

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Mémoire de Magister

027

Présenté à l'Université de Guelma
Faculté des Sciences et de L'ingénierie

Département de : Génie Civil
Spécialité : Mécanique des sols

Présenté par : MOUSSAOUI SABAH

=====

**REPONSE DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE
ORTHOTROPE MINCE EN FLEXION SIMPLE SOUS
EXCITATIONS IMPULSIVES**

=====

Sous la direction de : Professeur M. GUENFOUD

Novembre 2002

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Mémoire de Magister

**Présenté à l'Université de Guelma
Faculté des Sciences et de L'ingénierie**

Département de : **Génie Civil**
Spécialité : **Mécanique des sols**

Présenté par : **MOUSSAOUI SABAH**

=====

**REPONSE DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE
ORTHOTROPE MINCE EN FLEXION SIMPLE SOUS
EXCITATIONS IMPULSIVES**

=====

Sous la direction de : Professeur M. GUENFOUD

Novembre 2002

♣ Membre observateur ♣

Mr. GUENFOUD Med

Représentant du Doyen

Soutenu le : 04 Novembre 2002, devant la Commission d'Examen

♣ JURY ♣

MM.

N. OUELAA

M.C., Université de Guelma, Président

M. GUENFOUD

Pr., Université de Guelma, Rapporteur

M. NAIMI

M.C., Université de Constantine, Rapporteur

H. BOUZERD

Dr., Université de Skikda, Examineur

M. LAHMAR

M.C., Université de Guelma, Examineur.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur le professeur Guenfoud Mohamed, à l'université de Guelma en tant que promoteur, et Monsieur Naimi Mohamed Maître de conférence à l'université de Constantine en tant que copromoteur. qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude pour leur aide inestimable à la mise en valeur de ce travail.

J'exprime ma sincère gratitude à mon fiancé Belgasmia Mourad, Maître assistant à l'université de Béjaïa pour l'aide morale qu'il m'a apportée dans les moments difficiles. Je lui suis très reconnaissante pour sa compréhension et ses encouragements que j'ai trouvés en sa noble personne.

Je tiens aussi à présenter mes remerciements les plus ardents à messieurs les membres de jury : Ouelaa N., Bouzerd H., Lahmar M., d'avoir accordé à mon travail une importance très encourageante.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes très chers parents, et qu'ils trouvent ici l'expression de mon affection.

RESUME

Les éléments de plaques en flexion jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures. La construction d'un modèle numérique simple et performant traduisant le comportement de ces éléments est une activité très importante.

On a présenté dans cette étude la formulation et l'évaluation d'un élément quadrilatère isoparamétrique à 4 nœuds (Q4) ; et à 3 degrés de liberté (d.d.l.) par nœud, pour l'analyse linéaire statique et dynamique de plaques minces élastiques orthotropes en flexion.

On a décrit également, une formulation de l'élément, fondée sur la théorie linéaire des plaques orthotropes ; (valable pour les petits déplacements, et petites déformations), et sur l'introduction des hypothèses cinématiques de Mindlin-Reissner qui tiennent compte de l'effet de cisaillement transversal. La matrice de rigidité linéaire est évaluée numériquement en utilisant la technique d'intégration numérique sélective. Quant au vecteur de sollicitation et à la matrice de masse, leur intégration est évaluée d'une manière exacte par des schémas de type Gauss (2×2).

Le noyau de notre thèse consiste en l'introduction de l'amortissement de Rayleigh ; qui est une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité, et à la prise en compte de trois types de charges impulsives : rectangulaire, triangulaire et sinusoïdale.

La prise en compte des forces d'inerties et des sollicitations dynamiques conduit à la définition d'un système d'équations différentielles du second ordre. Pour la résolution de ce système, la méthode d'intégration directe de Newmark est utilisée.

Les résultats obtenus par le présent code, sur de nombreux exemples sont comparés à des résultats analytiques, ou numériques ; prouvant ainsi la fiabilité et l'efficacité de l'élément utilisé.

TABLE DES MATIERES

Remerciements	I
Résumé	II
Liste des figures	V
Liste des tableaux	VII
Notations et Symboles	VIII
Introduction	1

CHAPITRE I : THEORIE D'ELASTICITE ANISOTROPE

1.1. Introduction	3
1.2. Notion de continuité et d'homogénéité	3
1.2.1. La continuité	3
1.2.2. L'homogénéité	3
1.3. Notion d'isotropie et d'anisotropie	4
1.4. Comportement élastique linéaire - Loi de Hooke	4
1.5. Divers degrés de symétrie matérielle des matériaux composites	5
1.5.1. Matériaux monocliniques	5
1.5.2. Matériaux orthotropes	6
1.5.3. Matériaux isotropes transverses	8
1.5.4. Matériaux isotropes	8

CHAPITRE II : CINEMATIQUE DES PLAQUES ORTHOTROPES

2.1. Théories des plaques en flexion	9
2.1.1. définition d'une plaque	9
2.1.2. Hypothèses	9
2.2. Conventions de signe pour déplacements et rotations	11
2.3. Relations cinématiques	12
2.3.1. Champ de déplacements	12
2.3.2. Champ de déformations	13
2.4. Relations contraintes – déformations	14
2.5. Relations efforts résultants – déformations	15
2.6. Formulation en statique linéaire	16
2.6.1. Principe des travaux virtuels	16
2.6.2. Principe de la méthode des éléments finis en statique	17
2.6.2.1. Discrétisation spatiale	18
2.6.2.2. Formulation élémentaire	18
2.6.2.3. Formulation globale	19
2.6.3. Eléments finis avec cisaillement transversal	21
2.6.3.1. Discrétisation du champ de déplacements	21
2.6.3.2. Discrétisation du champ de déformations	23
2.6.3.3. Matrice de rigidité	23
2.6.3.4. Vecteur charge équivalent	25

CHAPITRE III : ELEMENT FINIS DE PLAQUE ENDYNAMIQUE

3.1. Introduction	27
3.2. Formulation des équations de mouvement	27
3.2.1. Matrice de masse élémentaire	29
3.2.2. Prise en compte de l'amortissement	30
3.3. Méthode de résolution des systèmes du second ordre	32
3.3.1. Méthode de superposition modale	33
3.3.2. Méthode de résolution directe	33
3.3.2.1. Méthode de Newmark	33

CHAPITRE IV : VALIDATION ET TESTS NUMERIQUES

4.1. Validation en statique linéaire	37
4.1.1. Plaques minces isotropes	37
4.1.1.1. Plaque carrée simplement appuyée	37
4.1.1.2. Plaque carrée encastree sur les quatre bords	39
4.1.2. Plaques minces orthotropes	41
4.1.2.1. Plaque carrée simplement appuyée sur les quatre bords	41
a. charge uniformément répartie	41
b. Charge concentrée	44
4.1.2.2. Plaque carrée encastree sur les quatre bords	45
a. Charge uniformément répartie	45
b. Charge concentrée	47
4.1.2.3. Plaque carrée encastree sur un côté	48
4.1.3. Discussion des résultats	50
4.2. Validation en dynamique linéaire	51
4.2.1. Absence d'amortissement	51
4.2.1.1. Plaques minces isotropes	51
4.2.1.2. Discussion des résultats	55
4.2.1.3. Plaque biaise isotrope	55
4.2.1.4. Plaque carrée orthotrope	58
A. Impulsion rectangulaire	58
B. Impulsion sinusoïdale	62
C. Impulsion triangulaire	64
4.2.1.5. Plaque orthotrope en bois	66
4.2.1.6. Discussion des résultats	67
4.2.2. Influence de l'amortissement sur la réponse dynamique	68
CONCLUSION	71
REFERENCES	73
ANNEXE A	75
ANNEXE B	78

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

Fig. 1.1	Concept de milieu continu	3
----------	---------------------------------	---

CHAPITRE II

Fig. 2.1	Portion d'une plaque	9
Fig. 2.2	Conventions générales	11
Fig. 2.3	Rotations β_x et β_y	12
Fig. 2.4	Élément isoparamétrique de plaque avec cisaillement transversal.....	21
Fig. 2.5	Intégration de Gauss (2x2) pour le quadrilatère	25

CHAPITRE III

Fig. 3.1	Relation entre le facteur d'amortissement et la fréquence amortissement de Rayleigh	32
Fig. 3.2	Schéma de Newmark	34

CHAPITRE IV

Fig. 4.1	plaque carrée isotrope simplement appuyée sur ces quatre côtés, soumise à une charge uniforme P_0	38
Fig. 4.2	Convergence de la solution élément fini en fonction du maillage pour une plaque isotrope simplement appuyée	39
Fig. 4.3	Plaque carrée isotrope encastée sur les quatre côtés, soumise à une charge uniforme transversal d'intensité P_0	40
Fig. 4.4	Convergence de la solution élément fini en fonction du maillage pour une plaque isotrope encastée	40
Fig. 4.5	Plaque carrée orthotrope simplement appuyée sur ces quatre côtés, soumise à une charge uniforme P_0	42
Fig. 4.6	La déflexion le long des deux demi-axes de symétrie d'une plaque orthotrope simplement appuyée avec une charge uniformément répartie.....	43
Fig. 4.7	Convergence de la solution élément fini en fonction du maillage pour une plaque orthotrope simplement appuyée.....	43
Fig. 4.8	Plaque carrée orthotrope simplement appuyée sur ces quatre côtés soumise a une charge concentrée F	44
Fig. 4.9	La déflexion le long des deux demi-axes de symétrie d'une plaque orthotrope Simplement appuyée avec une charge concentrée au milieu.....	45
Fig. 4.10	Plaque carrée encastée sur les quatre côtés	46
Fig. 4.11	Convergence de la solution élément fini en fonction du maillage, pour une Plaque orthotrope encastée	46
Fig. 4.12	Plaque carrée orthotrope encastée sous charge concentrée	47

Fig. 4.13	Convergence de la solution élément fini en fonction du maillage pour Une plaque orthotrope encastree sous charge concentree	48
Fig. 4.14	Plaque carree orthotrope encastree sur un cote et libre sur les autres....	49
Fig. 4.15	La deflexion le long des axes de symetrie d'une plaque orthotrope encastree sur un cote, avec une charge concentree au milieu	49
Fig. 4.16	Plaque isotrope mince soumise a une charge impulsive rectangulaire uniforme.....	53
Fig. 4.17	Reponse dynamique d'une plaque isotrope simplement appuyee sous charge impulsive rectangulaire uniforme	54
Fig. 4.18	Plaque carree soumise a une charge impulsive uniforme – reponse transitoire du deplacement normal au centre suivant le type de support...	54
Fig. 4.19	Plaque biaise (60°), et plaque carree, avec bords libres	56
Fig. 4.20	Reponse dynamique au centre de la plaque biaise (60°), et la plaque carree sous charge impulsive rectangulaire uniforme	57
Fig. 4.21	Plaque carree orthotrope soumise a une charge impulsive rectangulaire uniforme	59
Fig. 4.22	Reponse dynamique d'une plaque orthotrope simplement appuyee avant et apres annulation de charge impulsive uniforme	60
Fig. 4.23	Comparaison des resultats obtenus pour le deplacement avec la solution de reference	60
Fig. 4.24	Plaque carree soumise a une charge impulsive uniforme – Reponse transitoire du deplacement au centre suivant le type de support	61
Fig. 4.25	Plaque orthotrope simplement appuyee – Influence du maillage sur la reponse transitoire du deplacement W_E	61
Fig. 4.26	Plaque orthotrope simplement appuyee – Influence du pas de temps sur la reponse transitoire du deplacement W_E	62
Fig. 4.27	Plaque carree orthotrope simplement appuyee sous excitation impulsive sinusoïdale	63
Fig. 4.28	Reponse dynamique d'une plaque orthotrope sous excitation impulsive sinusoïdale	64
Fig. 4.29	Plaque orthotrope simplement appuyee sous excitation impulsive triangulaire	65
Fig. 4.30	Reponse dynamique d'une plaque orthotrope sous excitation impulsive triangulaire	65
Fig. 4.31	Plaque carree orthotrope en bois soumise a une charge impulsive rectangulaire	66
Fig. 4.32	Comparaison des resultats obtenus pour le deplacement au centre de la plaque avec la solution du code de calcul Dlearn	67
Fig. 4.33	Plaque carree isotrope simplement appuyee soumise a une charge echelon – Reponse dynamique sous l'effet d'un amortissement proportionnel	69
Fig. 4.34	Comparaison des resultats obtenus pour le deplacement amorti avec la solution numerique du code de calcul Dlearn	69
Fig. 4.35	Reponse dynamique d'une plaque orthotrope amortie simplement appuyee sous charge echelon	70

LISTE DE TABLEAUX

CHAPITRE III

Tableau (1) Algorithme de solution pas à pas 36

ANNEXE

Tableau B₁ Valeurs de l'amplitude maximum du déplacement normal w au centre E de la plaque en fonction du maillage et du pas de temps 78

Tableau B₂ Valeurs de W_{\max} du nœud E en fonction du maillage et du type de support 78

Tableau B₃ Valeurs de l'amplitude maximum du déplacement au centre de la plaque 79

Tableau B₄ Valeurs de l'amplitude maximum du déplacement normal w au centre E de la plaque en fonction du pas de temps, du maillage et le type de support 79

SYMBOLES

$\left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\}$	vecteur colonne
$\langle \cdot \rangle$	vecteur ligne
$[\dots]$	matrice (utilisé aussi pour les références)
$[\dots]^T$	matrice transposée de la matrice $[\dots]$
$[\dots]^{-1}$	matrice inverse de la matrice $[\dots]$
CT	cisaillement transversal
d.d.l.	degrés de liberté
$f, x = \frac{\partial f}{\partial x}$	dérivée partielle de f par rapport à x
δ	symbole de calcul des variations
\sum	sommation
\int	intégrale
$\alpha \rightarrow \infty$	α tend vers l'infini
x, y, z	coordonnées cartésiennes

NOTATIONS

σ_{ij}	tenseur des contraintes
ε_{ij}	tenseur des déformations
C_{ijkl}	tenseur des constantes élastiques
S_{ijkl}	tenseur des souplesses
E_i	module d'Young dans la direction $i=1, 2, 3$ avec : $i \neq j$
ν_{ij}	coefficient de poisson $i, j = 1, 2, 3$ avec : $i \neq j$
G_{ij}	module de rigidité au cisaillement dans le plan (i,j) $i, j = 1, 2, 3$ avec : $i \neq j$
$[C]$	matrice des rigidités
$[S]$	matrice des souplesses
$\{\sigma\}$	vecteur des contraintes

$\{\varepsilon\}$	vecteur des déformations
$\{\sigma_f\}$	vecteur des contraintes de flexion
$\{\sigma_c\}$	vecteur des contraintes de CT
$\{\varepsilon_f\}$	vecteur des déformations de flexion
$\{\varepsilon_c\}, \{\gamma\}$	vecteur des déformations de cisaillement transversal
u, v	déplacements suivant x,y
w	déplacement transversal suivant z
θ_x, θ_y	rotations autour des axes x et y
β_x, β_y	rotations de la normale dans les plans (x-z), (y-z) respectivement
h	épaisseur de la plaque
L	longueur d'une plaque
L/h	facteur d'élancement de la plaque
k	coefficient de correction de cisaillement transversal
$\{\chi\}$	vecteur des variations des courbures
$[C_f], [C_c]$	matrices de comportement élastique (flexion et CT)
$[D_f], [D_c]$	matrices de rigidités de : flexion, CT
M_x, M_y, M_{xy}	moments de flexion
Q_x, Q_y	efforts de cisaillement transversal parallèle à l'axe des z, des sections perpendiculaire aux axes x et y
V	volume du corps
S	surface du corps où les forces surfaciques sont appliquées
dS, dV	éléments d'aire et de volume
f_i^v	forces volumiques
f_i^s	forces surfaciques
Q_i	forces concentrées
V	énergie potentielle totale
U	énergie de déformation
T	énergie cinétique
L	le lagrangien

W	travail des forces appliquées
$\{u\}^e$	vecteur des déplacements en un point M de l'élément e
$\{\dot{u}\}^e$	vecteur des vitesses
$[N]^e$	matrice des fonctions d'interpolation élémentaire
$\{q\}^e$	vecteur des déplacements nodaux de l'élément e
$\{q\}$	vecteur des déplacement nodaux
$\{\dot{q}\}$	vecteur des vitesses nodales
$\{\ddot{q}\}$	vecteur des accélérations nodales
$[D]$	matrice d'opérateurs différentielles
$[\beta]$	matrice d'interpolation des déformations
$[\beta_f], [\beta_\gamma]$	matrices d'interpolation des déformations de flexion et cisaillement
$[B]^e$	matrice de localisation de l'élément
n_e	nombre de degrés de liberté de l'élément (ou nombre de nœuds par élément)
N	nombre de degré de liberté de la structure
$[K]^e$	matrice de rigidité élémentaire
$[M]^e$	matrice de masse cohérente élémentaire
$[J]$	matrice Jacobienne de la transformation géométrique
$[j]$	matrice inverse de la matrice $[J]$
$[K]$	matrice de rigidité globale
$[K_f], [K_c]$	matrice de rigidité de flexion et de CT
$[M]$	matrice de masse globale
$[C]$	matrice d'amortissement
$\{F(t)\}$	vecteur global des sollicitations extérieures
F_D	force d'amortissement
μ	coefficient de frottement
α', β'	constantes d'amortissement de Rayleigh
ξ_m, ξ_n	facteurs d'amortissement modaux
ω_m, ω_n	fréquences modales
α, β	paramètres du schéma d'intégration de Newmark

t	temps
Δt	incrément de temps
T	période
a_0, \dots, a_5	constantes d'intégration
a, L	côté de la plaque
ν	coefficient de poisson
ρ	masse volumique
D	coefficient de rigidité de flexion
P_0	intensité d'une charge distribuée uniformément
W_{\max}	déplacement maximal
Q4	élément quadrilatère à 4 nœuds
DKT	discrète Kirchhoff triangle

INTRODUCTION

Les chercheurs, sont conduits à utiliser de plus en plus couramment des méthodes de calcul numérique face à la complexité croissante des problèmes de mécanique de structures. L'informatique est d'ailleurs arrivée à point nommé pour permettre une banalisation de ce type de calcul dans toutes les sciences comme dans de nombreuses techniques. Il est devenu aussi possible de résoudre des problèmes pratiquement insolubles par les moyens théoriques classiques ; que ce soit en physique nucléaire, en astronomie, en aéronautique ou en génie civil.

La méthode des éléments finis est sans conteste la méthode d'analyse des structures la plus générale et la plus puissante. En toute rigueur, elle permet la résolution approchée de nombreux problèmes de mécanique, et calcul des structures en comportement élastique ou plastique, en statique ou en dynamique. Elle autorise en effet une analyse fine du fonctionnement des ouvrages qui légitime son utilisation, pour justifier des structures complexes difficilement calculables par les procédures habituelles de la résistance des matériaux ; telles que les plaques.

Les plaques (minces , épaisses, isotropes ou orthotropes) sont des composantes structurales fréquemment utilisés dans différents domaines : aéronautique, génie civil, automobile, construction navale, centrales nucléaires... Les structures à base de plaques sont les plus difficiles à analyser numériquement, elles sont souvent soumises à des sollicitations statiques et dynamiques. Ces analyses complexes se justifient par la nécessité :

- d'améliorer les réalisations existantes ;
- d'évaluer les conceptions nouvelles ;
- de connaître de façon plus approfondie les comportements dans les régimes critiques.

Notre travail porte sur l'analyse des plaques orthotropes sous sollicitations statiques et dynamiques, par la méthode des éléments finis. Ces analyses ont été obtenues après modification d'un code de calcul existant en formulant le problème par le principe de Hamilton, et en introduisant la matrice d'amortissement (amortissement de Rayleigh), les résultats de la réponse dynamique des plaques en flexion sont obtenus pour le cas des excitations impulsives réparties.

Le travail comporte quatre chapitres :

Le premier chapitre, présente le comportement anisotrope des matériaux composites du point de vue mécanique : relations contraintes déformations.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons les caractéristiques essentielles de la théorie de plaques orthotropes, communément associées aux noms de Reissner-Mindlin, ensuite nous présentons l'expression du principe du travail virtuel, ainsi que la formulation détaillée de l'élément quadrilatère isoparamétrique Q4, incluant les effets de cisaillement transversal. En outre, sont exposés les calculs de la matrice de rigidité, et du vecteur charge équivalent du à une pression uniforme.

La formulation pour l'analyse dynamique linéaire, fait l'objet du troisième chapitre. A partir du principe de Hamilton nous formulons l'équation différentielle du second ordre, ensuite nous abordons la construction des matrices de masse et d'amortissement, et nous présentons la méthode de calcul utilisée pour la résolution du système d'équations différentielles du second ordre (méthode d'intégration directe de Newmark).

Le dernier chapitre est consacré à la validation de l'élément utilisé, à travers l'ensemble des résultats obtenus pour des problèmes statiques et dynamiques. Pour la plupart des analyses effectuées, les résultats sont comparés à ceux de la littérature.

Enfin, une conclusion générale, qui nous permet d'avoir une vue d'ensemble sur les résultats obtenus à travers cette étude.

CHAPITRE I

THEORIE D'ELASTICITE

ANISOTROPE

THEORIE D'ELASTICITE ANISOTROPE

1.1. Introduction

La théorie de l'élasticité isotrope couramment utilisée, ne permet pas de caractériser pleinement le comportement des matériaux composites présentant des réponses différentes suivant les directions d'action des efforts. Il est donc nécessaire de recourir au détail d'élasticité anisotrope. Le but de ce chapitre, est de présenter les matériaux anisotropes et les propriétés élastiques qui les caractérisent.

1.2. Notions de continuité et d'homogénéité [7]

1.2.1. La continuité [7], [10]

Un corps est dit continu s'il occupe complètement tout son volume. Considérons par exemple, autour d'un point M d'un corps Ω (fig. 1.1), un volume ΔV de matière, de masse Δm . Si la limite :

$$\rho(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.1)$$

est bien définie en tout point M de Ω , la masse est dite continûment répartie dans V .

Δm : étant la masse du petit élément de volume ΔV entourant le point M .

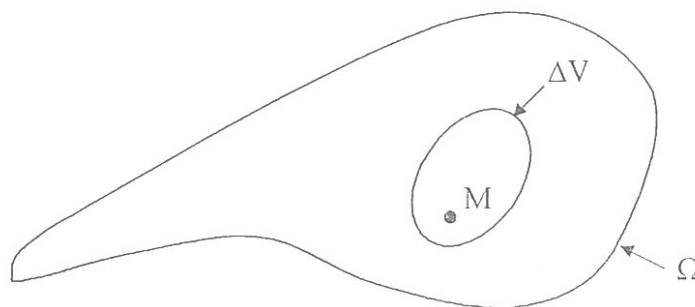


Fig. 1.1 : Concept de milieu continu.

1.2.2. L'homogénéité

Un corps est homogène si la masse volumique $\rho(M)$ est identique en tout point de son volume [7].

1.3. Notion d'isotropie et d'anisotropie [7]

Un corps homogène, continu est isotrope vis-à-vis d'une propriété physique si cette dernière est indépendante de la direction considérée dans le corps.

L'anisotropie influe sur les propriétés associées à une direction, et en particulier, sur le nombre de caractéristiques mécaniques entrant dans la relation contraintes-déformations.

Un corps homogène, continu est anisotrope vis-à-vis d'une propriété physique si cette dernière change de valeur avec la direction considérée dans le corps.

Dans ce qui suit le matériau est supposé homogène, et ne subit que de petites déformations.

1.4. Comportement élastique linéaire-Loi de Hooke [15], [23]

La loi de comportement mécanique la plus simple est celle qui traduit la proportionnalité du tenseur des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ et du tenseur des petites déformations, $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ avec : $i, j = 1, 2, 3$. Elle est connue sous le nom de loi de Hooke et elle se traduit par l'écriture tensorielle :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{avec : } i, j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

Et en terme de déformations nous obtenons :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{avec : } i, j = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

Où :

σ_{ij} : est le tenseur des contraintes.

ε_{ij} : est le tenseur des déformations.

C_{ijkl} : est le tenseur d'élasticité (des rigidités).

S_{ijkl} : est le tenseur des souplesses.

Les lois de comportement mécanique (2) et (3) s'écrivent donc matriciellement :

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (1.4)$$

Ou
$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\} \quad (1.5)$$

Les matrices $[S]$ et $[C]$ sont inverses l'une de l'autre, c'est à dire :

$$[S] = [C]^{-1} \quad \text{ou} \quad [C] = [S]^{-1} \quad (1.6)$$

Le tenseur des rigidités C_{ijkl} comporte $3^4 = 81$ composantes (il en est de même pour le tenseur des souplesses S_{ijkl}), mais il peut être représenté par un nombre moindre de composantes indépendantes lorsque l'on tient compte des symétries.

La symétrie du tenseur des contraintes ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), et celle du tenseur des déformations ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) réduit le nombre des composantes du tenseur d'élasticité de 81 à 36 composantes, parmi ces dernières, 21 sont indépendantes par raison de symétrie du tenseur C_{ijkl} , ($C_{ij} = C_{ji}$); avec cette réduction de 36 à 21 composantes indépendantes, la relation contraintes-déformations s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

Les relations dans l'équation (1.7), sont rapportées comme caractéristique des matériaux anisotropes.

1.5. Divers degrés de symétrie matérielle des matériaux composites

Compte tenu de leur texture ou de la position des renforts, les matériaux composites possèdent divers degrés de symétrie matérielle [23], les cas les plus connus qu'on peut trouver sont :

1.5.1. Matériaux monocliniques [15], [23]

Ce sont des matériaux qui possèdent un plan de symétrie. Considérons, par exemple, une symétrie par rapport au plan (1-2) ou (x-y), la matrice des rigidités a la forme suivante qui entraîne 13 coefficients indépendants :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

1.5.2. Matériaux orthotropes

De tels matériaux possèdent des propriétés équivalentes au point de vue élastique dans des directions symétriques par rapport à trois plans orthogonaux [7]. La matrice des rigidités est de la forme suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

On constate qu'un matériau orthotrope comporte trois plans de symétrie orthogonaux et est caractérisé élastiquement par neuf modules indépendants [23]. La matrice de souplesse est donnée par :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Où les éléments S_{ij} sont :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} & S_{13} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{23} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\
 S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Avec la relation :

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \tag{1.12}$$

Les modules d'élasticité introduits sont les suivants [23] :

E_i : module d'Young dans la direction $i=1,2,3$;

ν_{ij} : coefficient de poisson $i,j=1,2,3$ avec $i \neq j$;

G_{ij} : module de Coulomb ou de rigidité au cisaillement dans le plan (i,j) $i,j = 1,2,3$

avec $i \neq j$.

Pour un matériau orthotrope, dans un état plan de contrainte, $\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$.

L'équation (1.4) s'écrit [23] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{1.13}$$

Où les éléments de la matrice des rigidités $[Q]$, sont données par :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} = C_{66} = G_{12}.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

En contraintes planes, les rigidités Q_{ij} sont différentes des rigidités C_{ij} figurant dans la loi de comportement tridimensionnelle [23].

1.5.3. Matériaux isotropes transverses [15], [23]

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope qui comporte un axe ou un plan d'isotropie, il est caractérisé par cinq modules d'élasticité indépendants.

La matrice des rigidités a donc la structure suivante lorsque l'axe d'isotropie est l'axe 3 :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

1.5.4. Matériaux isotropes [15], [23]

Ce sont des matériaux invariants quel que soit le changement de repère, toutes les directions sont donc identiques, chaque plan étant un plan d'isotropie [23].

La matrice des rigidités est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Un matériau isotrope est caractérisé par deux modules d'élasticité indépendants.

CHAPITRE III

KINEMATIQUE DES PLAQUES ORTHOTROPES

CINEMATIQUE DES PLAQUES ORTHOTROPES

Dans ce chapitre nous exposons la théorie des plaques, dans le cas des petits déplacements, et plus spécialement aux éléments de plaques orthotropes en flexion, ensuite nous présentons l'expression du principe de travail virtuel, et le principe de la M.E.F. en statique. Nous abordons la formulation de l'élément quadrilatère isoparamétrique permettant l'analyse linéaire statique et dynamique des plaques. En outre, sont exposés les calculs de la matrice de rigidité et du vecteur charge équivalent.

2.1. Théories des plaques en flexion

2.1.1. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide élastique dont une dimension, selon l'épaisseur, est petite en comparaison des deux autres, et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appelons surface moyenne. Par convention, cette surface sera le plan (x-y), l'axe (o-z) correspond à l'axe transversal selon l'épaisseur [14].

Une plaque peut être constituée d'un matériau homogène, ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes [3].

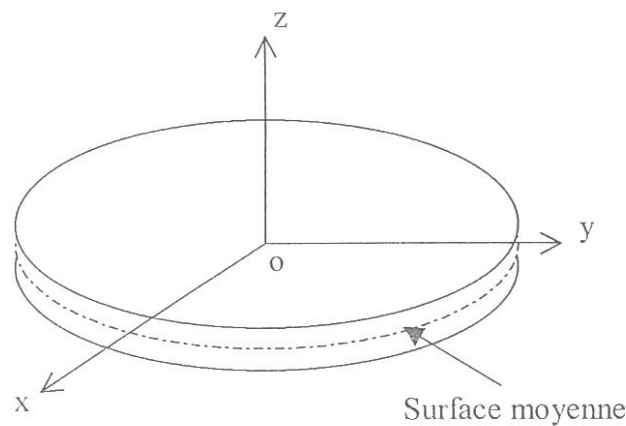
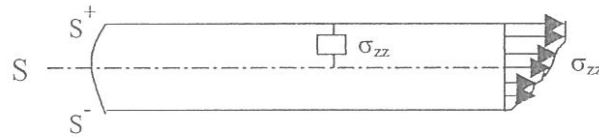


Fig. 2.1 : Portion d'une Plaque.

2.1.2. Hypothèses

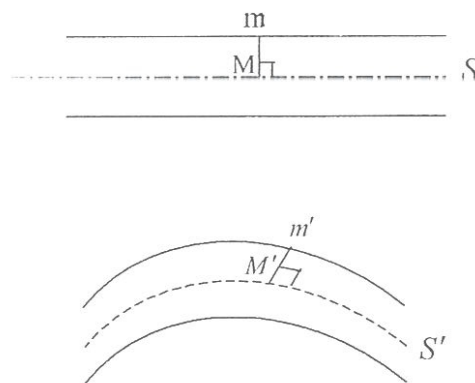
La théorie des plaques [3], [14] repose sur les hypothèses suivantes :

H.1 : Les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables par rapport aux autres composantes de contraintes : $\sigma_{zz} = 0$.



H.2 : Les pentes de la surface moyenne après déformation, sont supposées petites par rapport à l'unité (Petite déflexion du plan moyen).

H.3 : Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation, restent sur cette normale au cours de la déformation ; ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transversal. On a dans ce cas : $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$.



Les hypothèses H.1 et H.3 correspondent dans le cas bidimensionnel aux hypothèses classiques de la résistance des matériaux avec conservation des sections droites, elles correspondent aussi à la définition d'un état plan de contrainte.

La théorie des plaques dans laquelle on néglige les effets de cisaillement transversal est due à Kirchoff (cas des plaques minces).

Il existe des théories des plaques qui permettent la prise en compte du cisaillement transversal : ce sont les théories de Hencky, Reissner et Mindlin ; dans ce cas, il faut prendre en compte les déformations de cisaillement transversal et alors les fibres normales à la surface moyenne avant déformation ne le restent pas au cours de la déformation [14].

Pour les plaques homogènes isotropes, la validité de la théorie de plaque retenue dépend des caractéristiques géométriques [3].

On admet généralement les hypothèses de Mindlin si : $4 \leq L/h \leq 20$

et celles de Kirchoff si : $L/h > 20$

Où :

L : est la longueur de la plaque dans le plan (x-y).

h : est l'épaisseur de la plaque.

L/h : est le facteur d'élanement de la plaque.

Pour les plaques orthotropes et composites, le rôle des déformations de cisaillement transversal dépend non seulement des caractéristiques géométriques (l'élanement L/h), mais également des caractéristiques mécaniques représentées par le rapport E/KG [3].

Où :

E : module de Young.

G : module de cisaillement transversal (CT).

K : facteur de correction de cisaillement transversal.

La théorie de Kirchoff (théorie classique des plaques minces), peut être interprétée comme un cas particulier de la théorie de Reissner/Mindlin, ainsi un bon modèle élément fini basé sur la théorie de Reissner/Mindlin devra donner des résultats en accord avec la théorie de Kirchoff si l'influence du cisaillement transversal est faible [3].

2.2. Conventions de signe pour déplacements et rotations

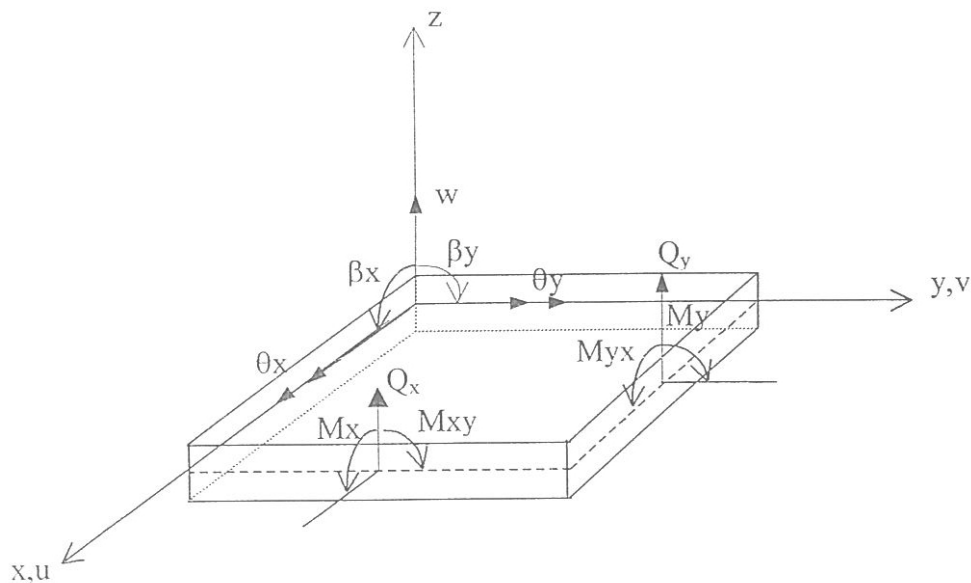


Fig. 2.2 : Conventions générales.

Soient les déplacements dans le plan u et v , le déplacement transversal w et les rotations β_x et β_y , ou θ_x et θ_y . On a évidemment :

$$\beta_x = \theta_y \quad \beta_y = -\theta_x \quad (2.1)$$

β_x et β_y : les rotations de la normale à la surface moyenne dans les plans $(x-z)$ et $(y-z)$ respectivement.

2.3. Relations cinématiques [1], [3], [14], [22]

2.3.1. Champ de déplacements

Dans la théorie de Hencky-Mindlin, (prise en compte du cisaillement transversal), on se donne un modèle de déplacements basé sur trois variables indépendantes :

le déplacement transversal $w(x, y)$ et les deux rotations $\beta_x(x, y)$ et $\beta_y(x, y)$.

Le champ des déplacements s'exprime alors en fonction de ces trois variables par la relation suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z \beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z \beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= \bar{w}(x, y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

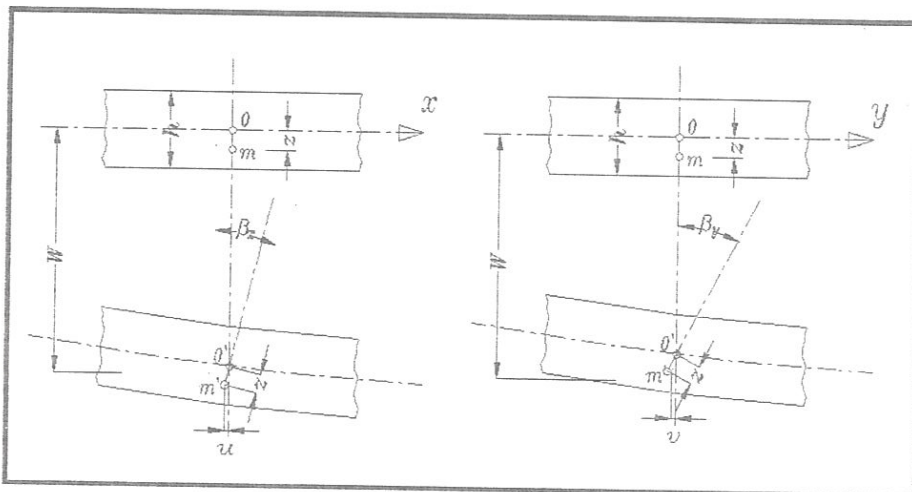


Fig. 2.3 : Rotations β_x et β_y .

2.3.2. Champ de déformations

L'état de déformation en coordonnées cartésiennes est défini par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Après substitution des déplacements dans (2.3), nous obtenons les composantes du tenseur de déformations en fonction des trois degrés de liberté w, β_x, β_y :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le vecteur de déformation peut être décomposé en deux parties, l'une indépendante de z traduisant les déformations de cisaillement notée $\{\varepsilon_c\}$ ou $\{\gamma\}$, et l'autre partie $\{\varepsilon_f\}$ dépendante de z représente les déformations de flexion :

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \left\{ \varepsilon_f \right\}^T, \left\{ \varepsilon_c \right\}^T \right\}^T = \left\{ z \left\{ \chi \right\}^T, \left\{ \gamma \right\}^T \right\}^T \tag{2.5}$$

$$\left\{ \varepsilon_f \right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \left\{ \chi \right\} \quad \left\{ \varepsilon_c \right\} = \left\{ \gamma \right\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

avec :

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

$\{\chi\}$: est le vecteur des variations de courbure.

D'où on peut écrire :

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \{\{\chi\}^T, \{\gamma\}^T\}^T \quad (2.8)$$

2.4. Relations contraintes-déformations [3], [14], [23]

Nous considérons les relations linéaires entre les contraintes et les déformations (loi de Hooke généralisée). Pour les matériaux orthotropes, la relation liant les contraintes au déformations s'écrit :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2.9)$$

telle que :

$[C]$: matrice de constantes élastiques.

Lorsque le cisaillement transversal est pris en considération, le vecteur de contraintes peut être également décomposé en une contribution de cisaillement $\{\sigma_c\}$, et une contribution de flexion $\{\sigma_f\}$:

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma_f\} \\ \{\sigma_c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_f] & [0] \\ [0] & [C_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_f\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\{\sigma_f\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T \quad \{\sigma_c\} = \{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T \quad (2.11)$$

avec :

$$[C_f] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad [C_c] = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{21} \nu_{12}} & Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{21} \nu_{12}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{21} \nu_{12}} & Q_{66} &= G_{12} \\
 Q_{44} &= G_{13} & Q_{55} &= G_{23}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

tels que :

E_1 : Module de Young dans la direction (x).

E_2 : Module de Young dans la direction (y).

ν_{12}, ν_{21} : Coefficients de poisson.

G_{12}, G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement.

2.5. Relations efforts résultants-déformations [3], [14]

Pour la conception et le calcul des éléments de la mécanique, il est souvent intéressant de connaître les efforts de résistance des matériaux.

Les moments résultants de flexion sont :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T dz = [D_f] \{\chi\} \tag{2.14}$$

Les efforts tranchants sont :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T dz = [D_c] \{\gamma\} \tag{2.15}$$

avec :

h : L'épaisseur de la plaque.

$$[D_f] = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{21} \nu_{12}} & \frac{E_2 \nu_{12}}{1 - \nu_{21} \nu_{12}} & 0 \\ \frac{E_2 \nu_{12}}{1 - \nu_{21} \nu_{12}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{21} \nu_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}; \quad [D_c] = hk \begin{bmatrix} G_{13} & 0 \\ 0 & G_{23} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

k : coefficient de correction de cisaillement transversal.

$[D_f]$: matrice de rigidité à la flexion.

2.6. Formulation en statique linéaire [13]

On aboutit, dans le cas de la formulation en statique et élasticité linéaire, au système d'équations :

$$[K]\{q\} = \{F\} \quad (2.17)$$

$[K]$: représente la matrice de rigidité de la structure.

$\{q\}$: vecteur de déplacements nodaux.

$\{F\}$: vecteur chargement extérieur.

Le théorème qui conduit à la relation (2.17), dans le cas d'une approche de type « déplacement », est celui des travaux virtuels.

2.6.1. Principe des travaux virtuels

Soit un corps solide en équilibre sous l'action de forces : de volume f_i^V , de surface f_i^S , et des forces concentrées. Considérons un champ de déplacement virtuel δu_i cinématiquement admissible.

Le théorème des travaux virtuels [3], [10], [13], [14], exprime le bilan des travaux virtuels interne et externe, lorsque le corps est en équilibre :

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V f_i^V \delta u_i dV + \int_S f_i^S \delta u_i dS + Q_i \delta u_i \quad (2.18)$$

V : est le volume du corps ;

S : la surface extérieure du corps où les forces surfaciques sont appliquées ;

f_i^V : forces volumiques ;

f_i^S : forces surfaciques appliquées à la surface extérieure S du corps ;

Q_i : forces concentrées ;

σ_{ij} : tenseur des contraintes ;

ε_{ij} : tenseur des déformations infinitésimales.

Sous forme matricielle, nous avons :

$$\int_V \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} dV = \int_V \langle \delta u \rangle \{ f_V \} dV + \int_S \langle \delta u \rangle \{ f_S \} dS + \sum_i \langle \delta u_i \rangle \{ Q_i \} \quad (2.19)$$

$\langle \varepsilon \rangle$: vecteur des déformations, transposé ;

$\{ \sigma \}$: vecteur des contraintes ;

$\langle u \rangle$: vecteur des déplacements, transposé ;

$\{ f_V \}$: vecteur des forces volumiques ;

$\{ f_S \}$: vecteur des forces surfaciques ;

$\{ Q_i \}$: vecteur des forces concentrées.

On peut introduire la fonctionnelle énergie potentielle totale V , et le principe du travail virtuel s'écrit :

$$\delta U = \delta W$$

Ou
$$\delta V = \delta(U - W) = 0 \quad (2.20)$$

Avec :

V : énergie potentielle totale.

U : énergie de déformation.

W : travail des forces appliquées.

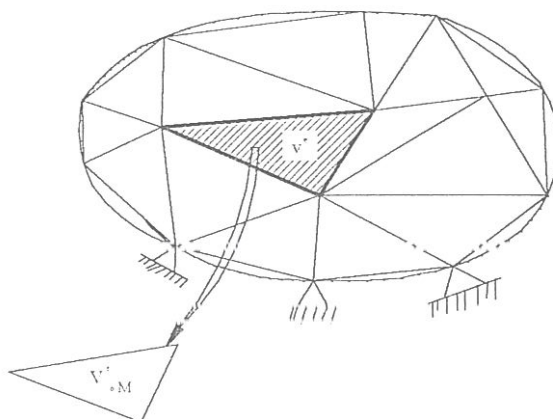
2.6.2. Principe de la méthode des éléments finis en statique [14]

La méthode des éléments finis de type déplacement permet de ramener les problèmes de milieux continus à des problèmes discrets.

En statique, nous considérons successivement :

- La discrétisation du domaine en éléments finis.
- La formulation élémentaire au niveau de l'élément.
- La formulation globale après assemblage.

2.6.2.1. Discrétisation spatiale



La phase de discrétisation, consiste à découper la structure (domaine continu V), en sous-domaines V^e , de forme géométrique simple que l'on appelle « éléments finis », interconnectés en des points remarquables appelés « nœuds ». Dans chaque élément, on définit une approximation des déplacements en fonction des déplacements aux nœuds, soit :

$$\{u(x, y, z)\}^e = [N(x, y, z)]^e \{q\}^e \quad (2.21)$$

avec :

$\{u\}^e$: vecteur des déplacements en un point M de l'élément e .

$[N(x, y, z)]^e$: matrice d'interpolation pour l'élément e .

$\{q\}^e$: vecteur des déplacements aux nœuds de l'élément e .

2.6.2.2. Formulation élémentaire

La formulation au niveau de l'élément, consiste à rechercher pour chaque élément des expressions matricielles d'énergie de déformation et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements aux nœuds [14]. Ceci nécessite le calcul de la matrice de rigidité, et du vecteurs de forces équivalentes.

L'expression de l'énergie potentielle totale en fonction des déplacements aux nœuds de l'élément, est :

$$V^e = U^e - W^e = \frac{1}{2} \{q\}^{eT} [K]^e \{q\}^e - \{q\}^{eT} \{F\}^e \quad (2.22)$$

avec :

$$[K]^e = \int_{V^e} [\beta]^T [C] [\beta] dV \quad (2.23)$$

$$\{F\}^e = \int_{V^e} [N]^T \{f_v\} dV + \int_{S^e} [N]^T \{f_s\} dS \quad (2.24)$$

On rappelle que l'on a :

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (2.25)$$

$$\{\varepsilon\} = [D] \{u\} = [\beta] \{q\} \quad (2.26)$$

et que : $\{f_v\}$ et $\{f_s\}$ sont respectivement les vecteurs des forces de volume et de surface.

$[D]$: matrice d'opérateurs différentiels.

$[\beta]$: matrice d'interpolation des déformations.

2.6.2.3. Formulation globale

La formulation globale du problème, consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle d'énergie de déformation et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements en tous les nœuds de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires (matrice de rigidité, vecteur des forces équivalentes) pour tous les éléments [14].

L'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaires, soit :

$$V = \sum_{\text{éléments}} V^e = \sum_{\text{éléments}} \left\{ \frac{1}{2} \{q\}^{eT} [K]^e \{q\}^e - \{q\}^{eT} \{F\}^e \right\} \quad (2.27)$$

Soit $\{q\}^T$ le vecteur ligne des déplacements aux nœuds de la structure, soit pour une structure à m nœuds :

$$\{q\}^T = \{q_1^T \dots q_i^T \dots q_m^T\} \quad (2.28)$$

avec :

$\{q_i\}$: sous-vecteur des déplacements au nœud i.

On peut définir pour chaque élément une relation matricielle permettant d'établir une correspondance entre les déplacements aux nœuds de l'élément $\{q\}^e$ et les déplacements aux nœuds de la structure $\{q\}$, soit :

$$\begin{aligned} \{q\}^e &= [B]^e \{q\} & (2.29) \\ (n_e \times 1) &= (n_e \times N) \cdot (N \times 1) \end{aligned}$$

avec :

$[B]^e$: matrice de localisation de l'élément.

n_e : nombre de degrés de liberté de l'élément.

N : nombre de degrés de liberté de la structure.

Chaque relation (2.29) permet de repérer ou de localiser les d.d.l. de chaque élément dans l'ensemble des d.d.l. de la structure.

En utilisant les relations (2.27) et (2.29), on peut écrire :

$$V = \sum_{\text{éléments}} \left\{ \frac{1}{2} \{q\}^T [B]^e [K]^e [B]^e \{q\} - \{q\}^T [B]^e \{F\}^e \right\} \quad (2.30)$$

D'où :

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} - \{q\}^T \{F\} \quad (2.31)$$

avec :

$$[K] = \sum_{\text{éléments}} [B]^e [K]^e [B]^e \quad (2.32)$$

$$\{F\} = \sum_{\text{éléments}} [B]^e \{F\}^e \quad (2.33)$$

$[K]$: matrice de rigidité de la structure.

$\{F\}$: vecteur des forces équivalentes pour la structure complète.

Dans le cas de forces ponctuelles appliquées aux nœuds de la structure (vecteur $\{P\}$), l'expression de $\{F\}$ devient :

$$\{F\} = \{P\} + \sum_{\text{éléments}} [B]^e \{F\}^e \quad (2.34)$$

Ces expressions permettent d'obtenir par application directe du principe des travaux virtuels, le système des équations d'équilibre des nœuds. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta W \\ \{\delta q\}^T [K] \{q\} &= \{\delta q\}^T \{F\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

D'où :

$$[K]\{q\} = \{F\} \quad (2.36)$$

2.6.3. Éléments finis avec cisaillement transversal [3], [14]

La prise en compte du cisaillement transversal modifie largement les principes d'élaboration des éléments de plaque. En effet, leur formulation est basée sur l'approximation de trois champs indépendants : le déplacement transversal et les deux rotations. Par ailleurs, leur conformité ne requiert que la continuité C^0 de w, β_x , et β_y [3], [14], [19].

2.6.3.1. Discrétisation du champ de déplacements

Nous considérons des éléments de type quadrilatère aux quels nous appliquons la formulation isoparamétrique [3], [9], [14].

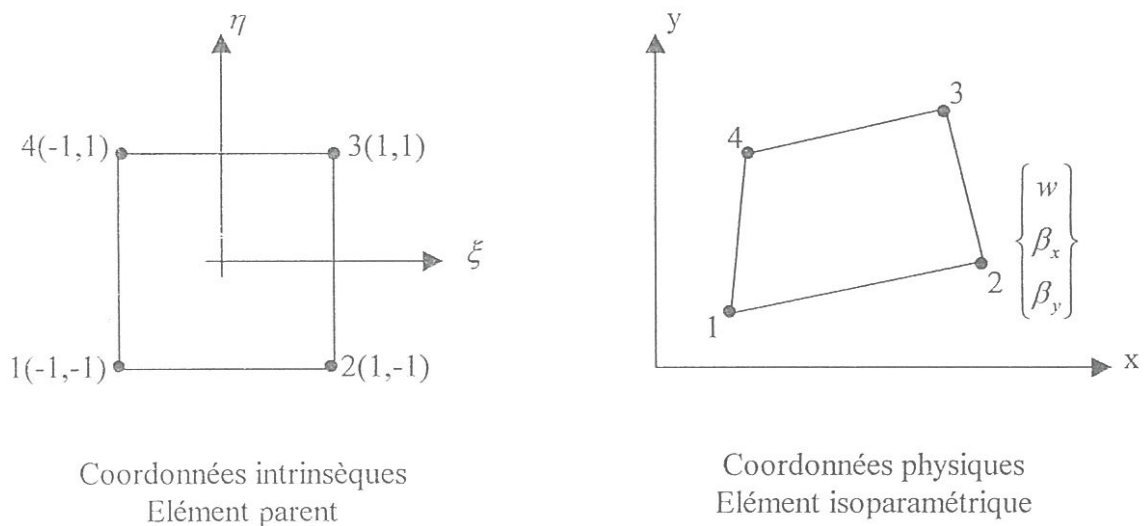


Fig. 2.4 : élément isoparamétrique de plaque avec cisaillement transversal.

Pour tout élément isoparamétrique quadrilatéral à quatre nœuds nous avons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}
 x &= N^T(\xi, \eta) X \\
 y &= N^T(\xi, \eta) Y \\
 w &= N^T(\xi, \eta) W \\
 \beta_x &= N^T(\xi, \eta) \widehat{\beta}_x \\
 \beta_y &= N^T(\xi, \eta) \widehat{\beta}_y
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Ou :

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{i=1}^{n_e} N_i w_i \\
 \beta_x &= \sum_{i=1}^{n_e} N_i \beta_{xi} \\
 \beta_y &= \sum_{i=1}^{n_e} N_i \beta_{yi}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

n_e : indique le nombre de nœuds par élément.

Les fonctions d'interpolation utilisées sont les fonctions d'interpolation habituelles des quadrilatères isoparamétriques.

Dans le cas du quadrilatère linéaire, on a :

$$N^T = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \tag{2.39}$$

avec :
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \tag{2.40}$$

ξ_i ou η_i : prenant les valeurs (+1) ou (-1) suivant le nœud considéré.

$$W = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad \widehat{\beta}_x = \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta_{x2} \\ \beta_{x3} \\ \beta_{x4} \end{Bmatrix} \quad \widehat{\beta}_y = \begin{Bmatrix} \beta_{y1} \\ \beta_{y2} \\ \beta_{y3} \\ \beta_{y4} \end{Bmatrix} \tag{2.41}$$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

2.6.3.2. Discrétisation du champ de déformations [3], [14]

Par substitution de (2.37), dans les relations de déformations (2.6) et (2.7), on obtient les matrices d'interpolation des déformations de flexion et de cisaillement :

$$\{\chi\} = \{\bar{\varepsilon}_f\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} & \frac{\partial N^T}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \hat{\beta}_x \\ \hat{\beta}_y \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\{\varepsilon_c\} = \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & N^T & 0 \\ \frac{\partial N^T}{\partial y} & 0 & N^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \hat{\beta}_x \\ \hat{\beta}_y \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Soit :

$$\{\chi\} = \{\bar{\varepsilon}_f\} = [\bar{\beta}_f] \{q\} \quad \{\gamma\} = [\beta_\gamma] \{q\} \quad (2.44)$$

Où :

$$[\bar{\beta}_f] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} & \frac{\partial N^T}{\partial x} \end{bmatrix} \quad [\beta_\gamma] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & N^T & 0 \\ \frac{\partial N^T}{\partial y} & 0 & N^T \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

2.6.3.3. Matrice de rigidité [3], [14]

L'expression de l'énergie de déformation [3], [10], [14] permet de calculer la matrice de rigidité, soit :

$$U = U_f + U_c$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{V^e} \{\varepsilon_f\}^T \{\sigma_f\} dV + \frac{1}{2} \int_{V^e} \{\gamma\}^T \{\sigma_c\} dV = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (2.46)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_{S^e} \{\chi\}^T [D_f] \{\chi\} dx dy + \frac{1}{2} \int_{S^e} \{\gamma\}^T [D_c] \{\gamma\} dx dy \quad (2.47)$$

Après substitution des expressions de déformations (2.44) dans l'énergie de déformation, nous obtenons :

$$U = U_f + U_c = \frac{1}{2} \{q\}^T \int_{S^e} [\bar{\beta}_f]^T [D_f] [\bar{\beta}_f] dx dy \{q\} + \frac{1}{2} \{q\}^T \int_{S^e} [\beta_\gamma]^T [D_c] [\beta_\gamma] dx dy \{q\} \quad (2.48)$$

D'où :

$$[K] = [K_f] + [K_c] = \int_{S^e} [\bar{\beta}_f]^T [D_f] [\bar{\beta}_f] dS + \int_{S^e} [\beta_\gamma]^T [D_c] [\beta_\gamma] dS \quad (2.49)$$

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\bar{\beta}_f]^T [D_f] [\bar{\beta}_f] \det[J] d\xi d\eta + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\beta_\gamma]^T [D_c] [\beta_\gamma] \det[J] d\xi d\eta \quad (2.50)$$

$[J]$: est la matrice Jacobienne de la transformation géométrique.

La matrice jacobienne $[J(\xi, \eta)]$ [3], [9], [14] est :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial \xi} X & \frac{\partial N^T}{\partial \xi} Y \\ \frac{\partial N^T}{\partial \eta} X & \frac{\partial N^T}{\partial \eta} Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} = [j] \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} \quad [j] = [J]^{-1} \quad (2.52)$$

$$[j] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Les déformations $\{\chi\}$ et $\{\gamma\}$ sont définies en fonction des variables nodales :

$$\{\chi\} = [\bar{\beta}_f] \{q\} \quad ; \quad \{\gamma\} = [\beta_\gamma] \{q\}$$

avec :

$$[\bar{\beta}_f] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N^T}{\partial y} & \frac{\partial N^T}{\partial x} \end{bmatrix} ; \quad [\beta_\gamma] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^T}{\partial x} & N^T & 0 \\ \frac{\partial N^T}{\partial y} & 0 & N^T \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial N^T}{\partial x} = j_{11} \frac{\partial N^T}{\partial \xi} + j_{12} \frac{\partial N^T}{\partial \eta} \quad ; \quad \frac{\partial N^T}{\partial y} = j_{21} \frac{\partial N^T}{\partial \xi} + j_{22} \frac{\partial N^T}{\partial \eta} \quad (2.55)$$

La matrice de rigidité $[K]$ est obtenue par intégration numérique de (2.50) de type Gauss [3], [9], [14].

L'intégrale peut être évaluée en utilisant la formule :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (2.56)$$

Où :

ξ_i, η_j : sont les coordonnées des points d'intégration.

w_i, w_j : sont les coefficients de pondération (ou poids) correspondants.

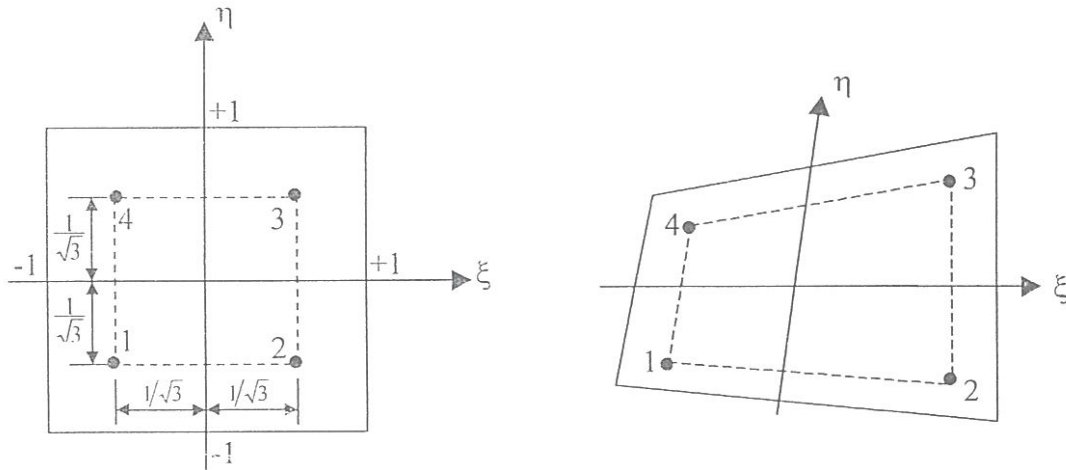


Fig. 2.5 : Intégration de Gauss (2x2) pour le quadrilatère.

2.6.3.4. Vecteur charge équivalent

L'énergie potentielle des forces extérieures [10], [14] exprimée à l'aide des forces de surface et de volume, s'écrit :

$$W = \int_{V^e} \{u\}^{eT} \{f_v\} dV + \int_{S^e} \{u\}^{eT} \{f_s\} dS = \{q\}^{eT} \{F\}^e \quad (2.57)$$

Nous avons : $\{u\}^e = [N]^e \{q\}^e$ (2.58)

$$W = \langle q \rangle^e \int_{V^e} [N]^{eT} \{f_V\} dV + \langle q \rangle^e \int_{S^e} [N]^{eT} \{f_S\} dS = \langle q \rangle^e \{F\}^e$$
 (2.59)

D'où : $\{F\}^e = \int_{V^e} [N]^{eT} \{f_V\} dV + \int_{S^e} [N]^{eT} \{f_S\} dS$ (2.60)

Pour une charge uniforme répartie f_z suivant z, le vecteur des charges équivalentes associées aux variables W, a la forme habituelle :

$$\{F\}^e = \int_{S^e} [N]^{eT} f_z dS$$
 (2.61)

CHAPITRE III

ELEMENTS FINIS DES PLAQUES EN DYNAMIQUE

ELEMENTS FINIS DE PLAQUE EN DYNAMIQUE

Dans ce chapitre, nous abordons le principe de la méthode des éléments finis pour l'analyse linéaire des problèmes en dynamique. A partir du principe de Hamilton nous formulons l'équation différentielle du second ordre, caractérisant le mouvement de la structure au cours du temps, ensuite nous procédons à la construction des matrices de masse et d'amortissement. Enfin, nous exposons la méthode de calcul utilisée (méthode d'intégration directe de Newmark) pour la résolution du système d'équations différentielles du second ordre.

3.1. Introduction

De nombreux problèmes d'analyse des structures peuvent être traités par les méthodes d'analyse statique. Cependant, il existe également de nombreux cas où l'on ne peut négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultant de la variation des forces appliquées, on utilisera alors les méthodes d'analyse dynamique.

3.2. Formulation des équations de mouvement [14]

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement du système discret à partir des expressions des énergies cinétique, potentielle et de dissipation.

Soit le Lagrangien : $L = T - V$

On a respectivement pour l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle totale V :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (3.1)$$

$$V = U - W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_V f_i^V u_i dV - \int_S f_i^S u_i dS \quad (3.2)$$

U : énergie de déformation.

W : potentiel des forces conservatives de surface et de volume.

f_i^V : forces de volume.

f_i^S : forces surfaciques appliquées à la surface extérieures du corps.

L'approximation nodale pour le déplacement $\{u(t)\}$ d'un point quelconque d'un élément a pour expression : $\{u(x, y, z, t)\}^e = [N(x, y, z)]^e \{q(t)\}^e$

On a de même pour la composante de vitesse : $\{\dot{u}(x, y, z, t)\}^e = [N(x, y, z)]^e \{\dot{q}(t)\}^e$

On peut ainsi exprimer le Lagrangien à l'aide des déplacements aux nœuds q_i et de leurs dérivées :

$$L = T(\dot{q}_i) - V(q_i) \quad (3.3)$$

Pour une structure sans amortissement nous avons les équations d'Euler-Lagrange [14], [17], suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.4)$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i(t) \quad (3.5)$$

avec :

$F_i(t)$: force définie par le travail virtuel des forces extérieures : $\delta W = F_i \delta q_i$

Pour les petits mouvements des systèmes élastiques, les énergies cinétique et de déformation s'expriment comme suit :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i M_{ij} \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (3.6)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i K_{ij} q_j = \frac{1}{2} q^T K q \quad (3.7)$$

Les équations de Lagrange deviennent alors :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{F(t)\} \quad (3.8)$$

Dans le cas d'un système avec amortissement visqueux, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - F_i^* = F_i(t) \quad (3.9)$$

Le terme additionnel ($-F_i^*$) représente la force de dissipation visqueuse : $F^* = -C\dot{q}$

D'où les équations du mouvement :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F(t)\} \quad (3.10)$$

avec :

$[M]$: matrice de masse globale.

$[C]$: matrice d'amortissement.

$[K]$: matrice de rigidité globale.

$\{F(t)\}$: vecteur global des sollicitations extérieures.

3.2.1. Matrice de masse élémentaire

L'énergie cinétique [8], [14], [16], pour un élément de plaque orthotrope s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^{eT} [M]^e \{\dot{q}\}^e \quad (3.11)$$

On a :

$$\dot{w} = N^T(\xi, \eta) \dot{W}$$

$$\dot{\beta}_x = N^T(\xi, \eta) \hat{\beta}_x \quad (3.12)$$

$$\dot{\beta}_y = N^T(\xi, \eta) \hat{\beta}_y$$

En considérant les relations (2.2) et (3.12), on définit la matrice masse élémentaire cohérente [3], [8], [14], telle que :

$$[M]^e = \begin{bmatrix} [M_w]^e & [0] & [0] \\ [0] & [M_\beta] & [0] \\ [0] & [0] & [M_\beta] \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

avec :

$$[M_w]^e = \int_{S^e} \rho h [N]^e{}^T [N]^e dS \quad [M_\beta]^e = \int_{S^e} \rho \frac{h^3}{12} [N]^e{}^T [N]^e dS \quad (3.14)$$

$[M]^e$: matrice de masse cohérente de l'élément e.

On distingue deux classes principales de représentation des masses : les masses cohérentes et les masses concentrées [14], [16].

– La technique des masses concentrées consiste à discrétiser les masses, soit au niveau élémentaire, soit au niveau de la structure complète de manière à obtenir une matrice de masse diagonale. Dans ce cas, la résolution du problème aux valeurs propres ($Kx = \lambda Mx$) est plus aisée qu'avec une matrice de masse pleine.

On peut obtenir une matrice de masse diagonale de différentes façons :

- Soit en affectant aux différents nœuds de chaque élément des masses concentrées égales de manière à respecter sa masse totale.
- Soit en diagonalisant par diverses méthodes des matrices de masses cohérentes (par exemple, par sommation de lignes pour chaque d.d.l.).

On peut également obtenir des matrices de masses élémentaires diagonales par l'approche énergétique ; en choisissant des fonctions d'interpolation différentes pour la discrétisation spatiale des énergies cinétiques et de déformation.

– La représentation cohérente des masses, consiste à calculer les matrices de masse élémentaires en choisissant pour la discrétisation spatiale de l'énergie cinétique les mêmes fonctions d'interpolation que pour l'énergie de déformation.

La matrice de masse élémentaire est calculée par intégration numérique de type Gauss.

3.2.2. Prise en compte de l'amortissement

Les mécanismes de dissipation dans les structures sont nombreux et complexes [14]. Les principales sources d'amortissement sont :

- L'amortissement de Coulomb : dans ce cas, l'énergie est dissipée par frottement sec entre deux surfaces, et la force d'amortissement obéit à la loi non linéaire :

$$F_D = -\mu N \operatorname{sgn}[\dot{x}] \quad (3.15)$$

avec :

μ : coefficient de frottement.

N : effort normal appliqué sur la liaison.

- L'amortissement structural : qui correspond à une dissipation d'énergie par divers mécanismes de frottement interne dans les matériaux. En régime harmonique, la force de dissipation est proportionnelle et en quadrature avec la force élastique et donc avec le déplacement relatif.

- L'amortissement visqueux : correspond à une dissipation d'énergie par écoulement laminaire d'un fluide dans un amortisseur. Dans ce cas, la force dissipée est proportionnelle à la vitesse :

$$F_D = -c \dot{x} \quad (3.16)$$

Parmi ces modèles, seuls les modèles visqueux et structural sont généralement utilisés à cause de leur simplicité mathématique et de leur caractère linéaire.

En général, la matrice d'amortissement $[C]$ ne peut pas être construite par assemblage de matrices élémentaires, contrairement à la matrice de masse et de rigidité. En effet, elle est introduite pour faire une approximation sur la dissipation d'énergie durant la réponse du système [2].

Considérons l'analyse des systèmes dans lesquels les effets d'amortissement ne peuvent être négligés. Notre intérêt portera sur l'amortissement de Rayleigh ou l'amortissement « proportionnel » qui est égale à une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité [2], [6], [14] :

$$[C] = \alpha' [M] + \beta' [K] \quad (3.17)$$

Où α' et β' sont de simples facteurs de proportionnalité.

Le facteur d'amortissement du nième mode est défini comme suit :

$$\xi_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha'}{\omega_n} + \beta' \omega_n \right) \quad (3.18)$$

Il est donc clair que pour un amortissement proportionnel à la masse, le facteur d'amortissement est inversement proportionnel à la fréquence, alors que pour un amortissement proportionnel à la rigidité il lui est directement proportionnel [6].

L'équation (3.18) est illustrée par la fig. (3.1). Si on connaît le facteur d'amortissement correspondant à une certaine fréquence, on voit que α' ou β' peut être facilement déterminé dans le cas d'un amortissement proportionnel à la masse ou à la rigidité. Si les deux types d'amortissement sont présents, il faut trouver deux facteurs d'amortissement modaux ξ_m et ξ_n correspondant aux fréquences modales ω_m et ω_n pour déterminer α' et β' [6]. On peut écrire l'équation (3.18) sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_m} & \omega_m \\ \frac{1}{\omega_n} & \omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_m} & \omega_m \\ \frac{1}{\omega_n} & \omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{Bmatrix} = 2 \frac{\omega_m \omega_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \begin{bmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ -\frac{1}{\omega_n} & \frac{1}{\omega_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

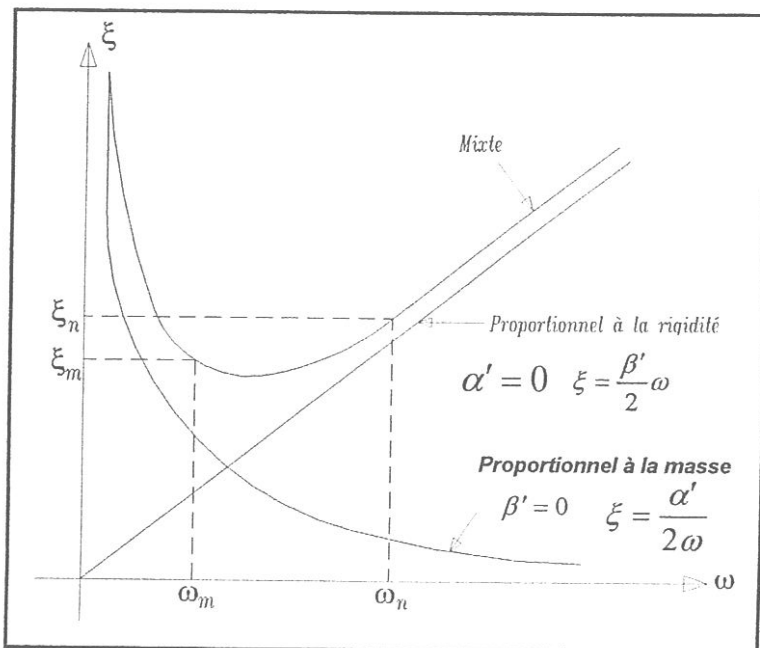


Fig. 3.1 : Relation entre le facteur d'amortissement et la fréquence (amortissement de Rayleigh).

3.3. Méthodes de résolution des systèmes du second ordre

Deux approches fondamentales sont envisageables pour la résolution d'un système d'équations différentielles du second ordre : l'une consiste à résoudre ce système par intégration directe, l'autre méthode consiste à définir la solution dans la base des modes propres de vibration de la structure, qui est appelée méthode de superposition modale. Le choix entre ces deux stratégies dépend de la nature du problème (linéaire ou non - linéaire) et du contenu fréquentiel de l'excitation [14].

3.3.1. Méthode de superposition modale

La méthode de superposition modale convient aux structures linéaires dont les premiers modes propres sont susceptibles d'être excités [14].

3.3.2. Méthode de résolution directe

La méthode de résolution directe est utilisée pour les problèmes non-linéaires ou si le contenu fréquentiel de l'excitation est susceptible d'exciter un grand nombre de modes de la structure [14].

L'analyse directe d'une structure en régime transitoire implique l'intégration pas à pas des équations du mouvement :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F(t)\} \quad (3.21)$$

Dans cette méthode, les vecteurs de déplacements, vitesses et accélérations au temps $t = 0$, sont connus. La période T , sur laquelle la réponse est recherchée est subdivisée en n intervalles de temps égal Δt ($\Delta t = \frac{T}{n}$), et le schéma d'intégration employé établit une approximation de la solution au temps : $\Delta t, 2 \Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots, T$ [2].

Il existe plusieurs méthodes de résolution directe, entre autres celle de Newmark étant la plus utilisée en dynamique des structures, et qui fait l'objet de notre étude.

3.3.2.1. Méthode de Newmark

La méthode de Newmark [2], [9], [18] est une méthode implicite, qui permet de construire la solution à l'instant $t + \Delta t$ à partir des vecteurs connus $\{q_t\}$, $\{\dot{q}_t\}$, $\{\ddot{q}_t\}$. Elle utilise les hypothèses suivantes :

$$\{\dot{q}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{q}_t\} + [(1-\alpha)\{\ddot{q}_t\} + \alpha\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\}] \Delta t \quad (3.22)$$

$$\{q_{t+\Delta t}\} = \{q_t\} + \{\dot{q}_t\} \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{q}_t\} + \beta \{\ddot{q}_{t+\Delta t}\} \right] \Delta t^2 \quad (3.23)$$

Où α et β sont des paramètres déterminés pour obtenir l'exactitude et la stabilité du schéma d'intégration.

En fait, le paramètre β contrôle la variation de l'accélération pendant l'incrément de temps Δt .

Newmark propose comme schéma inconditionnellement stable, la règle trapézoïdale, dans laquelle $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ (voir fig. 3.2).

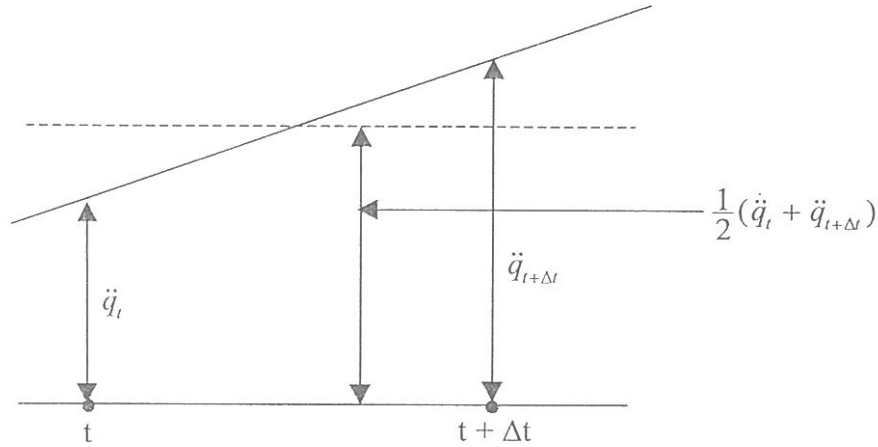


Fig. 3.2 : Schéma de Newmark.

En plus des équations (3.22) et (3.23), pour la solution des déplacements, vitesses, et accélérations aux temps $t + \Delta t$, les équations de l'équilibre dynamique au temps $t + \Delta t$, sont aussi considérées :

$$[M] \{\ddot{q}_{t+\Delta t}\} + [C] \{\dot{q}_{t+\Delta t}\} + [K] \{q_{t+\Delta t}\} = \{F_{t+\Delta t}\} \quad (3.24)$$

En utilisant l'équation (3.22) et (3.23), on peut tirer des équations pour $\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\}$ et $\{\dot{q}_{t+\Delta t}\}$, en fonction des déplacements inconnus $\{q_{t+\Delta t}\}$; après substitution de ces deux relations dans l'équation du mouvement au temps $(t + \Delta t)$ On obtient :

$$[\bar{K}] \{q_{t+\Delta t}\} = \{\bar{F}_{t+\Delta t}\} \quad (3.25)$$

Où :

$$[\bar{K}] = [K] + a_0 [M] + a_1 [C]$$

$$\{\bar{F}_{t+\Delta t}\} = \{F_{t+\Delta t}\} + [M][a_0 \{q_t\} + a_2 \{\dot{q}_t\} + a_3 \{\ddot{q}_t\}] + [C][a_1 \{q_t\} + a_4 \{\dot{q}_t\} + a_5 \{\ddot{q}_t\}]$$

Les constantes d'intégration sont données par :

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{\beta \Delta t}$$

$$a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1$$

$$a_4 = \frac{\alpha}{\beta} - 1$$

$$a_5 = \left(\frac{\alpha}{2\beta} - 1\right) \Delta t .$$

L'équation (3.25) est en fait dans une forme statique. On vient de transformer la résolution d'un problème dynamique en une résolution d'un problème statique.

L'algorithme de résolution (méthode de Newmark) est représenté sur le tableau (1) :

Tableau (1) : Algorithme de solution pas à pas :

A. Calcul initial :

1. Former les matrices : de rigidité $[K]$, de masse $[M]$, et d'amortissement $[C]$.
2. Initialiser : $\{q_0\}$, $\{\dot{q}_0\}$, et $\{\ddot{q}_0\}$.
3. Sélectionner le pas de temps Δt , les paramètres α, β , et calculer les constantes

d'intégration :

$$\alpha \geq 0.5 \quad \beta \geq 0.25(0.5 + \alpha)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 \quad a_4 = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \quad a_5 = \Delta t \left(\frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right)$$

$$4. \text{ Former la matrice de rigidité effective. } \quad [\bar{K}] = [K] + a_0 [M] + a_1 [C]$$

$$5. \text{ Triangulariser la matrice } [\bar{K}]: [\bar{K}] = LDL^T$$

B. Pour chaque pas de temps :

1. Calculer le chargement effectif au temps $t+\Delta t$:

$$\{\bar{F}_{t+\Delta t}\} = \{F_{t+\Delta t}\} + [M] [a_0 \{q_t\} + a_2 \{\dot{q}_t\} + a_3 \{\ddot{q}_t\}] + [C] [a_1 \{q_t\} + a_4 \{\dot{q}_t\} + a_5 \{\ddot{q}_t\}]$$

$$2. \text{ Résoudre en terme de déplacement au temps } t+\Delta t : \quad LDL^T q_{t+\Delta t} = \bar{F}_{t+\Delta t}$$

3. Calculer les accélérations et les vitesses au temps $t+\Delta t$:

$$\{\ddot{q}_{t+\Delta t}\} = a_0 (\{q_{t+\Delta t}\} - \{q_t\}) - a_2 \{\dot{q}_t\} - a_3 \{\ddot{q}_t\};$$

$$\{\dot{q}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{q}_t\} + \Delta t (1 - \alpha) \{\ddot{q}_t\} + \alpha \Delta t \{\ddot{q}_{t+\Delta t}\}$$

CHAPITRE IV

VALIDATION ET TESTS

NUMERIQUES

VALIDATION ET TESTS NUMERIQUES

Dans le but de valider et de donner plus de fiabilité à la démarche élaborée dans le code de calcul, nous avons procédé à une série de tests numériques de problèmes statiques et dynamiques, qui nous ont révélé des résultats assez exhaustifs, que nous exposons dans ce chapitre.

Les résultats obtenus sont comparés à des résultats numériques, ou à des résultats analytiques déjà trouvés dans la littérature.

4.1. Validation en statique linéaire

4.1.1. Plaques minces isotropes

4.1.1.1. Plaque carrée simplement appuyée

Le premier exemple analysé est une plaque isotrope, d'épaisseur constante, simplement appuyée sur ces quatre côtés, soumise à une charge transversale uniforme d'intensité P_0 .

Les données géométriques et mécaniques de la structure sont données sur la figure (4.1), ainsi que les conditions aux limites qui sont imposées sur le contour de la plaque.

Afin d'étudier la convergence, nous représentons en figure (4.2) l'évolution de la valeur du déplacement normal au centre de la plaque w_E pour différents maillages.

Nos résultats numériques sont comparés à la solution analytique obtenue par la théorie de Timoshenko [3], [22], donnée par :

$$w_c = 0.00406 \frac{P_0 L^4}{D}$$

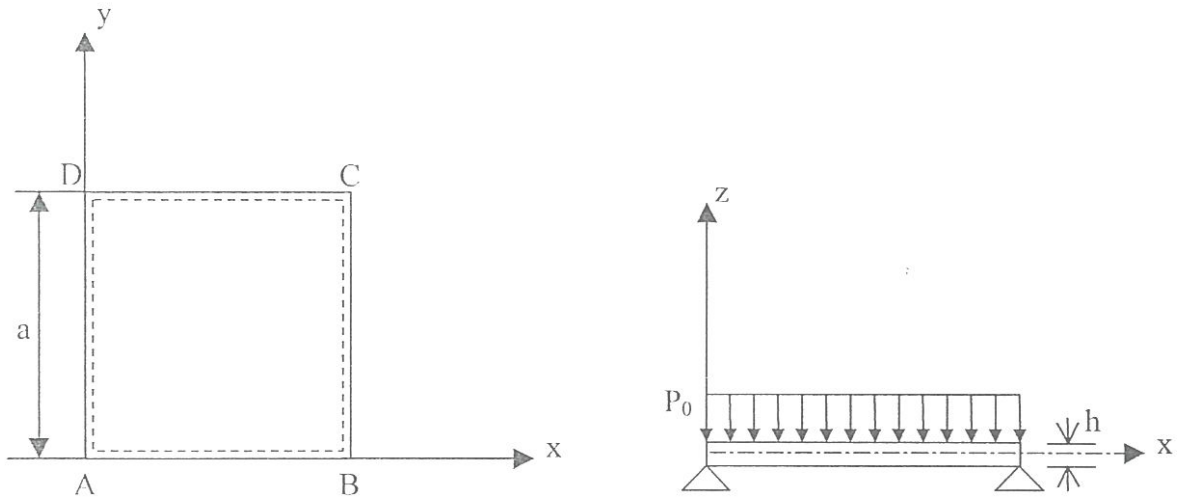
avec :

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad \nu = 0.3$$

Où :

D : représente le coefficient de rigidité de flexion

ν : Coefficient de poisson.

**Données**

$$E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2;$$

$$a = 1.2 \text{ m};$$

$$h = 0.01 \text{ m};$$

$$\nu = 0.3;$$

$$P_0 = 750 \text{ N/m}^2.$$

Conditions aux limites

$$w = \beta_x = 0 \quad \text{Le long de : } AB \text{ et } DC.$$

$$w = \beta_y = 0 \quad \text{le long de : } AD \text{ et } BC.$$

Fig. 4.1 : Plaque carrée isotrope simplement appuyée sur ces quatre côtés, soumise à une charge uniforme P_0 .

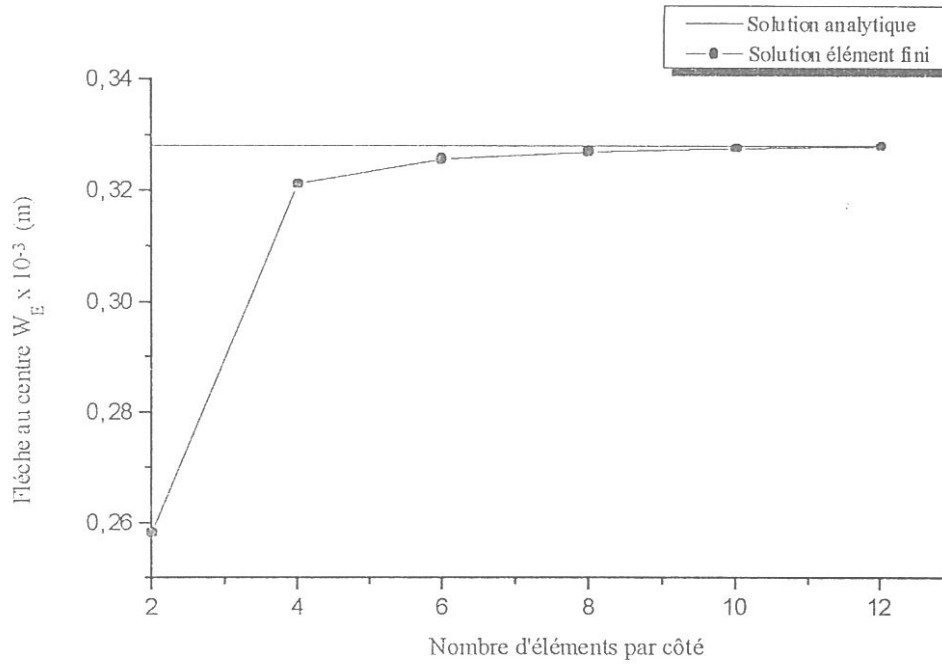


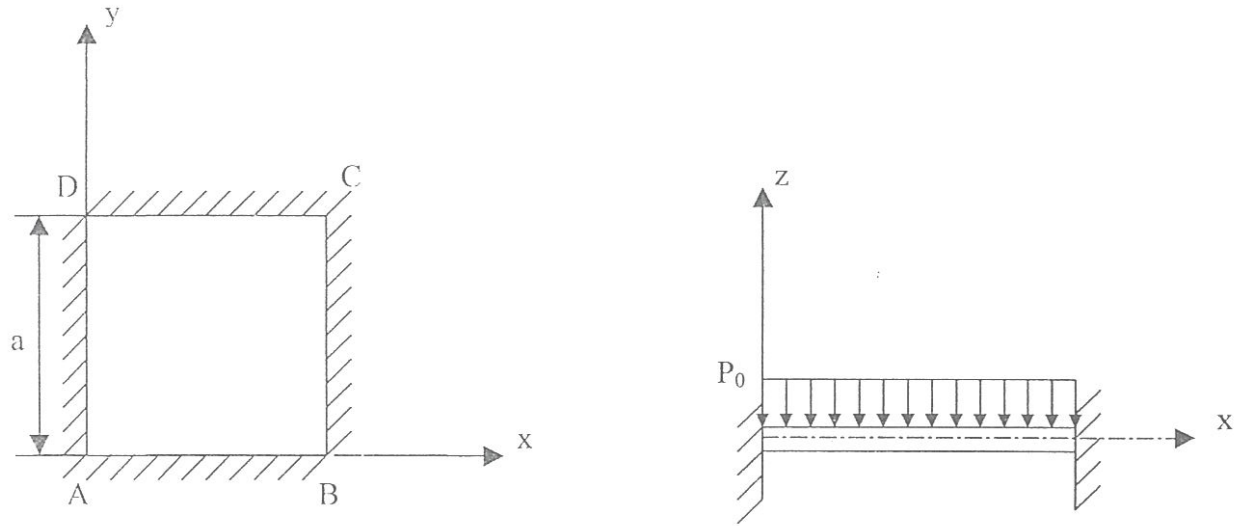
Fig. 4.2 : Convergence de la solution élément fini en fonction du maillage pour une plaque isotrope simplement appuyée.

4.1.1.2. Plaque carrée encastée sur les quatre bords

La plaque carrée encastée sur les quatre cotés représentée sur la figure (4.3) est soumise à une charge uniforme d'intensité P_0 . Les données géométriques et les caractéristiques mécaniques sont les mêmes que l'exemple (4.1.1.1.).

Nous comparons nos résultats à la valeur théorique de Timoshenko [3], [22] :

$$w_c = 0.00126 \frac{P_0 L^4}{D}$$



Condition aux limites

$$w = \beta_x = \beta_y = 0 \quad \text{sur les côtés : AB, BC, CD et DA.}$$

Fig. 4.3 : Plaque carrée isotrope encastree sur les quatre cotes, soumise a une charge uniforme transversale d'intensite P_0 .

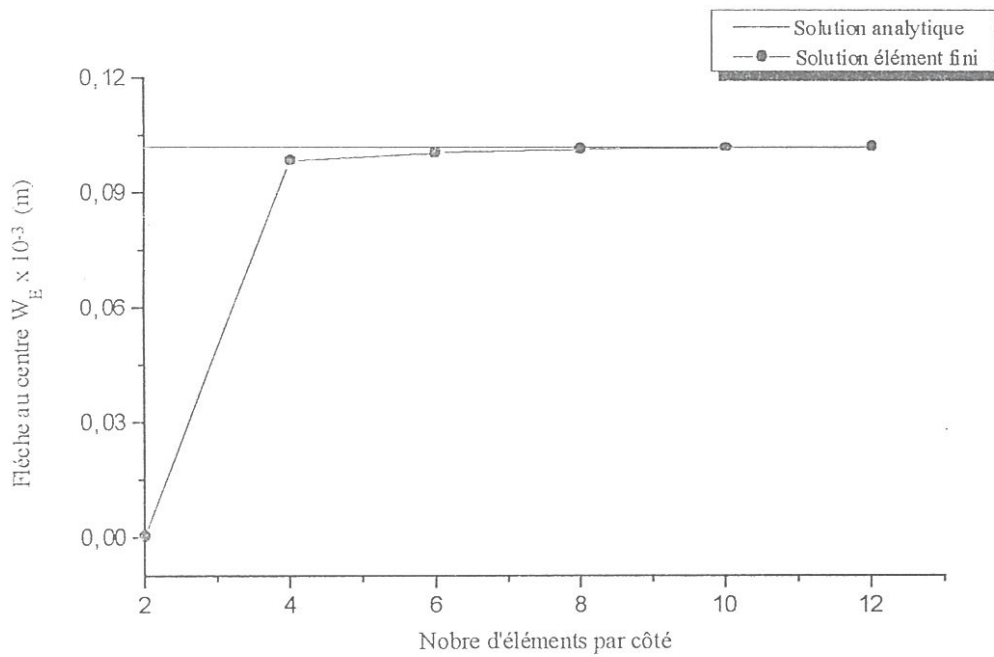


Fig.4.4 : Convergence de la solution élément fini en fonction du maillage pour une plaque isotrope encastree.

4.1.2. Plaques minces orthotropes

4.1.2.1. Plaque carrée simplement appuyée sur les quatre bords

a. Charge uniformément répartie

La structure représentée sur la fig.(4.5) est une plaque mince orthotrope, d'épaisseur constante, simplement appuyée sur les quatre bords chargée uniformément par P_0 .

Les données géométriques et mécaniques de la structure sont données sur la fig.(4.5).

On a divisé la plaque en 100 éléments, chaque côté ayant 10 éléments de longueur égale, et on a comparé nos résultats numériques de la déflexion le long des deux demi-axes de symétrie de la plaque avec ceux de la solution exacte, fig.(4.6).

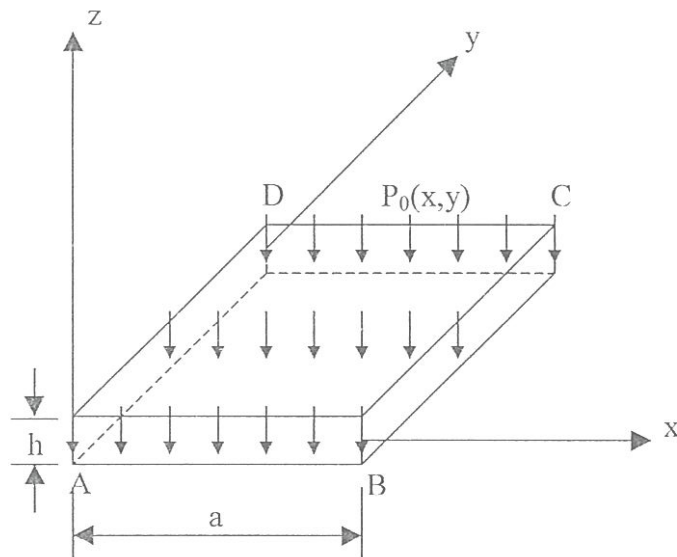
Et afin d'étudier la convergence, nous représentons en fig.(4.7) l'évolution de la valeur du déplacement normal au centre de la plaque W_E en fonction du maillage (2×2), (4×4), (6×6), (8×8) et (10×10).

Nos résultats numériques sont comparés à la solution analytique [21] donnée par :

$$w = 0.9391 \times 10^{-3} \frac{P_0 a^4}{D_{22}} = K \cdot \frac{P_0 a^4}{D_{22}} \times 10^{-3}$$

avec :

$$D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad \nu_{21} = \frac{\nu_{12} E_2}{E_1}$$

**Données**

$$a = 2 \text{ m} ;$$

$$E_1 = 2.068 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 ;$$

$$E_2 = E_1/15 ;$$

$$\nu_{12} = 0.3 ;$$

$$G_{12} = G_{23} = G_{13} = 6.055 \times 10^8 \text{ N/m}^2 ;$$

$$h = 0.01 \text{ m} ;$$

$$P_0(x,y) = 800 \text{ N/m}^2 .$$

Conditions aux limites

$$w = \beta_x = 0 \quad \text{sur : AB et CD.}$$

$$w = \beta_y = 0 \quad \text{sur : AD et BC.}$$

Fig. 4.5 : Plaque carrée orthotrope simplement appuyée sur ces quatre côtés, soumise à une charge uniforme P_0 .

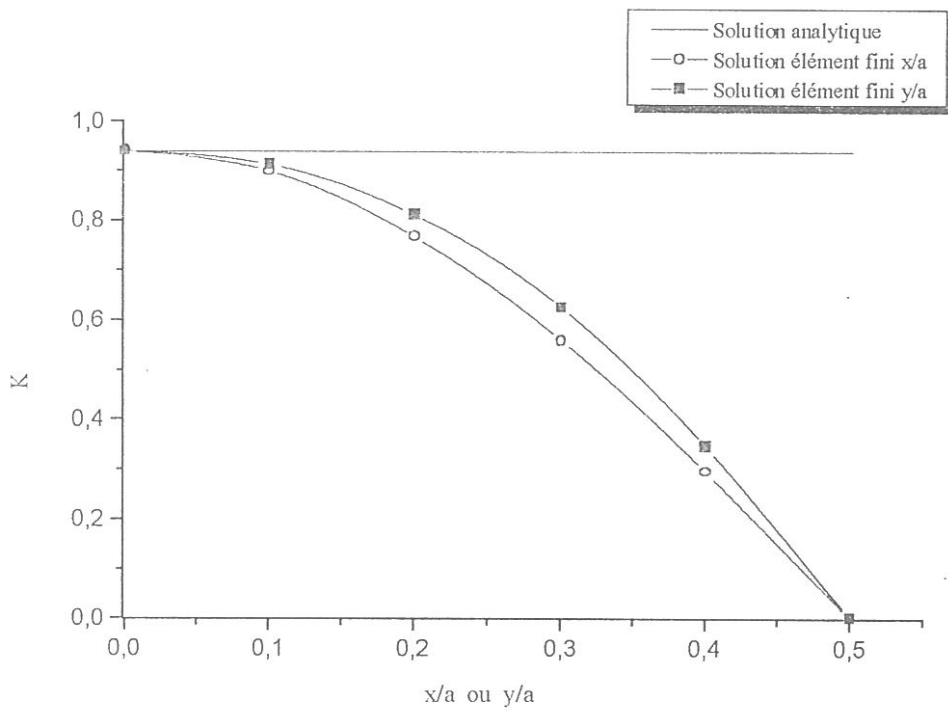


Fig. 4.6 : la déflexion le long des deux demi-axes de symétrie d'une plaque orthotrope simplement appuyée avec une charge uniformément répartie.

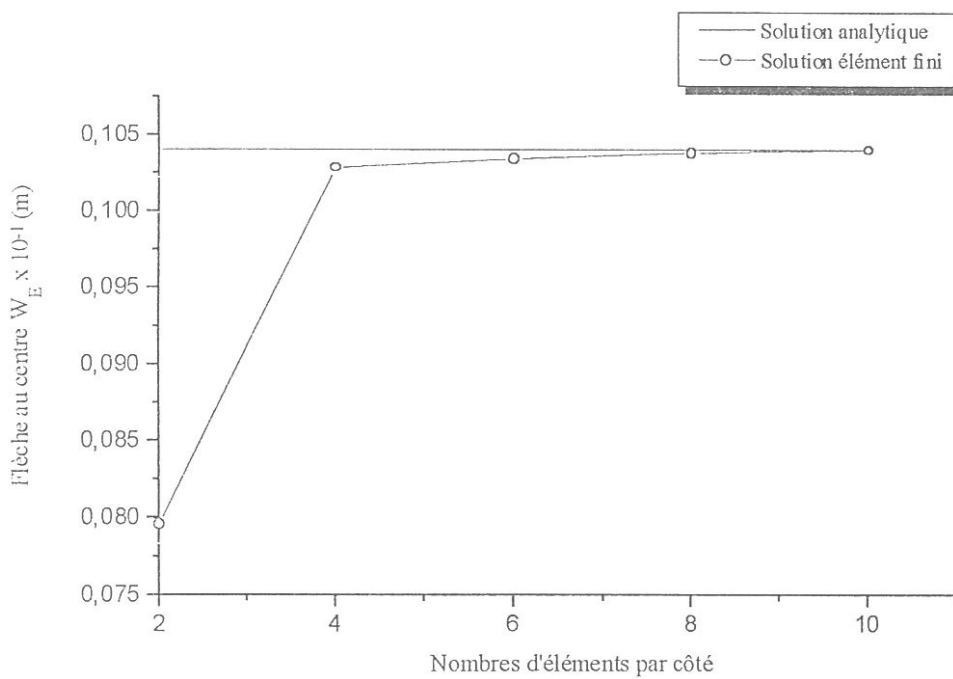


Fig. 4.7 : Convergence de la solution élément fini en fonction du maillage pour une plaque orthotrope simplement appuyée.

b. Charge concentrée

Nous reprenons l'exemple précédent, mais cette fois-ci, sous l'effet d'une charge F concentrée appliquée au milieu de la plaque.

La fig.(4.8) représente la structure traitée, la plaque a été maillée régulièrement avec un découpage (10×10).

On a comparé nos résultats numériques de la déflexion le long des deux demi-axes de symétrie de la plaque avec ceux de la solution analytique [21], fig.(4.9) :

$$w = 0.3084 \times 10^{-2} \frac{F a^2}{D_{22}} = K \frac{F a^2}{D_{22}} \times 10^{-2}$$

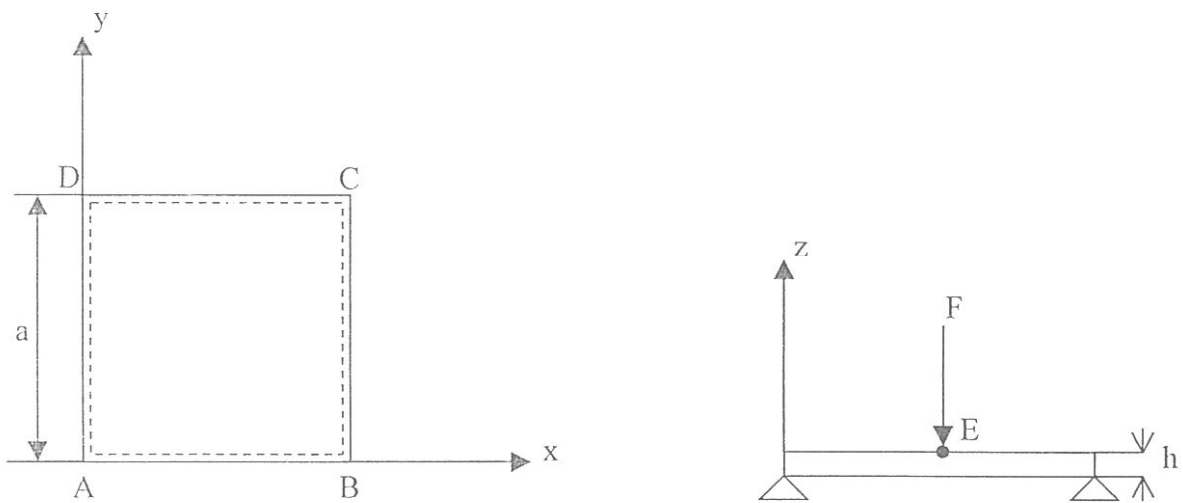


Fig. 4.8 : Plaque carrée orthotrope simplement appuyée sur ces quatre côtés soumise à une charge concentrée F .

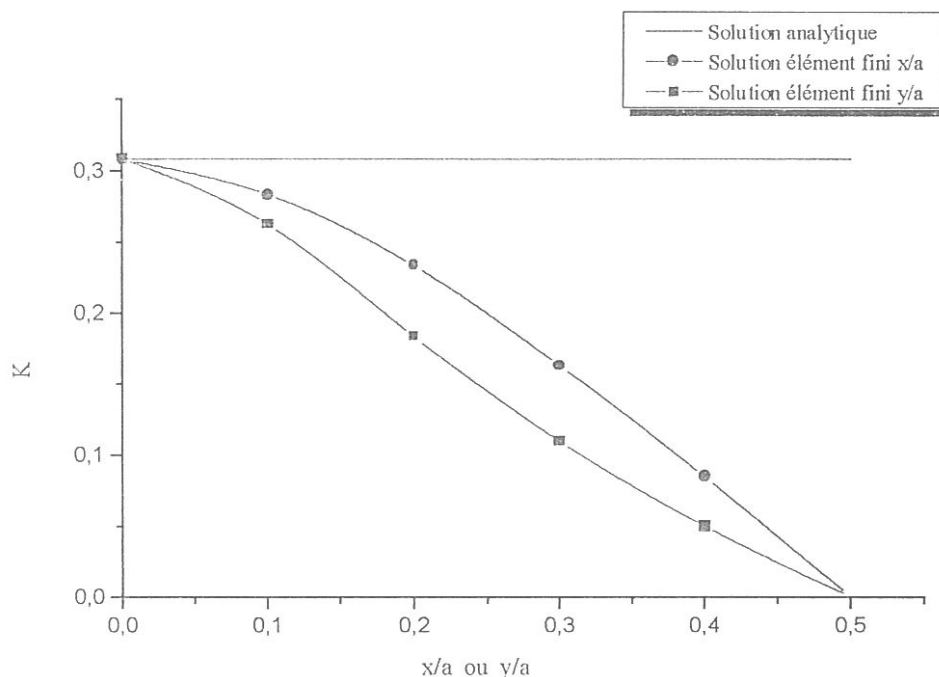


Fig. 4.9 : La déflexion le long des deux demi-axes de symétrie d'une plaque orthotrope simplement appuyée avec une charge concentrée au milieu.

4.1.2.2. Plaque carrée encastree sur les quatre bords

a. Charge uniformément répartie

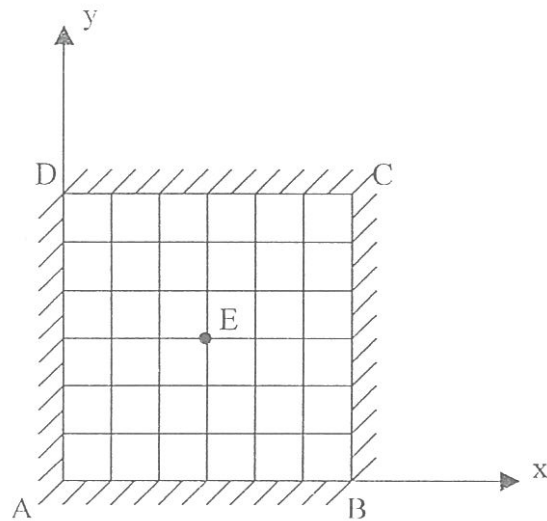
La plaque carrée encastree sur les quatre côtés présentée sur la figure (4.10) est soumise à une charge transversale, d'intensité P_0 .

Les données géométriques et les caractéristiques mécaniques sont les mêmes que l'exemple (4.1.2.1.).

Les résultats du déplacement normal au centre de la plaque E , en fonction du nombre d'éléments par côté (maillage), sont représentés sur la figure (4.11).

Nos résultats sont comparés à ceux obtenus par G. Shi et G. Bezine [21], qui utilisent une formulation de type équations intégrales de contour :

$$w = 0.18645 \times 10^{-3} \frac{P_0 a^4}{D_{22}}$$



Maillage (6x6).

Fig. 4.10 : Plaque carrée encastée sur les quatre côtés.

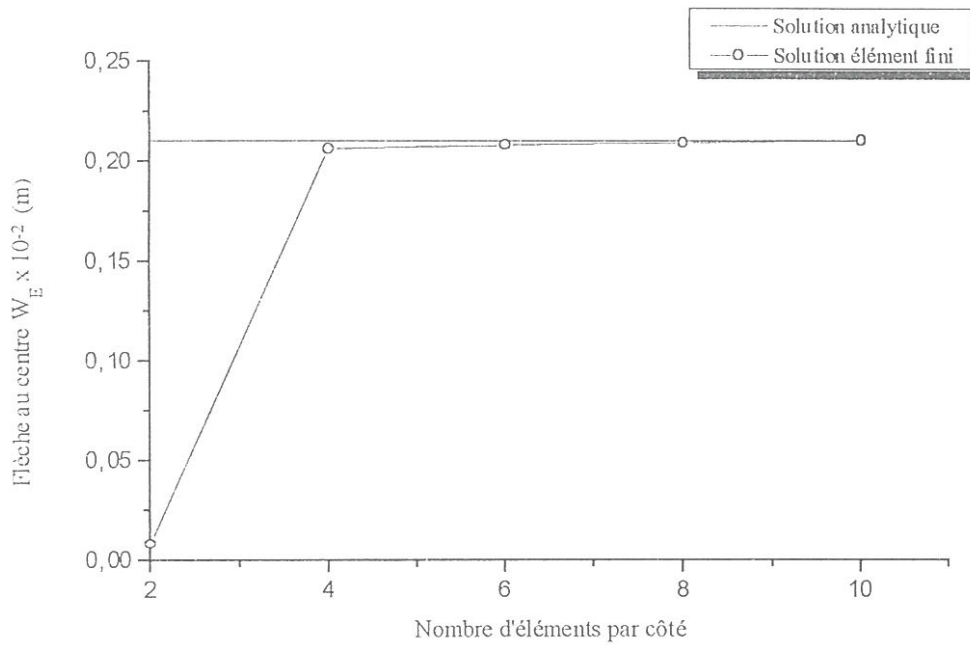


Fig. 4.11 : Convergence de la solution élément fini en fonction du maillage, pour une plaque orthotrope encastée.

b. Charge concentrée

La plaque carrée, représentée à la figure (4.12), est encastree sur ces quatre bords et soumise à une charge concentrée d'intensité F , appliquée au milieu.

Comme auparavant, nous considérons plusieurs découpages. Les résultats du déplacement normal w du nœud E situé au centre de la plaque, en fonction du nombre d'éléments par côté sont représentés sur la fig.(4.13). Une solution de référence due à G.Shi et G.Bezine [21] est disponible :

$$w = 1.17180 \times 10^{-3} \frac{F a^2}{D_{22}}$$

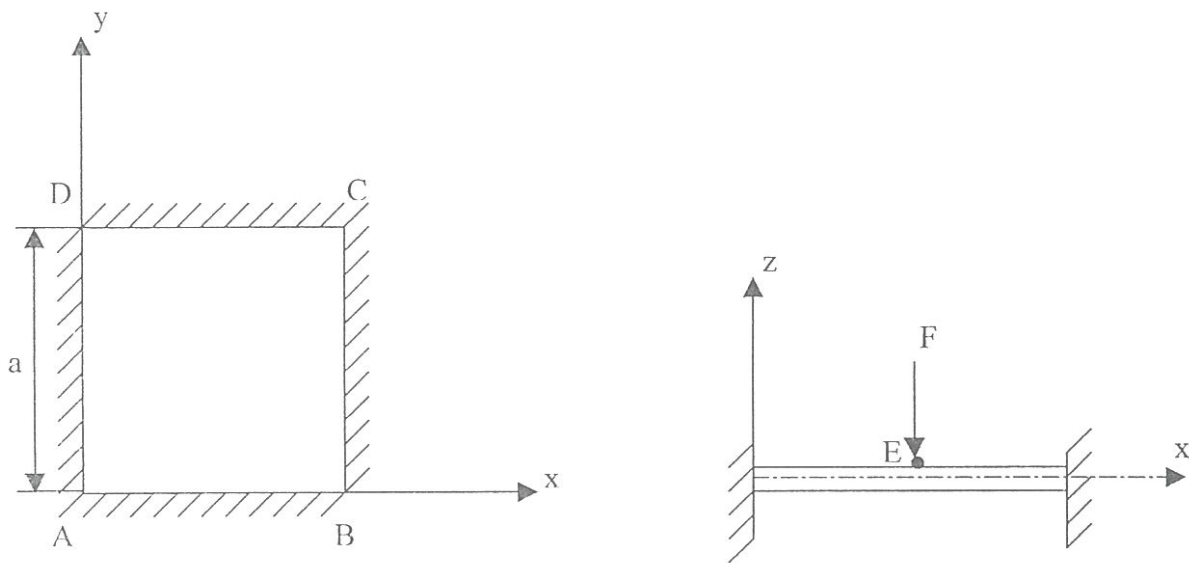


Fig. 4.12 : Plaque carrée orthotrope encastree sous charge concentrée.

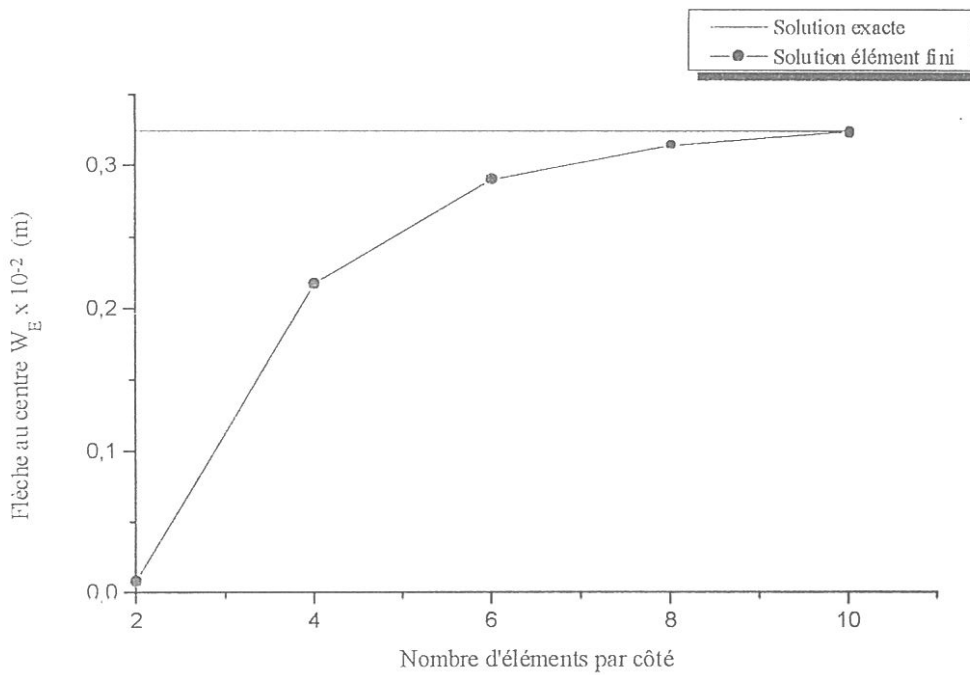


Fig. 4.13 : Convergence de la solution élément fini en fonction du maillage pour une plaque orthotrope encastree sous charge concentrée.

4.1.2.3. Plaque carrée encastree sur un côté

Afin de tester la performance du programme pour différents conditions aux limites, nous avons traité comme dernier test numérique en statique une plaque carrée encastree à une extrémité et libre sur les autres, sous charge concentrée F appliquée au centre. Le maillage considéré est un maillage (10×10) , fig. (4.14).

Nous avons obtenu des résultats numériques pour la déflexion w le long des axes de symétrie, figure (4.15), qui sont comparés à ceux obtenus par Shi G., et Bezine G. [21] :

$$w = K \frac{F a^2}{D_{22}} \times 10^{-3}$$

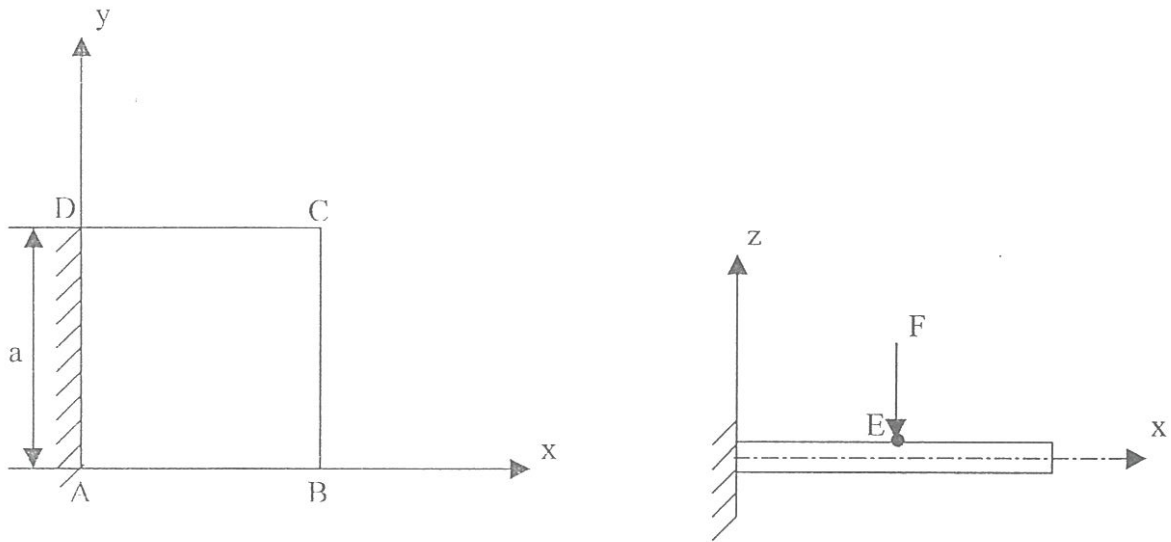


Fig. 4.14 : Plaque carrée orthotrope encastée sur un côté et libre sur les autres.

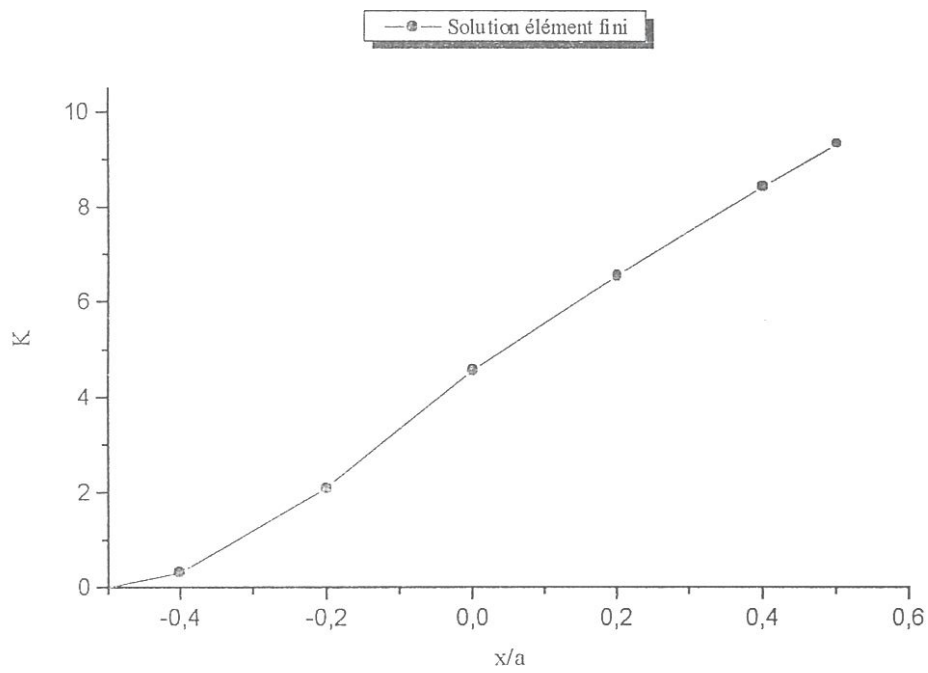


Fig. 4.15 : La déflexion le long des axes de symétrie d'une plaque orthotrope encastée sur un côté, avec une charge concentrée au milieu.

4.1.3. Discussion des résultats

A travers les différents résultats, présentés au cours de l'analyse statique, nous pouvons faire les remarques suivantes :

– Les résultats de modélisation d'une plaque orthotrope et isotrope, quelle soit sur appui simple ou encastree, montrent une nette convergence avec ceux de l'analytiques (numériques).

– La convergence d'une plaque isotope et orthotrope simplement appuyée et encastree, est réalisée respectivement à partir d'un maillage (8×8) ; fig. : (4.2), (4.7), et un maillage (6×6) ; fig. : (4.4) et (4.11). On peut conclure que les conditions aux limites ont une influence directe sur la réponse de la plaque.

– Le code de calcul développé en utilisant la formulation des équations des plaques orthotropes, donne de bon résultats en traitant avec les plaques isotropes.

– Pour les deux cas utilisés de type d'appuis (appui simple, encastrement), on obtient une excellente concordance entre la solution donnée par le code de calcul, et la solution exacte, il est donc apparent que la précision de la solution s'accroît avec le raffinement du maillage.

On en déduit alors la fiabilité du programme en statique.

4.2. Validation en dynamique linéaire

Nous présentons quelques études en dynamique linéaire, de plaques minces isotropes et orthotropes avec et sans amortissement.

Les différents aspects étudiés sont : l'influence du type de support, la forme géométrique, l'incrément de temps et le maillage.

4.2.1. Absence d'amortissement

4.2.1.1. Plaques minces isotropes

Nous considérons une plaque mince isotrope, soumise à une charge impulsive rectangulaire uniforme :

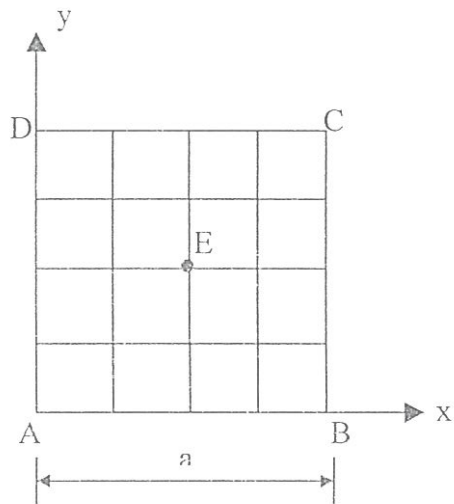
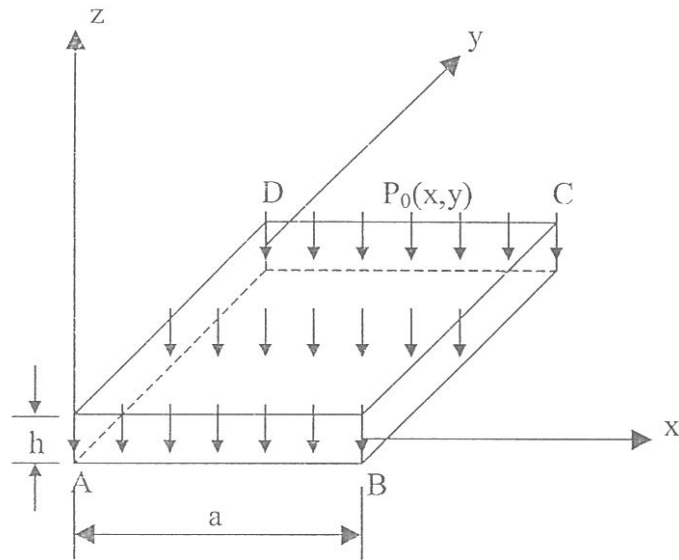
$$\begin{cases} P(t) = 0 & \text{pour } t > t_1 \\ P(t) = P_0 & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

La géométrie de la structure et les propriétés du matériau sont représentées sur la Fig.(4.16).

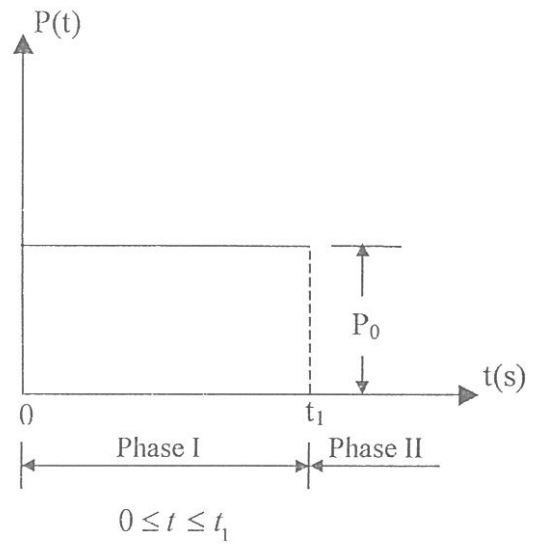
Nous étudions l'influence du type de support (appui simple, encastrement) sur la réponse transitoire au centre de la plaque.

- Sur la Fig. (4.17) nous représentons, la réponse dynamique du déplacement normal W du nœud E situé au centre de la plaque, pour un maillage (12×12) et un incrément de temps $\Delta t = 0.0025$ s, avant et après annulation de la charge ; la réponse est divisée en deux phases : chargement et vibrations libres.

- La Fig.(4.18) montre la réponse transitoire suivant les deux types de supports, pour un maillage (12×12) et un incrément de temps $\Delta t = 0.005$ s.



Maillage (4x4)



Données

$a = 2.438 \text{ m} ;$

$h = 6.35 \times 10^{-3} \text{ m} ;$

$E = 6.897 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 ;$

$\nu = 0.25 ;$

$0 \leq t \leq 0.13 \text{ s} .$

$\rho = 254 \text{ kg/m}^3 \text{ Réf.}[12] ;$

$\rho = 254.7 \text{ kg/m}^3 \text{ Réf.}[4] ;$

$P_0(x,y,t) = 47.9 \text{ N/m}^2 \text{ Réf.}[12] ;$

$P_0(x,y,t) = 48.82 \text{ N/m}^2 \text{ Réf.}[4] ;$

Conditions aux limites

a. Cas de l'appui simple :

$$w = \beta_x = 0 \quad \text{le long de : AB et DC.}$$

$$w = \beta_y = 0 \quad \text{le long de : AD et BC.}$$

b. Encastrement :

$$w = \beta_x = \beta_y = 0 \quad \text{sur les quatre côtés.}$$

Conditions initiales

$$w = \dot{w} = 0 \quad \text{à } t = 0 \text{ s} \quad \text{en tous les nœuds.}$$

Paramètres

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{4} \quad \text{Newmark.}$$

Fig. 4.16 : Plaque isotrope mince soumise à une charge impulsive rectangulaire uniforme.

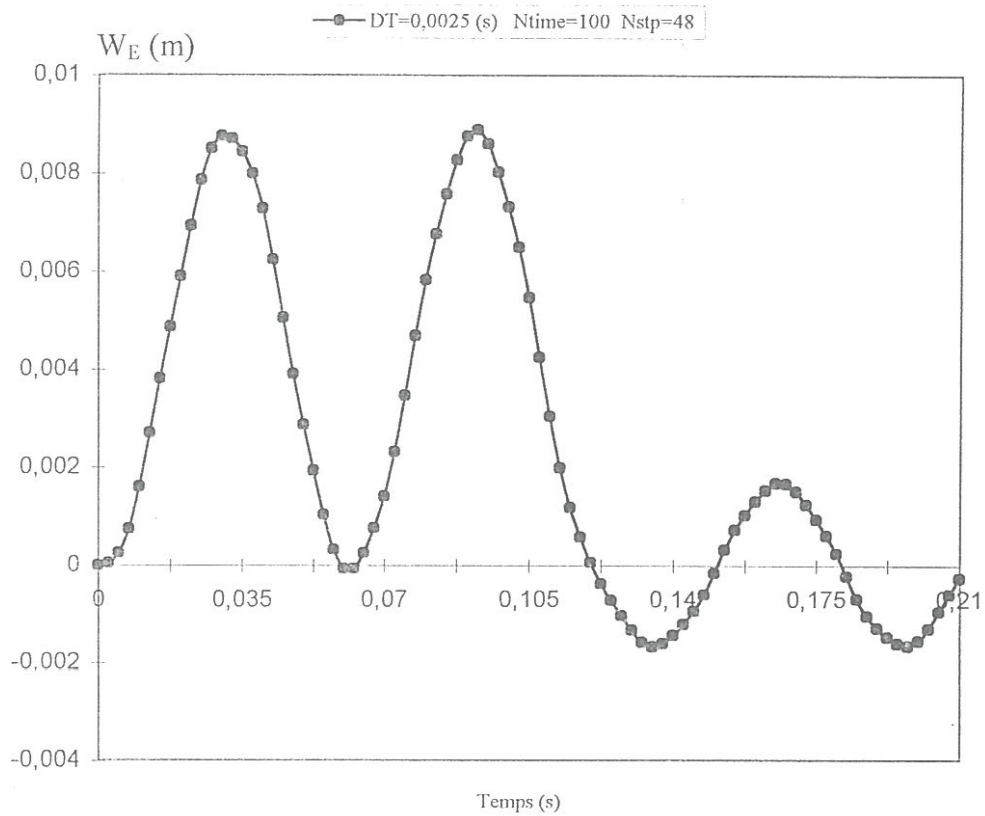


Fig. 4.17 : Réponse dynamique d'une plaque isotrope simplement appuyée sous charge impulsive rectangulaire uniforme.

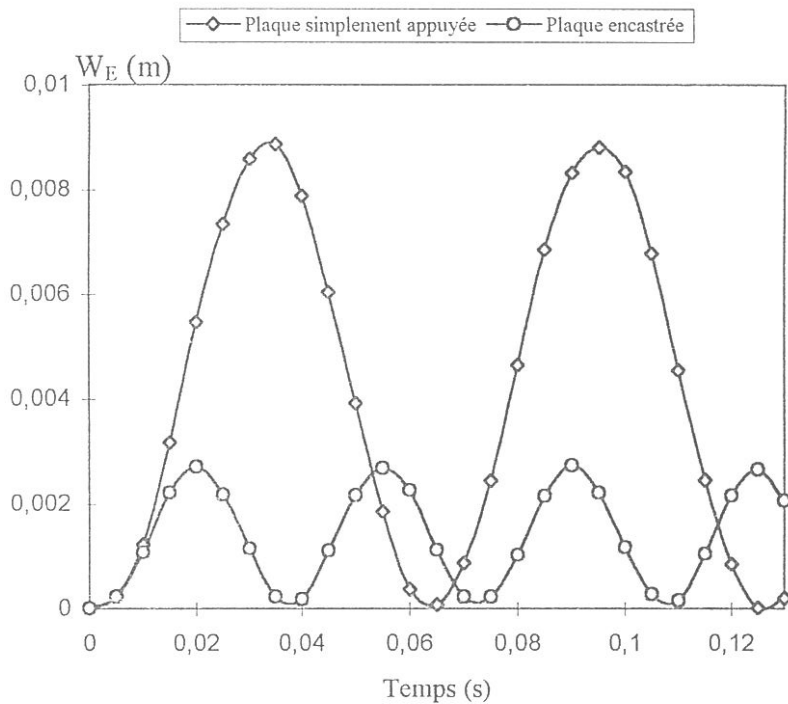


Fig. 4.18 : Plaque carrée soumise à une charge impulsive uniforme – Réponse transitoire du déplacement normal au centre suivant le type de support.

4.2.1.2. Discussion des résultats

Nos résultats sont comparés à ceux obtenus par Geoffroy [12] qui utilise la méthode de Newmark et Wilson, un maillage (4×4), (6×6) et un pas de temps de 0.005 s, et à ceux obtenus par Belheine [4] qui utilise la méthode de Newmark et H.H.T. avec l'élément DKT.

Dans le tableau B₁ (annexe B), sont reportées les valeurs de l'amplitude maximum du déplacement normal W au nœud E situé au centre de la plaque, obtenues lors de l'analyse linéaire en fonction du maillage et du pas du temps, les résultats de Geoffroy sont également représentés.

Nous indiquons dans le tableau B₂ (Annexe B), les valeurs de W_{\max} du nœud E, en fonction du maillage, et du type de support, ainsi que celles de Belheine Réf.[4].

L'examen des différents tableaux et figures permet de formuler les remarques suivantes :

- Des résultats satisfaisants des déplacements sont obtenus comparativement à ceux de Geoffroy, ceci pour un maillage (12×12) et un incrément de temps de 0.0025 s. (Fig. (4.17) et Tableau B₁)

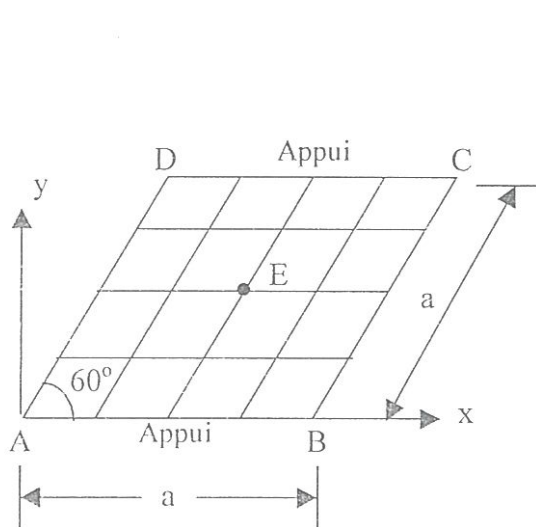
- Les analyses faites avec le maillage (12×12) et un incrément de temps $\Delta t = 0.005$ s, montrent une bonne correspondance de nos résultats avec ceux de Belheine Réf.[4] (maillage (16×16)), pour les deux types de supports appuyés simple et encastrement (Fig. (4.18) et Tableau B₂).

4.2.1.3. plaque biaise isotrope

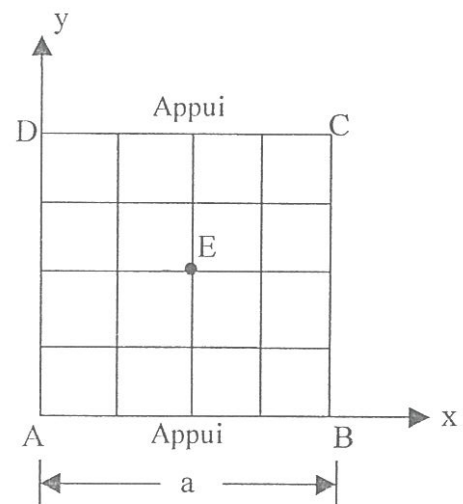
Le problème de la plaque biaise est décrit dans la figure (4.19). Il s'agit d'une plaque biaise (angle 60°) soumise à une charge impulsive rectangulaire uniforme P_0 ; ayant deux bords opposés simplement appuyés et deux bords libres.

Nous avons analysé cette plaque en utilisant l'élément quadrilatère Q4, considérant ainsi un maillage régulier (8×8), d'éléments de forme de losanges, et un pas de temps $\Delta t = 0.005$ s.

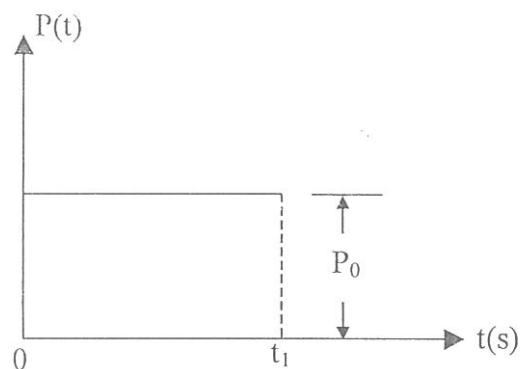
Les valeurs obtenues pour la flèche au centre de la plaque sont représentées sur la fig. (4.20). Une solution numérique de référence de Belheine [5] est disponible, donnée par le code de calcul DLEARN, pour un incrément de temps 0.005 s, et un maillage (16×16).



Référence : $W_E = 0.3294 \times 10^{-3} \text{ m}$



Référence : $W_E = 0.5773 \times 10^{-3} \text{ m}$



Données

$$a = 2.438 \text{ m};$$

$$h = 6.35 \times 10^{-3} \text{ m};$$

$$E = 6.897 \times 10^{10} \text{ N/m}^2;$$

$$\nu = 0.25;$$

$$\rho = 254.7 \text{ kg/m}^3;$$

$$p_0(x,y,t) = -1 \text{ N/m}^2;$$

$$0 \leq t \leq 0.13 \text{ s}.$$

Conditions aux limites

$$w = \beta_x = 0 \quad \text{le long de : AB et DC};$$

AD et BC : deux bords libres.

Fig. 4.19 : Plaque biaisée (60°), et plaque carrée, avec bords libres.

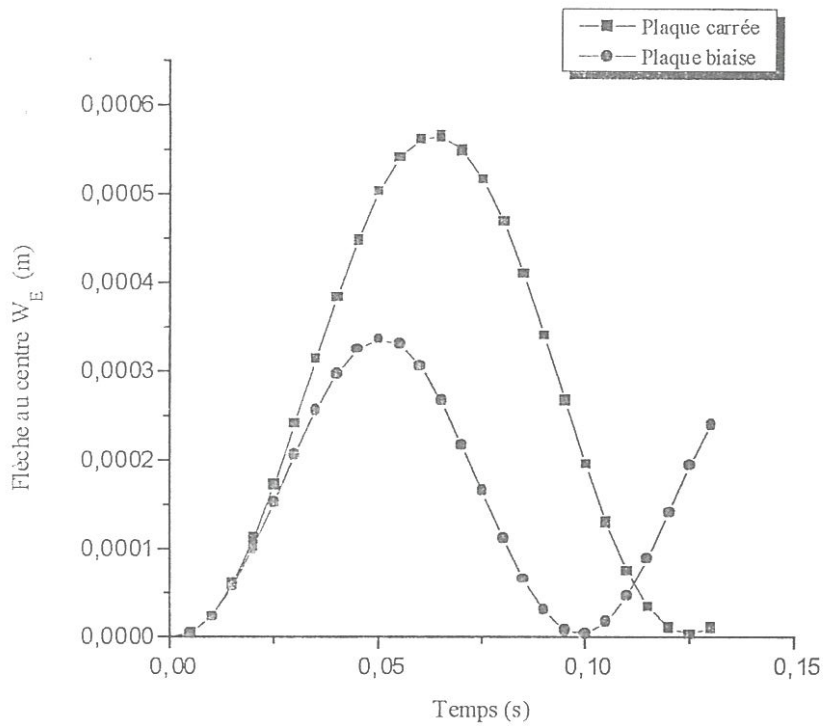


Fig. 4.20 : Réponse dynamique au centre de la plaque biaisée (60°), et la plaque carrée sous charge impulsive rectangulaire uniforme.

Les analyses faites avec un maillage (8×8) montrent une bonne convergence de nos résultats avec la solution numérique de la Réf. [5].

Il apparaît de la fig.(4.20) que la forme géométrique influe sur la réponse transitoire.

4.2.1.4. plaque carrée orthotrope

Le premier exemple analysé pour les plaques orthotropes en dynamique, est la plaque ondulée en aluminium, soumise à 3 types de charges impulsives.

A. Impulsion rectangulaire

Soit une plaque mince orthotrope d'épaisseur constante soumise à une charge impulsive rectangulaire uniforme d'intensité P_0 :

$$\begin{cases} P(t) = 0 & \text{pour } t > t_1 \\ P(t) = P_0 & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

Les données géométriques et les caractéristiques mécaniques sont indiquées sur la fig. (4.21)

Nous étudions l'influence du type de support (appui simple, encastrement), du maillage, et de l'incrément de temps sur la réponse transitoire au centre de la plaque.

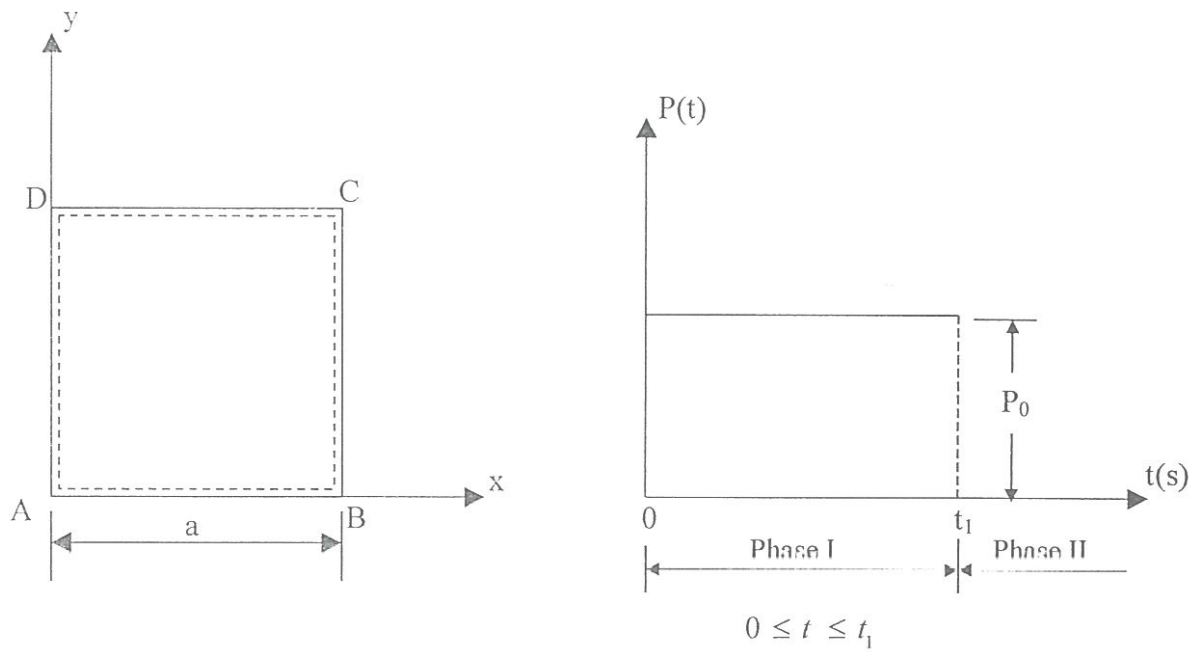
- La figure (4.22) montre la réponse transitoire, correspondante aux deux phases : chargement et vibrations libres, pour un maillage (10×10) et un incrément de temps $\Delta t = 0.0025$ s.

- Sur la figure (4.23), les résultats des déplacements obtenus durant la phase I (avant l'annulation de la charge) sont comparés aux résultats donnés par le code de calcul DLEARN Réf. [4], ceci pour un maillage (10×10) et un pas de temps de 0.0025 s.

- La figure (4.24) concerne la réponse transitoire suivant les deux types de supports, pour un maillage (10×10) et un incrément de temps $\Delta t = 0.0025$ s.

- Pour un pas de temps de 0.0025 s, et pour le cas de l'appui simple, l'influence du maillage est représentée sur la figure (4.25).

- La figure (4.26) montre l'influence de l'incrément de temps sur la réponse dynamique de la plaque simplement appuyée.

**Données**

$$a = 1.5 \text{ m};$$

$$h = 7 \times 10^{-3} \text{ m};$$

$$\rho = 2710 \text{ kg/m}^3;$$

$$P_0(x,y,t) = 950 \text{ N/m}^2;$$

$$E_1 = 30 \times 10^{10} \text{ N/m}^2;$$

$$E_2 = 0.8 \times 10^{10} \text{ N/m}^2;$$

$$G_{12} = G_{23} = G_{13} = 0.375 \times 10^{10} \text{ N/m}^2;$$

$$\nu_{12} = 0.33.$$

Fig. 4.21 : Plaque carrée orthotrope soumise à une charge impulsive rectangulaire uniforme.

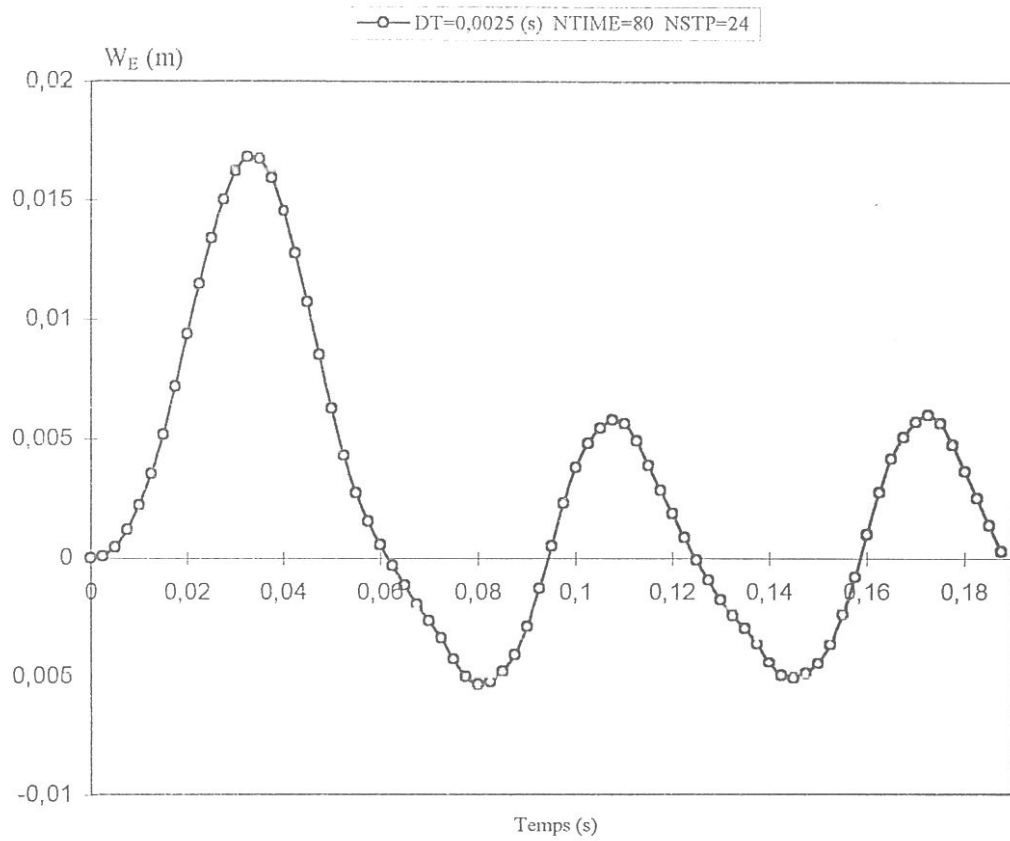


Fig. 4.22 : Réponse dynamique d'une plaque orthotrope simplement appuyée avant et après annulation de la charge impulsive uniforme.

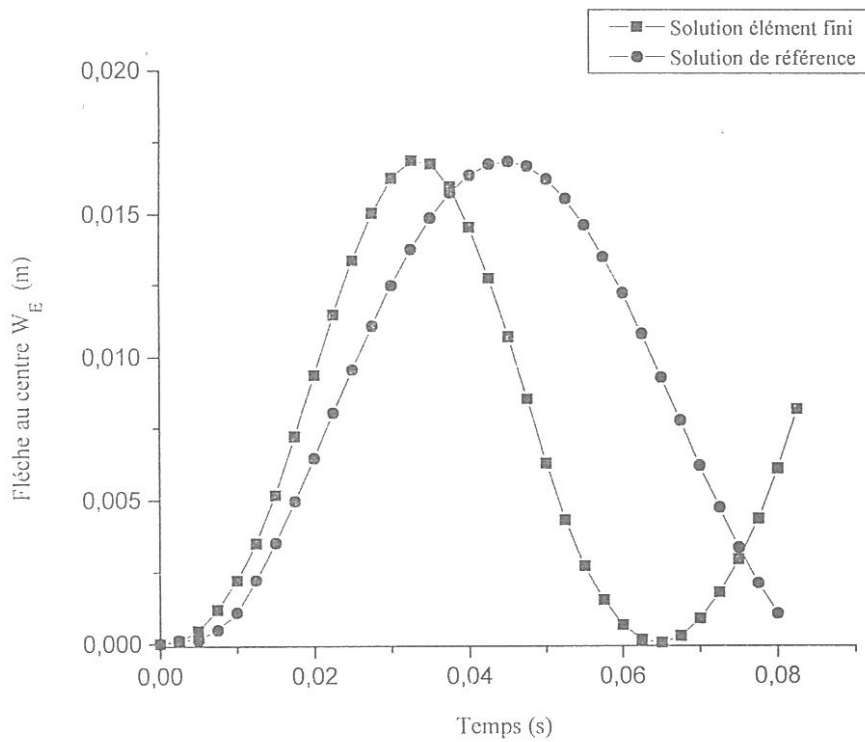


Fig. 4.23 : Comparaison des résultats obtenus pour le déplacement avec la solution de référence.

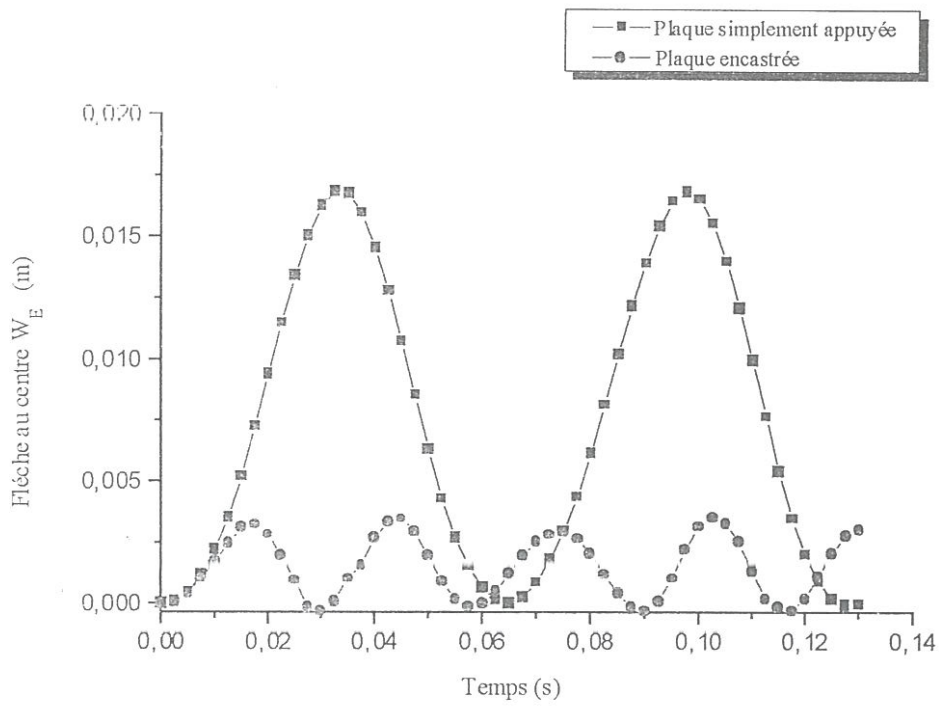


Fig. 4.24 : Plaque carrée soumise à une charge impulsive uniforme – Réponse transitoire du déplacement au centre suivant le type de support.

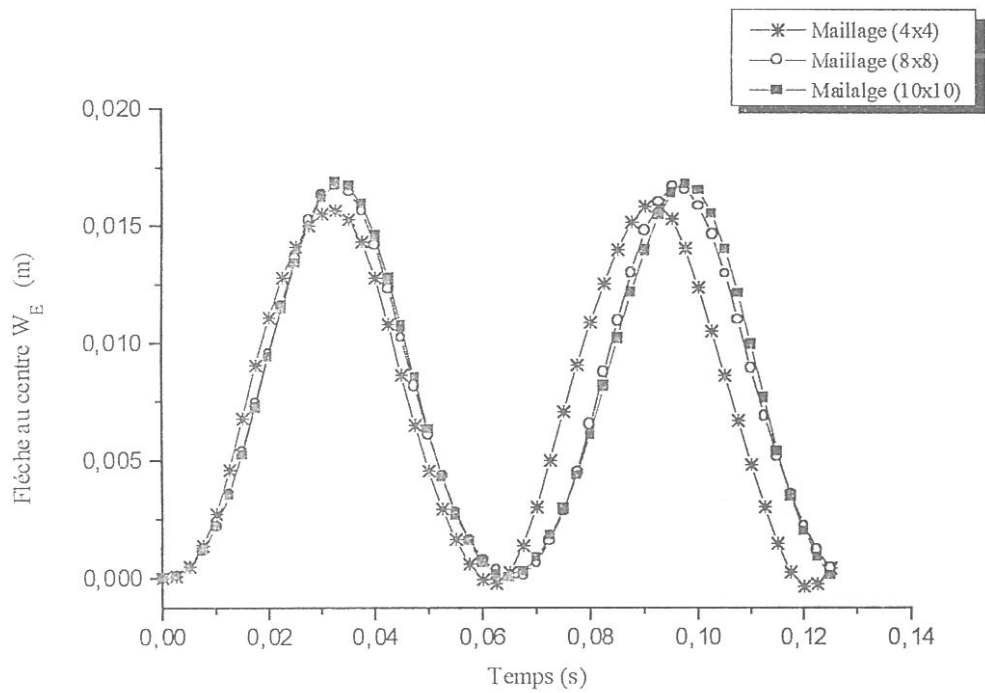


Fig. 4.25 : Plaque orthotrope simplement appuyée – Influence du maillage sur la réponse transitoire du déplacement W_E .

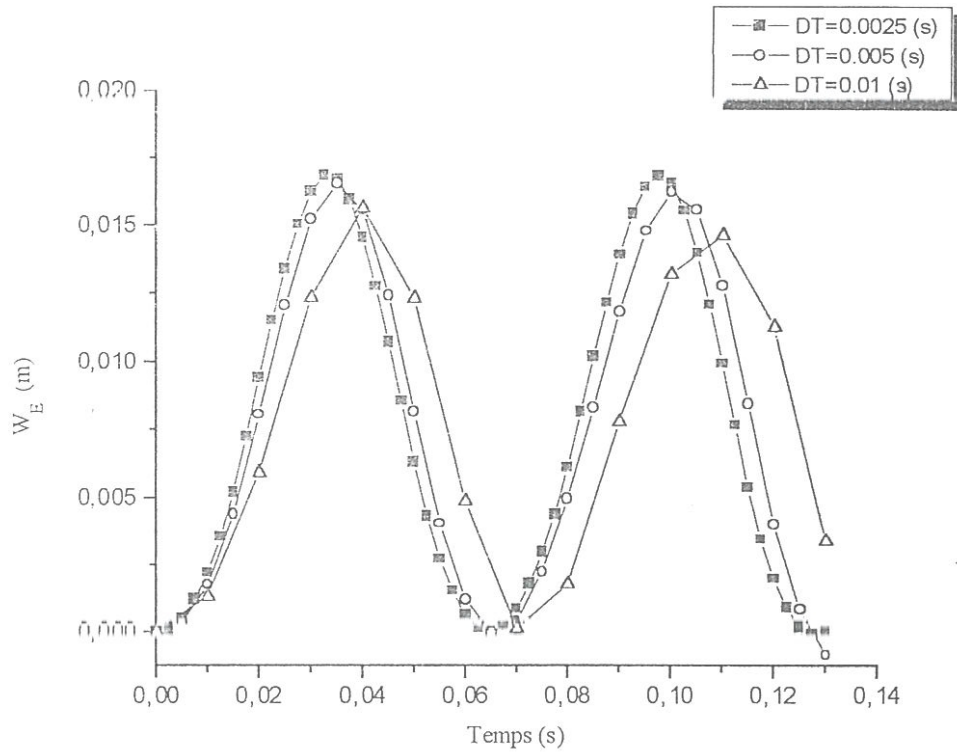


Fig. 4.26 : Plaque orthotrope simplement appuyée – Influence du pas du temps sur la réponse transitoire du déplacement W_E .

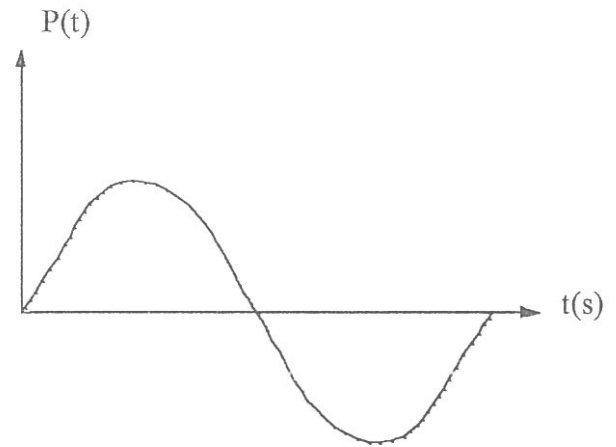
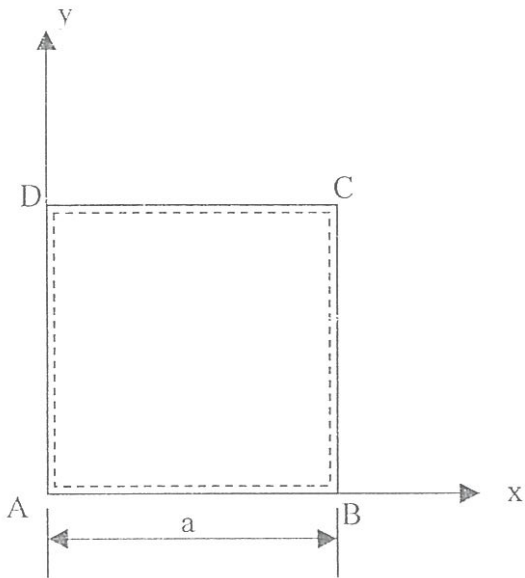
B. Impulsion sinusoïdale

Le second type d'impulsion que nous considérons est sinusoïdale, fig. (4.27) :

$$\begin{cases} P(t) = 0 & \text{pour } t \geq t_1 \\ P(t) = P_0 \sin \frac{2\pi}{t_1} t & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

La figure (4.27) représente la structure analysée, ainsi que le type de chargement, ceci pour un maillage (10×10).

Quant à la figure (4.28), elle nous montre la réponse dynamique au centre de la plaque.



Données

$a = 0.5 \text{ m} ;$

$h = 6 \times 10^{-3} \text{ m} ;$

$\rho = 2710 \text{ kg/m}^3 ;$

$P_0(x,y,t) = 2500 \text{ N/m}^2 ;$

$E_1 = 30 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 ;$

$E_2 = 0.8 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 ;$

$G_{12} = G_{23} = G_{13} = 0.375 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 ;$

$\nu_{12} = 0.33 .$

Fig. 4.27 : Plaque carrée orthotrope simplement appuyée sous excitation impulsive sinusoïdale.

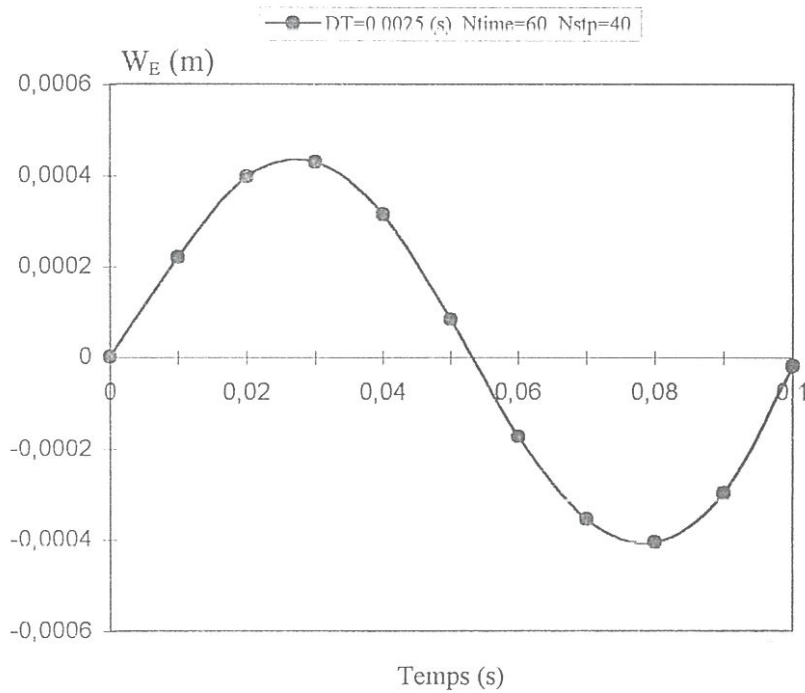


Fig. 4.28 : Réponse dynamique d'une plaque orthotrope sous excitation impulsive sinusoïdale.

C. Impulsion triangulaire

Le dernier chargement en impulsion que nous considérons est l'impulsion triangulaire décroissante, Fig. (4.29) :

$$\begin{cases} P(t) = 0 & \text{pour } t \geq t_1 \\ P(t) = P_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont les mêmes que pour l'exemple (4.2.1.4.), avec : $P_0 = 3000$ N.

La figure (4.30) nous montre la réponse dynamique au centre de la plaque.

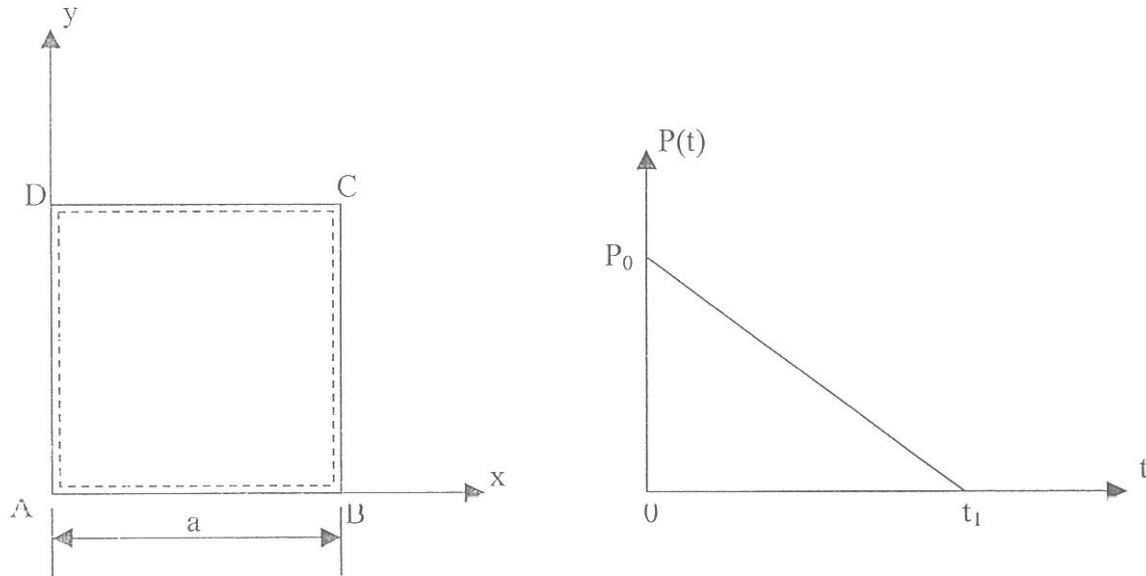


Fig. 4.29 : Plaque orthotrope simplement appuyée sous excitation impulsive triangulaire.

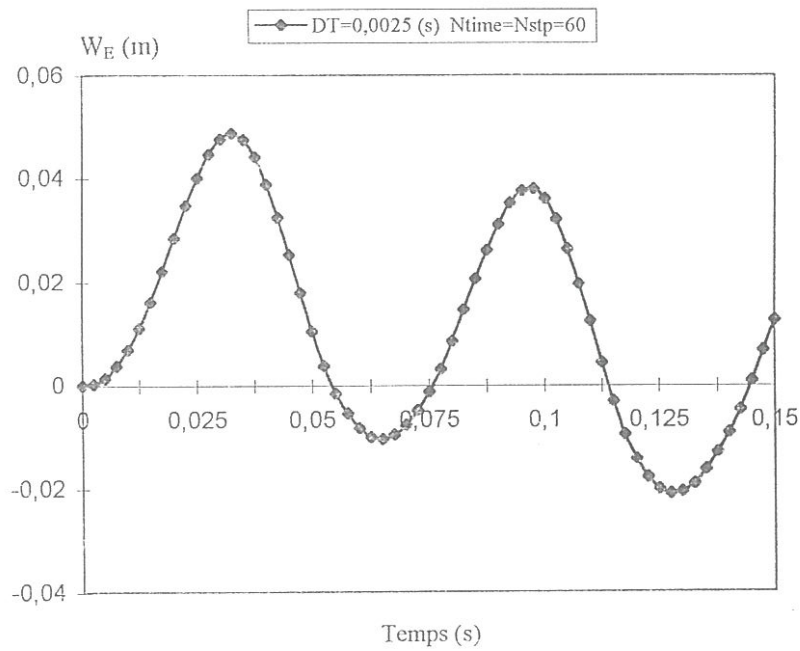
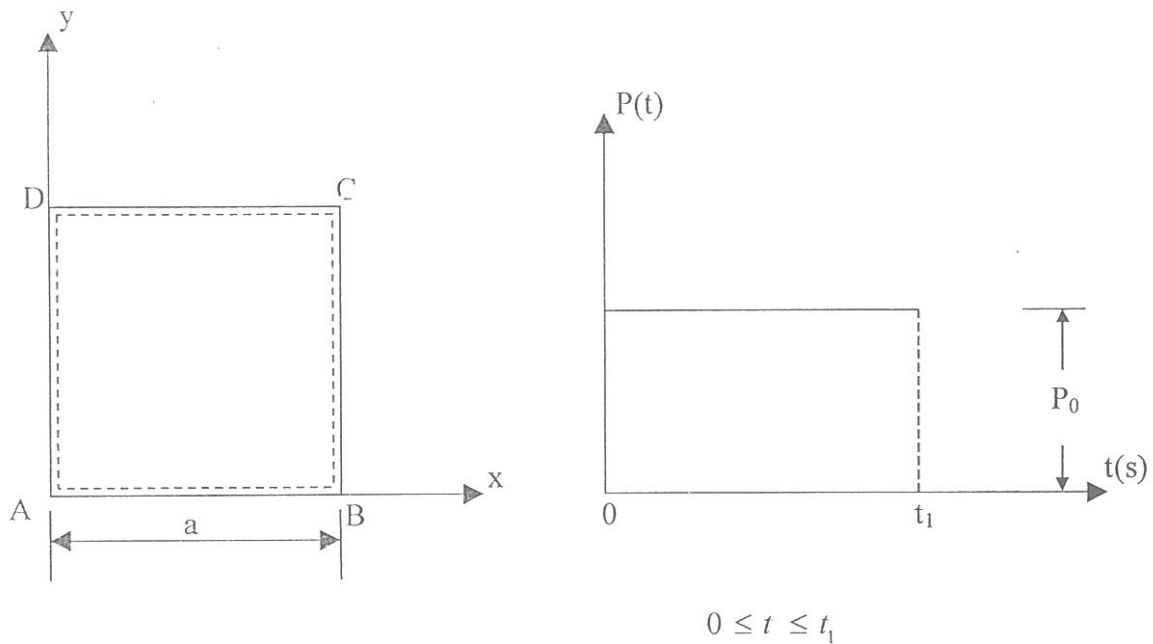


Fig. 4.30 : Réponse dynamique d'une plaque orthotrope sous excitation impulsive triangulaire.

4.2.1.5. Plaque orthotrope en bois

La figure (4.31) nous donne les caractéristiques mécaniques [23] et géométriques d'une plaque en bois de type Pin de Douglas, soumise à une charge impulsive rectangulaire uniforme. La plaque a été maillée régulièrement avec un découpage 10×10 .

Dans La figure (4.32), on représente les résultats obtenus par notre code de calcul (durant la phase I) avec la solution de référence.



Données :

$$a = 1.8 \text{ m ;}$$

$$h = 0.01 \text{ m ;}$$

$$\rho = 550 \text{ kg/m}^3;$$

$$P_0(x,y,t) = 500 \text{ N/m}^2 ;$$

$$\nu_{12} = 1.23 ;$$

$$\Delta T = 0.005 \text{ s ;}$$

$$E_1 = 1.33 \times 10^{10} \text{ N/m}^2;$$

$$E_2 = 1.6 \times 10^9 \text{ N/m}^2 ;$$

$$G_{12} = 0.135 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 ;$$

$$G_{13} = 0.11 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 ;$$

$$G_{23} = 0.25 \times 10^9 \text{ N/m}^2 .$$

Fig. 4.31 : Plaque carrée orthotrope en bois soumise à une charge impulsive rectangulaire.

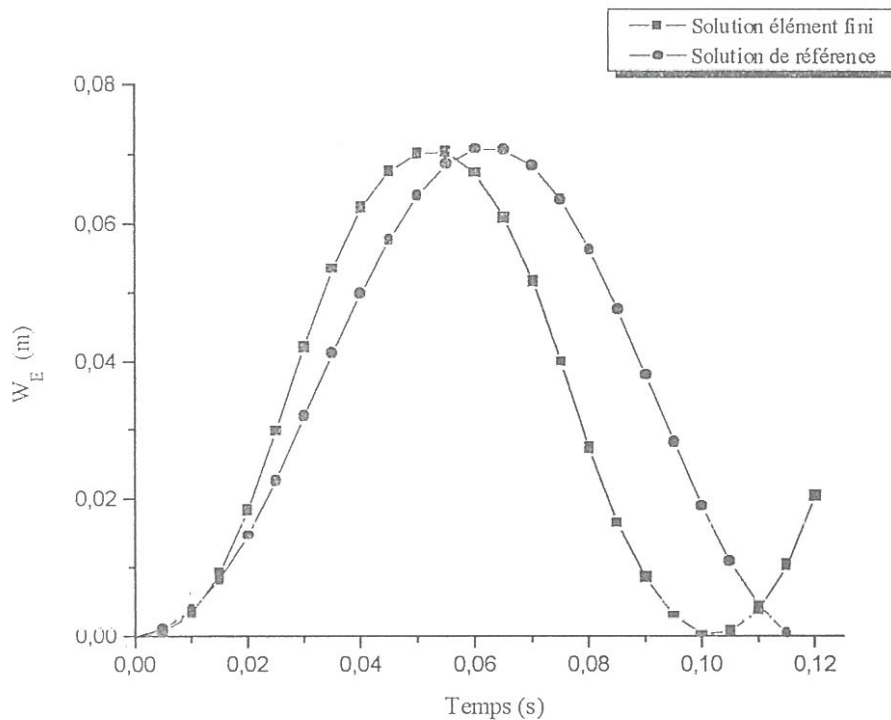


Fig. 4.32 : Comparaison des résultats obtenus pour le déplacement au centre de la plaque avec la solution de code de calcul Dlearn.

4.2.1.6. Discussion des résultats

Nos résultats pour le cas de l'impulsion rectangulaire et durant la phase I (chargement) sont comparés aux résultats numériques obtenus par le code de calcul « Dlearn » réf. [4], après l'introduction des propriétés d'orthotropie dans le programme. L'élément utilisé dans ce code est l'élément triangulaire DKT à 9 d.d.l. avec la méthode HHT.

Dans le tableau B₃ (Annexe B), nous reportons les valeurs de l'amplitude maximum du déplacement w au nœud E situé au centre de la plaque, obtenues lors de l'analyse linéaire en fonction du maillage, et pour un pas de temps de 0.0025 s, ainsi que les résultats obtenues par le code de calcul Dlearn [4].

Le tableau B₄ (Annexe B), indique les valeurs de w_{\max} du nœud E, en fonction du maillage, du pas de temps, et du type de support.

L'examen des différents tableaux et figures permet de révéler les points suivants :

- Les analyses faites avec le maillage (10×10) et pour un incrément de temps

$\Delta t = 0.0025$ s, montrent une bonne convergence de nos résultats avec la solution de référence, Fig. (4.23) et Tableau B₃.

– Nous déduisons de la figure (4.26) (Tableau B₄), qu’il y a une nette divergence de la flèche pour un pas de temps $\Delta t = 0.01$ s, en comparant à celle obtenue pour $\Delta t = 0.0025$ s, et $\Delta t = 0.005$ s.

– La figure (4.25) laisse apparaître l’influence du maillage sur la réponse dynamique ; la réponse au centre de la plaque obtenue pour un maillage (4×4), est inférieure à celle du maillage (8×8) et (10×10).

– La figure (4.32), représente la convergence de la plaque en bois avec la solution obtenue par le code de calcul Dlearn.

4.2.2. Influence de l’amortissement sur la réponse dynamique

Nous reprenons l’exemple (4.2.1.1) [4], en tenant compte de l’effet de l’amortissement ; qui est une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité :

$$[C] = \alpha' [M] + \beta' [K]$$

Où $\alpha' = 0.005$; $\beta' = 0.002$.

La plaque isotrope est soumise à une charge échelon :

$$\begin{cases} P(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ P(t) = P_0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

La figure (4.33) représente l’influence de l’amortissement sur la réponse dynamique au centre d’une plaque isotrope simplement appuyée.

Dans la figure (4.34) les résultats de la réponse d’une plaque isotrope amortie sont comparés à ceux obtenus par le programme Dlearn.

Pour la plaque orthotrope de l’exemple (4.2.1.4.), la réponse dynamique sous l’effet d’amortissement est donnée sur la figure (4.35). La plaque est simplement appuyée soumise à une charge échelon.

Les figures (4.33) et (4.35), laissent apparaître après quelques périodes une stabilisation des résultats autour de la solution statique.

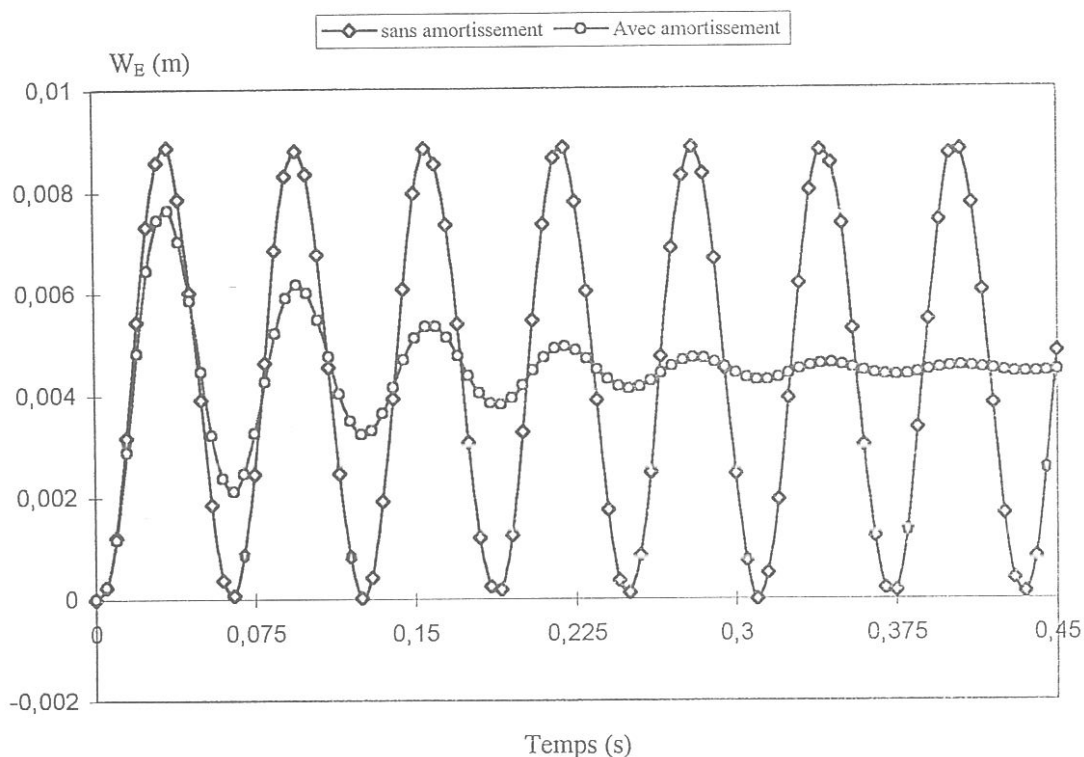


Fig. 4.33 : Plaque carrée isotrope simplement appuyée soumise à une charge échelon – Réponse dynamique sous l’effet d’un amortissement proportionnel

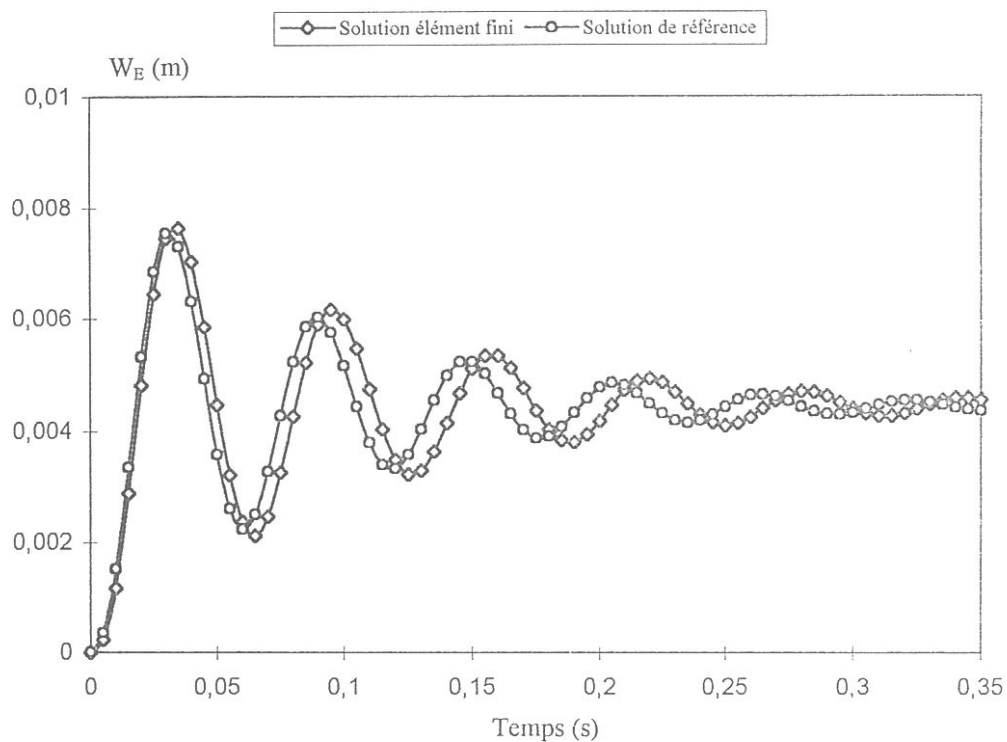


Fig. 4.34 : Comparaison des résultats obtenus pour le déplacement amorti avec la solution numérique du code de calcul D:earn.

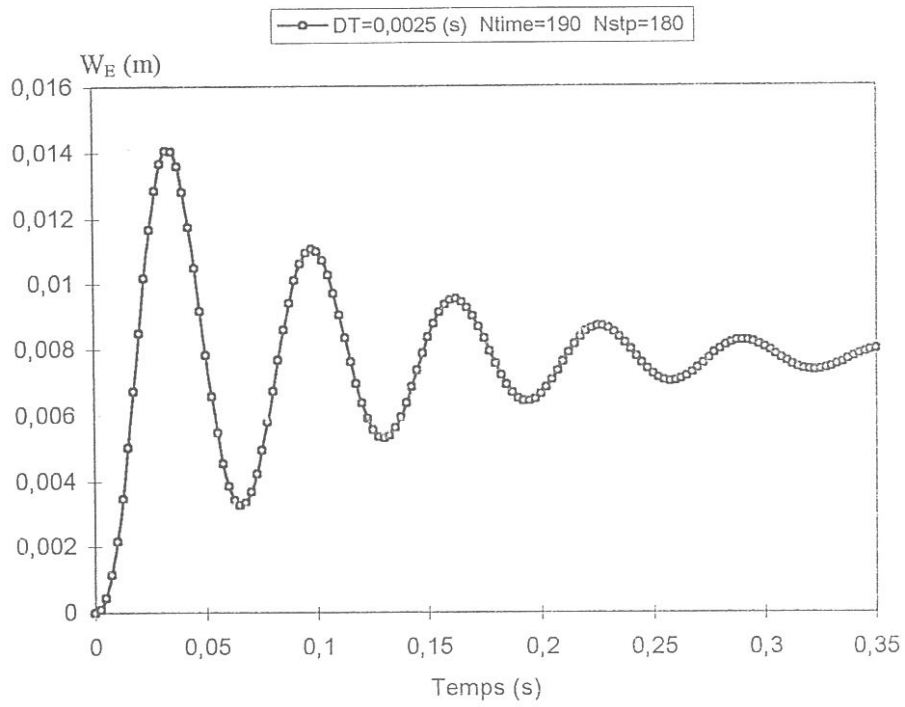


Fig. 4.35 : Réponse dynamique d'une plaque orthotrope amortie simplement appuyée sous charge échelon.

CONCLUSION

Cette analyse statique, dynamique des plaques isotropes et orthotropes comporte la formulation de la méthode des éléments finis, et l'élaboration d'un programme pour le calcul de la réponse, sous l'effet d'amortissement et de différents types de chargements impulsives.

Dans ce travail, nous abordons l'analyse dynamique linéaire, ce qui nous mène à la formulation du système d'équations différentielles du second ordre en utilisant le principe de Hamilton. Nous avons introduit la matrice d'amortissement (amortissement de Rayleigh) ; qui est une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité.

Les résultats obtenus nous révèlent certaines réalités indéniables. La résolution de nombreux problèmes statiques linéaires, montre clairement la convergence de nos résultats avec ceux de la littérature.

Les différentes analyses du comportement dynamique de plaques minces orthotropes et isotropes, nous ont permis de mettre en évidence :

- L'influence du maillage, conditions aux limites, l'incrément de temps et la forme géométrique sur la réponse de la plaque.
- L'influence de la valeur et de type de la charge appliquée, sur la réponse de la structure.
- L'influence de l'amortissement sur la réponse de la plaque; c'est à dire qu'après quelques périodes les résultats mènent vers une stabilité autour de la solution statique.

En définitif, nous pouvons conclure que les résultats de notre étude sont fort encourageant, car ils prouvent la validité et l'efficacité de nos hypothèses.

Signalons enfin que le développement proposé, quoique présenté dans le cadre particulier des plaques orthotropes rectilignes minces, peut aisément être généralisé à :

- L'analyse non linéaire des plaques orthotropes épaisses (prise en compte du cisaillement transversal) pour la réponse dynamique.
- L'étude des caractéristiques propres (fréquences et modes propres de vibration) des plaques épaisses avec différents cas des conditions aux limites.
- L'effet d'ouverture dans la plaque sur la réponse.

- Développement d'une méthode analytique pour la détermination de la réponse dynamique, fréquences et modes propres de vibration pour les plaques orthotropes épaisses.
- Extension de la méthode à l'analyse des plaques orthotropes courbes.

REFERENCES

- [1] Bares R., Massonnet C., « Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes », SNTL-Maison d'édition technique, Prague, 1966.
- [2] Bathe K.J., « Finite element procedures », Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [3] Batôz J.L., Dhatt G., «Modélisation des structures par éléments finis », Vol. 2, Hermès, Paris, Octobre 1990.
- [4] Belheine N., Guenfoud M., «Analyse linéaire statique et dynamique (transitoire) des plaques minces par éléments finis », Mémoire de magistère, Université Mentouri de Constantine, Janvier 2001.
- [5] Belheine N., Guenfoud M., « Influence d'un défaut géométrique sur le comportement dynamique des plaques minces », premier séminaire nationale de Génie Civil, Tebessa, 27 et 28 Mai 2001.
- [6] Clough R.W., Penzien J., «Dynamique des structures », Tome 1, Editions Pluralis, 1980.
- [7] Courtade R.M., Lemaire M., Cubaud J.C., « Déplacements, déformations et contraintes dans les matériaux élastiques anisotropes », Verre textile – plastiques renforcés, PP. 20-27, N° 4, Avril 1973.
- [8] Craveur J.-C., « Modélisation des structures Calcul par éléments finis », Masson, Paris, 1996.
- [9] Dhatt G., Touzot G., «Une présentation de la méthode des éléments finis », 2^{ème} Edition, Editeur Maloine S.A., paris, 1984.
- [10] Frey F., « Analyse des structures et milieux continus Mécanique des solides », Vol. 3, 1^{ère} édition, Lausanne, 1998.
- [11] Gallagher R.H., « Introduction aux éléments finis », Editions Pluralis, 1976.

- [12] Geoffroy P., « Développement et évaluation d'un élément fini pour l'analyse non linéaire statique et dynamique de coques minces », Thèse de Doct.-Ing., Université de Technologie de Compiègne, Avril 1983.
- [13] Han W.-S., « Analyse linéaire et non-linéaire de plaques et coques par éléments finis en statique et dynamique sur micro-ordinateur », Thèse de Doctorat, Institut National polytechnique de Lorraine, Juin 1989.
- [14] Imbert J.F., « Analyse des structures par éléments finis », 3^{ème} Edition, Editions Cépaduès, Toulouse, Janvier 1991.
- [15] Jones R. M., « Mechanics of composite materials », McGraw-Hill, Etats-Unis, 1975.
- [16] Lalanne M., Berthier P., Der Hagopian J., « Mécanique des vibrations linéaires », 2^{ème} édition, Masson, Paris, 1986.
- [17] Laroze S., « Résistance des matériaux et structures » , Tome 3, Masson, Paris, 1979.
- [18] Newmark N.M., « A method of computation for structural dynamics », ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, N°. EM3, PP. 67-94, 1959.
- [19] Prat M., Bisch P. et Mestat P., « La modélisation des ouvrages », Hermès, Paris, 1995.
- [20] Reddy J.N., « An introduction to the finite element method », Ed. Slaughter T.M., Hazlett S., McGraw-Hill, Etats-Unis, 1984.
- [21] Shi G. Bezine G., « A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems », Journal of composite materials, Vol. 22, PP. 694-716, Août 1988.
- [22] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., « Théorie des plaques et coques », Librairie Polytechnique CH. Béranger.
- [23] Techniques de l'ingénieur « Comportement élastique linéaire-Loi de Hooke », A7 750, PP. 5-18.

ANNEXE

ANNEXE A

A.1. Code de calcul et programmation

A.1.1. Organisation générale du programme

Le programme utilisé est une extension de celui qui figurait à l'origine dans le livre « An introduction to the finite element method », il est écrit en langage FORTRAN de manière assez standards pour être utiliser sur différents ordinateurs. Ce programme consiste en trois parties de base :

A.1.1.1. Préprocesseur

Lecture et génération des données (caractéristiques mécaniques et géométriques, maillage et conditions aux limites, indicateurs pour diverses options : imprimer ou non, analyse statique, analyse dynamique...).

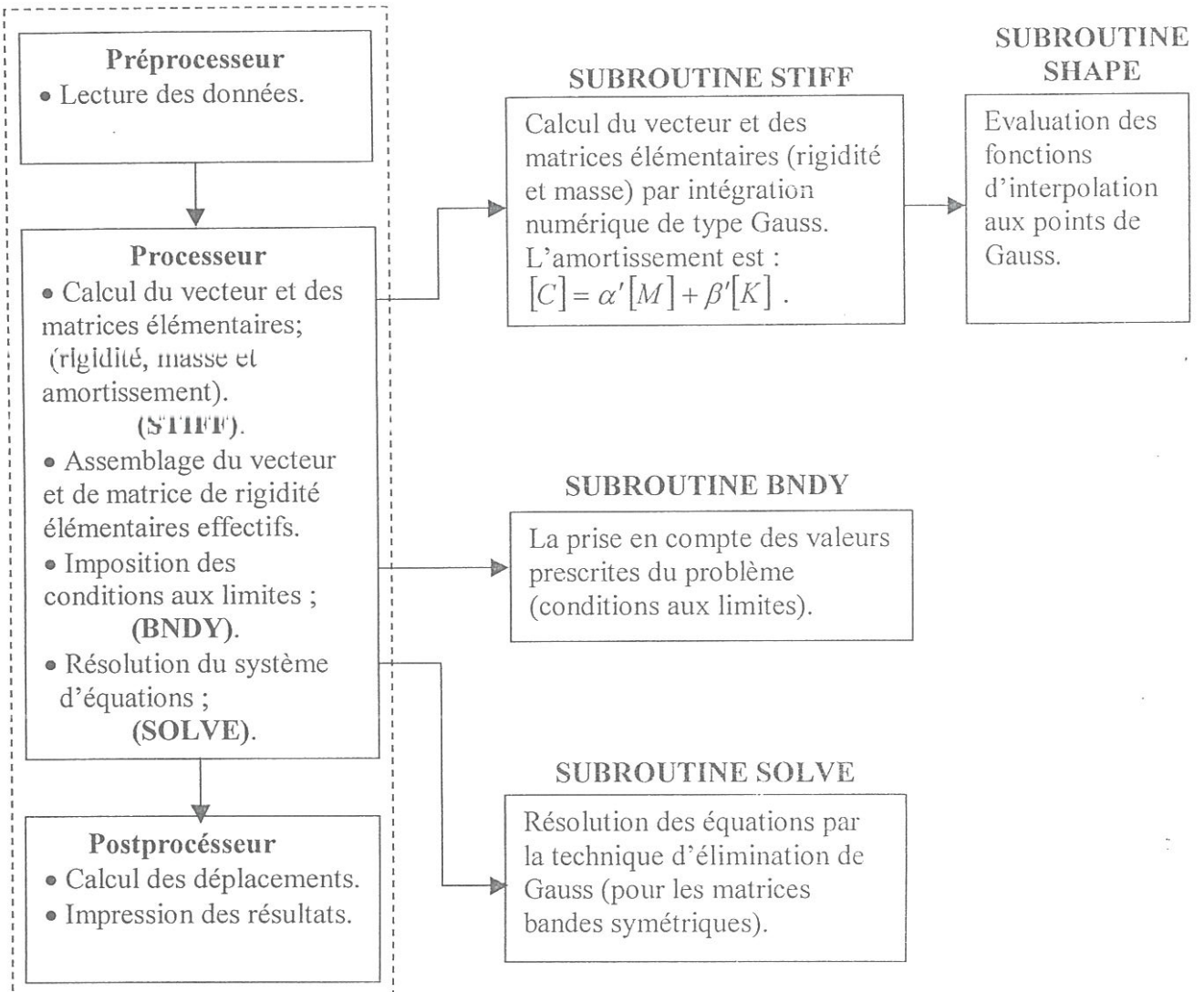
A.1.1.2. Processeur

Calcul des matrices et vecteurs élémentaires par intégration numérique, puis assemblage de ceux ci, imposition des conditions aux limites, et résolution du système d'équations.

A.1.1.3. Postprocesseur

Impression des résultats après un calcul de variables secondaires (contraintes).

PROGRAMME PRINCIPAL



STRUCTURE DE CODE DE CALCUL.

A.2. Description des variables utilisées dans le programme

A_1, \dots, A_5 : Constantes d'intégration numérique de Newmark.

A_k : Coefficient de correction.

ELP(I) : Vecteur force élémentaire.

GF(I) : Vecteur force global : vecteur solution d'après 'SOLVE'.

STIF : Matrice de rigidité élémentaire.

GSTIF : Matrice de rigidité globale (Matrice bande).

D(I,J) : Coefficients de la matrice de rigidité à la flexion.

NOD(I,J) : Matrice de connectivité.

IEL : Indicateur du type d'élément :

IEL = 1 : élément à 4 nœuds.

IEL = 2 : élément à 8 ou 9 nœuds.

NPE : Nombre de nœuds par élément :

NPE = 4 si : IEL = 1

NPE = 8 ou 9 si : IEL = 2

NEM : Nombre d'éléments dans le maillage.

NNM : Nombre de nœuds dans le maillage.

NX : Nombre de subdivisions le long de l'axe X.

NY : Nombre de subdivisions le long de l'axe Y.

DT : Incrément de temps dans l'analyse transitoire.

ITEM : Indicateur de type d'analyse :

ITEM = 0 analyse statique

ITEM = 1 analyse dynamique

NOZERO : Indicateur de conditions initiales pour l'analyse transitoire.

NSTP : Nombre de pas de temps, où la charge est annulée en analyse transitoire.

NTIME : Nombre de pas de temps en analyse transitoire.

NBDY : Nombre total de degrés de liberté bloqués.

IBDY : La rangée de déplacements bloqués.

VBDY : Valeurs de déplacements dans la rangée IBDY.

P_0 : Intensité de la charge répartie ou concentrée.

ANNEXE B

Tableau B₁ : Valeurs de l'amplitude maximum du déplacement normal w au centre E de la plaque en fonction du maillage et du pas du temps.

Δt (s)	0.005			0.0025		
Maillage	(4×4)	(6×6)	(12×12)	(4×4)	(6×6)	(12×12)
w.(10 ⁻² m) Présente étude	0.84208	0.84895	0.86952	0.85211	0.87407	0.88871
w.(10 ⁻² m) Newmark [12]	0.9222	0.8977	---	---	---	---

Tableau B₂: Valeurs de w_{\max} du nœud E en fonction du maillage et du type de support.

Maillage		(4×4)	(6×6)	(8×8)	(12×12)	(16×16)
$\Delta t = 0.005s$		Dép. Normal $w_E .(10^{-2} m)$	Dép. Normal $w_E .(10^{-2} m)$	Dép. Normal $w_E .(10^{-2} m)$	Dép. Normal $w_E .(10^{-2} m)$	Dép. Normal $w_E .(10^{-2} m)$
Cas A	Newmark (Q4)	0.85858	0.86662	0.88252	0.88659	0.88801
	Newmark (DKT) [4]	0.80853	0.85401	0.86588	---	0.88258
	HHT [4]	0.82756	0.86261	0.88344	---	0.89498
Cas B	Newmark (Q4)	---	---	---	0.27172	---
	HHT [4]	---	---	---	0.272	---

Cas A : appui simple ;

Cas B : encastrement.

Tableau B₃ : Valeurs de l'amplitude maximum du déplacement au centre de la plaque.

	Maillage (4×4)	Maillage (6×6)	Maillage (8×8)	Maillage (10×10)
$\Delta t = 0.0025$ s	Dép. normal $w_E \cdot (10^{-1} \text{ m})$	Dép. normal $w_E \cdot (10^{-1} \text{ m})$	Dép. normal $w_E \cdot (10^{-1} \text{ m})$	Dép. normal $w_E \cdot (10^{-1} \text{ m})$
Présente étude Newmark Q4	0.15923	0.16396	0.1672	0.16835
HHT (DKT) Réf. [4]	0.15631	0.15911	0.16648	0.1682

Tableau B₄ : Valeurs de L'amplitude maximum du déplacement normal w au centre de la plaque en fonction du pas du temps , du maillage, et le type de support.

	Maillage	(8×8)			(10×10)		
	Δt (s)	0.01	0.005	0.0025	0.01	0.005	0.0025
Cas A	$w_E \cdot (10^{-1} \text{ m})$ Newmark Q4	0.15608	0.1649	0.1672	0.15647	0.16524	0.16835
	$w_E \cdot (10^{-1} \text{ m})$ HHT réf. [4]	0.15255	0.16099	0.16648	0.15577	0.16478	0.1682
Cas B	$w_E \cdot (10^{-2} \text{ m})$ Newmark Q4	0.27329	0.31849	0.33084	0.28326	0.3221	0.33427
	$w_E \cdot (10^{-2} \text{ m})$ HHT réf. [4]	0.28188	0.30371	0.32349	0.28603	0.31535	0.32574

Cas A: appui simple;

Cas B : encastrement.

MOTS CLES

Eléments finis,
Chargement impulsif,
Intégration numérique.

Plaques minces orthotropes,
Réponse transitoire,

Plaques minces isotropes,
Amortissement,

RESUME

Les éléments de plaques en flexion jouent un rôle très important dans l'analyse de nombreux types de structures. La construction d'un modèle numérique simple et performant traduisant le comportement de ces éléments est une activité très importante.

On a présenté dans cette étude la formulation et l'évaluation d'un élément quadrilatère isoparamétrique à 4 nœuds (Q4) ; et à 3 degrés de liberté (d.d.l.) par nœud, pour l'analyse linéaire statique et dynamique de plaques minces élastiques orthotropes en flexion.

On a décrit également, une formulation de l'élément, fondée sur la théorie linéaire des plaques orthotropes ; (valable pour les petits déplacements, et petites déformations), et sur l'introduction des hypothèses cinématiques de Mindlin-Reissner qui tiennent compte de l'effet de cisaillement transversal. La matrice de rigidité linéaire est évaluée numériquement en utilisant la technique d'intégration numérique sélective. Quant au vecteur de sollicitation et à la matrice de masse, leur intégration est évaluée d'une manière exacte par des schémas de type Gauss (2x2).

Le noyau de notre thèse consiste en l'introduction de l'amortissement de Rayleigh ; qui est une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité, et à la prise en compte de trois types de charges impulsives : rectangulaire, triangulaire et sinusoïdale.

La prise en compte des forces d'inerties et des sollicitations dynamiques conduit à la définition d'un système d'équations différentielles du second ordre. Pour la résolution de ce système, la méthode d'intégration directe de Newmark est utilisée.

Les résultats obtenus par le présent code, sur de nombreux exemples sont comparés à des résultats analytiques, ou numériques ; prouvant ainsi la fiabilité et l'efficacité de l'élément utilisé.

SUMMARY

Elements of plates in bending have a very important role in analysis of many types of structures. The construction of a simple and effective numeric model translating the behaviour of these elements is a very important activity.

We have presented in this study, the formulation and evaluation of a quadrilateral isoparametric elements with for nodes(Q4), and three freedom by node, for both static and dynamic linear analysis of thin elastic plates in bending.

We have also described, a formulation of the elements, based on : the linear theory of orthotropic plates ; (valid for small displacements and small deformations), and on the introduction of hypotheses of Mindlin-Reissner, which take account the transverse shearing effect. The linear stiffness matrix is evaluated numerically by using the technique of selective numeric integration. As for the force vector and to the masse matrix, their integration is evaluated with an exact manner by scheme of gauss type.

The core of tesis consist in the introduction of rayleigh damping ; which is a linear combination of mass and stiffness matrix, and to take account of three types of impulsive load : rectangular, triangular and sinusoidal.

Taking account the inertial forces and dynamic sollicitations conduct to the definition of second order diferential equations system. For the resolution of this system, a direct integration method of Newmark is used.

Results obtained on many examples are compared to analytic or numerical results, proving so reliability and the offloolony of the element used.

خلاصة

تلعب العناصر الصفيحية في حالة انحناء دورا مهما في تحليل العديد من أنواع الهياكل. إن تكوين نموذج عددي بسيط وفعال يترجم تصرف هاته العناصر لعمل ذو أهمية كبيرة .

قدمنا من خلال هذه المذكرة صياغة و تقييم عنصر رباعي متمائل الوسيط (isoparamétrique) ذو أربع عقد، و ثلاث درجات حرة للعقدة، من أجل التحليل الخطي السكوني والحركي للصفائح الرقيقة المرنة (plaques orthotropes) في حالة انحناء . لقد وصفنا أيضا، صياغة العنصر التي تعتمد على النظرية الخطية للصفائح (Plaques Orthotropes) ; (الصالحة للانتقالات والتشوهات الصغيرة)، وعلى إدخال فرضيات مندلين غيسنر (Mindlin Reissner) التي تأخذ بعين الاعتبار مفعول القص العرضي. مصفوفة الصلابة الخطية قدرت عدديا باستعمال تقنية التكامل العددي الإختياري. أما بانسبة لشعاع الإثارة ومصفوفة الكتلة، فإن تكاملهم قدر بطريقة دقيقة عن طريق تكامل غوص (Gauss) (2x2).

نواة هاته المذكرة يتضمن: في إدخال تخامد رايلي (Amortissement de Rayleigh) الذي هو تآلف خطي بين مصفوفة الكتلة ومصفوفة الصلابة، و على الأخذ بعين الإعتبار لثلاثة أنواع من الأحمال الإندفاعية : رباعية ، ثلاثية و جيبية . الأخذ بعين الإعتبار لقوى العطالة و الإثارات الحركية يؤدي إلى تعريف نظام معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية . لحل هذا النظام استعملت طريقة التكامل المباشر لنيومارك (Newmark).

النتائج المتحصل عليها من خلال هذا البرنامج، على العديد من الأمثلة فوراً، يتأرجح تحاريرة او حديدية، مبيته بذلك فعالية ونهاية المنس المدرس.