre	-38.4978
.00000E+00	73	beta en degre	-38.5150
IN 136	74	beta en degre	-38.7255
.23502E-02	75	beta en degre	-40.1046
.00000E+00	76	beta en degre	-39.8637
IN 137	77	beta en degre	42.7960
.35679E-01	78	beta en degre	-15.6516
.00000E+00	79	beta en degre	-27.5790
IN 138	80	beta en degre	-31.3855
.38707E+00	81	beta en degre	-36.0910
.00000E+00	82	beta en degre	-36.0403
IN 139	83	beta en degre	-37.9665
.16081E+00	84	beta en degre	-38.3981
.11011E+00	85	beta en degre	-39.6734
.14317E+00	86	beta en degre	-44.9482
.12941E+00	87	beta en degre	-41.6324
.99496E-01	88	beta en degre	-20.3703
.11279E+00	89	beta en degre	-16.1982
.11637E+00			
.69105E-01			
.71319E-01			

Angle d'inclinaison :

IN 44	beta en degre	-3.0972
IN 45	beta en degre	-24.7641
IN 46	beta en degre	44.3748
IN 47	beta en degre	-30.5773
IN 48	beta en degre	-35.3961
IN 49	beta en degre	40.2671
IN 50	beta en degre	-33.9457
IN 51	beta en degre	-37.5855
IN 52	beta en degre	38.9978

90	beta en degre	-26.6120	IN	129	beta en degre	-4.0567
91	beta en degre	-29.7293	IN	130	beta en degre	-7.3641
92	beta en degre	-33.1271	IN	131	beta en degre	-11.1150
93	beta en degre	-34.7045	IN	132	beta en degre	-12.2205
94	beta en degre	-36.4802	IN	133	beta en degre	-17.6998
95	beta en degre	-40.2312	IN	134	beta en degre	-17.5009
96	beta en degre	44.6003	IN	135	beta en degre	-34.3049
97	beta en degre	35.9665	IN	136	beta en degre	32.4416
98	beta en degre	-5.7845	IN	137	beta en degre	10.2242
99	beta en degre	-11.6414				
100	beta en degre	-18.8691				
101	beta en degre	-24.8932				
102	beta en degre	-27.9899				
103	beta en degre	-31.1220				
104	beta en degre	-34.7099				
105	beta en degre	-38.9254				
106	beta en degre	41.3780				
107	beta en degre	43.8194				
108	beta en degre	-16.0009				
109	beta en degre	-7.3070				
110	beta en degre	-13.3668				
111	beta en degre	-18.4668				
112	beta en degre	-22.3946				
113	beta en degre	-26.4258				
114	beta en degre	-30.2350				
115	beta en degre	-38.6919				
116	beta en degre	39.5808				
117	beta en degre	30.2849				
118	beta en degre	-2.5206				
119	beta en degre	-5.0109				
120	beta en degre	-9.3806				
121	beta en degre	-13.3020				
122	beta en degre	-16.5147				
123	beta en degre	-19.3402				
124	beta en degre	-25.2732				
125	beta en degre	-33.3962				
126	beta en degre	36.6086				
127	beta en degre	35.3889				
128	beta en degre	-23.3491				

Interprétation des résultats du 2^{ème} cas de charge :

- > On remarque que la norme relative $\|\eta\| = 0,330562 \cdot 10^{-3} < 0,05(5\%)$ condition vérifiée à partir de la deuxième itération.

> Noeud 67 :

Malgré que $\sigma_{p1} = -8,1964(MPa) > f_{th}$; l'angle entre la normale au noeud "n" et la direction de la contrainte principale θ dépasse $22,5^\circ$, donc aucune fissure ne se développe à ce noeud.

> Noeud 66 :

On remarque que $\sigma_{p1} = -3,5848(MPa) > f_{th}$ et l'angle entre la normale au noeud "n" ; et la direction de la contrainte principale θ est inférieure à $22,5^\circ$;

$$\beta_0 = -42,5354^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ - \beta_0 \Rightarrow \beta = 2,4646^\circ < \beta_t = 22,5^\circ$$

condition vérifiée.

Donc il y'a formation de la première fissure au niveau de ce noeud pour de troisième cas de charge.

Un fractionnement de ce noeud aura lieu et la fissure peut de présentée comme l'indique la *Figure C.1*.

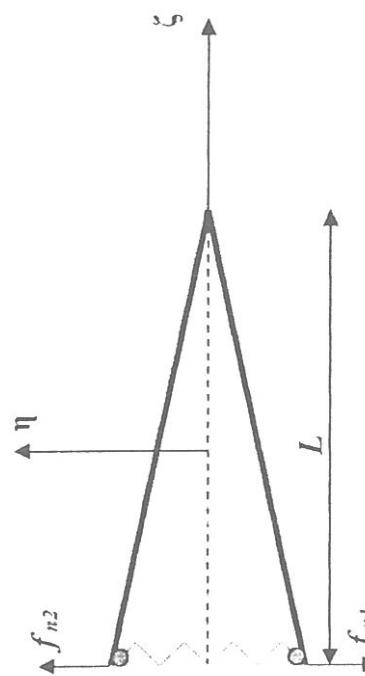
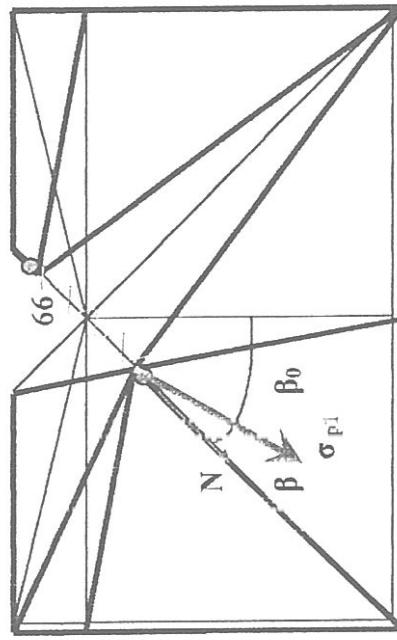


Figure c.1 Fractionnement d'un noeud lors d'une fissuration.

La largeur de la fissure à ce noeud est :

$$W(66) = \sqrt{u^2 + v^2} = 1,279120.10^{-3} \text{ (mm)}$$

Donc la contrainte de traction qui lui ait associée est égale à :

$$\sigma_{nw}(66) = 0,25 \cdot f_n \left[1 - \frac{W}{W_c} \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{nw} = 0,25 \cdot (3,4475) \left[1 - \frac{1,279120.10^{-3}}{(4,083) \cdot (0,0327)} \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{nw} = 0,853618 \text{ (MPa)}$$

Les forces associées à cette largeur de fissure sont :

$$\begin{cases} f_{n1} \\ f_{n2} \end{cases} = \frac{L}{2} \cdot t_n \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \cdot d\xi \Rightarrow \begin{cases} f_{n1} \\ f_{n2} \end{cases} = \frac{L}{2} \cdot t_n \cdot \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Numériquement on obtient :

$$\begin{cases} f_{n1} \\ f_{n2} \end{cases} = \begin{cases} +5,0299992 \\ -5,0299992 \end{cases} \text{ (N)}$$

Par projection selon les axes globales (x, y) selon un angle de 45° on obtient :

$$\begin{cases} f_{x1} \\ f_{x2} \\ f_{y1} \\ f_{y2} \end{cases} = \begin{cases} +3,556741 \\ -3,556741 \\ +3,556741 \\ -3,556741 \end{cases} \text{ (N)}$$

La rigidité du ressort entre les deux noeuds 1 et 2 représentant les deux noeuds fractionnés du noeud initial 66 est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} k_s &= k_n = k_{W_i} = \frac{F_{W_i}}{W_i - W_c} = \frac{5,029992}{1,279120.10^{-3} - (4,083) \cdot (0,083)} \\ &\Rightarrow k_s = k_n = k_{W_i} = -38,038280 \text{ (N/mm)} \end{aligned}$$

Donc l'angle d'inclinaison de la matrice de rigidité élémentaire de ce ressort est : $\theta = 45^\circ$.

Toutes ces valeurs calculées vont être introduite dans les données concernant le 3^{ème} cas de chargement comme suit :

➤ Le ressort est introduit comme étant un élément d'interface de rigidité $k_s = k_n = k_{W_i}$, et incliné par rapport aux axes (x, y) d'un angle égale à $\theta = 45^\circ$.

➤ Les forces appliquées à ces deux noeuds fractionner sur la largeur de la fissure assemblées au vecteur force externe total, toute en vérifiant la condition : $\eta = \frac{\|Q_i\|}{\|\lambda_i \cdot F_i\|}$ donnée par l'équation (3.83) du chapitre 03

où: Q_i = la force de déséquilibre due à l'ouverture et la propagation de la fissure;

$\lambda_i \cdot F_i$ = l'incrément du vecteur de charge extérieure.

Numériquement on a :

$$\|Q_i\| = 7,113482(N) \quad \& \quad \|\lambda_i \cdot F_i\| = 10695,36779(N)$$

$$\Rightarrow \eta = 0,000665 << \eta_s = 0,6 \text{ Condition vérifiée.}$$

Remarque:

Les autres cas de charge ont été traités de la même manière que ce cas (2^{ème} cas de charge).