

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE 08 MAI 1945 GUELMA

Faculté de Mathématiques, Informatique et Sciences la Matière

Département de Mathématiques

Polycopié du Cours

Titre

Méthode des différences finies pour les équations
aux dérivées partielles

Niveau : Master1

Option : Equations aux dérivées partielles et analyse numérique

Rédigé par :

Dr. Mehri Allaoua

Année 2018/2019

Table des matières

Introduction	iv
1 Equations elliptiques : Problème aux limites en dimension un et deux	1
1.1 Normes matricielles	2
1.2 Matrice monotone	3
1.3 Principe de la méthode : le problème aux limites d'ordre 2 en dimension 1	4
1.3.1 Approximation des dérivées d'une fonction régulière	4
1.3.2 Approximation du problème (1.2) par différences finies	6
1.3.3 Consistance - Stabilité - Convergence de la méthode	8
1.4 Conditions aux limites de type Neumann	13
1.4.1 Première stratégie	13
1.4.2 Deuxième stratégie	14
1.5 Principe de la méthode des différences finies en dimension deux	14
1.6 Exercices	17
1.7 Programmation en Matlab de quelques exemples	25
2 Equations paraboliques	36
2.1 Equation de la chaleur en dimension un : les schémas implicites et explicites . . .	37
2.1.1 Maillage, les conditions initiales et les conditions aux bord	37
2.1.2 Le schéma explicite à 3 points pour la dérivée seconde	38
2.1.3 Le schéma implicite à 3 points pour la dérivée seconde	39
2.1.4 Le schéma saute-mouton ou le schéma de Richardson	40
2.2 Consistance, stabilité et convergence	40
2.2.1 Consistance	41
2.2.2 Stabilité et convergence	43
2.2.3 Convergence du schéma explicite	44
2.2.4 Convergence du schéma implicite	45
2.2.5 Instabilité du schéma Saute-Mouton	48
2.3 Schéma de Crank-Nicolson où Schéma semi-implicite	48
2.4 Autre écriture d'un schéma numérique	50
2.5 Stabilité en norme $\ \cdot\ _h$	52

Table des matières

2.6	Stabilité dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, Stabilité au sens de Von Neumann, Méthode de Fourier	53
2.6.1	Stabilité du schéma explicite	53
2.7	Exercices	58
2.8	Programmation en Matlab de quelques exemples	65
3	Equations hyperboliques	71
3.1	Equation de transport	72
3.1.1	Schémas explicites	72
3.1.2	Schémas implicites	73
3.2	Equation des ondes	75
3.2.1	Schéma explicite centré	75
3.2.2	Méthode de Fourier	77
3.2.3	Le schéma totalement implicite	79
3.3	Exercices	82
	Bibliographie	85

Introduction

La résolution des équations différentielles ou plus généralement des équations aux dérivées partielles occupe une place importante en ingénierie et en mathématiques appliquées. Chacune de ces disciplines apporte une contribution différente mais complémentaire à la compréhension et à la résolution de tels problèmes.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes de différences finies, des éléments finis, de volumes finis, aux méthodes spectrales, etc.

La méthode des différences finies est une des plus anciennes méthodes de simulation numérique qui est encore utilisée pour certaines applications, comme la propagation d'ondes sismiques ou électromagnétiques ou la mécanique des fluides compressibles. Pour d'autres applications, comme la mécanique du solide ou celles des fluides incompressibles, on lui préfère souvent la méthode des éléments finis.

Ce support de cours s'adresse tout particulièrement aux étudiants de première année Master de mathématiques appliquées, ainsi qu'aux ingénieurs, physiciens, mécaniciens, biologistes, économistes, ..., qui souhaitent avoir une idée des méthodes numériques constamment utilisées aujourd'hui, et être en mesure de mettre en œuvre certaines d'entre elles.

Dans ce travail, nous avons analysé les schémas numériques des différences finies. Nous avons défini la stabilité et la consistance d'un schéma et nous avons montré que, pour les équations

aux dérivées partielles à coefficients constants, la stabilité combinée à la consistance d'un schéma impliquent sa convergence.

Pour plus de détails le lecteur pourra consulter les ouvrages de Grégoire Allaire [1], Brigitte Lucquin [2], Philippe G. Ciarlet [5] et d'autres travaux [3,4,6,7] cités dans la bibliographie.

Ce travail est organisé en trois chapitres. Le chapitre I est consacré à présenter des schémas numériques pour une équation différentielle d'ordre deux, nous avons démontré la consistance, la stabilité et par conséquent la convergence du schémas sous la forme matricielle. Ce chapitre est terminée par une brève analyse du schéma numérique d'une équation elliptique en dimension deux.

Au chapitre II, nous avons traité une équation parabolique à une dimension en espace, où nous avons proposé différents schémas numériques tels le schéma explicite, implicite et de Crank-Nicolson. Une analyse de convergence a été faite par la méthode de Fourier.

Dans le chapitre III, nous avons établi les équations de type hyperboliques. Une brève introduction sur l'équation de transport, l'analyse de la stabilité en norme L^∞ , et nous avons terminé ce chapitre par l'étude de l'équation des ondes en dimension un en espace où nous avons démontré une propriété de stabilité basée sur la transformation de Fourier. Il convient aussi de noter qu'une série d'exercices illustrant ces schémas numériques apparaissent à la fin de chaque chapitre. Afin de rendre notre travail plus concret, des simulations numériques et des test numériques, ont été traité dans les cas elliptiques et paraboliques. Ce qui permet de vérifier par la pratique des propriétés théoriques comme la stabilité et la convergence.

Chapitre 1

Equations elliptiques : Problème aux limites en dimension un et deux

1.1 Normes matricielles

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle donnée sur l'espace \mathcal{R}^N . Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{R}^{N \times N}$; on note $\|A\|$ la quantité définie par

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathcal{R}^N, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathcal{R}^N, \|x\|=1} \|Ax\|$$

L'application $\|\cdot\|$ ainsi définie vérifie les propriétés usuelles de la norme, à savoir

1. $\|A\| \geq 0$ et $\|A\| = 0$ ssi $A = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathcal{R}, \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
3. inégalité triangulaire : $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B$.

Elle vérifie aussi une propriété supplémentaire

$$\forall A, B \in \mathcal{R}^{N \times N} : \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Enfin par définition on a

$$\forall A \in \mathcal{R}^{N \times N}, \forall x \in \mathcal{R}^N : \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

Rappelons quelques normes matricielles usuelles

Définition 1.1. Soit A une matrice de $\mathcal{R}^{N \times N}$ de coefficients $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq N$, on a les normes usuelles suivantes

1.

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^N |a_{ij}|$$

2.

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}|$$

3.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

où la notation $\rho(B)$ désigne le rayon spectral de la matrice B . Dans le cas d'une matrice A qui commute avec sa matrice adjointe A^* (une telle matrice est dite normale), on a

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

1.2 Matrice monotone

Définition 1.2. On dit qu'un vecteur x est positif si toutes ses composantes x_i sont positives ; une matrice A est dite positive si tous ses coefficients a_{ij} sont positifs. Enfin, on dit qu'une matrice A est monotone si elle est *inversible* et d'*inverse positif*.

On a la caractérisation suivante des matrices monotones.

Lemme 1.1. Une matrice A est monotone ssi pour tout vecteur $x \in \mathcal{R}^N$, on a

$$Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0. \tag{1.1}$$

Preuve. " \Rightarrow " :

Supposons A monotone. Soit $x \in \mathcal{R}^N$ tel que $Ax \geq 0$. La matrice A^{-1} étant positive, on en déduit que

$$x = A^{-1}(Ax) \geq 0.$$

" \Leftarrow " :

Réciproquement, soit A une matrice vérifiant la propriété (1.1). Montrons d'abord que A est inversible. Soit $x \in \mathcal{R}^N$ tel que

$$Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0,$$

et

$$A(-x) \geq 0 \Rightarrow (-x) \geq 0,$$

donc si

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0,$$

ce qui montre que A est inversible. Montrons que la matrice A^{-1} est positive. Pour cela, il suffit de montrer que chacune de ses colonnes est positive. Soit C_i l'une de ses colonnes, par définition,

$$C_i = A^{-1}e_i,$$

où e_i est la $i = \text{ime}$ colonne de la base canonique de \mathcal{R}^N . On a donc :

$$AC_i = e_i \geq 0,$$

d'après la propriété (1.1), on en déduit que :

$$C_i \geq 0.$$

Ce qui termine la démonstration. □

1.3 Principe de la méthode : le problème aux limites d'ordre 2 en dimension 1

On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2}(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u(0) = g_0, & u(1) = g_1, \end{cases} \quad (1.2)$$

où f et c sont deux fonctions données sur $[0, 1]$ avec $f \in L^2(]0, 1[)$, $c \in L^\infty(]0, 1[)$, $c \geq 0$.

Les deux ingrédients principaux d'une approximation par différences finies sont le Schéma d'approximation des dérivées et la grille de discrétisation.

1.3.1 Approximation des dérivées d'une fonction régulière

Plaçons-nous en dimension 1 pour simplifier. L'idée fondamentale consiste à approcher les dérivées (ou les dérivées partielles en dimension plus grande) de la fonction u en un point x en écrivant

$$\frac{du}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \simeq \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

pour un h petit (mais non nul) fixé. Il suffira ensuite de disposer les points de discrétisation régulièrement **espacés** de h pour pouvoir employer cette approximation en tout point de discrétisation.

La qualité de l'approximation précédente dépend fortement de la **régularité de la fonction** u .

Si la fonction u est \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $[0, 1]$, on déduit aisément du développement de Taylor

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\theta),$$

où $\theta \in]x, x+h[$, l'inégalité

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch,$$

où $C = \sup_{y \in [0,1]} |u''(y)|$, pour tout $0 \leq x \leq 1-h$.

On dit alors que l'approximation de $u'(x)$ par $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ est **consistante d'ordre 1**. Cette approximation s'appelle aussi **différences finies à droite ou en avant**.

Définition 1.3. On dit de manière générale qu'on a une approximation **consistante d'ordre** p ($p > 0$) fixé, s'il existe une constante C indépendante de h telle que l'erreur soit majorée par Ch^p ; i.e

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch^p,$$

Remarque 1.1. La **précision** de l'approximation dépend de la **régularité** de la fonction u .

On vérifie facilement que l'approximation de $u'(x)$ par $\frac{u(x) - u(x-h)}{h}$ est également **consistante d'ordre 1**, on l'appelle aussi **différences finies à gauche ou en arrière**.

Il est possible d'obtenir une meilleure approximation de la dérivée première d'une fonction en utilisant un quotient **centré** : si la fonction $u \in \mathcal{C}^3$, la formule de Taylor à l'ordre 3 donne

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(\theta_1), \\ u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(\theta_2), \end{aligned}$$

où $\theta_1 \in]x, x+h[$ et $\theta_2 \in]x-h, x[$. On obtient alors

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| = \left| \frac{h^2}{12}(u'''(\theta_1) + u'''(\theta_2)) \right| \leq C'h^2,$$

où $C' = \frac{1}{6} \sup_{y \in [0,1]} |u'''(y)|$. L'approximation

$$u'(x) \simeq \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

est donc **consistante d'ordre 2**.

En ce qui concerne les dérivées secondes, on démontre facilement en utilisant le développement de Taylor à l'**ordre 4**, que si u est C^4 au voisinage de x , l'approximation

$$u''(x) \simeq \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}, \quad (1.3)$$

est **consistante d'ordre 2**. Plus précisément,

$$\left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|, \quad (1.4)$$

pour tout $x \in [h, 1-h]$.

1.3.2 Approximation du problème (1.2) par différences finies

Soit $N \in \mathcal{N}$ fixé. On définit les points de **discrétisation du maillage** par

$$x_i = ih, i \in \{0, 1, \dots, N+1\}, \text{ où } h = \frac{1}{N+1},$$

Les points $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$ constituent les extrémités de l'intervalle de définition de u , et les points x_1, \dots, x_N sont appelés **points internes du maillage**.

On cherche en chacun de ces points une valeur approchée, notée u_i , de $u(x_i)$. On prend naturellement $u_0 = u(0) = g_0$ et $u_1 = u(1) = g_1$. Pour les sommes internes on utilise l'approximation (1.3) de la dérivée seconde décrite plus haut

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i), \text{ pour } i \in \{1, \dots, N\}, \\ u_0 = g_0, \quad u_{N+1} = g_1, \end{cases} \quad (1.5)$$

On observe qu'on obtient N **équations servant à déterminer les N inconnues** u_1, \dots, u_N .

On dit usuellement qu'on a discrétisé le problème par une méthode de différences finies utilisant **le schéma centré à trois points de la dérivée seconde**. On note que la connaissance

des conditions aux limites u_0 et u_{N+1} est nécessaire à la résolution du système, puisqu'elles apparaissent dans le schéma (1.5) lorsque $i = 1$ et $i = N$.

Matriciellement, le problème s'écrit

$$A_h u_h = b_h, \quad (1.6)$$

où

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, \quad b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{g_1}{h^2} \end{pmatrix},$$

$$A_h = A_h^{(0)} + \begin{pmatrix} c(x_1) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & c(x_2) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c(x_N) \end{pmatrix},$$

$$A_h^{(0)} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

On note que le système ne porte que sur les inconnues u_1, \dots, u_N . En particulier, les conditions aux limites $u_0 = g_0$ et $u_{N+1} = g_1$ n'apparaissent que dans le vecteur b_h . On note également que les matrices A_h et $A_h^{(0)}$ sont **tridiagonales**. Pour déterminer la solution **discrète** u_h , il suffit donc de résoudre le système linéaire tridiagonal (1.6). La matrice A_h est inversible puisqu'on a :

Proposition 1.1. *Supposons $c \geq 0$. La matrice A_h est symétrique définie positive.*

Preuve. La matrice A_h est clairement symétrique. Soit z un vecteur de \mathcal{R}^N , de composantes z_1, \dots, z_N . On a

$$\begin{aligned} z^t A_h z &= z^t A_h^{(0)} z + \sum_{i=1}^N c(x_i) z_i^2 \geq z^t A_h^{(0)} z, \\ &= \frac{z_1^2 + (z_2 - z_1)^2 + \dots + (z_N - z_{N-1})^2 + z_N^2}{h^2}. \end{aligned}$$

Cette quantité est positive, et non nulle si $z \neq 0$ (car au moins l'un des termes au numérateur est non nul). □

1.3.3 Consistance - Stabilité - Convergence de la méthode

Afin d'étudier la convergence de la solution approchée u_h vers la solution exacte u lorsque $h \rightarrow 0$, on commence par étudier l'erreur de consistance.

Définition 1.4. (Erreur de consistance) On appelle erreur de consistance du schéma (1.5) $A_h u_h = b_h$, le vecteur $\varepsilon_h(u)$ de \mathcal{R}^N défini par

$$\varepsilon_h(u) = A_h(\pi_h(u)) - b_h, \quad \text{où} \quad \pi_h(u) = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ u(x_N) \end{pmatrix},$$

$\pi_h(u)$ représente la projection de la solution exacte sur le maillage. On dit que le schéma est **consistant pour la norme** $\|\cdot\|$ de \mathcal{R}^N si $\lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon_h(u)\| = 0$. Si de plus il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|\varepsilon_h(u)\| \leq Ch^p,$$

pour $p > 0$, on dit que **le schéma est d'ordre p pour la norme** $\|\cdot\|$.

Usuellement on utilise les normes $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ où $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition 1.2. Supposons que la solution u du problème (1.2) est de classe \mathcal{C}^4 sur $[0, 1]$. Alors le schéma (1.5) est **consistant d'ordre 2 pour la norme** $\|\cdot\|_\infty$. Plus précisément

$$\|\varepsilon_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|, \quad (1.8)$$

Preuve. D'après le développement de Taylor, on a

$$u''(x_i) = \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\theta_i), \quad x_i - h_0 < \theta_i < x_i + h_0,$$

Chapitre 1. Equations elliptiques : Problème aux limites en dimension un et deux

en substituant dans l'équation (1.2), on obtient

$$-\frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} + c(x_i)u(x_i) - f(x_i) = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\theta_i), \quad x_i - h_0 < \theta_i < x_i + h_0,$$

sous forme vectorielle

$$(A_h(\pi_h(u)) - b_h)_i = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\theta_i),$$

ce qui donne

$$\varepsilon_h(u)_i = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\theta_i),$$

donc

$$\|\varepsilon_h(u)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |\varepsilon_h(u)_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

□

Remarque 1.2. Du fait que la dimension N de l'espace est liée à h par la relation $h(N+1) = 1$,

on a

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_h(u)\|_1 &= \sum_{i=1}^N \frac{h^2}{12} |u^{(4)}(\theta_i)| \\ &\leq \frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^N \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)| \\ &\leq Ch^2 \sum_{i=1}^N 1 \leq Ch^2 N \leq Ch(1-h) = o(h), \quad \text{car } 1-h < 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_h(u)\|_2^2 &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{h^2}{12} |u^{(4)}(\theta_i)| \right]^2 \\ &\leq Ch^4 \cdot N \leq Ch^3(1-h) = o(h^3). \end{aligned}$$

Donc

$$\|\varepsilon_h(u)\|_2 = o(h^{3/2}).$$

Remarque 1.3. Si u est de *dérivée quatrième nulle*, alors l'erreur de consistance $\varepsilon_h(u)$ est *nulle*. La matrice A_h étant inversible, on en déduit que $u_h = \pi_h(u)$, ce qui donne en définitive que : *la solution exacte coïncide avec la solution discrète en tout point du maillage.*

Définition 1.5. (Stabilité) On dira que le schéma (1.5) est stable pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\|u_h\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N} |u_i| \leq C.$$

Définition 1.6. (Erreur de convergence). On appelle erreur de convergence de la méthode, l'erreur entre la solution approchée u_h et la solution exacte aux points du maillage $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, i.e la quantité

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty.$$

Afin de majorer cette erreur, il suffit d'observer que, par définition de l'erreur de consistance et puisque $A_h u_h = b_h$, on a

$$u_h - \pi_h(u) = -(A_h)^{-1} \varepsilon_h(u). \quad (1.9)$$

Théorème 1.1. (Théorème de convergence). On suppose $c \geq 0$. Si la solution u du problème (1.2) est de classe C^4 sur $[0, 1]$, alors le schéma (1.5) est convergent d'ordre 2 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Plus précisément,

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

Avant de démontrer le théorème (1.1), nous avons besoin de quelques notions sur l'analyse matricielle.

Proposition 1.3. (Monotonie) On suppose $c \geq 0$. La matrice A_h du système linéaire (1.6) est monotone.

Proposition 1.4. (Stabilité). Supposons que $c \geq 0$. On a l'estimation suivante

$$\|(A_h)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}. \quad (1.10)$$

Preuve. On remarque d'abord que

$$A_h^{-1} - \left(A_h^{(0)}\right)^{-1} = A_h^{-1} \left[A_h^{(0)} - A_h\right] \left(A_h^{(0)}\right)^{-1},$$

comme par ailleurs $\left(A_h^{(0)} - A_h\right)$ est une matrice diagonale à coefficients tous négatifs ($c \geq 0$), et que

$$A_h^{-1} \geq 0, \left(A_h^{(0)}\right)^{-1} \geq 0,$$

(d'après la proposition 1.3, ces matrices sont en effet monotones). On déduit que

$$0 \leq A_h^{-1} \leq \left(A_h^{(0)}\right)^{-1},$$

ce qui entraîne que

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \left\| \left(A_h^{(0)}\right)^{-1} \right\|_\infty.$$

Pour montrer (1.10) il suffit d'établir la majoration

$$\left\| \left(A_h^{(0)}\right)^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{8}.$$

Les coefficients de la matrice $\left(A_h^{(0)}\right)^{-1}$, étant positifs, on a

$$\left\| \left(A_h^{(0)}\right)^{-1} \right\|_\infty = \left\| \left(A_h^{(0)}\right)^{-1} e \right\|_\infty,$$

où $e \in \mathbb{R}^N$ dont toutes les composantes valent 1. Par ailleurs $\left(A_h^{(0)}\right)^{-1} e$ n'est autre que la solution u_h du système (1.6) dans le cas $c = 0$ et $b_h = e$; en d'autres termes c'est la solution discrète qui correspond au problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & x \in]0, 1[\\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases}$$

Or la solution de ce problème est : $u(x) = \frac{x(x-1)}{2}$. Elle est de dérivée quatrième nulle. D'après la remarque 1.3, on sait que la solution discrète coïncide avec la solution exacte en chacun des sommets du maillage. On a donc

$$\left(\left(A_h^{(0)}\right)^{-1} e \right)_i = u(x_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

On en déduit que

$$\|(A_h^{(0)})^{-1}e\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N} |u(x_i)| = \frac{1}{8}.$$

Ce qui termine la démonstration. □

Proposition 1.5. *Le schéma (1.5) est stable pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

Preuve. Posons

$$A_h^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}, \text{ et } b_h = (b_j)_{1 \leq j \leq N}.$$

Alors

$$|u_i| = \left| \sum_{j=1}^N b_{ij} \cdot b_j \right| \leq \frac{1}{8} \sup_{1 \leq j \leq N} |b_j| = C,$$

donc

$$\|u_h\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N} |u_i| \leq C.$$

□

Preuve. du théorème 1.1 : D'après l'égalité 1.9, on a l'estimation d'erreur suivante

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \|(A_h^{-1})\|_\infty \|\varepsilon_h(u)\|_\infty.$$

Appliquons l'estimation (1.8) de l'erreur de consistance proposition 1.2 et l'estimation (1.10) dite inégalité de stabilité proposition 1.4, on en déduit

$$\|u_h - \pi_h(u)\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|.$$

□

Remarque 1.4. *La convergence finale de la méthode est donc assurée grâce aux deux propriétés fondamentales qui sont : **consistance et stabilité.***

1.4 Conditions aux limites de type Neumann

Considérons le problème : Trouver $u : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ solution de

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2}(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ u'(0) = g_0, & u'(1) = g_1, \end{cases} \quad (1.11)$$

où f et c sont deux fonctions données, $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, $c \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, $c \geq c_0 > 0$.

Nous allons définir un schéma d'approximations pour les noeuds d'extrémités.

1.4.1 Première stratégie

Elle consiste à approcher la dérivée première par **un schéma décentré** du type

$$u'(0) \simeq \frac{u(h) - u(0)}{h}, \quad u'(1) \simeq \frac{u(1) - u(1-h)}{h}.$$

Ce qui donne le schéma suivant

$$u_0 = u_1 - hg_0, \quad u_{N+1} = u_N + hg_1.$$

On a en définitive le système suivant à résoudre

$$B_h u_h = b_h, \quad (1.12)$$

avec

$$u_h = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \\ u_{N+1} \end{pmatrix}, \quad b_h = \begin{pmatrix} -hg_0 \\ f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_N) \\ hg_1 \end{pmatrix},$$

$$B_h = B_h^{(0)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & c(x_1) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c(x_N) & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_h^{(0)} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

où l'inconnue u_h est un vecteur de \mathcal{R}^{N+2} composantes $u_i, i \in \{0, \dots, N+1\}$, la matrice B_h étant de taille $(N+2)(N+2)$. D'après l'approximation des conditions aux limites : **le schéma proposé est décentré d'ordre un, l'erreur de consistance du schéma global est seulement d'ordre $o(h)$.**

1.4.2 Deuxième stratégie

Afin d'améliorer la précision, on peut essayer d'utiliser un **schéma centré** pour la discrétisation de la condition de Neumann. Introduisons des points fictifs $x_{-1} = -h, x_{N+2} = 1+h$ et les inconnues fictives correspondantes u_{-1} et u_{N+2} . Soit l'approximation de la dérivée aux points limites

$$u'(0) \simeq \frac{u(h) - u(-h)}{2h}, \quad u'(1) \simeq \frac{u(1+h) - u(1-h)}{2h},$$

ce qui donne deux inconnues supplémentaires u_0 et u_{N+1} . On discrétise l'équation (1.11) en chacun des sommets x_i du maillage, nous obtenons finalement le schéma suivant

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i), \text{ pour } i \in \{0, \dots, N+1\}, \\ u_{-1} = u_1 - 2hg_0, \quad u_{N+2} = u_N + 2hg_1, \end{cases} \quad (1.14)$$

la matrice correspondante est de dimension $N+2$, **l'erreur de consistance globale du schéma est alors d'ordre $o(h^2)$.**

1.5 Principe de la méthode des différences finies en dimension deux

Considérons pour simplifier le problème de Dirichlet homogène suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), \text{ pour } (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, \\ u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.15)$$

où f est une fonction donnée, continue sur $\bar{\Omega}$, Γ est le bord de Ω .

La méthode des différences finies consiste à recouvrir Ω par des petits rectangles élémentaires de taille $h = \frac{1}{N+1}$ dans la direction de l'abscisse x et $k = \frac{1}{M+1}$ dans la direction de l'axe y (maillage non uniforme). On cherche pour chaque indice $i \in \{0, \dots, N+1\}$, $j \in \{0, \dots, M+1\}$ une approximation notée $u_{i,j}$ de $u(ih, jk)$. En approchant chacune des dérivées secondes par un schéma centré à 3 points décrit ci-dessus, en posant

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \cdot) &\simeq \frac{u(x+h, \cdot) - 2u(x, \cdot) + u(x-h, \cdot)}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\cdot, y) &\simeq \frac{u(\cdot, y+k) - 2u(\cdot, y) + u(\cdot, y-k)}{k^2},\end{aligned}$$

cela donne le schéma suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = f(ih, jk), \\ i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M\}, \\ u_{i,j} = 0 \text{ pour } i \in \{0, N+1\} \text{ où pour } j \in \{0, M+1\}, \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Ce schéma s'appelle usuellement "**schéma à 5 points du Laplacien**". Il s'agit d'un schéma centré, où pour évaluer la valeur de u au point $q^{(l)} = (ih, jk)$, on utilise la valeur en cinq points centré autour du point $q^{(l)}$: le point $q^{(l)}$ lui même et les quatres points cardinaux suivants :

$$q_S^{(l)} = (ih, (j-1)k), q_N^{(l)} = (ih, (j+1)k), q_O^{(l)} = ((i-1)h, jk), q_E^{(l)} = ((i+1)h, jk),$$

Matriciellement, le schéma s'écrit sous la forme (on note $H = \max(h, k)$)

$$C_H u_H = b_H, \quad (1.17)$$

où la matrice C_H a une structure "**bloc**". Par exemple si on choisit de numéroter les inconnues de la manière suivante $u_{1,1}, \dots, u_{1,M}, u_{2,1}, \dots, u_{N,M}$ i.e en balayant le maillage ligne par ligne, la matrice C_H est formée de M^2 blocs, chacun de taille $N \times N$. Par ailleurs, elle a la structure creuse suivante

$$C_H = \begin{pmatrix} A & D & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ D & A & D & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & D & A & D & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & D & A & D \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & D & A \end{pmatrix},$$

où A et D sont des matrices de taille $N \times N$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -b & a & -b & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -b & a & -b \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -b & a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -d & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -d & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -d \end{pmatrix},$$

où on a posé

$$b = \frac{1}{h^2}, \quad d = \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad a = 2(b + d).$$

Comme en dimension 1, on montre que la matrice C_H est symétrique définie positive, monotone et qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de H telle que

$$\|(C_H)^{-1}\| \leq C.$$

Ainsi la méthode est convergente d'ordre deux en h et k pour $u \in \mathcal{C}^4$. Plus précisément

$$\|u_H - \pi_H(u)\|_\infty \leq C(h^2 + k^2).$$

1.6 Exercices

EX1 : Soit le problème aux limites

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= x, \quad x \in]0, 1[, \\ u(0) &= 0, u(1) = 0. \end{aligned}$$

- Discrétiser le problème par la méthode des différences finies.
- Trouver les valeurs numériques de la solution approchée pour $h = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$.
- Calculer l'erreur d'estimation.

EX2 : Soit le problème aux limites (distribution de la température)

$$\begin{aligned} -T''(x) &= 1, \quad x \in]0, 1[, \\ T(0) &= 0, T(1) = 0. \end{aligned}$$

En choisissant un maillage avec un pas de $h = 0.25$ et en appliquant un schéma des différences finies centrées, calculer la distribution de la température. Comparer avec la solution exacte

$$T(x) = -x^2/2 + x/2.$$

EX3 : Soit $u \in C^3(\mathfrak{R})$. Déterminer a, b, c pour que la différence finie

$$\frac{au_i + bu_{i+1} + cu_{i+2}}{h},$$

soit une approximation d'ordre au moins 2 de $u'(x_i)$.

EX4 : Montrer que le schéma en différence finie :

$$\frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12h^2},$$

est précis d'ordre 4 pour l'approximation de u'' .

EX5(Différence finie d'ordre 4) : Soit $u \in C^7(\mathfrak{R})$. Déterminer a, b, c, d, e , pour que la différence finie

$$\frac{au_{i-2} + bu_{i-1} + cu_i + du_{i+1} + eu_{i+2}}{h^2},$$

soit une approximation d'ordre au moins 4 de $u''(x_i)$.

EX6 : On veut résoudre de manière approchée le problème (P) suivant :

$$\begin{aligned} -u''(x) + \frac{1}{1+x}u'(x) &= f(x), \quad x \in]0, 1[, \\ u(0) &= 0, u(1) = 0, \end{aligned}$$

en utilisant le schéma usuel à trois points pour la dérivée seconde :

$$\frac{1}{h^2} \{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\} \simeq u''(x_i), x_i = ih,$$

et le schéma centré suivant pour la dérivée première :

$$\frac{1}{2h} \{u_{i+1} - u_{i-1}\} \simeq u'(x_i).$$

1) Ecrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire $A_h u_h = b_h$ en précisant la matrice A_h et le second membre b_h .

2) Montrer que la matrice A_h est monotone.

3) On considère la fonction auxiliaire

$$\theta : x \in [0, 1] \longrightarrow -\frac{1}{2}(1+x)^2 \log(1+x) + \frac{2}{3}(x^2 + 2x) \log 2.$$

Montrer que θ est solution d'un problème aux limites de même que (P).

4) On définit le vecteur θ_h de composantes $\theta(x_i)$; montrer qu'il existe une constante C indépendante de h - on précisera la valeur de C - telle que

$$|(A_h \theta_h)_i - 1| \leq Ch^2, 1 \leq i \leq N.$$

5) Dédurre de ce qui précède qu'il existe une constante M indépendante de h telle que

$$\|A_h^{-1}\| \leq M \text{ où } \|A\|_\infty = \sup_i \left\{ \sum_j |a_{ij}| \right\}.$$

6) En précisant les hypothèses sur u solution de (P) montrer que le schéma adopté converge et préciser l'ordre de convergence.

EX7 : Soit $u(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes que nous supposons suffisamment différentiable.

- écrire son développement de Taylor en un point $(x + h, y + k)$,
- en posant $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$, calculer les approximations suivantes,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2), \quad \text{D.F centrées d'ordre 2 en } h,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{h^2} + O(h), \quad \text{D.F à droite d'ordre 1 en } h,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2), \quad \text{D.F centrées d'ordre 2 en } h,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{-3u_{i,j} + 4u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{2h} + O(h^2), \quad \text{D.F à droite d'ordre 2 en } h,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h} + O(h^2), \quad \text{D.F à gauche d'ordre 2 en } h,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{k} + O(k), \quad \text{D.F centrées d'ordre 1 en } k,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{k^2} + O(k), \quad \text{D.F à droite d'ordre 1 en } k,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2), \quad \text{D.F centrées d'ordre 2 en } k,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{-3u_{i,j} + 4u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{2k} + O(k^2), \quad \text{D.F à droite d'ordre 2 en } k,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2k} + O(k^2), \quad \text{D.F à gauche d'ordre 2 en } k,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}}{4hk} + O(h^2 + k^2), \quad \text{D.F centrées d'ordre 2 en } h \text{ et en } k.$$

Chapitre 1. Equations elliptiques : Problème aux limites en dimension un et deux

EX8 : Une plaque rectangulaire mince de dimensions : $L = 20\text{cm}, l = 10\text{cm}$, est soumise aux températures de frontières nulles sauf $T(20, y) = 100^\circ\text{C}$. Sachant que le problème est régi par l'équation de Laplace, calculer la distribution de la température dans la plaque. Prendre un maillage uniforme pour les cas suivants : $\Delta x = 5\text{cm}, \Delta x = 2.5\text{cm}$, puis $\Delta x = 1\text{cm}$. Calculer la variation de la température pour $y = 5\text{cm}$. Comparer avec la solution exacte.

EX9 : Dans le rectangle $\Omega = \{(x, y), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, on considère le problème (E) suivant : trouver u tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= g \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}$$

où f et g sont des fonctions données. On admettra que ce problème admet une solution unique. On choisit un maillage régulier de pas h dans chaque direction (on suppose a/b rationnel) et on appelle D_h l'ensemble des points du maillage situés dans Ω et C_h les points du maillage sur Γ .

1) En utilisant la méthode d'approximation par différences finies construite à partir du schéma à cinq points, montrer en posant

$$Lv_{i,j} = \frac{1}{h^2} \{v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j}\},$$

que l'on a

$$\max_{D_h} |v_{i,j}| \leq \max_{C_h} |v_{i,j}| + \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \max_{D_h} |Lv_{i,j}|.$$

Pour cela, on suggère de procéder comme suit :

a) Montrer que si $Lv_{i,j} \geq 0$ sur D_h , alors

$$\max_{D_h} v_{i,j} \leq \max_{C_h} v_{i,j}.$$

b) Considérer la fonction définie sur D_h par $\Phi_{i,j} = \frac{h^2}{4}(i^2 + j^2)$ et appliquer les résultats de la question a) à la fonction $w^\epsilon = \epsilon v + M_L \Phi$, avec : $M_L = \max_{D_h} |Lv_{i,j}|$ et $\epsilon = \pm 1$. Conclure.

Chapitre 1. Equations elliptiques : Problème aux limites en dimension un et deux

2) On suppose que les hypothèses sur f et g sont telles que la solution u du problème (E) est de classe $C^4(\overline{\Omega})$; on pose, pour tout indice i, j :

$$e_{i,j} = u(ih, jh) - v_{i,j},$$

où les $v_{i,j}$ sont calculer par le schéma de la question précédente, i.e : $-Lv_{i,j} = f_{i,j}$ dans D_h et $v_{i,j} = g(ih, jh)$ sur C_h .

Montrer que l'on :

$$\max_{D_h} |Le_{i,j}| \leq \frac{1}{6} Mh^2,$$

et

$$M = \max \left\{ \max_{(x,y) \in \overline{\Omega}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) \right|, \max_{(x,y) \in \overline{\Omega}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y) \right| \right\}.$$

3) Donner une estimation de l'erreur $|e_{i,j}|$ et conclure.

EX10 (Erreur de consistance) : On considère la discrétisation à pas constant par le schéma aux différences finies symétriques à trois points du problème

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in]0, 1[, \\ u(0) &= 0, u(1) = 0, \end{aligned}$$

avec $f \in C([0, 1])$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, N impair. On pose $h = 1/(N + 1)$. On note u la solution exacte, $x_i = ih$, pour $i = 1, \dots, N$ les points de discrétisation, et $(u_i)_{i=1, \dots, N}$ la solution du système discrétisé.

1) Montrer que si f est constante, alors

$$\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - u(x_i)| = 0.$$

2) Soit N fixé, et $\max_{1 \leq i \leq N} |u_i - u(x_i)| = 0$. A-t-on forcément que f est constante sur $[0, 1]$? (justifier la réponse).

EX11 (Principe du maximum) : On considère le problème :

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0, 1[,$$

$$u(0) = a, u(1) = b,$$

où $c \in C([0, 1], \mathcal{R}^+)$, et $f \in C([0, 1], \mathcal{R}^+)$, et $(a, b) \in \mathcal{R}^2$.

1) Donner la discrétisation par différences finies de ce problème. On appelle u_h la solution approchée (c.à.d.) $u_h = (u_1, \dots, u_N)^t$, où u_i est l'inconnue discrète en x_i .

2) On suppose ici que $c = 0$. Montrer que $u_i \geq \min(a, b)$, pour tout $i = 1, \dots, N$.

EX12 (Equation de transport-diffusion sous forme non-conservative) :

Soient $v \in \mathcal{C}([0, 1], R_+)$ et $a_0, a_1 \in R$. On considère le problème suivant

$$-u''(x) + v(x)u'(x) = 0, \quad x \in]0, 1[,$$

$$u(0) = a_0, u(1) = a_1,$$

on admettra qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}([0, 1], R) \cap \mathcal{C}^2(]0, 1[, R)$ à ce problème. On se donne un pas de maillage $h = \frac{1}{N+1}$ uniforme. On considère le schéma aux différences finies suivant :

$$\frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{1}{h}v_i(u_i - u_{i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$u(0) = a_0, u(1) = a_1,$$

où $v_i = v(x_i)$, pour $i = 1, \dots, N$. Noter que le terme de convection $v(x_i)u'(x_i)$ est approché par $v(x_i)\frac{u(x_{i+1/2}) - u(x_{i-1/2}))}{h}$. Comme la vitesse v_i est positive ou nulle, on choisit d'approcher $u(x_{i+1/2})$ par la valeur "amont", c.à.d. $u(x_i)$; d'où le schéma.

1. Montrer que le schéma précédent s'écrit sous la forme $MU = b$ avec $U = (u_1, \dots, u_N)$, $b \in R^N$, et M est une matrice telle que
 - $MU \geq 0 \Rightarrow U \geq 0$ (les inégalités s'entendent composante par composante), (c.à.d M matrice monotone),
 - M est inversible,

- Si U est solution de $MU = b$, alors $\min(a_0, a_1) \leq u_i \leq \max(a_0, a_1)$.
- 2. Montrer que M est une M -matrice, c.à.d. que M vérifie :
 - $m_{i,i} > 0$ pour $i = 1, \dots, N$,
 - $m_{i,j} \leq 0$ pour $i, j = 1, \dots, N, i \neq j$,
 - M est inversible ,
 - $M^{-1} \geq 0$.

EX13 :

1. Soit le schéma uniforme à 5 points du Laplacien

$$\frac{1}{h^2}(4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = 0, \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Montrer que le maximum et le minimum de $u_{i,j}$ sont atteints au bord (i.e pour $i, j \in \{0, N+1\}$). Faire une preuve par l'absurde.

2. En utilisant le résultat précédent montrer l'unicité de la solution du problème discret de Dirichlet

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}(4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) &= f_{i,j}, \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, N\}, \\ u_{0,j} &= g_{0,j}, \quad u_{N+1,j} = g_{N+1,j}, \quad \text{pour } j \in \{0, \dots, N+1\}, \\ u_{i,0} &= g_{i,0}, \quad u_{i,N+1} = g_{i,N+1}, \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, N+1\}. \end{aligned}$$

EX14 : Soit le problème aux limites

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \quad x \in]0, 1[, \\ u(0) &= \alpha, u(1) = \beta, \end{aligned}$$

où f et c sont deux fonctions continues sur $[0, 1]$. On suppose que $c(x) \geq 0$.

- Donner un schéma de différences finies centrées à 3 points.
- Ecrire le schéma sous forme matricielle $A_h u_h = b_h$.
- Montrer que pour tout $v_h = (v_1, \dots, v_N) \in R^N$, on a

$$(A_h v_h, v_h) = \sum_{i=1}^N c_i v_i^2 + (N+1)^2 \left(v_1^2 + \sum_{i=2}^N (v_i - v_{i-1})^2 + v_N^2 \right),$$

et en déduire que A_h est inversible.

1.7 Programmation en Matlab de quelques exemples

Exemple1 : distribution de la température

$$\begin{aligned} -T''(x) &= 1, \quad x \in]0, 1[, \\ T(0) &= 0, T(1) = 0. \end{aligned}$$

```
function[k,T]=GaussSeidel(N)
disp('Résolution du problème de la distribution de la température')
disp('par la méthode des différences finies centrées à 3 points')
disp('-T''(x)=1 sur ]0,1[ avec T(0)=0, T(1)=0')
disp('par la méthode itérative de Gauss Seidel')
h=1/(N+1); % h pas de la discrétisation
A=zeros(N,N);b=zeros(N,1); T=zeros(N,1);T1=zeros(N,1);X=zeros(N,1) ;
for i=1:N
    A(i,i)=2;
    b(i)=1;
end
for i=1:N-1
    A(i,i+1)=-1; A(i+1,i)=-1;
end
A=1/(h^2)*A;
k=0; kmax=10000; % kmax nombre d'itération maximale
% Résolution du système linéaire AT=b par la méthode de Gauss Seidel
while (k<kmax)
    for i=1:N
        S1=0; S2=0;
        for j=1:i-1
```

```
        S1=S1+A(i,j)*T(j);
    end
    for j=i+1:N
        S2=S2+A(i,j)*T(j);
    end
    T(i)=1/A(i,i)*(b(i)-S1-S2);
end
%TEST DE CONVERGENCE
erreur=abs(T-T1);
if erreur<1e-06
    break
else
    k=k+1;
    T1=T;
end
end
disp('matrice A '), A
disp('vecteur b '),b'
% Courbe de la solution numérique T
for i=1:N
    X(i)=i*h;
end
X=[0;X;1]; T=[0;T;0];
plot(X,T,'-*b'),grid on,
title('Solution numérique T')
end
```

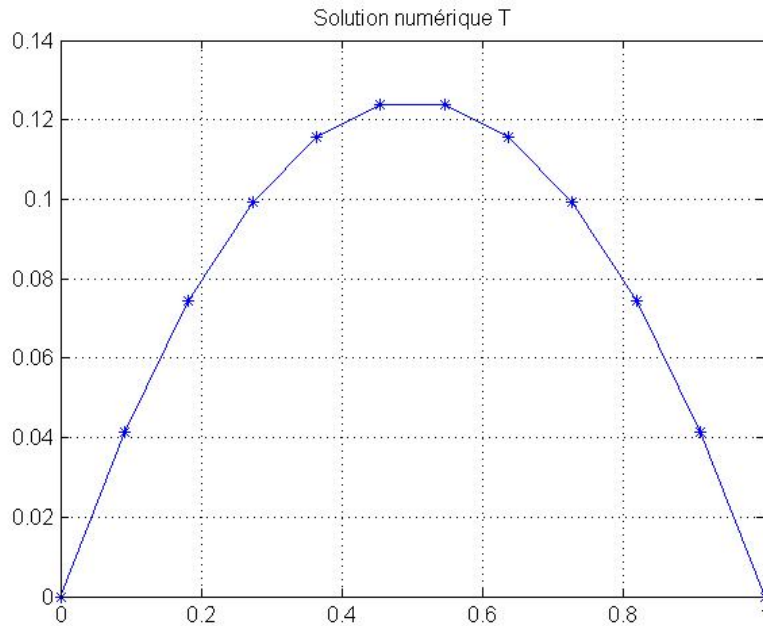


FIGURE 1.1 – Courbe de la solution approchée $N = 10, h = 1/11$

$$A = \begin{pmatrix} 242 & -121 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -121 & 242 & -121 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -121 & 242 & -121 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -121 & 242 & -121 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -121 & 242 & -121 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -121 & 242 & -121 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -121 & 242 & -121 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -121 & 242 & -121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -121 & 242 & -121 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -121 & 242 \end{pmatrix}$$

$$b = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$k = 113$$

$$T = 0 \quad 0.0413 \quad 0.0744 \quad 0.0992 \quad 0.1157 \quad 0.1240 \quad 0.1240 \quad 0.1157 \quad 0.0992 \quad 0.0744 \quad 0.0413 \quad 0$$

Exemple2 : Equation de Laplace

```
function[k,T]=Laplace1(N,M)
disp('Résolution d''un problème aux limites en dimension 2')
disp('par la méthode des différences finies centrées à 5 points')
disp('-delta.T(x,y)=0 sur ]0,L[*]0,l[')
disp('avec T(x,0)=0, T(0,y)=0,T(x,l)=0,T(L,y)=100')
disp('par la méthode itérative de JACOBI')
L=20; l=10; % les dimensions du rectangles
h1=L/(N+1);h2=l/(M+1); % h1 et h2 pas de la discrétisation
b=1/h1^2; d=1/h2^2; a=2*(b+d);
% Déclarations des matrices et des vecteurs
C=zeros(N*M,N*M);A=zeros(N,N); D=zeros(N,N);B1=zeros(N,1);B=zeros(N*M,1);
T=zeros(N*M,1);T1=zeros(N*M,1);X=zeros(N+2,1);Y=zeros(M+2,1);
% calcul des matrices A, D, C
for i=1:N
    A(i,i)=a;
    D(i,i)=-d;
end
for i=1:N-1
    A(i,i+1)=-b; A(i+1,i)=-b;
end
for j=1:M
    C(N*(j-1)+1:N*j,N*(j-1)+1:N*j)=A;
end
for j=1:M-1
    C(N*(j-1)+1:N*j, N*j+1:N*(j+1))=D;
```

Chapitre 1. Equations elliptiques : Problème aux limites en dimension un et deux

```
C(N*j+1:N*(j+1), N*(j-1)+1:N*j)=D;
end
% calcul du vecteur de droite B
B1(N,1)=100;
for j=1:M
    B(N*(j-1)+1:N*j,1)=B1;
end
C=h1^2*C;
kmax=1000;k=0; % kmax nombre d'itération maximale
% Résolution du système linéaire CT=B par la méthode de Jacobi
while (k<kmax)
    for i=1:N*M
        S1=0; S2=0;
        for j=1:i-1
            S1=S1+C(i,j)*T1(j);
        end
        for j=i+1:N*M
            S2=S2+C(i,j)*T(j);
        end
        T(i)=1/C(i,i)*(B(i)-S1-S2);
    end
    %TEST DE CONVERGENCE
    erreur=abs(T-T1);
    if erreur<1e-06
        break
    else
```

```
        k=k+1;
        T1=T;
    end
end
disp('matrice: '),A,D, C
disp('vecteur de droite B: '),B'
disp('itération maximale: '),k;
disp('vecteur solution T: '), T'
% Surface de la solution numérique T(x,y)
[X,Y] = meshgrid(0:h1:L, 0:h2:1);
T=reshape(T,N,M);
T=[zeros(N,1),T,zeros(N,1)];
T=[zeros(M+2,1)';T;100*ones(M+2,1)'];
T=T';
figure(1), surf1(X,Y,T)
xlabel('axes des X'); ylabel('axes des Y'); zlabel('axes des z')
title(' Surface de la solution numérique T(x,y)')
end
```

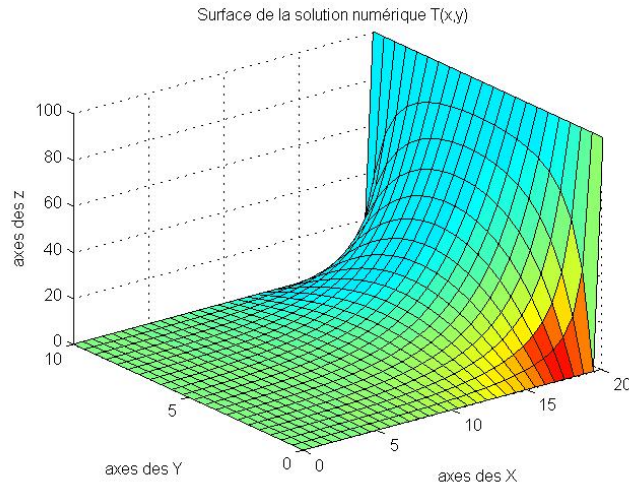


FIGURE 1.2 – Surface de la solution approchée(équation de Laplace) $N = 30, M = 20, h_1 = 20/31, h_2 = 10/21$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 10 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 10 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 10 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 10 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 10 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 10 & -1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 10 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 10 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Pour $N=4, M=4$

$$T = \begin{pmatrix} 0.6115 & 2.1677 & 7.1657 & 24.7218 & 0.9868 & 3.4749 & 11.1918 & 35.0132 \\ 0.9868 & 3.4749 & 11.1918 & 35.0132 & 0.6115 & 2.1677 & 7.1657 & 24.7218 \end{pmatrix}$$

Exemple3 : Equation de Poisson

```
function[k,T]=Poisson1(N,M)

disp('Résolution d'un problème aux limites en dimension 2')
disp('par la méthode des différences finies centrées à 5 points')
disp('-delta.T(x,y)=f(x,y) sur ]0,L[*]0,1[')
disp('avec T(x,0)=0, T(0,y)=0,T(x,1)=0,T(L,y)=0')
disp('par la méthode itérative de Gauss Seidel')

L=1; l=1; % les dimensions du rectangles
h1=L/(N+1);h2=1/(M+1); % h1 et h2 pas de la discrétisation
b=1/h1^2; d=1/h2^2; a=2*(b+d);

% Déclarations des matrices et des vecteurs
A=zeros(N*M,N*M);C=zeros(N,N); D=zeros(N,N);B=zeros(N*M,1);
T=zeros(N*M,1);T1=zeros(N*M,1);X=zeros(N+2,1);Y=zeros(M+2,1);

% calcul des matrices C, D, A
C=toeplitz([a -b zeros(1,N-2)]);
D=-d*diag(ones(N,1));

% for i=1:N
%   C(i,i)=a;
%   D(i,i)=-d;
% end

% for i=1:N-1
%   C(i,i+1)=-b; C(i+1,i)=-b;
% end

for j=1:M
A(N*(j-1)+1:N*j,N*(j-1)+1:N*j)=C;
end
```

Chapitre 1. Equations elliptiques : Problème aux limites en dimension un et deux

```
for j=1:M-1
    A(N*(j-1)+1:N*j, N*j+1:N*(j+1))=D;
    A(N*j+1:N*(j+1), N*(j-1)+1:N*j)=D;
end

% calcul du vecteur de droite B
for i=1:N
    for j=1:M
        x(i,j)=i*h1;
        y(i,j)=j*h2;
        ff=10*sin(pi*x).*sin(pi*y);
    end
end

B=ff(:);

kmax=1000;k=0; % kmax nombre d'itération maximale
% Résolution du système linéaire CT=B par la méthode de Gauss Seidel
while (k<kmax)
    for i=1:N*M
        S1=0; S2=0;
        for j=1:i-1
            S1=S1+A(i,j)*T(j);
        end
        for j=i+1:N*M
            S2=S2+A(i,j)*T(j);
        end
        T(i)=1/A(i,i)*(B(i)-S1-S2);
    end
end
```

```
%TEST DE CONVERGENCE
erreur=abs(T-T1);
if erreur<1e-06
    break
else
    k=k+1;
    T1=T;
end
end
%disp('matrice: '), C;D;A;
%disp('vecteur de droite B: '),B'
% Surface de la solution numérique T(x,y)
[X,Y] = meshgrid(0:h1:L, 0:h2:1);
T=reshape(T,N,M);
T=[zeros(N,1),T,zeros(N,1)];
T=[zeros(M+2,1)';T;zeros(M+2,1)'];
T=T';
figure(1), surf(X,Y,T), grid on
xlabel('axes des X'); ylabel('axes des Y'); zlabel('axes des z')
title(' Surface de la solution numérique T(x,y)')
end
```

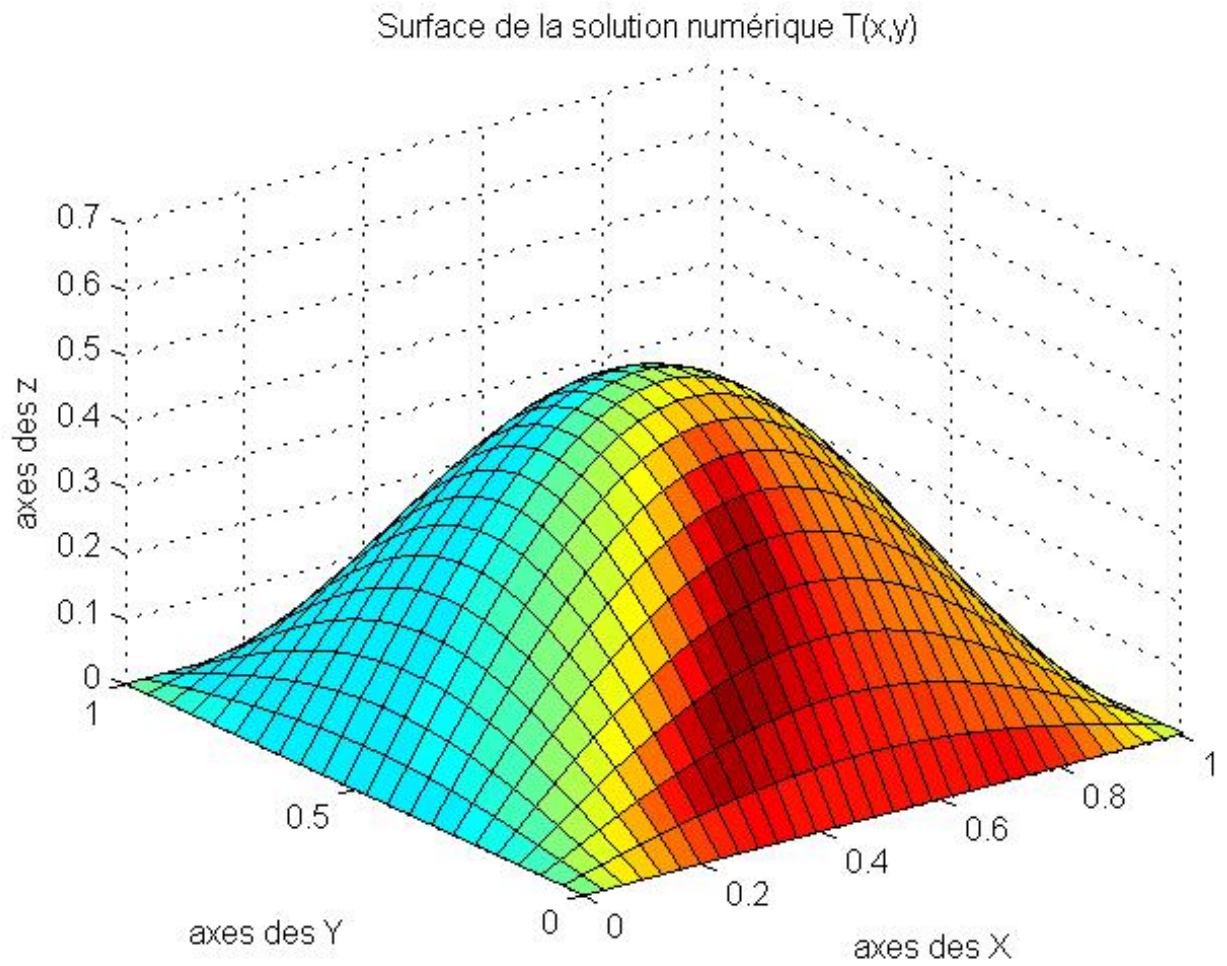


FIGURE 1.3 – Surface de la solution approchée(équation de Poisson) $N = 30, M = 20, h_1 = 1/31, h_2 = 1/21$

Chapitre 2

Equations paraboliques

2.1 Equation de la chaleur en dimension un : les schémas implicites et explicites

On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x), \quad \forall t \in]0, T[, x \in]0, 1[, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad \forall t \geq 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \forall x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (2.1)$$

où l'on a pris pour simplifier des conditions aux bord nulles. Il s'agit de l'équation de la chaleur en dimension 1 en espace. Cet exemple est typique de la situation générale des problèmes paraboliques. On distingue deux grandes familles d'approximations par différences finies : **les schémas explicites et les schémas implicites.**

2.1.1 Maillage, les conditions initiales et les conditions aux bord

Dans toute la suite, on supposera pour simplifier que la condition initiale est compatible avec les conditions aux bords : $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

On va chercher à calculer une solution approchée en un nombre fini de points (t_j, x_i) du domaine espace-temps $[0, T] \times [0, 1]$. On va se limiter au cas le plus simple du **maillage régulier** : Soient N, M deux entiers fixés. On pose

$$x_i = ih, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N+1\}, \quad \text{où } h = \frac{1}{N+1},$$
$$t_j = j\Delta t, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, M+1\}, \quad \text{où } \Delta t = \frac{T}{M+1},$$

En particulier, $x_0 = 0, x_{N+1} = 1, t_0 = 0, t_{M+1} = T$. Les points (t_j, x_i) sont alors les points d'intersection d'une "**grille**" régulière en espace-temps.

L'approximation par différences finies consiste alors à chercher une approximation, notée $u_i^{(j)}$ de $u(t_j, x_i)$. Les valeurs approchées aux points du maillage au bord du domaine et en $t = 0$ sont données par la valeur exacte - donnée - de la fonction u :

$$u_0^{(j)} = u_{N+1}^{(j)} = 0, \quad \forall j \in \{0, \dots, M+1\}, \quad (2.2)$$

$$u_i^{(0)} = u_0(x_i), \quad \forall i \in \{0, \dots, N + 1\}. \quad (2.3)$$

Ceci donne $N(M + 1)$ inconnues à déterminer, les $u_i^{(j)}$ pour $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq j \leq M + 1$. Les équations correspondantes sont obtenues en approchant les dérivées partielles dans l'EDP par des quotients différentiels. On a déjà vu que le terme de la dérivée seconde pouvait être approcher par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j, x_i) \simeq \frac{u(t_j, x_{i+1}) - 2u(t_j, x_i) + u(t_j, x_{i-1}))}{h^2} \simeq \frac{u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)}}{h^2},$$

schéma à trois points pour la dérivée seconde. Comme on l'a vu dans le chapitre I, plusieurs choix sont possibles pour l'approximation de la dérivée en temps. Chacun de ces choix conduit à une famille de schémas distincts.

2.1.2 Le schéma explicite à 3 points pour la dérivée seconde

La première possibilité est d'utiliser l'approximation décentré à droite

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_i) \simeq \frac{u(t_{j+1}, x_i) - u(t_j, x_i)}{\Delta t} \simeq \frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t}.$$

On obtient alors le schéma suivant

$$\frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)}}{h^2} = f(x_i, t_j), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{0, \dots, M\},$$

soit $N(M + 1)$ équations pour $N(M + 1)$ inconnues. On note que les conditions aux limites (2.2) et (2.3) doivent être connues pour résoudre ces équations, et que l'indice du temps j doit varier de 0 à M .

Il est commode de réécrire ce système vectoriellement : on introduit la notation

$$U^{(j)} = \begin{pmatrix} u_1^{(j)} \\ \vdots \\ u_N^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \forall j \in \{0, \dots, M + 1\}.$$

Le vecteur $U^{(0)}$ est donné par les conditions initiales, et le schéma précédent s'écrit

$$\frac{U^{(j+1)} - U^{(j)}}{\Delta t} + A_h^{(0)} U^{(j)} = C^{(j)}, \quad \forall j \in \{0, \dots, M\}, \quad (2.4)$$

où la matrice $A_h^{(0)}$ à été définie dans l'expression (1.7) du chapitre I, et

$$C^{(j)} = \begin{pmatrix} f(t_j, x_1) \\ \vdots \\ f(t_j, x_N) \end{pmatrix}, \quad \forall j \in \{0, \dots, M\}.$$

Ce système peut également se réécrire sous la forme

$$U^{(j+1)} = (Id - \Delta t A_h^{(0)})U^{(j)} + \Delta t C^{(j)}, \quad \forall j \in \{0, \dots, M\}, \quad (2.5)$$

où on a utilisé la notation Id pour la matrice identité.

Cette équation justifie le nom **explicite** pour ce schéma, puisqu'il permet de calculer la valeur approchée au temps t_{j+1} par simple produit de matrice avec la valeur approchée au temps t_j . En particulier, aucune inversion de matrice ou résolution de système linéaire n'est nécessaire pour le calcul.

2.1.3 Le schéma implicite à 3 points pour la dérivée seconde

On aurait pu approcher la dérivée partielle en temps par l'approximation décentré à gauche

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_i) \simeq \frac{u(t_j, x_i) - u(t_{j-1}, x_i)}{\Delta t} \simeq \frac{u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)}}{\Delta t}.$$

On obtient alors le schéma suivant

$$\frac{u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)}}{h^2} = f(x_i, t_j), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, M+1\},$$

couplé aux mêmes conditions initiales que le schéma explicite (noter que cette fois l'indice j varie de 1 à $M+1$). Vectoriellement, on obtient

$$\frac{U^{(j)} - U^{(j-1)}}{\Delta t} + A_h^{(0)}U^{(j)} = C^{(j)}, \quad \forall j \in \{1, \dots, M+1\},$$

où les $C^{(j)}$ sont définis comme plus haut, ce qui se réécrit

$$U^{(j)} = (Id + \Delta t A_h^{(0)})^{-1}U^{(j-1)} + \Delta t (Id + \Delta t A_h^{(0)})^{-1}C^{(j)}, \quad \forall j \in \{1, \dots, M+1\}. \quad (2.6)$$

On remarque que la matrice $(Id + \Delta t A_h^{(0)})$ est symétrique définie positive - et donc inversible - puisque $A_h^{(0)}$ est symétrique définie positive. Ce schéma est dit **implicite** puisque, contrairement au schéma explicite, sa résolution nécessite la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps (où le calcul initial de l'inverse de la matrice $(Id + \Delta t A_h^{(0)})$, utilisé ensuite à chaque pas de temps). La résolution du schéma implicite est donc plus coûteuse que le schéma explicite. Cependant, comme on le verra plus loin, ce coût en temps de calcul est largement compensé par la meilleure stabilité du schéma.

2.1.4 Le schéma saute-mouton ou le schéma de Richardson

Tous les schémas imaginables ne sont pas nécessairement bons, comme le montre l'exemple suivant : on pourrait chercher à améliorer la précision en temps en utilisant l'approximation d'ordre 2 de la dérivée en temps

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_i) \simeq \frac{u(t_{j+1}, x_i) - u(t_{j-1}, x_i)}{2\Delta t} \simeq \frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j-1)}}{2\Delta t}.$$

On obtient alors le schéma

$$\frac{U^{(j+1)} - U^{(j-1)}}{2\Delta t} + A_h^{(0)} U^{(j)} = C^{(j)}, \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}, \quad (2.7)$$

qui est explicite en temps, puisque $U^{(j+1)}$ s'exprime directement en fonction de $U^{(j)}$ et $U^{(j-1)}$.

On note qu'il est nécessaire pour ce schéma de connaître $U^{(0)}$ et $U^{(1)}$. Le précalcul de $U^{(1)}$ peut par exemple être fait en utilisant un pas en temps de l'une des méthodes précédentes.

Ce schéma, appelé **schéma saute-mouton** ou **schéma de Richardson**, est à la fois **explicite** et **à priori d'ordre 2 en temps**. Cependant, comme on le verra plus loin, il est toujours instable, et donc numériquement inutilisable.

2.2 Consistance, stabilité et convergence

Les trois schémas précédents peuvent s'écrire sous la forme générale

$$B_1 U^{(j+1)} + B_0 U^{(j)} + B_{-1} U^{(j-1)} = C^{(j)}, \quad (2.8)$$

Chapitre 2. Equations paraboliques

avec B_1 inversible où $B_1 = 0$ et B_0 inversible. Pour le schéma explicite, on a

$$B_1 = \frac{1}{\Delta t} Id, \quad B_0 = -\frac{1}{\Delta t} Id + A_h^{(0)}, \quad B_{-1} = 0.$$

Pour le schéma implicite, on a

$$B_1 = 0, \quad B_0 = \frac{1}{\Delta t} Id + A_h^{(0)}, \quad B_{-1} = -\frac{1}{\Delta t} Id.$$

Pour le schéma saute-mouton, on a

$$B_1 = \frac{1}{2\Delta t} Id, \quad B_0 = A_h^{(0)}, \quad B_{-1} = -\frac{1}{2\Delta t} Id.$$

L'étude de la convergence de ces schémas est basé sur les propriétés de consistance et stabilité, définies ci-dessous pour le schéma général (2.8).

On pourrait bien sur imaginer des schémas faisant intervenir des indices en temps plus grands que $j + 1$ et plus petits que $j - 1$. Les définitions suivantes s'étendraient sans difficulté à ces schémas.

2.2.1 Consistance

La définition suivante étend celle de la section (1.3.3)

Définition 2.1. *On appelle **erreur de consistance à l'instant t_j** du schéma (2.8) le vecteur $\varepsilon_h(u)^{(j)}$ de R^N défini par*

$$\varepsilon_h(u)^{(j)} = B_1(\pi_h(u))(t_{j+1}) + B_0(\pi_h(u))(t_j) + B_{-1}(\pi_h(u))(t_{j-1}) - C^{(j)},$$

où

$$\pi_h(u)(t) = \begin{pmatrix} u(t, x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u(t, x_N) \end{pmatrix}.$$

On dit que le schéma est **consistant pour la norme $\|\cdot\|$** de R^N si

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|\varepsilon_h(u)^{(j)}\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } \Delta t \rightarrow 0 \text{ et } h \rightarrow 0.$$

Chapitre 2. Equations paraboliques

Si de plus il existe un $C > 0, p > 0$ et $q > 0$ indépendants de Δt et h tels que

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|\varepsilon_h(u)^{(j)}\| \leq C((\Delta t)^p + h^q),$$

on dit que **le schéma est consistant d'ordre p en temps et q en espace** pour la norme $\|\cdot\|$.

Notons que la limite $\Delta t \rightarrow 0$ correspond à la limite $M \rightarrow \infty$, et la limite $h \rightarrow 0$ à $N \rightarrow \infty$.

On peut alors montrer la :

Proposition 2.1. *Supposons que la solution u du problème (2.1) est C^2 par rapport à la variable t et C^4 par rapport à la variable x . Alors les schémas explicites et implicites sont consistants d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Si de plus u est C^3 par rapport à la variable t , alors le schéma saute-mouton est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.*

Preuve. Les trois résultats se démontrent de façon similaire. On ne détaille la preuve que pour le schéma explicite. En utilisant le fait que

$$f(t_j, x_i) = \frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_i) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j, x_i),$$

il découle de la définition de l'erreur de consistance que

$$\varepsilon_h(u)_i^{(j)} = E_i - F_i,$$

où l'on a posé

$$E_i = \frac{u(t_{j+1}, x_i) - u(t_j, x_i)}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_i),$$
$$F_i = \frac{u(t_j, x_{i+1}) - 2u(t_j, x_i) + u(t_j, x_{i-1}))}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j, x_i).$$

Par un développement de Taylor par rapport à la variable temps (x_i étant fixé), on obtient

$$u(t_{j+1}, x_i) = u(t_j, x_i) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\theta, x_i),$$

où $\theta \in]t_j, t_{j+1}[$ de sorte que

$$E_i = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\theta, x_i).$$

Concernant F_i , on montre de même que

$$F_i = \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_j, \xi_1) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_j, \xi_2) \right),$$

où $\xi_1 \in]x_{i-1}, x_i[$ et $\xi_2 \in]x_i, x_{i+1}[$. Compte-tenu des hypothèses de régularité, on en déduit facilement la majoration de l'erreur de consistance. \square

2.2.2 Stabilité et convergence

Du point de vue numérique, la propriété fondamentale d'un schéma est celle de la convergence.

Définition 2.2. *On considère le schéma (2.8) et on suppose que les données initiales vérifient : si $B_1 = 0$ où $B_{-1} = 0$ (par exemple pour les schémas explicite et implicite), supposons*

$$\|U^{(0)} - (\pi_h u)(0)\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } \Delta t, h \rightarrow 0,$$

si $B_1 \neq 0$ et $B_{-1} \neq 0$ (par exemple pour le schéma saute-mouton), supposons

$$\|U^{(0)} - (\pi_h u)(0)\| + \|U^{(1)} - (\pi_h u)(t_1)\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } \Delta t, h \rightarrow 0.$$

On dit alors que le schéma (2.8) est convergent (pour la norme $\|\cdot\|$ en espace) si

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|U^{(j)} - (\pi_h u)(t_j)\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } \Delta t, h \rightarrow 0.$$

En plus de la consistance, la propriété de **stabilité** joue un rôle fondamentale dans l'étude de la convergence des schémas d'approximations des EDP linéaires.

Définition 2.3. *On dit que le schéma (2.8) est stable pour la norme $\|\cdot\|$ dans R^N s'il existe deux constantes positives $C_1(T)$ et $C_2(T)$ indépendantes de Δt et h telles que*

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|U^{(j)}\| \leq C_1(T) \|U^{(0)}\| + C_2(T) \max_{0 \leq j \leq M+1} \|C^{(j)}\|,$$

si $B_1 = 0$ où $B_{-1} = 0$, où bien

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|U^{(j)}\| \leq C_1(T) \left(\|U^{(0)}\| + \|U^{(1)}\| \right) + C_2(T) \max_{0 \leq j \leq M+1} \|C^{(j)}\|,$$

si $B_1 \neq 0$ et $B_{-1} \neq 0$ et ceci quelles que soient les données initiales $U^{(0)}$ (et $U^{(1)}$) et les termes sources $C^{(j)}$.

Le théorème fondamental suivant donne le lien entre convergence, consistance et stabilité.

Théorème 2.1. (Théorème de Lax). *Le schéma (2.8) est convergent si et seulement s'il est consistant et stable.*

Preuve. Nous allons démontrer l'implication utile en pratique (condition nécessaire) : supposons que le schéma est stable et consistant, et montrons qu'il est convergent. En faisant la différence entre la formule de l'erreur de consistance définition 2.1 et l'équation (2.8), on obtient

$$B_1 e^{(j+1)} + B_0 e^{(j)} + B_{-1} e^{(j-1)} = -\varepsilon_h(u)^{(j)},$$

où on a noté $e^{(j)} = U^{(j)} - (\pi_h u)(t_j)$ l'erreur à l'instant t_j . Le schéma étant stable, on a

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|e^{(j)}\| \leq C_1(T) \|e^{(0)}\| + C_2(T) \max_{0 \leq j \leq M+1} \|\varepsilon_h(u)^{(j)}\|,$$

si $B_1 = 0$ ou $B_{-1} = 0$ (et similairement dans le cas contraire). Lorsque $\Delta t, h \rightarrow 0$, par hypothèse, $\|e^{(0)}\| \rightarrow 0$, et par consistance du schéma $\max_{0 \leq j \leq M+1} \|\varepsilon_h(u)^{(j)}\| \rightarrow 0$, ce qui montre la convergence du schéma. \square

Grâce à ce résultat, il est maintenant facile d'étudier la convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ du schéma explicite.

2.2.3 Convergence du schéma explicite

Proposition 2.2. *Sous la condition*

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \tag{2.9}$$

le schéma explicite (2.4) est convergent en norme $\|\cdot\|_\infty$.

La condition suffisante (2.9) s'appelle **condition de C.F.L** (Courant, Friedrichs, Lewy, 1928). On peut en fait montrer que c'est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence du schéma, ce qui montre que la convergence d'un schéma ne peut pas nécessairement être assurée quelle que soit la manière dont Δt et h tendent vers 0. C'est une condition très contraignante d'un point de vue pratique, puisque si l'on souhaite avoir une bonne précision en

espace, il est nécessaire de choisir h petit, ce qui impose un choix de Δt nettement plus petit. Par exemple, le choix $h = 10^{-3}$ impose Δt de l'ordre 10^{-6} . Le coût en temps de calcul par rapport à un code où l'on peut choisir $\Delta t = 10^{-3}$ (par exemple, le schéma implicite, voir plus loin) est 1000 fois supérieur.

Preuve. D'après le théorème de Lax et la proposition 2.1, il suffit de vérifier la stabilité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ du schéma. D'après l'équation (2.5), on a

$$u_i^{(j+1)} = (1 - 2r)u_i^{(j)} + ru_{i+1}^{(j)} + ru_{i-1}^{(j)} + \Delta t f(t_j, x_i),$$

où l'on a posé $r = \frac{\Delta t}{h^2}$. Le point clé de la preuve est que, sous l'hypothèse (2.9), le membre de droite de cette équation est une combinaison convexe de $u_{i-1}^{(j)}, u_i^{(j)}$ et $u_{i+1}^{(j)}$ (plus un terme indépendant des $u_i^{(j)}$). On en déduit

$$\begin{aligned} |u_i^{(j+1)}| &\leq (1 - 2r)|u_i^{(j)}| + r|u_{i+1}^{(j)}| + r|u_{i-1}^{(j)}| + \Delta t |f(t_j, x_i)| \\ &\leq (1 - 2r + r + r)\|U^{(j)}\|_\infty + \Delta t \|C^{(j)}\|_\infty, \end{aligned}$$

d'où en déduit

$$\|U^{(j+1)}\|_\infty \leq \|U^{(j)}\|_\infty + \Delta t \max_{0 \leq j \leq M+1} \|C^{(j)}\|_\infty,$$

une récurrence évidente donne alors

$$\|U^{(j)}\|_\infty \leq \|U^{(0)}\|_\infty + j\Delta t \max_{0 \leq j \leq M+1} \|C^{(j)}\|_\infty \leq \|U^{(0)}\|_\infty + T \max_{0 \leq j \leq M+1} \|C^{(j)}\|_\infty,$$

pour tout $j \in \{0, \dots, M+1\}$, ce qui achève la démonstration de la stabilité du schéma explicite. □

2.2.4 Convergence du schéma implicite

Le schéma implicite peut s'écrire sous la forme

$$u_i^{(j-1)} = (1 + 2r)u_i^{(j)} - ru_{i+1}^{(j)} - ru_{i-1}^{(j)} - \Delta t C_i^{(j)}. \quad (2.10)$$

Chapitre 2. Equations paraboliques

Proposition 2.3. (*L^∞ -stabilité*) : Si $(u_i^{(j)})_{i=1,N}$ est une solution du Schéma (2.10), alors on

a

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|U^{(j)}\|_\infty \leq \|U^{(0)}\|_\infty + T \max_{0 \leq j \leq M+1} \|C^{(j)}\|_\infty.$$

Preuve. Soit $1 \leq i_0 \leq N$, on pose

$$u_{i_0}^{(j)} = \max_{1 \leq i \leq N} u_i^{(j)},$$

alors $u_{i_0}^{(j)} \geq u_{i_0+1}^{(j)}, u_{i_0}^{(j)} \geq u_{i_0-1}^{(j)}$,

$$\begin{aligned} u_{i_0}^{(j-1)} &= (1 + 2r)u_{i_0}^{(j)} - ru_{i_0+1}^{(j)} - ru_{i_0-1}^{(j)} - \Delta t C_{i_0}^{(j)} \\ &\geq (1 + 2r)u_{i_0}^{(j)} - ru_{i_0}^{(j)} - ru_{i_0}^{(j)} - \Delta t C_{i_0}^{(j)} \\ &= u_{i_0}^{(j)} - \Delta t C_{i_0}^{(j)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$u_{i_0}^{(j)} \leq u_{i_0}^{(j-1)} + \Delta t C_{i_0}^{(j)}, \quad 1 \leq i_0 \leq N,$$

donc

$$\max_i u_i^{(j)} \leq \max_i u_i^{(j-1)} + \Delta t C_i^{(j)},$$

par récurrence sur j , on a

$$\max_i u_i^{(j)} \leq \max_i u_i^{(0)} + \Delta t \sum_{l=1}^j C_i^{(l)}. \quad (2.11)$$

De même, soit $1 \leq i_1 \leq N$, on pose

$$u_{i_1}^{(j)} = \min_{1 \leq i \leq N} u_i^{(j)},$$

alors $u_{i_1}^{(j)} \leq u_{i_1+1}^{(j)}, u_{i_1}^{(j)} \leq u_{i_1-1}^{(j)}$,

$$\begin{aligned} u_{i_1}^{(j-1)} &\leq (1 + 2r)u_{i_1}^{(j)} - ru_{i_1+1}^{(j)} - ru_{i_1-1}^{(j)} - \Delta t C_{i_1}^{(j)} \\ &= u_{i_1}^{(j)} - \Delta t C_{i_1}^{(j)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$u_{i_1}^{(j)} \geq u_{i_1}^{(j-1)} + \Delta t C_{i_1}^{(j)}, \quad 1 \leq i_1 \leq N,$$

donc

$$\min_i u_i^{(j)} \leq \min_i u_i^{(j-1)} + \Delta t C_i^{(j)},$$

par récurrence sur j , on a

$$\min_i u_i^{(j)} \geq \min_i u_i^{(0)} + \Delta t \sum_{l=1}^j C_i^{(l)}. \quad (2.12)$$

De (2.11) et (2.12), on en déduit que

$$\begin{aligned} \|U^{(j)}\|_\infty &\leq \|U^{(0)}\|_\infty + \Delta t \sum_{l=1}^j |C_i^{(l)}| \\ &\leq \|U^{(0)}\|_\infty + \Delta t \sum_{l=1}^j \|C^{(l)}\|_\infty \\ &\leq \|U^{(0)}\|_\infty + j\Delta t \max_{0 \leq l \leq M+1} \|C^{(l)}\|_\infty \\ &\leq \|U^{(0)}\|_\infty + T \max_{0 \leq l \leq M+1} \|C^{(l)}\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|U^{(j)}\|_\infty \leq \|U^{(0)}\|_\infty + T \max_{0 \leq j \leq M+1} \|C^{(j)}\|_\infty.$$

Ce qui montre la stabilité du schéma implicite. □

Théorème 2.2. Soit $e^{(j)}$ l'erreur de convergence définie par

$$e_i^{(j)} = u(t_j, x_i) - u_i^{(j)}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

Alors

$$\|e^{(j)}\|_\infty \leq \|e^{(0)}\|_\infty + TC(\Delta t + h^2),$$

si $\|e^{(0)}\|_\infty \rightarrow 0$ quand $\Delta t, h \rightarrow 0$, le schéma implicite est donc convergent.

Preuve. En retranchant l'erreur de consistance de l'expression du schéma implicite, on obtient

$$e_i^{(j-1)} = (1 + 2r)e_i^{(j)} - re_{i+1}^{(j)} - re_{i-1}^{(j)} - \Delta t \varepsilon_h(u)_i^{(j)},$$

par le même raisonnement de la proposition 2.3, on déduit que

$$\begin{aligned}
 \|e^{(j)}\|_\infty &\leq \|e^{(0)}\|_\infty + \Delta t \sum_{l=1}^j |\varepsilon_h(u)_i^{(l)}| \\
 &\leq \|e^{(0)}\|_\infty + \Delta t \sum_{l=1}^j \max_{0 \leq i \leq N+1} |\varepsilon_h(u)_i^{(l)}| \\
 &\leq \|e^{(0)}\|_\infty + \Delta t \sum_{l=1}^j \|\varepsilon_h(u)^{(l)}\|_\infty \\
 &\leq \|e^{(0)}\|_\infty + \Delta t \sum_{l=1}^j C(\Delta t + h^2) \\
 &\leq \|e^{(0)}\|_\infty + j\Delta t C(\Delta t + h^2) \\
 &\leq \|e^{(0)}\|_\infty + TC(\Delta t + h^2).
 \end{aligned}$$

D'où la convergence du schéma implicite. □

Remarque 2.1. *Le schéma implicite est donc stable sans conditions liant les pas de temps et d'espace : il est dit "inconditionnellement stable".*

2.2.5 Instabilité du schéma Saute-Mouton

On peut montrer que le schéma Saute-Mouton est d'ordre 2 en temps et en espace, en supposant $u \in \mathcal{C}^3$ pour la variable t et $u \in \mathcal{C}^4$ pour la variable x . Malheureusement il est totalement instable, un tel schéma doit être rejeté car il n'est pas convergent. On peut le modifier pour le rendre stable, en introduisant le schéma de Dufort-Frankel, qui s'écrit

$$\frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j-1)}}{2\Delta t} - \frac{1}{h^2} \left(u_{i+1}^{(j)} - \left(u_i^{(j+1)} + u_i^{(j-1)} \right) + u_{i-1}^{(j)} \right) = f(t_j, x_i).$$

Ce schéma est consistant et inconditionnellement stable.

2.3 Schéma de Crank-Nicolson où Schéma semi-implicite

Le schéma de Crank-Nicolson est une combinaison des schémas explicite et implicite, par sommation on aura

$$\frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} - \frac{1}{2h^2} \left(u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)} \right) - \frac{1}{2h^2} \left(u_{i+1}^{(j+1)} - 2u_i^{(j+1)} + u_{i-1}^{(j+1)} \right) = \frac{f_i^{(j)} + f_i^{(j+1)}}{2},$$

pour $i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{0, \dots, M\}$,

Soit encore

$$\begin{cases} u_i^{(j+1)} = u_i^{(j)} - \frac{\Delta t}{2h^2} \left(-u_{i+1}^{(j)} + 2u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)} \right) - \frac{\Delta t}{2h^2} \left(-u_{i+1}^{(j+1)} + 2u_i^{(j+1)} - u_{i-1}^{(j+1)} \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{2} \left(f_i^{(j)} + f_i^{(j+1)} \right), \quad i = \widehat{1, N}, \quad j = \widehat{0, M}, \\ u_0^{(j)} = u_{N+1}^{(j)} = 0, \quad j = \widehat{0, M+1}, \\ u_i^{(0)} = u_0(x_i), \quad i = \widehat{0, N+1}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Sous la forme vectorielle

$$U^{(j+1)} = U^{(j)} - \Delta t A_h \left(\frac{U^{(j+1)} + U^{(j)}}{2} \right) + \Delta t F^{(j)}, \quad j = \widehat{0, M}, \quad (2.14)$$

où

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F^{(j)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_1^{(j)} + f_1^{(j+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N^{(j)} + f_N^{(j+1)} \end{pmatrix}, \quad U^{(0)} = \begin{pmatrix} u_0(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_0(x_N) \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Remarque 2.2. Le schéma de Crank-Nicolson appelé aussi schéma semi-implicite, se base sur le principe de la **méthode implicite**. Le schéma numérique est une combinaison des deux schémas explicite et implicite, c'est le schéma le plus utilisé.

Si $f = 0$, alors

$$U^{(j+1)} = \left(Id + \frac{\Delta t}{2} A_h \right)^{-1} \left(Id - \frac{\Delta t}{2} A_h \right) U^{(j)},$$

par induction sur j

$$U^{(j+1)} = \left(Id + \frac{\Delta t}{2} A_h \right)^{-j} \left(Id - \frac{\Delta t}{2} A_h \right)^j U^{(0)}.$$

Proposition 2.4. Le schéma numérique de Crank-Nicolson est L^2 – stable et consistant d'ordre 2 en temps et espace. On dit qu'il est inconditionnellement L^2 – stable. Mais, il est L^∞ – stable sous la condition $\frac{\Delta t}{h^2} \leq 1$.

Preuve.

1. **Etude de la consistance.** Posons la valeur exacte $u(t_j, x_i) = \bar{u}_i^{(j)}$. Par Taylor on a

$$\bar{u}_i^{(j+1)} = \bar{u}_i^{(j)} + k \frac{\partial \bar{u}_i^{(j)}}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial t^2} + o(k^3),$$

et

$$\frac{\bar{u}_i^{(j+1)} - \bar{u}_i^{(j)}}{k} = \frac{\partial \bar{u}_i^{(j)}}{\partial t} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial t^2} + o(k^2), \quad (2.16)$$

$$\frac{\bar{u}_{i+1}^{(j)} - 2\bar{u}_i^{(j)} + \bar{u}_{i-1}^{(j)}}{h^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial x^2} + o(h^2), \quad (2.17)$$

$$\frac{\bar{u}_{i+1}^{(j+1)} - 2\bar{u}_i^{(j+1)} + \bar{u}_{i-1}^{(j+1)}}{h^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j+1)}}{\partial x^2} + o(h^2) = \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial x^2} + k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial x^2} \right) + o(k^2) + o(h^2), \quad (2.18)$$

des équations (2.16), (2.17) et (2.18), on obtient l'ordre de l'erreur de consistance

$$\begin{aligned} \varepsilon_h(u)_i^{(j)} &= \frac{\bar{u}_i^{(j+1)} - \bar{u}_i^{(j)}}{k} - \frac{1}{2h^2} \left(\bar{u}_{i+1}^{(j)} - 2\bar{u}_i^{(j)} + \bar{u}_{i-1}^{(j)} \right) - \frac{1}{2h^2} \left(\bar{u}_{i+1}^{(j+1)} - 2\bar{u}_i^{(j+1)} + \bar{u}_{i-1}^{(j+1)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} f_i^{(j)} - \frac{1}{2} f_i^{(j+1)} \\ &= \frac{\partial \bar{u}_i^{(j)}}{\partial t} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial t^2} + o(k^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial x^2} + o(h^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial x^2} - \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + o(k^2) + o(h^2) - \frac{1}{2} f_i^{(j)} - \frac{1}{2} f_i^{(j+1)} \quad \text{où } f_i^{(j+1)} = f_i^{(j)} + k \frac{\partial}{\partial t} f_i^{(j)} + o(k^2) \\ &= \left[\frac{\partial \bar{u}_i^{(j)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial x^2} - f_i^{(j)} \right] + \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \bar{u}_i^{(j)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(j)}}{\partial x^2} - f_i^{(j)} \right] + o(k^2) + o(h^2) \\ &= o(k^2) + o(h^2). \end{aligned}$$

2. Etude de la stabilité.

□

2.4 Autre écriture d'un schéma numérique

Un schéma numérique peut être écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} U^{(j+1)} = BU^{(j)} + \Delta t D^{(j)}, & j \in \{0, \dots, M\}, \\ U^{(0)} & \text{donnée,} \end{cases} \quad (2.19)$$

Chapitre 2. Equations paraboliques

La matrice B s'appelle matrice d'itération ou matrice d'amplification, elle n'est pas liée au terme source. Par exemple, pour le schéma explicite

$$B = \left(Id - \Delta t A_h^{(0)} \right), \quad D^{(j)} = C^{(j)},$$

pour le schéma implicite

$$B = \left(Id + \Delta t A_h^{(0)} \right)^{-1}, \quad D^{(j)} = \left(Id + \Delta t A_h^{(0)} \right)^{-1} C^{(j)}.$$

Le schéma saute-mouton est un schéma à 2 niveaux, on pose

$$V^{(j)} = \begin{pmatrix} U^{(j)} \\ U^{(j-1)} \end{pmatrix}, \quad \text{vecteur à } 2N \text{ composantes,}$$

alors le schéma devient à un seul niveau

$$\begin{cases} V^{(j+1)} = BV^{(j)} + \Delta t D^{(j)}, & j \in \{1, \dots, M\}, \\ V^{(1)} & \text{donnée,} \end{cases}$$

où B est une matrice de taille $2N \times 2N$ donnée par

$$B = \begin{pmatrix} -2\Delta t & Id \\ Id & 0 \end{pmatrix},$$

chacune des quatre sous-matrice étant de taille $N \times N$, le terme source $D^{(j)}$ étant le vecteur à $2N$ composantes

$$D^{(j)} = \begin{pmatrix} C^{(j)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

Proposition 2.5. *Un schéma de la forme (2.19) est stable pour la norme $\|\cdot\|$ si et seulement s'il existe une constante $C(T) > 0$, indépendante de Δt et h , telle qu'on ait*

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|B^j\| \leq C(T). \quad (2.20)$$

Preuve.

1. **Condition nécessaire.** Supposons le schéma est stable pour la norme $\|\cdot\|$. Alors, par définition, il existe deux constantes $C_1(T) > 0$ et $C_2(T) > 0$ telles que pour tout $h \in]0, h_0]$, $\Delta t \in]0, k_0]$, on ait

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|U^{(j)}\| \leq C_1(T) \|U^{(0)}\| + C_2(T) \max_{0 \leq j \leq M+1} \|C^{(j)}\|,$$

et ceci quels que soient les termes sources $C^{(j)}$ (et la donnée initiale $U^{(0)}$), donc, en particulier, pour des termes sources nuls. Prenons $C^{(j)} = 0$ pour tout j : par récurrence immédiate dans (2.19), on a alors : $U^{(j)} = B^j U^{(0)}$ de sorte que

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|B^j U^{(0)}\| \leq C_1(T) \|U^{(0)}\|,$$

et ceci quelle que soit la donnée initiale $U^{(0)}$. On en déduit donc, en notant $\|\cdot\|$ la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$

$$\|B^j\| = \sup_{U^{(0)} \in \mathbb{R}^N - \{0\}} \frac{\|B^j U^{(0)}\|}{\|U^{(0)}\|} \leq C_1(T),$$

et ceci pour tout $j \in \{0, \dots, M+1\}$, ce qui montre (2.20), avec $C(T) = C_1(T)$.

2. **Condition suffisante.** Supposons (2.20) satisfaite ; on se propose de montrer que le schéma (2.19) est stable. Or par récurrence on a

$$U^{(j)} = B^j U^{(0)} + \Delta t \left[C^{(j-1)} + B^1 C^{(j-2)} + \dots + B^{j-1} C^{(0)} \right].$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|U^{(j)}\| &\leq \|B^j\| \|U^{(0)}\| + \Delta t \sum_{k=0}^{j-1} \|B^{j-k-1}\| \|C^{(k)}\| \\ &\leq C(T) \|U^{(0)}\| + j \Delta t C(T) \sup_{0 \leq k \leq M+1} \|C^{(k)}\| \\ &\leq C(T) \|U^{(0)}\| + TC(T) \sup_{0 \leq k \leq M+1} \|C^{(k)}\|. \end{aligned}$$

Ce qui montre que le schéma est stable et cela termine la démonstration. □

2.5 Stabilité en norme $\|\cdot\|_h$

L'étude de la stabilité des schémas implicite et saute-mouton est plus facile en norme $\|\cdot\|_2$. Puisque les vecteurs $U^{(j)}$ appartiennent à \mathbb{R}^N , il convient de normaliser convenablement cette

norme afin de pouvoir obtenir des majorations indépendantes du choix de N (et donc de h). La normalisation correcte est la suivante : on définit la norme $\|\cdot\|_h$ par

$$\|V\|_h = h^{1/2}\|V\|_2 = \left(h \sum_{i=1}^N v_i^2 \right)^{1/2}, \quad \text{où } V = (v_i)_{1 \leq i \leq N}.$$

La norme $\|\cdot\|_h$ est l'analogie discret de la norme dans l'espace $L^2(]0, 1[)$. On remarque qu'on a l'inégalité suivante

$$\|V\|_h \leq (hN)^{1/2}\|V\|_\infty \leq \|V\|_\infty.$$

Ce qui prouve qu'une estimation de l'erreur de consistance en norme $\|\cdot\|_\infty$ est aussi une estimation pour la norme $\|\cdot\|_h$.

De la proposition (2.5) on déduit facilement le corollaire suivant.

Corollaire 2.1. *Supposons la matrice B du schéma (2.19) est normale (i.e $B.B^T = B.B^T$) de sorte que $\|B\|_h = \sqrt{\rho(B.B^T)} = \rho(B)$, rayon spectrale de la matrice B . Alors le schéma (2.19) est stable pour la norme $\|\cdot\|_h$ si et seulement s'il existe une constante $C_0 > 0$ indépendante de h et Δt , telle qu'on ait*

$$\rho(B) \leq 1 + C_0 \Delta t. \tag{2.21}$$

Remarque 2.3. *En pratique, il suffit de vérifier la condition plus restrictive $\rho(B) \leq 1$ pour garantir la convergence du schéma.*

2.6 Stabilité dans l'espace $L^2(R)$, Stabilité au sens de Von Neumann, Méthode de Fourier

2.6.1 Stabilité du schéma explicite

Reprenons l'exemple de l'équation de la chaleur avec x appartient à l'espace R tout entier, et notons u la solution du problème (2.1) avec $f = 0$ pour simplifier. On approche cette solution en chaque point (t_j, x_i) défini par : $t_j = j\Delta t$ et $x_i = ih, i \in Z$, en utilisant un schéma explicite.

On a ainsi

$$\begin{cases} \frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)}}{h^2} = 0, & \forall i \in Z, j \in \{0, \dots, M\}, \\ u_i^{(0)} = u_0(x), & \text{pour tout } i \in Z. \end{cases} \quad (2.22)$$

On peut supposer u est fonction périodique définie sur l'intervalle $]0, 1[$ et qui vérifie les conditions de périodicité

$$u(t, x + 1) = u(t, x), \forall (t, x) \in]0, T[\times]0, 1[.$$

On commence par transformer ce schéma en le rendant continu relativement à la variable $x \in R$, en notant $u^{(j)}(x)$ une approximation de $u(t_j, x)$

$$\begin{cases} \frac{u^{(j+1)}(x) - u^{(j)}(x)}{\Delta t} - \frac{u^{(j)}(x+h) - 2u^{(j)}(x) + u^{(j)}(x-h)}{h^2} = 0, & j \in \{0, \dots, M\}, \\ u^{(0)}(x) = u_0(x), & \text{pour tout } x \in R. \end{cases} \quad (2.23)$$

On se propose d'étudier la stabilité de ce schéma au sens de la norme dans l'espace $L^2(R)$. Pour cela nous écrivons le schéma (2.23) sous la forme suivante :

$$u^{(j+1)} = G(u^{(j)}),$$

où G est un opérateur linéaire (dépendant de Δt et h) défini sur $L^2(R)$ et à valeurs dans $L^2(R)$.

Par récurrence immédiate, on a

$$u^{(j)} = G^j(u^{(0)}).$$

Par analogie de la définition 2.3, nous adoptons la définition suivante

Définition 2.4. *Le schéma (2.23) est stable dans l'espace $L^2(R)$ s'il existe une constante $C(T) > 0$, indépendante de Δt et h , telle que*

$$\max_{j \in \{0, \dots, M+1\}} \|u^{(j)}\|_{L^2(R)} \leq C(T) \|u^{(0)}\|_{L^2(R)}.$$

Pour faciliter les calculs nous utilisons la transformée de Fourier relativement à la variable d'espace. Notons $\widehat{u}^{(j)}$ la transformée de Fourier de $u^{(j)}$, on a donc par définition (avec i tel que $i^2 = -1$)

$$\widehat{u}^{(j)}(\xi) = \int_R \exp(-ix\xi) u^{(j)}(x) dx.$$

Chapitre 2. Equations paraboliques

Si w est la fonction définie par $w(x) = v(x + h)$, un calcul simple montre qu'alors :

$$\widehat{w}(\xi) = \exp(ih\xi)\widehat{v}(\xi),$$

de sorte que le schéma (2.23) devient après transformée de Fourier

$$\frac{\widehat{u}^{(j+1)}(\xi) - \widehat{u}^{(j)}(\xi)}{\Delta t} - \frac{(\exp(ih\xi) - 2 + \exp(-ih\xi))\widehat{u}^{(j)}(\xi)}{h^2} = 0, \quad \forall j \in \{0, \dots, M\}.$$

Soit encore

$$\widehat{u}^{(j+1)}(\xi) = a(\xi)\widehat{u}^{(j)}(\xi), \quad (2.24)$$

où on a posé

$$a(\xi) = 1 + \frac{\Delta t}{h^2} [\exp(ih\xi) - 2 + \exp(-ih\xi)] = 1 - \frac{4\Delta t}{h^2} \sin^2\left(\frac{h\xi}{2}\right). \quad (2.25)$$

Par récurrence immédiate, on a

$$\widehat{u}^{(j)}(\xi) = [a(\xi)]^j \widehat{u}^{(0)}(\xi) = [a(\xi)]^j \widehat{u}_0(\xi). \quad (2.26)$$

Par ailleurs, si L est une application linéaire définie pour tout $v \in L^2(R)$ par $L(v) = bv$ alors

$$\|L\|_{\mathcal{L}(L^2(R), L^2(R))} = \sup_{\xi \in R} |b(\xi)|.$$

Appliquons ce résultat à L définie par $L(v) = a^j v$, on déduit de (2.26) que

$$\|L\|_{\mathcal{L}(L^2(R), L^2(R))} = \left[\sup_{\xi \in R} |a(\xi)| \right]^j.$$

Or par le théorème de Plancherel, on a

$$\|u^{(j)}\|_{L^2(R)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\widehat{u}^{(j)}\|_{L^2(R)},$$

de sorte que

$$\|G^j\|_{\mathcal{L}(L^2(R), L^2(R))} = \sup_{u^{(0)} \neq 0} \frac{\|u^{(j)}\|}{\|u^{(0)}\|} = \sup_{u^{(0)} \neq 0} \frac{\|\widehat{u}^{(j)}\|}{\|\widehat{u}^{(0)}\|} = \|L\|_{\mathcal{L}(L^2(R), L^2(R))}.$$

On obtient finalement

$$\|G^j\|_{\mathcal{L}(L^2(R), L^2(R))} = \left[\sup_{\xi \in R} |a(\xi)| \right]^j.$$

En conséquence, nous venons de montrer le résultat suivant.

Proposition 2.6. *Le schéma (2.23) est stable pour la norme dans l'espace $L^2(R)$ si et seulement si il existe une constante $C(T) > 0$, indépendante de Δt et h , telle que*

$$\left[\sup_{\xi \in R} |a(\xi)| \right]^j \leq C(T), \quad \text{pour tout } j \in \{0, \dots, M+1\}.$$

Remarque 2.4. *On pourrait montrer, comme dans la section précédente (corollaire 2.1), qu'une condition **nécessaire et suffisante de stabilité** pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(R)}$ du schéma explicite (2.23) est qu'il existe une constante $C_0 > 0$, indépendante de Δt et h , telle que*

$$\text{pour tout } \xi \in R, \quad |a(\xi)| \leq 1 + C_0 \Delta t. \quad (2.27)$$

Remarque 2.5. *Comme dans la remarque 2.3, nous préférons adopter la condition plus restrictive suivante :*

$$\sup_{\xi \in R} |a(\xi)| \leq 1,$$

*qui est en fait une condition **suffisante de stabilité** pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(R)}$.*

Définition 2.5. (*Stabilité au sens de Von Neumann*). *Soit un schéma qui par la transformée de Fourier s'écrit sous la forme*

$$\widehat{u}^{(j+1)}(\xi) = a(\xi) \widehat{u}^{(j)}(\xi), \quad \widehat{u}^{(0)} \text{ donnée.}$$

Le coefficient $a(\xi)$ s'appelle coefficient d'amplification du schéma et on dit que ce schéma est stable au sens de Von Neumann si on a

$$\sup_{\xi \in R} |a(\xi)| \leq 1.$$

On a alors la :

Proposition 2.7. *Le schéma (2.23) est stable au sens de Von Neumann si et seulement si*

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Chapitre 2. Equations paraboliques

Preuve. Reprenons l'expression (2.25) de $a(\xi)$. On a clairement : $a(\xi) \leq 1$, et ceci pour tout $\xi \in R$. Maintenant $a(\xi) \geq -1$ si et seulement si

$$\frac{2\Delta t}{h^2} \sin^2\left(\frac{h\xi}{2}\right) \leq 1,$$

et cette inégalité a lieu pour tout ξ si et seulement si

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

□

2.7 Exercices

EX1 : Soit le problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x, \quad \forall x \in]0, 2[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad \forall t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = 100x, \quad \forall x \in]0, 1[, \\ u(x, 0) = 100(2 - x), \quad \forall x \in]1, 2[, \end{cases} \quad (2.28)$$

Fixer Δt par la relation de convergence : $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1/2$ sachant que $\Delta x = 0.5$.

- Discrétiser le problème par la méthode explicite.
- Trouver les valeurs numériques de la solution approchée.
- Etudier l'erreur de consistance.

la solution exacte est donnée par

$$u(x, t) = 800 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(2n+1)} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x-1)}{2}\right) \exp(-0.3738(2n+1)^2 t),$$

donnée $\alpha = 0.1515, T = 3.3000$.

EX2 : Même problème de l'exercice 1, en utilisant le schéma implicite.

EX3 : (Schémas explicites centré et décentré)

Soient $\alpha > 0, \mu > 0, T > 0$ et $u_0 : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (2.29)$$

On suppose qu'il existe $u \in C^4([0, 1] \times [0, T])$ solution classique de (2.29) (noter que ceci implique $u_0(0) = u_0(1) = 0$). On pose $A = \min \{u_0(x), x \in [0, 1]\}$ et $B = \max \{u_0(x), x \in [0, 1]\}$ (noter que

$A \leq 0 \leq B$).

On discrétise le problème (2.29). Soient $h = \frac{1}{N+1}$, et $k = \frac{T}{M+1}$, $N, M \in \mathbb{N}^*$.

1. **Schéma explicite décentré.** Pour approcher la solution u de (2.29). On considère le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{\alpha}{h}(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\mu}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = 0, \\ i \in \{1, \dots, N\}, n \in \{1, \dots, M\}, \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad n \in \{1, \dots, M\}, \\ u_i^0 = u_0(ih), \quad i \in \{0, \dots, N+1\}, \end{array} \right. \quad (2.30)$$

On pose $\bar{u}_i^n = u(ih, nk)$, pour $i \in \{0, \dots, N+1\}, n \in \{0, \dots, M+1\}$.

a (Consistance). Montrer que l'erreur de consistance du schéma (2.30) est majorée par $C_1(k+h)$, où C_1 ne dépend que de u, T, α, μ et T .

b (Stabilité). Sous quelle condition sur k et h (cette condition peut dépendre de α et μ) a-t-on $A \leq u_i^n \leq B$ pour tout $i \in \{0, \dots, N+1\}$ et tout $n \in \{0, \dots, M+1\}$? Sous cette condition, on déduit $\|U^n\|_\infty \leq \|u_0\|_{L^\infty(]0,1])}$ pour tout $n \in \{0, \dots, M+1\}$ (avec $\|U^n\|_\infty = \max\{|u_i^n|, i \in \{0, \dots, N+1\}\}$).

c (Estimation d'erreur). On pose $e_i^n = \bar{u}_i^n - u_i^n$. Sous la condition sur k et h trouvée précédemment, montrer que $|e_i^n| \leq C_2(k+h)$ pour tout $i \in \{0, \dots, N+1\}$ et tout $n \in \{0, \dots, M+1\}$, avec C_2 ne dépend que de u, T, α et μ .

2. **Schéma explicite centré.**

On change dans le schéma (2.30) la quantité $\frac{\alpha}{h}(u_i^n - u_{i-1}^n)$ par $\frac{\alpha}{2h}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$.

a (Consistance). Montrer que l'erreur de consistance est maintenant majorée par $C_3(k+h^2)$, où C_3 ne dépend que de u, α et μ .

b Reprendre les questions de stabilité et d'estimation d'erreur du schéma (2.30).

EX4 : (Equation parabolique avec terme source non nul)

Soit u_0 une fonction donnée sur $[0, 1]$ dans \mathcal{R} . On s'intéresse ici à la discrétisation du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - u(x, t) = 0, \quad \forall x \in]0, 1[, t \in \mathcal{R}^+, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \forall t \in \mathcal{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in]0, 1[, \end{array} \right. \quad (2.31)$$

On note u la solution de (2.31), et on suppose que u est la restriction à $\mathcal{R}^+ \times [0, 1]$ d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ de \mathcal{R}^2 dans \mathcal{R} .

Pour $h = \frac{1}{N+1}$, $N \in \mathcal{N}^*$ et $k > 0$, on pose $x_i = ih, i \in \{0, \dots, N+1\}$, $t_n = nk, n \in \mathcal{N}$, $\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$, et on note u_i^n la valeur approchée recherchée de \bar{u}_i^n . On considère deux schémas numériques, définies par les équations suivantes :

$$\frac{1}{k}(u_i^{n+1} - u_i^n) - \frac{1}{h^2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) - u_i^{n+1} = 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}, n \in \mathcal{N}, \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{k}(u_i^{n+1} - u_i^n) - \frac{1}{h^2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) - u_i^n = 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}, n \in \mathcal{N}, \quad (2.33)$$

$$u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0, n \in \mathcal{N}, u_i^0 = u_0(ih), i \in \{0, \dots, N+1\}. \quad (2.34)$$

Pour $n \in \mathcal{N}$, on note $u^n = (u_1^n, \dots, u_N^n)^t \in \mathcal{R}^N$.

1. (**Consistance**). Soit $T > 0$. Pour $n \in \mathcal{N}$, et $i \in \{1, \dots, N\}$, tel que $kn < T$, montrer que l'erreur de consistance des deux schémas est majorée par $C(k+h^2)$, où C est une constante positive ne dépendant que de u et T .
2. Montrer que les deux schémas demande à chaque pas de temps, la résolution du système linéaire $Au^{n+1} = a$, (*resp.* $Bu^{n+1} = b$), avec $A, B \in \mathcal{R}^{N \times N}$ et $a, b \in \mathcal{R}^N$ à déterminer.
Montrer que B est inversible (et même s.d.p.) pour tout $h > 0$ et $k > 0$. Montrer que A est inversible (et même s.d.p.) pour tout $h > 0$ et $k \in]0, 1[$.
3. (**Stabilité**). Pour tout $n \in \mathcal{N}$, on pose $\|u^n\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} |u_i^n|$. Soit $T > 0$. On considère le Schéma (2.33), (2.34). Montrer qu'il existe $C_1(T) \in \mathcal{R}$, ne dépendant que de T ,

t.q. $\|u^n\|_\infty \leq C_1(T)\|u^0\|_\infty$, pour tout $h > 0, k > 0$, et $n \in \mathcal{N}$ tel que $kn \leq T$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On considère le schéma (2.32),(2.34). Montrer qu'il existe $C_2(T, \alpha) \in \mathcal{R}$, ne dépendant que de T et de α , t.q. $\|u^n\|_\infty \leq C_2(T, \alpha)\|u^0\|_\infty$, pour tout $h > 0, k \in]0, \alpha[$, et $n \in \mathcal{N}$ tel que $kn \leq T$.

4. (Estimation d'erreur). Pour $n \in \mathcal{N}$ et $i \in \{1, \dots, N\}$, on pose $e_i^n = \bar{u}_i^n - u_i^n$. Soit $T > 0$. Donner pour $kn \leq T$ des majorations de $\|e_i^n\|_\infty$ en fonction de $T, C, C_1(T), C_2(T, \alpha)$ (définis dans les questions précédentes), k et h pour les deux schémas étudiés.

EX5 : (Schéma saute-mouton et de Dufort-Frankel)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad \forall x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (2.35)$$

Pour trouver une solution approchée de (2.35), on considère le schéma saute-mouton

$$\begin{cases} \frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j-1)}}{2\Delta t} = \frac{1}{h^2} \left(u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)} \right), \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, M, \\ u_0^{(j)} = u_{N+1}^{(j)} = 0, \quad j = 0, \dots, M + 1, \end{cases} \quad (2.36)$$

où $u_i^{(0)}, u_i^{(1)}$ sont supposées connues, $h = 1/(N + 1), \Delta t = T/(M + 1)$.

1. Montrer que le schéma (2.36) est consistant. Quel est son ordre ?
2. Montrer que le schéma (2.36) est inconditionnellement instable au sens de Von-Neumann.

On modifie légèrement le schéma (2.36) en posant

$$\begin{cases} \frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j-1)}}{2\Delta t} = \frac{1}{h^2} \left(u_{i+1}^{(j)} - \left(u_i^{(j+1)} + u_i^{(j-1)} \right) + u_{i-1}^{(j)} \right), \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, M, \\ u_0^{(j)} = u_{N+1}^{(j)} = 0, \quad j = 0, \dots, M + 1, \\ \text{Schéma de Dufort-Frankel,} \end{cases} \quad (2.37)$$

3- Montrer que le schéma (2.37) est consistant avec (2.35) quand $h, \Delta t \rightarrow 0$ sous la condition $\frac{\Delta t}{h} \rightarrow 0$.

4- Montrer que le schéma (2.37) est inconditionnellement stable.

EX6 : (Schéma de Crank-Nicolson ou semi-implicite)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad \forall x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \forall t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (2.38)$$

Pour trouver une solution approchée de (2.38), on considère le schéma de Crank-Nicolson

$$\begin{cases} \frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} - \frac{1}{2h^2} (u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)}) - \frac{1}{2h^2} (u_{i+1}^{(j+1)} - 2u_i^{(j+1)} + u_{i-1}^{(j+1)}) = \frac{f_i^{(j)} + f_i^{(j+1)}}{2}, \\ i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, M, \\ u_0^{(j)} = u_{N+1}^{(j)} = 0, j = 0, \dots, M + 1, \\ u_i^{(0)} = u_0(ih), \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.39)$$

soit encore sous la forme

$$\begin{cases} u_i^{(j+1)} = u_i^{(j)} - \frac{\Delta t}{2h^2} (-u_{i+1}^{(j)} + 2u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}) - \frac{\Delta t}{2h^2} (-u_{i+1}^{(j+1)} + 2u_i^{(j+1)} - u_{i-1}^{(j+1)}) + \frac{\Delta t}{2}(f_i^{(j)} + f_i^{(j+1)}), \\ i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, M, \\ u_0^{(j)} = u_{N+1}^{(j)} = 0, j = 0, \dots, M + 1, \\ u_i^{(0)} = u_0(ih), \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.40)$$

1. Déterminer la forme vectorielle du schéma (2.40).
2. Le schéma (2.40) est une combinaison des deux schémas explicite et implicite, il est appelé aussi **semi-implicite**. Montrer que ce schéma (2.40) est consistant d'ordre deux en temps et espace.

3. Montrer que si $\frac{\Delta t}{h^2} \leq 1$ alors le schéma (2.40) est L^∞ -stable.
4. Montrer que le schéma (2.40) est inconditionnellement L^2 -stable (comme le schéma implicite).

EX7 : (Schéma totalement implicite)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & \forall x \in \mathcal{R}, t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathcal{R}, \end{cases} \quad (2.41)$$

Pour trouver une solution approchée de (2.41), on considère le schéma totalement implicite

$$\begin{cases} \frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{(j+1)} - 2u_i^{(j+1)} + u_{i-1}^{(j+1)}}{h^2} = 0, & \forall i \in Z, j \in \{0, \dots, M\}, \\ u_i^{(0)} = u_0(x), & \text{pour tout } i \in Z, \end{cases} \quad (2.42)$$

Montrer que ce schéma est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann.

EX8 : (Le θ -Schéma)

On se propose d'étudier la stabilité d'un schéma intermédiaire entre le schéma explicite et le schéma totalement implicite. Soit $\theta \in [0, 1]$, on considère le schéma défini par

$$\begin{cases} \frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} - \theta \frac{(u_{i+1}^{(j+1)} - 2u_i^{(j+1)} + u_{i-1}^{(j+1)})}{h^2} - (1 - \theta) \frac{(u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)})}{h^2} = 0, \\ \forall i \in Z, j \in \{0, \dots, M\}, \\ u_i^{(0)} = u_0(x_i), \forall i \in Z, \end{cases} \quad (2.43)$$

1. Montrer que si $\theta = 0$ le schéma est explicite, si $\theta = 1$ le schéma est totalement implicite, si $\theta = \frac{1}{2}$ le schéma est semi-implicite et si $\theta \neq 0$ le schéma est implicite.
2. Pour $\theta \geq \frac{1}{2}$, montrer que le θ -schéma est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann.

3. Pour $\theta < \frac{1}{2}$, montrer que le θ -schéma est stable au sens de Von Neumann si et seulement si

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}.$$

2.8 Programmation en Matlab de quelques exemples

Exemple4 : Equation de la chaleur, schéma explicite

```
function[M,u]=Chaleur_explicite(N)
disp(' Résolution de l''équation de la chaleur ')
disp('par la méthode du schéma explicite')
disp(' du/dt - d^2u/dx^2=f(x)  x in ]0,L[, t in ]0,T[ ')
disp(' avec u(0,t)=0, u(L,t)=0,u(x,0)=u0(x) ')
L=2; T=1; % les dimensions de l'espace et temps
%M= floor(0.5*(N+1)^2); % condition de convergence dt/h^2 <=0.5
M=round(0.5*(N+1)^2 -1); % condition de convergence dt/h^2 <=0.5
h=L/(N+1), dt=T/(M+1), CFL=dt/h^2 % h et dt pas de la discrétisation
% Déclarations des matrices et des vecteurs
Ah=zeros(N,N); u0=zeros(N,1);x=zeros(N,1); ff=zeros(N,1);
% calcul des matrices Ah ,Dh
Ah=2*diag(ones(N,1))- 1*diag(ones(N-1,1),+1)- 1*diag(ones(N-1,1),-1);
Ah=1/(h^2)*Ah;
Dh=eye(N,N)-dt*Ah;
% calcul du vecteur de droite B et du vecteur initial u(x,0)
%g0=inline('100*x*(2-x)');
g0=inline('(x-2)*tan(x)');
%f=inline('x^2');
f=inline('log(1+x)');
for i=1:N
    x(i)=i*h;
u0(i)=feval(g0,x(i));
```

Chapitre 2. Equations paraboliques

```
ff(i)=feval(f,x(i));
end
B=ff(:);
u0=u0(:);
% Résolution du système linéaire sans inverser la matrice
% u=Dh*u + dt*B
for j=1:M+1
    u=Dh*u0 + dt*B;
    u0=u;
% Courbe de la solution numérique u(x,t)
X=[0;x;2]; U=[0;u;0];
%figure , plot(X,U,'-r'),grid on,
plot(X,U,'-r'),grid on, hold on
colorbar, legend('show')
xlabel('axes des X'); ylabel('axes des U');
title('Solution numérique U')
end,end
```

$h = 0.1818, \quad dt = 0.0164, \quad CFL = 0.4959, \quad M = 60,$

$u = 2.4897 \quad 4.7864 \quad 6.7103 \quad 8.1095 \quad 8.8714 \quad 8.9315 \quad 8.2778 \quad 6.9508 \quad 5.0389 \quad 2.6701$

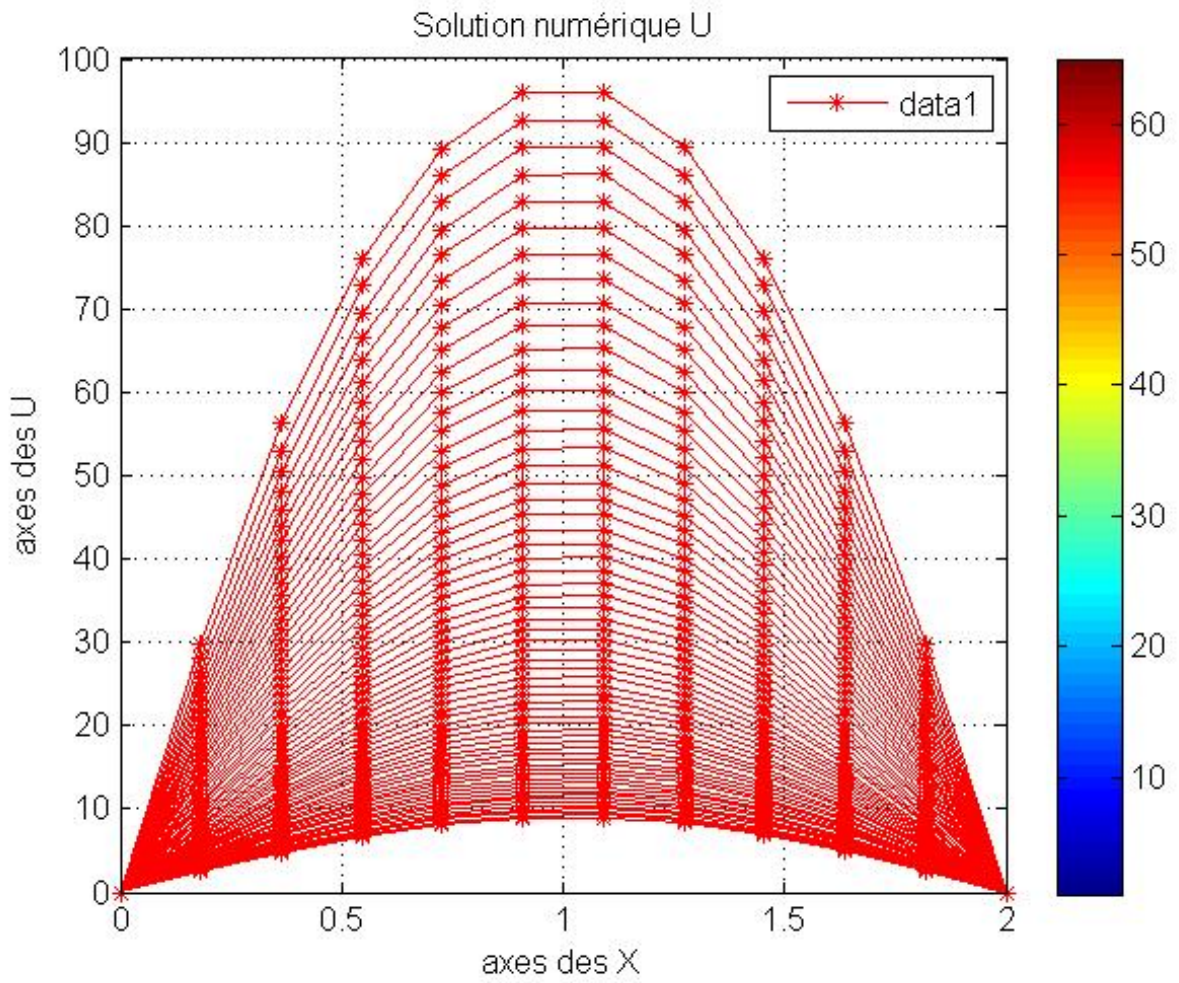


FIGURE 2.1 – Courbes de la solution approchée (équation de la chaleur, Schéma explicite)
 $N = 10, M = 60, h = 0.1815, dt = 0.0164$

Exemple5 : Equation de la chaleur, schéma implicite

```
function[u]=Chaleur_implicite(N,M)
disp(' Résolution de l''équation de la chaleur ')
disp('par la méthode du schéma implicite')
disp(' du/dt - d^2u/dx^2=f(x)  x in ]0,L[, t in ]0,T[ ')
disp(' avec u(0,t)=0, u(2,t)=0,u(x,0)=u0(x) ')
L=2; T=1; % les dimensions de l'espace et temps
h=L/(N+1),dt=T/(M+1),CFL=dt/h^2 % h et dt pas de la discrétisation
% Déclarations des matrices et des vecteurs
Ah=zeros(N,N); u0=zeros(N,1);x=zeros(N,1); ff=zeros(N,1);
% calcul des matrices Ah ,Dh
Ah=toeplitz([2 -1 zeros(1,N-2)])
Ah=1/(h^2)*Ah;
Dh=eye(N,N)+dt*Ah;
% calcul du vecteur de droite B et du vecteur initial u(x,0)
g0=inline('(x-2)*sin(pi*x)*cos(pi*x)');
f=inline('exp(x)');
for i=1:N
    x(i)=i*h;
u0(i)=feval(g0,x(i));
ff(i)=feval(f,x(i));
end
B=ff(:);
u0=u0(:);
% Résolution du système linéaire en inversant la matrice
% u=inv(Dh)*(u0 + dt*B)
```

```
for j=1:M+1
    u=Dh\u0 + dt*B);
    u0=u;
% Courbe de la solution numérique u(x,t)
X=[0;x;2]; U=[0;u;0];
% figure , plot(X,U,'-r'),grid on,
plot(X,U,'-r'),grid on, hold on
colorbar, legend('show')
xlabel('axes des X'); ylabel('axes des U');
title('Solution numérique U')
end
end
```

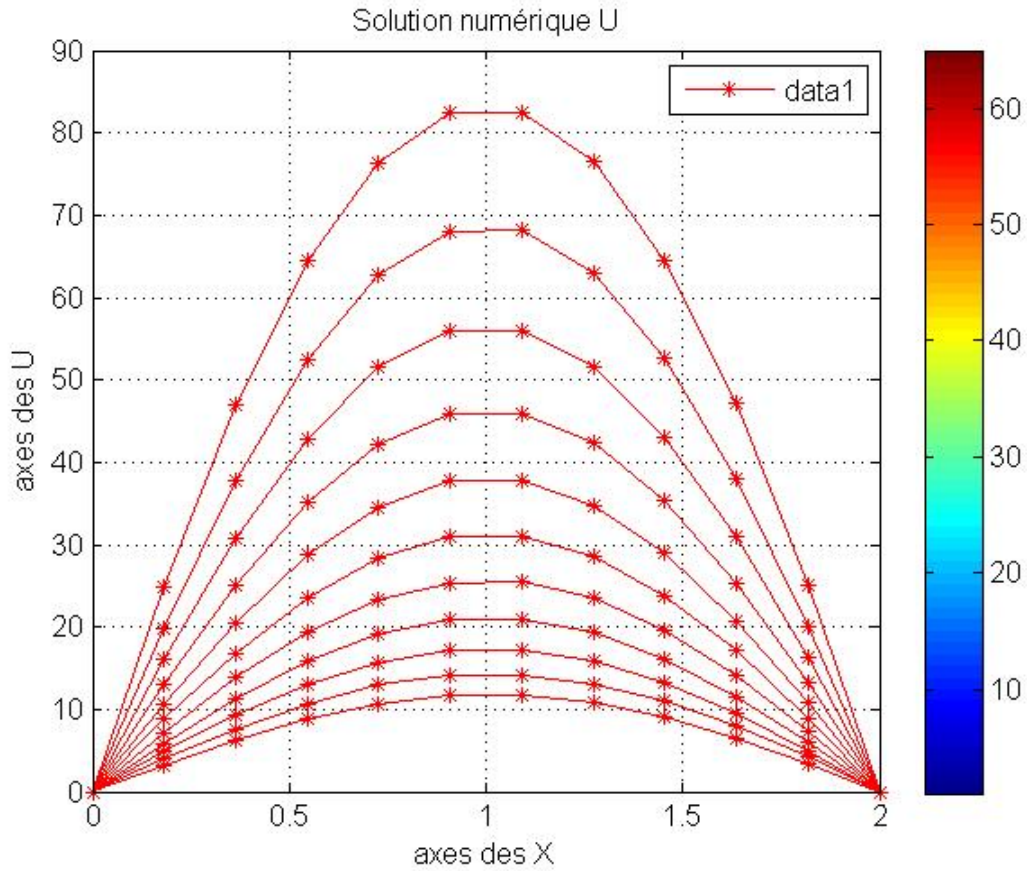


FIGURE 2.2 – Courbes de la solution approchée (équation de la chaleur, Schéma implicite)
 $N = 10, M = 10, h = 0.1818, dt = 0.0909$

$$Ah = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$u = 3.2832 \quad 6.3090 \quad 8.8386 \quad 10.6711 \quad 11.6587 \quad 11.7187 \quad 10.8392 \quad 9.0788 \quad 6.5612 \quad 3.4634$$

Chapitre 3

Equations hyperboliques

3.1 Equation de transport

On considère le problème modèle : l'équation dite d'advection

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (3.1)$$

Elle correspond par exemple à un transport de contaminant en rivière sans diffusion où c est la vitesse de l'eau de polluant.

3.1.1 Schémas explicites

On établit différents schémas explicites. En effectue une discrétisation en temps et en espace, en se donnant un pas de discrétisation en espace h et un pas de discrétisation en temps Δt , et en posant $x_i = ih, t_j = j\Delta t, u(x_i, t_j) \simeq u_i^{(j)}, i = 0, \dots, N + 1; j = 0, \dots, M + 1$. On approche donc la dérivée en temps par

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} + o(\Delta t).$$

Pour la dérivée en espace on a plusieurs cas.

Schéma explicite décentré amont

On pose

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + o(h).$$

Ce qui conduit au schéma suivant

$$\frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} + c \frac{u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{h} = 0. \quad (3.2)$$

En posant $r = c \frac{\Delta t}{h}$, nous aurons

$$u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)} + r (u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}) = 0. \quad (3.3)$$

Ce schéma est L^∞ -stable si $c > 0$ et $r \leq 1$, L^∞ -instable si $c < 0$.

Schéma explicite décentré aval

Si on pose

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} + o(h).$$

Alors le schéma s'écrit

$$\frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{(j)} - u_i^{(j)}}{h} = 0. \quad (3.4)$$

En posant $r = c \frac{\Delta t}{h}$, nous obtenons

$$u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)} + r (u_{i+1}^{(j)} - u_i^{(j)}) = 0. \quad (3.5)$$

Ce schéma est L^∞ -stable si $c < 0$ et $|r| \leq 1$, L^∞ -instable si $c > 0$.

Schéma explicite centré

On pose

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h} + o(h^2).$$

On obtient alors le schéma suivant

$$\frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{2h} = 0. \quad (3.6)$$

En posant $r = c \frac{\Delta t}{h}$, nous obtenons

$$u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)} + \frac{r}{2} (u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}) = 0. \quad (3.7)$$

Ce schéma est toujours L^∞ -instable.

3.1.2 Schémas implicites

La dérivée par rapport au temps est toujours discrétisée selon le schéma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} + o(\Delta t),$$

nous proposons plusieurs variantes en discrétisant la dérivée en espace.

Schéma implicite décentré amont

Si on pose

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + o(h).$$

Ce qui conduit au schéma suivant

$$\frac{u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)}}{\Delta t} + c \frac{u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{h} = 0. \quad (3.8)$$

En posant $r = c \frac{\Delta t}{h}$, nous aurons

$$u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)} + r (u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}) = 0. \quad (3.9)$$

Ce schéma est L^∞ -stable si $c > 0$ et L^∞ -instable si $c < 0$.

Schéma implicite décentré aval

On pose

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} + o(h).$$

Ce qui conduit au schéma suivant

$$\frac{u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)}}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{(j)} - u_i^{(j)}}{h} = 0. \quad (3.10)$$

En posant $r = c \frac{\Delta t}{h}$, nous obtenons

$$u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)} + r (u_{i+1}^{(j)} - u_i^{(j)}) = 0. \quad (3.11)$$

Ce schéma est L^∞ -stable si $c < 0$ et L^∞ -instable si $c > 0$.

Schéma implicite centré

On pose

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h} + o(h^2).$$

Nous obtenons le schéma suivant

$$\frac{u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)}}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{2h} = 0. \quad (3.12)$$

En posant $r = c \frac{\Delta t}{h}$, nous aurons

$$u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)} + \frac{r}{2} (u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}) = 0. \quad (3.13)$$

Ce schéma est L^∞ -stable si $r \leq 1$.

3.2 Equation des ondes

On se propose de trouver u solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in]0, 1[, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in]0, 1[, \end{array} \right. \quad (3.14)$$

$u_0(x)$, $u_1(x)$ étant les données initiales du problème et f un terme source donné. En discrétisant ce problème en posant les données aux limites $u_0^{(j)} = u_{N+1}^{(j)} = 0$, les données initiales $u_i^{(0)} = u_0(x_i)$. La valeur inconnue est $u_i^{(j)}$. Mais comme il s'agit d'un problème du second ordre en temps, il est nécessaire de se donner $u_i^{(1)}$, en écrivant

$$u_i^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, \Delta t) - u(x_i, 0)}{\Delta t} + o(\Delta t).$$

Ce qui donne la valeur suivante

$$u_i^{(1)} = u_i^{(0)} + \Delta t \cdot u_1(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.15)$$

3.2.1 Schéma explicite centré

On approche les dérivées secondes par un schéma centré à 3 points, ce qui donne

$$\frac{u_i^{(j+1)} - 2u_i^{(j)} + u_i^{(j-1)}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)}}{h^2} = f(x_i, t_j), \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M, \quad (3.16)$$

avec les données

$$u_0^{(j)} = u_{N+1}^{(j)} = 0, \quad 0 \leq j \leq M + 1, \quad (3.17)$$

$$u_i^{(0)} = u_0(x_i), \quad u_i^{(1)} = u_i^{(0)} + \Delta t u_1(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.18)$$

Vectoriellement ce système peut s'écrire comme un schéma à deux niveaux de la forme

$$\frac{U^{(j+1)} - 2U^{(j)} + U^{(j-1)}}{\Delta t^2} + A_h U^{(j)} = C^{(j)}, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (3.19)$$

$$U^{(0)}, U^{(1)} \text{ données,}$$

La matrice A_h est encore définie par (1.7). On vérifie facilement que ce schéma est consistant d'ordre 2 en temps et en espace. On pourrait étudier la stabilité de ce schéma pour la norme $\|\cdot\|_h$, en introduisant le vecteur $V^{(j)}$ à $2N$ composantes suivant

$$V^{(j)} = \begin{pmatrix} U^{(j)} \\ U^{(j-1)} \end{pmatrix}.$$

De sorte que

$$V^{(j+1)} = BV^{(j)} + (\Delta t)^2 D^{(j)}, \quad j \in \{1, \dots, M\}, \quad V^{(1)} \text{ donné,} \quad (3.20)$$

où B est la matrice de taille $2N \times 2N$ donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 2Id - (\Delta t)^2 A_h & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix},$$

chacune des quatre sous-matrices ci-dessus étant de taille $N \times N$, le terme source $D^{(j)}$ étant le vecteur à $2N$ composantes défini par

$$D^{(j)} = \begin{pmatrix} C^{(j)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On serait ainsi ramené à l'étude de la stabilité d'un schéma à un seul niveau. La difficulté essentielle ici provient du fait que la matrice B **n'est pas normale**, de sorte qu'on a seulement :

$$\rho(B) \leq \|B\|_h.$$

La condition

$$\rho(B) \leq 1,$$

devient alors **uniquement une condition nécessaire de stabilité**. Afin de simplifier l'étude de ce schéma nous nous proposons d'en étudier la stabilité en utilisant la méthode de Fourier.

3.2.2 Méthode de Fourier

Dans toute la suite on suppose $f = 0, c = 1$ pour simplifier. On considère l'équation des ondes (3.14) définie sur la droite réelle toute entière. On définit les points de discrétisations $x_i = ih, i \in Z$ et $t_j = j\Delta t, j \in \{0, \dots, M + 1\}$. Considérons le schéma suivant

$$\frac{u_i^{(j+1)} - 2u_i^{(j)} + u_i^{(j-1)}}{\Delta t^2} = \frac{u_{i+1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i-1}^{(j)}}{h^2} \quad i \in Z, j \in \{1, \dots, M\},$$

$$u_i^{(0)} = u_0(x_i) \quad i \in Z,$$
(3.21)

$$u_i^{(1)} = u_i^{(0)} + \Delta t \cdot u_1(x_i) \quad i \in Z.$$

En fait, pour des raisons que nous expliquerons plus loin, nous nous proposons dans un premier temps d'étudier un autre schéma explicite écrit de manière légèrement différente.

Une autre écriture du schéma explicite

Introduisons deux fonctions continues v et w définies par

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Utilisant l'EDP (3.14), on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

q'on approche par le **schéma explicite** suivant

$$\frac{v_i^{(j+1)} - v_i^{(j)}}{\Delta t} = \frac{w_{i+1/2}^{(j)} - w_{i-1/2}^{(j)}}{h},$$
(3.22)

$$\frac{w_{i-1/2}^{(j+1)} - w_{i-1/2}^{(j)}}{\Delta t} = \frac{v_i^{(j+1)} - v_{i-1}^{(j+1)}}{h},$$
(3.23)

où $x_{i+1/2}$ est le point milieu du segment $[x_i, x_{i+1}]$ et $v_i^{(j)} \simeq v(t_j, x_i), \quad w_{i+1/2}^{(j)} \simeq w(t_j, x_{i+1/2})$.

Remarque 3.1. On remarque d'abord que si on identifie $v_i^{(j)}$ à $\frac{u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)}}{\Delta t}$ et $w_{i-1/2}^{(j)}$ à $\frac{u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{h}$, on obtient alors exactement le schéma de départ (3.21).

Chapitre 3. Equations hyperboliques

Etudions la stabilité de ce schéma par la méthode de Fourier. On transforme d'abord ce schéma pour le rendre continu relativement à la variable $x \in R$; on obtient pour tout $x \in R$

$$\frac{v^{(j+1)}(x) - v^{(j)}(x)}{\Delta t} = \frac{w^{(j)}(x + h/2) - w^{(j)}(x - h/2)}{h}, \quad (3.24)$$

$$\frac{w^{(j+1)}(x - h/2) - w^{(j)}(x - h/2)}{\Delta t} = \frac{v^{(j+1)}(x) - v^{(j+1)}(x - h)}{h}, \quad (3.25)$$

avec les conditions initiales

$$v^{(0)} = u_1, \quad w^{(0)} = \frac{du_0}{dx}. \quad (3.26)$$

Puis on utilise la transformée de Fourier relativement à la variable d'espace, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{v}^{(j+1)}(\xi) - \widehat{v}^{(j)}(\xi)}{\Delta t} &= \frac{\exp(\frac{ih\xi}{2}) - \exp(\frac{-ih\xi}{2})}{h} \widehat{w}^{(j)}(\xi), \\ \exp(\frac{-ih\xi}{2}) \frac{\widehat{w}^{(j+1)}(\xi) - \widehat{w}^{(j)}(\xi)}{\Delta t} &= \frac{1 - \exp(-ih\xi)}{h} \widehat{v}^{(j+1)}(\xi). \end{aligned}$$

Introduisant pour tout indice $j \geq 0$ le vecteur bidimensionnel $X^{(j)}$ de R^2 défini par

$$X^{(j)}(x) = \begin{pmatrix} v^{(j)}(x) \\ w^{(j)}(x) \end{pmatrix},$$

on a par transformée de Fourier

$$\widehat{X}^{(j)}(\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{v}^{(j)}(\xi) \\ \widehat{w}^{(j)}(\xi) \end{pmatrix},$$

et le schéma suivant

$$\widehat{X}^{(j)}(\xi) = A(\xi) \widehat{X}^{(j-1)}(\xi), \quad j \in \{1, \dots, M + 1\}, \quad (3.27)$$

où $A(\xi)$ est une matrice de taille 2×2 , appelée matrice d'amplification du schéma est définie par

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & ia(\xi) \\ ia(\xi) & 1 - a(\xi)^2 \end{pmatrix}, \quad a(\xi) = 2\left(\frac{\Delta t}{h}\right) \sin\left(\frac{h\xi}{2}\right), \text{ tel que } i^2 = -1.$$

On obtient ainsi un schéma à un seul niveau, mais dont la **matrice n'est pas normale** à priori (elle ne l'est en fait que dans le cas particulier où $a(\xi) = 0$, cas pour lequel $A(\xi)$ est la matrice

identité). On se propose d'étudier la stabilité de ce schéma pour la norme dans l'espace produit $L^2(R) \times L^2(R)$ définie par

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad y_i \in L^2(R), \quad \|Y\|_{L^2(R) \times L^2(R)}^2 = \|y_1\|_{L^2(R)}^2 + \|y_2\|_{L^2(R)}^2.$$

Proposition 3.1. *Le schéma (3.24)- (3.26) est stable pour la norme dans l'espace produit $L^2(R) \times L^2(R)$ si et seulement s'il existe une constante $C(T) > 0$, indépendante de h et de Δt , telle que*

$$\text{pour tout } j \in \{1, \dots, M + 1\}, \quad \sup_{\xi \in R} \|A(\xi)^j\|_2 \leq C(T).$$

Remarque 3.2. *Comme auparavant, une condition nécessaire de stabilité du schéma (3.24)- (3.26) au sens de Von Neumann est*

$$\text{pour tout } \xi \in R, \quad \rho(A(\xi)) \leq 1.$$

Par diagonalisation on prouve la proposition suivante

Proposition 3.2. *Supposons qu'il existe une constante $\delta \in]0, 1[$, indépendante de Δt et h tel qu'on ait*

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \delta < 1. \tag{3.28}$$

Alors le schéma (3.24)- (3.26) est stable au sens de Von Neumann, c.à.d pour la norme dans l'espace produit $L^2(R) \times L^2(R)$. C'est une condition suffisante.

Remarque 3.3. *le schéma (3.24)- (3.26) n'est pas stable Si $\frac{\Delta t}{h} > 1$.*

3.2.3 Le schéma totalement implicite

On considère le schéma totalement implicite naturel défini par

$$\frac{u_i^{(j+1)} - 2u_i^{(j)} + u_i^{(j-1)}}{\Delta t^2} = \frac{u_{i+1}^{(j+1)} - 2u_i^{(j+1)} + u_{i-1}^{(j+1)}}{h^2} \quad i \in Z, j \in \{1, \dots, M\},$$

$$u_i^{(0)} = u_0(x_i) \quad i \in Z,$$

$$u_i^{(1)} = u_i^{(0)} + \Delta t \cdot u_1(x_i) \quad i \in Z. \tag{3.29}$$

Montrons que ce schéma est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann.

Comme auparavant, posons

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Utilisant l'EDP (3.14), on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

q'on approche par le **schéma implicite** suivant

$$\frac{v_i^{(j+1)} - v_i^{(j)}}{\Delta t} = \frac{w_{i+1/2}^{(j+1)} - w_{i-1/2}^{(j+1)}}{h}, \quad (3.30)$$

$$\frac{w_{i-1/2}^{(j+1)} - w_{i-1/2}^{(j)}}{\Delta t} = \frac{v_i^{(j+1)} - v_{i-1}^{(j+1)}}{h}. \quad (3.31)$$

On remarque en effet que si on identifie $v_i^{(j)}$ à $\frac{u_i^{(j)} - u_i^{(j-1)}}{\Delta t}$ et $w_{i-1/2}^{(j)}$ à $\frac{u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{h}$, on retrouve effectivement le schéma de départ (3.29). Il s'agit donc d'une autre écriture du schéma (3.29).

Proposition 3.3. *Le schéma totalement implicite est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann.*

Preuve. Par transformée de Fourier le schéma s'écrit sous la forme (3.27), où la matrice $A(\xi)$ est ici définie par son inverse

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & -ia(\xi) \\ -ia(\xi) & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad a(\xi) = 2\left(\frac{\Delta t}{h}\right) \sin\left(\frac{h\xi}{2}\right), \text{ tel que } i^2 = -1.$$

C'est une matrice **normale** dont les valeurs propres sont $\frac{1}{1 \mp ia(\xi)}$: elles sont donc toutes deux de module inférieur ou égal à 1, ainsi $\|A(\xi)^j\|_{L^2(R)} = (\rho(A(\xi)))^j \leq 1$ et le schéma est stable au sens de Von Neumann, sans condition. \square

Remarque 3.4. *Si nous avons étudié directement la stabilité du schéma (3.29) par la méthode de Fourier, nous aurions trouvé, avec les notations du paragraphe précédent, le système (3.27)*

avec ici

$$B(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+a(\xi)^2} & \frac{1}{1+a(\xi)^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a(\xi) = 2\left(\frac{\Delta t}{h}\right) \sin\left(\frac{h\xi}{2}\right), \text{ tel que } i^2 = -1.$$

Cette **matrice n'est pas normale** et ses valeurs propres sont les mêmes que ci-dessus (c.à.d $\frac{1}{1 \mp ia(\xi)}$) : en particulier, pour $a(\xi) = 0$, elles valent toutes deux 1, et la matrice n'est pas diagonalisable, ce qui ne permet pas de conclure : on retrouve ici la même difficulté que celle rencontrée pour l'étude du schéma explicite écrit sous forme naturelle.

3.3 Exercices

EX1 : Soit l'équation du transport

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in]0, 1[, t \in]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (3.32)$$

On considère les schémas suivant :

Schéma explicite décentré amont.

$$\frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} + c \frac{u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{h} = 0. \quad (3.33)$$

En posant $r = c \frac{\Delta t}{h}$. Montrer que ce schéma est L^∞ -stable si $c > 0$ et $r \leq 1$, L^∞ -instable si $c < 0$.

Schéma explicite décentré aval.

$$\frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{(j)} - u_i^{(j)}}{h} = 0. \quad (3.34)$$

Montrer que ce schéma est L^∞ -stable si $c < 0$ et $|r| \leq 1$, L^∞ -instable si $c > 0$.

Schéma explicite centré.

$$\frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{2h} = 0. \quad (3.35)$$

Montrer que ce schéma est toujours L^2 -instable.

EX2 : (Schéma de Lax-Friedrichs). Soit l'équation d'advection :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in R, t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in R. \end{cases} \quad (3.36)$$

Trouver la solution exacte de ce problème.

Soit le schéma explicite centré

$$\frac{2u_i^{(j+1)} - u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{2\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{2h} = 0, \quad i \in Z, j \in \{1, \dots, M\},$$

$$u_i^{(0)} = u_0(x_i), \quad i \in Z.$$
(3.37)

Montrer que le schéma (3.37) est consistant avec l'équation d'advection (3.36) et d'ordre 1 en temps et en espace si le rapport $\frac{\Delta t}{h}$ est constant lorsque Δt et h tendent vers 0. Le schéma est dit conditionnellement consistant.

Montrer que le schéma (3.37) est stable au sens de Von Neumann sous une condition C.F.L q'on précisera.

EX3 : (Schéma de Lax-Wendroff). Soit l'équation d'advection :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in R, t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in R. \end{cases}$$
(3.38)

Trouver la solution exacte de ce problème.

Soit le schéma explicite centré

$$\frac{u_i^{(j+1)} - u_i^{(j)}}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}}{2h} - \left(\frac{c^2 \Delta t}{2} \right) \frac{u_{i-1}^{(j)} - 2u_i^{(j)} + u_{i+1}^{(j)}}{h^2} = 0, \quad i \in Z, j \in \{1, \dots, M\},$$

$$u_i^{(0)} = u_0(x_i), \quad i \in Z,$$
(3.39)

Trouver le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction u par rapport à la variable temps.

Montrer que le schéma (3.39) est consistant avec l'équation d'advection (3.38) et d'ordre 2 en temps et en espace. Le schéma est dit inconditionnellement consistant.

Montrer que le schéma (3.39) est stable au sens de Von Neumann sous une condition C.F.L q'on précisera.

Etudier la stabilité du schéma (3.39) au sens de la norme L^∞ .

EX4 : Soit l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in R, t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in R, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & x \in R, \end{cases} \quad (3.40)$$

$u_0(x), u_1(x)$ étant les données initiales du problème.

Introduisons deux fonctions continues v et w définies par

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Utilisant l'EDP (3.40), on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

q'on approche par le **schéma explicite** suivant

$$\frac{v_i^{(j+1)} - v_i^{(j)}}{\Delta t} = \frac{w_{i+1/2}^{(j)} - w_{i-1/2}^{(j)}}{h}, \quad (3.41)$$

$$\frac{w_{i-1/2}^{(j+1)} - w_{i-1/2}^{(j)}}{\Delta t} = \frac{v_i^{(j+1)} - v_{i-1}^{(j+1)}}{h}, \quad (3.42)$$

où $x_{i+1/2}$ est le point milieu du segment $[x_i, x_{i+1}]$ et $v_i^{(j)} \simeq v(t_j, x_i)$, $w_{i+1/2}^{(j)} \simeq w(t_j, x_{i+1/2})$.

En appliquant la transformée de Fourier relativement à la variable d'espace x , déterminer une matrice A à 2 dimension telle que le schéma s'écrit sous la forme

$$\widehat{X}^{(j)}(\xi) = A(\xi)\widehat{X}^{(j-1)}(\xi), \quad j \in \{1, \dots, M + 1\}, \quad (3.43)$$

où $\widehat{X}^{(j)}(\xi)$ est un vecteur à 2 dimensions.

Montrer que si $\frac{\Delta t}{h} > 1$ le schéma est instable au sens de Von Neumann.

Bibliographie

- [1] Grégoire Allaire, *Analyse Numérique et Optimisation*, Ed. de l'Ecole Polytechnique de Paris, 2005
- [2] Brigitte Lucquin, *Equations aux dérivées partielles et leurs applications, cours et exercices*, ed. Ellipses, 2004.
- [3] D. M. Causon, *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*, Mingham and Ventus Publishing ApS 2010.
- [4] Daveau Christian, *Cours méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles par différences finies et volumes finis*, Master MAP M1 Math Appliquée UE2 EDP2 2010/2011, Université de Cergy-Pontoise, France.
- [5] Philippe G.Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, cours, ed. Masson, 1988.
- [6] Randall J. Leveque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, SIAM 2007.
- [7] Raphaèle Herbin, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, cours et exercices*, Master de Mathématiques, Université Aix Marseille 1, décembre 2008.