

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



## Thèse de Doctorat

Présentée à l'Université 8 Mai 45 de Guelma  
Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénierie  
Département de Génie civil

Spécialité : Génie Civil

par

**BOUZIANE Salah**

Sujet de thèse

### Elément fini mixte pour les interfaces fissurées des bimatériaux anisotropes

Sous la direction de Prof. Guenfoud Mohamed

#### JURY

Dr : Benmarce Abdelaziz	Université de Guelma	Président
Prof : Guenfoud Mohamed	Université de Guelma	Rapporteur
Dr : Nafa Z/Eddine	Université de Guelma	Examinateur
Dr : Lessoued Rachid	Université de Constantine	Examinateur
Dr : Benmansour Toufik	Université de Constantine	Examinateur
Dr : Belounar Lamine	Université de Biskra	Examinateur

## ***Remerciements***

*Qu'il me soit permis d'adresser, tout d'abord mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur GUENFOUD Mohamed, Professeur à l'université 8 Mai 45 de Guelma qui a dirigé cette thèse avec beaucoup de rigueur scientifique, pour l'intérêt constant qu'il a manifesté et pour les conseils et les remarques précieux qu'il a donnés tout au long de ce travail.*

*Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur BOUZERD Hamoudi, Maître de Conférences à l'université du 20 Aout 55 de Skikda, qui a accepté de codiriger cette thèse avec une disponibilité permanente, pour l'aide permanente qu'il m'a prodiguée et pour les conseils et les remarques précieux qu'il a donnés durant ce travail.*

*Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur BENMARCE Abdelaziz, Maître de Conférences à l'université 8 Mai 45 de Guelma, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.*

*Messieurs NAFA Zahr Eddine, Maître de Conférences à l'université de Guelma, LESSOUED Rachid, Maître de Conférences à l'université de Constantine, BENMANSOUR Toufik, Maître de Conférences à l'université de Constantine, BELOUNAR Lamine, Maître de Conférences à l'université de Biskra, m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail et de participer au jury. Je les remercie chaleureusement.*

*Je veux aussi exprimer mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

**ملخص:**

الإهتمام المتزايد للإنهايار على مستوى الحدود الفاصلة بين المواد يعود أساساً إلى التطبيقات المباشرة له في المواد المركبة. بالفعل هذه المواد تشكل حالياً مركباً أساسياً في المجال الصناعي. هذا الإهتمام بهذه المواد في تصميم الهياكل قد إلى ضرورة توفر طرق علمية للتحليل قادرة على أخذ بعين الاعتبار خصوصية هذه المواد.

في هذه الدراسة قمنا بإقتراح عنصر متاهي مختلط و ذلك إنطلاقاً من عنصر مرتع في مستوى طبيعي. إنشاء هذا العنصر كان إنطلاقاً من مبدأ التغيرات لريزнер و ذلك لتقديم الشكل النهائي للعنصر.

هذا العنصر المقترن تم إدماجه مع طريقة الإمتداد الإفتراضي للإنشقاق لحساب معامل إستعادة الطاقة.

من أجل التأكيد من فعالية العنصر قمنا بدراسة مجموعة الأمثلة التي لها علاقة بالإنهيار عند الحدود الفاصلة للمواد موحدة أو غير موحدة الخواص.

النتائج المتحصل عليها تتطابق بشكل كبير مع النتائج النظرية و الرقمية بالنسبة لباحثين آخرين.

**الكلمات المفتاحية:**

عنصر متاهي مختلط، حد فاصل، معامل إستعادة الطاقة، التمدد الإفتراضي للإنشقاق، المواد ذات خواص غير موحدة.

**Abstract:**

The growing interest for the interfacial fracture of bimaterials is related to its direct applications to composite materials. Indeed, the composite materials became significant structural component in the industrial field. This interest for these components in the structural design led to a need for powerful tools of analysis, able to take into account their specificities correctly.

In this work we proposed a formulation of an interface mixed element starting from a parent element in a natural plan. The Reissner variational principle constituted the base of construction of the parent element from which we worked out the final configuration of the interface element. This element was associates to the virtual crack extension method to evaluate the energy release rate. We treated several examples of applications to validate and to study the convergence of the proposed element. These examples relate to primarily the interfacial fracture of isotropic and anisotropic bimaterials. The comparisons carried out show a very good agreement with the results of the analytical and numerical solutions.

**Keywords:** Mixed finite element - Interface - Energy release rate - Virtual crack extension - Anisotropic bimaterials.

**Résumé :**

L'intérêt grandissant pour la mécanique de la rupture interfaciale des bimatériaux est lié à ses applications directes aux matériaux composites. En effet, les matériaux composites sont devenus un composant structural important dans le domaine industriel. Cet intérêt croissant pour ces composantes dans la conception des structures a conduit à un besoin d'outils d'analyse puissants, capables de prendre en compte correctement leurs spécificités.

Dans ce travail nous avons proposé une formulation d'un élément d'interface mixte à partir d'un élément de référence dans un plan naturel. Le principe variationnel de Reissner a constitué la base de construction de l'élément de référence à partir duquel nous avons élaboré la configuration finale de l'élément d'interface. Cet élément a été associé à la méthode d'extension virtuelle de fissure pour déterminer le taux de restitution d'énergie. Nous avons traité plusieurs exemples d'applications pour valider et étudier la convergence de notre élément. Ces exemples concernent essentiellement les structures fissurées constituées de bimatériaux isotropes et anisotropes.

Les comparaisons effectuées montrent une très bonne concordance avec les résultats des solutions analytiques et numériques.

**Mots clés :** Elément fini mixte - Interface - taux de restitution d'énergie - Extension virtuelle de fissure - Bimatériaux anisotropes.

# Table de matières

## Liste des figures

## Liste des tableaux

<b>Introduction</b>	1
<b>Chapitre 1 : Interfaces et matériaux anisotropes</b>	5
1.1. Introduction	6
1.2. Problèmes d'interface	6
1.2.1. Définition	6
1.2.2. Interface cohérente	7
1.2.2.1. Relation de cohérence géométrique	8
1.2.2.2. Relation d'équilibre mécanique	8
1.2.3. Interface fissurée	8
1.2.3.1. Relations mécaniques et géométriques à travers une interface fissurée	9
1.2.3.2. Modes élémentaires de rupture	10
1.3. Matériaux anisotropes	12
1.3.1. Définition	12
1.3.2. Relation contrainte-déformation dans un milieu anisotrope	12
<b>Chapitre 2 : Formulation de l'élément d'interface</b>	16
2.1. Introduction	17
2.2. Etat de l'art sur les modèles éléments finis mixtes	17
2.3. Méthodes de formulation des éléments finis	19
2.3.1. Formulation à un seul champ	20
2.3.2. Formulation à deux champs	20
2.4. Fonctionnelle de Reissner	21
2.5. Formulation de l'élément d'interface	25
2.5.1. Elément mixte de Reissner	26

2.5.2. Elément de référence RMQ-5	30
2.5.3. Construction de l'élément RMQ-11	32
2.5.4. Construction de l'élément RMQ-7	36
2.5.5. Construction de l'élément d'interface RMQ-7 inversé	39
<b>Chapitre 3 : Tests de convergence et de validation de l'élément d'interface</b>	<b>42</b>
3.1. Introduction	43
3.2. Critères de convergence	43
3.3. Etude des valeurs et vecteurs propres	44
3.4. Tests de représentation d'états homogènes	46
3.4.1. Test sur un élément RMQ-7	47
3.4.2. Test sur deux éléments RMQ-7 assemblés	50
3.5. Test de convergence d'une poutre plane	53
3.5.1. Définition de la poutre	53
3.5.2. Maillage de la poutre	54
3.5.3. Résultat numériques et commentaires	54
3.5.4. Test de convergence	55
3.5.5. Poutre console avec des éléments déformés	56
3.5. Poutre sandwich	57
3.5.1. Définition de la poutre sandwich	57
3.5.2. Maillage de la poutre sandwich	58
3.5.3. Résultats et discussion	58
3.5.3.1. Etude de la convergence de la flèche	59
3.5.3.2. Convergence de la contrainte de cisaillement transversal	60
3.5.3.3. Etude du déplacement horizontal	61
<b>Chapitre 4 : Rupture interfaciale des bimatiériaux anisotropes</b>	<b>62</b>
4.1. Introduction	63
4.2. Rupture d'un matériau homogène	64
4.2.1. Notions et concepts de base	64

4.2.1.1. Rupture fragile et rupture ductile	64
4.2.1.2. Facteur de concentration des contraintes	66
4.2.1.3. Facteur d'intensité de contraintes	67
4.2.2. Méthodes de résolution d'un problème de rupture	68
4.2.2.1. Approches directes	68
4.2.2.2. Approches énergétiques	70
4.3. Rupture interfaciale	72
4.4. Rupture des bimatériaux anisotropes	74
4.4.1. Introduction	74
4.4.2. Facteurs d'intensité des contraintes	75
4.4.3. Taux de restitution d'énergie	77
4.5. Calcul numérique du taux de restitution d'énergie	78
4.5.1. Méthodes de calcul de G	78
4.5.1.1. Calcul par avancée réelle de fissure	78
4.5.1.2. Méthode de l'intégrale de J	78
4.5.1.3. Calcul par avancée virtuelle de fissure	79
4.5.1.4. Méthode $G\theta$	79
4.5.1.5. Méthode de découplage des modes	80
4.5.2. Comparaison des différentes méthodes	80
4.5.2. Association de la méthode d'extension virtuelle de fissure à l'élément RMQ-7	80
<b>Chapitre 5 : Exemples d'applications</b>	83
5.1. Introduction	84
5.2. Poutre sandwich avec peaux orthotropes	85
5.2.1. Définition du problème	85
5.2.2. Maillage de la poutre sandwich	85
5.2.3. Résultats et discussion	86
5.2.3.1. Convergence de la flèche	86
5.2.3.2. Convergence de la contrainte de cisaillement transverse	87
5.2.3.3. Convergence du déplacement horizontal	88
5.3. Bimatiériaux isotropes fissurés le long de l'interface	90
5.3.1. Définition du problème	90

5.3.2. Maillage de la plaque	91
5.3.3. Résultats et discussion	91
5.4. Rupture interfaciale d'un bimatiéria anisotrope	95
5.4.1. Définition du problème	95
5.4.2. Maillage utilisé	96
5.4.3. Résultats et discussion	96
<b>Conclusion</b>	100
<b>Références</b>	

## Liste des figures

### Chapitre 1:

**Figure 1.1 :** Interface entre deux solides différents

**Figure 1.2 :** Vecteurs contraintes à l'interface

**Figure 1.3 :** Milieu fissurée

**Figure 1.4 :** Fissure interfaciale dans un bimatiériaux élastique

**Figure 1.5 :** Vecteurs contraintes sur les lèvres d'une interface fissurée

**Figure 1.6 :** Modes de fissuration

**Figure 1.7 :** Représentation des contraintes – Rotation des axes

### Chapitre 2:

**Figure 2.1:** Conditions aux limites mixtes dans une structure

**Figure 2.2:** Etapes de construction de l'élément RMQ-7

**Figure 2.3:** Elément de Reissner

**Figure 2.4:** Elément de référence RMQ-5

**Figure 2.5:** Elément RMQ-11

**Figure 2.6:** Elément RMQ-7

**Figure 2.7:** Deux éléments RMQ-7 assemblés

**Figure 2.8:** Elément RMQ-7 inversé et élément de référence

### Chapitre 3:

**Figure 3.1:** Un élément RMQ-7 soumis à chargement  
de traction uniforme (interface//x)

**Figure 3.2:** Un élément RMQ-7 soumis à chargement  
de traction uniforme (interface//y)

**Figure 3.3:** Un élément RMQ-7 inversé soumis à chargement  
de traction uniforme (interface//x)

**Figure 3.4:** Un élément RMQ-7 soumis à chargement  
de cisaillement pur (interface//x)

**Figure 3.5:** Un élément RMQ-7 soumis à chargement

de cisaillement pur (interface//y)

**Figure 3.6:** Deux éléments RMQ-7 assemblés soumis à chargement

traction uniforme (interface//x)

**Figure 3.7:** Deux éléments RMQ-7 assemblés (un inversé) soumis à chargement

de traction uniforme (interface//x)

**Figure 3.8:** Deux éléments RMQ-7 assemblés (inversés) soumis à chargement

de traction uniforme (interface//x)

**Figure 3.9:** Deux éléments RMQ-7 assemblés soumis à chargement

de cisaillement pur (interface//x)

**Figure 3.10:** Deux éléments RMQ-7 assemblés (un inversé) soumis à chargement

de cisaillement pur (interface//x)

**Figure 3.11 :** Définition de la poutre

**Figure 3.12:** Maillage de la poutre

**Figure 3.13:** Convergence de la flèche de la poutre console

**Figure 3.14:** Maillage 1

**Figure 3.15:** Maillage 2

**Figure 3.16 :** La poutre sandwich analysée

**Figure 3.17:** Maillage -1- de la poutre sandwich

**Figure 3.18:** Maillage -2- de la poutre sandwich

**Figure 3.19:** Convergence de la flèche à mi-portée de la poutre sandwich

**Figure 3.20:** Convergence de la contrainte de cisaillement transversal ( $x=L/4$  et  $y=-h/2$ )

## Chapitre 4:

**Figure 4.1 :** Défaut elliptique dans une plaque infinie

**Figure 4.2 :** Système d'axes dans le corps fissuré

**Figure 4.3 :** Plaque infinie en traction simple selon y

**Figure 4.4 :** Intégrale de contour ( $J$ )

**Figure 4.5 :** Interface fissurée entre deux matériaux soumis aux contraintes normale  
et transverse

**Figure 4.6 :** Maillage d'une structure bimatiériaux fissurée

**Chapitre 5:**

**Figure 5.1 :** La poutre sandwich analysée

**Figure 5.2 :** Maillage 3 de la poutre sandwich

**Figure 5.3:** Convergence de la flèche à mi-portée de la poutre sandwich

**Figure 5.4:** Convergence de la contrainte de cisaillement transversal ( $x=L/8$  et  $z=h_c/2$ )

**Figure 5.5:** Convergence du déplacement horizontal ( $x=L/4$  et  $z=h_c/2$ )

**Figure 5.6:** Plaque biméthériau fissurée

**Figure 5.7:** Maillage de la plaque

**Figure 5.8:** Elément RMO-7

**Figure 5.9:** Fissure interfaciale d'un biméthériau anisotrope infini

**Figure 5.10:** Maillage utilisé

**Figure 5.11:** Variation de  $\frac{G}{K\sqrt{\pi a}}$  en fonction  $\alpha_2$  - Cas d'anisotropie 1 ( $\alpha_1=0$ )-

**Figure 5.12:** Variation de  $\frac{G}{K\sqrt{\pi a}}$  en fonction  $\alpha_1$  - Cas d'anisotropie 2 ( $\alpha_2=0$ )-

## Liste des tableaux

### Chapitre 2:

**Tableau 2.1:** Points d'intégration et coefficients de pondération de Gauss

### Chapitre 3:

**Tableau 3.1:** Les valeurs propres pour différents types d'éléments

**Tableau 3.2:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour un élément (traction uniforme) – Cas 1

**Tableau 3.3:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour un élément (traction uniforme) – Cas 2

**Tableau 3.4:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour un élément (traction uniforme) – Cas 3

**Tableau 3.5:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour un élément (cisaillement pur) – Cas 1

**Tableau 3.6:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour un élément (cisaillement pur) – Cas 2

**Tableau 3.7:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour deux éléments assemblés (traction uniforme) – Cas 1

**Tableau 3.8:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour deux éléments assemblés (traction uniforme) – Cas 2

**Tableau 3.9:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour deux éléments assemblés (traction uniforme) – Cas 3

**Tableau 3.10:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour deux éléments assemblés (cisaillement pur) – Cas 1

**Tableau 3.11:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour deux éléments assemblés (cisaillement pur) – Cas 2

**Tableau 3.12:** Comparaison des divers types d'éléments pour une poutre console en flexion

**Tableau 3.13:** Flèche au point A en fonction de degrés de liberté

**Tableau 3.14:** Flèche d'une poutre console – Maillage 1

**Tableau 3.15:** Flèche d'une poutre console – Maillage 2

**Tableau 3.16:** Valeurs de la flèche au centre de la poutre( $x=L/2$ ) en fonction du nombre des degrés de liberté

**Tableau 3.17:** Valeurs de  $\sigma_{12}$  suivant l'épaisseur l'abscisse  $x=L/4$  en fonction du nombre des degrés de liberté

**Tableau 3.18:** Valeurs de  $u_1$  suivant l'épaisseur à l'abscisse  $x=L/4$  en fonction du nombre des degrés de liberté

## Chapitre 5:

**Tableau 5.1:** Valeurs de la flèche au centre de la poutre( $x=L/2$ ) en fonction du nombre des degrés de liberté

**Tableau 5.2:** Valeurs de  $\sigma_{12}$  suivant l'épaisseur l'abscisse  $x=L/8$  en fonction du nombre des degrés de liberté

**Tableau 5.3:** Valeurs de  $u_1$  suivant l'épaisseur à l'abscisse  $x=L/4$  en fonction du nombre des degrés de liberté

**Tableau 5.4:** Comparaison des valeurs du taux de restitution d'énergie  $G$

**Tableau 5.5:** Différentes valeurs du taux de restitution d'énergie  $G$

**Tableau 5.6:** Taux de restitution d'énergie pour différentes valeurs de  $\frac{\Delta a}{a}$

**Tableau 5.7:** Comparaison des résultats obtenus pour les cas d'anisotropie 1 ( $\alpha_1=0$ )

**Tableau 5.8:** Comparaison des résultats obtenus pour les cas d'anisotropie 2 ( $\alpha_2=0$ )

## **Introduction**

## Introduction

Les désordres observés sur un ouvrage de génie civil existant, trouvent souvent leur origine dans des phénomènes locaux qui mettent en évidence les points faibles de cet ouvrage. Ces zones critiques sont situées, d'une part au niveau des liaisons entre matériaux, ou interfaces, d'autre part au voisinage immédiat des singularités de forme telles que les cavités, les angles, les fissures, sièges de fortes concentrations de contraintes.

L'objet de ce travail est d'utiliser la méthode des éléments finis (formulation mixte) pour l'approche des problèmes de fissuration au niveau de l'interface entre deux matériaux anisotropes. L'étude spécifique des interfaces est d'un intérêt capital pour les matériaux composites en général, car elle représente une zone vulnérable qui peut mener, si elle n'est pas bien connue et maîtrisée à des drames catastrophiques pour l'être humain et notamment dans l'aéronautique où les matériaux composites sont de plus en plus utilisés pour leur bon rapport résistance/poids.

Un élément spécial basé sur le principe variationnel mixte de Reissner est présenté pour modéliser au mieux l'interface entre deux matériaux. C'est un élément fini mixte bidimensionnel à 7 nœuds avec 5 nœuds déplacement et 2 nœuds contrainte. Cet élément d'interface assure la continuité des vecteurs déplacement et contrainte sur la partie cohérente (cohérence géométrique et équilibre mécanique) et la discontinuité de celle-ci sur la partie fissurée (l'effet de bord).

Cet élément a été développé par Bouzerd [1] en utilisant une formulation directe, c'est-à-dire : les fonctions de forme des champs cinématique et statique sont construites directement à partir de la configuration réelle de l'élément en se plaçant dans un repère global ( $x, y$ ).

Dans cette étude, cet élément a été reformulé à partir d'un élément de référence dans un repère naturel ( $\xi, \eta$ ). Cette formulation présente l'avantage de simplifier les calculs et de pouvoir générer des éléments quadrilatères quelconques. Le passage à la formulation

isoparamétrique est nécessaire pour prendre en considération l'orientation et la forme des interfaces.

Dans ce travail, un élément fini mixte d'interface est construit à partir d'un élément de référence. Cet élément d'interface a été associé à la méthode d'extension virtuelle de fissure pour évaluer le taux de restitution d'énergie dans les structures fissurées constituées de matériaux anisotropes.

L'étude comprend cinq chapitres :

Le premier chapitre commence par une présentation des problèmes d'interface et les relations de continuités des champs de déplacements et de contraintes à travers une interface cohérente ainsi que les relations géométrique et mécanique en présence d'une fissure à travers une interface. Nous passons ensuite à la présentation des matériaux anisotropes avec les relations contrainte-déformation décrivant le comportement élastique d'un matériau anisotrope.

Le deuxième chapitre est consacré au développement des différentes étapes de formulation isoparamétrique de l'élément d'interface mixte. Nous rappelons les différentes méthodes de formulation des éléments finis. Nous donnerons ensuite, une présentation du principe d'Hellinger-Reissner qui constitue la base de formulation de l'élément proposé. Enfin, nous développerons en détails les différentes phases de construction de l'élément d'interface à partir d'un élément de référence dans un plan naturel. Au départ, on part de l'élément de Reissner complet, en passant par l'élément de référence RMQ-5 et l'élément RMQ-11 obtenu par la technique de relocalisation et on termine par la version finale de l'élément RMQ-7 développé en utilisant la procédure de condensation statique.

Le troisième chapitre est réservé à l'étude de convergence et de validation de l'élément d'interface proposé. Les différents critères de convergence des éléments mixtes ont été vérifiés. Une étude des valeurs et vecteurs propres avec un test de représentation d'états homogènes a été faite. D'un point de vue pratique, on a analysé la convergence de la flèche pour une poutre console homogène. Une étude de convergence de la flèche et de la contrainte

transverse d'une poutre sandwich, présentant une interface cohérente entre ses couches, est présentée à la fin de ce chapitre.

Dans le quatrième chapitre les concepts de la mécanique linéaire de la rupture sont présentés pour les matériaux homogènes et les bimatériaux. Ces concepts sont ensuite adaptés à la rupture interfaciale entre deux matériaux isotropes et aux bimatériaux anisotropes. Il a été aussi procédé à une revue des différentes méthodes numériques utilisées pour la détermination du taux de restitution d'énergie et essentiellement la méthode d'extension virtuelle de fissure.

Le cinquième chapitre consacré à l'étude des exemples d'application pour valider la formulation isoparamétrique de l'élément d'interface présenté. Ces exemples traitent essentiellement des structures fissurées constituées soit de bimatériaux isotropes soit de bimatériaux anisotropes.

Dans la conclusion on met en relief l'intérêt et l'avantage que peut présenter l'élément d'interface mixte développé à partir d'une formulation isoparamétrique pour les applications pratiques de la rupture interfaciale et les perspectives pour l'avenir.

# **Chapitre 1**

## **Interfaces et matériaux anisotropes**

## Chapitre 1

# Interfaces et matériaux anisotropes

### 1.1) Introduction :

La simulation des conditions de contact est un problème très intéressant du génie civil, de la construction mécanique et de l'aéronautique, qu'il s'agit d'un problème de contact entre deux matériaux différents, de fissures dans les structures ou au niveau des interfaces entre solides. Nous ne pouvons pas se permettre de négliger les mouvements relatifs aux interfaces de contacts.

Dans ce premier chapitre, il a été jugé nécessaire de présenter la base de l'étude des problèmes d'interface qu'elle soit cohérente ou fissurée. Cette étude est complétée par une présentation des matériaux anisotropes avec les relations décrivant leur comportement.

### 1.2) Problèmes d'interface:

#### 1.2.1) Définition :

Une interface est la zone de contact entre deux solides S1 et S2 constitués de deux matériaux M1 et M2 de propriétés thermomécaniques différentes (figure 1.1).

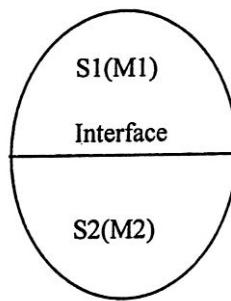


Figure 1.1 : Interface entre deux solides différents

Sur le plan géométrique, l'interface est définie par une surface de contact de normal  $\vec{n}$  en un point, et correspondant à la surface moyenne du volume des zones perturbées.

Sur le plan mécanique, l'existence du contact se caractérise par certaines relations entre les composantes normale et tangentielle de la contrainte s'exerçant sur une facette portée par la

surface moyenne. Associé à cet état de contrainte, apparaît ce qui nous désignons par un déplacement relatif des points P1 et P2 appartenant respectivement aux solides S1 et S2 (figure 1.2) dans les deux directions. Les points P1 et P2 ont initialement les mêmes coordonnées.

Dans ce travail, l'intérêt est plus particulièrement porté à l'étude des interfaces fissurées. Avant de voir les relations mécaniques et géométriques en présence d'une fissure à travers une interface, un rappel des relations de continuité à travers une interface cohérente est présenté.

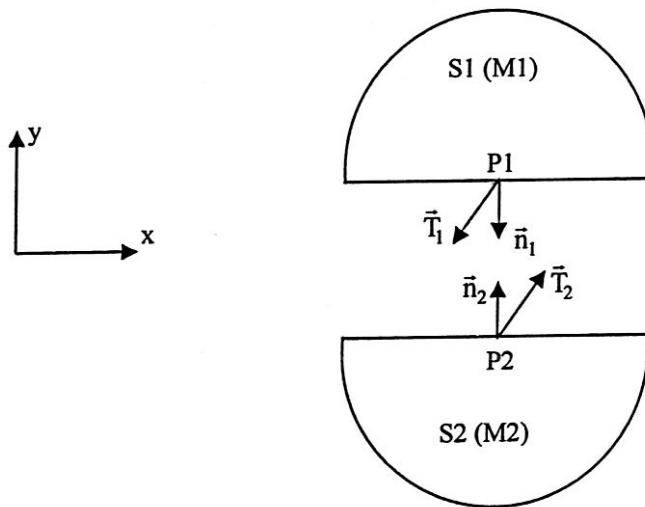


Figure 1.2 : Vecteurs contraintes à l'interface

### 1.2.2) Interface cohérente :

Une interface est considérée comme parfaitement cohérente si tous les points de part et d'autre de celle-ci sont intimement liés, et le restent après sollicitations.

Les interfaces cohérentes transmettent les déplacements et les efforts, les déplacements de deux points de part et d'autre de l'interface sont identiques, c'est ce qui traduit la cohésion géométrique.

### 1.2.2.1) Relations de cohérence géométrique :

La continuité du vecteur déplacement à travers l'interface s'écrit :

$$u_1(P_1) = u_1(P_2) \quad (1.1)$$

$$u_2(P_1) = u_2(P_2) \quad (1.2)$$

### 1.2.2.2) Relations d'équilibre mécanique:

La transmission des efforts se traduit par la continuité du vecteur contrainte à travers l'interface :

$$\vec{T}_1(P_1) = \vec{T}_2(P_2) \quad (1.3)$$

Dans le cas plan, cette relation de continuité du vecteur contrainte se traduit par :

$$[\sigma_{ij}(P_1) - \sigma_{ij}(P_2)]n_j = 0 \quad (1.4)$$

Dans le cas d'une interface rectiligne, une forme plus réduite de l'expression (1.4) est considérée :

$$\sigma_{12}(P_1) = \sigma_{12}(P_2) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{22}(P_1) = \sigma_{22}(P_2) \quad (1.6)$$

### 1.2.3) Interface fissurée :

Une fissure est une séparation locale irréversible d'un milieu initialement continu en deux parties situées de part et d'autre d'une surface matérielle ( $S$ ). Lorsque la séparation est effective, la surface ( $S$ ) se décompose en deux lèvres  $S^+$  et  $S^-$  qui délimitent un espace vide (figure 1.3).

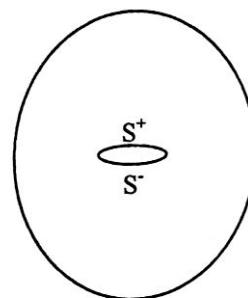
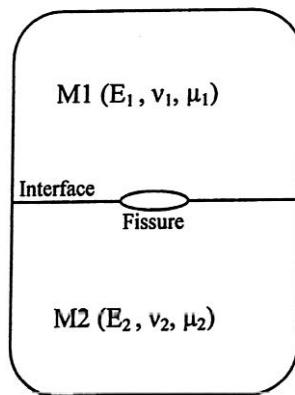


Figure 1.3 : Milieu fissurée

Le cas d'une interface fissurée d'un bimatiériaux élastique linéaire est montré sur la figure 1.4.



**Figure 1.4 : Fissure interfaciale dans un bimatiériaux élastique**

Une sollicitation de traction fait apparaître un champ de déplacement continu dans la partie cohérente et un champ discontinu sur la partie fissurée.

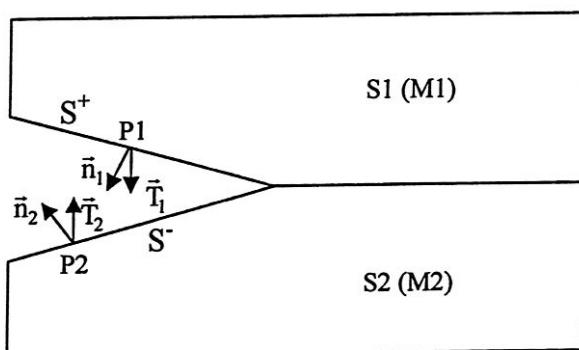
La discontinuité du champ déplacement pour un point quelconque P de S est estimée par l'expression :

$$u(P) = u^+(P) - u^-(P) \quad (1.7)$$

où  $u^+$  (respectivement  $u^-$ ) correspond au déplacement du point P considéré comme faisant partie de la lèvre supérieure  $S^+$  (respectivement la lèvre inférieure  $S^-$ ).

#### 1.2.3.1) Relations mécaniques et géométriques à travers une interface fissurée :

Considérons une interface fissurée dans un bimatiériaux ( $M_1$  et  $M_2$ ).



**Figure 1.5 : Vecteurs contraintes sur les lèvres d'une interface fissurée**

Le long des lèvres de la fissure l'effet bord libre s'écrit :

$$\vec{T}_1(P_1) = \vec{T}_2(P_2) = \vec{0} \quad (1.8)$$

où

$$\sigma_{ij}(P_1)n_j^+ = \sigma_{ij}(P_2)n_j^- = 0 \quad (1.9)$$

Dans le cas plan, si les lèvres de fissure sont le long de x, une forme plus réduite de l'expression (1.8) est obtenue :

- pour le point  $P_1$  de  $S^+$

$$\sigma_{12}(P_1) = \sigma_{22}(P_1) = 0 \quad (1.10)$$

- pour le point  $P_2$  de  $S^-$

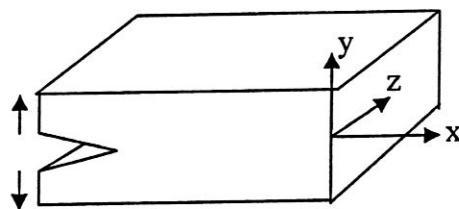
$$\sigma_{12}(P_2) = \sigma_{22}(P_2) = 0 \quad (1.11)$$

### 1.2.3.2) Modes élémentaires de fissuration :

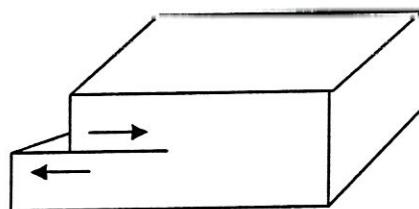
D'un point de vue macroscopique, on peut considérer deux modes principaux de rupture : la rupture plate et la rupture inclinée. La rupture plate correspond à une surface de rupture globalement perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale. La rupture inclinée dans le sens transversal par rapport à la direction de propagation s'accompagne souvent de grandes déformations [2].

On montre que toute fissuration peut être ramenée à l'un des trois modes simples ou à leur superposition. Il existe donc trois modes de fissuration élémentaires :

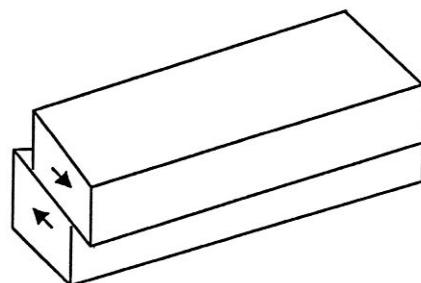
- a) **Mode I** : Mode d'ouverture de la fissure, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation.
- b) **Mode II** : Mode de cisaillement dans le plan où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation.
- c) **Mode III** : Mode de cisaillement hors du plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles au fond de la fissure.



Mode I : Ouverture (Opening mode)



Mode II : Glissement plan (Shearing mode)



Mode III : Glissement antiplan (Tearing mode)

Figure 1.6 : Modes de fissuration

### 1.3) Matériaux anisotropes:

#### 1.3.1) Définition :

Un matériau dont les propriétés mécaniques dépendent de l'orientation considérée est dit anisotrope.

#### 1.3.2) Relations contrainte-déformation dans un milieu anisotrope :

La loi de Hooke généralisée reliant les contraintes aux déformations peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \quad (1.12)$$

ou inversement :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{ij} \quad (1.13)$$

où

$\sigma_{ij}$  sont les composantes des contraintes ;

$C_{ijkl}$  les termes de la matrice de rigidité;

$\varepsilon_{ij}$  sont les composantes des déformations ;

$S_{ijkl}$  les termes de la matrice de souplesse.

La matrice de rigidité  $[C_{ijkl}]$  contient 36 constantes indépendantes. Cependant en considérant l'énergie de déformation, on peut démontrer que 21 paramètres indépendants sont nécessaires pour décrire le comportement élastique d'un matériau anisotrope dans l'état tridimensionnel.

#### a) Cas d'une anisotropie naturelle :

Dans un état plan, 5 paramètres sont nécessaires pour décrire le comportement élastique d'un matériau anisotrope à savoir :  $E_1, E_2, v_{12}, v_{21}$  et  $G_{12}$ . Cependant quatre paramètres uniquement sont effectivement indépendants du fait que :

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1+v_{12})} = \frac{E_2}{2(1+v_{21})} \quad (1.14)$$

En plus, il existe une autre relation entre  $v_{12}$  et  $v_{21}$ :

$$\frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} \quad (1.15)$$

Donc la relation déformation-contrainte pour un matériau anisotrope est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

**b) Cas d'une anisotropie générale (orthotropie hors axes) :**

La relation entre contraintes pour un pli orthotrope où ses axes principaux (1, 2) faisant un angle  $\theta$  avec les axes arbitraires ( $x, y$ ) (figure 1.7) est donnée par [3] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

avec :  $c = \cos \theta$  et  $s = \sin \theta$ .

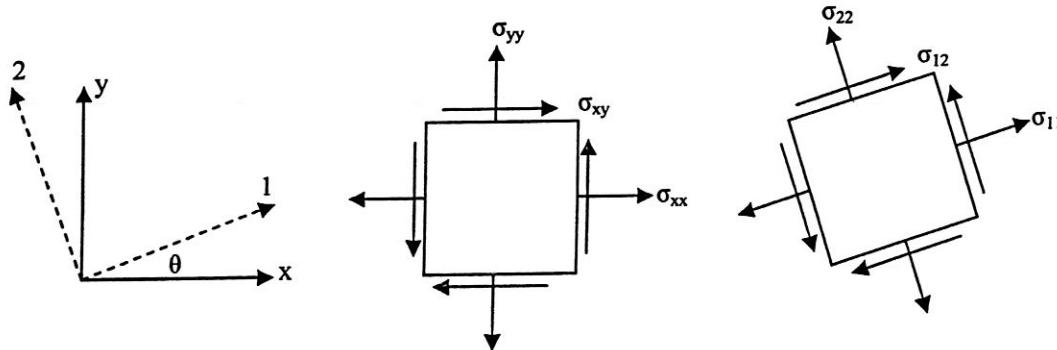


Figure 1.7 : Représentation des contraintes – Rotation des axes

La relation (1.17) peut s'écrire :

$$\{\sigma\}_{1,2} = [T]\{\sigma\}_{x,y} \quad (1.18)$$

Ou

$$\{\sigma\}_{x,y} = [T]^{-1}\{\sigma\}_{1,2} \quad (1.19)$$

avec :  $[T]$  est la matrice de transformation relative à la rotation des axes.

Pour les déformations, on déduit de la même manière que :

$$\{\varepsilon\}_{1,2} = [T]\{\varepsilon\}_{x,y} \quad (1.20)$$

De plus, on a :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

et

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

avec :  $[R]$  est la matrice de Reuter

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

On a :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = [R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.24)$$

En substituant l'équation (1.21) dans l'équation (1.20), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R][T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

En remplaçant l'équation (1.24) dans l'équation (1.25), on aura :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.26)$$

La relation contrainte-déformations est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

où  $[C]$  est la matrice de rigidité.

Substituant l'équation (1.27) dans l'équation (1.26) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [C][R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

Enfin, en remplaçant l'équation (1.28) dans l'équation (1.19), on aura :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[C][R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.29)$$

On note :

$$[K]^* = [T]^{-1}[C][R][T][R]^{-1} \quad (1.30)$$

avec :  $[K]^*$  est la matrice de rigidité dans le cas général relative à la rotation des axes. Elle représente la matrice de rigidité dans le cas de l'orthotropie hors axes ou anisotropie générale.

## **Chapitre 2**

### **Formulation de l'élément d'interface**

## Chapitre 2

### Formulation de l'élément d'interface

#### 2.1) Introduction:

Dans ce chapitre, nous développerons en détails les différentes étapes conduisant au calcul des matrices élémentaires de l'élément d'interface RMQ-7 à partir d'un élément de référence (formulation isoparamétrique). Cet élément d'interface a été développé par Bouzerd [1] en utilisant une formulation directe, c'est-à-dire : les fonctions de forme des champs cinématique et statique sont construites directement à partir de la configuration réelle de l'élément en se plaçant dans un repère global (x,y).

Dans cette partie, l'élément RMQ-7 a été reformulé à partir d'un élément de référence dans un repère naturel ( $\xi, \eta$ ). Cette formulation présente l'avantage de simplifier les calculs et de pouvoir générer des éléments quadrangulaires quelconques. L'élément de référence est un élément de forme géométrique simple repéré dans un espace de référence ( $\xi, \eta$ ) qui peut être transformé en un élément réel par l'intermédiaire d'une transformation géométrique. Le passage à la formulation à partir d'un élément de référence est nécessaire pour prendre en considération l'orientation et la forme des interfaces.

#### 2.2) Etat de l'art sur les modèles éléments finis mixtes :

Dans la littérature, on fait état de nombreux travaux portant sur les éléments finis utilisant des formulations à plusieurs champs. Le point essentiel de ces travaux est souvent l'utilisation des éléments finis en variables mixtes afin d'améliorer le calcul des contraintes sur des structures quelconques.

Les premières applications du principe variationnel de Hellinger-Reissner datent de 1966 où plusieurs modèles mixtes de calcul de flexion des plaques minces ont été proposés indépendamment par Herrmann [4], Hellan [5].

Dunhan et Pister [6] ont développé des modèles mixtes pour l'étude de problèmes en élasticité plane. Ces modèles sont l'application directe du principe variationnel de Reissner qui adopte comme variables indépendantes tous les déplacements et toutes les contraintes. Ils assurent naturellement la continuité des déplacements, mais leur inconvénient est dû au fait

que toutes les contraintes figurent comme variables nodales à l'interface entre deux matériaux, ce qui impose une continuité excessive sur les contraintes [7].

D'autres éléments finis mixtes furent formulés par différents auteurs : Chatterjee et Setlur en 1972 [8], Tseng et Olson en 1981 [9], Olson en 1981 [10], pour l'étude des problèmes d'élasticité plane, de plaque en flexion et de contact dans le cas bidimensionnel.

Pour les milieux hétérogènes (structures composite, stratifiées,...), il est intéressant d'avoir des modèles n'adoptant comme variables nodales de contrainte sur les interfaces que les composantes transverses.

Une telle famille d'éléments d'interface a été construite par Aivazzadeh [11-12] pour le cas plan, Habib [13] dans le cas axisymétrie. Dans ces éléments, les degrés de liberté de contrainte, autre que les contraintes d'interface sont placés en des nœuds intérieurs qui ne participent pas au processus d'assemblage avec d'autres éléments. Ce processus appelé méthode de relocalisation permet d'éviter les continuités excessives aux interfaces.

Dans le même contexte et se basant sur le principe variationnel de Reissner, Bichara [7], et Sarhan Bajbouj [14] ont développé des éléments mixtes à une ou plusieurs interfaces. Ces éléments d'interface peuvent être utilisés seuls ou connectés à des éléments en déplacement. Ces éléments sont conçus pour l'étude des interfaces entre deux matériaux, et sont en général bien adaptés à l'étude des contraintes sur l'interface.

Bouzerd [1] a développé un élément fini mixte capable de modéliser aussi bien les interfaces cohérentes que les interfaces fissurées. Cet élément a été associé à la méthode d'extension virtuelle de fissure pour l'évaluation du taux de restitution d'énergie. L'utilisation de cet élément pour l'étude des matériaux isotropes homogènes ou des bimatériaux a donné de très bons résultats comparant aux solutions analytiques.

Une étude approfondie sur les modèles éléments finis mixtes a été faite par Noor [15]. Wu et Lin [16] ont présenté un élément fini mixte bidimensionnel basé sur un modèle déplacement d'ordre élevé pour l'analyse d'une structure sandwiche, où des conditions de continuité de déplacement à l'interface entre les couches ont été considérées tandis que les contraintes interlaminaires ont été introduites comme des multiplicateurs de Lagrange.

Shi et Chen [17] ont développé un élément fini mixte tridimensionnel basé sur un modèle variationnel stratifié global. Le modèle a proposé une utilisation mixte d'un élément contrainte hybride dans une région de solution contrainte, de précision élevée dans la direction de l'épaisseur du stratifié, et d'un élément fini déplacement dans le reste.

Plusieurs modèles mixtes ont été présentés de Carrera [18-20]. Ils sont basés sur le principe variationnel mixte de Reissner. En raison du fait que les champs de contrainte sont supposés

indépendants des champs de déplacement dans n'importe quel modèle d'élément fini mixte, développé en utilisant le principe variationnel de Reissner, la relation fondamentale d'élasticité ne peut pas être satisfaite exactement.

Ramtekkar et al. [21] ont développé un modèle élément fini mixte tridimensionnel basé sur le principe du minimum de l'énergie potentielle. Ce modèle a été utilisé pour l'analyse de la flexion des plaques sandwiches [22]. Desai et Ramtekkar [23] ont présenté un élément fini mixte basé sur la théorie de déplacement satisfaisant les relations fondamentales d'élasticité. Ce modèle a donné d'excellents résultats de contraintes et de déplacements lors de l'analyse des stratifiés. Il assure la continuité des déplacements et des contraintes transverses.

Bambole et Desai [24-25] ont développé un élément fini hybride d'interface tridimensionnel (à 27 noeuds) et un élément bidimensionnel (à 9 noeuds) pour l'analyse des stratifiés, plaques et poutres sandwiches. Ces modèles sont basés sur le principe du minimum de l'énergie potentielle et satisfaisants les relations fondamentales de l'élasticité entre les champs de contrainte, déformation et déplacement.

### 2.3) Méthodes de formulation des éléments finis:

Les équations élémentaires de la théorie d'élasticité peuvent être formulées de plusieurs manières différentes:

- une forme locale au moyen d'équations différentielles
- une forme globale au moyen d'équations intégrales
- une forme variationnelle (fonctionnelle et conditions de stationnarité).

Un problème de mécanique des milieux continus peut toujours être formulé sous une forme locale ou globale; en plus, on peut le formuler sous une forme variationnelle. Mathématiquement il y a équivalence entre ces trois méthodes. Les différences interviennent dans les procédés de calculs des solutions approchées.

L'importance des méthodes variationnelles est considérable car elles constituent la base de formulation des différents modèles de calculs par éléments finis. En mécanique des solides, il existe différents principes variationnels de nature énergétique permettant de traduire les conditions d'équilibre. Les plus importants sont:

- le principe du minimum de l'énergie potentielle totale
- le principe du maximum de l'énergie potentielle complémentaire
- les principes de stationnarité de fonctionnelles à deux ou plusieurs champs (formulations mixtes).

Dans le paragraphe suivant, nous allons exposer les méthodes de formulation des éléments finis qui sont fondées sur les principes variationnels.

### 2.3.1) Formulation à un seul champ:

#### a) Formulation en déplacements ou méthode de déplacements (modèle compatible):

Dans cette formulation, les variables figurant comme inconnues sont les déplacements. La dérivation de cette méthode est issue du principe du minimum de l'énergie potentielle totale. Ce modèle assure généralement la continuité des déplacements partout mais les contraintes sont discontinues aux frontières inter-éléments. En conséquence les conditions de continuité du vecteur contrainte à l'interface ne sont pas vérifiées, et les conditions aux limites de bord libre ne peuvent être satisfaites exactement.

b) Formulation en contrainte ou méthode des forces (modèle d'équilibre): Elle est basée sur le principe variationnel du maximum de l'énergie complémentaire. Dans cette approche, étant donné que les inconnues qui interviennent dans la formulation sont les contraintes, la continuité des déplacements n'est pas assurée au passage inter-éléments. De plus ce modèle impose une continuité forte sur toutes les contraintes aux frontières des éléments alors que seuls, certaines d'entre elles doivent y être continues.

### 2.3.2) Formulation à plusieurs champs:

a) Formulations hybrides: Le principe des modèles hybrides est dû à Pian [26-27]. Ces méthodes sont basées sur des formes modifiées du principe du minimum de l'énergie potentielle ou du principe du maximum de l'énergie complémentaire. Le modèle hybride repose sur une première approximation de champ de contraintes ou de déplacements à l'intérieur de l'élément et sur une seconde forme indépendante de champ de contraintes et/ou de déplacements définie à la frontière de l'élément. Tous les champs sont exprimés en fonction de paramètres généralisés sauf un seul champ, qui est donné en fonction de variables nodales. Les équations finales de l'élément sont exprimées en fonction de ce seul champ. Ainsi cette formulation se ramène soit à une méthode déplacement soit à une méthode force, c'est-à-dire à la continuité d'un seul champ à l'interface.

b) Formulations mixtes: Les méthodes variationnelles mixtes permettent d'employer simultanément les variables statiques et cinématiques. Elles pourraient en principe assurer toutes les continuités nécessaires à l'interface à condition de faire un choix judicieux des types

de variables nodales en contraintes avec lesquelles les champs de contraintes sont interpolés aux frontières inter-éléments.

Parmi les méthodes variationnelles, le principe variationnel de Reissner [28], a sans doute suscité le plus d'intérêt dans la formulation d'éléments finis mixtes. Hu [29] et Washizu [30] ont développé indépendamment un principe variationnel à trois champs en ajoutant comme variable indépendante le champ de déformations, ce principe se ramène au principe variationnel de Reissner lorsque la compatibilité cinématique des déformations est vérifiée.

Plusieurs fonctionnelles mixtes intermédiaires ont été développées par Verchery [31-32], dans lesquelles certaines grandeurs statiques et cinématiques interviennent simultanément. Ces fonctionnelles ont été utilisées essentiellement pour les modélisations théoriques de plaques sandwichs.

Nous allons présenter au paragraphe suivant le principe variationnel d'Hellinger-Reissner qui va servir de base pour la formulation de notre élément d'interface.

#### 2.4) Fonctionnelle de Reissner (R):

Cette fonctionnelle est à deux champs: les déplacements et les contraintes. Nous pouvons l'obtenir en partant soit de l'énergie potentielle totale soit de l'énergie complémentaire.

Dans l'application du principe variationnel du maximum de l'énergie complémentaire, la fonctionnelle représentant cette énergie dépend uniquement du champ de contrainte qui doit vérifier les équations d'équilibre et les conditions aux limites comme conditions essentielles. Si l'on veut établir un principe variationnel à partir de cette fonctionnelle sans que les champs de contraintes soient statiquement admissibles, il faut alors introduire ces conditions par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. Nous obtenons dans ce cas, une fonctionnelle multi-champs qui permettre la construction du principe variationnel mixte d'Hellinger-Reissner.

La fonctionnelle représentant l'énergie complémentaire pour des champs non statiquement admissibles s'écrit [7]:

$$\Pi_c(\sigma_{ij}, \lambda_i, \beta_i) = -\frac{1}{2} \int_V S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j dS_u - \int_V \lambda_i (\sigma_{ij,j} + f_i) dV + \int_{S_\sigma} \beta_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) dS_\sigma \quad (2.1)$$

avec:

$\lambda_i, \beta_i$  : multiplicateurs de Lagrange permettant de tenir compte des conditions aux limites et de l'équilibre.

En traduisant la condition de stationnarité de  $\Pi_c$ :

$$\delta \Pi_c = 0 \quad (2.2)$$

La variation du premier ordre de  $\Pi_c$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_c = \int_V & \left\{ (\varepsilon_{ij}(\lambda) - S_{ijkl}\sigma_{kl}) \delta \delta_{ij} - (\sigma_{ij,j} + f_i) d\lambda_i \right\} dV + \int_{S_u} (\bar{u}_i - \lambda_i) \delta_{ij} n_j dS_u + \\ & \int_{S_\sigma} \left\{ (\beta_i - \lambda_i) \delta \sigma_{ij} n_j dS_\sigma + (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) \delta \beta_i \right\} dS_\sigma \end{aligned} \quad (2.3)$$

$f_i$ : forces de volume données

$\bar{u}_i$ : déplacement imposé sur  $S_u$

$\bar{T}_i$ : traction imposée sur  $S_\sigma$

$S_{ijkl}$ : les composantes de la matrice de souplesse.

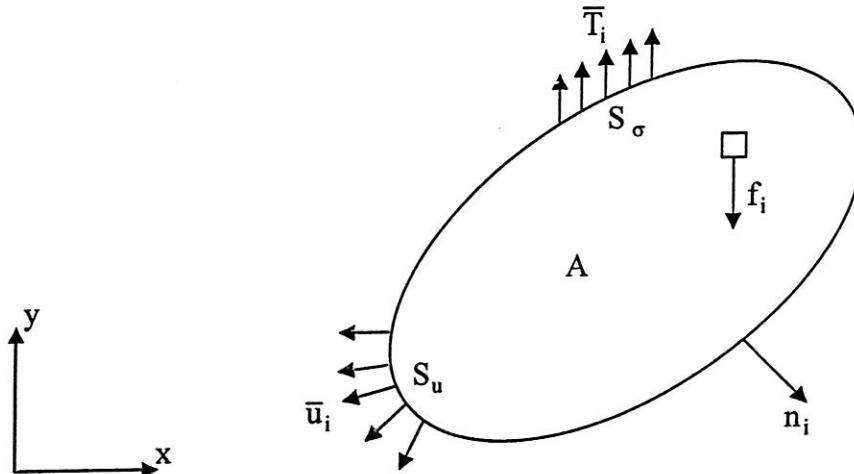


Figure 2.1: Conditions aux limites mixtes dans une structure

Les variables  $\sigma_{ij}, \lambda_i, \beta_i$  sont considérées comme variables indépendantes, nous obtenons comme équation de stationnarité:

$$\lambda_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } S_u \quad (2.4)$$

$$\lambda_i = \beta_i \quad \text{sur } S_\sigma \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad \text{sur } S_\sigma \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{ij}(\lambda) = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (2.8)$$

En prenant:

$$\lambda_i = u_i \quad \text{dans } V \quad (2.9)$$

$$\beta_i = u_i \quad \text{sur } S_\sigma \quad (2.10)$$

Et en remplaçant  $\lambda_i, \beta_i$  par leurs valeurs physiques dans  $\Pi_c$ , nous obtenons la fonctionnelle mixte de Reissner définie par:

$$R(\sigma_{ij}, u_i) = -\frac{1}{2} \int_V \left\{ (S_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}) + u_i (\sigma_{ij,j} + f_i) \right\} dV + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS_u + \int_{S_\sigma} u_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) dS_\sigma \quad (2.11)$$

Ou encore en faisant une intégration par partie:

$$R(\sigma_{ij}, u_i) = \int_V (\sigma_{ij} u_{i,j} - \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}) dV - \int_{S_\sigma} u_i \bar{T}_i dS_\sigma - \int_{S_u} T_i (u_i - \bar{u}_i) dS_u \quad (2.12)$$

Les variables  $\sigma_{ij}, u_i$  sont considérées comme variables indépendantes, la condition de stationnarité de  $R$  nous donne alors les équations d'équilibre, les lois de comportement et les conditions aux limites mixtes:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{dans } S_u \quad (2.13)$$

$$T_i = \bar{T}_i \quad \text{dans } S_\sigma \quad (2.14)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{ij}(\lambda) = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad \text{dans } V \quad (2.16)$$

La valeur stationnaire de la fonctionnelle  $R$  est un point scelle, c'est-à-dire elle n'est ni un maximum ni un minimum, ceci apparaît en calculant la deuxième variation de  $R$ :

$$\delta^2 R(\sigma_{ij}, u_i) = -2 \int_V \left\{ ((\delta \sigma_{ij})_{,j}) \delta u_i + \frac{1}{2} S_{ijkl} \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{kl} \right\} dV + 2 \int_{S_\sigma} \delta (\sigma_{ij} n_j) \delta u_i dS_\sigma \quad (2.17)$$

Nous constatons que  $\delta^2 R$  ne garde pas un signe constant: la valeur stationnaire de  $R$  n'est ni un minimum ni un maximum.

A présent, nous introduisons une notation matricielle pour écrire la discrétisation de la fonctionnelle d'une manière pratique.

Dans le cas bidimensionnel les équations locales d'élasticité s'écrivent:

$$\begin{bmatrix} -[S] & [L_2] \\ [L_1] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

et

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix}^t = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad u_1 \quad u_2\} \quad (2.19)$$

avec  $[L_1]$  est un opérateur linéaire défini par:

$$[L_1] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & 2S_{1122} \\ S_{1122} & S_{2222} & 2S_{1222} \\ 2S_{1122} & 2S_{1222} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$[L_2] = [L_1]^t \quad (2.22)$$

$$\{f\}^t = \{f_1 \quad f_2\} \quad (2.23)$$

Les conditions aux limites mixtes s'écrivent:

$$\{u\} = \{\bar{u}_i\} \quad \text{sur } L_u \quad (2.24)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{sur } L_\sigma \quad (2.25)$$

En introduisant ces notations dans la fonctionnelle  $R(\sigma_{ij}, u_i)$  (2.12), nous obtenons:

$$\begin{aligned} R(\{\sigma\}, \{u\}) = & \frac{e}{2A} \int_A \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} -[S] & [L_2] \\ [L_1] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix} dS - e \int_{L_\sigma} \{\bar{T}\}^t \{u\} dL_\sigma \\ & - e \int_A \{f\}^t \{u\} dS - e \int_{L_u} \{T\}^t (\{u\} - \{\bar{u}\}) dL_u \end{aligned} \quad (2.26)$$

## 2.5) Formulation de l'élément d'interface:

Les étapes de construction de l'élément d'interface RMQ-7, en formulation isoparamétrique, sont schématisées sur la figure 2.2.

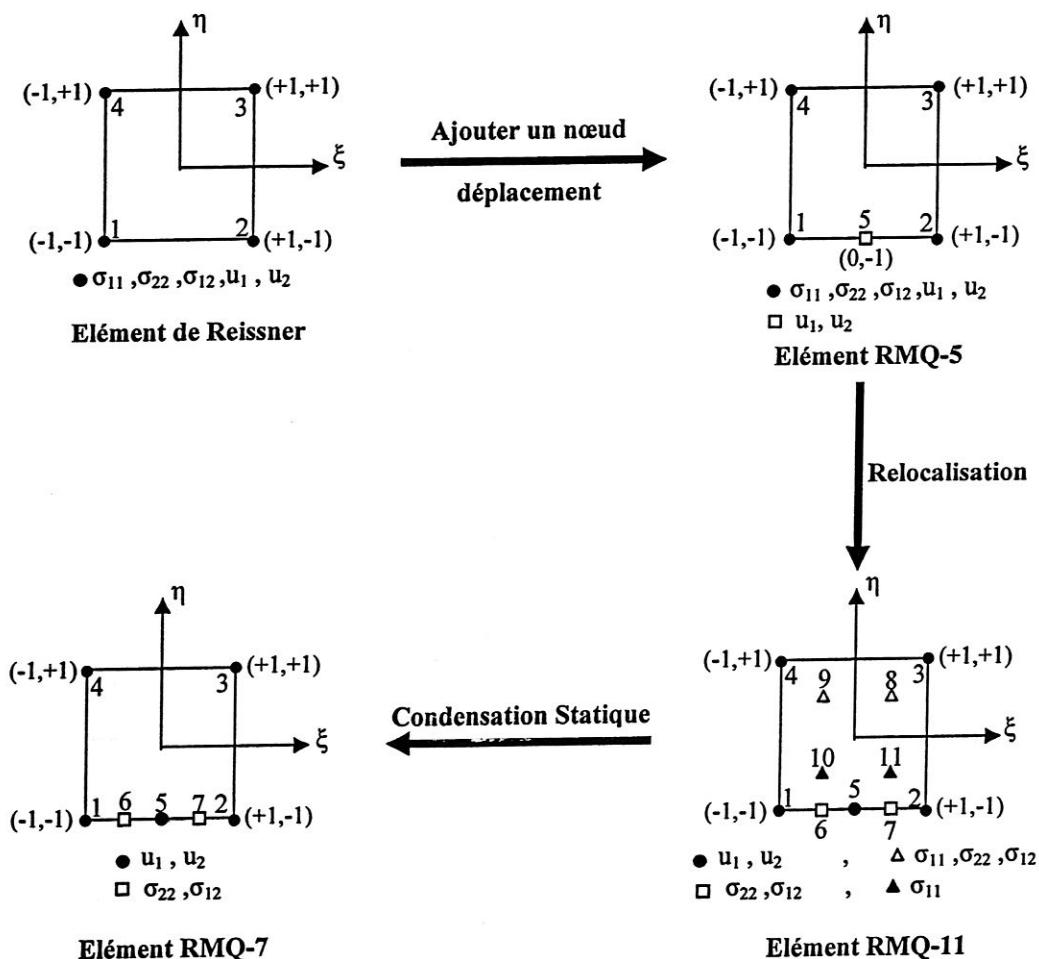


Figure 2.2: Etapes de construction de l'élément RMQ-7

L'élément RMQ-7 (Reissner Modified Quadrilateral) [1] est un élément mixte quadrilatère à 7 nœuds et 14 degrés de liberté. Trois de ses côtés sont compatibles avec des éléments classiques linéaires et présentent un nœud déplacement à chaque extrémité. Le quatrième côté, outre ses deux nœuds cinématiques d'extrémités (nœud 1 et nœud 2), offre trois nœuds supplémentaires : un nœud médian (nœud 5) et deux nœuds intermédiaires au milieu de chaque demi-côté (nœuds 6 et 7), introduisant les composantes du vecteur contrainte le long de l'interface. Les continuités des vecteurs déplacement et contrainte peuvent être prises en compte au niveau de ce côté particulier, qui doit être placé le long de l'interface. Dans le cas des structures fissurées, le nœud médian est associé à la pointe de fissure, les deux nœuds

statiques de part et d'autre permettent de satisfaire les deux exigences essentielles d'une telle situation, qui sont la condition de bord libre sur les lèvres de la fissure et les conditions de continuité le long de la partie cohérente.

Au départ, on part de la formulation mixte de Reissner avec comme variables nodales tous les déplacements et toutes les contraintes pour construire l'élément mixte d'interface. Il y a donc au début des variables nodales excédentaires :

- au niveau de l'interface, cette formulation impose une continuité trop forte, en effet la contrainte  $\sigma_{11}$  figure parmi les variables considérées dans la fonctionnelle de Reissner, mais ne figure pas parmi les contraintes d'interface (contrainte de décollement  $\sigma_{22}$  et contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$ ), donc nous allons éliminer cette contrainte ( $\sigma_{11}$ ) dans la formulation de l'élément d'interface.

- l'utilisation de la fonctionnelle de Reissner conduit à des éléments ayant un nombre de degrés de liberté très élevé ; or en pratique, il est, bien sûr, intéressant de disposer d'éléments avec un nombre aussi réduit que possible de degrés de liberté.

### 2.5.1) Elément mixte de Reissner :

C'est un élément à quatre nœuds et cinq degrés de liberté par nœud (tous les déplacements et toutes les contraintes) (figure 2.3). La formulation de cet élément est basée sur le principe variationnel de Reissner [28].

En posant pour un élément:

$$\{\varepsilon^e\} = [L_2] \{u^e\} \quad \text{sur } A^e \quad (2.27)$$

$$\{u^e\} = \{\bar{u}^e\} \quad \text{sur } L_u \quad (2.28)$$

La fonctionnelle de Reissner (2.26) s'écrit :

$$R(\{\sigma\}, \{u\}) = \frac{e}{2} \int_{A^e} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} -[S] & [I] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} dA^e - e \int_{L_\sigma} \{\bar{T}^e\}^t \{u^e\} dL_\sigma - e \int_{A^e} \{f^e\}^t \{u^e\} dA^e \quad (2.29)$$

où :  $[I]$  est la matrice unité

$[S]$  est la matrice des souplesses

$A^e$  est l'aire élémentaire

$e$  est l'épaisseur de l'élément (supposée constante)

$L_\sigma$  est la partie du contour de l'élément où les efforts  $\{T^e\}$  sont imposés.

$\{\sigma\}$  est le vecteur de contraintes pour un élément.

$\{\epsilon\}$  est le vecteur de déformations pour un élément.

$\{u\}$  est le champ de déplacements

$\{f^e\}$  est le vecteur forces de volume.

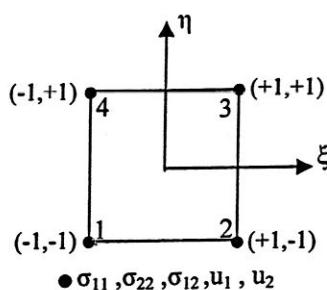


Figure 2.3: Elément de Reissner

Le champ de contrainte en tout point s'écrit :

$$\{\sigma\} = [M] \{\tau\} \quad (2.30)$$

où  $[M]$  est la matrice des fonctions de forme (linéaire en  $\xi$ , linéaire en  $\eta$ ).

avec  $\{\sigma\}^t = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}$

$$\{\tau\}^t = \{\sigma_{11}^1, \sigma_{22}^1, \sigma_{12}^1, \sigma_{11}^2, \sigma_{22}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{11}^3, \sigma_{22}^3, \sigma_{12}^3, \sigma_{11}^4, \sigma_{22}^4, \sigma_{12}^4\}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Les fonctions de forme sont données par [33]:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & , & M_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ M_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & , & M_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (2.33)$$

où  $[N]$  est la matrice des fonctions de forme des déplacements (bilinéaire).

avec  $\{u\}^t = \{u_1, u_2\}$

$$\begin{aligned} \{q\}^t &= \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4\} \\ [N] &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Les fonctions de forme sont données par:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & , & N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & , & N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2.35)$$

En introduisant les déformations à l'aide de la matrice  $[B]$  :

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\} \quad (2.36)$$

avec :  $[B]$  matrice liant les déformations aux déplacements.

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^t &= \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\} \\ [B] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Comme la matrice  $[N]$  est fonction des variables  $(\xi, \eta)$ , on utilise le jacobien  $[J]^{-1}$  de la transformation géométrique inverse pour pouvoir exprimer les dérivées par rapport à  $(x, y)$  en fonction de  $(\xi, \eta)$ .

La matrice jacobienne  $[J]$  est définie par:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

On a:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{cases} \quad (2.39)$$

Donc les termes de la matrice jacobienne peuvent être calculés par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad (2.40)$$

Lorsque la matrice jacobienne  $[J]$  n'est pas singulière, on peut écrire:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

L'approximation nodale des champs cinématique et statique est exprimée par :

$$\begin{bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

La substitution de la dernière expression dans la fonctionnelle de Reissner (2.29) conduit à la forme discrétisée de R [7] :

$$R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{bmatrix}^t [K_e] \begin{bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \{F_\sigma^e\} \\ \{F_u^e\} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

où  $[K_e]$  est la matrice élémentaire de rigidité-souplesse définie par :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}] & [K_{\sigma u}] \\ [K_{\sigma u}]^t & [0] \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

avec:

$$[K_{\sigma\sigma}] = -e \int_{A^e} [M]^t [S] [M] dA^e \quad (2.45)$$

$$[K_{\sigma u}] = e \int_{A^e} [M]^t [B] dA^e \quad (2.46)$$

Le vecteur des forces élémentaires équivalentes est composé de deux vecteurs : l'un correspond aux déplacements  $\{F_u^e\}$ ; le deuxième vecteur correspond aux contraintes,  $\{F_\sigma^e\}$  est nul en l'absence de déformations initiales.

Les vecteurs  $\{F_u^e\}$  et  $\{F_\sigma^e\}$  sont donnés par:

$$\{F_u^e\} = e \int_{L_\sigma} [N]^t \{\bar{T}^e\} dL_\sigma \quad (2.47)$$

$$\{F_\sigma^e\} = \{0\} \quad (2.48)$$

avec:

$L_\sigma$ : partie du contour où les contraintes sont imposées

$[N]$ : matrice des fonctions de forme des déplacements

$\{\bar{T}^e\}$ : traction imposée sur  $L_\sigma$ .

### 2.5.2) Elément de référence RMQ-5 :

L'élément RMQ-5 est obtenu en ajoutant un nœud déplacement à l'élément mixte de Reissner. C'est un élément mixte à 5 nœuds et 22 degrés de liberté (figure 3.4). Il possède un côté (associé à l'interface) présentant trois nœuds, le nœud du milieu (nœud déplacement) caractérise le fond de la fissure dans la version finale de l'élément.

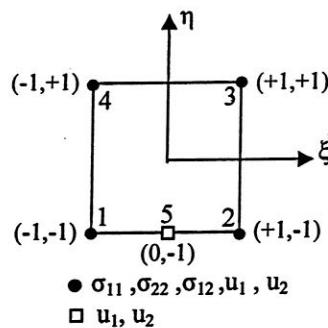


Figure 2.4: Élément de référence RMQ-5

Les nœuds contrainte n'ayant changé ni en nombre, ni en position, les éléments RMQ-5 et celui de Reissner présentent le même comportement statique. Le champ de contraintes est exprimé par les mêmes fonctions de forme  $M_i, i = 1, 4$ .

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (2.49)$$

avec  $\{q\}^t = \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4, u_1^5, u_2^5\}$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Les fonctions de formes s'écrivent :

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi, \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi, \quad (2.51)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \quad N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

La matrice  $[B]$  liant les déformations aux déplacements est définie par:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Dans le cas de l'élément RMQ-5, les termes de la matrice jacobienne sont donnés par:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i\end{aligned}\quad (2.53)$$

Les champs cinématique et statique sont exprimés par:

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

La matrice élémentaire de rigidité-souplesse est calculée en utilisant les formules (2.44), (2.45) et (2.46).

### 2.5.3 Construction de l'élément RMQ-11:

L'élément RMQ-11 est obtenu à partir de l'élément de référence RMQ-5 par relocalisation de certaines variables à l'intérieur de l'élément et par déplacement d'inconnues nodales statiques des extrémités vers le côté lui-même. La technique de relocalisation [34] permet d'éviter la continuité excessive à l'interface. L'élément RMQ-11 est un élément à 11 nœuds et 22 degrés de liberté (figure 2.5).

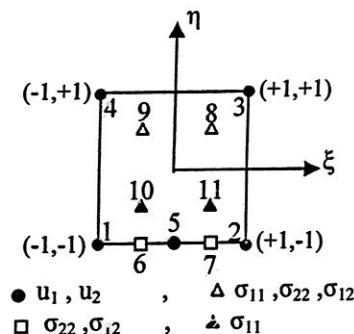


Figure 2.5: Elément RMQ-11

Les nœuds déplacements n'ayant changé ni en nombre, ni en position, les éléments RMQ-5 et RMQ-11 présentent le même comportement cinématique. Le champ de déplacement est exprimé par les mêmes fonctions de forme  $N_i, i = 1, 5$ .

L'approximation généralisée du champ de contrainte dans l'élément RMQ-11 s'écrit :

$$\sigma(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\}\{a\} \quad (2.55)$$

avec :  $\{P(\xi, \eta)\} = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\}$  est la base polynomiale de l'élément.

$\{a\}$  sont les variables généralisées.

On a :

$$\{\tau\} = [P_n]\{a\} \quad (2.56)$$

avec :  $[P_n]$  est la matrice nodale.

Donc l'approximation du champ de contraintes en fonction des variables nodales  $\{\tau\}$  est:

$$\sigma(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\}[P_n]^{-1}\{\tau\} = [M]\{\tau\} \quad (2.57)$$

La contrainte  $\sigma_{11}$  dans l'élément est exprimée par:

$$\sigma_{11}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\}[P_{n11}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} = [M_{11}] \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\text{avec: } [P_{n11}] = \begin{bmatrix} 1 & +0,5 & +0,5 & +0,25 \\ 1 & -0,5 & +0,5 & -0,25 \\ 1 & -0,5 & -0,5 & +0,25 \\ 1 & +0,5 & -0,5 & -0,25 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [M_{11}] = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\} [P_{n11}]^{-1} \quad (2.59)$$

Dans la configuration de la figure 2.2, les fonctions de formes sont données par :

$$\begin{aligned} M_{11}^8 &= \frac{1}{4}(1+2\xi)(1+2\eta) & , & M_{11}^9 &= \frac{1}{4}(1-2\xi)(1+2\eta) \\ M_{11}^{10} &= \frac{1}{4}(1-2\xi)(1-2\eta) & , & M_{11}^{11} &= \frac{1}{4}(1+2\xi)(1-2\eta) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Les contraintes  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  sont évaluées par l'expression:

$$\sigma_{i2}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_{ni2}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} = [M_{i2}] \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix}, i = 1, 2 \quad (2.61)$$

avec :  $[P_{ni2}] = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -1 & +0,5 \\ 1 & +0,5 & -1 & -0,5 \\ 1 & +0,5 & +0,5 & +0,25 \\ 1 & -0,5 & +0,5 & -0,25 \end{bmatrix}$

$$\text{et } [M_{i2}] = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\} [P_{ni2}]^{-1}, i = 1, 2 \quad (2.62)$$

Dans la configuration de la figure 2.2, les fonctions de formes sont données par :

$$\begin{aligned} M_{i2}^6 &= \frac{1}{6}(1-2\xi)(1-2\eta), & M_{i2}^7 &= \frac{1}{6}(1+2\xi)(1-2\eta) \\ M_{i2}^8 &= \frac{1}{3}(1+2\xi)(1+\eta), & M_{i2}^9 &= \frac{1}{3}(1-2\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Le champ de contraintes est donné par :

$$\sigma(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [M]\{\tau\} \quad (2.64)$$

avec:  $[M] = \begin{bmatrix} \{M_{11}\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{M_{22}\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{M_{12}\} \end{bmatrix} \quad (2.65)$

$$\text{et } \{\tau\}^t = \{\sigma_{11}^8, \sigma_{11}^9, \sigma_{11}^{10}, \sigma_{11}^{11}, \sigma_{22}^6, \sigma_{22}^7, \sigma_{22}^8, \sigma_{22}^9, \sigma_{12}^6, \sigma_{12}^7, \sigma_{12}^8, \sigma_{12}^9\}$$

La matrice élémentaire de rigidité-souplesse est donnée par :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}] & [K_{\sigma u}] \\ [K_{\sigma u}]^t & [0] \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

avec:

$$[K_{\sigma\sigma}] = -e \int_{A^e} [M]^t [S] [M] dA^e \quad (2.67)$$

$$[K_{\sigma u}] = e \int_{A^e} [M]^t [B] dA^e \quad (2.68)$$

Le calcul de la matrice élémentaire est effectué par intégration numérique selon la méthode de Gauss, le passage de l'intégration de l'élément réel à celui de référence fait intervenir le déterminant du jacobien de la transformation géométrique.

Dans la configuration de référence l'intégration s'écrit:

$$[K^e] = -e \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{-1}^{+1} [k^e(\xi, \eta)] \det(J(\xi, \eta)) d\eta \quad (2.69)$$

Nous avons utilisé la formule d'intégration à 4 points (2 points dans chaque direction ( $p=2$ )).

Nous avons:

$$[K^e] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j [k^e(\xi_i, \eta_j)] \det(J(\xi_i, \eta_j)) \quad (2.70)$$

où:

$\xi_i, \eta_j$  sont les coordonnées des points d'intégration (tableau 2.1).

$w_i, w_j$  représentent les coefficients de pondération.

P	$\xi_i$	$w_i$
2	$\pm 0,57735026918$	1,0

Tableau 2.1: Points d'intégration et coefficients de pondération de Gauss

### 2.5.4) Construction de l'élément RMQ-7:

L'élément RMQ-7 est obtenu à partir de l'élément RMQ-11 en éliminant les variables internes de ce dernier par condensation statique (figure 2.6).

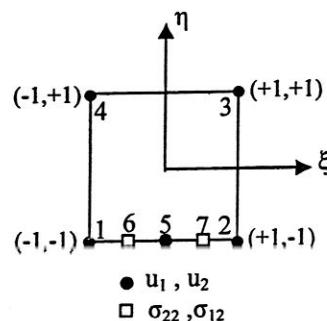


Figure 2.6: Elément RMQ-7

Les quatre nœuds internes de l'élément RMQ-11 qui ne participent pas à l'assemblage compliquent l'opération de mise en donnée, et augmentent la taille de la demi-largeur de bande au cours de l'assemblage, ce qui a pour effet une augmentation du temps de calcul.

Nous présentons dans cette partie une méthode de la condensation des variables internes au contour qui est liée à la notion globale de réduction de la taille d'un système d'équations par élimination d'un certain nombre de degrés de liberté. En calcul de structures ce type de procédure s'appelle analyse par sous-structures [35].

Au départ, nous utilisons la forme discrétisée de la fonctionnelle de Reissner:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau_e\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix}^T [K_e] \begin{Bmatrix} \{\tau_e\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix} - \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau_e\} \\ \{q_e\} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_u^e\} \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

Pour faciliter les calculs de l'opération de condensation, on décompose les degrés de liberté de contraintes au niveau élémentaire en deux groupes:

$\{\tau_c\}$ : contraintes sur les contours de l'élément.

$\{\tau_i\}$ : contraintes à l'intérieur de l'élément.

La décomposition de la matrice élémentaire  $[K_e]$  relativement aux groupes de degrés de liberté  $\{q\}, \{\tau_c\}$  et  $\{\tau_i\}$  s'écrit:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}]_i & [K_{\sigma\sigma}]_{ci} & [K_{\sigma u}]_i \\ [K_{\sigma\sigma}]_{ci}^t & [K_{\sigma\sigma}]_c & [K_{\sigma u}]_c \\ [K_{\sigma u}]_i^t & [K_{\sigma u}]_c^t & [0] \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Les variables de contraintes  $\{\tau_i\}$  ne sont pas assemblées, par conséquent les équations relatives à celles-ci, ne font intervenir que les degrés de liberté  $\{q\}$  et  $\{\tau_c\}$ .

Nous pouvons alors trouver une relation entre ces différents types de ddl en traduisant la condition de stationnarité de R par rapport à  $\{\tau_i\}$ :

$$\frac{\delta R}{\delta \tau_i} = 0 \quad (2.73)$$

Ce qui donne comme relation:

$$[K_{\sigma\sigma}]_i \{\tau_i\} + [K_{\sigma\sigma}]_{ci} \{\tau_c\} + [K_{\sigma u}]_i \{q\} = 0 \quad (2.74)$$

ou encore:

$$\{\tau_i\} = -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma\sigma}]_{ci} \{\tau_c\} - [K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i \{q\} \quad (2.75)$$

La matrice  $[K_{\sigma\sigma}]_i$  est un sous bloc diagonal d'une matrice symétrique définie négative, donc elle est toujours inversible.

A partir de la relation (2.75), on peut définir une matrice  $[\Gamma]$  de transformation des ddl permettant de définir la matrice de rigidité réduite relatives aux variables  $\{q\}$  et  $\{\tau_c\}$ .

On a:

$$\begin{Bmatrix} \{\tau_i\} \\ \{\tau_c\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = [\Gamma] \begin{Bmatrix} \{\tau_c\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

avec:

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1}[K_{\sigma\sigma}]_{ci} & -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1}[K_{\sigma u}]_i \\ [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

et  $[I]$ : la matrice unité.

En substituant la relation (2.77) dans la fonctionnelle  $R$  (2.71), nous obtenons la fonctionnelle réduite  $R^*$  ne dépendant que des variables de contour  $\{q\}$  et  $\{\tau_c\}$ :

$$R^* = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau_c^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t [K_e]^* \begin{Bmatrix} \{\tau_c^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix} - \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau_u^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_u^e\} \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

où  $[K_e]^*$  est la matrice élémentaire réduite définie par:

$$[K_e]^* = [\Gamma]^t [K_e] [\Gamma] \quad (2.79)$$

La matrice  $[K_e]^*$  s'écrit:

$$[K_e]^* = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}]^* & [K_{\sigma u}]^* \\ [K_{u\sigma}]^* & [K_{uu}]^* \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$\text{avec : } [K_{\sigma\sigma}]^* = [K_{\sigma\sigma}]_c - [K_{\sigma\sigma}]_{ci} [K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma\sigma}]_{ci}^t \quad (2.81)$$

$$[K_{\sigma u}]^* = [K_{\sigma u}]_c - [K_{\sigma u}]_i [K_{\sigma u}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i^t \quad (2.82)$$

$$[K_{u\sigma}]^* = [K_{\sigma u}]_i^{t*} \quad (2.83)$$

$$[K_{uu}]^* = -[K_{\sigma u}]_i [K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i^t \quad (2.84)$$

La matrice de rigidité réduite possède un bloc  $[K_{uu}]^*$  semi-défini positif, contrairement à la forme non réduite où ce bloc est toujours nul.

L'intérêt majeur de la procédure de condensation des variables internes est de réduire le temps de calcul lors d'une application, sa réalisation pratique est très simple d'autant plus qu'on n'a pas à modifier le vecteur du second membre puisque par hypothèse les nœuds

statique ne sont pas chargés. La technique de condensation statique nous permet d'obtenir l'élément RMQ-7 ne possédant que 7 nœuds avec deux degrés de liberté par nœud (les nœuds 6 et 7 sont des nœuds contraintes avec les variables  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  et le reste des nœuds sont en déplacement pur).

### 2.5.5) Construction de l'élément d'interface RMQ-7 inversé:

L'assemblage d'éléments RMQ-7, nous oblige à considérer des éléments d'interface inversés (figure 2.7). Ceci nous conduit à construire de nouveau l'élément RMQ-7 inversé.

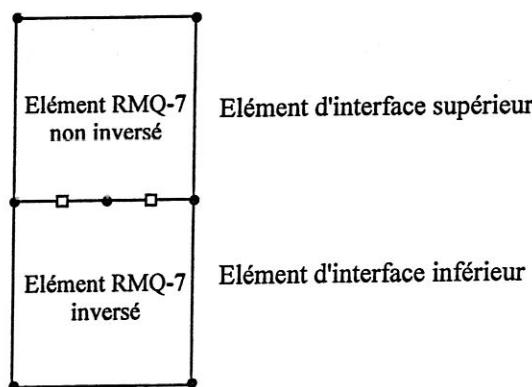


Figure 2.7: Deux éléments RMQ-7 assemblés

En suivant les mêmes étapes précédentes:

- construction d'un élément de référence mixte
- relocalisation de certains ddl à l'intérieur de l'élément et d'autres sur le contour
- condensation statique des ddl placés à l'intérieur de l'élément

on peut obtenir l'élément RMQ-7 inversé (élément d'interface inférieur) (figure 2.8).

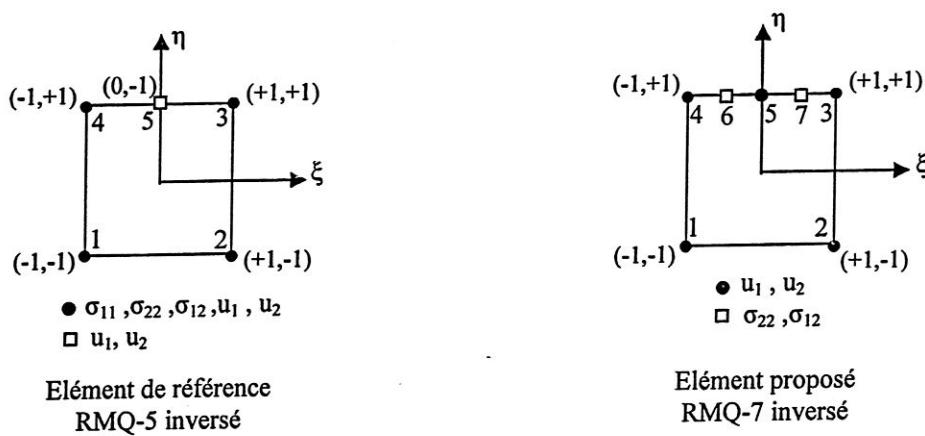


Figure 2.8: Élément RMQ-7 inversé et élément de référence

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (2.85)$$

avec  $\{q\}^t = \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4, u_1^5, u_2^5\}$

Les nouvelles fonctions de formes  $N_i$  sont données par:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & , & N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi & , & N_4 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi \\ & & & N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2.86)$$

L'approximation du champ de contraintes en fonction des variables nodales  $\{\tau\}$  est:

$$\sigma(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\}[P_n]^{-1}\{\tau\} = [M]\{\tau\} \quad (2.87)$$

La contrainte  $\sigma_{11}$  dans l'élément est exprimée par:

$$\sigma_{11}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\}[P_{n11}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} = [M_{11}] \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

avec:  $[P_{n11}] = \begin{bmatrix} 1 & +0,5 & -0,5 & -0,25 \\ 1 & -0,5 & -0,5 & +0,25 \\ 1 & -0,5 & +0,5 & -0,25 \\ 1 & +0,5 & +0,5 & +0,25 \end{bmatrix}$

et  $[M_{11}] = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\}[P_{n11}]^{-1} \quad (2.89)$

Dans la configuration de la figure 2.8, les fonctions de formes sont données par :

$$\begin{aligned} M_{11}^8 &= \frac{1}{4}(1+2\xi)(1-2\eta) & , & M_{11}^9 = \frac{1}{4}(1-2\xi)(1-2\eta) \\ M_{11}^{10} &= \frac{1}{4}(1-2\xi)(1+2\eta) & , & M_{11}^{11} = \frac{1}{4}(1+2\xi)(1+2\eta) \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$M_{11}^{10} = \frac{1}{4}(1-2\xi)(1+2\eta) \quad , \quad M_{11}^{11} = \frac{1}{4}(1+2\xi)(1+2\eta)$$

Les contraintes  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  sont évaluées par l'expression:

$$\sigma_{i2}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_{ni2}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} = [M_{i2}] \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix}, i = 1, 2 \quad (2.91)$$

avec :  $[P_{ni2}] = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & +1 & -0,5 \\ 1 & +0,5 & +1 & +0,5 \\ 1 & +0,5 & -0,5 & -0,25 \\ 1 & -0,5 & -0,5 & +0,25 \end{bmatrix}$

$$\text{et } [M_{i2}] = \{1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta\} [P_{ni2}]^{-1}, i = 1, 2 \quad (2.92)$$

Dans la configuration de la figure 2.8, les fonctions de formes sont données par :

$$M_{i2}^6 = \frac{1}{6}(1-2\xi)(1+2\eta), \quad M_{i2}^7 = \frac{1}{6}(1+2\xi)(1+2\eta) \quad (2.93)$$

$$M_{i2}^8 = \frac{1}{3}(1+2\xi)(1-\eta), \quad M_{i2}^9 = \frac{1}{3}(1-2\xi)(1-\eta)$$

Le champ de contraintes est donné par :

$$\sigma(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [M]\{\tau\} \quad (2.94)$$

avec:  $[M] = \begin{bmatrix} \{M_{11}\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{M_{22}\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{M_{12}\} \end{bmatrix} \quad (2.95)$

$$\text{et } \{\tau\}^t = \{\sigma_{11}^8, \sigma_{11}^9, \sigma_{11}^{10}, \sigma_{11}^{11}, \sigma_{22}^6, \sigma_{22}^7, \sigma_{22}^8, \sigma_{22}^9, \sigma_{12}^6, \sigma_{12}^7, \sigma_{12}^8, \sigma_{12}^9\}$$

La matrice élémentaire de rigidité-souplesse s'écrit sous la forme donnée par les relations (2.66), (2.67) et (2.68). Ses termes sont calculés par intégration numérique selon la méthode de Gauss avec 4 points d'intégration.

## **Chapitre 3**

### **Tests de convergence et de validation de l'élément d'interface**

## Chapitre 3

### Tests de convergence et de validation de l'élément d'interface

#### 3.1) Introduction :

La discréttisation d'un problème aux limites par la méthode des éléments finis, permet d'approcher la solution exacte par le biais de fonctions d'approximations. La convergence de la solution vers la valeur exacte au niveau de la structure assemblée n'est garantie que si ces fonctions d'approximation vérifient certains critères de convergence.

Ces critères nécessaires au niveau de l'élément, sont fondés sur des considérations mathématiques et physiques, et leur respect permet une meilleure approximation au fur et à mesure que la taille des éléments décroît.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la convergence et la validation de l'élément d'interface proposé. D'un point de vue théorique, on va traiter les valeurs et vecteurs propres des matrices élémentaires et d'un point de vue pratique, nous allons étudier la convergence de la flèche et de la contrainte transverse d'une poutre console et d'une poutre sandwich.

#### 3.2) Critères de convergence:

Les critères de convergences peuvent s'énoncer comme suit:

**a) Représentation des modes rigides:** Les fonctions de forme des déplacements et des contraintes doivent être telles qu'on obtient un état de déformation et de contrainte nul dans l'élément lorsque les déplacements nodaux sont compatibles avec un mouvement de corps solide (mouvement d'ensemble).

**b) Représentation des états de déformation et de contrainte constants [36] :** Les fonctions de forme choisies, doivent être telles que si les déplacements nodaux et les contraintes nodales sont compatibles avec des états de déformation et de contraintes constants, on puisse obtenir réellement ces états dans tous les éléments.

Intuitivement, la nécessité de vérifier ce critère vient du fait que lorsqu'on affine indéfiniment le maillage, l'état de déformation et de contrainte est pratiquement constant par élément. Il est alors souhaitable que les fonctions d'approximation puissent représenter cet état.

**c) Compatibilité des déplacements [37]:** Les déplacements sont compatibles, s'ils présentent une continuité à la fois à l'intérieur et aux frontières inter-éléments. En général, l'ordre de continuité du champ de déplacement dépend de l'ordre des dérivées de ce champ intervenant dans la fonctionnelle utilisée (dans notre cas on a utilisé une approximation semi-quadratique).

**d) Compatibilité des interpolations (Completeness criterion):** Mirza et Olson [38] ont montré dans leurs travaux que le choix de la base d'approximation polynomiale pour les contraintes et les déplacements pour former l'énergie de déformation de la fonctionnelle de Reissner doivent respecter une règle, sinon d'éventuelles mécanismes peuvent apparaître (modes supplémentaires parasites à énergie de déformation nulle).

La règle s'énonce comme suit: "Les déformations obtenues à partir de l'approximation des contraintes, doivent posséder au moins tous les modes de déformation qui sont obtenus par dérivation du champ de déplacement".

Ce qui veut dire que l'on ne peut pas prendre n'importe quel choix de base polynomiale pour les contraintes et les déplacements. Par exemple si l'on choisit un polynôme complet de degré  $p$  pour approximer le champ de déplacement, il faudra alors choisir un polynôme complet de degré au moins égale à  $(p-1)$  pour les contraintes.

Nous allons voir si l'élément d'interface proposé, vérifie les critères de convergence cités ci-dessus.

### 3.3) Etude des valeurs et vecteurs propres:

L'énergie de déformations élémentaire dans la fonctionnelle de Reissner s'écrit:

$$R^e = \frac{e}{2} \int_{A^e} \left\{ \begin{matrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{matrix} \right\}^t \left[ \begin{matrix} -[S] & [I] \\ [I] & [0] \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{matrix} \right\} dA^e \quad (3.1)$$

Pour un problème plan, les trois modes déplacement d'ensemble qui annulent l'énergie de déformation se mettent sous la forme:

- 1)  $u_1 = \text{constante} ; u_2 = 0 ; \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$
- 2)  $u_1 = 0 ; u_2 = \text{constante} ; \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$
- 3)  $u_1 = -cy ; u_2 = -cx ; \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$

L'étude des valeurs et vecteurs propres des matrices élémentaires est très utiles pour examiner si le premier critère est vérifié (représentation des modes rigides). En effet, tous vecteurs propres correspondant à des valeurs propres nulles doivent représenter les trois déplacements

d'ensemble de corps rigide. Le nombre de valeurs propres nulles doit être égal à ce nombre de déplacement d'ensemble.

Cette étude a été faite numériquement à l'aide d'un programme utilisant la transformation de Houholder [39] qui résout le système suivant:

$$[K^e] \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} - \lambda [I] \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

$\lambda$  représente les valeurs propres de la matrice élémentaire  $[K^e]$ . Puisque  $[K^e]$  est symétrique, toutes les valeurs propres sont donc des réelles, les valeurs négatives correspondent au nombre de ddl de contrainte, les valeurs positives sont alors représentatives des modes de déformations (mouvement de corps rigide exclus).

Le tableau (3.1) donne les valeurs et vecteurs propres de l'élément proposé (RMQ-7) et d'autres éléments (déplacement et Reissner).

Type d'élément	Degrés de liberté			Valeurs propres		Composition des vecteurs propres
	Déplacement	Contraintes	Total	Signe	Nombre	
Elément déplacement (4 nœuds)	8	0	8	(-) (0) (+)	- 3 5	$\epsilon_{ij}=0$ $u_1, u_2$ bilinéaires
Elément mixte de Reissner (4 nœuds)	8	12	20	(-) (0) (+)	12 3 5	$u, \sigma$ bilinéaires $\epsilon_{ij}=0, \sigma_{ij}=0$ $u, \sigma$ bilinéaires
Elément d'interface proposé (RMQ-7)	10	4	14	(-) (0) (+)	4 3 7	$\sigma$ bilinéaire, $u$ quadratique $\epsilon_{ij}=0, \sigma_{ij}=0$ $\sigma$ bilinéaire, $u$ quadratique

Tableau 3.1: Les valeurs propres pour différents types d'éléments

Le tableau (3.1) montre que l'élément d'interface présenté vérifie bien le critère de représentation des modes rigides.

Le deuxième critère relatif à la représentation des états de contrainte et de déformation homogènes est satisfait vu la nature des approximations retenues. Nous verrons dans la partie suivante des tests numériques concernant ce critère.

Le troisième critère de convergence (compatibilité des déplacements) est vérifié vu la nature semi-quadratique de l'approximation choisie.

Le critère de compatibilité des interpolations est satisfait du fait que l'approximation des déplacements est semi-quadratique (ordre 2) et celle des contraintes est bilinéaire (ordre 1).

### 3.4) Tests de représentation d'états homogènes:

Nous allons étudier l'élément d'interface présenté dans deux cas de chargement (traction uniforme et cisaillement pur) générant des états de contraintes et de déformations homogènes. Ces tests élémentaires constituent une étude préliminaire de validité de notre élément d'interface.

#### Traction uniforme suivant x:

Dans le cas d'une traction uniforme de densité  $p$ , le champ de contraintes est défini comme suit:

$$\sigma_{11} = p \quad ; \quad \sigma_{22} = 0 \quad ; \quad \sigma_{12} = 0 \quad (3.3)$$

et le champ de déplacement s'écrit dans le cas isotrope:

$$u_1 = \frac{\sigma_{11}}{E}x \quad ; \quad u_2 = \frac{-v}{E}\sigma_{11}y \quad (3.4)$$

avec:  $E$ : module d'Young de matériau et  $v$ : coefficient de Poisson.

#### Cisaillement pur:

Dans ce chargement sous une densité d'effort de cisaillement homogène  $p$ , le tenseur des contraintes s'écrit:

$$\sigma_{11} = 0 \quad ; \quad \sigma_{22} = 0 \quad ; \quad \sigma_{12} = p \quad (3.5)$$

Le champ de déplacement est défini par:

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_2 = \frac{2(1+v)}{E}\sigma_{12}x \quad (3.6)$$

### 3.4.1) Test sur un élément RMQ-7:

#### a) Chargement de traction uniforme:

##### Cas 1:

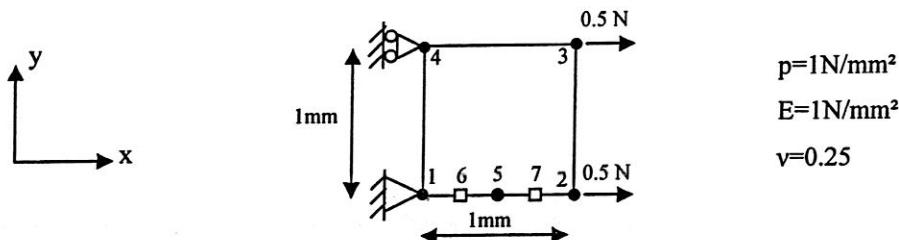


Figure 3.1: Un élément RMQ-7 soumis à chargement de traction uniforme (interface//x)

	Déplacements								Contraintes			
	$u_1(\text{mm})$				$u_2(\text{mm})$				$\sigma_{22}(\text{N/mm}^2)$	$\sigma_{12}(\text{N/mm}^2)$		
	Nœuds				Nœuds				Nœuds		Nœuds	
	2	3	4	5	2	3	4	5	6	7	6	7
RMQ-7	1.00	1.00	0.00	0.50	0.00	-0.25	-0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Théorie	1.00	1.00	0.00	0.50	0.00	-0.25	-0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tableau 3.2: Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour un élément (traction uniforme) – Cas 1

Le tableau 3.2 montre que les valeurs numériques sont en conformité avec les valeurs théoriques.

##### Cas 2:

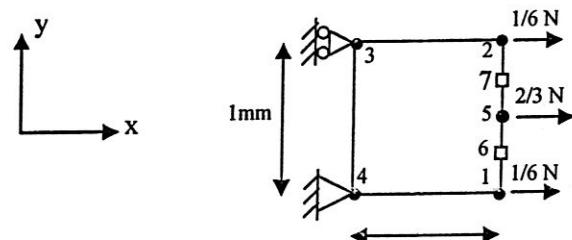


Figure 3.2: Un élément RMQ-7 soumis à chargement de traction uniforme (interface//y)

	Déplacements								Contraintes			
	u <sub>1</sub> (mm)				u <sub>2</sub> (mm)				σ <sub>22</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	σ <sub>12</sub> (N/mm <sup>2</sup> )		
	Nœuds				Nœuds				Nœuds	Nœuds		
	1	2	3	5	1	2	3	5	6	7	6	7
RMQ-7	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00	-0.25	-0.25	-0.125	0.00	0.00	0.00	0.00
Théorie	1.00	1.00	0.00	1.00	0.00	-0.25	-0.25	-0.125	0.00	0.00	0.00	0.00

Tableau 3.3: Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour un élément (traction uniforme) – Cas 2

Les résultats numériques vérifient les valeurs théoriques.

### Cas 3:

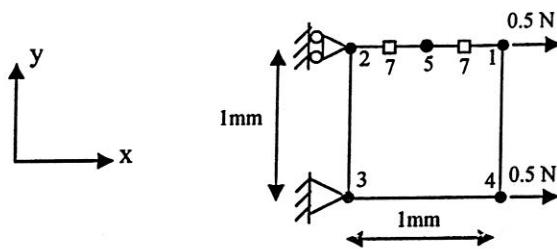


Figure 3.3: Un élément RMQ-7 inversé soumis à chargement de traction uniforme (interface//x)

	Déplacements								Contraintes			
	u <sub>1</sub> (mm)				u <sub>2</sub> (mm)				σ <sub>22</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	σ <sub>12</sub> (N/mm <sup>2</sup> )		
	Nœuds				Nœuds				Nœuds	Nœuds		
	1	2	4	5	1	2	4	5	6	7	6	7
RMQ-7	1.00	0.00	1.00	0.50	-0.25	-0.25	0.00	-0.25	0.00	0.00	0.00	0.00
Théorie	1.00	0.00	1.00	0.50	-0.25	-0.25	0.00	-0.25	0.00	0.00	0.00	0.00

Tableau 3.4: Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour un élément (traction uniforme) – Cas 3

Les résultats numériques sont en conformité avec les résultats théoriques.

**b) Test de cisaillement pur:**

**Cas 1:**

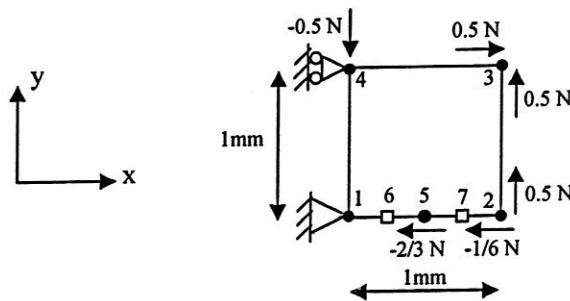


Figure 3.4: Un élément RMQ-7 soumis à chargement de cisaillement pur (interface//x)

	Déplacements								Contraintes			
	$u_1(\text{mm})$				$u_2(\text{mm})$				$\sigma_{22}(\text{N/mm}^2)$	$\sigma_{12}(\text{N/mm}^2)$		
	Nœuds				Nœuds				Nœuds		Nœuds	
	2	3	4	5	2	3	4	5	6	7	6	7
RMQ-7	0.00	0.00	0.00	0.00	2.50	2.50	0.00	1.25	0.00	0.00	1.00	1.00
Théorie	0.00	0.00	0.00	0.00	2.50	2.50	0.00	1.25	0.00	0.00	1.00	1.00

Tableau 3.5: Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour un élément (cisaillement pur) – Cas 1

Les résultats numériques sont en conformité avec les résultats théoriques.

**Cas 2:**

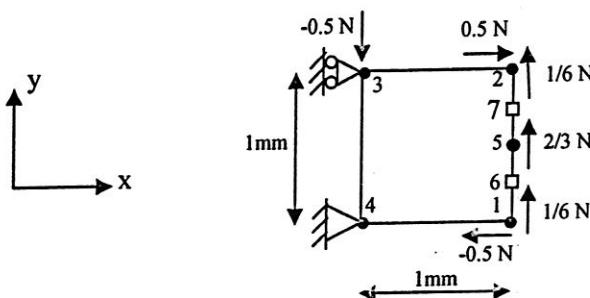


Figure 3.5: Un élément RMQ-7 soumis à chargement de cisaillement pur (interface//y)

	Déplacements								Contraintes			
	u <sub>1</sub> (mm)				u <sub>2</sub> (mm)				$\sigma_{22}$ (N/mm <sup>2</sup> )		$\sigma_{12}$ (N/mm <sup>2</sup> )	
	Nœuds				Nœuds				Nœuds		Nœuds	
	1	2	3	5	1	2	3	4	6	7	6	7
RMQ-7	0.00	0.00	0.00	0.00	2.50	2.50	0.00	2.50	0.00	0.00	1.00	1.00
Théorie	0.00	0.00	0.00	0.00	2.50	2.50	0.00	2.50	0.00	0.00	1.00	1.00

Tableau 3.6: Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour un élément (cisaillement pur) – Cas 2

Les résultats numériques sont en conformité avec les résultats théoriques.

### 3.4.2) Test sur deux éléments RMQ-7 assemblés:

#### a) Chargement de traction uniforme:

##### Cas 1 :

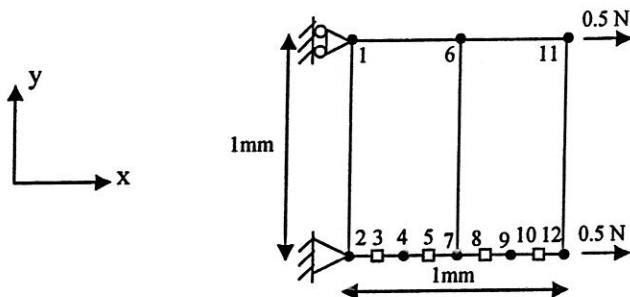
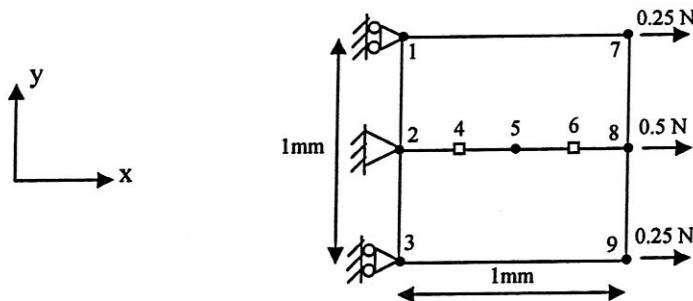


Figure 3.6: Deux éléments RMQ-7 assemblés soumis à chargement traction uniforme (interface//x)

	Déplacements						Contraintes					
	u <sub>1</sub> (mm)			u <sub>2</sub> (mm)			$\sigma_{22}$ (N/mm <sup>2</sup> )			$\sigma_{12}$ (N/mm <sup>2</sup> )		
	Nœuds			Nœuds			Nœuds			Nœuds		
	4	6	12	4	6	12	3	5	10	3	5	10
RMQ-7	0.25	0.50	1.00	0.00	-0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Théorie	0.25	0.50	1.00	0.00	-0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tableau 3.7: Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour deux éléments assemblés (traction uniforme) – Cas 1

Les résultats numériques sont en conformité avec les résultats théoriques.

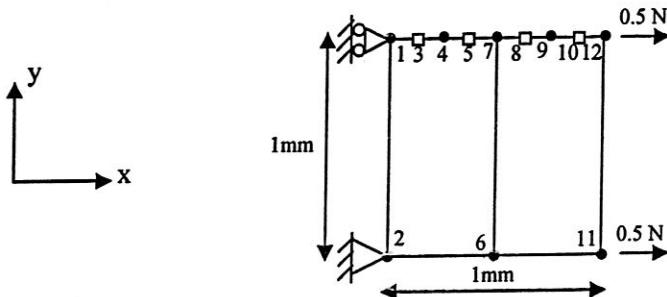
**Cas 2:**

**Figure 3.7:** Deux éléments RMQ-7 assemblés (un inversé) soumis à chargement de traction uniforme (interface//x)

	Déplacements								Contraintes			
	u <sub>1</sub> (mm)				u <sub>2</sub> (mm)				σ <sub>22</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	σ <sub>12</sub> (N/mm <sup>2</sup> )		
	Nœuds				Nœuds				Nœuds		Nœuds	
	1	5	7	9	1	5	7	9	4	6	4	6
RMQ-7	0.00	0.50	1.00	1.00	-0.125	0.00	-0.125	0.125	0.00	0.00	0.00	0.00
Théorie	0.00	0.50	1.00	1.00	-0.125	0.00	-0.125	0.125	0.00	0.00	0.00	0.00

**Tableau 3.8:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour deux éléments assemblés (traction uniforme) – Cas 2

Le calcul numérique donne les mêmes valeurs que le calcul théorique.

**Cas 3:**

**Figure 3.8:** Deux éléments RMQ-7 assemblés (inversés) soumis à chargement de traction uniforme (interface//x)

	Déplacements						Contraintes					
	u <sub>1</sub> (mm)			u <sub>2</sub> (mm)			σ <sub>22</sub> (N/mm <sup>2</sup> )			σ <sub>12</sub> (N/mm <sup>2</sup> )		
	Nœuds		Nœuds		Nœuds			Nœuds			Nœuds	
	4	6	12	4	6	12	3	5	10	3	5	10
RMQ-7	0.25	0.50	1.00	-0.25	0.00	-0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Théorie	0.25	0.50	1.00	-0.25	0.00	-0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tableau 3.9: Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour deux éléments assemblés (traction uniforme) – Cas 3

Les résultats numériques sont en conformité avec les résultats théoriques.

### b) Test de cisaillement pur:

#### Cas 1:

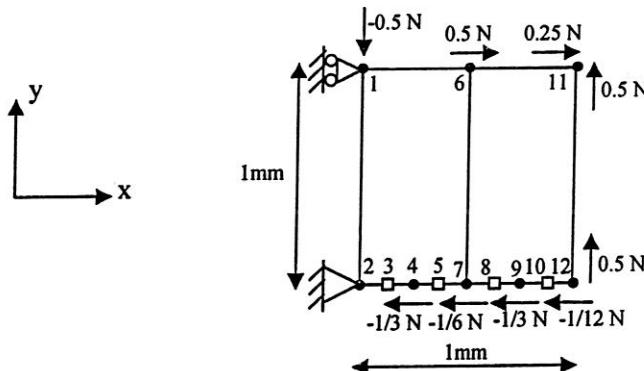
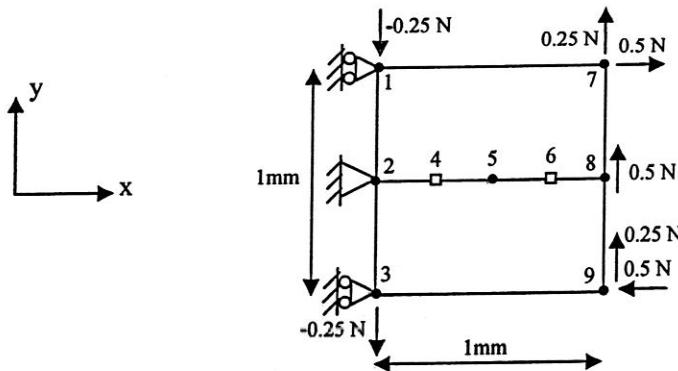


Figure 3.9: Deux éléments RMQ-7 assemblés soumis à chargement de cisaillement pur (interface//x)

	Déplacements						Contraintes					
	u <sub>1</sub> (mm)			u <sub>2</sub> (mm)			σ <sub>22</sub> (N/mm <sup>2</sup> )			σ <sub>12</sub> (N/mm <sup>2</sup> )		
	Nœuds		Nœuds		Nœuds			Nœuds			Nœuds	
	4	6	12	4	6	12	3	5	10	3	5	10
RMQ-7	0.00	0.00	0.00	0.625	1.25	2.50	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00
Théorie	0.00	0.00	0.00	0.625	1.25	2.50	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00

Tableau 3.10: Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour deux éléments assemblés (cisaillement pur) – Cas 1

Les résultats numériques vérifient les valeurs théoriques.

**Cas 2:**

**Figure 3.10:** Deux éléments RMQ-7 assemblés (un inversé) soumis à chargement de cisaillement pur (interface//x)

	Déplacements								Contraintes			
	u <sub>1</sub> (mm)				u <sub>2</sub> (mm)				σ <sub>22</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	σ <sub>12</sub> (N/mm <sup>2</sup> )		
	Nœuds				Nœuds				Nœuds	Nœuds		
	1	5	7	9	1	5	7	9	4	6	4	6
RMQ-7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.25	2.50	2.50	0.00	0.00	1.00	1.00
Théorie	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.25	2.50	2.50	0.00	0.00	1.00	1.00

**Tableau 3.11:** Comparaison des résultats obtenus par le présent élément et la théorie pour deux éléments assemblés (cisaillement pur) – Cas 2

En conclusion, tous les résultats des tests numériques de représentation d'états homogènes vérifient bien les valeurs théoriques.

### 3.5) Test de convergence d'une poutre plane:

Afin d'évaluer la validité de l'élément d'interface (RMQ-7), nous allons faire une étude de convergence sur un exemple de poutre console homogène en flexion.

#### 3.5.1) Définition de la poutre:

Une poutre console, en contrainte plane, est soumise à deux types de chargements (Figure 3.11). Le premier type de chargement correspondant à une distribution uniforme d'effort transversale répartie sur l'extrémité de la poutre. Le deuxième chargement correspond à un test de flexion pur.

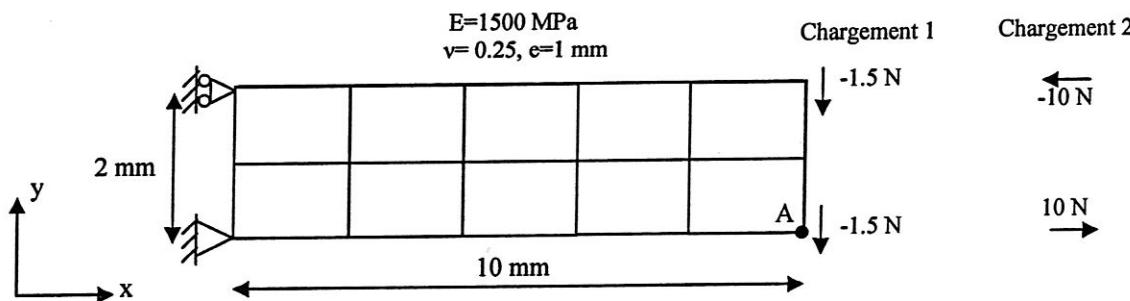


Figure 3.11 : Définition de la poutre

### 3.5.2) Maillage de la poutre:

Pour le maillage de la poutre, on prend deux (2) divisions suivant la hauteur de la poutre comme le montre la figure suivante:

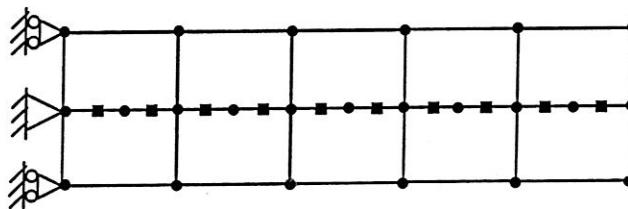


Figure 3.12: Maillage de la poutre

Le raffinement du maillage s'effectue uniquement dans le sens de la longueur de la poutre en gardant deux divisions suivant l'épaisseur de la poutre.

### 3.5.3) Résultats numériques et commentaires:

Dans cet exemple, nous avons comparé les résultats obtenus par l'élément RMQ-7 avec des valeurs de référence soit théoriques (Timoshenko et Euler-Bernoulli) soit provenant de calculs réalisés avec d'autres éléments. Les valeurs de référence et des divers types d'éléments sont issues des références [1] et [7]. Le résumé des résultats est présenté au tableau 2.

Type d'élément	Nombre de degrés de liberté	Flèche au point A (mm)	
		Chargement 1	Chargement 2
Elément déplacement (4 nodes)	728	0.961	0.922
Elément de Reissner (4 nodes)	1431	1.023	0.998
Quad-1 Bichara [7]	498	1.029	1.000
Présent élément d'interface (RMQ-7)	150	1.000	0.976
Théorie classique	-	1.000	1.000
Théorie de Timoshenko	-	1.030	1.000

Tableau 3.12: Comparaison des divers types d'éléments pour une poutre console en flexion

Le tableau 3.12 montre une bonne concordance entre les valeurs obtenues par l'élément d'interface proposé et les résultats théoriques.

### 3.5.4) Test de convergence:

En utilisant les résultats du raffinement du maillage, on peut observer l'allure de la convergence de la flèche au point A. Le tableau 3.13 donne les valeurs de la flèche en fonction du nombre de degrés de liberté.

Nombre d'éléments	Nombre de degrés de liberté	Flèche au point A	
		Chargement 1	Chargement 2
4	30	0,501	0,577
10	66	0,913	0,901
20	126	0,999	0,974
22	138	0,999	0,975
24	150	1,000	0,976

Tableau 3.13: Flèche au point A en fonction de degrés de liberté

La figure 3.13 montre la convergence de la flèche. Nous constatons que l'élément d'interface présenté converge rapidement pour un nombre peu élevé de degrés de liberté.

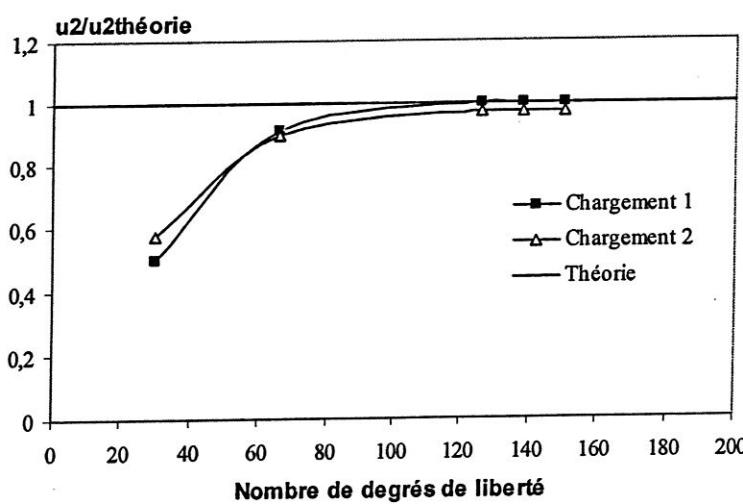


Figure 3.13: Convergence de la flèche de la poutre console

### 3.5.5) Poutre console avec des éléments déformés:

Pour mettre en évidence l'efficacité de l'élément proposé à modéliser des interfaces d'orientation quelconque, nous avons repris le même exemple (poutre console) en utilisant des maillages grossiers avec des éléments déformés (éléments quadrangulaires quelconques).

**Maillage 1** (figure 3.14): Il contient 20 éléments (126 ddl) avec des éléments d'interface orientés de  $\Delta y$  ( $\Delta y=5\%$  et  $10\%$  de la dimension horizontale de l'élément).

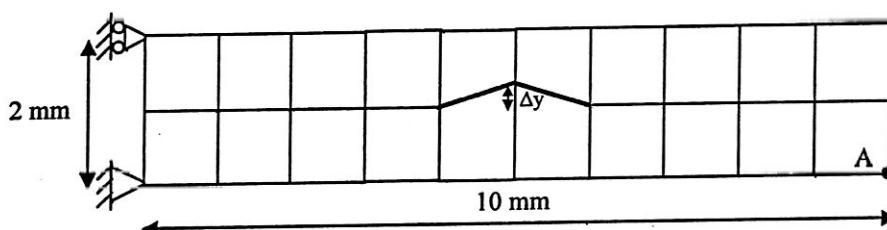


Figure 3.14: Maillage 1

**Maillage 2** (figure 3.15): Il contient 20 éléments (126 ddl) avec des éléments d'interface curvilignes ( $\Delta y=5\%$  et  $10\%$  de la dimension horizontale de l'élément).

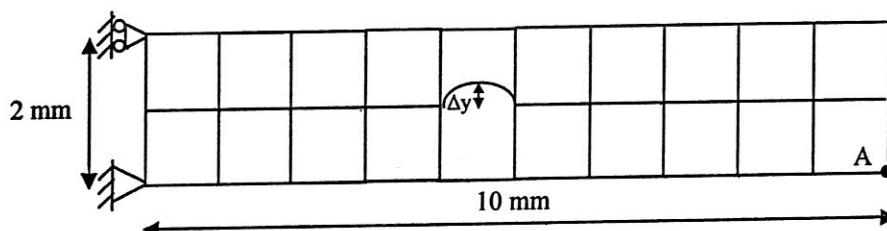


Figure 3.15: Maillage 2

Les tableaux 3.14 et 3.15 montrent les résultats de la flèche au point A pour les différents types de maillages.

	$\Delta y(\%)$	Flèche au point A (mm)	
		Chargement 1	Chargement 2
Présent élément (RMQ 7)	5	0,982	0,959
	10	0,935	0,918
Théorie classique	-	1,000	1,000
Théorie de Timoshenko	-	1,030	1,000

Tableau 3.14: Flèche d'une poutre console – Maillage 1

	$\Delta y(\%)$	Flèche au point A (mm)	
		Chargement 1	Chargement 2
Présent élément (RMQ 7)	5	0,962	0,943
	10	0,872	0,867
Théorie classique	-	1,000	1,000
Théorie de Timoshenko	-	1,030	1,000

Tableau 3.15: Flèche d'une poutre console – Maillage 2

Les tableaux 3.14 et 3.15 montrent une bonne précision des résultats obtenus par rapport à la solution analytique. Ce qui confirme la capacité et l'efficacité de l'élément à modéliser des interfaces d'orientation quelconque.

### 3.6) Poutre sandwich:

Dans cet exemple, on a utilisé l'élément d'interface proposé (RMQ-7) pour l'analyse d'une structure présentant des interfaces cohérentes. Il s'agit d'une poutre sandwich en flexion où l'intérêt est essentiellement axé sur l'étude de la flèche et des contraintes de cisaillement transverses.

#### 3.6.1) Définition de la poutre sandwich:

La poutre sandwich présente trois couches isotropes avec deux peaux identiques et relativement minces. Elle est simplement appuyée et soumise à une charge uniforme  $q_0$  (figure 3.16). On a utilisé les données géométriques et mécaniques citées dans la référence [11].

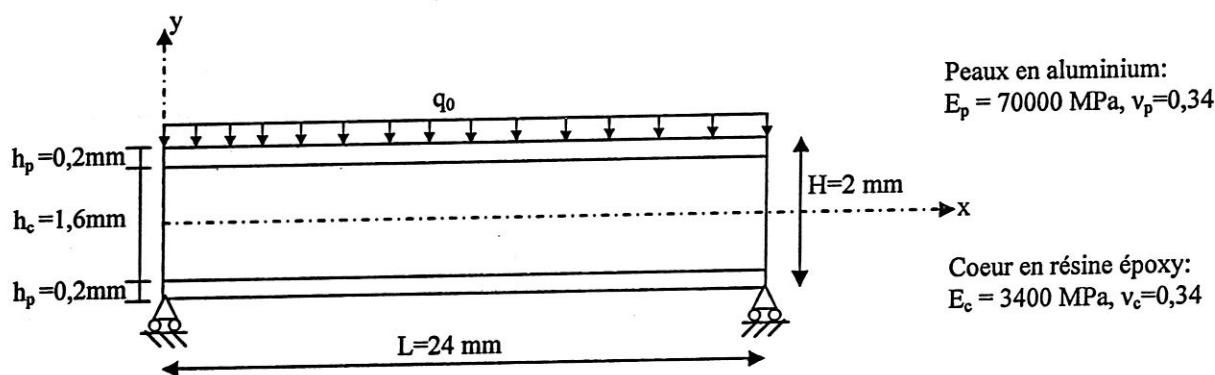


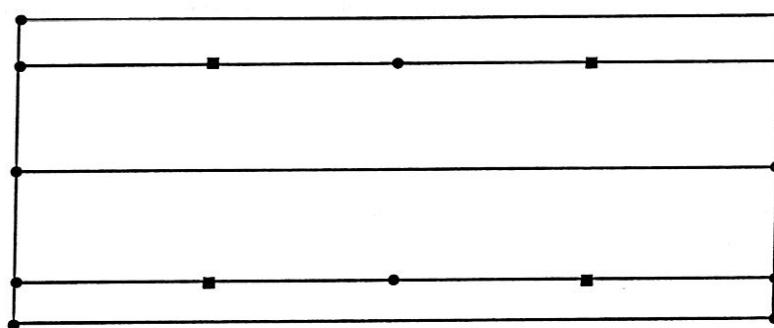
Figure 3.16 : La poutre sandwich analysée

### 3.6.2) Maillage de la poutre sandwich:

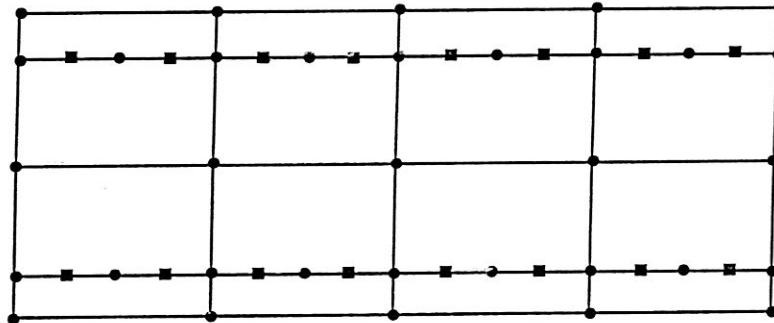
Nous avons utilisé trois types de maillages:

- a) Maillage -1- avec 4 éléments RMQ-7 et 32 degrés de liberté (figure 3.17);
- b) Maillage -2- avec 16 éléments RMQ-7 et 98 degrés de liberté (figure 3.18);
- c) Maillage -3- avec 64 éléments RMQ-7 et 402 degrés de liberté.

Le côté particulier de l'élément d'interface, qui comporte des nœuds statiques, est toujours placé le long de l'interface entre peaux et cœur.



**Figure 3.17: Maillage -1- de la poutre sandwich**



**Figure 3.18: Maillage -2- de la poutre sandwich**

### 3.6.3) Résultats et discussion:

Pour mettre en évidence la capacité et l'efficacité de l'élément d'interface proposé (RMQ-7 en formulation isoparamétrique) à modéliser des structures à interface cohérente, nous avons fait référence à la solution analytique de Pagano [40,41].

### 3.6.3.1) Etude de la convergence de la flèche:

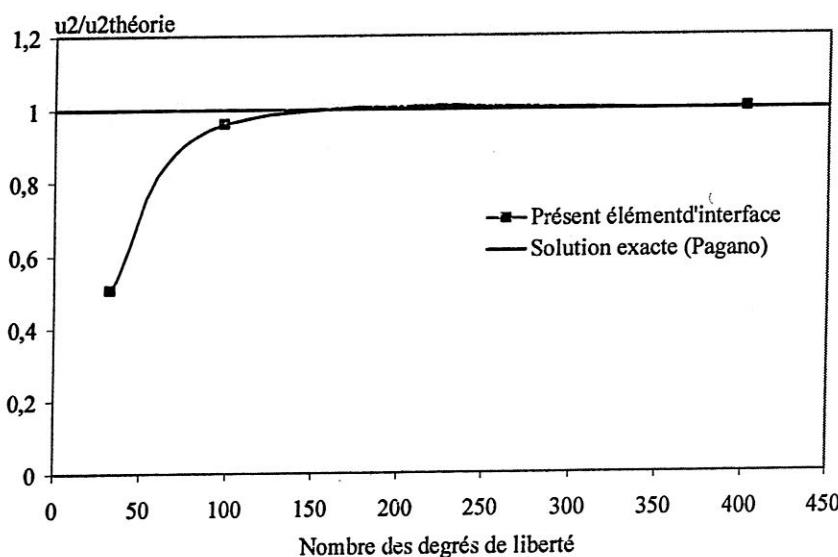
Nous avons étudié la convergence de la flèche au centre de la poutre ( $x=L/2$ ) en fonction du nombre des degrés de liberté. Le tableau 3.16 donne les valeurs de la flèche obtenues par les trois maillages.

Type d'élément	Nombre des degrés de liberté	Flèche $u_2$ (mm)	Ecart avec la solution exacte (%)
Présent élément d'interface (RMQ-7)	32	-0.105	50
	98	-0.200	4
	402	-0.209	0,5
Solution exacte (Pagano)	-	-0.208	-

**Tableau 3.16:** Valeurs de la flèche au centre de la poutre( $x=L/2$ ) en fonction du nombre des degrés de liberté

Le tableau 3.16 montre que l'écart avec la solution exacte passe de 4% avec 98 degrés de liberté à 0,5% avec 402 degrés de liberté, ce qui met en évidence la très bonne précision des résultats obtenus par rapport à la solution analytique de Pagano.

La figure 3.19 représente la convergence de la flèche. Nous constatons que l'élément d'interface présenté converge très rapidement pour un nombre peu élevé de degrés de liberté.



**Figure 3.19:** Convergence de la flèche à mi-portée de la poutre sandwichie

### 3.6.3.2) Convergence de la contrainte de cisaillement transversal:

Nous avons déterminé les contraintes de cisaillement transverses suivant l'épaisseur dans la section de la poutre d'abscisse ( $x=L/4$ ) pour les différents types de maillages.

Le tableau 3.17 donne les valeurs de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$  obtenues en utilisant l'élément RMQ-7 et celles données par la solution analytiques [40,41].

Type d'élément	Nombre des degrés de liberté	Contrainte de cisaillement transversal		
		$y = -h_c/2$	$y = 0$	$y = h_c/2$
Présent élément d'interface (RMQ-7)	32	-3,026	-	-3,001
	98	-3,135	-	-3,258
	402	-3,197	-3,314	-3,184
Solution exacte (Pagano)	-	-3,159	-3,431	-3,158

Tableau 3.17: Valeurs de  $\sigma_{12}$  suivant l'épaisseur l'abscisse  $x=L/4$  en fonction du nombre des degrés de liberté

Le tableau 3.17 montre que l'élément mixte d'interface fournit des très bons résultats comparant à ceux de la solution exacte.

Une étude de convergence de la contrainte de cisaillement transversal au point de l'interface inférieure ( $y=-h_c/2$ ) de la poutre d'abscisse ( $x=L/4$ ). La figure 3.20 représente cette convergence. Nous constatons une très bonne convergence de l'élément mixte d'interface proposé.

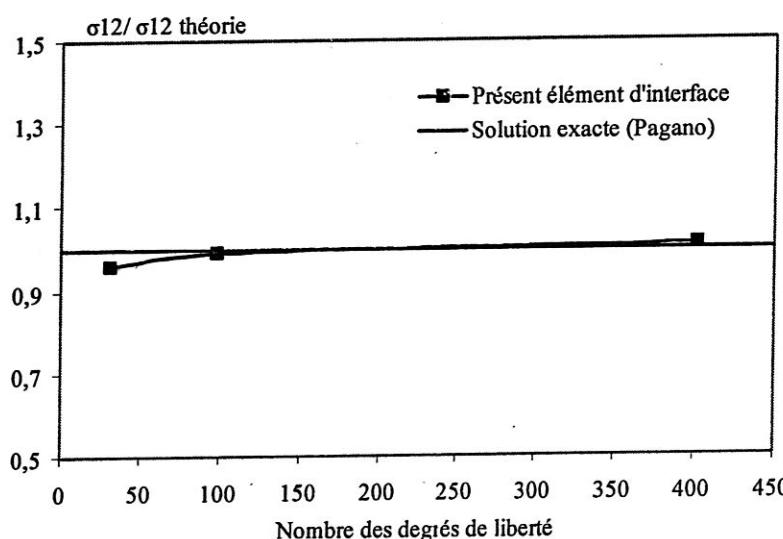


Figure 3.20: Convergence de la contrainte de cisaillement transversal ( $x=L/4$  et  $y=-h/2$ )

### 3.6.3.3) Etude du déplacement horizontal $u_1$ :

Nous avons étudié la variation des déplacements  $u_1$  suivant l'épaisseur dans la section de la poutre d'abscisse  $x=L/4$ .

Le tableau 3.18 résume les résultats obtenus en utilisant l'élément RMQ-7 et ceux de la solution exacte.

Type d'élément	Nombre des degrés de liberté	Déplacement horizontal $u_1$ (mm)		
		$y = -h_c/2$	$y = 0$	$y = h_c/2$
Présent élément d'interface (RMQ-7)	98	-0,123D-01	-0,160D-03	0,122D-01
	402	-0,128D-01	-0,623D-04	0,127D-01
Solution exacte (Pagano)	-	-0,130D-01	-0,610D-04	0,129D-01

**Tableau 3.18:** Valeurs de  $u_1$  suivant l'épaisseur à l'abscisse  $x=L/4$  en fonction du nombre des degrés de liberté

Le tableau 3.18 montre une très bonne concordance entre les valeurs numériques obtenues en utilisant l'élément RMQ-7 et les résultats théoriques de Pagano.

En conclusion, tous les résultats numériques de l'élément d'interface présenté confirment la capacité et l'efficacité de l'élément RMQ-7 (en formulation isoparamétrique) à traiter des structures présentant des interfaces cohérentes.

# **Chapitre 4**

## **Rupture interfaciale des bimatériaux anisotropes**

## Chapitre 4

### Rupture interfaciale des bimatériaux anisotropes

#### 4.1) Introduction :

La mécanique de la rupture est une discipline récente ; après les premiers travaux fondateurs de Griffith [42], elle est quelque peu tombée dans l'oubli et ce n'est qu'à partir de 1950, avec les travaux de Williams [43], Irwin [44], Rice et Tracey [45], Gurson [46] qu'elle a véritablement pris son essor. Son objet est l'étude des fissures dans les matériaux solides. Son but est de prévoir et de prévenir, dans la mesure du possible, l'apparition (on dit aussi l'amorçage ou l'initiation) et la propagation de ces défauts. Elle est très utilisée dans les industries de pointe (aéronautique, nucléaire) [47].

La mécanique de la rupture se subdivise en deux sous-disciplines dont les préoccupations et les méthodes n'ont que peu de rapports : la mécanique de la rupture fragile et la mécanique de la rupture ductile. L'origine de la différence provient fondamentalement des mécanismes différents qui président à la rupture. Ces différences se manifestent à l'échelle macroscopique par le fait que la plasticité est peu importante en rupture fragile (le matériau demeure essentiellement élastique, sauf au voisinage immédiat du front de fissure, si bien qu'il se déforme peu avant la rupture : c'est pourquoi on parle de matériau fragile), mais très importante en rupture ductile, au point que l'on peut le plus souvent ignorer l'élasticité (la plasticité est envahissante, si bien que le matériau se déforme beaucoup avant de se rompre : c'est pourquoi on parle de matériau ductile). Dans cette étude, seule la rupture fragile est abordée [47].

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions et concepts de la mécanique linéaire de la rupture. L'accent est mis sur la rupture interfaciale et sur l'adaptation de ces concepts à l'étude des interfaces fissurées entre matériaux anisotropes. Nous avons aussi exposé les différentes méthodes utilisées pour l'évaluation du taux de restitution d'énergie et notre choix a été orienté vers l'association de la méthode d'extension virtuelle de fissure avec l'élément d'interface mixte présenté pour le calcul du taux de restitution d'énergie.

## 4.2) Rupture d'un matériau homogène :

Pour se préparer à l'étude de la rupture interfaciale, il convient de rappeler quelques notions et concepts de la mécanique de la rupture en milieux homogènes.

### 4.2.1) Notions et concepts de base :

#### 4.2.1.1) Rupture fragile et rupture ductile :

##### a) Rupture fragile

Du point de vue microscopique, la rupture fragile se caractérise le plus souvent, au moins dans les matériaux à structure cristalline, par une rupturo transgranulaire. Cependant, la mécanique de la rupture fragile ignore complètement ce mécanisme et ne retient qu'une chose, le caractère essentiellement élastique du comportement, même en présence de la fissure. ; le phénomène de rupture est introduit de manière purement phénoménologique. Un premier résultat fondamental est dû à Williams [43] ; il concerne le comportement asymptotique des contraintes au voisinage du front de fissure, en élasticité pure et dans le cas statique. Williams a montré que, quels que soient la géométrie et le chargement, les contraintes sont toujours asymptotiquement inversement proportionnelles à la racine carrée de la distance au front. La géométrie et le chargement n'interviennent que par l'intermédiaire de trois constantes multiplicatives, notées traditionnellement  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , et appelées facteurs d'intensité de contraintes des modes I, II et III respectivement [47].

A partir de ce résultat, Irwin [44] a proposé une description heuristique du processus de rupture, dans le cas d'une situation bidimensionnelle. Sa proposition consiste à admettre l'existence d'une nouvelle grandeur caractéristique du matériau, appelée ténacité et notée  $K_{Ic}$  (comme valeur critique de  $K_I$ ), telle que si  $K_I$  demeure inférieur à  $K_{Ic}$ , la fissure ne puisse pas se propager, tandis que si  $K_I$  atteint cette valeur, elle puisse le faire. Cette proposition ouvre immédiatement la porte aux applications pratiques. Le travail de l'expérimentateur consiste à mesurer la valeur de la ténacité. Il est à noter que cette procédure presuppose toujours l'existence d'une fissure initiale. C'est la une faiblesse et une limitation de la mécanique de la rupture fragile : elle est capable de prédire la propagation des fissures, mais non leur amorçage [47].

Griffith [42] a procédé à une analyse énergétique de la propagation, supposée quasi statique, de la fissure (toujours en situation bidimensionnelle et en mode I pur). Il a mis en évidence l'importance d'une grandeur appelée taux de restitution d'énergie et traditionnellement notée  $G$ , égale au signe près à la variation d'énergie totale (élastique + potentielle des forces

imposées) lorsque la fissure se propage sous chargement constant. Il a montré que le critère de propagation s'écrit naturellement sous la forme  $G = G_c$  où  $G_c$  (valeur critique de  $G$ ) est une nouvelle grandeur caractéristique du matériau. Un autre apport fondamental d'Irwin [44] est d'avoir démontré l'équivalence de son approche et de celle de Griffith, c'est-à-dire l'équivalence des critères de propagation  $K_I = K_{Ic}$ , et  $G = G_c$ .

### b) Rupture ductile :

Les succès de la mécanique de la rupture fragile ont naturellement poussé les mécaniciens à essayer de se contenter, dans le cas de la rupture ductile, d'une simple transposition des méthodes et raisonnements de cette théorie. L'approche qui résulte de cette transposition est traditionnellement qualifiée de globale. Elle possède encore de nombreux partisans et est couramment utilisée. Cependant, il est apparu progressivement au fil des années qu'elle présente de graves insuffisances. Ces insuffisances sont fondamentalement liées à la démarche purement macroscopique de la théorie de la rupture fragile : lorsque le comportement n'est plus strictement élastique. Il devient nécessaire de descendre à une échelle suffisamment fine pour que la zone fine où se produit la rupture apparaisse comme un volume et non une simple ligne (le front de fissure), et d'analyser précisément les mécanismes de rupture. La version la plus moderne, dite approche locale, de la mécanique de la rupture ductile, repose donc sur une démarche micromécanique et sur un passage micro-macro, contrairement à la mécanique de la rupture fragile purement macroscopique [47].

Parmi les contributions les plus importantes, en mécanique de rupture ductile, celle qui a été apportée par Rice et Tracey [45], qui ont étudié de manière approchée, par analyse limite, la croissance d'une cavité initialement sphérique située dans un milieu rigide parfaitement plastique obéissant au critère de Von Mises et soumis à un chargement uniforme à l'infini. Une autre contribution importante est due à Gurson [46]. Elle a consisté en une analyse limite approchée d'une sphère creuse plastique, obéissant au critère de Von Mises et soumise à un chargement quelconque [47].

#### 4.2.1.2) Facteur de concentration des contraintes :

On considère un défaut de forme elliptique (figure 4.1) de longueur  $2a$  et de rayon au fond d'entaille  $\rho$ , la contrainte locale à l'extrémité A s'écrit [48] :

$$\sigma_L(A) = \sigma_a \left( 1 + \frac{2a}{b} \right) = \sigma_a \left( 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (4.1)$$

Dans le cas d'une entaille très aigüe,  $\rho \ll a$  et on a alors :

$$\sigma_L(A) \approx 2\sigma_a \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (4.2)$$

Le facteur amplifiant la contrainte est le rapport  $K_T = 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$  appelé facteur de concentration de contrainte. Le facteur de concentration de contrainte  $K_T$  peut devenir très grand pour des entailles aigües telles que des fissures.

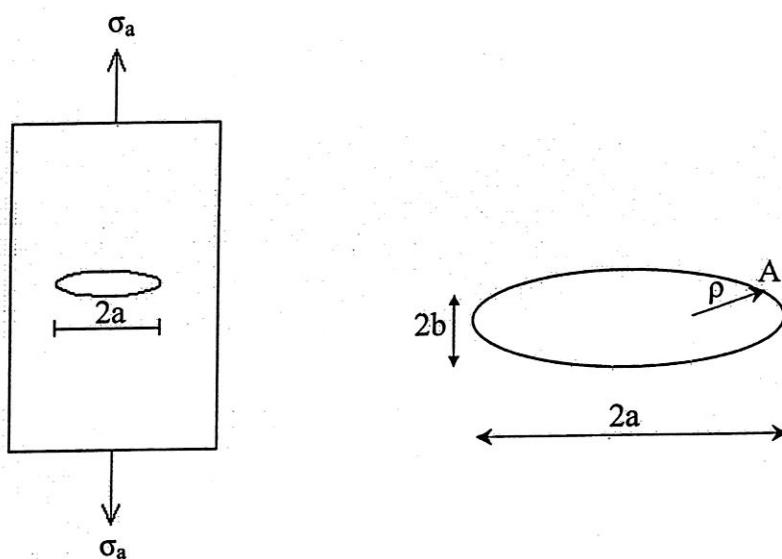
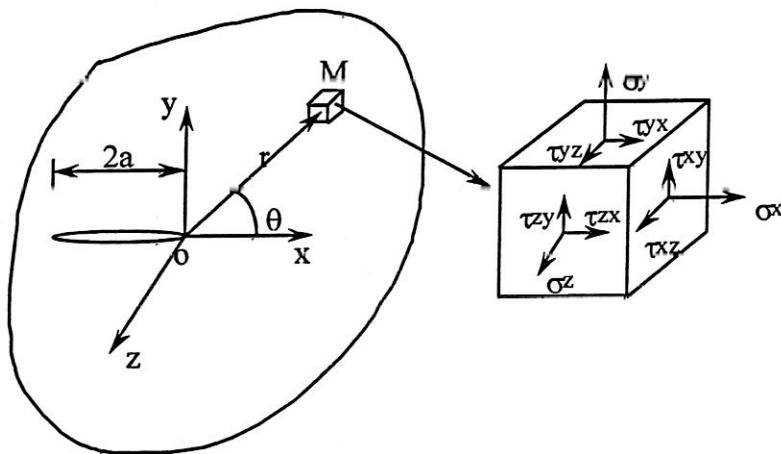


Figure 4.1 : Défaut elliptique dans une plaque infinie

#### 4.2.1.3) Facteur d'intensité des contraintes :

Considérons un corps constitué d'un matériau homogène élastique linéaire présentant une fissure de longueur  $2a$ , plane, et rectiligne (figure 4.2).



**Figure 4.2 : Système d'axes dans le corps fissuré.**

L'expression du champ de contrainte au voisinage de la pointe de fissure s'écrit [49] :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_m}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (4.3)$$

avec :

$m$  correspond à chacun des modes de rupture ( $m = I, II, III$ ) ;

$i$  et  $j$  varient entre 1 et 3 ;

$f_{ij}(\theta)$  est une fonction de la seule variable  $\theta$  pour chaque mode ;

$K_m$  sont des coefficients appelés facteurs d'intensité de contraintes qui sont indépendants de  $r$  et  $\theta$ , et ne sont fonction que de la géométrie de la fissure et des conditions aux limites. Le facteur d'intensité des contraintes décrit la distribution des contraintes et des déformations près d'une fissure. La relation (4.3) montre que la singularité est en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ .

Pour chaque mode  $m$  donné, l'intensité de l'état de contrainte est entièrement déterminé dès lors que la valeur de  $K_m$  est connue.

#### 4.2.2) Méthodes de résolution d'un problème de rupture :

Il existe deux approches pour analyser un problème de rupture permettant d'étudier les champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure :

1. Approches directes où méthodes locales qui sont basées sur l'utilisation des fonctions d'Airy. Ces approches résolvent des problèmes plans et font appel à la recherche de fonctions analytiques. Dans le cadre de ces approches on énumère : la résolution de Westergaard, l'expansion de Williams et l'analyse de Muskhelishvili.
2. Approches énergétiques où méthodes globales qui sont fondées sur l'analyse énergétique du milieu continu contenant une fissure. Il s'agit d'un bilan énergétique global intégrant le taux de restitution d'énergie à un accroissement virtuel de la fissure. Dans le cadre de ces approches, on peut traiter des problèmes où le milieu n'est pas exclusivement élastique linéaire et homogène. Dans le cadre de ces approches on énumère : taux de restitution d'énergie, intégrales de contour (Intégrales J), densité de l'énergie de déformations.

##### 4.2.2.1) Approches directes :

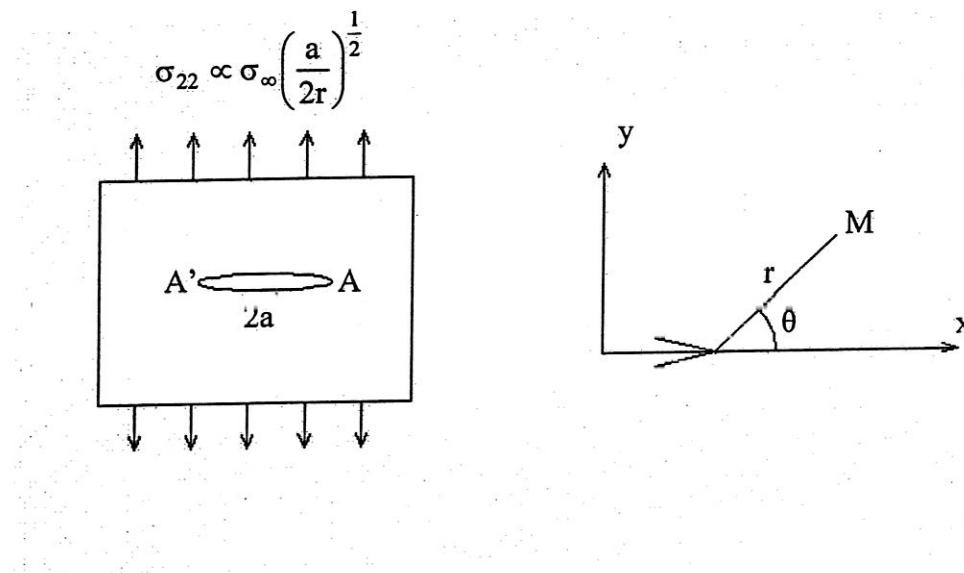
###### a) Solution de Muskhelishvili :

Cette approche donne une solution analytique au problème représenté sur la figure 4.3. La solution analytique exacte de ce problème, sur l'axe  $y = 0$ , en supposant un état de contraintes planes :

$$\text{Si } x \geq a \quad \sigma_{22} = \frac{\sigma_\infty}{\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} ; \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} - \sigma_\infty \quad (4.6)$$

$$\epsilon_{22} = \left( \frac{\sigma_\infty}{E} \right) \left( v + \frac{1-v}{\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (4.7)$$

$$\text{Si } 0 \leq x \leq a \quad [u_2] = 2u_2 = \left( \frac{4a\sigma_\infty}{E} \right) \left( 1 - \left( \frac{a}{x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

Figure 4.3 : Plaque infinie en traction simple selon  $y$ 

### b) Solution asymptotique de Westergaard :

La résolution de Westergaard ramène la recherche d'une solution au problème d'élasticité plane à trouver, pour chaque mode de fissuration une fonction complexe harmonique dont l'expression dépend de la forme de la fissure, et du type de chargement [2]. Le problème précédent peut également aborder en introduisant la fonction d'Airy  $\psi(x, y)$  telle que :  $\sigma_{11} = \psi_{,22}$ ;  $\sigma_{22} = \psi_{,11}$ ;  $\sigma_{12} = -\psi_{,12}$ . Les équations d'équilibre sont alors automatiquement vérifiées. En élasticité linéaire, le report de ces égalités dans les conditions de compatibilité  $2\epsilon_{12,12} = \epsilon_{11,11} + \epsilon_{22,22}$  conduit à chercher  $\psi$  comme solution de l'équation biharmonique  $\Delta\Delta\psi = 0$ . Ce problème se résout par la méthode des fonctions complexes.

Irwin a montré que le premier terme du développement limité est le même, à un facteur multiplicatif près, pour tous les problèmes correspondant à un mode d'ouverture donné. La sollicitation d'une fissure linéaire dans un milieu plan perpendiculairement à son axe correspond au mode I; on introduit le facteur d'intensité de contrainte en mode I, tel que :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{22} \sqrt{2\pi r}) \quad (4.9)$$

#### 4.2.2.2) Approches énergétiques :

##### a) Taux de restitution d'énergie G:

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à une structure fissurée en milieu élastique linéaire sans échange thermique stipule la conservation de l'énergie totale de la structure qui s'écrit [2]:

$$dW(\varepsilon) - dW_{\text{ext}} - dW_s - dE_c = 0 \quad (4.10)$$

où

$W(\varepsilon)$  : est l'énergie de déformation de la structure,  $dW(\varepsilon)$  = la variation de  $W(\varepsilon)$

$W_{\text{ext}}$  : est le travail des efforts extérieurs,  $dW_{\text{ext}}$  = la variation de  $W_{\text{ext}}$

$W_{\text{pot}} = W(\varepsilon) - W_{\text{ext}} \rightarrow dW(\varepsilon) - dW_{\text{ext}} = dW_{\text{pot}}$  = La variation de l'énergie potentielle

$W_s$  : est l'énergie de surface, et  $dW_s$  est l'énergie dissipée dans la séparation des lèvres de la fissure.

$dE_c$  : est la variation de l'énergie cinétique de la fissure.

Lors d'un accroissement de ( $ds$ ) de la surface de la fissure, il y aura  $dE_c > 0$ , et donc:

$$\frac{\partial}{\partial s} (W_{\text{pot}}) - \frac{\partial W_s}{\partial s} \geq 0 \quad (4.11)$$

ou autrement

$$\frac{\partial}{\partial s} [W(\varepsilon) - W_{\text{ext}}] - \frac{\partial W_s}{\partial s} \geq 0 \quad (4.12)$$

Avec

$$\frac{\partial}{\partial s} [W(\varepsilon) - W_{\text{ext}}] = \frac{\partial}{\partial s} (W_{\text{pot}}) = G = \text{Taux de restitution d'énergie}$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial s} = 2\gamma, \quad \gamma \text{ étant un paramètre intrinsèque au matériau.}$$

Pour qu'il y ait fissuration, il faut que :

$$G \geq 2\gamma \quad (4.13)$$

avec  $G = \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial s}$  (4.14)

$G$  est un valeur négative puisque  $W_{\text{pot}}$  diminue lors de l'accroissement de  $s$ .

Pour une fissure en milieu bidimensionnel, d'épaisseur  $b$ , on écrit  $ds = b.da$ ,

$G$  s'écrit alors :  $G = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial a}$  où  $da$  est l'accroissement de la fissure.

Pour une épaisseur unité :  $G = \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial a}$  (4.15)

### b) Intégrale de Rice J (Intégrale de contour):

Considérant une fissure semi plane à l'équilibre dans un matériau homogène isotrope. Donnons dans une section transverse à cette fissure un contour  $\tau$  entourant la pointe (figure 4.4). Soit  $n$  le vecteur normal unitaire extérieur défini le long de  $\tau$ , et  $w$  la densité d'énergie élastique. Cette densité d'énergie est défini par :

$$w = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij} \quad (4.16)$$

En se plaçant dans le cadre de l'élasticité Hookéenne, la densité d'énergie élastique donnée ci-dessus est bien quadratique en les déformations. Considérons l'intégrale curviligne introduite par Jim Rice [50] :

$$J = \int_{\tau} (wn_x - \sigma_{ij} u_{i,x} n_j) ds \quad (4.17)$$

où la direction  $x$  est celle de la fissure. L'élément différentiel  $ds$  est le produit de l'élément de longueur sur  $\tau$  par unité de longueur transverse. Rice a montré que cette intégrale  $J$  est indépendante du contour choisi.

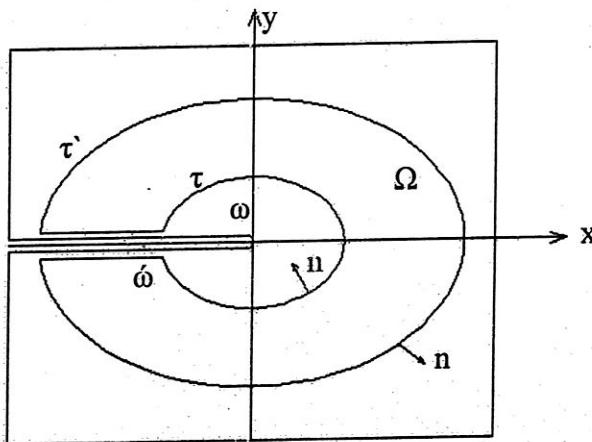
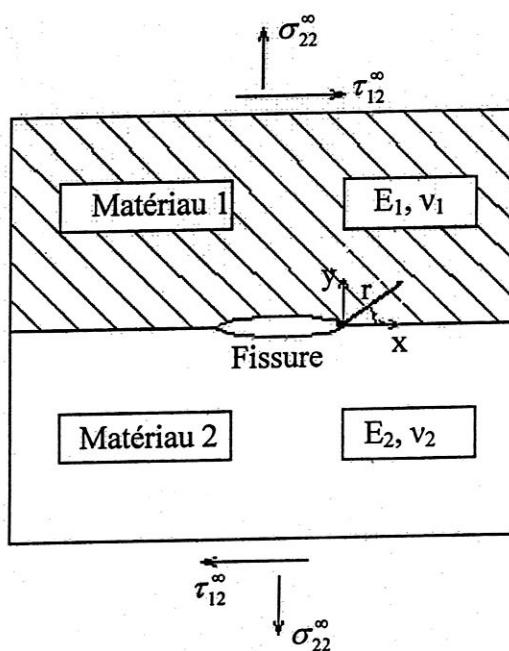


Figure 4.4 : Intégrale de contour ( $J$ )

### 4.3) Rupture interfaciale :

La rupture interfaciale est un phénomène complexe et encore mal compris, ce qui suffirait déjà à justifier son étude. En effet, l'interface située entre deux matériaux différents est, du point de vue mécanique, un point faible : lorsque ces matériaux sont sollicités par des contraintes, d'origine thermique par exemple, la rupture de l'interface est un mode de rupture couramment observé. De plus, on connaît mal les conditions mécaniques qui conduisent à cette rupture. Une compréhension de la fracture interfaciale représente donc un enjeu important dans le domaine des matériaux composites.

Considérons le schéma de l'interface fissurée du bimatiériaux montré dans la figure 4.5. La fissure est localisée le long de l'interface qui est entre deux plans semi-infinis.



**Figure 4.5 : Interface fissurée entre deux matériaux soumis aux contraintes Normale et transverse.**

Il y a une différence fondamentale entre l'analyse et l'interprétation des facteurs d'intensité de contrainte pour des interfaces fissurées entre bimateriaux par rapport aux fissures en matériaux homogènes. A la différence des matériaux homogènes, les bimateriaux montrent un couplage des effets de traction et du cisaillement. En outre, les contraintes singulières sont oscillantes à proximité de la pointe de fissure à l'interface. Le champ de contrainte est caractérisé par un facteur complexe d'intensité de contrainte,  $K$ , ainsi que la constante du bimatiériaux,  $\epsilon$ , reliant les propriétés élastiques des deux matériaux.

Les contraintes,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$ , à une distance  $r$  devant la pointe de la fissure sont données par [51] :

$$(\sigma_{22} + i\sigma_{12})_{\theta=0} = \frac{K r^{ie}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4.18)$$

où  $K = K_1 + iK_2$  est le facteur complexe d'intensité de contrainte.

Le paramètre  $\varepsilon$  s'appelle constant bi élastique ou indice oscillant, est donné par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \quad (4.19)$$

où  $\beta$  est l'un des paramètres de Dundurs [52] :

$$\beta = \frac{\mu_2(k_1 - 1) - \mu_1(k_2 - 1)}{\mu_2(k_1 + 1) + \mu_1(k_2 + 1)} \quad (4.20)$$

avec :

$$k_i = \begin{cases} 3 - 4\nu_i & (\text{Déformations planes}) \\ \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i} & (\text{Contraintes planes}) \end{cases} \quad (4.21)$$

où  $\mu_i, \nu_i$  sont le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau  $i$  ( $i = 1, 2$ ) respectivement.

Malyshev et Salganik [53] ont montré que, pour une fissure interfaciale, le taux de restitution d'énergie peut être lié à l'amplitude de facteur d'intensité de contrainte par la relation :

$$G = \frac{1}{E^*} \frac{|K|^2}{\cosh^2(\pi\varepsilon)}, \quad |K|^2 = K\bar{K} = K_1^2 + K_2^2 \quad (4.22)$$

Où

$$\frac{2}{E^*} = \frac{1}{\bar{E}_1} + \frac{1}{\bar{E}_2} \quad (4.23)$$

$$\bar{E}_i = \begin{cases} E_i (\text{déformations planes}) \\ \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} (\text{contraintes planes}) \end{cases} \quad (4.24)$$

L'angle de phase  $\psi$  est une mesure de proportion relative de cisaillement avec des tractions normales à une distance caractéristique  $l$  devant la pointe de fissure. Il est exprimé par la relation suivante [51] :

$$Kl^{ie} = |K|e^{i\psi} \quad (4.25)$$

où

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}[Kl^{ie}]}{\text{Re}[Kl^{ie}]} \right) \quad (4.26)$$

L'angle de phase  $\psi$  est un paramètre important dans la caractérisation de la dureté interfaciale de rupture.

#### 4.4) Rupture des bimatiériaux anisotropes :

##### 4.4.1) Introduction :

La mécanique de la rupture des bimatiériaux a attiré une attention croissante en raison de ses applications directes aux matériaux composites qui sont très utilisés dans plusieurs domaines tel que l'aéronautique, la construction mécanique et le génie civil. Il est bien connu que les structures stratifiées soient enclines aux défauts tels que la fissuration dans la matrice du matériau et le délaminateur aux interfaces.

Théoriquement, les problèmes de rupture interfaciale dans les bimatiériaux isotropes ont été étudiés [54–56] où les auteurs ont prouvé que les contraintes possèdent une singularité de la forme  $r^{-1/2+ie}$ .

Les fissures finies le long de l'interface entre deux plaques anisotropes ont été d'abord étudiées par Gotoh [57]. Le problème généralisé de déformation plane d'une fissure à travers une interface entre deux solides anisotropes a été traité par Clements [58], Willis [59], Qu et Bassani [60], Suo [61], Li et Qu [62], et Ni et Nemat-Nasser [63]. Un cas spécial du problème de Griffith a été résolu explicitement par Bassani et Qu [60] tandis que Suo [61] et Li et Qu [62] ont obtenu la solution au problème générale.

Qu et Bassani [62] ont pu résoudre le problème d'une fissure finie (au sens de Griffith) à travers une interface entre deux solides semi infinis. Ils ont montré que deux matrices bimatiérielles réelles  $W$  et  $D$  ( $3 \times 3$ ), jouent un rôle fondamental dans la solution et fassent introduire d'une manière complète l'influence des propriétés matérielles sur les contraintes de l'interface.

#### 4.4.2) Facteurs d'intensité des contraintes :

Considérons la déformation bidimensionnelle entre deux solides anisotropes pour lesquels les trois composants des déplacements dépendent seulement des coordonnées cartésiennes en plan  $x$  et  $y$  :  $U_i = U_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$  et  $\epsilon_{33} = 0$ .

Les facteurs d'intensité de contrainte sont définis par Qu et Bassani [62] pour les matériaux anisotropes :

$$K = (K_1, K_2, K_3)^T = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{x} Y(x^{-ie}) \tau(x) \right\} = \sqrt{\pi a} Y((1 + 2ie)(2a)^{-ie}) q_a \quad (4.27)$$

où  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  sont les facteurs d'intensité de contraintes correspondant aux contraintes d'interfaces de la pointe de fissure  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{21}$  et  $\sigma_{23}$ , respectivement.

$Y[\eta]$  est une fonction matricielle fondamentale pour la représentation des champs le long de l'interface introduite par la traction ( $t$ ) sur les surfaces fissurées.

$$Y[\eta] = I - \frac{\text{Im}\{\eta\}}{\beta} D^{-1} W + \frac{(1 - \text{Re}\{\eta\})}{\beta^2} (D^{-1} W)^2 \quad (4.28)$$

avec  $I$  est la matrice unitaire.

Pour  $\eta = c(1 \pm 2ie)\xi^{ie}$ , on a

$$Y[c(1 \pm 2ie)\xi^{ie}] = I - \frac{c}{\beta} [\sin(\xi \ln \xi) \pm 2e \cos(\xi \ln \xi)] D^{-1} W + \frac{c}{\beta^2} [1 - \cos(\xi \ln \xi) \pm 2e \sin(\xi \ln \xi)] (D^{-1} W)^2 \quad (4.29)$$

Il apparaît clairement que le produit de la matrice  $D^{-1} W$  est crucial dans la représentation  $Y$ .

Pour un bimatiériaux composé de matériaux orthotropes,  $W$  et  $D$  sont données par [62] :

$$W = (s_1 - s_2) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

où:

$$D_{11} = \frac{s_1}{\eta_1} + \frac{s_2}{\eta_2} \quad (4.32)$$

$$D_{22} = \frac{s_1 \rho_1}{\eta_1} + \frac{s_2 \rho_2}{\eta_2} \quad (4.33)$$

$$D_{33} = [C_{44}^{(1)} C_{55}^{(1)}]_2^1 + [C_{44}^{(2)} C_{55}^{(2)}]_2^1 \quad (4.34)$$

Les constantes positives  $S_\alpha$ ,  $\eta_\alpha$  et  $\rho_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) sont reliées avec les constantes élastiques du bimatériaux par [22] :

$$S_\alpha = [C_{12}^{(\alpha)} + (C_{11}^{(\alpha)} C_{22}^{(\alpha)})^{1/2}]^{-1} \quad (4.35)$$

$$\eta_\alpha = \left[ \frac{C_{66}^{(\alpha)} [(C_{11}^{(\alpha)} C_{22}^{(\alpha)})^{1/2} - C_{12}^{(\alpha)}]}{C_{22}^{(\alpha)} [2C_{66}^{(\alpha)} + C_{12}^{(\alpha)} + (C_{11}^{(\alpha)} C_{22}^{(\alpha)})^{1/2}]} \right]^{1/2}, \quad (4.36)$$

$$\rho_\alpha = [C_{11}^{(\alpha)} / C_{22}^{(\alpha)}]^{1/2} \quad (4.37)$$

où  $C_{ij}^{(\alpha)}$  sont les composantes de la matrice des constantes élastiques ( $6 \times 6$ ) pour le matériau  $\alpha = 1, 2$ .

Le produit  $D^{-1}W$  est donné par:

$$D^{-1}W = \begin{bmatrix} 0 & -\beta'' & 0 \\ \beta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Avec :

$$\beta' = \frac{(s_1 - s_2)}{[s_1 \rho_1 / \eta_1 + s_2 \rho_2 / \eta_2]}, \quad (4.39)$$

$$\beta'' = \frac{(s_1 - s_2)}{[s_1 / \eta_1 + s_2 / \eta_2]} \quad (4.40)$$

En utilisant les relations (4.28) et (4.29), la formule (4.27) peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} K = \sqrt{\pi a} & \left\{ I - \frac{c}{\beta} [\sin(\varepsilon \ln \xi) \pm 2\varepsilon \cos(\varepsilon \ln \xi)] D^{-1} W \right. \\ & \left. + \frac{c}{\beta^2} [1 - \cos(\varepsilon \ln \xi) \pm 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln \xi)] (D^{-1} W)^2 \left[ (1 + 2i\varepsilon)(2a)^{-ie} \right] q_a \right\} \end{aligned} \quad (4.41)$$

#### 4.4.3) Taux de restitution d'énergie :

Considérant que, sous une charge quelconque, la pointe de fissure à  $x=a$  avance le long de l'interface jusqu'à  $x=a+\delta a$ . Le taux de restitution d'énergie par unité d'épaisseur pendant ce processus est défini par [62] :

$$G = \frac{1}{2} \lim_{\delta a \rightarrow 0} \int_a^{a+\delta a} \tau^T(x) \Delta u(x - \delta a) dx \quad (4.42)$$

En fonction du chargement généralisé, le taux de restitution d'énergie prend la forme suivante :

$$G = \frac{\pi a}{4} q_a^T D Y \left[ \frac{1 + 4\varepsilon^2}{\cosh^2 \pi \varepsilon} \right] q_a \quad (4.43)$$

En prenant  $\beta = \tanh(\pi \varepsilon)$  et du fait que la matrice  $W$  soit antisymétrique :

$$G = \frac{\pi a}{4} [q_a^T D q_a - g'(W q_a)^T D^{-1} (W g_a)] \quad (4.44)$$

avec

$$g' = 1 - 4\varepsilon^2 / \sinh^2(\pi \varepsilon) \quad (4.45)$$

Le taux de restitution d'énergie  $G$  est exprimé en fonction du facteur d'intensité des contraintes par :

$$G = \frac{1}{4} K^T U^{-1} K \quad (4.46)$$

avec

$$U^{-1} = D + W D^{-1} W \quad (4.47)$$

Donc:

$$G = \frac{1}{4} K^T (D + WD^{-1}W)K \quad (4.48)$$

## 4.5) Calcul numérique du taux de restitution d'énergie :

### 4.5.1) Méthodes de calcul de G :

Le taux de restitution d'énergie (G) représente l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité. Elle correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure  $a$ , à une autre où la fissure s'est propagée d'une longueur  $a+\delta a$ .

Les méthodes d'évaluation du taux de restitution d'énergie sont bien adaptées aux calculs éléments finis car on se place relativement loin de la pointe de fissure, de façon à ne pas faire intervenir les singularités. Par contre, elles présentent souvent le désavantage de ne pas permettre le découplage des différents modes. Ces méthodes étant très nombreuses, nous nous restreindrons à celles qui sont les plus utilisées [64].

#### 4.5.1.1) Calcul par avancée réelle de fissure :

Si on travaille à force imposée, on peut calculer G en calculant l'évolution de l'énergie élastique lors d'un petit incrément de longueur de la fissure. G s'obtient alors à l'aide de l'expression suivante :

$$G = \frac{\Delta W_{el}}{\Delta a} \quad (4.49)$$

Dans la pratique, la méthode consiste donc à effectuer deux ou trois calculs élastiques successifs à partir d'un maillage identique, mais sur lequel on relâche un ou plusieurs nœuds en fond de fissure entre les différents calculs. Cette méthode, basée sur un raisonnement physique, a l'avantage de bien s'adapter aux codes, tout en n'utilisant pas d'éléments spéciaux. Elle nécessite cependant un maillage fin en pointe de fissure et est très coûteuse en temps de calcul, puisqu'elle requiert au moins deux calculs pour une longueur de fissure donnée [64].

#### 4.5.1.2) Méthode de l'intégrale J :

Cette méthode consiste à évaluer l'énergie à la pointe de fissure sur un contour contenant la fissure. Reprenons la définition de l'intégrale de Rice J :

$$J = \int_{\Gamma} \left( wdy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_{1j}} \right) d\Gamma \quad (4.50)$$

Cette intégrale représente l'énergie disponible en fond de fissure. Elle peut cependant être calculée assez loin de cette zone. D'ailleurs, son indépendance par rapport au contour d'intégration permet de prendre ce dernier assez grand, afin d'éviter la zone de singularité.

En pratique, le contour d'intégration  $C$  est défini par un ensemble de noeuds du maillage. Contrairement à la théorie, la précision des résultats numériques obtenus par cette méthode est très dépendante du choix du contour. Elle est d'autant meilleure que le contour est éloigné de la pointe de fissure.

#### 4.5.1.3) Calcul par avancée virtuelle de fissure :

Cette technique, introduite par Hellen [65] et Parks [66] au milieu des années 1970, permet de calculer la variation d'énergie potentielle totale en introduisant une extension virtuelle de fissure  $\delta a$ . Le processus d'extension de la fissure est obtenu en déplaçant les points nodaux du réseau, plutôt qu'en ôtant les composantes de traction nodale à la pointe de la fissure et en procédant à une seconde analyse comme cela est fait dans la méthode d'extension réelle.

Si l'on note  $[K]$  la matrice de rigidité du système,  $\{u\}$  le vecteur déplacement, et  $\{f\}$  le vecteur chargement aux noeuds du maillage, le système à résoudre s'écrit :  $[K]\{u\}=\{f\}$ . On réalise une petite perturbation  $\delta a$  de la pointe de fissure (de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-3}$  fois la dimension de la première maille en pointe). Cette extension implique une variation  $\{\delta u\}$  du champ des déplacements, induisant ainsi une variation d'énergie potentielle  $dW_p$ . Le taux de restitution d'énergie s'obtient alors par :

$$G = -\frac{dW_p}{da} = -\frac{1}{2} \{u\}^t \frac{[\delta K]}{\delta a} \{u\} + \{u\}^t \left\{ \frac{\delta f}{\delta a} \right\} \quad (4.51)$$

La zone affectée par la transformation joue un rôle important, aussi bien au point de vue de la précision que du temps de calcul, pour la détermination de  $G$ .

#### 4.5.1.4) Méthode $G\theta$ :

Cette méthode introduite par Destuynder et Djaoua au début des années 1980 [67-68], consiste à calculer le taux de restitution d'énergie  $G$  par dérivation (par la méthode lagrangienne) de l'énergie potentielle d'une structure fissurée par rapport à un domaine. Elle revient à effectuer une intégration non pas sur un contour, mais sur une couronne entourant la

pointe de fissure. Cette couronne dont les frontières coïncident avec les côtés des éléments doit être prise assez loin du fond de fissure pour bénéficier d'une bonne approximation de la solution. De plus, l'intégration numérique est effectuée aux points de Gauss des éléments appartenant à la couronne, ce qui lui donne plus de précision [64].

#### 4.5.1.5) Méthode de découplage des modes :

Lorsque la fissuration se présente en mode mixte, les méthodes énergétiques sont, pour la plupart, incapables de séparer les deux modes de rupture, car l'expression de G ou J est une forme quadratique des facteurs d'intensité de contraintes.

~~La méthode de découplage consiste alors à séparer les paramètres énergétiques en deux termes, chaque terme étant relié au facteur d'intensité de contraintes correspondant [64].~~

#### 4.5.2) Comparaison des différentes méthodes :

Plusieurs études comparatives de ces différentes méthodes ont été effectuées [69-71]. Les deux méthodes les plus précises, à finesse de maillage donnée, semblent être la méthode de l'extension virtuelle de la fissure associée à la méthode d'intégration directe, et la méthode G<sub>0</sub>. La finesse du maillage intervient très peu sur la précision des résultats obtenus par ces deux méthodes, mais elle conditionne significativement le temps de calcul.

Compte tenu des résultats de ces études comparatives, nous avons opté dans ce travail pour l'association de la méthode d'extension virtuelle de fissure à l'élément mixte d'interface présenté (RMQ-7).

#### 4.5.3) Association de la méthode d'extension virtuelle de fissure à l'élément RMQ-7 :

Le calcul de G par la méthode d'extension virtuelle de fissure nécessite alors deux analyses par éléments finis. Dans un premier calcul, on détermine l'énergie de déformation dans la configuration initiale de la fissure. La fissure est par la suite déplacée d'une distance infinitésimale  $\delta a$  dans la direction de son axe. L'énergie de déformation est évaluée de nouveau dans cette seconde configuration.

L'utilisation de l'élément d'interface RMQ-7 permet d'introduire un seul maillage pour le calcul du taux de restitution d'énergie, ce qui représente un gain considérable en temps de calcul et en mise en donnée par rapport aux techniques classiques qui utilisent deux maillages. Le noeud déplacement intermédiaire de l'élément RMQ-7 est associé à la pointe

de fissure (figure 4.6), et par conséquent la longueur de fissure a peut être augmentée d'une quantité  $\delta a$  en agissant à l'intérieur strict de l'élément de fissure par translation du noeud pointe de fissure sans perturber le reste du maillage [1].

Et comme seul l'élément d'interface est perturbé, alors l'expression (4.51) de G devient :

$$G = -\frac{1}{2\delta a} \{u(a + \delta a)\}_f^t [K(a + \delta a)]_f - [K(a)]_f \{u(a + \delta a)\}_f \quad (4.52)$$

où l'indice f indique que les grandeurs utilisées sont celles de l'élément de fissure.

Dans le seul maillage utilisé, est placé un autre élément équivalent à celui placé sur la fissure, c'est à dire un élément de même géométrie est constituée du même matériau comme le montre la figure 4.6. Le taux de restitution d'énergie se calcule en une seule discréétisation à partir de la différence des matrices élémentaires de l'élément contenant la fissure représentant l'état  $a + \delta a$  et son élément équivalent représentant l'état  $a$  [1].

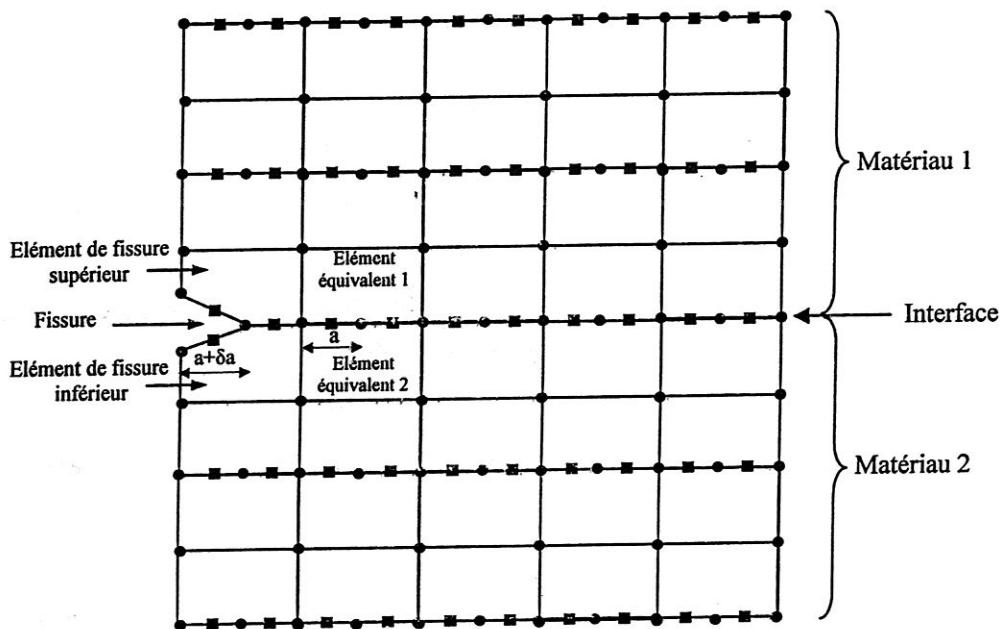


Figure 4.6 : Maillage d'une structure bimatiériaux fissurée.

L'expression (4.52) peut s'écrire comme suit :

$$G = -\frac{1}{2} \{u\}_f^t \frac{[\delta K]_f}{\delta a} \{u\}_f \quad (4.53)$$

Dans la pratique, la discrétisation de la structure fissurée se fait dans la configuration  $a + \Delta a$ , donc l'expression donnant la valeur de  $G$  devient :

$$G = -\frac{1}{2} \{u\}_f^t \frac{[\Delta K]_f}{\Delta a} \{u\}_f \quad (4.54)$$

## **Chapitre 5**

### **Exemples d'applications**

## Chapitre 5

### Exemples d'applications

#### 5.1) Introduction :

L'intérêt grandissant pour la mécanique de la rupture interfaciale des bimatériaux est lié à ses applications directes aux matériaux composites. En effet, les matériaux composites sont devenus un composant structural important dans le domaine industriel, notamment en construction civile, en aéronautique ou encore en automobile.

Cet intérêt important pour ces composantes dans la conception des structures a conduit à un besoin d'outils d'analyse puissants, capables de prendre en compte correctement leurs spécificités.

Dans cette étude, nous avons présenté une formulation isoparamétrique d'un élément fini mixte d'interface à partir du principe variationnel mixte de Reissner. Cet élément d'interface mixte a été associé à la méthode d'extension virtuelle de fissure pour calculer le taux de restitution d'énergie.

Dans ce chapitre, le programme élaboré dans le cadre de cette étude a été utilisé pour la validation de l'élément à travers le traitement de trois exemples d'applications. Dans la première application, une poutre sandwich avec des peaux orthotropes. Le deuxième exemple traite une plaque constituée de deux matériaux isotropes comportant une fissure centrale dans le plan de l'interface. Le troisième problème concerne l'étude de la rupture interfaciale d'un bimatiériaux anisotrope infini. Les résultats obtenus, à partir de ces exemples d'applications, sont comparés aux solutions exactes et aux valeurs numériques disponibles dans la littérature.

Le but de l'étude de ces applications est de confirmer la validité de la formulation isoparamétrique proposée pour l'élément d'interface et de tester la méthode d'évaluation du taux de restitution d'énergie pour les bimatériaux isotropes et anisotropes.

## 5.2) Poutre sandwich avec des peaux orthotropes:

### 5.2.1) Définition du problème :

Dans cette application, l'élément d'interface proposé est utilisé pour analyser une poutre sandwich avec des peaux orthotropes. Cette poutre est simplement appuyée et soumise à une charge uniformément répartie. Cette poutre présente trois couches dont deux peaux orthotropes identiques et une âme isotrope (figure 5.1).

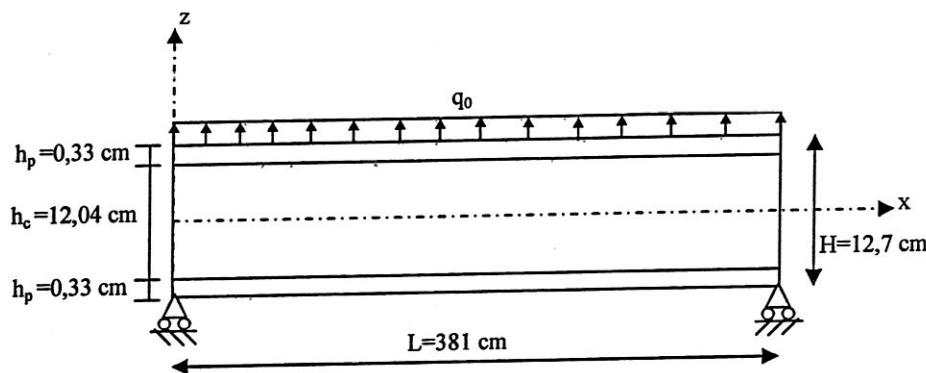


Figure 5.1 : La poutre sandwich analysée

Nous avons repris les données géométriques et mécaniques utilisées dans la référence [72]. Les peaux sont constituées d'un matériau bidirectionnel dont les caractéristiques élastiques sont les suivantes :

$$E_x = 52800 \text{ MPa}, E_z = 39713 \text{ MPa}, G_{xz} = 13200 \text{ MPa}, \nu_{xz} = 0,41.$$

L'âme est constituée d'un matériau isotrope :

$$E = 50 \text{ MPa}, G = 21 \text{ MPa}, \nu = 0,2.$$

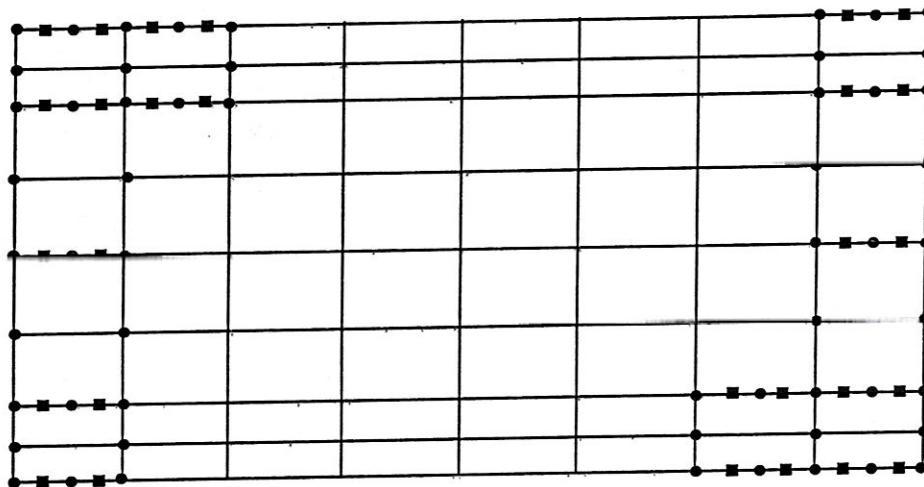
### 5.2.2) Maillage de la poutre sandwich:

Dans le but de tester la convergence de l'élément d'interface proposé, trois maillages de la poutre sandwich sont utilisés.

Les caractéristiques de ces maillages sont les suivantes :

- Maillage 1 : 4 éléments RMQ-7, 16 nœuds et 32 degrés de liberté.
- Maillage 2 : 16 éléments RMQ-7, 49 nœuds et 98 degrés de liberté.
- Maillage 3 : 64 éléments RMQ-7, 201 nœuds et 402 degrés de liberté (figure 5.2).

Vu les symétries géométrique et mécanique par rapport à l'axe central vertical de la poutre sandwich, seul la moitié gauche de la poutre est discrétisée. Les nœuds contrainte sont toujours placés le long de l'interface pour évaluer les contraintes à ce niveau.



**Figure 5.2 : Maillage 3 de la poutre sandwich**

### 5.2.3) Résultats et discussion:

Dans cette application, nous avons fait référence à la solution analytique de Pagano [40,41]. Nous avons comparé les résultats obtenus en utilisant l'élément d'interface proposé avec les valeurs théoriques.

#### 5.2.3.1) Convergence de la flèche:

Nous avons testé la convergence de la flèche au centre de la poutre ( $x=L/2$ ) en fonction du nombre des degrés de liberté. Le tableau 5.1 donne les valeurs de la flèche obtenues par les trois maillages.

Type d'élément	Nombre des éléments	Nombre des degrés de liberté	Flèche $u_2$ (cm)
Elément d'interface présenté (RMQ-7)	4	32	1.72
	16	98	2.65
	64	402	2.70
Solution exacte (Pagano)		-	2.73

**Tableau 5.1: Valeurs de la flèche au centre de la poutre( $x=L/2$ ) en fonction du nombre des degrés de liberté**

Le tableau 5.1 montre qu'avec 32 degrés de liberté, on atteint 63% de la théorique et on arrive à 97% de la flèche avec 98 ddl alors qu'avec 402 ddl on obtient 99% de la valeur exacte donnée par Pagano [40-41]. Ces résultats montrent que l'élément d'interface présenté converge rapidement vers la solution analytique.

La figure 5.3 représente la convergence de la flèche en fonction du nombre de degrés de liberté. Il est clair que l'élément d'interface donne une très bonne évaluation de la flèche pour un nombre de degrés de liberté peu élevé.

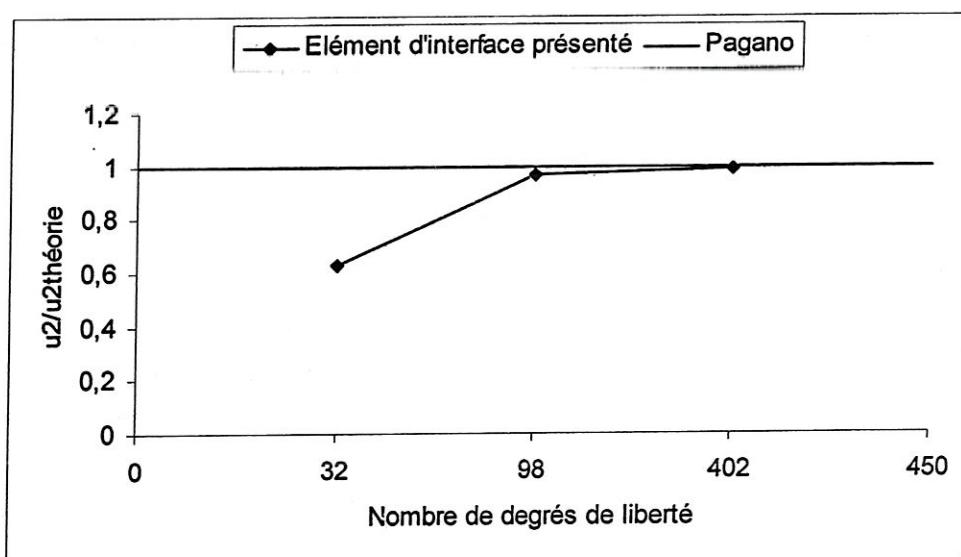


Figure 5.3: Convergence de la flèche à mi-portée de la poutre sandwich

### 5.2.3.2) Convergence de la contrainte de cisaillement transverse:

Nous avons évalué les contraintes de cisaillement transverses suivant l'épaisseur dans la section de la poutre d'abscisse ( $x=L/8$ ) pour les différents types de maillages.

Les résultats de la contrainte de cisaillement transversal  $\sigma_{12}$  obtenus en utilisant l'élément RMQ-7 et ceux donnés par la solution théorique de Pagano [40,41] sont résumés dans le tableau 5.2.

D'après le tableau 5.2, la solution exacte de la contrainte de cisaillement est obtenue aux alentours de 98 degrés de liberté pour l'élément mixte d'interface proposé. Ce qui confirme la rapidité de la convergence de l'élément d'interface RMQ-7, d'ailleurs avec 32 ddl seulement on atteint les 97% de la solution analytique.

Type d'élément	Nombre de degrés de liberté	Contrainte de cisaillement $\sigma_{12}$ (MPa)	
		$z = -h_c/2$	$z = h_c/2$
Elément d'interface présenté (RMQ-7)	32	0.1123	0.1123
	98	0.1137	0.1146
	402	0.1131	0.1159
Solution exacte (Pagano)	-	0.115	0.115

Tableau 5.2: Valeurs de  $\sigma_{12}$  suivant l'épaisseur l'abscisse  $x=L/8$  en fonction du nombre des degrés de liberté

La figure 5.4 représente la convergence de la contrainte de cisaillement transversal au point de l'interface supérieure ( $z=h_c/2$ ) de la poutre d'abscisse ( $x=L/8$ ). L'élément mixte d'interface proposé donne une très bonne évaluation de la contrainte  $\sigma_{12}$  pour un nombre de degrés de liberté peu élevé.

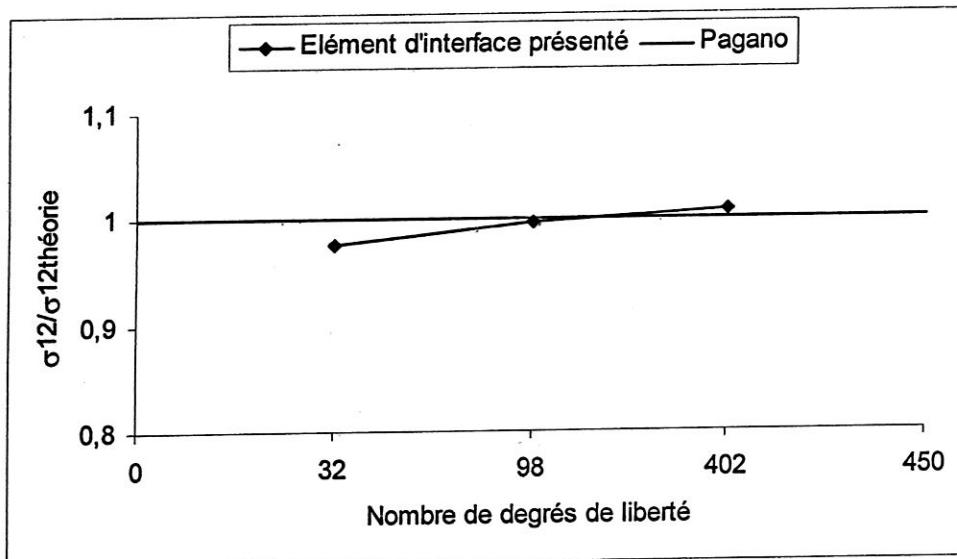


Figure 5.4: Convergence de la contrainte de cisaillement transversal ( $x=L/8$  et  $z=h_c/2$ )

### 5.2.3.3) Convergence du déplacement horizontal:

Nous avons étudié la convergence des déplacements horizontaux  $u_1$  suivant l'épaisseur dans la section de la poutre d'abscisse  $x=L/4$ . Le résumé des différents résultats de  $u_1$  est présenté au tableau 5.3.

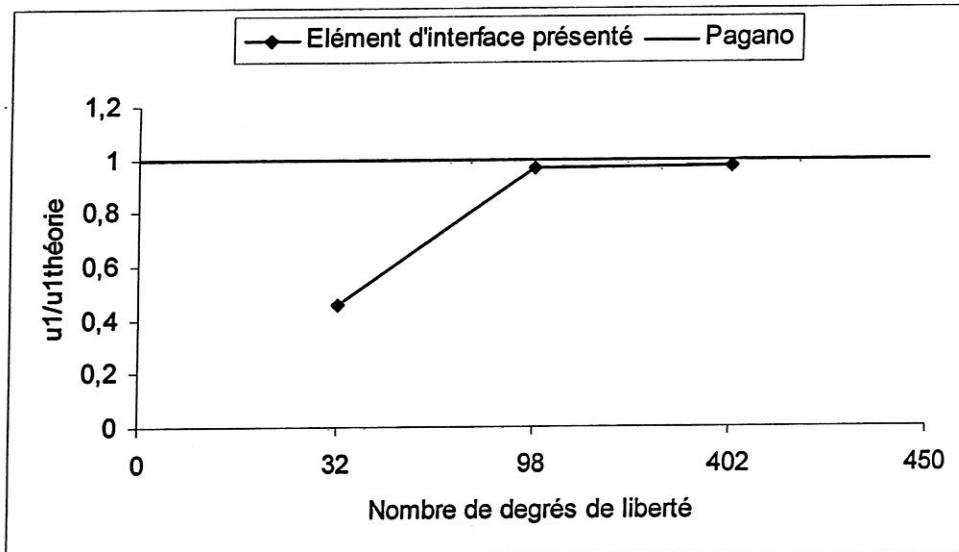
Type d'élément	Nombre de degrés de liberté	Déplacement horizontal $u_1$ (cm)	
		$z = -h_c/2$	$z = h_c/2$
Elément d'interface présenté (RMQ-7)	32	0.0326	-0.0325
	98	0.0682	-0.0682
	402	0.0690	-0.0690
Solution exacte (Pagano)	-	0.0705	-0.0705

**Tableau 5.3:** Valeurs de  $u_1$  suivant l'épaisseur à l'abscisse  $x=L/4$  en fonction du nombre des degrés de liberté

Le tableau 5.3 montre clairement que l'élément mixte d'interface fournit d'excellents résultats en comparaison à ceux de la solution exacte.

La figure 5.5 représente la variation de  $u_1/u_{1\text{théorique}}$  en fonction du nombre de degrés de liberté à la section de la poutre ( $x=L/4$  et  $z=h_c/2$ ). Ce qui confirme les résultats déjà obtenus concernant la rapidité de la convergence de l'élément d'interface avec un nombre de degrés de liberté assez réduit.

Enfin, on remarque que dans les trois cas de convergence ( $u_2$ ,  $\sigma_{12}$  et  $u_1$ ) on a une tendance par valeurs inférieures à la valeur exacte, ce qui est conforme au critère de stationnarité de la fonctionnelle qui ne représente ni un minimum ni un maximum.



**Figure 5.5:** Convergence du déplacement horizontal ( $x=L/4$  et  $z=h_c/2$ )

### 5.3) Bimati  au isotrope fissuré le long de l'interface:

#### 5.3.1) D  inition du problème :

L'analyse propos  e dans cette application concerne l'étude d'une plaque carr  e constitu  e de deux matériaux isotropes, munie d'une fissure centrale dans le plan de l'interface et charg  e aux bords dans les deux directions (figure 5.6).

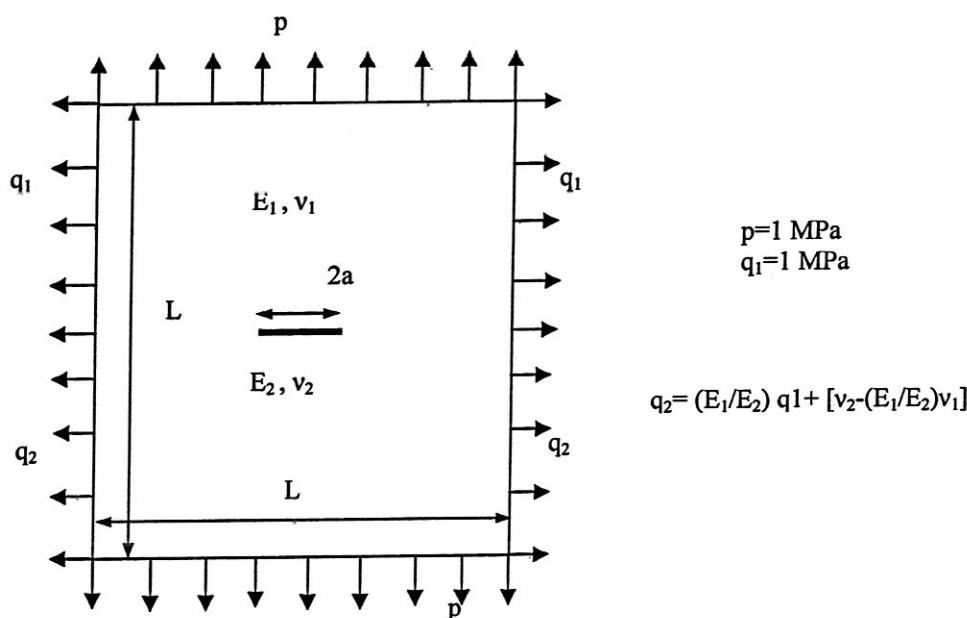


Figure 5.6: Plaque bimati  au fissur  e

Les propriétés géométriques et mécaniques de la plaque [1, 73] sont :

- côté de la plaque :  $L=20 \text{ mm}$
- Epaisseur de la plaque :  $e=1 \text{ mm}$
- Longueur de la fissure :  $2a=2 \text{ mm}$
- Matériau 1 : - Module d'Young :  $E_1 = 1 \text{ MPa}$ 
  - Coefficient de Poisson :  $v_1 = 0.3$
- Matériau 2 : - Module d'Young :  $E_2 = 0.333 \text{ MPa}$ 
  - Coefficient de Poisson :  $v_2 = 0.3$

Les charges appliqu  es sur la plaque sont montr  es sur la figure (5.6).

### 5.3.2) Maillage de la plaque :

Vu les symétries géométrique et mécanique par rapport à l'axe vertical, seul la moitié droite de la plaque est discrétisée (figure 5.7).

Les caractéristiques du maillage utilisé sont les suivants :

- 50 éléments
- 143 nœuds
- 286 degrés de liberté.

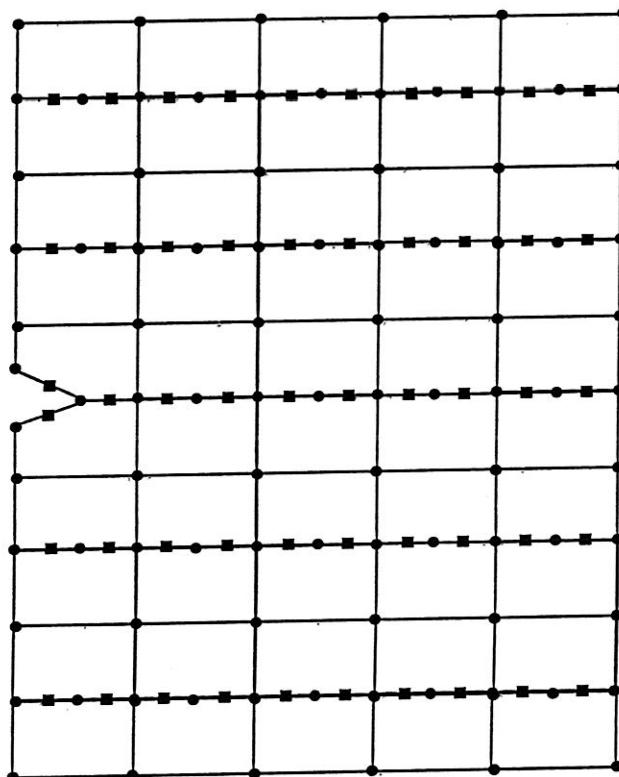


Figure 5.7: Maillage de la plaque

### 5.3.3) Résultats et discussion:

Les résultats obtenus en utilisant l'élément d'interface présenté sont comparés avec les valeurs de la solution analytique de Rice et Sih [74], et les résultats numériques de Lin et Mar [73] qui ont proposé un élément fini hybride à dix sept nœuds en pointe de fissure. Ces auteurs ont donné comme résultats de leurs études les coefficients de concentration de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  à partir desquels le taux de restitution d'énergie est calculé.

Un premier calcul a été fait en utilisant les fonctions de forme, déterminées précédemment, et en modifiant uniquement les coordonnées des noeuds.

Les résultats obtenus sont donnés par le tableau 5.4.

	Valeurs numériques		Solution analytique
	Lin et Mar	Elément d'interface proposé	Rice et Sih
Taux de restitution d'énergie G (N/mm)	6,28	2,24	6,17

Tableau 5.4: Comparaison des valeurs du taux de restitution d'énergie G

Dans la modélisation du bimatière fissuré, seul l'élément de la pointe de fissure est concerné par l'extension de la fissure  $\Delta a$ . Les autres éléments gardent la même géométrie après l'extension.

Dans le but d'améliorer la précision des résultats obtenus, nous avons déterminé les nouvelles fonctions de forme de l'élément d'interface en tenant compte du déplacement du nœud médian (nœud 5) d'une valeur égale à l'extension  $\Delta a$ .

Le champ de déplacement dans la configuration de référence  $(\xi, \eta)$  de l'élément a pour base d'approximation  $\{1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta \ \xi^2\eta\}$ .

L'approximation généralisée du champ de déplacement dans l'élément RMQ-7 s'écrit :

$$u(\xi, \eta) = \{1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta \ \xi^2\eta\} \{a\} \quad (5.1)$$

où  $\{a\}$  sont les variables généralisées.

On a :

$$\{q\} = [P_n] \{a\} \quad (5.2)$$

avec:  $[P_n]$  est la matrice nodale,

$\{q\}$  sont les variables nodales.

Donc l'approximation du champ de déplacement en fonction des variables nodales  $\{q\}$  est donnée par:

$$u(\xi, \eta) = \{1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta \ \xi^2\eta\} [P_n]^{-1} \{q\} = [N] \{q\} \quad (5.3)$$

avec:

$[N] = \{1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta \ \xi^2\eta\} [P_n]^{-1}$  est la matrice des fonctions de forme.

En prenant par exemple, dans le plan naturel, une extension  $\Delta\xi = \frac{1}{100}$ , alors la matrice nodale est donnée par :

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ 1 & +0.01 & -1 & -0.01 & -0.001 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Dans la configuration de la figure 5.8, les nouvelles fonctions de forme sont exprimées par :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi) + (0.245 + 0.250\xi - 0.495\xi^2)\eta \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi) + (0.255 - 0.250\xi - 0.505\xi^2)\eta \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ N_5(\xi, \eta) &= \eta(\xi-1)(\xi+1) \end{aligned} \quad (5.5)$$

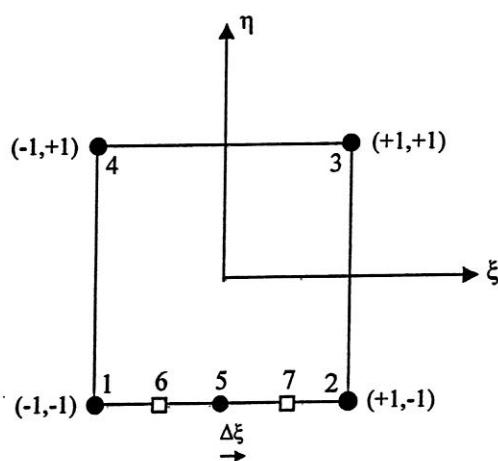


Figure 5.8: Elément RMQ-7

Nous avons recalculé le taux de restitution d'énergie en utilisant ces nouvelles fonctions de forme de l'élément d'interface proposé. Le tableau 5.5 résume les résultats obtenus.

	Valeurs numériques		Solution analytique
	Lin et Mar	Elément d'interface proposé	Rice et Sih
Taux de restitution d'énergie G (N/mm)	6,28	6,28	6,17

Tableau 5.5: Différentes valeurs du taux de restitution d'énergie G

Le tableau 5.5 montre les très bonnes valeurs de G obtenues, en utilisant l'élément d'interface proposé avec les nouvelles fonctions de forme, comparant à la solution exacte de Rice et Sih [74] et aux résultats numériques de Lin et Mar [73].

Le choix de la variation de la longueur de fissure  $\Delta a$  joue un rôle très important sur la précision des résultats. En effet, il faut que cette variation soit suffisamment petite pour que les solutions obtenues  $u(a)$  et  $u(a+\Delta a)$  soient autant plus proches que l'extension  $\Delta a$  est petite par rapport aux dimensions de l'élément de fissure.

Pour mettre en évidence l'importance du choix de l'extension  $\Delta a$ , nous avons fait des tests numériques en utilisant plusieurs valeurs de  $\frac{\Delta a}{a}$ .

Le tableau 5.6 rassemble les valeurs du taux de restitution d'énergie pour différents valeurs de  $\Delta a/a$  pour un maillage donné.

	$\frac{\Delta a}{a}$					
	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{300}$
Taux de restitution d'énergie G (N/mm)	3,68	4,15	4,67	5,20	5,71	6,28

Tableau 5.6: Taux de restitution d'énergie pour différentes valeurs de  $\frac{\Delta a}{a}$

Les résultats obtenus confirment l'importance capitale que présente le bon choix de la variation de la longueur de la fissure. Nous avons constaté une très bonne stabilité entre les

valeurs  $\frac{1}{50}$  et  $\frac{1}{300}$  du rapport  $\frac{\Delta a}{a}$ .

#### 5.4) Rupture interfaciale d'un bimatiériaux anisotrope:

##### 5.4.1) Définition du problème :

L'exemple traité concerne l'étude de la rupture interfaciale d'un bimatiériaux anisotrope infini (figure 5.9). Ce problème a été traité par Pan et Amadei [75] en utilisant la méthode des éléments de frontière (BEM).

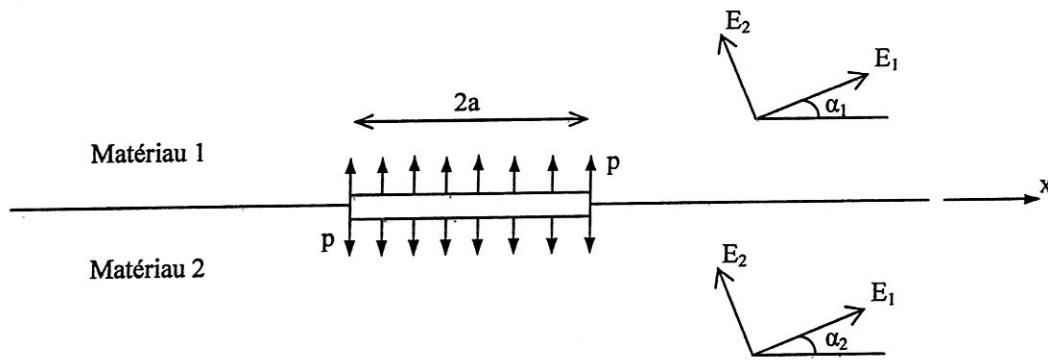


Figure 5.9: Fissure interfaciale d'un bimatiériaux anisotrope infini

Ce bimatiériaux anisotrope contient une fissure interfaciale le long de l'axe x, de longueur  $2a$ . La surface de rupture est soumise à une charge uniforme  $p$ .

Les propriétés élastiques anisotropes des matériaux sont celles de verre/époxy pour le matériau 1 et celles de graphite/époxy pour le matériau 2.

Nous reprendrons dans cette étude les mêmes caractéristiques mécaniques des références [75,76] et qui sont les suivantes :

\* Matériau 1 ( $\alpha_1=0$ ) :  $E_1=48,26 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12}=0,29$ ,  $\nu_{21}=0,103$ ,  $E_2=17,24 \text{ GPa}$ ,  $G_{12}=6,89 \text{ GPa}$ .

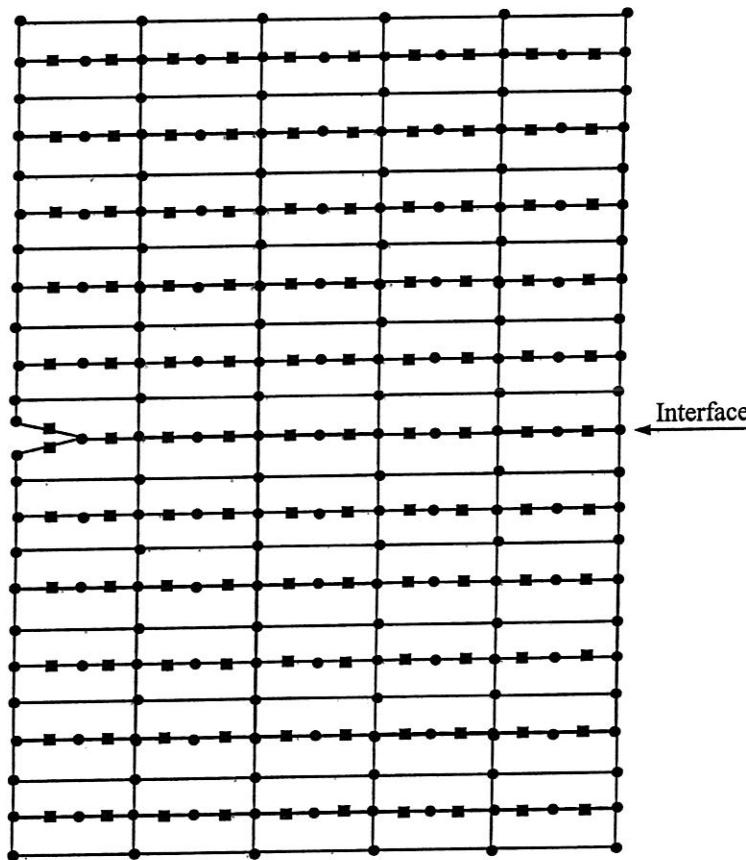
\* Matériau 2 ( $\alpha_2=0$ ) :  $E_1=144,8 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12}=0,21$ ,  $\nu_{21}=0,017$ ,  $E_2=11,7 \text{ GPa}$ ,  $G_{12}=9,66 \text{ GPa}$ .

### 5.4.2) Maillage utilisé:

Vu la symétrie de la géométrie et du chargement par rapport à l'axe vertical, nous n'avons modélisé que la moitié de la structure fissurée (figure 5.10).

Les caractéristiques du maillage utilisé pour ce problème sont les suivantes :

- 110 éléments mixtes RMQ-7
- 305 nœuds
- 610 degrés de libertés.



**Figure 5.10: Maillage utilisé**

### 5.4.3) Résultats et discussion:

Les résultats obtenus, en utilisant l'élément d'interface présenté, sont comparés avec les valeurs de la solution exacte proposée par Wu [77] et les valeurs numériques de Pan et Amadei [75] qui ont présenté une formulation des éléments de frontière pour l'analyse de la

rupture des bimatériaux anisotropes. Ces auteurs ont donné comme résultats de leurs études les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  à partir desquels on peut calculer les valeurs du taux de restitution d'énergie  $G$  [76].

Les tableaux 5.7 et 5.8 résument les résultats obtenus en fonction des angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

**a) Cas d'anisotropie 1 ( $\alpha_1=0$ ) :**

$\alpha_2$ (degrés)	$\frac{G}{K\sqrt{\pi}a} (\times 10^{-2})$		
	Elément d'interface présenté	Pan et Amadei	Solution exacte (Wu)
0	4,70	4,84	4,82
30	4,33	4,85	4,83
60	4,30	4,85	4,83
90	4,63	4,82	4,82

Tableau 5.7: Comparaison des résultats obtenus pour les cas d'anisotropie 1 ( $\alpha_1=0$ )

**b) Cas d'anisotropie 2 ( $\alpha_2=0$ ) :**

$\alpha_1$ (degrés)	$\frac{G}{K\sqrt{\pi}a} (\times 10^{-2})$		
	Elément d'interface présenté	Pan et Amadei	Solution exacte (Wu)
0	4,70	4,84	4,82
30	4,70	5,06	5,04
60	5,00	5,06	5,04
90	5,23	4,71	4,69

Tableau 5.8: Comparaison des résultats obtenus pour les cas d'anisotropie 2 ( $\alpha_2=0$ )

D'après le tableau 5.7, nous constatons qu'avec l'élément d'interface proposé, les écarts sur

les valeurs de  $\frac{G}{K\sqrt{\pi}a}$  par rapport à la solution analytique varient entre 2,5% et 11%, ce qui

représente une bonne précision des résultats obtenus. Pour le cas d'anisotropie 2 (tableau 5.8), ces écarts passent de 2,5% à 10% pour les différentes valeurs de  $\alpha_1$ .

Nous pouvons aussi remarquer que les valeurs obtenues, en utilisant l'élément d'interface RMQ-7, sont proches des valeurs numériques données par Pan et Amadei [75].

Ces résultats confirment la validité de la formulation isoparamétrique de l'élément d'interface déjà observé pour les bimatériaux.

Sur les figures (5.11) et (5.12), nous présentons la variation des valeurs  $\frac{G}{K\sqrt{\pi}a}$  en fonction des angles  $\alpha_2$  et  $\alpha_1$ .

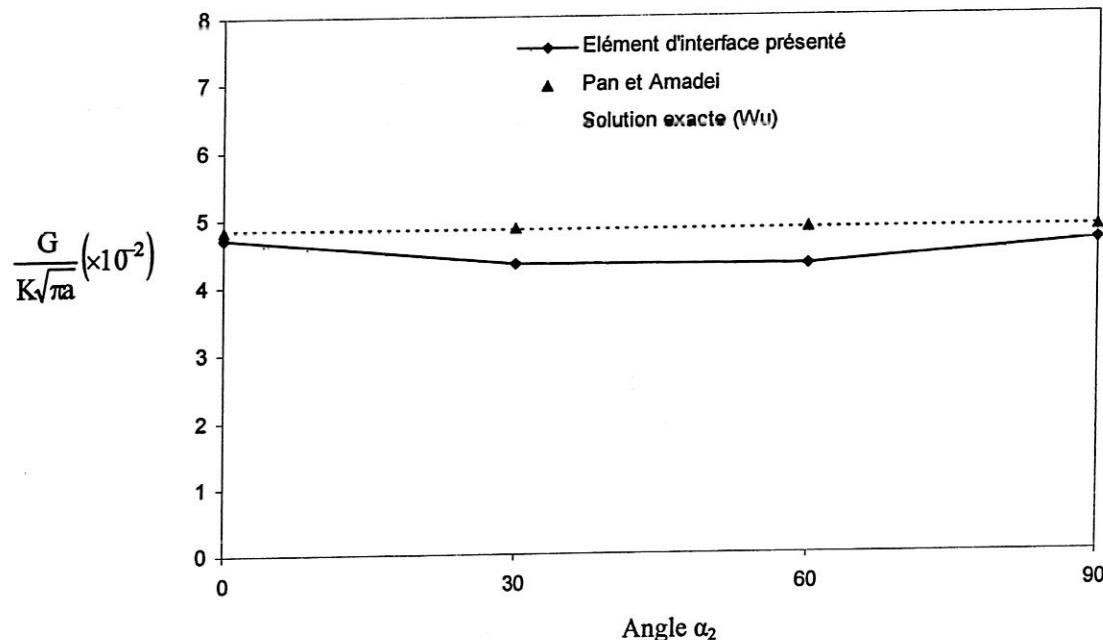


Figure 5.11: Variation de  $\frac{G}{K\sqrt{\pi}a}$  en fonction  $\alpha_2$ .

- Cas d'anisotropie I ( $\alpha_1=0$ )-

Tous les résultats que nous avons obtenus, quel que soit les valeurs des angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , ont montré que l'influence du degré d'anisotropie sur les valeurs du taux de restitution d'énergie  $G$  et du facteur d'intensité de contraintes  $K$  sont peu considérables. En effet, cette influence reste dans limites de 8,5 à 10%.

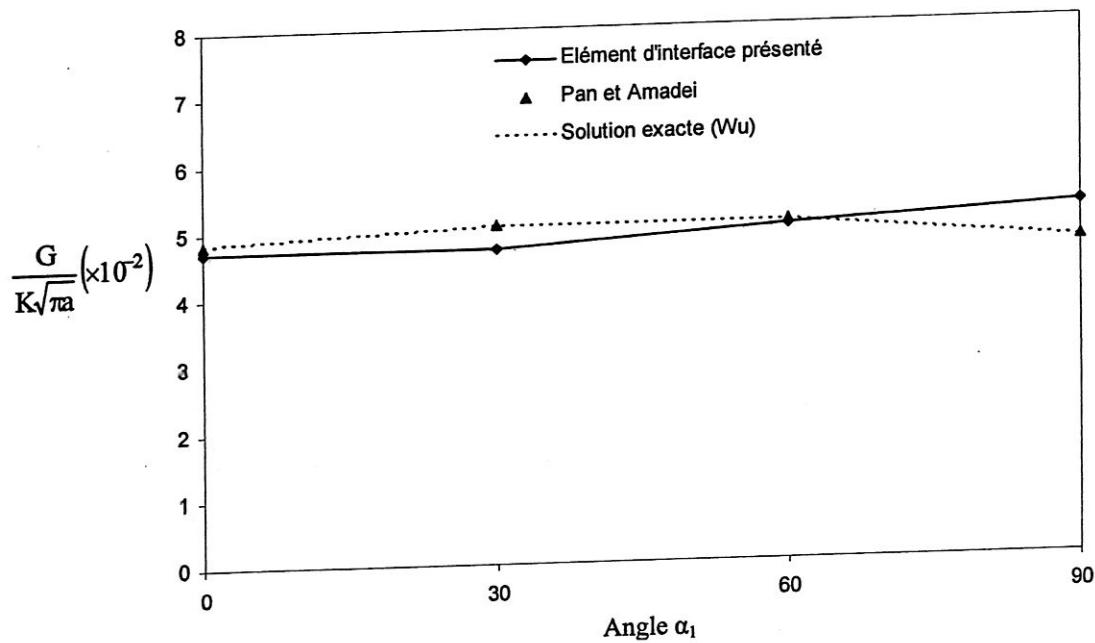


Figure 5.12: Variation de  $\frac{G}{K\sqrt{\pi a}}$  en fonction  $\alpha_1$ .

- Cas d'anisotropie 2 ( $\alpha_2=0$ )-

## **Conclusion**

## Conclusion

Nous avons proposé une formulation de l'élément d'interface mixte RMQ-7 à partir d'un élément de référence dans un plan naturel. Le principe variationnel mixte de Reissner a constitué la base de construction de l'élément de référence à partir duquel nous avons élaboré la configuration finale de l'élément d'interface. Pour ce faire nous avons exploité successivement la technique de relocalisation, et qui consiste à déplacer certains degrés de liberté statiques vers l'intérieur ou sur un côté de l'élément, puis la procédure de condensation statique des variables inconnues des nœuds internes de l'élément présenté.

Cet élément spécial d'interface a été conçu afin de répondre au mieux possible aux conditions de continuité des champs de déplacement et de contrainte à l'interface sur la partie cohérente (équilibre mécanique et cohérence géométrique) et de la discontinuité de ces champs sur la partie fissurée (effet de bord). La formulation isoparamétrique présente en plus de la simplification des calculs, l'énorme avantage de modéliser des formes et des orientations quelconques des interfaces.

L'élément d'interface proposé satisfait aux critères de convergence classiquement utilisés pour des modèles déplacements, et aux critères propres aux formulations mixtes.

Cet élément a été associé à la méthode d'extension virtuelle de fissure pour déterminer le taux de restitution d'énergie. Le calcul du taux de restitution d'énergie se fait à partir d'un seul maillage en plaçant dans ce dernier un autre élément RMQ-7 équivalant à celui placer sur la fissure. Cet élément équivalant a la même géométrie que l'élément de la pointe de fissure et présente les mêmes caractéristiques mécaniques.

Nous avons traité plusieurs exemples d'application pour valider et étudier la convergence de notre élément. Les comparaisons effectuées montrent une très bonne concordance avec les résultats des solutions analytiques et numériques. La rapidité de convergence de cet élément, avec des maillages constitués d'un nombre assez réduit d'éléments, a été démontrée.

Ce travail est surtout axé sur l'aspect formulation, modélisation et validation de l'élément d'interface proposé à travers l'étude d'exemples simples. Il serait très intéressant d'utiliser cet élément pour prédire le chemin de branchement (kinking) de fissure dans des structures constituées de bimatériaux anisotropes ou (et) des chargements quelconques.

Il serait aussi intéressant d'élargir l'utilisation de cet élément d'interface et la méthode qui lui est associée à la rupture non-linéaire des matériaux et d'aborder les problèmes de la rupture ductile.

## **Références**

## Références

- [1] H. Bouzerd, ‘Elément fini mixte pour interface cohérente ou fissurée’, Thèse de doctorat, Université de Claude Bernard (Lyon I), 1992.
- [2] N. Recho, « Rupture par fissuration des structures », Traité des nouvelles technologies, Série Matériaux, Edition Hermès, 1995.
- [3] W. Yang and al., « Orthotropic transform for planar anisotropic elasticity and reduced dependence of elastic constants », Proc. R. Soc. Lond., pp.1843-1855, 1998.
- [4] L. R. Herrmann, ‘A bending analysis for plates’, Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, pp. 577-604, 1966.
- [5] K. Hallen, «Analysis of elastic plates by simplified finite element method », Acta Polytechnica Scandinavia, Civil Engineering Series, n°46, Trondheim, 1967.
- [6] R. S. Dunham & K. S. Pister, « A finite element application of Hellinger-Reissner variationnal theorem » AFFDI-TR-68-150, pp. 471-487, 1968.
- [7] M. Bichara, ‘Formulation d’éléments d’interface. Application aux assemblages collés’, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1990.
- [8] A. Chatterjee & A. V. Seltur, « A mixed finite element formulation for plate problems », International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 4, pp. 76-84, 1972.
- [9] J. Tseng & M. D. Olsen, « The mixed finite element method applied to two-dimensional elastic contact problems », International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 17, pp. 991-1014, 1981.
- [10] M. D. Olson, « The mixed finite element method in plane elasticity and elastic contact problems”, Hybrid and mixed finite element methods, edited by S. N. Atluri, S. Gallagher & O. C. Zienkiewicz, John Wiley and Sons, New York, chapter 2, pp. 19-49, 1983.
- [11] S. Aivazzadeh, ‘Eléments finis d’interface. Application aux assemblages collés et structures stratifiées’, Thèse de docteur-ingénieur, Université de Technologie de Compiègne, 1984.
- [12] S. Aivazzadeh, « Éléments finis d’interface. Application aux structures stratifiées » Comptes Rendus des Quatrièmes Journées Nationales sur les Composites, Paris, 11-13 Septembre 1984, publiés par G. Verchery, Pluralis, pp. 401-413, 1984.

- [13] M. Habib, 'Eléments finis axisymétriques d'interface pour l'analyse des structures stratifiées et des assemblages collés', Thèse de doctorat, Université de Claude Bernard (Lyon I), 1989.
- [14] A. Sarhan-Bajbouj, 'Eléments finis d'interface pour le calcul des structures hétérogènes', Thèse de doctorat, Université de Claude Bernard (Lyon I), 1990.
- [15] A. K. Noor, 'Multified (mixed and hybrid) finite elements models', State of the art surveys in finite element technology, ASME, chapter 5, pp. 127-162, 1983.
- [16] C. P. Wu, C. C. Lin, "Analysis of sandwich plates using mixed finite element", Compos. Strut. 25, 1993, p. 397-405.
- [17] Y. B. Shi, H. R. Chen, "A mixed finite element for interlaminar stress computation", Compos. Strut. 20, pp. 127-136, 1992.
- [18] E. Carrera, 'C<sup>0</sup> Reissner-Mindlin multilayered plate elements including zig-zag and interlaminar stress continuity', Int. J. Num. Meth. Engng. 39, pp. 1797-1820, 1996.
- [19] E. Carrera, 'Mixed layer-wise models for multilayered plates analysis', Compos. Struct. 43, pp. 57-70, 1998.
- [20] E. Carrera, 'Transverse normal stress effects in multilayered plates', ASME J. Appl. Mech., 66, pp. 1004-1011, 1999.
- [21] G. S. Ramtekkar, Y. M. Desai & A. H. Shah, 'Mixed finite element model for thick composite laminated plates', Mech. Adv. Mater. Struct. 9, pp. 133-156, 2002.
- [22] G. S. Ramtekkar, Y. M. Desai & A. H. Shah, 'Application of three-dimensional mixed finite element model to the flexure of sandwich plate', Comput. Struct. 81, pp. 2183-2198, 2003.
- [23] Y. M. Desai, G. Y. Ramtekkar, 'Mixed finite element model for laminated composite beams', Struct. Eng. Mech. 13, pp. 261-276, 2002.
- [24] A. N. Bambole, Y. M. Desai, « Hybrid-interface element for thick laminated composite plates », Compt. Struct., 85, pp. 1484-1499, 2007.
- [25] A. N. Bambole, Y. M. Desai, 'Hybrid-interface finite element for laminated composite and sandwich beams', Finite Elements in Analysis and Design, 43, pp. 1023-1036, 2007.
- [26] T. H. H. Pian, "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions" A. T. A. A. Journal, vol. 2, pp. 1333-1336, 1964.
- [27] T. H. H. Pian, "Basis of finite element methods for solid continua", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 1, pp3-28, 1969.

- [28] E. Reissner, "On variational theorem in elasticity", Journal of Mathematics and physics, vol. 29, pp. 90-95, 1950.
- [29] Hu H. C., "On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity", Scientia Sinica, vol. 4, pp. 33-45, 1955.
- [30] K. Washizu, "On the variational principles of elasticity and plasticity", Report 25-18, Cont. NSORI-07833, MIT, March, 1955.
- [31] G. Verchery, "Extremal theorems in terms of mixed variables. Application to beams and plates subjected to transverse shear", Fifteenth Polish Solid Mechanics Conference, Zakopane, Pologne, 3-12 Septembre 1973, Résumés des communications, pp.258-259, 1973.
- [32] G. Verchery, "Applications aux structures minces élastiques de principes variationnels mixte. Exemple de la poutre à cisaillement transversal", Compte Rendus à l'Académie des sciences, Paris, tome 278, Série A, 18 Février, pp. 571-574, 1974.
- [33] G. Dhatt et G. Touzot, "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine, Paris, 1981.
- [34] Verchery G., « Méthodes numériques de calcul des champs de contraintes dans les matériaux hétérogènes », vol. 1, Ed. Fouet J.M. et Ladeveze P., Pluralis, Paris, pp. 7-21, 1987.
- [35] R. H .Gallagher, "Introduction aux éléments finis", Edition Pluralis (traduction française), 1976.
- [36] G. Bazeley, Y. H. Chumg, B. M. Irons & O. C. Zienkiewicz, "Triangular elements in bending-Conforming and non-conforming solution", Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson A. F. Base, Ohio, 1965.
- [37] R. W. Clough, "The finite element method in structural mechanics", Chapter 7 of Stress analysis, ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Wiley, 1965.
- [38] F. A. Mirza & M. O. Olson, "The mixed finite element method in plane elasticity", Internationnal Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, pp. 273-289, 1980.
- [39] K. J. Bathe & E. L. Wilson, "Numerical methods in the finite element analysis", Prentice-Hall, 1976.
- [40] N. J. Pagano, "Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending", Journal of Composite Materials, vol.3, pp. 398-411, 1969.

- [41] N. J. Pagano, "Exact solutions for rectangular bidimentionnal composite and sandwich plates", *Journal of Composite Materials*, vol.4, pp. 20-35, 1970.
- [42] A. A. Griffith, "The theory of rupture", *Proceedings of the 1st Int. Cong. on Appl. Mech.*, Delft, pp. 55-63, 1924.
- [43] M. L. Williams, « On the stress distribution at the base of a stationary crack », *ASME J. Appl. Mech.* 79, pp. 109-114, 1957.
- [44] G. R. Irwin, *Fracture, « Handbuch der Physik »*, vol. VI, Springer, Berlin, 1958.
- [45] J. R. Rice, D. M. Tracey, « On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields », *J. Mech. Phys. Solids* 17, pp. 201-217, 1969.
- [46] A. L. Gurson, « Plastic flow and fracture behavior of ductile materials incorporating void nucleation, growth and interaction », Ph.D. thesis, Brown University, 1975.
- [47] J. B. Leblond, « Rupture fragile et rupture ductile », *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.326, Série IIb, pp. 243-250, 1998.
- [48] A. Zeghloul, "Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture", DEA, Mécanique -Matériaux – Structures – Procédés, Université de Metz, 2003-2004.
- [49] D. R. G. Owen & A. J. Fawkes, «Engineering fracture mechanics », Pineridge Press Ltd, Swansea, U.K, 1983.
- [50] J. R. Rice, « A path independent intergral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks », *J. Applied Mechanics*, 35, pp. 379-386, 1968.
- [51] C. Bjerkén & C. Persson, « A numerical method for calculating stress intensity factors for interface cracks in bimaterials », *Engineering Fracture Mechanics*, 68, pp.235-246, 2001.
- [52] J. Dundurs, « Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges », *J. Appl. Mech.*, 36, pp.650-652, 1969.
- [53] B. M. Malyshev, R.L. Salganik, " The strength of adhesive joints using the theory of cracks", *Int. J. Fract. Mech.*, 5, pp.114-128, 1965.
- [54] M. L. Williams, " The stresses around a fault or crack in dissimilar media", *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 49, pp.199-204, 1959.
- [55] A. H. England, "A crack between dissimilar media", *ASME J. Appl. Mech.*, 32, 400-402, 1965.
- [56] J. R. Rice & G. C. Sih, " Plane problems of cracks in dissimilar media", *ASME J. Appl. Mech.*, 32, pp.418-423, 1965.

- [57] M. Gotoh, "Some problems of bonded anisotropic plates with cracks along the bond", Int. J. Fract. Mech., 3, 253-265, 1967.
- [58] D.L. Clements, "A crack between dissimilar anisotropic media", Int. J. Engng. Sci., 9, pp.257-265, 1971.
- [59] J. R. Willis, "Fracture mechanics of interfacial cracks", J. Mech. Phys. Solids, 19, pp.353-368, 1971.
- [60] J. Qu & J. L. Bassani, "Crack on bimaterial and bicrystal interfaces", J. Mech. Phys. Solids, 37, pp.435-453, 1989.
- [61] Z. Suo, "Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media", Proc. Soc. Lond., A 427, pp.331-358, 1990.
- [62] J. Qu, J. L. Bassani, "Interfacial fracture mechanics for anisotropic bimaterials", J. of Appl. Mech., vol. 60, pp.422431, 1993.
- [63] L. Ni, S. Nemat-Nasser, "Interface crack in anisotropic dissimilar materials: An analytic solution", Applied Mechanics and Engineering Science, University of California, 1990.
- [64] P.O. Bouchard, "Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multimatériaux", Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [65] T.K. Hellen, «On the method of virtual crack extensions », Int. J. for Num. Meth. In Engng, Vol. 9, pp. 187-207, 1975.
- [66] D.M. Parks, « A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors », Int. J. Fract., Vol. 10, N°4, pp. 487-502, 1974.
- [67] Ph. Destuynder, M. Djaoua, « Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile », Math. Meth. In the Appl. Sci., Vol. 3, pp. 70-87, 1981.
- [68] Ph. Destuynder, M. Djaoua, S. Lescure, «Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique », J. de Méca. Théorique et Appliquée, Vol. 2, N°1, pp. 113-135, 1983.
- [69] A. Elouard, « Etude numérique par éléments finis de la fissuration avec remaillage automatique – Application à la mécanique des chaussées », Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993.
- [70] X.B. Zhang, « Etude numérique de la propagation de fissures par la mécanique de la rupture », Thèse de Doctorat de l'Université de Clermont-Ferrand II, 1992.
- [71] C. Petit, « Modélisation des milieux composites multicouches fissurés par la mécanique de la rupture », Thèse de Doctorat de l'Université de Clermont-Ferrand II, 1990.

- [72] S. Bouchemalla, « Etude des interfaces cohérentes ou fissurées des bimatiériaux orthotropes », Mémoire de Magister, Université du 8 Mai 1945, Guelma, 2003.
- [73] K. Y. Lin & J. W. Mar, « Finite element analysis of stress intensity for cracks at a biomaterials », Int. J. of Fracture, vol. 12, 4, pp. 521-531, 1976.
- [74] J. R. Rice & G. C. Sih, « Plane problems of cracks in dissimilar media », J. of Appl. Mech., 32 series E, 2, pp. 418-423, 1965.
- [75] E. Pan & B. Amadei, « Boundary element analysis of fracture mechanics in anisotropic biomaterials », Engineering analysis with Boundary Elements, 23, pp. 683-691, 1999.
- [76] A. Boufeloussa, « Etude des interfaces fissurées dans les milieux anisotropes par éléments finis mixtes d'interfaces », Mémoire de Magister, Université du 20 Aout 1955, Skikda, 2005.
- [77] K. C. Wu, « Stress intensity factor and energy release rate for interfacial cracks between dissimilar anisotropic materials », J. of Appl. Mech., 57, pp. 882-886, 1990.