

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des mathématiques et de l'informatique et des sciences de la matière
Département de Mathématiques
Laboratoire des mathématiques appliquées et de modélisation

THÈSE
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT EN 3^{ème} CYCLE

Domaine : Mathématiques et informatique. Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse non linéaire et modélisation

Présentée par

HALLACI Khadidja

Intitulée

**Équations de mécanique et de thermodynamique
de l'interaction de l'air et la surface d'eau**

Soutenue le : 09/02/2020

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom

Grade

Mr BOUSSETILA Nadjib

Prof.

Univ. de Guelma

Président

Mr FUJITA YASHIMA Hisao

Prof.

E.N.S. de Constantine

Encadreur

Mr AIBECHE Aissa

Prof.

Univ. de Setif

Examineur

Mr HITTA Amara

Prof.

Univ. de Guelma

Examineur

Mr NOUAR Ahmed

MCA

Univ. de Skikda

Examineur

Mr BENRABAH Abderafik

MCA

Univ. de Guelma

Examineur

Année Universitaire 2019/2020.

Équations de mécanique
et de thermodynamique de l'interaction de l'air
et la surface d'eau

Khadidja Hallaci

Thèse de Doctorat en mathématiques

Université 8 Mai 1945 - Guelma

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents symboles de tendresse, de sacrifice et d'amour.

Ma chère sœur Amel, et mon cher frère Abdou


Mon cher mari,

Toute ma famille,

Tous mes amis ...



Remerciements

'EST avec bonheur que je consacre ces mots en signe de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de cette thèse. Qu'ils perçoivent ici mes sincères remerciements.

Au début, je tiens à rendre hommage à mon directeur de thèse le professeur **Hisao FUJITA YASHIMA** pour l'abnégation accordée pour bien mener ce travail, pour ses multiples conseils et pour tout le temps consacré à diriger cette thèse tout au long de ces années .

Mes remerciements vont également au professeurs **Luigi RODINO**, **Davide ASCOLI** et **Enrico PRIOLA** de l'université de Turin et au professeur **Marco CODEGONE** de Polytechnique de Turin ainsi que le professeur **Paolo SECCHI** de l'université de Brescia, qui m'ont chaleureusement accueilli et avec qui j'ai eu des discussions et des remarques très utiles pour notre travail de recherche.

J'adresse mes plus sincères remerciements aux membres du jury : Prof. **Nadjib BOUSSETILA** le président, Prof. **Aissa AIBECHE**, Prof. **Amara HITTA**, Dr. **Ahmed NOUAR** et Dr. **Abderafik BENRABAH** les examinateurs, qui ont accepté d'évaluer cette thèse à sa juste valeur, et de me faire part de leurs remarques pertinentes et objectives qui pourraient contribuer à l'enrichissement de cette recherche.

Un grand merci à tous mes collègues membres du laboratoire LMAM, L'ambiance d'amitié qui y règne m'a beaucoup aidé à avancer dans mes travaux de recherche.



مُلخَص

في هذه الأطروحة نقترح دراسة جملة معادلتين تفاضليتين جُزئيتين خطيتين من نمط قطع مكافئ، يمثّلان السلوك الأساسي لدرجة الحرارة و كثافة البخار مع تأثير التبخر مقترنين بطريقة معينة. في الجزء الأول نبرهن وجود و وحدانية الحل لهذه الجملة، أولاً في مجال ذو بعد أحادي الوضعية ثم في مجال من الدرجة الثالثة محدّد بواسطة خطين أفقيين، للبرهان على ذلك نقوم بإنشاء متغير من متسلسلة فورييه. في الجزء الثاني، نقترح جملة معادلتين تماثلية للجملة الأولى و لكن معرفة في مجال كروي. المعادلتين خطيتين من نمط قطع مكافئ، يمثّلان السلوك الأساسي لدرجة الحرارة و كثافة البخار في حالة تبخر قطيرة كروية الشكل. باستعمال متغير من متسلسلة فورييه المتعلقة بالمجال الكروي، نبرهن وجود و وحدانية الحل لهذه الجملة في حالة التماثل الكروي.

الكلمات المفتاحية : جملة معادلات خطية من نمط قطع مكافئ، متسلسلة فورييه، عوامل متقطعة، حالة التماثل الكروي، التبخر.

Abstract

In this thesis we consider a system of two linear partial differential equations of parabolic type, which represent the basic behavior of temperature and vapor density with the effect of evaporation and are coupled in a particular way. In the first part, we prove the existence and uniqueness of the solution of this system, first in a domain of one spatial dimension and then in a domain in \mathbb{R}^3 delimited by two horizontal planes. To do this, we construct a particular variant of Fourier series. In the second part we consider a system of analogous equations in a spherical domain. It is the system of linear parabolic equations representing the behavior of the temperature and the density of vapor in the case of a spherical droplet with evaporation. Using a variant of Fourier series relative to a spherical domain, we prove the existence and uniqueness of the solution of this system in the case of spherical symmetry.

Key-words: System of linear parabolic equations, Fourier series, discontinuous coefficient, case of spherical symmetry, evaporation.

Résumé

Dans la présente thèse nous considérons un système de deux équations aux dérivées partielles de type parabolique linéaires représentant le comportement essentiel de la température et de la densité de vapeur avec l'effet de l'évaporation couplées d'une manière particulière. Dans la première partie nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution de ce système d'abord dans un domaine d'une dimension spatiale et puis dans un domaine dans \mathbb{R}^3 délimité par deux plans horizontaux. Pour ce faire nous construisons une variante particulière de la série de Fourier. Dans la deuxième partie nous considérons un système d'équations analogues dans un domaine sphérique. Il s'agit du système d'équations paraboliques linéaires représentant le comportement de la température et de la densité de vapeur dans le cas d'une gouttelette sphérique avec l'évaporation. En utilisant une variante de la série de Fourier relative au domaine sphérique, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution de ce système dans le cas de symétrie sphérique.

Mots-Clés : Système d'équations paraboliques linéaires, série de Fourier, coefficients discontinus, cas de symétrie sphérique, évaporation.

Table des matières

ملخص	i
Abstract	ii
Résumé	iii
Introduction	1
Chapitre 1 Motivation et méthodes	5
1.1 Motivation physique et mathématique : Interactions air-eau	5
1.2 Méthodes principales	10
1.2.1 Équations paraboliques linéaires	10
1.2.2 Espaces de Hilbert appropriés	13
1.2.3 Variantes de série de Fourier	16
1.2.4 Espaces de Sobolev anisotropes	19
Chapitre 2 Système d'équations paraboliques linéaires du type : température et densité de vapeur avec l'effet de l'évaporation	21
2.1 Introduction	21
2.2 Système d'équations à proposer	23
2.3 Une variante de série de Fourier	25
2.4 Démonstration de la proposition 2.3.1	28

TABLE DES MATIÈRES

2.5	Solution stationnaire	34
Chapitre 3	Existence et unicité de la solution du système d'équations linéaire	38
3.1	Cas du domaine d'une dimension spatiale	39
3.2	Cas du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$	45
3.2.1	Transformation des équations	45
3.2.2	Espaces fonctionnels et estimations	48
3.2.3	Existence et unicité de la solution	54
Chapitre 4	Équation de la chaleur avec l'effet de l'évaporation pour une gouttelette sphérique	57
4.1	Introduction	57
4.2	Formulation du problème à symétrie sphérique	59
4.3	Espaces L^2 et H^1 avec des poids	61
4.4	Une variante de série de Fourier sur le segment radial	65
4.5	Démonstration de la proposition 4.4.1	75
4.6	Solution stationnaire	81
4.7	Cas du domaine d'une dimension spatiale	83
	Conclusion et perspectives	90
	Bibliographie	92
	Activités de recherches	96

Introduction

LE thème de la présente thèse est l'étude d'équations linéaires aux dérivées partielles de type parabolique, couplées d'une manière particulière. Le choix de ce thème est motivé par l'intérêt pour la description mathématique du phénomène d'évaporation de l'eau à partir de la surface d'eau, et, plus en général, des interactions entre l'air et l'eau. En effet, l'évaporation de l'eau est un des facteurs principaux de l'interaction entre l'air et l'eau dans notre environnement, mais sa description mathématique rencontre beaucoup d'obstacles techniques. On peut estimer que ces difficultés résultent fondamentalement du fait que l'évaporation de H_2O se produit sur la surface de l'eau, c'est-à-dire sur une variété de dimension 2, et crée par la chaleur latente une source négative de la chaleur concentrée sur une variété de dimension 2, tandis que l'on est intéressé ses conséquences dans le domaine de dimension 3 occupé par l'air ou par l'eau.

Au début de notre recherche, nous cherchions une modélisation des interactions générales entre l'air et l'eau. Mais les circonstances particulières autour du phénomène d'évaporation nous ont conduits à l'étude d'un modèle simplifié de la densité de la vapeur d'eau et de la température avec l'évaporation. C'est un modèle simplifié, car les difficultés mathématiques intrinsèques qui résultent de la singularité du phénomène physique nous ont obligés à considérer deux équations linéaires décrivant, dans leur approximation linéaire, la température et la densité de la vapeur d'eau avec

leur diffusion.

Malgré la description approximative par un modèle simplifié, le problème formulé dans le cadre de l'Analyse mathématique présente – nous croyons – des aspects intéressants qui méritent notre attention. Le couplage de deux équations est formulé par une source de la chaleur concentrée sur une variété de dimension inférieure à celle du domaine et par une condition sur la frontière du domaine. Pour surmonter les difficultés dues à cette situation particulière nous avons introduit et analysé une série de Fourier particulière, ce qui constitue le point crucial de notre travail du point de vue technique.

Pour avoir une idée un peu concrète sur le système d'équations que nous allons analyser dans la présente thèse, citons ici le cas le plus simple de notre système d'équations. En effet, pour une fonction T représentant la température dans l'eau ($-b < x_3 < 0$) et dans l'air ($0 < x_3 < a$) et une fonction Π représentant la densité de la vapeur dans l'air ($0 < x_3 < a$), on considère le système d'équations

$$c_{\nu\rho}\partial_t T = \partial_{x_3}(\kappa\partial_{x_3} T) + \psi\delta(x_3) \quad \text{pour } t \geq 0, -b < x_3 < a, \quad (1)$$

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \partial_{x_3}^2 \Pi \quad \text{pour } t \geq 0, 0 < x_3 < a, \quad (2)$$

avec les conditions de couplage

$$\psi(t) = \gamma_1 \frac{\Pi(t, \varepsilon_1) - \Pi(t, 0)}{\varepsilon_1}, \quad (3)$$

$$\Pi|_{x_3=0} = \bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 T|_{x_3=0}, \quad (4)$$

et d'autres conditions usuelles sur les frontières et des conditions initiales ($\delta(x_3)$ dans (1) est la delta de Dirac sur $\mathbb{R} \ni x_3$). La relation (3) est une approximation de la condition

$$\psi = \gamma_1 \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0}, \quad (5)$$

tandis que (4) est une approximation de la condition

$$\Pi|_{x_3=0} = \bar{\pi}_{vs}(T)|_{x_3=0}, \quad (6)$$

$\bar{\pi}_{vs}(T)$ étant la densité de la vapeur saturée à la température T (voir (1.11) dans le chapitre 1). Dans (2)–(4) $\gamma_0, \gamma_1, \alpha_1$ sont des constantes strictement positives, tandis que $c_{v\varrho}$ et κ dans (1) sont des constantes strictement positives séparément dans $-b < x_3 < 0$ et dans $0 < x_3 < a$. Même si (1) et (2) sont des équations du type parabolique linéaires, les conditions de couplage (3)–(4) et le fait que $c_{v\varrho}$ et κ ne sont globalement pas des constants nous obligent à trouver une méthode particulière pour résoudre ce problème.

Contenu de la thèse

La présente thèse est composée de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous allons illustrer la motivation physique et mathématique de l'interaction entre l'air et l'eau ainsi que les méthodes principales utilisées. Plus précisément, nous allons rappeler le système d'équations mécanique et thermodynamique qui décrivent les interactions de l'air et l'eau, y compris le phénomène de l'évaporation de l'eau. Ensuite nous allons illustrer l'idée des méthodes principales que nous allons utiliser dans la présente thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous allons considérer le système de deux équations paraboliques linéaires, dont la formulation est motivée par une modélisation approximative de la température et de la densité de vapeur dans l'air et dans l'eau avec l'effet de l'évaporation qui se produit sur la surface de l'eau. Dans l'équation modélisant la variation de la température, on trouve les coefficients de la diffusion de la chaleur et la chaleur spécifique différents dans l'eau et dans l'air ainsi que la source (négative) de la chaleur concentrée sur l'intersurface entre l'eau et l'air. Pour traiter cette équation nous introduisons une version particulière de la série de Fourier. En outre, en utilisant

cette série de Fourier, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution stationnaire de ce système d'équations dans un domaine d'une dimension spatiale.

Dans le troisième chapitre, nous allons considérer premièrement le système d'équations linéaires de la température et de la densité de vapeur dans le domaine réduit à un domaine de dimension 1, c'est-à-dire sur l'intervalle $] -b, a[\subset \mathbb{R}$ et nous allons démontrer l'existence et l'unicité de ce système. Puis nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système complet dans le domaine $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -b < x_3 < a\}$ sous une hypothèse restrictive (voir (3.1) dans le chapitre 3), en utilisant la variante de la série de Fourier introduite dans le deuxième chapitre et aussi des espaces de Sobolev définis par la série de Fourier pour x_3 et la transformée de Fourier pour x_1 et x_2 .

Dans le quatrième chapitre nous avons un problème analogue dans le cas sphérique. Il s'agit du système d'équations paraboliques linéaires représentant la température et la densité de vapeur dans un domaine sphérique $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < b\}$ avec le domaine occupé par l'eau $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < a\}$, $0 < a < b$, comme dans le cas d'une gouttelette d'eau sphérique avec l'effet de l'évaporation. Nous allons introduire une série de Fourier relative au domaine sphérique avec la symétrie sphérique, suivant l'idée de la série de Fourier introduite dans le chapitre 2, mais avec une élaboration assez consistante pour l'adapter au domaine sphérique. En utilisant ces outils, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans le cas de la symétrie sphérique.

1

Motivation et méthodes

1.1 Motivation physique et mathématique : Interactions air-eau

LES interactions entre l'air et l'eau interviennent dans beaucoup de phénomènes qui intéressent notre vie. Nous pouvons citer des exemples de phénomènes violents comme cyclone tropical ou "el Niño", pour lesquels l'interaction entre l'atmosphère et la mer est un facteur essentiel, mais aussi le climat local déterminé par la présence d'un lac ou la proximité de la mer, jusqu'aux phénomènes à une échelle assez petite comme la surface du thé versé dans une tasse ou celle d'une gouttelette d'eau de la pluie. On trouve une littérature abondante pour expliquer, ou tenter d'expliquer,

ces phénomènes comme par exemple [8], [21] pour de grandes échelles et [12], [36] pour de petites échelles.

La surface de l'eau exposée à l'air est, comme nous le savons bien, capable de produire l'évaporation selon les conditions physiques (pour les fondements physiques du phénomène d'évaporation, voir par exemple [20]). Or, l'air ainsi que l'eau sont des fluides susceptibles d'être mus et ceci, comme nous l'observons communément, provoque la variation de la position de la surface d'eau. Donc pour décrire d'une manière générale les interactions entre l'eau et l'air, nous avons besoin des principes de la thermodynamique qui déterminent les conditions de l'évaporation de H_2O ainsi que des équations de la mécanique des fluides (pour les principes de la thermodynamique, voir par exemple [24]; pour les équations de la mécanique des fluides, voir par exemple [25]).

Dans chaque partie – la partie de l'air et la partie de l'eau – considérée séparément, le mouvement du fluide et la distribution de la température sont décrits par un système d'équations. Dans la partie de l'air on peut considérer par exemple le système d'équations

$$\partial_t(\rho + \pi) + \nabla \cdot ((\rho + \pi)v) = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi v) = \lambda \Delta \pi, \quad (1.2)$$

$$(\rho + \pi)(\partial_t v + v \cdot \nabla v) = \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \nabla(\nabla \cdot v) - R \nabla \left\{ \left(\frac{\rho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \right) T \right\} - (\rho + \pi) g e_3, \quad (1.3)$$

$$(\rho + \pi) c_1 (\partial_t T + v \cdot \nabla T) + R \left\{ \left(\frac{\rho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \right) T \right\} \nabla \cdot v = \quad (1.4)$$

$$= \kappa_1 \Delta T + \eta \sum_{j,k=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \zeta (\nabla \cdot v)^2 + E_1.$$

où ρ , π , v , T désignent respectivement la densité de l'air sec, la densité de la vapeur, la vitesse, la température, et λ , η , ζ , c_1 , κ_1 sont respectivement le coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air, le coefficient de viscosité d'écoulement, le coefficient de viscosité volumique, la chaleur spécifique de l'air et le coefficient de diffusion de la chaleur dans l'air, tandis que $-g e_3 = -g(0, 0, 1)^T$ est la force gravitationnelle par unité de masse

et E_1 est l'éventuelle source de la chaleur ; ici la pression est donnée par

$$p = R\left(\frac{\rho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}\right)T, \quad (1.5)$$

μ_a et μ_h étant respectivement la masse molaire de l'air sec et celle de H_2O .

D'autre part, dans la partie occupée par l'eau liquide, le mouvement de l'eau liquide sera régi par les équations de Navier-Stokes

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = \nu \Delta v + g e_3, \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (1.7)$$

et la fonction T représentant la température devra satisfaire à l'équation

$$c_2 \partial_t T + v \cdot \nabla T = \kappa_2 \Delta T + \nu \sum_{j,k=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + E_2. \quad (1.8)$$

Dans (1.6) et (1.8) ν , c_2 , κ_2 , E_2 sont respectivement le coefficient de viscosité de l'eau liquide, la chaleur spécifique de l'eau liquide, le coefficient de diffusion de la chaleur dans l'eau liquide et l'éventuelle source de la chaleur.

Le système d'équations (1.1)–(1.4) est assez compliqué et, même si le système de Navier-Stokes (1.6)–(1.7) est bien connu et bien étudié, le système d'équations (1.6)–(1.8) lui aussi n'est pas simple. Mais dans la modélisation mathématique de l'interaction entre l'air et l'eau ce qui rend particulièrement difficile le problème est la présence de l'inter-surface, qui est en principe inconnue (donc les deux sous-domaines occupés par l'air et par l'eau liquide sont eux aussi en principe inconnus).

Sur l'inter-surface, que nous notons S , nous devons imposer avant tout la contrainte géométrique : la vitesse du déplacement de S dans la direction de la normale n à S doit être égale à

$$v^{(1)} \cdot n = v^{(2)} \cdot n, \quad (1.9)$$

où $v^{(1)}$ et $v^{(2)}$ sont la vitesse de l'air et celle de l'eau liquide.

Deuxièmement la continuité du tenseur de contrainte, complétée par la tension superficielle, exige, dans le cas où l'interface S peut être définie par une fonction $h(x_1, x_2)$,

$$S = \{x_3 = h(x_1, x_2)\},$$

l'égalité

$$(p^{(1)} - p^{(2)})n_i = \sum_{j=1}^3 [\eta(\partial_i v_j^{(1)} + \partial_j v_i^{(1)}) + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)\nabla \cdot v^{(1)} - \nu(\partial_i v_j^{(2)} + \partial_j v_i^{(2)})]n_j + (1.10)$$

$$+ (\gamma \nabla \cdot \frac{\nabla h}{(1 + |\nabla h|^2)^{1/2}})n_i,$$

où $p^{(1)}$ est la pression de l'air donnée par (1.5) et $p^{(2)}$ est la pression de l'eau liquide (qui est notée p dans (1.6), tandis que γ est le coefficient de la tension superficielle et le terme $\gamma \nabla \cdot \frac{\nabla h}{(1 + |\nabla h|^2)^{1/2}}$ est l'effet de la tension superficielle (pour les détails de la tension superficielle, voir le Chap. VII, § 60 de [25]).

En ce qui concerne l'évaporation de l'eau, qui se produit sur la surface d'eau, son aspect fondamental peut être expliqué dans le cadre de la physique statistique (voir [20], [3], [36], etc...). Mais, pour que l'on puisse analyser l'effet de l'évaporation dans l'air et dans l'eau, on a besoin d'introduire les relations macroscopiques concernant l'évaporation. Pour cela, nous rappelons d'abord la densité de la vapeur saturée, que nous notons $\bar{\pi}_{vs}(T)$; elle est en effet essentiellement fonction de la température T . Sa valeur établie par les physiciens est

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{1}{R_1 T} E_0 \cdot 10^{\frac{7.63(T-273.15)}{T-31.25}}, \quad E_0 = 6,107 \quad (mbar), \quad (1.11)$$

où

$$R_1 = \frac{R}{\mu_h}$$

(nous avons pris cette formule de [27], où se trouve aussi l'explication de la formule (1.11)). Ceci signifie que dans l'air à la température T la densité de la vapeur d'eau

ne peut pas dépasser la valeur $\bar{\pi}_{v_s}(T)$; dans le cas où à cause de la diminution de la température $\bar{\pi}_{v_s}(T)$ devient inférieur à la densité réelle de la vapeur d'eau, la partie excédante de la vapeur doit se condenser et devenir liquide (ou solide) en formant par exemple un brouillard. D'autre part, le principe de l'équilibre local sur lequel se base la description macroscopique implique que dans le voisinage immédiat de la surface de l'eau la densité de la vapeur doit être égale à celle de la vapeur saturée.

L'autre quantité essentielle pour le phénomène d'évaporation est la chaleur latente de la transition de phase de l'eau de l'état liquide à l'état gazeux (et vice-versa). Sa valeur est

$$L_{tr}(T) = (3244 - 2,72 T)10^3 \quad (J/kg). \quad (1.12)$$

Quand se produit l'évaporation de l'eau, ceci prive l'énergie thermique $L_{tr}(T)$ par unité de masse de l'eau évaporée. La chaleur latente $L_{tr}(T)$ elle aussi dépend de la température T , mais sa dépendance de T est relativement petite, à différence de la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{v_s}(T)$, dont la dépendance de la température T est très significative.

Le problème du mouvement de deux fluides avec une intersurface dans le cadre de la mécanique, c'est-à-dire avec les conditions (1.9) et (1.10) mais sans les conditions dues à l'évaporation, a été étudié par certains chercheurs depuis le travail de Tani [40]. Le problème de la surface libre d'un fluide visqueux incompressible (c'est-à-dire, problème réduit au seul côté de l'eau) a été étudié, depuis les travaux de Solonnikov [38], [39], par plusieurs auteurs [16], [15], [41].

Sur l'évaporation de l'eau à partir de la surface de l'eau on trouve de nombreux travaux de caractère physique mathématiques ([12], [31], [3], [29], [19], [6], [36], [43], etc...). Mais, comme le problème de l'intersurface entre l'eau et l'air, même si on le considère seulement dans le cadre de la mécanique, est assez difficile, il nous semble que pour le moment l'étude dans le cadre de l'Analyse mathématique du système d'équations décrivant le mouvement des deux fluides avec l'intersurface et l'effet de l'évaporation est difficilement réalisable.

Compte tenu de ces circonstances se pose la question : comment on peut décrire

le phénomène de l'évaporation à partir de la surface de l'eau et ses effets – la diffusion de la vapeur d'eau dans l'air et la diffusion dans l'air et dans l'eau de l'effet thermique de l'évaporation – sous l'hypothèse de l'absence du mouvement macroscopique de l'air et de l'eau. Même dans cette simplification des conditions, il nous semble que l'analyse satisfaisante du système d'équations du modèle qui décrit ce phénomène n'est pas facilement réalisable. Comme nous l'avons évoqué dans l'Introduction, à notre avis, ces difficultés sont dues au fait que les deux équations sont couplées par les conditions sur l'interface comme (5), (6). Notre intérêt principal réside donc dans la compréhension de la possibilité de la description de ce problème par un système d'équations aux dérivées partielles et de ses propriétés à partir de l'existence et l'unicité de la solution.

1.2 Méthodes principales

1.2.1 Équations paraboliques linéaires

Les équations aux dérivées partielles du type parabolique et les méthodes de leur résolution sont bien connues; on peut les trouver facilement dans les manuels des *Équations aux dérivées partielles* ([28], [11], etc...). Pour l'intérêt de la problématique de la présente thèse, nous rappelons la méthode de la résolution de l'équation de la chaleur dans le domaine d'une dimension spatiale à l'aide de la série de Fourier; pour simplifier, choisissons le domaine

$$I =]0, \pi[$$

et considérons l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \kappa_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + f(t, x) \quad \text{dans } [0, \infty[\times I \quad (1.13)$$

avec les conditions aux limites

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad (1.14)$$

et la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{dans } I, \quad (1.15)$$

où κ_0 est une constante strictement positive et $u_0(x)$ et $f(t, x)$ sont des fonctions données.

On rappelle que les fonctions

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.16)$$

constituent une base orthonormale de $L^2(0, \pi)$ et un système orthogonal complet de $H^1(0, \pi)$ et sont des vecteurs propres de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ avec la condition de Dirichlet homogène (c'est-à-dire annulation de la fonction aux points $x = 0$ et $x = \pi$), vecteurs propres correspondants aux valeurs propres $\lambda_k = k^2$, c'est-à-dire

$$-\frac{d^2}{dx^2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin kx = k^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (1.17)$$

Donc, si on pose

$$u_{0,k} = \int_0^\pi u_0(x) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin kx dx, \quad f_k(t) = \int_0^\pi f(t, x) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin kx dx \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.18)$$

on peut décomposer l'équation (1.13) avec les conditions (1.14)–(1.15) en une famille de problèmes de Cauchy

$$\frac{d}{dt} u_k(t) = -\kappa_0 k^2 u_k(t) + f_k(t), \quad u_k(0) = u_{0,k} \quad k = 1, 2, \dots. \quad (1.19)$$

La solution $u(t, x)$ du problème (1.13)–(1.15) sera alors construite par les solutions

$u_k(t)$ des problèmes de Cauchy (1.19) dans la forme

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin kx. \quad (1.20)$$

Nous voulons appliquer l'idée de cette méthode à l'équation

$$v(x)\partial_t u(t, x) = \partial_x \left(\kappa(x)\partial_x u(t, x) \right) + \psi(t)\delta(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times]-L_1, L_2[, \quad (1.21)$$

avec les conditions aux limites

$$u(t, -L_1) = u(t, L_2) = 0 \quad (1.22)$$

et la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (1.23)$$

Ici les coefficients v et κ sont tels que

$$v(x) = v_1 \quad \text{si } -L_1 < x < 0, \quad v(x) = v_2 \quad \text{si } 0 < x < L_2, \quad (1.24)$$

$$\kappa(x) = \kappa_1 \quad \text{si } -L_1 < x < 0, \quad \kappa(x) = \kappa_2 \quad \text{si } 0 < x < L_2, \quad (1.25)$$

$v_1, v_2, \kappa_1, \kappa_2$ étant des constantes strictement positives.

Nous considérons aussi l'équation

$$v(r)\partial_t u = \partial_r (r^2 \kappa(r)\partial_r u) + \psi\delta(r-a) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times]0, b[, \quad (1.26)$$

avec

$$v(r) = v_1 \quad \text{si } 0 < r < a, \quad v(r) = v_2 \quad \text{si } a < r < b, \quad (1.27)$$

$$\kappa(r) = \kappa_1 \quad \text{si } 0 < r < a, \quad \kappa(r) = \kappa_2 \quad \text{si } a < r < b, \quad (1.28)$$

$v_1, v_2, \kappa_1, \kappa_2$ étant des constantes strictement positives.

L'équation (1.26) sera envisagée avec la condition initiale

$$u(0, r) = u_0(r) \quad \text{pour } r \in]0, b[, \quad (1.29)$$

et la seule condition aux limites

$$u(t, b) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0; \quad (1.30)$$

au point $r = 0$ on ne donne pas de condition aux limites, ce qui est conforme au fait que le domaine $]0, b[$ n'est autre que le domaine $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < b\}$ avec la symétrie sphérique des fonctions considérées.

Les équations (1.21) et (1.26) ne sont pas équivalentes à l'équation (1.13). Mais si on peut trouver une série de Fourier alternative, alors on pourrait construire la solution des équations (1.21) et (1.26) dans une forme analogue à (1.20).

Les autres informations sur l'équation de la chaleur et celle de la diffusion de masse qui peuvent être utiles peuvent être trouvées dans [2], [30], [42], etc...

1.2.2 Espaces de Hilbert appropriés

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n muni de la frontière régulière $\partial\Omega$. Si $(a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ est une matrice carrée réelle d'ordre n définie pour tout $x \in \Omega$ telle que

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}, \quad (1.31)$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \kappa |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \kappa > 0, \quad (1.32)$$

alors, comme il est bien connu, on peut définir le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx \equiv \langle u, v \rangle_{\tilde{H}^1(\Omega)} \quad (1.33)$$

et avec ceci l'espace de Hilbert

$$\tilde{H}^1(\Omega) = \{u : \text{mesurable}, \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \langle u, u \rangle < \infty, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad (1.34)$$

dont la norme est

$$\|u\|_{\tilde{H}^1(\Omega)} = (\langle u, u \rangle)^{1/2}.$$

Les vecteurs propres e_k de l'opérateur elliptique

$$(Au)(x) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x)), \quad (1.35)$$

c'est-à-dire les fonctions e_k , $k = 1, 2, \dots$, vérifiant la relation

$$Ae_k = \lambda_k e_k \quad (1.36)$$

avec les nombres $\lambda_k > 0$ (les valeurs propres de l'opérateur A), constituent une base orthonormale de $L^2(\Omega)$ et un système orthogonal complet de $\tilde{H}^1(\Omega)$. La décomposition orthogonale d'une fonction $f \in L^2(\Omega)$ et l'application de la relation (1.36) nous permet de résoudre immédiatement le problème

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x)) = f(x), \quad (1.37)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (1.38)$$

Pour les détails de cette méthode, voir [28], Chapitre IV, Section 1.

Une fois construite cette base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$, en utilisant cette base orthonormale et la décomposition orthogonale, on peut résoudre sans difficulté non seulement l'équation elliptique (1.37), mais aussi l'équation parabolique

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(t, x)) = f(t, x), \quad (1.39)$$

avec la condition aux limites

$$u(t, x) = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega \quad (1.40)$$

et la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega \quad (1.41)$$

(voir par exemple [28], Chapitre VI, Section 2, Point 2).

Pour appliquer cette idée à nos équations (1.21) et (1.26), il est essentiel de choisir les espaces de Hilbert appropriés. Nous définissons les espaces de Hilbert

$$L_v^2(I) = \{u : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurables} \mid \int_I v(x)|u(x)|^2 dx < \infty\} \quad (1.42)$$

muni du produit scalaire et de la norme

$$\langle u, v \rangle_{L_v^2(I)} = \int_I v(x)u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_{L_v^2(I)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_v^2(I)}}$$

et

$$\tilde{H}_\kappa^1(I) = \{u \in C(\bar{I}; \mathbb{R}) \mid \int_I \kappa(x)|u'(x)|^2 dx < \infty, u(-L_1) = u(L_2) = 0\} \quad (1.43)$$

muni du produit scalaire et de la norme

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{H}_\kappa^1(I)} = \int_I \kappa(x)u'(x)v'(x)dx, \quad \|u\|_{\tilde{H}_\kappa^1(I)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{\tilde{H}_\kappa^1(I)}}.$$

Nous définissons également

$$\tilde{L}_v^2(0, b) = \{\varphi : (0, b) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurables} \mid \int_0^b v(r)r^2|u(r)|^2 dr < \infty\}, \quad (1.44)$$

$$\tilde{H}_\kappa^1(0, b) = \{\varphi \in \tilde{L}_v^2(0, b) \mid \int_0^b \kappa(r)r^2|\frac{d}{dr}u(r)|^2 dr < \infty, u(b) = 0\}, \quad (1.45)$$

munis respectivement du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{L}_v^2(0,b)} = \int_0^b v(r)r^2 u(r)v(r)dr, \quad \langle u, v \rangle_{\tilde{H}_\kappa^1(0,b)} = \int_0^b \kappa(r)r^2 u'(r)v'(r)dr, \quad (1.46)$$

et munis de la norme correspondante à ces produits scalaires.

Comme on le verra, le couple d'espaces de Hilbert $L_v^2(I)$ et $\tilde{H}_\kappa^1(I)$ définis dans (1.42) et (1.43) comme le couple d'espaces de Hilbert $\tilde{L}_v^2(0, b)$ et $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ constitue la base de la structure dans laquelle nous allons résoudre nos équations.

Nous utiliserons aussi les espaces de Hilbert

$$\tilde{L}^2(a, b) = \{\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurables} \mid \int_a^b r^2 |u(r)|^2 dr < \infty\}, \quad (1.47)$$

$$\tilde{H}^1(a, b) = \{\varphi \in \tilde{L}^2(a, b) \mid \int_a^b r^2 \left| \frac{d}{dr} u(r) \right|^2 dr < \infty, u(a) = u(b) = 0\} \quad (1.48)$$

munis respectivement du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{L}^2(a,b)} = \int_a^b r^2 u(r)v(r)dr, \quad \langle u, v \rangle_{\tilde{H}^1(a,b)} = \int_a^b r^2 u'(r)v'(r)dr \quad (1.49)$$

et munis de la norme correspondante à ces produits scalaires.

1.2.3 Variantes de série de Fourier

La méthode principale sur laquelle nous nous appuyons pour traiter les équations de la chaleur (1.21) et (1.26) est l'utilisation d'une version particulière de série de Fourier.

Les équations (1.21) et (1.26) ne sont pas identiques à l'équation (1.13). Mais elles ont des aspects similaires à ceux de l'équation (1.13), de sorte que nous pouvons utiliser une méthode similaire à la résolution du problème (1.13)–(1.15) par la série de Fourier (1.16).

Plus précisément, on définit la famille de fonctions $e_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, par

$$e_k(x) = \frac{y_k(x)}{\|y_k\|_{L_v^2(I)}}, \quad (1.50)$$

où

$$y_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \kappa_1 v_1}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k v_1}{\kappa_1}} L_1 + \sqrt{\frac{\lambda_k v_1}{\kappa_1}} x\right) & \text{si } -L_1 \leq x \leq 0, \\ \tilde{\gamma}(\lambda_k) \sin\left(\tilde{\beta}(\lambda_k) + \sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}} x\right) & \text{si } 0 \leq x \leq L_2. \end{cases} \quad (1.51)$$

Ici λ_k , $\tilde{\beta}(\lambda_k)$, $\tilde{\gamma}(\lambda_k)$ sont choisis de telle sorte que $y_k(x)$ s'annule au point $x = L_2$ et que la continuité de la fonction $y_k(x)$ ainsi que celle de $\kappa(x) \frac{d}{dx} y_k(x)$ soient garanties au point $x = 0$ (pour la définition précise de λ_k , $\tilde{\beta}(\lambda_k)$, $\tilde{\gamma}(\lambda_k)$, voir (2.16), (2.17), (2.20) dans le chapitre 2).

Comme il sera illustré dans la Proposition 2.3.1, la famille de fonction $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ sera une base orthonormale de l'espace de Hilbert $L_v^2(I)$ et aussi un système orthogonal complet de $\tilde{H}_\kappa^1(I)$. Il est important que les fonctions $e_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, jouissent de bonnes propriétés similaires aux fonctions $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin kx$, qui forme la série de Fourier classique sur l'intervalle $]0, \pi[$. On verra en effet que la Proposition 2.3.1 garantit les propriétés suivantes :

$$i) \quad \|e_k\|_{\tilde{H}_\kappa^1(I)}^2 = \lambda_k;$$

$$ii) \quad -\frac{d}{dx}(\kappa(x) \frac{d}{dx} e_k(x)) = \lambda_k v(x) e_k(x) \quad \forall x \in]-L_1, 0[\cup]0, L_2[$$

$$iii) \quad \kappa(x) \frac{d}{dx} e_k(x) \text{ est continue sur } [-L_1, L_2];$$

$$iv) \quad \sup_{-L_1 < x < L_2} |e_k(x)| \leq K_1,$$

$$K_1 = 2 \max\left(\frac{1}{\sqrt{v_1 \kappa_1}}, \frac{1}{\sqrt{v_2 \kappa_2}}\right) \max\left(\frac{\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{L_1}}, \frac{\sqrt{\kappa_2}}{\sqrt{L_2}}\right);$$

$$v) \quad M_0(k-1)^2 \leq \lambda_k \leq M_0(k+1)^2, \quad M_0 = \left(\frac{\pi}{L_1 \sqrt{\frac{v_1}{\kappa_1}} + L_2 \sqrt{\frac{v_2}{\kappa_2}}}\right)^2.$$

De manière analogue, pour le cas sphérique on peut construire la base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ de $\tilde{L}_v^2(0, b)$, qui est également un système orthogonal complet de $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$. Plus précisément, on définit

$$e_k(r) = \frac{y_k(r)}{\|y_k(r)\|_{\tilde{L}_v^2(0, b)}}, \quad (1.52)$$

où

$$y_k(r) = \begin{cases} \gamma(\lambda_k) \frac{\sin(\beta(\lambda_k) + \sqrt{\frac{\lambda_k v_1}{\kappa_1}}(a-r))}{r} & \text{pour } 0 \leq r < a, \\ \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}} b \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}}(b-r)\right)}{r} & \text{pour } a \leq r \leq b, \end{cases} \quad (1.53)$$

Ici λ_k est une suite réelle strictement croissante pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\beta(\lambda_k)$ et $\gamma(\lambda_k)$ sont choisis de telle sorte que la continuité de la fonction $y_k(r)$ ainsi que celle de $\kappa(r) \frac{d}{dr} y_k(r)$ soient garanties au point $r = a$ (pour la définition précise de λ_k voir (4.51), et pour celle de $\beta(\lambda_k)$, $\gamma(\lambda_k)$, voir (4.32), (4.33) (avec $\lambda = \lambda_k$), dans le chapitre 4).

Alors, outre que $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ est une base orthonormale de $\tilde{L}_v^2(0, b)$ et un système orthogonal complet de $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$, on verra, dans la Proposition 4.4.1, que la famille de fonctions $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ jouit des propriétés suivantes :

$$i) \quad \|e_k\|_{\tilde{H}_\kappa^1(0, b)}^2 = \lambda_k;$$

ii) $e_k(r)$ et $r^2 \kappa(r) \frac{d}{dr} e_k(r)$ sont continues;

$$iii) \quad \frac{d}{dr} e_k(r)|_{r=0} = 0, \quad e_k(b) = 0;$$

$$iv) \quad -\frac{d}{dr} r^2 \kappa(r) \frac{d}{dr} e_k(r) = \lambda_k c_{\nu\rho}(r) r^2 e_k(r) \quad \forall r \in]0, a[\cup]a, b[;$$

v) il existe une constante $C_1 < \infty$ telle que

$$|e_k(a)| \leq C_1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

vi) $e_k(r)$ possède $k - 1$ zéros sur $]0, b[$;

$$vii) \quad M_0(k-1)^2 \leq \lambda_k \leq M_0(k+1)^2, \quad M_0 = \left(\frac{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{\pi(a\sqrt{\nu_1 \kappa_2} + (b-a)\sqrt{\nu_2 \kappa_1})} \right)^2.$$

Ces propriétés seront utilisées pour démontrer l'existence d'une solution des systèmes d'équations que nous considérons.

1.2.4 Espaces de Sobolev anisotropes

Dans le cas du problème dans le domaine de dimension 3, plus précisément dans le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2 \times]-b, a[$, nous allons construire la solution dans un espace de type espace de Sobolev avec des ordres différents dans les directions de x_1 , x_2 et dans la direction de x_3 .

Plus précisément, nous allons utiliser l'espace de Hilbert $H^{s,r}(\Omega)$, $s \geq r$, défini par la série de Fourier pour x_3 et la transformée de Fourier pour x_1 et x_2 , caractérisé par la norme

$$\|u\|_{H^{s,r}(\Omega)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-r} (1 + |\xi|^2 + \lambda_k)^r |\hat{u}(\xi, k)|^2 d\xi \right)^{1/2}; \quad (1.54)$$

ici $\hat{u}(\xi, k)$ est la fonction de $\xi \in \mathbb{R}^2$ et de $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par

$$\hat{u}(\xi, k) = \mathcal{F}_{(x_1, x_2)} \langle e_k, u \rangle_{L^2_{\nu}(-b, a)}$$

avec la transformée de Fourier $\mathcal{F}_{(x_1, x_2)}(\cdot)$ par rapport à (x_1, x_2) et le produit scalaire $\langle e_k, u \rangle_{L^2_{\nu}(-b, a)}$ dans l'espace de Hilbert $L^2_{\nu}(-b, a)$, e_k étant un des éléments de la base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de l'espace $L^2_{\nu}(-b, a)$ définie dans (1.50). Même si les fonctions e_k ne sont pas des fonctions trigonométriques, comme nous l'avons vu en haut, elles jouissent des propriétés similaires, de sorte que la puissance r dans la définition (1.54) indique une régularité dans la direction de x_3 correspondante à celle de $H^r(-b, a)$.

De manière analogue nous définissons l'espace de Hilbert $H^{s,r}(\Omega^+)$ pour les fonctions définies sur $\Omega^+ = \mathbb{R}^2 \times]0, a[$ par la norme

$$\|u\|_{H^{s,r}(\Omega^+)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-r} (1 + |\xi|^2 + k^2)^r |\hat{u}(\xi, k)|^2 d\xi \right)^{1/2}; \quad (1.55)$$

ici $\hat{u}(\xi, k)$ est la fonction de $\xi \in \mathbb{R}^2$ et de $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par

$$\hat{u}(t, \xi, k) = \mathcal{F}_{(x_1, x_2)} \left\langle \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi}{a} k x_3, u \right\rangle_{L^2(0, a)},$$

$\mathcal{F}_{(x_1, x_2)}(\cdot)$ étant la transformée de Fourier par rapport à (x_1, x_2) .

2

Systeme d'equations paraboliques lineaires du type : temperature et densite de vapeur avec l'effet de l'evaporation

2.1 Introduction

DANS le present chapitre nous allons etudier un systeme d'equations paraboliques lineaires couplees par une condition particuliere. L'etude est motivee par le phenomene d'evaporation de l'eau de la surface de l'eau liquide, qui intervenant dans un grand nombre de phenomenes physiques, joue souvent un role important a

la grande échelle comme l'évaporation de l'eau de la surface de l'océan (voir par exemple [8], [21]) ainsi qu'à l'échelle plus petite ; dans des cas particuliers, des physiciens et des chimistes ont proposé des modèles mathématiques bien articulés des comportements locaux de l'évaporation de l'eau (voir par exemple [10], [33], [35], [43] ; sur la physique de l'évaporation en général, voir aussi [20]). Mais il nous semble que l'étude mathématique des équations qui décrivent l'évaporation de l'eau et ses effets n'est pas suffisamment développée.

Rappelons les caractéristiques particulières de l'évaporation. Si S est l'intersurface entre l'eau liquide et l'air, l'évaporation de l'eau qui se produit sur la surface S est accompagnée par l'absorption de la chaleur, dite chaleur latente de la transition de phase de H_2O , de sorte qu'il y a une source (négative) de la chaleur concentrée sur la surface S . D'autre part, si on admet la présence de la diffusion de la vapeur d'eau dans l'air, la quantité de l'évaporation devra être proportionnelle à la composante normale à l'intersurface du gradient de la densité de vapeur, tandis que sur S la densité de vapeur doit être celle de la vapeur saturée. Quant à la diffusion de la chaleur, son coefficient ainsi que la chaleur spécifique sont différents dans l'eau liquide et dans l'air. Ces relations physiques, traduites dans les conditions sur les équations de diffusion pour la chaleur et la densité de la vapeur d'eau, constituent les conditions particulières qui ne facilitent pas la résolution des équations.

Dans ce présent travail on considère une équation parabolique linéaire pour la fonction inconnue T (température) dans le domaine $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -b < x_3 < a\}$ et une équation parabolique linéaire pour la fonction inconnue Π (densité de vapeur) dans le domaine $\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_3 < a\}$. On suppose que dans l'équation pour T la "source de la chaleur" est concentrée sur $\{x_3 = 0\}$ et proportionnelle à $\frac{1}{\varepsilon_1} [\Pi|_{x_3=\varepsilon_1} - \Pi|_{x_3=0}]$ avec un $\varepsilon_1 > 0$, ce qui est analogue à l'approximation souvent utilisée dans les travaux pratiques (voir par exemple [17]) de la loi de Dalton (voir par exemple [1], [37]). On suppose aussi que la fonction Π doit satisfaire à la condition

$$\Pi|_{x_3=0} = \bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 T|_{x_3=0}$$

avec deux constantes $\bar{\pi}_0$ et $\bar{\alpha}_1$; cette condition est une linéarisation de la relation $\Pi|_{x_3=0} = \bar{\pi}_{v,s}(T)$ avec la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{v,s}(T)$ à la température T .

Les équations que nous allons considérer sont linéaires et les méthodes de la résolution des équations de ce type sont bien établies (voir par exemple [13], [23], [2], [30]). Mais notre problème exige une élaboration non indifférente à cause du couplage particulier mentionné ci-dessus et aussi à cause de la discontinuité du coefficient pour l'équation de la chaleur. Les aspects généraux de cette dernière problématique ont été investigués par plusieurs auteurs (voir par exemple [22], [4] [5]), mais nous allons utiliser une autre méthode directement utilisable pour la résolution de notre problème.

2.2 Système d'équations à proposer

Nous précisons d'abord le domaine dans lequel nous considérons notre problème.

On pose

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -b < x_3 < a\}, \quad (2.1)$$

où a et b sont deux nombres strictement positifs. Nous définissons aussi la partie inférieure Ω^- et la partie supérieure Ω^+ de Ω ,

$$\Omega^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_3 < 0\}, \quad \Omega^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_3 > 0\}. \quad (2.2)$$

Dans le domaine Ω nous considérons l'équation

$$c_{v\rho} \partial_t T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \psi \delta(x_3), \quad (2.3)$$

tandis que dans le domaine Ω^+ on considère l'équation

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \Delta \Pi. \quad (2.4)$$

Dans les équations (2.3)–(2.4), γ_0 est une constante strictement positive, tandis que

$$c_{\nu\rho} = c_{\nu\rho}^{(1)}, \quad \kappa = \kappa^{(1)} \quad \text{dans } \Omega^-, \quad c_{\nu\rho} = c_{\nu\rho}^{(2)}, \quad \kappa = \kappa^{(2)} \quad \text{dans } \Omega^+, \quad (2.5)$$

$c_{\nu\rho}^{(1)}, \kappa^{(1)}, c_{\nu\rho}^{(2)}, \kappa^{(2)}$ étant des constantes strictement positives; le symbole $\delta(x_3)$ dans (2.3) désigne la delta de Dirac par rapport à x_3 . Pour ψ nous supposons qu'elle est une fonction définie sur \mathbb{R}^2 et doit satisfaire à l'équation

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi|_{x_3=\varepsilon_1} - \Pi|_{x_3=0}}{\varepsilon_1}, \quad (2.6)$$

où γ_1 et ε_1 sont des constantes strictement positives satisfaisant à la condition $0 < \varepsilon_1 < a$.

Pour les fonctions inconnues T et Π nous posons les conditions aux limites

$$T|_{x_3=-b} = \bar{T}_{-b}, \quad T|_{x_3=a} = \bar{T}_a, \quad (2.7)$$

$$\Pi|_{x_3=0} = \bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 T|_{x_3=0}, \quad (2.8)$$

$$\Pi|_{x_3=a} = \bar{\Pi}_a, \quad (2.9)$$

et les conditions initiales

$$T|_{t=0} = T_0(x) \quad x \in \Omega, \quad (2.10)$$

$$\Pi|_{t=0} = \Pi_0(x) \quad x \in \Omega^+. \quad (2.11)$$

Dans (2.7)–(2.9), $\bar{T}_{-b}, \bar{T}_a, \bar{\Pi}_a, \bar{\pi}_0$ et $\bar{\alpha}_1$ sont des constantes. Pour $T_0(x)$ et $\Pi_0(x)$ nous supposons les conditions de compatibilité

$$T_0(-b) = \bar{T}_{-b}, \quad T_0(a) = \bar{T}_a$$

$$\Pi_0(0) = \bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 T_0(0), \quad \Pi_0(a) = \bar{\Pi}_a,$$

2.3 Une variante de série de Fourier

Pour résoudre l'équation (2.3) nous aurons besoin d'une version particulière de la série de Fourier, que nous présentons ici dans une forme qui ne fait pas référence spécifique à l'équation (2.3).

Soient L_1 et L_2 deux nombres réels strictement positifs (dans l'application à notre problème on aura $L_1 = b$ et $L_2 = a$). On considère le domaine en une dimension

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid -L_1 < x < L_2\}.$$

On considère deux fonctions strictement positives $\nu(x)$ et $\kappa(x)$ constantes dans chacun des sous-intervalles $I_1 =]-L_1, 0[$ et $I_2 =]0, L_2[$

$$\nu(x) = \nu_1 \quad \text{si } x \in I_1, \quad \nu(x) = \nu_2 \quad \text{si } x \in I_2, \quad (2.12)$$

$$\kappa(x) = \kappa_1 \quad \text{si } x \in I_1, \quad \kappa(x) = \kappa_2 \quad \text{si } x \in I_2 \quad (2.13)$$

avec des constantes strictement positives $\nu_1, \nu_2, \kappa_1, \kappa_2$ (on ne suppose pas de condition analogue à (3.1), donc en général $\frac{\nu_1}{\kappa_1} \neq \frac{\nu_2}{\kappa_2}$). Au point $x = 0$, on peut choisir quelconques valeurs de $\nu(0)$ et $\kappa(0)$, donc on peut prendre par exemple

$$\nu(0) = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \quad \kappa(0) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2};$$

ce qui n'influence pas le résultat.

Nous allons d'abord construire une série de Fourier relative aux deux espaces de Hilbert

$$L^2_\nu(I) = \{u : I \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurables} \mid \int_I \nu(x) |u(x)|^2 dx < \infty\} \quad (2.14)$$

et

$$\tilde{H}^1_\kappa(I) = \{u \in C(\bar{I}; \mathbb{R}) \mid \int_I \kappa(x) |u'(x)|^2 dx < \infty, u(-L_1) = u(L_2) = 0\} \quad (2.15)$$

munis respectivement du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L_v^2(I)} = \int_I v(x) u(x) v(x) dx, \quad \langle u, v \rangle_{\tilde{H}_\kappa^1(I)} = \int_I \kappa(x) u'(x) v'(x) dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{L_v^2(I)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_v^2(I)}}, \quad \|u\|_{\tilde{H}_\kappa^1(I)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{\tilde{H}_\kappa^1(I)}}.$$

Définissons pour $\lambda > 0$ les fonctions $\tilde{\beta}(\lambda)$, $\tilde{\gamma}(\lambda)$, $\tilde{h}(\lambda)$ comme suit :

$$\tilde{\beta}(\lambda) = \arctg\left(\sqrt{\frac{\kappa_2 v_2}{\kappa_1 v_1}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} L_1\right)\right) \quad \text{si } 0 < \lambda < \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \frac{\pi^2}{4}, \quad (2.16)$$

$$\tilde{\beta}(\lambda) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{si } \lambda = \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\lambda) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \arctg\left(\sqrt{\frac{\kappa_2 v_2}{\kappa_1 v_1}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} L_1\right)\right) \\ &\quad \text{si } \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 < \lambda < \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\tilde{\gamma}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \kappa_2 v_2}} \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} L_1\right)}{\cos \tilde{\beta}(\lambda)} \quad \text{si } \lambda \neq \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

$$\tilde{\gamma}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \kappa_2 v_2}} \quad \text{si } \lambda = \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{h}(\lambda) = \tilde{\beta}(\lambda) + \sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}} L_2. \quad (2.18)$$

La fonction $\tilde{h}(\lambda)$ a la propriété suivante :

Lemme 2.3.1. *La fonction $\tilde{h}(\lambda)$ définie dans (2.18) est continue et strictement croissante et vérifie les relations*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \tilde{h}(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{h}(\lambda) = \infty. \quad (2.19)$$

Démonstration. Il résulte immédiatement de la définition (2.18) de $\tilde{h}(\lambda)$ et de la définition (2.16) de $\tilde{\beta}(\lambda)$. □

Le lemme (2.3.1) nous permet de définir une suite $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ par

$$\lambda_k = \tilde{h}^{-1}(k\pi), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (2.20)$$

En utilisant la suite $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, on va définir les fonctions $e_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, qui vont former une base orthonormale de l'espace de Hilbert $L_v^2(I)$ ayant des propriétés utiles pour résoudre notre problème.

Proposition 2.3.1. *On pose*

$$e_k(x) = \frac{y_k(x)}{\|y_k\|_{L_v^2(I)}}, \quad (2.21)$$

où

$$y_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \kappa_1 v_1}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k v_1}{\kappa_1}} L_1 + \sqrt{\frac{\lambda_k v_1}{\kappa_1}} x\right) & \text{si } -L_1 \leq x \leq 0, \\ \tilde{\gamma}(\lambda_k) \sin\left(\tilde{\beta}(\lambda_k) + \sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}} x\right) & \text{si } 0 \leq x \leq L_2. \end{cases} \quad (2.22)$$

Alors

- (A) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une base orthonormale de $L_v^2(I)$;
- (B) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ est un système orthogonal complet de $\tilde{H}_k^1(I)$;
- (C) on a

$$\|e_k\|_{\tilde{H}_k^1(I)}^2 = \lambda_k;$$

(D)

$$-\frac{d}{dx}(\kappa(x)\frac{d}{dx}e_k(x)) = \lambda_k v(x)e_k(x) \quad \forall x \in]-L_1, 0[\cup]0, L_2[$$

et $\kappa(x)\frac{d}{dx}e_k(x)$ est continue sur $[-L_1, L_2]$;

(E) on a

$$\sup_{-L_1 < x < L_2} |e_k(x)| \leq K_1,$$

$$K_1 = 2 \max\left(\frac{1}{\sqrt{v_1 \kappa_1}}, \frac{1}{\sqrt{v_2 \kappa_2}}\right) \max\left(\frac{\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{L_1}}, \frac{\sqrt{\kappa_2}}{\sqrt{L_2}}\right);$$

(F) on a

$$M_0(k-1)^2 \leq \lambda_k \leq M_0(k+1)^2, \quad M_0 = \left(\frac{\pi}{L_1 \sqrt{\frac{v_1}{\kappa_1}} + L_2 \sqrt{\frac{v_2}{\kappa_2}}}\right)^2.$$

2.4 Démonstration de la proposition 2.3.1

La démonstration de la proposition 2.3.1 s'articule en plusieurs étapes. Nous procédons donc en démontrant d'abord des lemmes et ensuite la proposition.

Lemme 2.4.1. *Il existe un opérateur linéaire A de $L_v^2(I)$ sur $\tilde{H}_\kappa^1(I)$ qui à chaque $u \in L_v^2(I)$ associe $Au \in \tilde{H}_\kappa^1(I)$ vérifiant la relation*

$$\langle Au, \varphi \rangle_{\tilde{H}_\kappa^1(I)} = \langle u, \varphi \rangle_{L_v^2(I)} \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_\kappa^1(I). \quad (2.23)$$

L'opérateur A , considéré comme opérateur de $L_v^2(I)$ dans lui-même, est un opérateur linéaire auto-adjoint et compact et ses vecteurs propres \tilde{e}_k correspondants aux valeurs propres μ_k ,

$$A\tilde{e}_k = \mu_k \tilde{e}_k, \quad (2.24)$$

forment une base orthonormale $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ de $L_v^2(I)$. Les valeurs propres μ_k vérifient

la relation

$$\mu_k \geq \mu_{k+1} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, \quad \mu_k \rightarrow 0 \quad \text{pour } k \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

Démonstration. Puisqu'on a

$$\|\varphi\|_{L_v^2(I)} \leq C \|\varphi\|_{\tilde{H}_k^1(I)} \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_k^1(I)$$

avec une constante C et que donc le produit scalaire $\langle u, \varphi \rangle_{L_v^2(I)}$ peut être considéré comme fonctionnelle linéaire sur $\varphi \in \tilde{H}_k^1(I)$, d'après le théorème de représentation de Riesz, pour chaque $u \in L_v^2(I)$ il existe un élément $U \in \tilde{H}_k^1(I)$ et un seul qui vérifie la relation

$$\langle U, \varphi \rangle_{\tilde{H}_k^1(I)} = \langle u, \varphi \rangle_{L_v^2(I)} \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_k^1(I). \quad (2.26)$$

En posant $Au = U$, on définit l'opérateur A de $L_v^2(I)$ dans $\tilde{H}_k^1(I)$.

Cela étant, le lemme résulte de la théorie bien connue sur l'opérateur linéaire auto-adjoint et compact et de la définition des espaces $L_v^2(I)$ et $\tilde{H}_k^1(I)$ (voir par exemple le lemme 1 du § 1 du chap. IV de [28]). \square

Lemme 2.4.2. Soit $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ la base orthonormale de $L_v^2(I)$ définie dans le lemme 2.4.1.

Alors pour tout k on a

$$\mu_k \frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{d}{dx} \tilde{e}_k \right) = -v \tilde{e}_k \quad \text{dans } L^2(I). \quad (2.27)$$

Démonstration. Comme $A\tilde{e}_k = \mu_k \tilde{e}_k$, en posant $U = A\tilde{e}_k$, d'après (2.26) on a

$$\int_I \mu_k \kappa(x) \left(\frac{d}{dx} \tilde{e}_k(x) \right) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx = \int_I v(x) \tilde{e}_k(x) \varphi(x) dx.$$

Compte tenu que $\tilde{H}_\kappa^1(I)$ est dense dans $L_v^2(I)$, cette égalité définit la dérivée généralisée $\frac{d}{dx}(\kappa(x) \frac{d}{dx} \tilde{e}_k(x))$, qui vérifie (2.27). \square

Lemme 2.4.3. Soit $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ la base orthonormale de $L_v^2(I)$ définie dans le lemme 2.4.1. Alors pour tout k la fonction $\kappa(x) \frac{d}{dx} \tilde{e}_k(x)$ est continue et la dérivée à gauche et la dérivée à droite de $\tilde{e}_k(x)$ au point $x = 0$ ont le même signe.

Démonstration. Il résulte immédiatement du lemme 2.4.2. \square

Lemme 2.4.4. Soit $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ la base orthonormale de $L_v^2(I)$ définie dans le lemme 2.4.1. Alors pour tout k , $\tilde{e}_k(x)$ a la forme

$$\tilde{e}_k(x) = \frac{y_k(x)}{\|y_k\|_{L_v^2(I)}}, \quad (2.28)$$

où $y_k(x)$ est la fonction donnée dans (2.22).

Démonstration. On considère la famille de système d'équations linéaires avec un paramètre $\lambda > 0$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} y(x) = \frac{1}{\kappa(x)} z(x) \\ \frac{d}{dx} z(x) = -\lambda v(x) y(x) \end{cases} \quad (2.29)$$

avec les conditions initiales

$$y(-L_1) = 0, \quad z(-L_1) = 1. \quad (2.30)$$

Par des calculs élémentaires (même si un peu longs) on constate que, si $\tilde{\beta}(\lambda)$ et $\tilde{\gamma}(\lambda)$ sont les fonctions définies dans (2.16) et dans (2.17), les fonctions $y(x) = y(\lambda; x)$, $z(x) = z(\lambda; x)$,

$$y(\lambda; x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda \kappa_1 v_1}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} L_1 + \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} x\right) & \text{si } -L_1 \leq x \leq 0 \\ \tilde{\gamma}(\lambda) \sin\left(\tilde{\beta}(\lambda) + \sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}} x\right) & \text{si } 0 \leq x \leq L_2 \end{cases}, \quad (2.31)$$

$$z(\lambda; x) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} L_1 + \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} x\right) & \text{si } -L_1 \leq x \leq 0 \\ \tilde{\gamma}(\lambda) \sqrt{\lambda \kappa_2 v_2} \cos\left(\tilde{\beta}(\lambda) + \sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}} x\right) & \text{si } 0 \leq x \leq L_2 \end{cases}, \quad (2.32)$$

constituent la solution unique du problème de Cauchy (2.29)–(2.30) dans la classe $C([-L_1, L_2])$. En outre, comme on le voit immédiatement, on a

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x) \frac{d}{dx} y(x)\right) = \lambda v(x) y(x) \quad (2.33)$$

presque partout dans $] -L_1, L_2[$ pour tout $\lambda > 0$.

D'après la définition (2.16) de $\tilde{\beta}(\lambda)$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}\left(]0, \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \frac{\pi^2}{4} [\right) &=]0, \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \frac{\pi^2}{4} [, \\ \tilde{\beta}\left(] \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 [\right) &= \\ &=] \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 [, \end{aligned} \quad (2.34)$$

ce qui implique que

$$\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} L_1\right)}{\cos \tilde{\beta}(\lambda)} > 0 \quad \text{si } \lambda \neq \frac{\kappa_1}{v_1 L_1^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots;$$

donc, d'après la définition (2.17) de $\tilde{\gamma}(\lambda)$, on a $\tilde{\gamma}(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda > 0$.

Or, d'après la définition des fonctions $\tilde{h}(\lambda)$ et $y(\lambda; x)$ (voir (2.18), (2.31)) on a

$$y(\lambda; L_2) = \tilde{\gamma}(\lambda) \sin(\tilde{h}(\lambda)).$$

Donc

$$y(\lambda; L_2) = 0, \quad \text{si et seulement si } \lambda = \tilde{h}^{-1}(k\pi), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (2.35)$$

c'est-à-dire, si et seulement si $\lambda = \lambda_k$ avec un des nombres λ_k définis dans (2.20).

En retournant à $\tilde{e}_k(x)$, de (2.27) on déduit que, si on pose

$$c_z(k) = \kappa_1 \frac{d}{dx} \tilde{e}_k(x) \Big|_{x=-L_1}, \quad \tilde{y}(x) = \frac{1}{c_z(k)} \tilde{e}_k(x), \quad \tilde{z}(x) = \frac{1}{c_z(k)} \kappa(x) \frac{d}{dx} \tilde{e}_k(x),$$

alors les fonctions $\tilde{y}(x)$ et $\tilde{z}(x)$ satisfont au système d'équations (2.29) et aux conditions initiales (2.30). Donc en vertu de l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.29)–(2.30), on a

$$\tilde{y}(x) = y(\lambda_k, x), \quad \tilde{z}(x) = z(\lambda_k, x),$$

d'où, en posant $y_k(x) = y(\lambda_k, x)$, on a

$$\tilde{e}_k(x) = c_z(k) y_k(x).$$

Comme $\|\tilde{e}_k\|_{L_v^2(I)} = 1$, on a

$$c_z(k) = \frac{1}{\|y_k\|_{L_v^2(I)}}.$$

Ainsi on a établi (2.28). □

Lemme 2.4.5. Soit $y(\lambda; x)$ la fonction définie dans (2.31). Soient λ_k les nombres définis dans (2.20). Alors pour tout k , la fonction $y(\lambda_k; x) = y_k(x)$ admet $k - 1$ zéros dans l'intervalle $] -L_1, L_2[$.

Démonstration. De la forme de la fonction $y(\lambda; x)$ donnée dans (2.31) et de la propriété de la fonction $\tilde{\beta}(\lambda)$ (en particulier (2.34)) on déduit que le nombre de zéros dans l'intervalle $] -L_1, L_2[$ est une fonction croissante et qu'à chaque point $\lambda = \lambda_k$ il croît d'unité. D'autre part, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} y(\lambda; x) = x + L_1 \quad \text{pour } x \in [-L_1, L_2].$$

On en déduit l'affirmation du lemme. □

Maintenant nous démontrons la proposition 2.3.1.

Démonstration. Du lemme 2.4.4 résulte

$$\tilde{e}_k = e_k$$

et de (2.33) et de (2.27) on déduit

$$\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}.$$

Cela étant du lemme 2.4.1 découlent les propriétés (A), (B), (C) et (D).

Nous rappelons que $e_k(x)$ est de la forme $e_k(x) = \frac{y_k(x)}{\|y_k\|_{L_v^2(I)}}$ avec

$$y_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k v_1 \kappa_1}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k v_1}{\kappa_1}}(L_1 + x)\right) \quad \text{pour } -L_1 \leq x \leq 0,$$

$$y_k(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_k v_2 \kappa_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}}(L_2 - x)\right) \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L_2.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} \kappa_1 \frac{d}{dx} e_x(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \kappa_2 \frac{d}{dx} e_x(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{d}{dx} e_x(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{d}{dx} e_x(x)$ ont le même signe, ce qui implique l'existence d'un $x_1 \in [-\frac{L_1}{2}, 0[$ tel que $|\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k v_1}{\kappa_1}}(L_1 + x_1)\right)| = 1$, ou d'un $x_1 \in [0, \frac{L_2}{2}[$ tel que $|\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}}(x_1 + L_2)\right)| = 1$. Dans le premier cas on a

$$\begin{aligned} \|y_k(x)\|_{L_v^2(I)}^2 &= \int_{-L_1}^{L_2} v(x) |y_k(x)|^2 dx \geq \int_{-L_1}^{x_1} v_1 |y_k(x)|^2 dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_k \kappa_1} \int_{-L_1}^{x_1} \sin^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_k v_1}{\kappa_1}}(L_1 + x)\right) dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_k \kappa_1} \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin\left(2\sqrt{\frac{\lambda_k v_1}{\kappa_1}}(L_1 + x)\right)}{2\sqrt{\frac{\lambda_k v_1}{\kappa_1}}} \right]_{-L_1}^{x_1} = \\ &= \frac{1}{\lambda_k \kappa_1} \left(\frac{x_1}{2} + \frac{L_1}{2} \right) \geq \frac{L_1}{4\lambda_k \kappa_1}. \end{aligned}$$

De manière analogue dans le deuxième cas on a

$$\|y_k(x)\|_{L_v^2(I)}^2 \geq \frac{L_2}{4\lambda_k \kappa_2}.$$

Comme

$$\sup_{-L_1 \leq x \leq L_2} |e_k(x)| = \frac{1}{\|y_k\|_{L_v^2(I)}} \max\left(\sup_{-L_1 \leq x \leq 0} |y_k(x)|, \sup_{0 \leq x \leq L_2} |y_k(x)| \right),$$

on en déduit la propriété (E).

On rappelle que, d'après le lemme 2.4.5, $e_k(x)$ admet $k - 1$ zéros dans $] -L_1, L_2[$. Désignons par q le nombre de zéros dans $] -L_1, 0]$ et par r celui dans $]0, L_2[$ (de sorte que $q + r = k - 1$). Alors on a

$$q\pi \leq \sqrt{\lambda_k \frac{v_1}{\kappa_1}} L_1 \leq (q + 1)\pi,$$

$$r\pi \leq \sqrt{\lambda_k \frac{v_2}{\kappa_2}} L_2 \leq (r + 1)\pi,$$

d'où

$$\pi(k - 1) = \pi(q + r) \leq \sqrt{\lambda_k} \left(\sqrt{\frac{v_1}{\kappa_1}} L_1 + \sqrt{\frac{v_2}{\kappa_2}} L_2 \right) \leq \pi(q + r + 2) = \pi(k + 1).$$

On a donc

$$M_0(k - 1)^2 \leq \lambda_k \leq M_0(k + 1)^2, \quad M_0 = \left(\frac{\pi}{L_1 \sqrt{\frac{v_1}{\kappa_1}} + L_2 \sqrt{\frac{v_2}{\kappa_2}}} \right)^2.$$

La propriété (F) est démontrée. □

2.5 Solution stationnaire

En revenant au système d'équations (2.3)–(2.4), nous considérons avant tout la solution stationnaire du système d'équations (2.3)–(2.4) avec les conditions aux limites (2.7)–(2.9) et avec ψ définie dans (2.6). Plus précisément, en écrivant z au lieu de x_3 ,

il s'agit de trouver les fonctions $T(z)$ et $\Pi(z)$ qui satisfont aux équations

$$-\frac{d}{dz}\left(\kappa\frac{d}{dz}T\right) = \psi\delta(z) \quad \text{pour } -b < z < a, \quad (2.36)$$

$$-\gamma_0\frac{d^2}{dz^2}\Pi = 0 \quad \text{pour } 0 < z < a \quad (2.37)$$

avec ψ définie par

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi|_{z=\varepsilon_1} - \Pi|_{z=0}}{\varepsilon_1} \quad (2.38)$$

et aux conditions aux limites

$$T|_{z=-b} = \bar{T}_{-b}, \quad T|_{z=a} = \bar{T}_a, \quad (2.39)$$

$$\Pi|_{z=0} = \bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 T|_{z=0}, \quad (2.40)$$

$$\Pi|_{z=a} = \bar{\Pi}_a. \quad (2.41)$$

Les deux équations (2.36) et (2.37) sont couplées par la définition (2.38) de ψ et la condition aux limites (2.40).

Pour déterminer la solution du problème (2.36)–(2.41), on introduit la fonction $\bar{T}_c(z)$ continue définie par

$$\bar{T}_c(z) = \begin{cases} \bar{T}_{-b} + \frac{\kappa^{(2)}(\bar{T}_a - \bar{T}_{-b})}{a\kappa^{(1)} + b\kappa^{(2)}}(z + b) & \text{pour } -b < z \leq 0 \\ \bar{T}_a - \frac{\kappa^{(1)}(\bar{T}_a - \bar{T}_{-b})}{a\kappa^{(1)} + b\kappa^{(2)}}(a - z) & \text{pour } 0 \leq z < a \end{cases}, \quad (2.42)$$

pour laquelle $\kappa\frac{d}{dz}\bar{T}_c(z)$ a la même valeur dans $] -b, 0[$ et dans $]0, a[$.

On définit en outre $\bar{\Theta}_0$ par l'égalité

$$\bar{\Theta}_0 = \frac{\gamma_1 \bar{A}_0}{a} (\bar{\Pi}_a - (\bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 (\bar{T}_c(0) + \bar{\Theta}_0))), \quad (2.43)$$

c'est-à-dire

$$\bar{\Theta}_0 = \frac{\gamma_1 \bar{A}_0}{a + \gamma_1 \bar{A}_0 \bar{\alpha}_1} (\bar{\Pi}_a - \bar{\pi}_0 - \bar{\alpha}_1 \bar{T}_c(0)),$$

où

$$\bar{A}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e_k(0))^2}{\lambda_k}.$$

On a la proposition suivante.

Proposition 2.5.1. *La solution du problème (2.36)–(2.41) est donnée par*

$$T(z) = \bar{T}_c(z) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(z), \quad c_k^{\Theta} = \gamma_1 \frac{\bar{\Pi}_a - (\bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1(\bar{T}_c(0) + \bar{\Theta}_0))}{a} \frac{e_k(0)}{\lambda_k}, \quad (2.44)$$

$$\Pi(z) = \bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1(\bar{T}_c(0) + \bar{\Theta}_0) + \frac{\bar{\Pi}_a - (\bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1(\bar{T}_c(0) + \bar{\Theta}_0))}{a} z. \quad (2.45)$$

Nous précisons que la proposition 2.5.1 ne suppose pas la condition (3.1).

Démonstration. Il est clair que la solution (formelle) du problème (2.37), (2.40), (2.41)

est

$$\Pi(z) = \bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 T(0) + \frac{\bar{\Pi}_a - (\bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 T(0))}{a} z. \quad (2.46)$$

Donc, en substituant cette relation dans (2.38), on obtient

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi|_{z=\varepsilon_1} - \Pi|_{z=0}}{\varepsilon_1} = \gamma_1 \frac{\bar{\Pi}_a - (\bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 T(0))}{a} \equiv \psi_0(T(0)). \quad (2.47)$$

On remarque que $\kappa(z) \frac{d}{dz} \bar{T}_c(z)$ a une valeur identique dans $] -b, 0[$ et dans $]0, a[$, ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{d}{dz} \left(\kappa(z) \frac{d}{dz} \bar{T}_c(z) \right) = 0 \quad \text{dans }] -b, a[. \quad (2.48)$$

Nous posons également

$$\Theta(z) = T(z) - \bar{T}_c(z). \quad (2.49)$$

Alors le problème (2.36), (2.39) se réduit à

$$-\frac{d}{dz} \left(\kappa \frac{d}{dz} \Theta(z) \right) = \psi_0(T(0)) \delta(z), \quad (2.50)$$

$$\Theta(-b) = \Theta(a) = 0. \quad (2.51)$$

En posant

$$\Theta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(z)$$

et en intégrant les deux membres de (2.50) multipliés par $e_k(z)$ sur $[-b, a]$, en vertu de (B), (C), (D) de la proposition 2.3.1, on a

$$\lambda_k c_k^{\Theta} = \int_{-b}^a e_k(z) \left(-\frac{d}{dz} \left(\kappa \frac{d}{dz} \Theta(z) \right) \right) dz = \psi_0(T(0)) e_k(0).$$

C'est-à-dire, la solution du problème (2.50)–(2.51) est donnée par

$$\Theta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(z), \quad c_k^{\Theta} = \psi_0(T(0)) \frac{e_k(0)}{\lambda_k}. \quad (2.52)$$

Donc la valeur de $\Theta(0)$ est

$$\Theta(0) = \psi_0(T(0)) \bar{A}_0, \quad \bar{A}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e_k(0))^2}{\lambda_k}. \quad (2.53)$$

De (2.47) et de (2.53) on obtient

$$\Theta(0) = \frac{\gamma_1 \bar{A}_0}{a} (\bar{\Pi}_a - (\bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 (\bar{T}_c(0) + \Theta(0))). \quad (2.54)$$

Donc, d'après la définition (2.43) de $\bar{\Theta}_0$, on a

$$\Theta(0) = \bar{\Theta}_0$$

et donc

$$T(0) = \bar{T}_c(0) + \bar{\Theta}_0.$$

En substituant cette expression dans (2.47), (2.52), (2.46), on obtient (2.44) et (2.45). \square

3

Existence et unicité de la solution du système d'équations linéaire



AVANT d'envisager le problème complet (2.3)–(2.11) dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, nous allons démontrer, dans la section 3.1, l'existence et l'unicité de la solution dans le cas où le domaine se réduit à l'intervalle $] -b, a[\subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire, dans le domaine d'une dimension spatiale. Pour le problème complet dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, nous démontrons le résultat d'existence et unicité de la solution sous l'hypothèse

$$\frac{c_{v\rho}^{(1)}}{\kappa^{(1)}} = \frac{c_{v\rho}^{(2)}}{\kappa^{(2)}}. \quad (3.1)$$

Il est clair que la condition (3.1) est assez restrictive. Mais, comme dans le cas du domaine d'une dimension spatiale le résultat s'obtient sans cette restriction, nous espérons obtenir, dans un futur prochain, un résultat analogue sans supposer la condition (3.1).

3.1 Cas du domaine d'une dimension spatiale

Considérons le problème réduit à une dimension spatiale. Il s'agit donc du système d'équations

$$c_{\nu_0} \partial_t T = \partial_z (\kappa \partial_z T) + \psi \delta(z) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times]-b, a[, \quad (3.2)$$

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \partial_z^2 \Pi \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times]0, a[, \quad (3.3)$$

avec

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi(\varepsilon_1) - \Pi(0)}{\varepsilon_1}; \quad (3.4)$$

les conditions aux limites et initiales sont (2.7)–(2.11), dans lesquelles les fonctions ne dépendent pas de (x_1, x_2) . Dans ce problème on ne suppose pas la condition (3.1).

Dans la section précédente nous avons déjà montré l'existence et l'unicité de la solution stationnaire de ce problème, que nous notons $(\bar{T}_{st}(z), \bar{\Pi}_{st}(z))$. Posons

$$\vartheta = \vartheta(t, z) = T(t, z) - \bar{T}_{st}(z), \quad (3.5)$$

$$\eta = \eta(t, z) = \Pi(t, z) - \bar{\Pi}_{st}(z) - \bar{\alpha}_1 \vartheta(t, z). \quad (3.6)$$

Comme $\partial_z^2 \bar{\Pi}_{st} = 0$ (voir (2.37)), de (3.3) découle

$$\partial_t \eta - \gamma_0 \partial_z^2 \eta = -\bar{\alpha}_1 (\partial_t \vartheta - \gamma_0 \partial_z^2 \vartheta) \quad \text{pour } 0 < z < a.$$

On remarque que, en vertu de (3.2), (2.5) et (3.5), on a

$$-\bar{\alpha}_1 (\partial_t \vartheta - \gamma_0 \partial_z^2 \vartheta) = -\bar{\alpha}_1 \left(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{\nu_0}^{(2)}} - \gamma_0 \right) \partial_z^2 \vartheta \quad \text{pour } 0 < z < a.$$

Ces relations nous permettent de réduire le système d'équations (3.2)–(3.4) à

$$c_{v\rho}\partial_t\vartheta - \partial_z(\kappa\partial_z\vartheta) = q\delta(z) \quad \text{dans }]-b, a[, \quad (3.7)$$

$$\partial_t\eta - \gamma_0\partial_z^2\eta = f \quad \text{dans }]0, a[, \quad (3.8)$$

$$q = q(t) = \gamma_1 \frac{\eta(t, \varepsilon_1)}{\varepsilon_1}, \quad (3.9)$$

$$f = -\bar{\alpha}_1 \left(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{v\rho}^{(2)}} - \gamma_0 \right) \partial_z^2 \vartheta. \quad (3.10)$$

Les conditions aux limites sont

$$\vartheta(t, -b) = \vartheta(t, a) = 0, \quad \eta(t, 0) = \eta(t, a) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (3.11)$$

tandis que les conditions initiales sont

$$\vartheta(0, z) = T_0(z) - \bar{T}_{st}(z) \equiv \vartheta_0(z) \quad \text{pour } -b < z < a, \quad (3.12)$$

$$\eta(0, z) = \Pi_0(z) - \bar{\Pi}_{st}(z) - \bar{\alpha}_1 \vartheta_0(z) \equiv \eta_0(z) \quad \text{pour } 0 < z < a. \quad (3.13)$$

Pour les fonctions u définies sur $[-b, a]$, en utilisant les fonctions e_k définies dans (2.21)–(2.22) avec $L_1 = b$, $L_2 = a$, on définit les coefficients de Fourier $\hat{u}(k)$ et la norme $\|u\|_{H^r_{(-b,a)}}$ par

$$\hat{u}(k) = \langle u, e_k \rangle_{L^2_{c_{v\rho}}(-b,a)}, \quad \|u\|_{H^r_{(-b,a)}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r |\hat{u}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.14)$$

où $L^2_{c_{v\rho}}(-b, a)$ est défini comme dans (2.14). D'autre part, pour les fonctions u définies sur $[0, a]$, en utilisant les fonctions $g_k(z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi}{a} kz)$ on définit

$$\hat{u}(k) = \langle u, g_k \rangle_{L^2(0,a)}, \quad \|u\|_{H^r_{(0,a)}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} |\hat{u}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.15)$$

Proposition 3.1.1. Soit $1 < r < \frac{3}{2}$. Supposons que $\vartheta_0 \in H_{(-b,a)}^{r-1}$ et $\eta_0 \in H_{(0,a)}^{r-1}$. Alors, quel que soit $\bar{t} > 0$, il existe une solution (ϑ, η) et une seule du problème (3.7)–(3.13) dans la classe

$$\begin{aligned} \vartheta &\in L^\infty(0, \bar{t}; H_{(-b,a)}^{r-1}) \cap L^2(0, \bar{t}; H_{(-b,a)}^r), \\ \eta &\in L^\infty(0, \bar{t}; H_{(0,a)}^{r-1}) \cap L^2(0, \bar{t}; H_{(0,a)}^r). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Démonstration. En utilisant les coefficients de Fourier définis dans (3.14)–(3.15) (même si on utilise le même symbole $\hat{u}(k)$ pour les deux sens différents, il n'est pas difficile de les distinguer du contexte), on peut transformer les équations (3.7)–(3.8) en

$$\frac{d}{dt} \hat{\vartheta}(t, k) + \lambda_k \hat{\vartheta}(t, k) = q(t) e_k(0), \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\eta}(t, k) + \gamma_0 \frac{\pi^2}{a^2} k^2 \hat{\eta}(t, k) = \hat{f}(t, k). \quad (3.18)$$

En multipliant les deux membres de (3.17) par $\lambda_k^{r-1} \hat{\vartheta}(t, k)$, on a

$$\frac{1}{2} \partial_t \lambda_k^{r-1} \hat{\vartheta}^2(t, k) + \lambda_k^r \hat{\vartheta}^2(t, k) = \lambda_k^{r-1} \hat{\vartheta}(t, k) q(t) e_k(0).$$

Comme

$$|e_k(0)| \leq K_1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

(voir (E) de la proposition 2.3.1), on a

$$\lambda_k^{r-1} \hat{\vartheta}(t, k) q(t) e_k(0) \leq \frac{1}{2} \lambda_k^r |\hat{\vartheta}(t, k)|^2 + \frac{K_1^2}{2} \lambda_k^{r-2} |q(t)|^2.$$

Or, comme $r - 2 < -\frac{1}{2}$, en vertu de (F) de la proposition 2.3.1 on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{r-2} \equiv K_\lambda < \infty.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt} \|\vartheta\|_{H_{(-b,a)}^{r-1}}^2 + \|\vartheta\|_{H_{(-b,a)}^r}^2 \leq K_1^2 K_\lambda |q(t)|^2.$$

Quant à $|q(t)|^2$, on a

$$\begin{aligned} |q(t)|^2 &= \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} |\eta(t, \varepsilon_1)|^2 = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\eta}(t, k) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} k \varepsilon_1\right) \right|^2 \leq \\ &\leq K_q \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r-1} |\hat{\eta}(t, k)|^2 = K_q \|\eta(t, \cdot)\|_{H_{(0,a)}^{r-\frac{1}{2}}}^2, \end{aligned}$$

où

$$K_q = \frac{2\gamma_1^2}{a\varepsilon_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r-1}} < \infty.$$

En adjoignant les deux inégalités, on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\vartheta\|_{H_{(-b,a)}^{r-1}}^2 + \|\vartheta\|_{H_{(-b,a)}^r}^2 \leq K_1^2 K_\lambda K_q \|\eta\|_{H_{(0,a)}^{r-\frac{1}{2}}}^2. \quad (3.19)$$

D'autre part, si on multiplie les deux membres de (3.18) par $k^{2r-2} \hat{\eta}(t, k)$ et on fait la somme par rapport à k , on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\eta\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2 + \gamma_0 \frac{\pi^2}{a^2} \|\eta\|_{H_{(0,a)}^r}^2 \leq K_2 \|f(t, \cdot)\|_{H_{(0,a)}^{r-2}}^2, \quad (3.20)$$

où

$$K_2 = \frac{1}{\gamma_0} \frac{a^2}{\pi^2}.$$

Si on définit

$$\tilde{\vartheta} = e^{-\omega t} \vartheta, \quad \tilde{\eta} = e^{-\omega t} \eta, \quad \tilde{q} = e^{-\omega t} q, \quad \tilde{f} = e^{-\omega t} f \quad (3.21)$$

avec un $\omega > 0$ (à choisir dans la suite), de (3.7)–(3.8) on obtient

$$c_{\nu\rho} \partial_t \tilde{\vartheta} - \partial_z (\kappa \partial_z \tilde{\vartheta}) + \omega c_{\nu\rho} \tilde{\vartheta} = \tilde{q} \delta(z) \quad \text{dans }]-b, a[, \quad (3.22)$$

$$\partial_t \tilde{\eta} - \gamma_0 \partial_z^2 \tilde{\eta} + \omega \tilde{\eta} = \tilde{f} \quad \text{dans }]0, a[. \quad (3.23)$$

En procédant d'une manière tout analogue à l'obtention de (3.19)–(3.20), de (3.22)–(3.23) on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\vartheta}\|_{H_{(-b,a)}^{r-1}}^2 + \|\tilde{\vartheta}\|_{H_{(-b,a)}^r}^2 + 2\omega \|\tilde{\vartheta}\|_{H_{(-b,a)}^{r-1}}^2 \leq K_1^2 K_\lambda K_q \|\tilde{\eta}\|_{H_{(0,a)}^{r-\frac{1}{2}}}^2, \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\eta}\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2 + \gamma_0 \frac{\pi^2}{a^2} \|\tilde{\eta}\|_{H_{(0,a)}^r}^2 + 2\omega \|\tilde{\eta}\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2 \leq K_2 \|\tilde{f}\|_{H_{(0,a)}^{r-2}}^2. \quad (3.25)$$

Soit $\bar{\vartheta}$ une fonction appartenant à la classe

$$Y_\vartheta = L^\infty(0, \bar{t}; H_{(-b,a)}^{r-1}) \cap L^2(0, \bar{t}; H_{(-b,a)}^r). \quad (3.26)$$

Alors, en substituant $\bar{\vartheta}$ à la place de ϑ dans la définition (3.10) de f , on définit \bar{f} , qui appartiendra à $L^2(0, \bar{t}; H_{(0,a)}^{r-2})$. En substituant \bar{f} à la place de f dans (3.8), on peut résoudre l'équation (3.8) (avec \bar{f}) et on obtient

$$\eta \in L^\infty(0, \bar{t}; H_{(0,a)}^{r-1}) \cap L^2(0, \bar{t}; H_{(0,a)}^r)$$

(voir (3.20)). Ensuite, en définissant q par (3.9), on résout l'équation (3.7) et on obtient ϑ , qui, en vertu de (3.19), appartient à la classe Y_ϑ . C'est-à-dire, on a défini un opérateur G_1 qui, à $\bar{\vartheta} \in Y_\vartheta$, associe la solution $\vartheta \in Y_\vartheta$ de l'équation (3.7).

Si on définit $\tilde{\tilde{f}} = e^{-\omega t} \bar{f}$ et si on rappelle la définition de \bar{f} , on voit aisément qu'il existe une constante K_f telle que

$$\|\tilde{\tilde{f}}\|_{H_{(0,a)}^{r-2}}^2 \leq K_f \|\tilde{\tilde{\vartheta}}\|_{H_{(-b,a)}^r}^2. \quad (3.27)$$

Considérons maintenant deux fonctions $\bar{\vartheta}_1$ et $\bar{\vartheta}_2$ appartenant à la classe Y_ϑ . En définissant $\tilde{\tilde{\vartheta}}_1, \tilde{\tilde{\vartheta}}_2, \tilde{\tilde{\eta}}_1, \tilde{\tilde{\eta}}_2$ de la manière indiquée ci-dessus, on pose

$$\tilde{\tilde{\Theta}} = \tilde{\tilde{\vartheta}}_1 - \tilde{\tilde{\vartheta}}_2, \quad \tilde{\tilde{H}} = \tilde{\tilde{\eta}}_1 - \tilde{\tilde{\eta}}_2, \quad \tilde{\tilde{\Theta}} = \tilde{\tilde{\vartheta}}_1 - \tilde{\tilde{\vartheta}}_2.$$

Comme les équations (3.22)–(3.23) sont linéaires, de la même manière que (3.24)–(3.25) et (3.27) on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^{r-1}}^2 + \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^r}^2 + 2\omega \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^{r-1}}^2 \leq K_1^2 K_\lambda K_q \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^{r-\frac{1}{2}}}^2, \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2 + \gamma_0 \frac{\pi^2}{a^2} \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^r}^2 + 2\omega \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2 \leq K_2 K_f \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,a)}^r}^2. \quad (3.29)$$

Comme $\lambda^{2r-1} \leq \delta \lambda^{2r} + \frac{1}{4\delta} \lambda^{2r-2}$ et donc $\|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^{r-\frac{1}{2}}}^2 \leq \delta \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^r}^2 + \frac{1}{4\delta} \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2$ pour tout $\delta > 0$, en multipliant les deux membres de (3.28) par une constante Λ à déterminer et en faisant la somme de ces deux inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\Lambda \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^{r-1}}^2 + \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2) + \Lambda \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^r}^2 + \\ & + \gamma_0 \frac{\pi^2}{a^2} \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^r}^2 + 2\Lambda\omega \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^{r-1}}^2 + 2\omega \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2 \leq \\ & \leq \delta \Lambda K_1^2 K_\lambda K_q \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^r}^2 + \frac{\Lambda}{4\delta} K_1^2 K_\lambda K_q \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2 + K_2 K_f \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^r}^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Si on choisit $\Lambda = 2K_2 K_f$, $\delta = \frac{\gamma_0 \pi^2}{2\Lambda a^2 K_1^2 K_\lambda K_q}$, $\omega = \frac{\Lambda}{4\delta} K_1^2 K_\lambda K_q$, l'inégalité (3.30) se réduit à

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\Lambda \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^{r-1}}^2 + \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2) + \Lambda \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^r}^2 + \gamma_0 \frac{\pi^2}{2a^2} \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^r}^2 + \\ & + 2\Lambda\omega \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^{r-1}}^2 + \omega \|\tilde{H}\|_{H_{(0,a)}^{r-1}}^2 \leq \frac{\Lambda}{2} \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(-b,a)}^r}^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

L'inégalité (3.31) implique que l'approximation successive $\tilde{\vartheta}_{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, pour le problème (3.22)–(3.23) (avec les conditions initiales (3.12)–(3.13) pour tout n avec $\vartheta_0 \in H_{(-b,a)}^{r-1}$ et $\eta_0 \in H_{(0,a)}^{r-1}$) converge dans l'espace de Banach \tilde{Y}_ϑ muni de la norme

$$\|\tilde{\vartheta}\|_{\tilde{Y}_\vartheta} = \left(\|\tilde{\vartheta}\|_{L^\infty(0,\bar{t}; H_{(-b,a)}^{r-1})}^2 + \|\tilde{\vartheta}\|_{L^2(0,\bar{t}; H_{(-b,a)}^r)}^2 + 2\omega \|\tilde{\vartheta}\|_{L^2(0,\bar{t}; H_{(-b,a)}^{r-1})}^2 \right)^{1/2}.$$

Comme les équations sont linéaires, la limite $\tilde{\vartheta}$ de l'approximation successive $\tilde{\vartheta}_{(n)}$ sera la solution du problème (3.22)–(3.23) (et, par sa construction, donnera aussi $\tilde{\eta}$).

En posant $\vartheta = e^{\omega t} \tilde{\vartheta}$, $\eta = e^{\omega t} \tilde{\eta}$, on voit aisément que (ϑ, η) sera la solution du problème (3.7)–(3.13). Leur appartenance aux classes (3.16) résulte des estimations établies ci-dessus. □

La solution (ϑ, η) du problème (3.7)–(3.13) étant trouvée, par les égalités (3.5)–(3.6) on peut construire les fonctions $T(t, z)$ et $\Pi(t, z)$ qui satisfont aux équations (3.2)–(3.4) et aux conditions (2.7)–(2.11).

3.2 Cas du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

3.2.1 Transformation des équations

Dans le cas où le domaine en considération est $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ défini dans (2.1), nous allons démontrer notre résultat sous hypothèse (3.1). Dans la démonstration, même si nous suivons l'idée générale adoptée dans le cas du domaine d'une dimension spatiale, la structure des équations aux dérivées partielles dans un domaine de dimension 3 exige une élaboration technique non indifférente.

De manière analogue à (3.5)–(3.6), nous posons

$$\vartheta = \vartheta(t, x) = T(t, x) - \overline{T}_{st}(x_3), \quad (3.32)$$

$$\eta = \eta(t, x) = \Pi(t, x) - \overline{\Pi}_{st}(x_3) - \overline{\alpha}_1 \vartheta(t, x). \quad (3.33)$$

Comme $\Delta \overline{\Pi}_{st} = 0$ (voir (2.37)), de (2.4) s'obtient

$$\partial_t \eta - \gamma_0 \Delta \eta = -\overline{\alpha}_1 (\partial_t \vartheta - \gamma_0 \Delta \vartheta) \quad \text{dans } \Omega^+.$$

Or, de (2.3), de (2.5) et de (3.32) on déduit que

$$-\overline{\alpha}_1 (\partial_t \vartheta - \gamma_0 \Delta \vartheta) = -\overline{\alpha}_1 \left(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{v\rho}^{(2)}} - \gamma_0 \right) \Delta \vartheta \quad \text{dans } \Omega^+.$$

Ainsi on peut réduire le problème (2.3)–(2.9) au système d'équations

$$c_{\nu\rho}\partial_t\vartheta - \nabla \cdot \kappa \nabla \vartheta = q\delta(x_3) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.34)$$

$$\partial_t\eta - \gamma_0\Delta\eta = f \quad \text{dans } \Omega^+, \quad (3.35)$$

avec les conditions aux limites

$$\vartheta|_{x_3=-b} = \vartheta|_{x_3=a} = 0, \quad \eta|_{x_3=0} = \eta|_{x_3=a} = 0, \quad (3.36)$$

et les conditions initiales

$$\vartheta|_{t=0} = T_0 - \bar{T}_{st} \equiv \vartheta_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \eta|_{t=0} = \Pi_0 - \bar{\Pi}_{st} - \bar{\alpha}_1\vartheta_0 \equiv \eta_0 \quad \text{dans } \Omega^+, \quad (3.37)$$

où

$$q = q(t, x_1, x_2) = \gamma_1 \frac{\eta(t, x_1, x_2, \varepsilon_1)}{\varepsilon_1}, \quad (3.38)$$

$$f = -\bar{\alpha}_1 \left(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{\nu\rho}^{(2)}} - \gamma_0 \right) \Delta\vartheta. \quad (3.39)$$

On rappelle que, comme $\eta|_{x_3=0} = 0$, on a

$$q = \gamma_1 \frac{\eta|_{x_3=\varepsilon_1}}{\varepsilon_1} = \gamma_1 \frac{\eta|_{x_3=\varepsilon_1} - \eta|_{x_3=0}}{\varepsilon_1},$$

ce qui fait correspondre (3.38) à (2.6).

Pour obtenir des estimations utiles à la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution, nous allons utiliser la transformée de Fourier en (x_1, x_2) et le développement en série de Fourier par rapport à x_3 . En rappelant (3.1), nous réécrivons l'équation (3.34) dans la forme

$$c_{\nu\rho}\partial_t\vartheta - hc_{\nu\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\vartheta - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\vartheta\right) = q\delta(x_3), \quad (3.40)$$

où

$$h = \frac{\kappa^{(1)}}{c_{\nu\rho}^{(1)}} = \frac{\kappa^{(2)}}{c_{\nu\rho}^{(2)}}.$$

Comme en vertu de la proposition 2.3.1 on a

$$-\int_{-b}^a e_k(x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\kappa \frac{\partial}{\partial x_3} \vartheta(x_3) \right) = \lambda_k \langle e_k, \vartheta \rangle_{L^2_{c_{\nu\rho}}(-b,a)},$$

en faisant le produit scalaire des deux membres de l'équation (3.40) avec $e_k(\cdot)$, de leur transformée de Fourier par rapport à $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on obtient

$$\partial_t \widehat{\vartheta}(t, \xi, k) + (h|\xi|^2 + \lambda_k) \widehat{\vartheta}(t, \xi, k) = \widehat{q}(t, \xi) e_k(0), \quad (3.41)$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ et

$$\widehat{\vartheta}(t, \xi, k) = \mathcal{F}_{(x_1, x_2)} \langle e_k, \vartheta \rangle_{L^2_{c_{\nu\rho}}(-b,a)}, \quad \widehat{q}(t, \xi) = \mathcal{F}_{(x_1, x_2)} q,$$

$\mathcal{F}_{(x_1, x_2)}(\cdot)$ étant la transformée de Fourier par rapport à (x_1, x_2) .

D'autre part, en exprimant les deux membres de l'équation (3.35) en la transformée de Fourier par rapport à (x_1, x_2) et en le développement en série de Fourier par rapport à x_3 sur la base $\{\sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi}{a} k x_3)\}_{k=1}^{\infty}$, on a

$$\partial_t \widehat{\eta}(t, \xi, k) + \gamma_0 \left(|\xi|^2 + \frac{\pi^2}{a^2} k^2 \right) \widehat{\eta}(t, \xi, k) = \widehat{f}(t, \xi, k). \quad (3.42)$$

Ici et dans la suite, pour ne pas alourdir les notations, nous désignons par le même symbole $\widehat{\cdot}$ la transformée de Fourier par rapport à x_1 et x_2 ainsi que le développement en série de Fourier par rapport à x_3 d'une fonction sur la base $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ et sur la base $\{\sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{\pi}{a} k x_3)\}_{k=1}^{\infty}$. Même si le symbole $\widehat{\cdot}$ désigne différentes transformations, il ne sera pas difficile de comprendre du contexte ce qu'il signifie.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.34)–(3.37),

nous posons

$$\tilde{\vartheta} = e^{-\omega t} \vartheta, \quad \tilde{\eta} = e^{-\omega t} \eta, \quad \tilde{q} = e^{-\omega t} q, \quad \tilde{f} = e^{-\omega t} f \quad (3.43)$$

avec une constante $\omega > 0$, que nous allons choisir dans la suite. Alors on a

$$c_{\nu\rho} \partial_t \tilde{\vartheta} - h c_{\nu\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \tilde{\vartheta} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\kappa \frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{\vartheta} \right) + \omega c_{\nu\rho} \tilde{\vartheta} = \tilde{q} \delta(x_3) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.44)$$

$$\partial_t \tilde{\eta} - \gamma_0 \Delta \tilde{\eta} + \omega \tilde{\eta} = \tilde{f} \quad \text{dans } \Omega^+. \quad (3.45)$$

En outre, de manière analogue à (3.41)–(3.42) on a

$$\partial_t \hat{\vartheta}(t, \xi, k) + (h|\xi|^2 + \lambda_k) \hat{\vartheta}(t, \xi, k) + \omega \hat{\vartheta}(t, \xi, k) = \hat{q}(t, \xi) e_k(0), \quad (3.46)$$

$$\partial_t \hat{\eta}(t, \xi, k) + \gamma_0 \left(|\xi|^2 + \frac{\pi^2}{a^2} k^2 \right) \hat{\eta}(t, \xi, k) + \omega \hat{\eta}(t, \xi, k) = \hat{f}(t, \xi, k). \quad (3.47)$$

3.2.2 Espaces fonctionnels et estimations

Nous introduisons les espaces fonctionnels que nous allons utiliser pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de notre problème.

Pour les fonctions définies sur \mathbb{R}^2 nous utilisons les espaces de Sobolev usuels $H^s(\mathbb{R}^2)$ munis de la norme

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (3.48)$$

Pour les fonctions définies sur $\Omega^+ = \mathbb{R}^2 \times]0, a[$ nous définissons les espaces $H^{s,r}(\Omega^+)$ par la norme

$$\|u\|_{H^{s,r}(\Omega^+)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-r} (1 + |\xi|^2 + k^2)^r |\hat{u}(\xi, k)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad (3.49)$$

tandis que pour les fonctions définies sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \times]-b, a[$ nous définissons les espaces

$H^{s,r}(\Omega)$ par la norme

$$\|u\|_{H^{s,r}(\Omega)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-r} (1 + |\xi|^2 + \lambda_k)^r |\widehat{u}(\xi, k)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad (3.50)$$

où λ_k sont les nombres définis dans (2.20) (avec $L_1 = b$ et $L_2 = a$).

Cela étant, nous considérons deux nombres réels r et s satisfaisant aux conditions

$$1 < r < \frac{3}{2}, \quad s \geq r. \quad (3.51)$$

On va utiliser les espaces $H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)$, $H^{s-1,r-1}(\Omega)$, etc..., qui sont définis selon (3.48)–(3.50) (avec la substitution de $s - \frac{3}{2}$ au lieu du nombre générique s , etc...). La motivation de l'introduction des espaces $H^{s,r}(\Omega^+)$ et $H^{s,r}(\Omega)$ avec $s \geq r$ est que pour l'interprétation physique il est important d'avoir la bornitude de la restriction à $\{x_3 = 0\}$ de la température T , qui sera obtenue en supposant que $\frac{5}{2} > s$.

Dans la suite nous allons établir des estimations de la solution ϑ de l'équation (3.34) (ou (3.40)) et de la solution η de l'équation (3.35), estimations en fonction de q et de f considérées à titre provisoire comme données. Puis, on établira aussi des estimations de q et de f définies par (3.38) et (3.39). Pour leur démonstration, nous allons utiliser l'idée du théorème de trace illustrée dans [26]. Toutefois, comme nous utilisons des espaces de Sobolev non usuels, nous démontrons les inégalités d'une manière directe sans recourir aux résultats connus des théorèmes de trace.

Lemme 3.2.1. *Soit ϑ une fonction satisfaisant à l'équation (3.40) et à la première condition de (3.36). Soient $\tilde{\vartheta}$ et \tilde{q} les fonctions définies dans (3.43). On suppose que $q \in L^2(0, \bar{t}; H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2))$. Alors on a*

$$\frac{d}{dt} \|\vartheta\|_{H^{s-1,r-1}(\Omega)}^2 + c_1 \|\vartheta\|_{H^{s,r}(\Omega)}^2 \leq \tilde{C}_1 \|q\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)}^2, \quad (3.52)$$

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s-1,r-1}(\Omega)}^2 + c_1 \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s,r}(\Omega)}^2 + 2\omega \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s-1,r-1}(\Omega)}^2 \leq \tilde{C}_1 \|\tilde{q}\|_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)}^2, \quad (3.53)$$

où

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}, \quad \tilde{C}_1 = \frac{K_1^2}{c_1} \left(1 + \frac{2^{2-r}}{(3-2r)\sqrt{M_0}}\right). \quad (3.54)$$

Démonstration. On multiplie les deux membres de (3.41) par $(1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + h|\xi|^2 + \lambda_k)^{r-1}\widehat{\vartheta}(t, \xi, k)$, de sorte que l'on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\partial_t((1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + h|\xi|^2 + \lambda_k)^{r-1}\widehat{\vartheta}^2(t, \xi, k)) + \\ & + (1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + h|\xi|^2 + \lambda_k)^{r-1}(h|\xi|^2 + \lambda_k)\widehat{\vartheta}^2(t, \xi, k) = \\ & = (1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + h|\xi|^2 + \lambda_k)^{r-1}\widehat{\vartheta}(t, \xi, k)\widehat{q}(t, \xi)e_k(0). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Comme $\lambda_1 > 0$ (voir (2.20)), on a

$$c_1(1 + h|\xi|^2 + \lambda_k) \leq h|\xi|^2 + \lambda_k. \quad (3.56)$$

D'autre part, d'après (E) de la proposition 2.3.1 on a

$$|e_k(0)| \leq K_1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} & (1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + h|\xi|^2 + \lambda_k)^{r-1}\widehat{\vartheta}(t, \xi, k)\widehat{q}(t, \xi)e_k(0) \leq \\ & \leq \frac{c_1}{2}(1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + h|\xi|^2 + \lambda_k)^r|\widehat{\vartheta}(t, \xi, k)|^2 + \\ & + \frac{K_1^2}{2c_1}(1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + h|\xi|^2 + \lambda_k)^{r-2}|\widehat{q}(t, \xi)|^2. \end{aligned}$$

Comme $r - 2 < 0$, on a

$$(1 + h|\xi|^2 + \lambda_k)^{r-2} \leq 2^{2-r}(\sqrt{1 + h|\xi|^2} + \sqrt{\lambda_k})^{2r-4}.$$

Donc, en vertu de (F) de la proposition 2.3.1 on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + h|\xi|^2 + \lambda_k)^{r-2} \leq (1 + h|\xi|^2 + \lambda_1)^{r-2} + \left(\frac{2}{M_0}\right)^{2-r} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{1 + h|\xi|^2}}{\sqrt{M_0}} + k\right)^{2r-4};$$

on a en outre

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{1 + h|\xi|^2}}{\sqrt{M_0}} + k\right)^{2r-4} \leq \\ & \leq \int_0^{\infty} \left(\frac{\sqrt{1 + h|\xi|^2}}{\sqrt{M_0}} + x\right)^{2r-4} dx = \frac{1}{3-2r} \left(\frac{1 + h|\xi|^2}{M_0}\right)^{r-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

et

$$(1 + h|\xi|^2 + \lambda_1)^{r-2} \leq (1 + h|\xi|^2)^{r-\frac{3}{2}}.$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + h|\xi|^2 + \lambda_k)^{r-2} \leq \left(1 + \frac{2^{2-r}}{(3-2r)\sqrt{M_0}}\right) (1 + h|\xi|^2)^{r-\frac{3}{2}}. \quad (3.57)$$

En intégrant par rapport à $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ les deux membres de (3.55) et en faisant leur somme par rapport à k (voir aussi les définitions (3.48), (3.50)), compte tenu des relations (3.56)–(3.57), on obtient (3.52).

L'inégalité (3.53) s'obtient d'une manière tout analogue (voir (3.46)). \square

Lemme 3.2.2. *Soit η une fonction satisfaisant à l'équation (3.35) et à la seconde condition de (3.36). Soient $\tilde{\eta}$ et \tilde{f} les fonctions définies dans (3.43). On suppose que $f \in L^2(0, \bar{t}; H^{s-2, r-2}(\Omega^+))$. Alors il existe une constante $\tilde{C}_3 > 0$ telle que*

$$\frac{d}{dt} \|\eta\|_{H^{s-1, r-1}(\Omega^+)}^2 + \gamma_0 c_2 \|\eta\|_{H^{s, r}(\Omega^+)}^2 \leq \tilde{C}_3 \|f\|_{H^{s-2, r-2}(\Omega^+)}^2, \quad (3.58)$$

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\eta}\|_{H^{s-1, r-1}(\Omega^+)}^2 + \gamma_0 c_2 \|\tilde{\eta}\|_{H^{s, r}(\Omega^+)}^2 + 2\omega \|\tilde{\eta}\|_{H^{s-1, r-1}(\Omega^+)}^2 \leq \tilde{C}_3 \|\tilde{f}\|_{H^{s-2, r-2}(\Omega^+)}^2 \quad (3.59)$$

(une expression explicite de \tilde{C}_3 est donnée à la fin de la démonstration).

Démonstration. On multiplie les deux membres de (3.42) par $(1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-1}\widehat{\eta}(t, \xi, k)$, de sorte que l'on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\partial_t((1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-1}\widehat{\eta}^2(t, \xi, k)) + \\ & + \gamma_0(1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-1}(|\xi|^2 + \frac{\pi^2}{a^2}k^2)\widehat{\eta}^2(t, \xi, k) = \\ & = (1 + |\xi|^2)^{s-r}(1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-1}\widehat{\eta}(t, \xi, k)\widehat{f}(t, \xi, k). \end{aligned} \quad (3.60)$$

On rappelle les inégalités

$$c_2(1 + |\xi|^2 + k^2) \leq |\xi|^2 + \frac{\pi^2}{a^2}k^2, \quad c_2 = \min\left(1, \frac{\pi^2}{2a^2}\right),$$

$$\begin{aligned} & (1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-1}\widehat{\eta}(t, \xi, k)\widehat{f}(t, \xi, k) \leq \\ & \leq \frac{c_2\gamma_0}{2}(1 + |\xi|^2 + k^2)^r|\widehat{\eta}(t, \xi, k)|^2 + \frac{1}{2c_2\gamma_0}(1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-2}|\widehat{f}(t, \xi, k)|^2. \end{aligned}$$

Si on substitue ces inégalités dans l'égalité (3.60) et en fait l'intégrale par rapport à $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et la somme par rapport à k , en raisonnant de manière analogue à la démonstration du lemme 3.2.1, on obtient (3.58) avec $\widetilde{C}_3 = \frac{1}{c_2\gamma_0}$.

L'inégalité (3.59) s'obtient d'une manière tout analogue (voir (3.47)). \square

Lemme 3.2.3. Soient q , \widetilde{q} et $\widetilde{\eta}$ les fonctions définies dans (3.38) et (3.43). Alors, quel que soit $\delta > 0$, il existe une constante C_δ telle qu'on ait

$$\|q\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \delta\|\eta\|_{H^{s,r}(\Omega^+)}^2 + C_\delta\|\eta\|_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)}^2, \quad (3.61)$$

$$\|\widetilde{q}\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \delta\|\widetilde{\eta}\|_{H^{s,r}(\Omega^+)}^2 + C_\delta\|\widetilde{\eta}\|_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)}^2. \quad (3.62)$$

Démonstration. Comme

$$\widehat{\eta}(t, \xi, \varepsilon_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\eta}(t, \xi, k) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi k}{a} \varepsilon_1\right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2),$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-1} |\widehat{\eta}(t, \xi, \varepsilon_1)|^2 d\xi \leq \frac{2}{a} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{\eta}(t, \xi, k)| \right)^2 d\xi.$$

On remarque que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{\eta}(t, \xi, k)| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-\frac{1}{2}}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-\frac{1}{2}} |\widehat{\eta}(t, \xi, k)|^2$$

et que l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-\frac{1}{2}}} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{r-\frac{1}{2}}}{(1 + |\xi|^2 + k^2)^{2r-1}} \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \frac{2^{r-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{1 + |\xi|^2} + x)^{2r-1}} dx = \frac{2^{r-\frac{1}{2}}}{(2r-2)(1 + |\xi|^2)^{r-1}}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-1} |\widehat{\eta}(t, \xi, \varepsilon_1)|^2 d\xi \leq \\ &\leq \frac{2 \cdot 2^{r-\frac{1}{2}}}{a(2r-2)} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-\frac{1}{2}} |\widehat{\eta}(t, \xi, k)|^2 d\xi \leq \\ &\leq \frac{2^{r+\frac{1}{2}}}{a(2r-2)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\xi|^2 + k^2)^r |\widehat{\eta}(t, \xi, k)|^2 d\xi \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-1} |\widehat{\eta}(t, \xi, k)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned} \|q\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)}^2 &= \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} \|\eta(t, \cdot, \cdot, \varepsilon_1)\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \\ &\leq \delta \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\xi|^2 + k^2)^r |\widehat{\eta}(t, \xi, k)|^2 d\xi + \\ &+ C_{\delta} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\xi|^2 + k^2)^{r-1} |\widehat{\eta}(t, \xi, k)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

où

$$C_{\delta} = \frac{2^{2r+1} \gamma_1^4}{4\delta a^2 (2r-2)^2 \varepsilon_1^4}.$$

On en déduit (3.61).

L'inégalité (3.62) s'obtient de la même manière. \square

L'estimation de f définie par (3.39) que nous allons utiliser résultera immédiatement de (3.39) et sera mentionnée directement dans la section suivante.

3.2.3 Existence et unicité de la solution

Comme nous avons transformé le problème (2.3)–(2.9) pour (T, Π) en le problème (3.34)–(3.37) pour (ϑ, η) , le problème se réduit à démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *Supposons que $\vartheta_0 \in H^{s-1, r-1}(\Omega)$ et $\eta_0 \in H^{s-1, r-1}(\Omega^+)$. Alors, quel que soit $\bar{t} > 0$, il existe une solution (ϑ, η) et une seule du problème (3.34)–(3.37) dans la classe*

$$\begin{aligned} \vartheta &\in L^\infty(0, \bar{t}; H^{s-1, r-1}(\Omega)) \cap L^2(0, \bar{t}; H^{s, r}(\Omega)), \\ \eta &\in L^\infty(0, \bar{t}; H^{s-1, r-1}(\Omega^+)) \cap L^2(0, \bar{t}; H^{s, r}(\Omega^+)). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Démonstration. Soit $\bar{\vartheta}$ une fonction appartenant à la classe

$$Y_{\bar{\vartheta}} = L^\infty(0, \bar{t}; H^{s-1, r-1}(\Omega)) \cap L^2(0, \bar{t}; H^{s, r}(\Omega)). \quad (3.64)$$

Alors, en définissant

$$\bar{f} = -\bar{\alpha}_1 \left(\frac{\kappa^{(2)}}{c^{(2)}} - \gamma_0 \right) \Delta \bar{\vartheta} \quad (\text{dans } \Omega^+), \quad (3.65)$$

on a

$$\bar{f} \in L^2(0, \bar{t}; H^{s-2, r-2}(\Omega^+)),$$

ce qui nous permet de trouver la solution η de l'équation (3.35) avec $f = \bar{f}$, solution qui, d'après le lemme 3.2.2, appartient à la classe

$$\eta \in L^\infty(0, \bar{t}; H^{s-1, r-1}(\Omega^+)) \cap L^2(0, \bar{t}; H^{s, r}(\Omega^+)).$$

Si on définit q par (3.38), d'après le lemme 3.2.3, on a

$$q \in L^2(0, \bar{t}; H^{s-1}(\mathbb{R}^2)) \subset L^2(0, \bar{t}; H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)),$$

ce qui nous permet de trouver la solution ϑ de l'équation (3.34), solution qui, d'après le lemme 3.2.1, appartient à la classe Y_ϑ définie dans (3.64).

Ainsi, cette chaîne de résolution d'équations définit un opérateur G qui, à $\bar{\vartheta} \in Y_\vartheta$, associe la solution $\vartheta \in Y_\vartheta$ de l'équation (3.34).

Pour trouver le point fixe de l'opérateur G , nous passons aux fonctions $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\eta}$ et \tilde{q} définies dans (3.43). Définissons aussi

$$\tilde{\bar{f}} = e^{-\omega t} \bar{f},$$

c'est-à-dire, \tilde{f} définie dans (3.43) avec $f = \bar{f}$. On remarque que de la définition (3.65) de \bar{f} et de celle de $\tilde{\bar{f}}$ il résulte immédiatement que

$$\|\tilde{\bar{f}}\|_{H^{s-2}, r-2(\Omega^+)}^2 \leq C_f \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s,r}(\Omega)}^2 \quad (3.66)$$

avec une constante C_f . D'autre part, des inégalités (3.53), (3.59), (3.62) on déduit que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\Lambda \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s-1}, r-1(\Omega)}^2 + \|\tilde{\eta}\|_{H^{s-1}, r-1(\Omega^+)}^2) + \Lambda c_1 \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s,r}(\Omega)}^2 + \\ & + c_2 \gamma_0 \|\tilde{\eta}\|_{H^{s,r}(\Omega^+)}^2 + 2\Lambda\omega \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s-1}, r-1(\Omega)}^2 + 2\omega \|\tilde{\eta}\|_{H^{s-1}, r-1(\Omega^+)}^2 \leq \\ & \leq \Lambda \tilde{C}_1 \delta \|\tilde{\eta}\|_{H^{s,r}(\Omega^+)}^2 + \Lambda \tilde{C}_1 C_\delta \|\tilde{\eta}\|_{H^{s-1}, r-1(\Omega^+)}^2 + \tilde{C}_3 \|\tilde{\bar{f}}\|_{H^{s-2}, r-2(\Omega^+)}^2, \end{aligned} \quad (3.67)$$

où Λ est une constante à déterminer (δ et ω sont aussi à choisir). Si on choisit $\Lambda = 3 \frac{\tilde{C}_3 C_f}{c_1}$, $\delta = \frac{\gamma_0 c_2}{2\Lambda \tilde{C}_1}$, $\omega = \Lambda \tilde{C}_1 C_\delta$, de (3.66) et de (3.67) on déduit

$$\frac{d}{dt} (\Lambda \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s-1}, r-1(\Omega)}^2 + \|\tilde{\eta}\|_{H^{s-1}, r-1(\Omega^+)}^2) + \Lambda c_1 \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s,r}(\Omega)}^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{c_2 \gamma_0}{2} \|\tilde{\eta}\|_{H^{s,r}(\Omega^+)}^2 + 2\Lambda\omega \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s-1,r-1}(\Omega)}^2 + \Lambda\tilde{C}_1 C_\delta \|\tilde{\eta}\|_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)}^2 \leq \\
 & \leq \frac{\Lambda c_1}{3} \|\tilde{\vartheta}\|_{H^{s,r}(\Omega)}^2.
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Si on considère deux fonctions $\bar{\vartheta}_1$ et $\bar{\vartheta}_2$ appartenant à la classe Y_ϑ , alors en définissant $\tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ de la même manière et en posant

$$\tilde{\Theta} = \tilde{\vartheta}_1 - \tilde{\vartheta}_2, \quad \tilde{H} = \tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2, \quad \tilde{\Theta} = \tilde{\vartheta}_1 - \tilde{\vartheta}_2,$$

les fonctions $\tilde{\Theta}, \tilde{H}$ et $\tilde{\Theta}$ vérifient l'inégalité analogue à (3.67), d'où on obtient

$$\Lambda \|\tilde{\Theta}\|_{L^\infty(0,\bar{t};H^{s-1,r-1}(\Omega))}^2 + \Lambda c_1 \|\tilde{\Theta}\|_{L^2(0,\bar{t};H^{s,r}(\Omega))}^2 \leq \frac{2\Lambda c_1}{3} \|\tilde{\Theta}\|_{L^2(0,\bar{t};H^{s,r}(\Omega))}^2. \tag{3.69}$$

L'inégalité (3.69) implique que l'opérateur \tilde{G} qui, à $\tilde{\vartheta}$, associe $\tilde{\vartheta}$ est une contraction dans l'espace de Banach \tilde{Y}_ϑ muni de la norme

$$\|\tilde{\vartheta}\|_{\tilde{Y}_\vartheta} = \left(\Lambda \|\tilde{\vartheta}\|_{L^\infty(0,\bar{t};H^{s-1,r-1}(\Omega))}^2 + \Lambda c_1 \|\tilde{\vartheta}\|_{L^2(0,\bar{t};H^{s,r}(\Omega))}^2 \right)^{1/2}.$$

On en déduit l'existence et l'unicité de l'élément $\tilde{\vartheta} \in \tilde{Y}_\vartheta$ tel que $\tilde{G}(\tilde{\vartheta}) = \tilde{\vartheta}$. A partir de cet élément $\tilde{\vartheta} \in \tilde{Y}_\vartheta$ on peut construire la solution (ϑ, η) du problème (3.34)–(3.37). La proposition est démontrée. \square

La proposition 3.2.1 étant démontrée, par les égalités (3.32)–(3.33) on peut définir (T, Π) , qui sera la solution unique du problème (2.3)–(2.11) sous les conditions

$$T_0 - \bar{T}_{st} \in H^{s-1,r-1}(\Omega),$$

$$\Pi_0 - \bar{\Pi}_{st} - \bar{\alpha}_1 [T_0 - \bar{T}_{st}] \Big|_{\Omega^+} \in H^{s-1,r-1}(\Omega^+).$$

Il est clair que la régularité de T et Π sera caractérisée par

$$T - \bar{T}_{st} \in L^\infty(0, t; H^{s-1,r-1}(\Omega)) \cap L^2(0, t; H^{s,r}(\Omega)),$$

$$\Pi - \bar{\Pi}_{st} - \bar{\alpha}_1 [T - \bar{T}_{st}] \Big|_{\Omega^+} \in L^\infty(0, t; H^{s-1, r-1}(\Omega^+)) \cap L^2(0, t; H^{s, r}(\Omega^+))$$

pour tout $t > 0$.

4

Équation de la chaleur avec l'effet de l'évaporation pour une gouttelette sphérique

4.1 Introduction

DANS les chapitres précédents (voir aussi [18]), nous avons considéré le système de deux équations paraboliques linéaires, modélisant le comportement essentiel de la température et de la densité de vapeur dans l'air et dans l'eau avec l'effet de l'évaporation qui se produit sur la surface de l'eau, et nous avons démontré

l'existence et l'unicité de la solution de ce système dans un domaine borné délimité par deux plan horizontaux. Pour ce faire nous avons utilisé une variante de la série de Fourier appropriée à un intervalle $] - b, a[$ avec des coefficients différents dans deux sous-intervalles.

Dans le présent chapitre, en utilisant l'idée développée dans les chapitres précédents, nous allons étudier le problème analogue dans un domaine sphérique. Rappelons que l'évaporation de la vapeur à partir d'une gouttelette (pas nécessairement de H_2O) a intéressé en particulier beaucoup d'ingénieurs dans les applications industrielles. La recherche théorique dans le cadre de la physique mathématique autour de ce phénomène a été, elle aussi, développée par plusieurs chercheurs (voir [7], [34], [32], [9], [36], ...). Dans ces travaux, généralement, ils considèrent la gouttelette comme une sphère.

Suggérés par ces investigation, nous allons considérer une sphère occupée par l'eau et une région autour de cette sphère jusqu'à certaine distance occupée par l'air. Dans ce domaine, sous l'hypothèse de la symétrie sphérique, nous allons étudier le système d'équations paraboliques linéaires représentant le comportement de la température et de la densité de vapeur avec l'effet de l'évaporation, en utilisant une variante de la série de Fourier relative au domaine sphérique, construite suivant une idée analogue à celle de la série de Fourier introduite dans les chapitres précédents.

Plus précisément, on considère une gouttelette sphérique occupant la région

$$B_{0,a} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < a\}$$

et sa région environnante

$$B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a < r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < b\},$$

où a et b sont deux constantes telles que $0 < a < b < \infty$. On pose aussi

$$B_{0,b} = \overline{B_a} \cup B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < b\}.$$

Dans la région $B_{0,b}$ occupée par l'air et l'eau, nous allons considérer l'équation parabolique linéaire (4.1) pour la température T , tandis que dans la région $B_{a,b}$ occupé par l'air, nous allons considérés l'équation parabolique linéaire (4.2) pour la densité de vapeur Π . Pour les conditions de couplage nous allons supposer des conditions (4.3) et (4.7) analogues aux conditions de couplage représenter dans le chapitre 2. Nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système (4.1)–(4.2) avec la condition du couplage et d'autres conditions aux limites, que nous allons préciser dans la suite.

4.2 Formulation du problème à symétrie sphérique

Dans les domaines

$$\Omega_{0,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < b\}$$

$$\Omega_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a < r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < b\},$$

on considère les fonctions T et Π , qui représenteraient la température et la densité de la vapeur et qui doivent vérifier le système d'équations

$$c_{v\rho} \partial_t T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \psi \delta(r - a) \quad \text{dans } \Omega_{0,b}, \quad (4.1)$$

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \Delta \Pi \quad \text{dans } \Omega_{a,b}, \quad (4.2)$$

avec

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi|_{r=a+\varepsilon_1} - \Pi|_{r=a}}{\varepsilon_1}, \quad (4.3)$$

où γ_0, γ_1 et ε_1 sont des constantes strictement positives satisfaisant à la condition $0 < \varepsilon_1 < b - a$ et $\delta(r')$ désigne la delta de Dirac par rapport à r' (nous y prenons $r' = r - a$).

On suppose que

$$c_{v\rho} = c_{v\rho}^{(1)} \quad \text{pour } 0 < r < a, \quad c_{v\rho} = c_{v\rho}^{(2)} \quad \text{pour } a < r < b, \quad (4.4)$$

$$\kappa = \kappa^{(1)} \quad \text{pour } 0 < r < a, \quad \kappa = \kappa^{(2)} \quad \text{pour } a < r < b, \quad (4.5)$$

$c_{v\rho}^{(1)}, \kappa^{(1)}, c_{v\rho}^{(2)}, \kappa^{(2)}$ étant des constantes strictement positives. Pour les fonctions inconnues T et Π nous posons les conditions aux limites

$$T|_{r=b} = \bar{T}_b, \quad (4.6)$$

$$\Pi|_{r=a} = \bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 T|_{r=a}, \quad (4.7)$$

$$\Pi|_{r=b} = \bar{\Pi}_b. \quad (4.8)$$

Rappelons l'expression du laplacien appliqué aux fonctions à symétrie sphérique (dans \mathbb{R}^3).

Lemme 4.2.1. Si $u \in C^2(\Omega_{0,a})$ ou $u \in C^2(\Omega_{a,b})$ et u ne dépend que de $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, on a

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} u(r) \right). \quad (4.9)$$

Démonstration. Comme il est bien connu, il résulte immédiatement des calculs explicites. □

Donc, sous hypothèse que $T(t, \cdot)$ et $\Pi(t, \cdot)$ sont à symétrie sphérique, les équations (4.1)–(4.2) se réduisent à

$$c_{v\rho} \partial_t T = \partial_r (r^2 \kappa(r) \partial_r T) + \psi \delta(r - a) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times]0, b[, \quad (4.10)$$

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \partial_r (r^2 \partial_r \Pi) \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times]a, b[. \quad (4.11)$$

La définition (4.3) de ψ et les conditions aux limites (4.6)–(4.8), ayant l'expression relative seulement à r , restent invariantes.

Cela étant, dans le présent travail nous considérons le système d'équations (4.10)–(4.11), (4.3) avec les conditions aux limites (4.6)–(4.8) et les conditions initiales

$$T|_{t=0} = T_0(r) \quad \text{pour } 0 < r < b, \quad (4.12)$$

$$\Pi|_{t=0} = \Pi_0(r) \quad \text{pour } a < r < b. \quad (4.13)$$

On suppose les conditions de compatibilité

$$T_0(b) = \bar{T}_b, \quad \Pi_0(a) = \bar{\pi}_0 + \bar{\alpha}_1 T_0(a), \quad \Pi_0(b) = \bar{\Pi}_b. \quad (4.14)$$

4.3 Espaces L^2 et H^1 avec des poids

Pour étudier le problème (4.10)–(4.11), (4.3), (4.6)–(4.8), (4.12)–(4.13), nous allons utiliser les espaces de Hilbert

$$\tilde{L}_v^2(0, b) = \{\varphi : (0, b) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurables} \mid \int_0^b v(r) r^2 |\varphi(r)|^2 dr < \infty\}, \quad (4.15)$$

$$\tilde{H}_\kappa^1(0, b) = \{\varphi \in \tilde{L}_v^2(0, b) \mid \int_0^b \kappa(r) r^2 \left| \frac{d}{dr} \varphi(r) \right|^2 dr < \infty, \varphi(b) = 0\}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{L}^2(a, b) = \{\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurables} \mid \int_a^b r^2 |\varphi(r)|^2 dr < \infty\}, \quad (4.17)$$

$$\tilde{H}^1(a, b) = \{\varphi \in \tilde{L}^2(a, b) \mid \int_a^b r^2 \left| \frac{d}{dr} \varphi(r) \right|^2 dr < \infty, \varphi(a) = \varphi(b) = 0\} \quad (4.18)$$

munis respectivement du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{L}_v^2(0, b)} = \int_0^b v(r) r^2 u(r) v(r) dr, \quad \langle u, v \rangle_{\tilde{H}_\kappa^1(0, b)} = \int_0^b \kappa(r) r^2 u'(r) v'(r) dr, \quad (4.19)$$

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{L}^2(a,b)} = \int_a^b r^2 u(r) v(r) dr, \quad \langle u, v \rangle_{\tilde{H}^1(a,b)} = \int_a^b r^2 u'(r) v'(r) dr \quad (4.20)$$

et munis de la norme correspondante à ces produits scalaires.

Rappelons d'abord les propriétés élémentaires de ces espaces de Hilbert.

Lemme 4.3.1. *L'injection de $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ dans $\tilde{L}_\nu^2(0, b)$ est compacte.*

Démonstration. Si on définit l'application J

$$J(\varphi)(x) = \varphi(|x|), \quad x \in \Omega_{0,b} \text{ (ou } \in \Omega_{a,b}), \quad (4.21)$$

alors comme on constate par des calculs, quelle que soit la fonction mesurable φ définie sur $]0, b[$, on a

$$\int_{\Omega_{0,b}} J(\nu)(x) |J(\varphi)(x)|^2 dx = 4\pi \int_0^b \nu(r) r^2 |\varphi(r)|^2 dr, \quad (4.22)$$

$$\int_{\Omega_{0,b}} J(\kappa)(x) |\nabla J(\varphi)(x)|^2 dx = 4\pi \int_0^b \kappa(r) r^2 \left| \frac{d}{dr} \varphi(r) \right|^2 dr. \quad (4.23)$$

Soit M un ensemble borné de $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$. De (4.23), joint à l'inégalité $0 < \kappa_1 \leq J(\kappa)(x) \leq \kappa_2 < \infty$, il résulte que l'ensemble

$$J(M) = \{v = J(u) | u \in M\}$$

est borné dans $H_0^1(\Omega_{0,b})$. D'après la compacité de l'injection de $H_0^1(\Omega_{0,b})$ dans $L^2(\Omega_{0,b})$, il existe une sous-suite $\{J(u_k)\}_{k=1}^\infty$ convergente dans $L^2(\Omega_{0,b})$. De (4.22), joint à l'inégalité $0 < \nu_1 \leq J(\nu)(x) \leq \nu_2 < \infty$, la suite $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ est convergente dans $\tilde{L}_\nu^2(0, b)$, ce qui démontre que l'injection de $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ dans $\tilde{L}_\nu^2(0, b)$ est compacte.

□

Rappelons aussi que, de la théorie classique bien connue et du calcul explicite résulte immédiatement que les relations correspondantes à (4.22)–(4.23) et à l'affirma-

tion du lemme 4.3.1 pour les espaces $\tilde{L}^2(a, b)$ et $\tilde{H}^1(a, b)$. Plus précisément, on a

$$\int_{B_{a,b}} J|J(\varphi)(x)|^2 dx = 4\pi \int_a^b r^2 |\varphi(r)|^2 dr, \quad (4.24)$$

$$\int_{B_{a,b}} J|\nabla J(\varphi)(x)|^2 dx = 4\pi \int_a^b r^2 \left| \frac{d}{dr} \varphi(r) \right|^2 dr, \quad (4.25)$$

et l'injection de $\tilde{H}^1(a, b)$ dans $\tilde{L}^2(a, b)$ est compacte.

Comme l'injection de $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ dans $\tilde{L}_\nu^2(0, b)$ est compacte, il existe une base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ de $\tilde{L}_\nu^2(0, b)$ qui est un système orthogonal dans $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$. Analoguement il existe une base orthonormale $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ de $\tilde{L}^2(a, b)$ qui est un système orthogonal dans $\tilde{H}^1(a, b)$. Les propriétés de ces bases orthonormales jouent le rôle crucial. Or, pour démontrer les propriétés de la base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ de $\tilde{L}_\nu^2(0, b)$ que nous allons utiliser, nous avons besoin d'une élaboration non indifférente. Donc, en renvoyant à l'étude de $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ à la section suivante, nous allons ici spécifier la base orthonormale $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ de $\tilde{L}^2(a, b)$ qui est un système orthogonal dans $\tilde{H}^1(a, b)$.

Lemme 4.3.2. *On pose*

$$d_k(r) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)}{r} \quad \text{pour } a \leq r \leq b. \quad (4.26)$$

(A) *la famille $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ est une base orthonormale de $\tilde{L}^2(a, b)$ et un système orthogonal de $\tilde{H}^1(a, b)$;*

(B) *on a*

$$\|d_k\|_{\tilde{H}^1(a,b)}^2 = \frac{k^2 \pi^2}{(b-a)^2};$$

Démonstration. Comme l'injection de $\tilde{H}^1(a, b)$ dans $\tilde{L}^2(a, b)$ est compacte, il existe une base orthonormale $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ de $\tilde{L}^2(a, b)$ (qui est un système orthogonal complet de $\tilde{H}^1(a, b)$) et une suite de nombres strictement positifs $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$ telles que

$$\langle d_k, \varphi \rangle_{\tilde{H}^1(a,b)} = \Lambda_k \langle d_k, \varphi \rangle_{\tilde{L}^2(a,b)} \quad \forall \varphi \in \tilde{H}^1(a, b),$$

ce qui, en vertu de (4.18), (4.20), implique que

$$-\int_a^b \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} d_k(r) \right) \right) \varphi(r) dr = \Lambda_k \int_a^b r^2 d_k(r) \varphi(r) dr \quad \forall \varphi \in \tilde{H}^1(a, b),$$

où

$$-\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} d_k(r) \right) = \Lambda_k r^2 d_k(r).$$

Comme on le constate sans difficulté, cette équation, jointe aux conditions $d_k(a) = d_k(b) = 0$ et $\|d_k\|_{\tilde{L}^2(a,b)} = 1$, n'admet que les solutions $d_k(r) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)}{r}$ avec $\Lambda_k = k^2, k = 1, 2, \dots$.

D'après la définition (4.26) de $d_k(r)$ et la définition (4.20) du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{L}^2(a,b)}$ on a

$$\langle d_k, d_m \rangle_{\tilde{L}^2(a,b)} = \frac{2}{b-a} \int_a^b \sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(r-a)\right) dr = \delta_{km},$$

ce qui signifie que $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ est un système orthonormal de $\tilde{L}^2(a, b)$.

D'autre part, comme $d_k(a) = d_k(b) = 0$ et

$$-\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)}{r} \right] = \left(\frac{k\pi r}{b-a} \right)^2 \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)}{r},$$

on a

$$\begin{aligned} \langle d_k, d_m \rangle_{\tilde{H}^1(a,b)} &= \frac{2}{b-a} \int_a^b r^2 \left(\frac{d}{dr} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(r-a)\right)}{r} \right) dr = \\ &= -\frac{2}{b-a} \int_a^b \left(\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{b-a}(r-a)\right)}{r} \right] \right) \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(r-a)\right)}{r} dr = \\ &= \left(\frac{k\pi}{b-a} \right)^2 \delta_{km}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ est un système orthogonal dans $\tilde{H}^1(a, b)$ et

$$\|d_k\|_{\tilde{H}^1(a,b)}^2 = \frac{k^2 \pi^2}{(b-a)^2}.$$

□

On remarque aussi

(C) on a

$$|d_k(r)| \leq \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{b-a}} \quad \forall r \in [a, b], \forall k \in \mathbb{N},$$

ce qui découle immédiatement de la définition (4.26).

4.4 Une variante de série de Fourier sur le segment radial

Pour construire la base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\tilde{L}_v^2(0, b)$ qui est un système orthogonal dans $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$, nous allons construire d'abord, pour chaque $\lambda > 0$, les fonctions $y(\lambda; r)$ qui satisfont à l'équation

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \kappa(r) \frac{d}{dr} y(r) \right) = -\lambda v(r) r^2 y(r) \quad (4.27)$$

et la condition

$$y(b) = 0, \quad y'(b) \neq 0. \quad (4.28)$$

Par la commodité du calcul, nous posons

$$s = b - r, \quad \tilde{v}(s) = v(b - s), \quad \tilde{\kappa}(s) = \kappa(b - s),$$

et considérons l'équation

$$\frac{d}{ds} \left((b - s)^2 \tilde{\kappa}(s) \frac{d}{ds} z(\lambda; s) \right) = -\lambda \tilde{v}(s) (b - s)^2 z(\lambda; s) \quad (4.29)$$

et les conditions initiales

$$z(\lambda; 0) = 0, \quad \frac{d}{ds} z(\lambda; s) \Big|_{s=0} = 1. \quad (4.30)$$

Lemme 4.4.1. *Le problème (4.29)–(4.30) admet une solution $z(\lambda; s)$ et une seule sur l'intervalle $[0, b[$ et elle a la forme*

$$z(\lambda; s) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda v_2}} b \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}} s\right)}{b-s} & \text{pour } 0 \leq s \leq b-a, \\ \gamma(\lambda) \frac{\sin\left(\beta(\lambda) + \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}}(s-b+a)\right)}{b-s} & \text{pour } b-a \leq s < b, \end{cases} \quad (4.31)$$

où $\beta(\lambda)$ et $\gamma(\lambda)$ sont définis selon les cas comme suit :

i) si $2m < \frac{b-a}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}} < 2m+1$ avec un $m \in \mathbb{N}$,

$$\beta(\lambda) = \operatorname{arccot}\left(\sqrt{\frac{v_2 \kappa_2}{v_1 \kappa_1}} \cot\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b-a)\right) + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{a\sqrt{\lambda \kappa_1 v_1}}\right), \quad (4.32)$$

$$\gamma(\lambda) = \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda v_2}} b \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b-a)\right)}{\sin(\beta(\lambda))}, \quad (4.33)$$

ii) si $2m+1 < \frac{b-a}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}} < 2(m+1)$ avec un $m \in \mathbb{N}$,

$\beta(\lambda)$ comme dans le cas i),

$$\gamma(\lambda) = -\sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda v_2}} b \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b-a)\right)}{\sin(\beta(\lambda))},$$

iii) si $\frac{b-a}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}} = 2m$ avec un $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\beta(\lambda) = 0, \quad \gamma(\lambda) = \frac{\kappa_2 b}{\sqrt{\lambda v_1 \kappa_1}}, \quad (4.34)$$

iv) si $\frac{b-a}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}} = 2m+1$ avec un $m \in \mathbb{N}$,

$$\beta(\lambda) = 0, \quad \gamma(\lambda) = -\frac{\kappa_2 b}{\sqrt{\lambda v_1 \kappa_1}}.$$

Démonstration. Par des calculs directs, on constate que la fonction $z(\lambda; s)$ définie sur

$]0, b-a[$ satisfait aux conditions (4.30) et vérifie l'équation (4.29) dans l'intervalle $]0, b-a[$.

On rappelle que, quel que soit $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$, la fonction

$$z(s) = \gamma \frac{\sin\left(\beta + \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}}(s - b + a)\right)}{b - s}$$

satisfait à l'équation (4.29) sur l'intervalle $]b-a, b[$. Or, la continuité de $z(\lambda; s)$ et celle de $\tilde{\kappa}(s) \frac{d}{ds} z(\lambda; s)$ au point $s = b - a$ impliquent que β et γ doivent satisfaire aux conditions

$$\gamma \frac{\sin \beta}{a} = \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda v_2}} b \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right)}{a}, \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & \kappa_1 \gamma \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} \frac{\cos \beta}{a} + \kappa_1 \gamma \frac{\sin \beta}{a^2} = \\ & = \kappa_2 b \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right)}{a} + \kappa_2 \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda v_2}} b \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right)}{a^2}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pour déterminer $\beta = \beta(\lambda)$, $\gamma = \gamma(\lambda)$ pour chaque $\lambda > 0$, il faut distinguer les quatre cas : *i*) $\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right) > 0$, *ii*) $\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right) < 0$, *iii*) $\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right) = 0$ et $\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right) = 1$, *iv*) $\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right) = 0$ et $\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right) = -1$. Ces quatre cas, comme on le voit facilement, ne sont que les quatre cas cités dans l'énoncé du lemme. Dans les cas *i*) et *ii*), en divisant les deux membres de (4.36) par

$$\kappa_1 \gamma \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} \frac{\sin \beta}{a} = b \frac{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2 v_1}}{\sqrt{v_2}} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right)}{a},$$

on obtient

$$\cot(\beta(\lambda)) = \sqrt{\frac{v_2 \kappa_2}{v_1 \kappa_1}} \cot\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right) + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{a \sqrt{\lambda \kappa_1 v_1}}, \quad (4.37)$$

d'où l'expression (4.32)–(4.33) et celle du cas *ii*). Dans les cas *iii*) et *iv*), en substituant les valeurs de $\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right)$ et de $\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}}(b - a)\right)$ dans (4.35)–(4.36), on obtient les expressions indiquées dans l'énoncé du lemme. On constate sans difficulté que dans tous les cas *i*), *ii*), *iii*), *iv*), la fonction $z(\lambda; s)$ avec $\beta = \beta(\lambda)$, $\gamma = \gamma(\lambda)$ ainsi déterminés

vérifie l'équation (4.29) et les conditions (4.30).

L'unicité de la solution $z(\lambda; s)$ résulte de la théorie classique des équations différentielles ordinaires. \square

Pour construire la base orthonormale $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\tilde{L}_v^2(0, b)$ qui est un système orthogonal dans $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$, certes, nous utilisons les fonctions $z(\lambda; s)$ construites dans le lemme 4.4.1, mais il nous faut en sélectionner celles qui peuvent être un des éléments de cette base orthonormale. Pour cela, nous rappelons d'abord des propriétés de $z(\lambda; s)$.

Lemme 4.4.2. *La fonction $z(\lambda; s)$ donnée dans le lemme 4.4.1 appartient à $\tilde{L}_v^2(0, b) \cap \tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ si et seulement si*

$$\beta(\lambda) + \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} a = m\pi \quad \text{avec un } m \in \mathbb{N}. \quad (4.38)$$

En outre, on a

$$\lim_{s \rightarrow b^-} |z(\lambda; s)| < \infty, \quad (4.39)$$

$$\frac{d}{ds} z(\lambda; s)|_{s=b} = 0, \quad (4.40)$$

si et seulement si (4.38) est vérifiée.

Démonstration. Si (4.38) est vérifiée, alors, comme $\sin(m\pi - r') = \pm \sin(r')$ (le signe étant + ou – selon la parité de m), en posant

$$r = b - s,$$

on a

$$z(\lambda; s) = \pm \gamma(\lambda) \frac{\sin(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} r)}{r} \quad \text{pour } 0 < r \leq a. \quad (4.41)$$

On a donc

$$\lim_{s \rightarrow b^-} |z(\lambda; s)| = \lim_{r \rightarrow 0^+} |\gamma(\lambda)| \frac{|\sin(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} r)|}{r} = |\gamma(\lambda)| \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} < \infty.$$

En outre, on a

$$\frac{d}{ds} z(\lambda; s)|_{s=b} = \pm \gamma(\lambda) \frac{d}{dr} \frac{\sin(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} r)}{r} \Big|_{r=0} = 0.$$

Cette dernière relation implique que $\tilde{\kappa}(s) \frac{d}{ds} z(\lambda; s)$ est bornée, ce qui implique que $z(\lambda; \cdot) \in \tilde{H}_\kappa^1(0, b)$.

D'autre part, si $\frac{1}{\pi}(\beta(\lambda) + \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} a) \notin \mathbb{N}$, alors il existe un $\varepsilon \in]0, \pi[$ tel que

$$z(\lambda; s) = \pm \gamma(\lambda) \frac{\sin(\varepsilon + \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} r)}{r} \quad \text{pour } 0 < r \leq a \quad (b - a \leq s < b).$$

Dans ce cas on a

$$\frac{d}{ds} z(\lambda; s) = \pm \gamma(\lambda) \left[\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} \frac{\cos(\varepsilon + \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} r)}{r} - \frac{\sin(\varepsilon + \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} r)}{r^2} \right]$$

et donc il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{d}{dr} z(\lambda; b - r) \right| \geq \frac{1}{2} |\gamma(\lambda)| \frac{\sin \varepsilon}{r^2} \quad \text{pour tout } r \in]0, \delta[.$$

On a donc

$$\|z(\lambda; \cdot)\|_{\tilde{H}_\kappa^1(0, b)}^2 = \int_0^b \kappa(r) r^2 \left| \frac{d}{dr} z(\lambda; b - r) \right|^2 dr = +\infty.$$

□

Maintenant nous allons chercher à caractériser les valeurs de λ pour lesquelles $z(\lambda; \cdot)$ appartient à $\tilde{L}_v^2(0, b) \cap \tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ et à montrer les propriétés utiles des fonctions $y(\lambda; r) = z(\lambda; b - r)$. Pour cela, rappelons que pour $0 < r < a$ la fonction $y(\lambda; r) = z(\lambda; b - r)$ a l'expression (4.41)

$$y(\lambda; r) = z(\lambda; b - r) = \pm \gamma(\lambda) \frac{\sin(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} r)}{r}.$$

Nous commençons par le lemme suivant, qui s'écoule immédiatement d'un calcul élémentaire.

Lemme 4.4.3. Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$\varphi_0(x) = \cot x - \frac{1-\varepsilon}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_+ \setminus (\pi\mathbb{N}), \quad (4.42)$$

($\pi\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{N}\}$). Alors $\varphi_0(x)$ est strictement décroissante dans chaque intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{N}$, et on a

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} \varphi_0(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow ((k+1)\pi)^-} \varphi_0(x) = -\infty \quad \text{pout tout } k \in \mathbb{N}. \quad (4.43)$$

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dx} \varphi_0(x) = -1 - \cot^2 x + \frac{1-\varepsilon}{x^2} = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1-\varepsilon}{x^2}.$$

Or, comme

$$\sin x < x \quad \forall x > 0,$$

on a

$$\frac{d}{dx} \varphi_0(x) \leq -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus (\pi\mathbb{N}).$$

Donc $\varphi_0(x)$ est strictement décroissante dans chaque intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{N}$.

Les relations (4.43) résultent immédiatement du calcul direct. \square

Considérons maintenant les deux suites $\{p_{k'}^*\}_{k'=1}^\infty$ et $\{p_{k''}^{**}\}_{k''=1}^\infty$ définies par

$$p_{k'}^* = k' \pi \frac{\sqrt{k_1}}{a\sqrt{v_1}}, \quad p_{k''}^{**} = k'' \pi \frac{\sqrt{k_2}}{(b-a)\sqrt{v_2}}. \quad (4.44)$$

Posons

$$E^* = \{p_{k'}^*\}_{k'=1}^\infty, \quad E^{**} = \{p_{k''}^{**}\}_{k''=1}^\infty \quad (4.45)$$

en tant qu'ensembles. En ordonnant tous les nombres de $E^* \cup E^{**}$ selon la grandeur naturelle, en comptant deux fois dans le cas où $p_{k'}^* = p_{k''}^{**}$ et en ajoutant $p_0 = 0$, on

définit la suite $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$. On aura

$$\{p_k\}_{k=0}^{\infty} = \{0\} \cup E^* \cup E^{**}, \quad (4.46)$$

$$p_{k-1} < p_k < p_{k+1} \quad \text{si } p_k = p_{k'}^* \in E^* \setminus E^{**},$$

$$p_{k-1} < p_k < p_{k+1} \quad \text{si } p_k = p_{k''}^{**} \in E^{**} \setminus E^*,$$

$$p_{k-1} < p_k = p_{k+1} < p_{k+2} \quad \text{si } p_k = p_{k+1} = p_{k'}^* = p_{k''}^{**} \in E^* \cap E^{**}.$$

On définit la fonction $\Phi(q)$ par

$$\Phi(q) = \cot\left(a\sqrt{\frac{\nu_1}{\kappa_1}}q\right) + \sqrt{\frac{\kappa_2\nu_2}{\kappa_1\nu_1}} \cot\left((b-a)\sqrt{\frac{\nu_2}{\kappa_2}}q\right) + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{a\sqrt{\kappa_1\nu_1}q} \quad (4.47)$$

pour

$$p_{k-1} < q < p_k \quad (\text{avec } p_{k-1} < p_k).$$

Lemme 4.4.4. *Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $p_{k-1} < p_k$, il existe une valeur $q = q_k$ et une seule appartenant à l'intervalle $]p_{k-1}, p_k[$ et vérifiant l'équation*

$$\Phi(q) = 0.$$

Démonstration. En posant $x = a\sqrt{\frac{\nu_1}{\kappa_1}}q$, on réécrit la fonction $\Phi(q)$ comme

$$\Phi(q) = \varphi_0(x) + \cot(Ax),$$

où $\varphi_0(x)$ est la fonction définie dans (4.42) avec $\varepsilon = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ et

$$A = \frac{(b-a)\sqrt{\nu_2\kappa_1}}{a\sqrt{\nu_1\kappa_2}}.$$

Posons

$$\bar{x}_{k'}^* = k' \pi, \quad \bar{x}_{k''}^{**} = k'' \frac{\pi}{A}$$

On rappelle que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot(Ax) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\bar{x}_{k''}^{**})^+} \cot(Ax) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\bar{x}_{k''}^{**})^-} \cot(Ax) = -\infty, \quad \text{pour } k'' = 1, 2, 3 \dots$$

et que $\cot(Ax)$ est continue et strictement décroissante dans chaque intervalle $]\bar{x}_{k''}^{**}, \bar{x}_{k''+1}^{**}[$ pour tout $k'' \in \mathbb{N}$. Ceci, joint à l'affirmation du lemme 4.4.3, implique que $Q(q)$ est continue et strictement décroissante dans chaque intervalle $]p_{k-1}, p_k[$ et que $Q(q)$ vérifie les relations

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} Q(q) = +\infty, \quad \lim_{q \rightarrow p_k^+} Q(q) = +\infty, \quad \lim_{q \rightarrow p_k} Q(q) = -\infty.$$

On en déduit l'affirmation du lemme. □

Le lemme 4.4.4 étant démontré, définissons la suite $\{\bar{q}_k\}_{k=1}^{\infty}$ par les relations :

$$\text{si } p_{k-1} < p_k, \quad \text{alors } p_{k-1} < \bar{q}_k < p_k, \quad Q(\bar{q}_k) = 0, \quad (4.48)$$

$$\text{si } p_{k-1} = p_k, \quad \text{alors } p_{k-1} = \bar{q}_k = p_k. \quad (4.49)$$

On remarque que d'après la définition de p_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ (voir (4.44), (4.45), (4.46)) on

a

$$0 < \bar{q}_1 < \dots < \bar{q}_k < \bar{q}_{k+1} < \dots, \quad \bar{q}_k \rightarrow \infty \quad \text{pour } k \rightarrow \infty. \quad (4.50)$$

On pose

$$\lambda_k = \bar{q}_k^2. \quad (4.51)$$

Lemme 4.4.5. Pour les fonctions $z(\lambda; s)$ définies dans (4.31) on a

$$\lim_{s \rightarrow b^-} |z(\lambda; s)| < \infty,$$

si et seulement si $\lambda = \lambda_k$ pour un $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, où λ_k , $k = 1, 2, \dots$, sont les nombres définis dans (4.51). La fonction $z(\lambda_k; s)$ possède $k - 1$ zéros dans l'intervalle $]0, b[$.

Démonstration. D'après le lemme 4.4.2, si $\lim_{s \rightarrow b^-} |z(\lambda; s)| < \infty$, alors $z(\lambda; s) = z(\lambda; b - r)$ a l'expression

$$z(\lambda; b - r) = \pm \gamma \frac{\sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_1}{\kappa_1}} r)}{r} \quad \text{pour } 0 < r \leq a.$$

Or, comme $z(\lambda; s)$ ainsi que $\tilde{\kappa} \frac{d}{ds} z(\lambda; s)$ doivent être continues, on a

$$\lim_{s \rightarrow b^-} |z(\lambda; s)| < \infty$$

si et seulement s'il existe un $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\gamma \frac{\sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_1}{\kappa_1}} a)}{a} = \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda \nu_2}} b \frac{\sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_2}{\kappa_2}} (b - a))}{a}, \quad (4.52)$$

$$\kappa_1 \gamma \frac{d}{dr} \frac{\sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_1}{\kappa_1}} r)}{r} \Big|_{r=a} = -\kappa_2 b \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda \nu_2}} \frac{d}{ds} \frac{\sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_2}{\kappa_2}} s)}{b - s} \Big|_{s=b-a}. \quad (4.53)$$

Si $\sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_1}{\kappa_1}} a) = 0$ et $\sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_2}{\kappa_2}} (b - a)) \neq 0$, ou bien $\sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_2}{\kappa_2}} (b - a)) = 0$ et $\sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_1}{\kappa_1}} a) \neq 0$, alors on voit immédiatement qu'il n'existe pas γ qui vérifie l'égalité (4.52).

D'autre part, si

$$\sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_1}{\kappa_1}} a) = \sin(\sqrt{\frac{\lambda \nu_2}{\kappa_2}} (b - a)) = 0,$$

alors (4.52) est automatiquement vérifiée, tandis que (4.53) est réduite à

$$\kappa_1 \gamma \sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} \frac{\cos(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} a)}{a} = \kappa_2 b \frac{\cos(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}} (b-a))}{a},$$

qui nous permet de déterminer γ qui satisfait aux conditions (4.52) et (4.53).

Dans le cas $\sin(\sqrt{\frac{\lambda v_1}{\kappa_1}} a) \neq 0$ et $\sin(\sqrt{\frac{\lambda v_2}{\kappa_2}} (b-a)) \neq 0$, de manière analogue à la déduction de (4.37) des égalités (4.35)–(4.36), on obtient la relation : il existe un $\gamma \in \mathbb{R}$ vérifiant (4.52) et (4.53) si et seulement si $\Phi(\sqrt{\lambda}) = 0$, où $\Phi(\cdot)$ est la fonction définie dans (4.47).

Des considération mentionnées ci-dessus et du lemme 4.4.4 on déduit que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} |z(\lambda; b-r)| < \infty$$

si et seulement si $\lambda = \lambda_k$ avec un $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En outre la définition de $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ et de $\{\bar{q}_k\}_{k=1}^\infty$ on déduit sans difficulté que $y(\lambda_k; r) = z(\lambda_k; b-r)$ a $k-1$ zéros dans l'intervalle $]0, b[$. □

Proposition 4.4.1. *On pose*

$$e_k(r) = \frac{y_k(r)}{\|y_k(r)\|_{\tilde{L}_v^2(0,b)}}, \quad (4.54)$$

où

$$y_k(r) = z(\lambda_k; s), \quad (4.55)$$

$z(\lambda; s)$ étant la fonction définie dans (4.31).

Alors

- (A) $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ est une base orthonormale de $\tilde{L}_v^2(0, b)$;
- (B) $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ est un système orthogonal complet de $\tilde{H}_k^1(0, b)$;
- (C) on a

$$\|e_k\|_{\tilde{H}_k^1(0,b)}^2 = \lambda_k;$$

(D) $e_k(r)$ et $r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}e_k(r)$ sont continues ;

(E) on a $\frac{d}{dr}e_k(r)|_{r=0} = 0$, $e_k(b) = 0$;

(F) on a

$$-\frac{d}{dr}r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}e_k(r) = \lambda_k c_{v\varrho}(r)r^2 e_k(r) \quad \forall r \in]0, a[\cup]a, b[;$$

(G) il existe une constante $C_1 < \infty$ telle que

$$|e_k(a)| \leq C_1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

(H) $e_k(r)$ possède $k - 1$ zéros sur $]0, b[$;

(I) on a

$$M_0(k-1)^2 \leq \lambda_k \leq M_0(k+1)^2, \quad M_0 = \left(\frac{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{\pi(a\sqrt{v_1 \kappa_2} + (b-a)\sqrt{v_2 \kappa_1})} \right)^2.$$

4.5 Démonstration de la proposition 4.4.1

La démonstration de la proposition 4.4.1 s'articule en plusieurs étapes. Nous procédons donc en démontrant d'abord des lemmes et ensuite en démontrant la proposition.

Lemme 4.5.1. *Il existe un opérateur linéaire A de $\tilde{L}_v^2(0, b)$ sur $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ qui à chaque $u \in \tilde{L}_v^2(0, b)$ associe $Au \in \tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ vérifiant la relation*

$$\langle Au, \varphi \rangle_{\tilde{H}_\kappa^1(0, b)} = \langle u, \varphi \rangle_{\tilde{L}_v^2(0, b)} \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_\kappa^1(0, b). \quad (4.56)$$

L'opérateur A , considéré comme opérateur de $\tilde{L}_v^2(0, b)$ dans lui-même, est un opérateur linéaire auto-adjoint et compact et ses vecteurs propres \tilde{e}_k correspondants aux valeurs propres μ_k ,

$$A\tilde{e}_k = \mu_k \tilde{e}_k, \quad (4.57)$$

forment une base orthonormale $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\tilde{L}_v^2(0, b)$. Les valeurs propres μ_k vérifient la relation

$$\mu_k \geq \mu_{k+1} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, \quad \mu_k \rightarrow 0 \quad \text{pour } k \rightarrow \infty. \quad (4.58)$$

Démonstration. Comme on a

$$\begin{aligned} \int_0^b v(r)r^2|\varphi(r)|^2 dr &= \int_0^b v(r)r^2 \int_b^r 2\varphi(r') \frac{d}{dr'} \varphi(r') dr' dr \\ &\leq C \left(\int_0^b v(r)r^2|\varphi(r)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b \kappa(r)r^2 \left| \frac{d}{dr} \varphi(r) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

avec

$$C = b \left(\max\left(\frac{v_1}{v_2}, 1\right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\max\left(\frac{v_1}{\kappa_1}, \frac{v_1}{\kappa_2}, \frac{v_2}{\kappa_2}\right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$\|\varphi\|_{\tilde{L}_v^2(0,b)} \leq C \|\varphi\|_{\tilde{H}_\kappa^1(0,b)} \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_\kappa^1(0,b).$$

De la sorte le produit scalaire $\langle u, \varphi \rangle_{\tilde{L}_v^2(0,b)}$ peut être considéré comme fonctionnelle linéaire sur $\varphi \in \tilde{H}_\kappa^1(0,b)$. Donc d'après le théorème de représentation de Riesz, pour chaque $u \in \tilde{L}_v^2(0,b)$ il existe un élément $U \in \tilde{H}_\kappa^1(0,b)$ et un seul qui vérifie la relation

$$\langle U, \varphi \rangle_{\tilde{H}_\kappa^1(0,b)} = \langle u, \varphi \rangle_{\tilde{L}_v^2(0,b)} \quad \forall \varphi \in \tilde{H}_\kappa^1(0,b). \quad (4.59)$$

En posant $Au = U$, on définit l'opérateur A de $\tilde{L}_v^2(0,b)$ dans $\tilde{H}_\kappa^1(0,b)$.

Cela étant, le lemme résulte de la théorie bien connue sur l'opérateur linéaire auto-

adjoint et compact et de la définition des espaces $\tilde{L}_v^2(0, b)$ et $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ (voir par exemple le lemme 1 du § 1 du chap. IV de [28]). \square

Lemme 4.5.2. Soit $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ la base orthonormale de $\tilde{L}_v^2(0, b)$ définie dans le lemme 4.5.1. Alors pour tout k on a

$$\mu_k \frac{d}{dr} \left(\kappa r^2 \frac{d}{dr} \tilde{e}_k \right) = -v r^2 \tilde{e}_k \quad \text{dans } L^2(0, b). \quad (4.60)$$

Démonstration. Comme $A\tilde{e}_k = \mu_k \tilde{e}_k$, en posant $U = A\tilde{e}_k$, d'après (4.59) on a

$$\int_I \mu_k \kappa(r) r^2 \left(\frac{d}{dr} \tilde{e}_k(r) \right) \frac{d}{dr} \varphi(r) dr = \int_I v(r) r^2 \tilde{e}_k(r) \varphi(r) dr.$$

Compte tenu que $\tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ est dense dans $\tilde{L}_v^2(0, b)$, cette égalité définit la dérivée généralisée $\frac{d}{dr}(\kappa(r)r^2 \frac{d}{dr} \tilde{e}_k(r))$, qui vérifie (4.60). \square

Lemme 4.5.3. Soit $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ la base orthonormale de $\tilde{L}_v^2(0, b)$ définie dans le lemme 4.5.1. Alors pour tout k , $\tilde{e}_k(r)$ a la forme

$$\tilde{e}_k(r) = \frac{y_k(r)}{\|y_k(r)\|_{\tilde{L}_v^2(0, b)}}, \quad (4.61)$$

où $y_k(r)$ est la fonction définie dans (4.55).

Démonstration. D'après le lemme 4.5.2, $\tilde{e}_k(r)$ doit vérifier l'équation (4.60) qui est identique à l'équation (4.27) avec $\lambda = \frac{1}{\mu_k}$ et vérifier aussi les conditions aux limites (4.28). Donc $\tilde{e}_k(r)$ doit avoir la forme de la fonction $y(\lambda; r) = z(\lambda; b - r)$ (définie dans (4.31)) avec $\lambda = \frac{1}{\mu_k}$. Or, $\tilde{e}_k(r)$ doit appartenir à $\tilde{L}_v^2(0, b) \cap \tilde{H}_\kappa^1(0, b)$ et donc, d'après le lemme 4.4.5, il faut et il suffit que $\lambda = \frac{1}{\mu_k}$ soit une des valeurs de $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$. Comme $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ est

ordonnée dans l'ordre décroissant tandis que $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ est ordonnée dans l'ordre croissant, on a

$$\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}. \quad (4.62)$$

C'est-à-dire, $\tilde{e}_k(r)$ a la forme (4.61).

□

Maintenant nous démontrons la proposition 4.4.1.

Démonstration. Comme les relations

$$\tilde{e}_k = e_k, \quad \lambda_k = \frac{1}{\mu_k}$$

sont établies (le lemme 4.5.3), la relation (A) est démontrée. La relation (B) résulte immédiatement du lemme 4.5.1. Pour établir (C) il suffit de substituer $u = \varphi = e_k$ dans (4.56) et de tenir compte de (4.57). Les relations (D) et (F) résultent immédiatement de (4.60). D'autre part, les relations (E) et (H) sont établies dans la définition de $e_k(r)$ et dans le lemme 4.4.2.

Pour démontrer l'inégalité

$$|e_k(a)| \leq C_1$$

il nous est commode de considérer la fonction

$$z(\lambda_k; s) = \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k \nu_2}} b \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k \nu_2}{\kappa_2}} s\right)}{b-s} \quad \text{pour } 0 \leq s \leq b-a,$$

de sorte que

$$e_k(a) = \frac{\sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k \nu_2}} b \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k \nu_2}{\kappa_2}} (b-a)\right)}{a}}{\|z(\lambda_k; \cdot)\|_{\tilde{L}_v^2(0,b)}}$$

De cette dernière expression on obtient immédiatement

$$|e_k(a)| \leq \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k \nu_2}} \frac{b}{a} \frac{1}{\|z(\lambda_k; \cdot)\|_{\tilde{L}_v^2(0,b)}}.$$

Considérons d'abord le cas où

$$\lambda_k \geq \frac{\pi^2 \kappa_2}{(b-a)^2 v_2},$$

c'est-à-dire le cas où

$$\sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}} (b-a) \geq \pi$$

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \|z(\lambda_k; \cdot)\|_{\tilde{L}_v^2(0,b)}^2 &= \int_0^b \tilde{v}(s)(b-s)^2 (z(\lambda_k; \cdot))^2 ds \geq \\ &\geq v_2 b \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}} \int_0^{b-a} \sin^2\left(\sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}} s\right) ds = \\ &= v_2 b \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}} \int_0^{b-a} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}} s)) ds \geq \\ &\geq \frac{v_2 b}{2} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}} \int_{\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}}}^{b-a} (1 - \cos(2\sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}} s)) ds = \\ &= \frac{v_2 b}{2} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}} \left[s - \frac{\sqrt{\kappa_2}}{2\sqrt{\lambda_k v_2}} \sin(2\sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}} s) \right]_{\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}}}^{b-a} = \\ &= \frac{v_2 b}{2} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}} \left[b-a - \frac{\sqrt{\kappa_2}}{2\sqrt{\lambda_k v_2}} \sin(2\sqrt{\frac{\lambda_k v_2}{\kappa_2}} (b-a)) - \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}} \right] \geq \\ &\geq \frac{v_2 b}{2} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}} \left[b-a - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}} \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) (b-a) \frac{v_2 b}{2} \sqrt{\frac{\kappa_2}{\lambda_k v_2}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|e_k(a)| \leq \frac{a}{b} \frac{2}{\frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) (b-a) v_2 b} \equiv C_1^{[+]} \quad \text{pour } \lambda_k \geq \frac{\pi^2 \kappa_2}{(b-a)^2 v_2}.$$

Comme l'ensemble des nombres λ_k tels que

$$\lambda_k < \frac{\pi^2 \kappa_2}{(b-a)^2 v_2}$$

est fini (et que $e_k(r)$ sont continues), on a

$$\sup_{k \in \Lambda_0} |e_k(a)| \equiv C_1^{[-]} < \infty$$

où

$$\Lambda_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k < \frac{\pi^2 \kappa_2}{(b-a)^2 v_2}\}.$$

On en déduit que

$$\sup_{k \in \Lambda_0} |e_k(a)| \leq \max\{C_1^{[+]}, C_1^{[-]}\} \equiv C_1 < \infty.$$

De l'expression de $e_k(r)$ (voir (4.54), (4.55), (4.31)) on déduit que sur l'intervalle $]0, a[$ il y a $[\sqrt{\lambda_k} \frac{a\sqrt{v_1}}{\sqrt{\kappa_1}} \pi]$ zéros et sur $]0, b[$ il y a $[\sqrt{\lambda_k} \frac{(b-a)\sqrt{v_2}}{\sqrt{\kappa_2}} \pi]$ zéros (ici $[x]$ est la partie entière d'un nombre $x \geq 0$). Comme le nombre de zéros de $e_k(r)$ sur $]0, b[$ est $k-1$, on a

$$k = [\sqrt{\lambda_k} \frac{a\sqrt{v_1}}{\sqrt{\kappa_1}} \pi] + [\sqrt{\lambda_k} \frac{(b-a)\sqrt{v_2}}{\sqrt{\kappa_2}} \pi]$$

$$\text{si } \sqrt{\lambda_k} \frac{a\sqrt{v_1}}{\sqrt{\kappa_1}} \pi = [\sqrt{\lambda_k} \frac{a\sqrt{v_1}}{\sqrt{\kappa_1}} \pi] \quad (\text{et } \sqrt{\lambda_k} \frac{(b-a)\sqrt{v_2}}{\sqrt{\kappa_2}} \pi = [\sqrt{\lambda_k} \frac{(b-a)\sqrt{v_2}}{\sqrt{\kappa_2}} \pi]),$$

et

$$k = [\sqrt{\lambda_k} \frac{a\sqrt{v_1}}{\sqrt{\kappa_1}} \pi] + [\sqrt{\lambda_k} \frac{(b-a)\sqrt{v_2}}{\sqrt{\kappa_2}} \pi] + 1 \quad \text{autrement.}$$

Comme pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ on a

$$\alpha + \beta - 2 < [\alpha] + [\beta] \leq \alpha + \beta,$$

on a

$$\sqrt{\lambda_k} \pi \frac{a\sqrt{v_1 \kappa_2} + (b-a)\sqrt{v_2 \kappa_1}}{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}} - 2 \leq k-1 \leq \sqrt{\lambda_k} \pi \frac{a\sqrt{v_1 \kappa_2} + (b-a)\sqrt{v_2 \kappa_1}}{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}},$$

d'où

$$\frac{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2} (k-1)}{\pi (a\sqrt{v_1 \kappa_2} + (b-a)\sqrt{v_2 \kappa_1})} \leq \sqrt{\lambda_k} \leq \frac{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{\pi (a\sqrt{v_1 \kappa_2} + (b-a)\sqrt{v_2 \kappa_1})} (k+1).$$

La propriété (I) est démontrée. □

4.6 Solution stationnaire

Maintenant nous allons chercher la solution stationnaire $(T(r), \Pi(r))$ de notre problème. Plus précisément, nous allons construire les fonctions $T(r)$ et $\Pi(r)$ qui satisfont aux équations

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2\kappa(r)\frac{d}{dr}T(r)\right) = \psi\delta(r-a) \quad \text{pour } 0 < r < b, \quad (4.63)$$

$$-\gamma_0\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\Pi(r)\right) = 0 \quad \text{pour } a < r < b \quad (4.64)$$

avec ψ définie par

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi|_{r=a+\varepsilon_1} - \Pi|_{r=a}}{\varepsilon_1} \quad (4.65)$$

et les conditions aux limites

$$T|_{r=b} = \bar{T}_b, \quad (4.66)$$

$$\Pi|_{r=a} = \bar{\pi}_a + \bar{\alpha}_1 T|_{r=a}, \quad (4.67)$$

$$\Pi|_{r=b} = \bar{\Pi}_b. \quad (4.68)$$

On définit en outre $\bar{\Theta}_a$ par l'égalité

$$\bar{\Theta}_a = \frac{\gamma_1 \bar{A}_a}{b} (\bar{\Pi}_b - (\bar{\pi}_a + \bar{\alpha}_1 (\bar{T}_b + \bar{\Theta}_a))), \quad (4.69)$$

c'est-à-dire

$$\bar{\Theta}_a = \frac{\gamma_1 \bar{A}_a}{b + \gamma_1 \bar{A}_a \bar{\alpha}_1} (\bar{\Pi}_b - \bar{\pi}_a - \bar{\alpha}_1 \bar{T}_b),$$

où

$$\bar{A}_a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e_k(a))^2}{\lambda_k}.$$

On a la proposition suivante.

Proposition 4.6.1. *La solution du problème (4.63)–(4.68) est donnée par*

$$T(r) = \bar{T}_b + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(r), \quad c_k^{\Theta} = \gamma_1 \frac{\bar{\Pi}_b - (\bar{\pi}_a + \bar{\alpha}_1(\bar{T}_b + \bar{\Theta}_a))}{b} \frac{e_k(a)}{\lambda_k}, \quad (4.70)$$

$$\Pi(r) = \frac{b\bar{\Pi}_b - a(\bar{\pi}_a + \bar{\alpha}_1(\bar{T}_b + \bar{\Theta}_a))}{(b-a)} - \frac{ab(\bar{\Pi}_b - (\bar{\pi}_a + \bar{\alpha}_1(\bar{T}_b + \bar{\Theta}_a)))}{(b-a)r} \quad (4.71)$$

Démonstration. Il est clair que la solution (formelle) du problème (4.64), (4.67), (4.68) est

$$\Pi(r) = \frac{b\bar{\Pi}_b - a(\bar{\pi}_a + \bar{\alpha}_1 T(a))}{(b-a)} - \frac{ab(\bar{\Pi}_b - (\bar{\pi}_a + \bar{\alpha}_1 T(a)))}{(b-a)r}. \quad (4.72)$$

Donc, en substituant cette relation dans (4.65), on obtient

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi|_{r=a+\varepsilon_1} - \Pi|_{r=a}}{\varepsilon_1} = \gamma_1 \frac{b(\bar{\Pi}_b - (\bar{\pi}_a + \bar{\alpha}_1 T(a)))}{(b-a)(a+\varepsilon_1)} \equiv \psi_{\varepsilon_1}(T(a)). \quad (4.73)$$

Nous posons également

$$\Theta(r) = T(r) - \bar{T}_b. \quad (4.74)$$

Alors le problème (4.63), (4.66) se réduit à

$$-\frac{d}{dr}(r^2 \kappa(r) \frac{d}{dr} \Theta(r)) = \psi_a(T(a)) \delta(r-a), \quad (4.75)$$

$$\Theta(b) = 0. \quad (4.76)$$

En posant

$$\Theta(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(r)$$

et en intégrant les deux membres de (4.75) multipliés par $e_k(r)$ sur $]0, b]$, en vertu de (B), (C), (D) et (F) de la proposition 4.4.1, on a

$$\lambda_k c_k^{\Theta} = \int_0^b e_k(r) \left(-\frac{d}{dr}(r^2 \kappa(r) \frac{d}{dr} \Theta(r)) \right) dr = \psi_a(T(a)) e_k(a).$$

C'est-à-dire, la solution du problème (4.75)–(4.76) est donnée par

$$\Theta(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(r), \quad c_k^{\Theta} = \psi_a(T(a)) \frac{e_k(a)}{\lambda_k}. \quad (4.77)$$

Donc la valeur de $\Theta(a)$ est

$$\Theta(a) = \psi_a(T(a)) \bar{A}_a, \quad \bar{A}_a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e_k(a))^2}{\lambda_k}. \quad (4.78)$$

De (4.73) et de (4.78) on obtient

$$\Theta(a) = \frac{\gamma_1 \bar{A}_a b}{(b-a)(a+\varepsilon_1)} (\bar{\Pi}_b - (\bar{\pi}_a + \bar{\alpha}_1 (\bar{T}_b + \Theta(a)))). \quad (4.79)$$

Donc, d'après la définition (4.69) de $\bar{\Theta}_a$, on a

$$\Theta(a) = \bar{\Theta}_a$$

et donc

$$T(a) = \bar{T}_b + \bar{\Theta}_a.$$

En substituant cette expression dans (4.73), (4.77), (4.72), on obtient (4.70) et (4.71). \square

4.7 Cas du domaine d'une dimension spatiale

Dans la section précédente nous avons déjà montré l'existence et l'unicité de la solution stationnaire de ce problème, que nous notons $(\bar{T}_{st}(r), \bar{\Pi}_{st}(r))$. Posons

$$\vartheta = \vartheta(t, r) = T(t, r) - \bar{T}_{st}(r), \quad (4.80)$$

$$\eta = \eta(t, r) = \Pi(t, r) - \bar{\Pi}_{st}(r) - \bar{\alpha}_1 \vartheta(t, r). \quad (4.81)$$

Comme $\partial_r(r^2\partial_r\Pi) = 0$ (voir (4.64)), de (4.2) découle

$$\partial_t\eta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\eta) = -\bar{\alpha}_1(\partial_t\vartheta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\vartheta)) \quad \text{pour } a < r < b.$$

On remarque que, en vertu de (4.1), (4.4), (4.5) et (4.80), on a

$$-\bar{\alpha}_1(\partial_t\vartheta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\vartheta)) = -\bar{\alpha}_1\left(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{v\rho}^{(2)}} - \gamma_0\right)\partial_r(r^2\partial_r\vartheta) \quad \text{pour } 0 < z < a.$$

Ces relations nous permettent de réduire le système d'équations (4.1)–(4.3) à

$$c_{v\rho}\partial_t\vartheta - \partial_r(r^2\kappa\partial_r\vartheta) = q\delta(r - a) \quad \text{dans }]0, b[, \quad (4.82)$$

$$\partial_t\eta - \gamma_0\partial_r(r^2\partial_r\eta) = f \quad \text{dans }]a, b[, \quad (4.83)$$

$$q = q(t) = \gamma_1 \frac{\eta(t, \varepsilon_1)}{\varepsilon_1}, \quad (4.84)$$

$$f = -\bar{\alpha}_1\left(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{v\rho}^{(2)}} - \gamma_0\right)\partial_r(r^2\partial_r\vartheta). \quad (4.85)$$

Les conditions aux limites sont

$$\vartheta(t, b) = 0, \quad \eta(t, a) = \eta(t, b) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (4.86)$$

tandis que les conditions initiales sont

$$\vartheta(0, r) = T_0(r) - \bar{T}_{st}(r) \equiv \vartheta_0(r) \quad \text{pour } 0 < r < b, \quad (4.87)$$

$$\eta(0, r) = \Pi_0(r) - \bar{\Pi}_{st}(r) - \bar{\alpha}_1\vartheta_0(r) \equiv \eta_0(r) \quad \text{pour } a < r < b. \quad (4.88)$$

Pour les fonctions u définies sur $]0, b]$, en utilisant les fonctions e_k définies dans (4.54)–(4.55), on définit les coefficients de Fourier $\hat{u}(k)$ et la norme $\|u\|_{H_{(0,b)}^\sigma}$ par

$$\hat{u}(k) = \langle u, e_k \rangle_{L_{c_{v\rho}}^2(0,b)}, \quad \|u\|_{H_{(0,b)}^\sigma} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\sigma |\hat{u}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.89)$$

où $L^2_{c_{vp}}(0, b)$ est défini comme dans (4.15). D'autre part, pour les fonctions u définies sur $[a, b]$, en utilisant les fonctions $d_k(r)$ définies dans (4.26) on définit

$$\widehat{u}(k) = \langle u, d_k \rangle_{L^2(a,b)}, \quad \|u\|_{H^\sigma_{(a,b)}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma} |\widehat{u}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.90)$$

Proposition 4.7.1. *Soit $1 < \sigma < \frac{3}{2}$. Supposons que $\vartheta_0 \in H^{\sigma-1}_{(0,b)}$ et $\eta_0 \in H^{\sigma-1}_{(a,b)}$. Alors, quel que soit $\bar{t} > 0$, il existe une solution (ϑ, η) et une seule du problème (4.82)–(4.88) dans la classe*

$$\begin{aligned} \vartheta &\in L^\infty(0, \bar{t}; H^{\sigma-1}_{(0,b)}) \cap L^2(0, \bar{t}; H^\sigma_{(0,b)}), \\ \eta &\in L^\infty(0, \bar{t}; H^{\sigma-1}_{(a,b)}) \cap L^2(0, \bar{t}; H^\sigma_{(a,b)}). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Démonstration. En utilisant les coefficients de Fourier définis dans (4.89)–(4.90) (même si on utilise le même symbole $\widehat{u}(k)$ pour les deux sens différents, il n'est pas difficile de les distinguer du contexte), on peut transformer les équations (4.82)–(4.83) en

$$\frac{d}{dt} \widehat{\vartheta}(t, k) + \lambda_k \widehat{\vartheta}(t, k) = q(t) e_k(a), \quad (4.92)$$

$$\frac{d}{dt} \widehat{\eta}(t, k) + \gamma_0 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} k^2 \widehat{\eta}(t, k) = \widehat{f}(t, k). \quad (4.93)$$

En multipliant les deux membres de (4.92) par $\lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}(t, k)$, on a

$$\frac{1}{2} \partial_t \lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}^2(t, k) + \lambda_k^\sigma \widehat{\vartheta}^2(t, k) = \lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}(t, k) q(t) e_k(a).$$

Comme

$$|e_k(a)| \leq C_1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

(voir (G) de la proposition 4.4.1), on a

$$\lambda_k^{\sigma-1} \widehat{\vartheta}(t, k) q(t) e_k(a) \leq \frac{1}{2} \lambda_k^\sigma |\widehat{\vartheta}(t, k)|^2 + \frac{C_1^2}{2} \lambda_k^{\sigma-2} |q(t)|^2.$$

Or, comme $\sigma - 2 < -\frac{1}{2}$, en vertu de (I) de la proposition 4.4.1 on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\sigma-2} \equiv C_\lambda < \infty.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt} \|\vartheta\|_{H_{(0,b)}^{\sigma-1}}^2 + \|\vartheta\|_{H_{(0,b)}^\sigma}^2 \leq C_1^2 C_\lambda |q(t)|^2.$$

Quant à $|q(t)|^2$, on a

$$\begin{aligned} |q(t)|^2 &= \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} |\eta(t, \varepsilon_1)|^2 = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\eta}(t, k) d_k(\varepsilon_1) \right|^2 \leq \\ &\leq C_q \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\sigma-1} |\hat{\eta}(t, k)|^2 = C_q \|\eta(t, \cdot)\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-\frac{1}{2}}}^2, \end{aligned}$$

où

$$C_q = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} \frac{2}{a^2(b-a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\sigma-1}} < \infty.$$

En adjoignant les deux inégalités, on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\vartheta\|_{H_{(0,b)}^{\sigma-1}}^2 + \|\vartheta\|_{H_{(0,b)}^\sigma}^2 \leq C_1^2 C_\lambda C_q \|\eta\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-\frac{1}{2}}}^2. \quad (4.94)$$

D'autre part, si on multiplie les deux membres de (4.93) par $k^{2\sigma-2} \hat{\eta}(t, k)$ et on fait la somme par rapport à k , on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\eta\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2 + \gamma_0 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \|\eta\|_{H_{(a,b)}^\sigma}^2 \leq C_2 \|f(t, \cdot)\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-2}}^2, \quad (4.95)$$

où

$$C_2 = \frac{1}{\gamma_0} \frac{(b-a)^2}{\pi^2}.$$

Si on définit

$$\tilde{\vartheta} = e^{-\omega t} \vartheta, \quad \tilde{\eta} = e^{-\omega t} \eta, \quad \tilde{q} = e^{-\omega t} q, \quad \tilde{f} = e^{-\omega t} f \quad (4.96)$$

avec un $\omega > 0$ (à choisir dans la suite), de (4.82)–(4.83) on obtient

$$c_{v\rho} \partial_t \tilde{\vartheta} - \partial_r (r^2 \kappa \partial_r \tilde{\vartheta}) + \omega c_{v\rho} \tilde{\vartheta} = \tilde{q} \delta(r) \quad \text{dans }]0, b[, \quad (4.97)$$

$$\partial_t \tilde{\eta} - \gamma_0 \partial_r (r^2 \partial_r \tilde{\eta}) + \omega \tilde{\eta} = \tilde{f} \quad \text{dans } [a, b[. \quad (4.98)$$

En procédant d'une manière tout analogue à l'obtention de (4.94)–(4.95), de (4.97)–(4.98) on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\vartheta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma-1}}^2 + \|\tilde{\vartheta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma}}^2 + 2\omega \|\tilde{\vartheta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma-1}}^2 \leq C_1^2 C_{\lambda} C_q \|\tilde{\eta}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-\frac{1}{2}}}^2, \quad (4.99)$$

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\eta}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2 + \gamma_0 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \|\tilde{\eta}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma}}^2 + 2\omega \|\tilde{\eta}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2 \leq C_2 \|\tilde{f}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-2}}^2. \quad (4.100)$$

Soit $\bar{\vartheta}$ une fonction appartenant à la classe

$$Y_{\vartheta} = L^{\infty}(0, \bar{t}; H_{(0,b)}^{\sigma-1}) \cap L^2(0, \bar{t}; H_{(0,b)}^{\sigma}). \quad (4.101)$$

Alors, en substituant $\bar{\vartheta}$ à la place de ϑ dans la définition (4.85) de f , on définit \bar{f} , qui appartiendra à $L^2(0, \bar{t}; H_{(a,b)}^{\sigma-2})$. En substituant \bar{f} à la place de f dans (4.83), on peut résoudre l'équation (4.83) (avec \bar{f}) et on obtient

$$\eta \in L^{\infty}(0, \bar{t}; H_{(a,b)}^{\sigma-1}) \cap L^2(0, \bar{t}; H_{(a,b)}^{\sigma})$$

(voir (4.95)). Ensuite, en définissant q par (4.84), on résout l'équation (4.82) et on obtient ϑ , qui, en vertu de (4.94), appartient à la classe Y_{ϑ} . C'est-à-dire, on a défini un opérateur G_1 qui, à $\bar{\vartheta} \in Y_{\vartheta}$, associe la solution $\vartheta \in Y_{\vartheta}$ de l'équation (4.82).

Si on définit $\tilde{\tilde{f}} = e^{-\omega t} \bar{f}$ et si on rappelle la définition de \bar{f} , on voit aisément qu'il

existe une constante C_f telle que

$$\|\tilde{f}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-2}}^2 \leq C_f \|\tilde{\vartheta}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma}}^2. \quad (4.102)$$

Considérons maintenant deux fonctions $\bar{\vartheta}_1$ et $\bar{\vartheta}_2$ appartenant à la classe Y_{ϑ} . En définissant $\tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2, \tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2$ de la manière indiquée ci-dessus, on pose

$$\tilde{\Theta} = \tilde{\vartheta}_1 - \tilde{\vartheta}_2, \quad \tilde{H} = \tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2, \quad \tilde{\Theta} = \tilde{\vartheta}_1 - \tilde{\vartheta}_2.$$

Comme les équations (4.97)–(4.98) sont linéaires, de la même manière que (4.99)–(4.100) et (4.102) on obtient

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma-1}}^2 + \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma}}^2 + 2\omega \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma-1}}^2 \leq C_1^2 C_{\lambda} C_q \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-\frac{1}{2}}}^2, \quad (4.103)$$

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2 + \gamma_0 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma}}^2 + 2\omega \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2 \leq C_2 C_f \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma}}^2. \quad (4.104)$$

Comme $\lambda^{2\sigma-1} \leq \delta \lambda^{2\sigma} + \frac{1}{4\delta} \lambda^{2\sigma-2}$ et donc $\|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-\frac{1}{2}}}^2 \leq \delta \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma}}^2 + \frac{1}{4\delta} \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2$ pour tout $\delta > 0$, en multipliant les deux membres de (4.103) par une constante Λ à déterminer et en faisant la somme de ces deux inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\Lambda \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma-1}}^2 + \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2) + \Lambda \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma}}^2 + \\ & + \gamma_0 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma}}^2 + 2\Lambda\omega \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma-1}}^2 + 2\omega \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2 \leq \\ & \leq \delta \Lambda C_1^2 C_{\lambda} C_q \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma}}^2 + \frac{\Lambda}{4\delta} C_1^2 C_{\lambda} C_q \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2 + C_2 C_f \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma}}^2. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Si on choisit $\Lambda = 2C_2 C_f$, $\delta = \frac{\gamma_0 \pi^2}{2\Lambda(b-a)^2 C_1^2 C_{\lambda} C_q}$, $\omega = \frac{\Lambda}{4\delta} C_1^2 C_{\lambda} C_q$, l'inégalité (4.105) se réduit à

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\Lambda \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma-1}}^2 + \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2) + \Lambda \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma}}^2 + \gamma_0 \frac{\pi^2}{2(b-a)^2} \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma}}^2 + \\ & + 2\Lambda\omega \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma-1}}^2 + \omega \|\tilde{H}\|_{H_{(a,b)}^{\sigma-1}}^2 \leq \frac{\Lambda}{2} \|\tilde{\Theta}\|_{H_{(0,b)}^{\sigma}}^2. \end{aligned} \quad (4.106)$$

L'inégalité (4.106) implique que l'approximation successive $\tilde{\vartheta}_{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, pour le problème (4.97)–(4.98) (avec les conditions initiales (4.87)–(4.88) pour tout n avec $\vartheta_0 \in H_{(0,b)}^{\sigma-1}$ et $\eta_0 \in H_{(a,b)}^{\sigma-1}$) converge dans l'espace de Banach \tilde{Y}_ϑ muni de la norme

$$\|\tilde{\vartheta}\|_{\tilde{Y}_\vartheta} = \left(\|\tilde{\vartheta}\|_{L^\infty(0,\bar{t};H_{(0,b)}^{\sigma-1})}^2 + \|\tilde{\vartheta}\|_{L^2(0,\bar{t};H_{(0,b)}^\sigma)}^2 + 2\omega \|\tilde{\vartheta}\|_{L^2(0,\bar{t};H_{(0,b)}^{\sigma-1})}^2 \right)^{1/2}.$$

Comme les équations sont linéaires, la limite $\tilde{\vartheta}$ de l'approximation successive $\tilde{\vartheta}_{(n)}$ sera la solution du problème (4.97)–(4.98) (et, par sa construction, donnera aussi $\tilde{\eta}$). En posant $\vartheta = e^{\omega t} \tilde{\vartheta}$, $\eta = e^{\omega t} \tilde{\eta}$, on voit aisément que (ϑ, η) sera la solution du problème (4.82)–(4.88). Leur appartenance aux classes (4.91) résulte des estimations établies ci-dessus. □

La solution (ϑ, η) du problème (4.82)–(4.88) étant trouvée, par les égalités (4.80)–(4.81) on peut construire les fonctions $T(t, r)$ et $\Pi(t, r)$ qui satisfont aux équations (4.1)–(4.3) et aux conditions (4.6)–(4.8).

Conclusion et perspectives

DANS la présente thèse, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution du système de deux équations de type parabolique linéaires, qui prend son origine de la modélisation du phénomène de l'évaporation de l'eau à partir de la surface d'eau liquide, et ce dans le cas d'un domaine d'une dimension spatiale, dans le cas d'un domaine de dimension 3 délimité par deux plans horizontaux ainsi que dans un domaine sphérique avec la symétrie sphérique, même si dans le cas du domaine de dimension 3 le résultat a été obtenu sous une hypothèse assez restrictive.

Compte tenu de la difficulté intrinsèque de la modélisation mathématique du phénomène de l'évaporation (et de son effet par la chaleur latente), difficulté essentiellement due au fait que l'évaporation se produit sur la surface du liquide – variété de dimension 2 –, tandis que l'on est intéressé au comportement des grandeurs physiques (la température et la densité de la vapeur) dans une région de dimension 3, nous pensons que le résultat obtenu est un bon indicateur du comportement de la température et de la densité de la vapeur dans un domaine où se produit l'évaporation, bon indicateur dans la possibilité de l'étude dans le cadre de l'Analyse mathématique.

Pour obtenir ces résultats, nous avons développé une méthode basée sur des variantes de série de Fourier. En concret, il s'agit d'une variante de série de Fourier sur un intervalle $] - b, a[$ composé par deux sous-intervalles $] - b, 0[$ et $] 0, a[$ où les coefficients de l'opérateur différentiel sont des constantes différentes sur chaque sous-

intervalle, et aussi d'une variante de série de Fourier sur le rayon d'une sphère avec un comportement analogue des coefficients de l'opérateur différentiel. Nous pensons que cette méthode pourra être ultérieurement développée pour être appliquée à divers problèmes d'équations du type parabolique et aussi d'équations du type elliptique.

Certainement la question qui reste pour le moment sans être résolue, celle sur la possibilité de nous libérer de l'hypothèse restrictive dans le cas du domaine de dimension 3, devra être investiguée. Il se peut que cette question puisse être résolue par une élaboration ultérieure de calcul, mais il se peut aussi qu'à la résolution de cette question puisse être servir l'approfondissement de l'utilisation des espaces de Sobolev anisotropes. Dans ce dernier cas, on aura besoin d'une étude approfondie sur les espaces de Sobolev anisotropes.

Pour conclure nous citons deux thèmes de recherche, qui ne sont pas dans la portée immédiate du travail présenté dans la présente thèse, mais auxquels notre intérêt peut être dirigé. Le premier est une modélisation mathématique plus cohérente du phénomène d'évaporation de l'eau et de son effet dans le milieu environnant. Le deuxième est l'étude du système d'équations décrivant non seulement l'évaporation de l'eau et son effet thermique, mais aussi le mouvement de l'eau et de l'air. Ce sont des thèmes de grand intérêt scientifique et on espère que les études effectuées dans la présente thèse pourront donner des contributions.

Bibliographie

- [1] Albertson, M. L. : La mécanique de l'évaporation. *La Houille Blanche*, vol. **1955-5** (1955), pp. 704–717.
- [2] Babich, V. M., Kapulevich, M. B., Mikhlin, S. G., Natanson, G. I., Riz, P. M., Slobodetskii, L. N., Smirnov, M. M. : *Équations linéaires de physique mathématique* (en russe). Nauka, Moscou, 1964.
- [3] Bellomo, N., Loiodice, R., Rizzi, G. : A new statistical kinetic theory of phase-transition in liquid-vapour systems, *Mech. Res. Commun*, vol.**3** (1976) pp. 417–422.
- [4] Benabdallah, A., Dermenjian, A., Le Rousseau, J. : Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient and applications. *Comptes Rendus Mecanique*, vol. **10** (2006) pp. 582–586.
- [5] Benabdallah, A., Dermenjian, A., Le Rousseau, J. : Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient and applications to controllability and an inverse problem. *J. Math. Anal. Appl*, vol. **336** (2007) pp. 865–887.
- [6] Brereton, G. J. : A discrete multicomponent temperature-dependent model for the evaporation of spherical droplets. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. **60**, (2013) pp. 512–522.
- [7] Chang, R., Davis, E.J. : Interfacial conditions and evaporation rates of liquid droplet. *J. Colloid Interface Sci*, vol. **47**, (1974) pp. 65–76.

- [8] Csanady, G. T. : *Air-sea interaction : law and mechanisms*. Cambridge Uni, Press, 2001.
- [9] Dombrovsky, L. A., Sazhin, S. S. : A Parabolic Temperature Profile Model for Heating of Droplets. *ASME. J. Heat Mass Transfer*, vol. **125** (2003) pp. 535–537.
- [10] El haj Assad, M., Lampinen, M. J. : Mathematical modeling of falling liquid film evaporation process. *Intern. J. Refrig*, vol. **25** (2002) pp. 985–991.
- [11] Evans, L. C. : *Partial Differential Equations*, Graduate studies in Mathematics, vol. 19, Amer. Math. Soc., 2010.
- [12] Fuchs, N. A. : *Evaporation and droplet growth in gaseous media*. London : Pergamon Press, (1959).
- [13] Friedman, A. : *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall, 1964.
- [14] Fujita Yashima, H. : *Modélisation de la physique des fluides*, cours de l'université de Guelma, 2010-2011.
- [15] Fujita Yashima, H. : Problème de la surface libre de l'équation de Navier-Stokes - Cas statinaire et cas périodique -, *Ann. Scuola Norm. Cl. Sci.*, série 4, tome 12, (1985), pp. 531–587.
- [16] Geneviève. Allain : Un problème de Navier-Stokes avec surface libre et tension superficielle, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 5 ème série, tome7, (1985), pp. 29–56.
- [17] Geta, R. I. : Modélisation de l'évaporation de la surface d'eau basée sur la théorie de la similitude (en russe). *Vestnik VKGTU*, vol. **2012-4** (2012), pp. 5–12.
- [18] Hallaci, K., Fujita Yashima, H. : Système d'équations paraboliques linéaires du type : température et densité de vapeur avec l'effet de l'évaporation, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* À apparaître (2018).
- [19] Kozyrev, A. V., Sitnikov, A. G. : Evaporation of a spherical droplet in a moderate-pressure gas. *Phys.-Usp*, vol. **44** (2001) pp. 725–733.

- [20] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.
- [21] Kraus, E. B., Businger, J. A. : *Atmosphere-ocean interaction* (2nd Ed.). Oxford Univ. Press, 1994.
- [22] Labbas, R., Moussaoui, M. : On the resolution of the heat equation with discontinuous coefficients. *Semigroup Forum*, vol. **60** (2000), pp. 187–201.
- [23] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N. : *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* (Translated from Russian). AMS, 1968.
- [24] Landau, L., Lifchitz, E. : *Physique théorique*, Tome 5 (*Physique statistique* Première partie) Mir, Moscou, 1984.
- [25] Landau, L., Lifchitz, E. : *Physique théorique*, Tome 6 (*Mécanique des fluides*.) Mir, Moscou, 1989.
- [26] Lions, J. L., Magenes, E. : *Problème aux limites non homogène et applications*, vol. **I**, Dunod, Paris, 1968.
- [27] Matveev, L. T. : *Physique de l'atmosphère* (en russe). Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.
- [28] Mikhaïlov, V. P. : *Équations aux dérivées partielles* (traduit du russe). Mir, 1980.
- [29] Monaco, R. : Time-Evolution of spherical droplets in vapour environment : A physical-mathematical model. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. **22** (1979) pp. 805–812.
- [30] Polyanin, A. D., Vyaz'min, A. V., Zhurov, A. I., Kazenin, D. A. : *Handbook of exact solutions for heat and mass transfer equations* (en russe). Faktorial, Moscou, 1998.
- [31] Primicerio, M., Problemi a contorno libero per l'equazione della diffusione. *Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino* vol. **32**, (1973) pp. 183–206.
- [32] Pustovalov, V. K., Romanov, G. S. : The theory of heating and evaporation of a spherical particle exposed to optical radiation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. **28**, No. 1 (1985) pp. 277–289.

- [33] Reipnazarova, Z. D., Artikov, A. A. : Mathematical simulation of the evaporation in operation area of a bubble evaporator. *Russ. J. Appl. Chem*, vol. **81**, (2008), No.12, pp. 2207–2210.
- [34] Richard Kayser, Jr., Herbert S. Bennett : Evaporation of a Liquid Droplet. *J. Res. Natl. Bur. Stand–A. Phys. Chem*, vol. **81A** (1977).
- [35] Sazhin, S. S., Rybdylova, O., Crua, C. : A mathematical model for heating and evaporation of a multi-component liquid film. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. **117** (2018) pp. 252–260.
- [36] Sazhin, S. S. : *Droplets and sprays*. Springer, Heidelberg, 2014.
- [37] Singh, V. P., Xu, C.-Y. : Evaluation and generalization of 13 mass-transfer equations for determining free water evaporation. *Hydrological Processes*, vol. **11** (1997), pp. 311–323.
- [38] Solonnikov, V. A. : Solubilité d'un problème sur le mouvement d'un fluide visqueux incompressible, borné par une surface libre. (en russe) *Izvestia A. N. SSSR, seria Mat.*, vol. **41** (1977).
- [39] Solonnikov, V. A. : Solubilité d'un problème tridimensionnel avec une surface libre pour un système stationnaire de Navier-Stokes. (en russe) *Zapiski Nauch. Sem. Inst. Steklov*, vol. **84** (1979).
- [40] Tani, A. : Two-phase free boundary problem for compressible viscous fluid moyion. *J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)*, vol. **24**, No.2 (1984), pp. 243–267.
- [41] Wang, Y., Xin, Z. : Vanishing Viscosity and surface tension limits of incompressible viscous surface waves. arXiv :1504.00152
- [42] Widder, D. V. : *The heat equation*. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [43] Zubkov, V. S, Cossali, G. E., Tonini, S., Rybdylova, O., Crua, C., Sazhin, S. S. : Mathematical modelling of heating and evaporation of a spheroidal droplet. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. **108** (2017) pp. 2181–2190.

Activités de recherche

PUBLICATIONS INTERNATIONALES

- Hallaci, Kh., Fujita Yashima, H. : Système d'équations paraboliques linéaires du type : température et densité de vapeur avec l'effet de l'évaporation, à paraître sur *Revue Roumaine Math. Pures Appl.*
- Hallaci, Kh., Fujita Yashima, H. : Équation de la chaleur avec l'effet de l'évaporation pour une gouttelette sphérique. En préparation.

COMMUNICATIONS INTERNATIONALES

- *Étude d'une variante équation de la chaleur*, 5^e Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation (WIMAM'2015), Université 08 Mai 1945 Guelma, 25 et 26 Octobre 2015.
- *Équation de la température dans un modèle de l'inter-surface entre l'air et l'eau liquide avec l'évaporation* The 9th Panafrican Congress of Mathematicians (PACOM'2017) Rabat - Morocco, July 03 – 07, 2017.

COMMUNICATIONS NATIONALES

- *Une variante de l'équation de la chaleur intervenant dans la modélisation de la surface d'eau avec l'évaporation*, La 5^e journée thésards en mathématiques, Université 8 Mai 1945 Guelma, 11 Juin 2015.

- *Équation de la température et de la densité de vapeur avec l'effet de l'évaporation dans un domaine d'une dimension spatiale*, la 1^{ère} édition du Colloque National : Mathématiques Appliquées et Équations Différentielles, " MAED' 2018". Université Chadli Bendjedid El-Tarf, 28 novembre 2018.