

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE 08 MAI 1945 GUELMA
INSTITUT DE MECANIQUE

N° d'ordre

Année 1999

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Magister
En MECANIQUE

Option
CONSTRUCTION

Par
BOUZIDI MOUFIDA

THEME

**ETUDE COMPARATIVE ENTRE DEUX MODELES DE COMMANDE D'UN
BRAS -MANIPULATEUR POLY-ARTICULE ET SPHERIQUE**

Soutenue le : 25/07/1999

Devant le jury :

Président	: CHAOUI Kamel	M.C.	Univ.	ANNABA
Rapporteur	: YOUNSI Med jahid	Dr.	C.Univ.	GUELMA
Examineurs	: OUELAA Nouredine	M.C.	C.Univ.	GUELMA
	ZEGHIB Naceredine	M.C.	Univ.	ANNABA
	HADDAD Abdelkrim	M.C.	C.Univ.	GUELMA

Dédicace

Je dédie ce humble travail

A mes très chers parents, que Dieu les préserve.

A mon bien aimé époux, que la chance l'entoure.

A mon **Bébé** adoré **Marwa**, qu'elle grandisse dans la bonté et la prospérité.

A mes Frères et Sœurs que leurs souhaits soient exhaussés.

A l'évolution des idées.

A la stabilité de mon pays.

Remerciements

Je tiens à exprimer tous mes remerciements et ma vive gratitude

*à Monsieur le Docteur **Younsi Med Jahid**, qui ma guidé tous le long de ces années de recherche, et sans qui, rien de tout ceci n'aurait été possible*

*à Monsieur le professeur **Chaoui Kamel**, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse*

*à Messieurs **Haddad Abdlkrim, Zeghib Naceredine et Ouelaa Nouredine** qui ont accepté la responsabilité d'être rapporteurs scientifiques de mon travail.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur **Boukercha Ali**, qui a accepté de m'aider dans mon travail avec patience et efficacité.*

*Je remercie énormément mes amis **Frihi, Djebala, Gherib et Aouici** pour leur aide précieuse et leur soutien moral pendant toutes les années de recherche.*

Je remercie également toutes les personnes qui ont contribué au bon déroulement de ce travail, et notamment tous les enseignants et le personnel de l'institut de mécanique pour les nombreux échanges mutuels sur tous les plans.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
INTRODUCTION A LA ROBOTIQUE	
I. Introduction.....	3
II Perspective historique.....	3
III. Architecture et description des robots articulés.....	4
III. 1. Constituants mécaniques des robots.....	5
III.1.1 Eléments de la structure quasi indépendants des tâches.....	5
III.1.2. Eléments de la structure dépendants des tâches.....	6
III. 2. Propriétés caractéristiques du robot.....	7
III.2.1. La versatilité.....	7
III.2.2 L'auto - adaptativité à l'environnement.....	8
III.3. Représentation d'un robot.....	8
III.3.1. Le nombre de degré de liberté.....	9
III.3.2. Les faux degrés de liberté.....	10
III.3.3. Les deux grandes boucles de contrôles.....	10
IV. Définitions.....	11
IV.1. Articulation.....	11
IV.1.1. Articulation rotoïde (notée R).....	11
IV.1.2. Articulation prismatique (notée P).....	11
V. Différentes structures de base.....	12
V.1. Structure PPP.....	12
V.2. Structure RPP ou PRP.....	12
V.3. Structure RRP.....	13
V.4. Structure RPR ou PRR ou RRP.....	13
V.5. Structure RRR.....	13
VI. Différentes composantes d'une cellule robotisée.....	14
VI.1. Les capteurs.....	14
VI.1.1. Capteurs de position.....	14
VI.1.2. Capteurs de vitesse.....	15
VI.2. Les actionneurs.....	15
VI.2.1. L'énergie pneumatique.....	15
VI.2.2. L'énergie hydraulique.....	16
VI.2.3. L'énergie électrique.....	16

VI.3. Effecteurs.....	16
VI.3.1. Les préhenseurs.....	16
VI.3.2. Les outils.....	17
VII. Conclusion.....	18

CHAPITRE II

DESCRIPTION DE LA SITUATION D'UN SOLIDE DANS L'ESPACE

I- Introduction.....	19
I-1 Hypothèse de base pour le calcul du modèle direct.....	19
II- Définition de la position de l'organe terminal (O. T).....	20
II-1 Cordonnées cartésiennes.....	20
II-2 Coordonnées cylindriques.....	20
II-3 Coordonnées sphériques.....	21
III- Définition de l'orientation de l'organe terminal (O. T).....	22
III-1 Cosinus directeurs.....	23
III-2 Angles classiques d'Euler.....	23
III-3 Angles non classiques d'Euler (Angles de Bryant).....	25
III-4 Paramètres d'Euler.....	26
III-5 Angles de Roulis-Tangage-Lacet.....	28
IV- Conclusion.....	29

CHAPITRE III

ETUDE CRITIQUE SUR LES DIFFERENTES METHODES DE COMMANDE

I- Introduction.....	30
I-1 Position du problème.....	30
I-2 Objet de l'étude.....	30
II- Systèmes de paramétrage des chaînes cinématique.....	31
II-1 La notation de DENAVIT et HARTENBERG.....	31
II-1-1 Application de la méthode.....	31
II-1-2 Matrice de passage homogène.....	32
II-1-3 Etude critique de la notation D &H.....	33
II-2 Notation proposé par YIH.....	34
II-3 Notation propose par HORN.....	35
II-4 Le paramètre supplémentaire utilise par HAYATI.....	35
III- Formulation symbolique d'une notation.....	36
III-1 La notation de KHALIL.....	36
III-2 La notation de RENAUD-ZABALA.....	37
III-3 Description de BORREL.....	39
III- 3-1 Association d'un graphe au mécanisme.....	39
III-3-2 Ecriture d'un changement de repère.....	40

III-3-3 Exemple de description d'un robot manipulateur.....	40
IV- Représentation des déplacements.....	41
IV-1 La géométrie du point.....	42
IV-1-1 Les méthodes extrinsèques.....	42
IV-1-2 Les méthodes intrinsèques.....	45
IV-2 La géométrie des droites.....	47
IV-2-1 Coordonnées d'une droite.....	47
IV-2-2 Déplacement de viriation et nombres hypercomplexes.....	48
IV-2-3 Principe de transférence.....	50
IV-3 Les opérations de transformation.....	50
IV-3-1 La matrice orthogonale duale 3x3.....	50
IV-3-2 La matrice spéciale duale unitaire 2x2.....	51
IV-3-3 Le quaternion dual.....	51
V- Conclusion.....	52

CHAPITRE IV

ETUDE CINEMATIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR BASEE SUR LES MATRICES DE PASSAGE

I- Introduction.....	54
II - Les matrices de transformation homogène.....	54
II-1 Coordonnées homogènes.....	55
II-1-1 Représentation d'un point.....	55
II-1-2 Représentation d'une direction.....	55
II-1-3 Représentation d'un plan.....	55
II-2 Transformations homogènes.....	56
II-2-1 Matrice de transformation de translation pure.....	57
II-2-2 Matrice de transformation de rotation autour des axes principaux.....	57
III- Détermination des éléments cinématique.....	59
III-1 Calcul de l'orientation d'un corps de la chaîne par rapport à un repère lié à un corps amont.....	60
III-2 Calcul de l'orientation d'un corps de la chaîne par rapport à un repère lié à un corps aval.....	61
III-3 Calcul de la position d'un point de la chaîne dans un repère lié à un corps amont.....	62
III-4 Calcul de la position d'un point de la chaîne dans le repère lié à un corps aval.....	63
III-5 Détermination des vecteurs vitesses des divers corps par rapport a un repère de la chaîne.....	63
III-5-1 La loi de composition des vitesses.....	63
III-5-2 Détermination des vecteurs vitesses de rotation des divers corps par rapport à un repère de la chaîne.....	64
III-5-3 Détermination des vecteurs vitesses des divers corps par rapport à un repère.....	64

IV- Exemples.....	65
IV-1 Mécanisme ouvert (Bras manipulateur)	65
IV-2 Mécanisme fermé (sphérique)	71
V- Conclusion.....	76

CHAPITRE V

ETUDE CINEMATIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR BASEE SUR L'ALGEBRE DE LIE

I. Introduction.....	77
II- Déplacement et torseur des vitesses.....	77
II-1 Formulation intrinsèque d'un opérateur de déplacement.....	77
II.2 Déplacement et torseur des vitesses.....	79
II-3 Représentation intrinsèque des couples cinématique.....	79
III- Exemples.....	80
III-1 Application aux mécanismes en chaînes ouvertes.....	80
III-2 Application aux mécanismes en chaînes fermées.....	86
IV. Conclusion.....	90

CHAPITRE VI

INTERPRETATIONS DES RESULTATS.....91

CONCLUSION GENERALE.....119

ANNEXE A1

* Rappel mathématiques utiles au calculs.....	121
---	-----

ANNEXE A2

* Propriétés des matrices de transformation homogène.....	123
---	-----

ANNEXE A3

*.Exemple supplémentaire pour l'application de la méthode de l'algèbre de LIE.....	125
---	-----

ANNEXE A4

* Organigrammes utilisés pour les deux méthodes.....	127
--	-----

REFERENCES.....139

Résumé en arabe

Abstract

NOMENCLATURE

P : Vecteur position ou Articulation prismatique	
M : Matrice de rotation	
R : Articulation rotoïde	
T_i^j : Matrice de passage homogène du repère i au j	
s, n, a : Constituant 9 éléments appelés cosinus directeurs	
d.d.l: Degré de liberté	
C_i : Corps i	
m : Nombres de d.d.l (mobilité articulaire)	
R^m : Espace opérationnel	
R_i : Repère orthonormé i	
O-T: Organe terminal	
$\alpha, \beta, \gamma, \phi, \varepsilon, \theta, \psi$: Angles de rotation	[deg]
R', R'' : Repère orthonormé	
(p,q,r,s) : Quadruple utilisé dans les paramètres d'euler	
\bar{e} : Vecteur unitaire	
ξ^3 : Espace affine euclidien de dimension 3	
\hat{Q} : Matrice spéciale unitaire 2x2	
\hat{L}_i : Déplacement de viration	[m]
\hat{n} : Glisseur	
\hat{q} : Quaternion dual	
v : Vecteur représentant un point	
U : Vecteur représentant une direction	
Q : Vecteur représentant un plan	
TansX : Translation le long de l'axe X	[m]
TansY : Translation le long de l'axe Y	[m]
TansZ : Translation le long de l'axe Z	[m]
RotX : Rotation autour de l'axe X	[deg]
RotY : Rotation autour de l'axe Y	[deg]
RotZ : Rotation autour de l'axe Z	[deg]
$\vec{O}_{\lambda-p} O_\lambda (R_{\lambda-p})$: Vecteur position exprimé dans le repère $R_{\lambda-p}$	[m]
$\vec{\Omega}_\lambda^{(\lambda-p)} (R_\lambda)$: Vecteur vitesse de rotation du repère (R_λ) lié au corps C_λ par rapport au repère $(R_{\lambda-p})$ lié au corps $C_{\lambda-p}$	[rad/s]

Résumé

Un robot est un système mécanique articulé, avant tout fonctionnel. La conception d'une architecture mécanique pour un robot peut apparaître un problème assez simple. En réalité, il s'agit d'une difficulté de base très complexe car elle devrait prendre en compte non seulement des possibilités mécaniques de réalisation, mais en même temps les possibilités d'élaboration d'une commande qui passe par celle d'un modèle mathématique. Ces dernières réagissent fortement sur la conception mécanique si on recherche de bonnes performances. C'est pourquoi, nous nous sommes intéressés dans cette étude à l'application de deux modèles différents de commande de bras-manipulateur sur des mécanismes fermés et ouverts, puis comparer entre les résultats pour obtenir le modèle le plus performant.

D'abord, nous avons essayé de présenter une étude critique sur les différentes méthodes de commande des chaînes cinématique existantes, parmi lesquelles on a choisi deux méthodes.

La première méthode qui est très répandue dans le domaine de la robotique est basée sur la matrice de passage homogène. Elle est relativement simple surtout pour les mécanismes ouverts, quant à son application sur les mécanismes fermés elle présente certaines difficultés.

La deuxième méthode qui est intrinsèque, basée sur l'algèbre de LIE. Malgré de nombreux avantages qu'elle présente, notamment le passage aux déplacements petits, elle demeure non exploitable par les roboticiens. Par ailleurs, on a pu constater que son application sur les mécanismes fermés est facile et donne de bons résultats.

Enfin, on a pu remarquer comment des formalismes mathématiques différents (matrices de passage et l'algèbre de LIE) se complètent entre eux.

Mots clés

Robot, Mécanisme, Bras-manipulateur, Chaîne cinématique, Cinématique, Position, Orientation, Vitesse, Matrice de passage, Algèbre de LIE.

$\vec{V}_{O_{\lambda+1}}^{(0)} (R_{\lambda})$: Vitesse du point $O_{\lambda+1}$ lié au repère $(R_{\lambda+1})$ par rapport au repère de référence (R_0) , exprimé dans le repère (R_{λ}) [m/s]

\wedge : Produit vectoriel

$\omega \wedge$: Tenseur pré-produit vectoriel associé à ω

O : Symbole du produit tensoriel

Θ : Opérateur de rotation

$\exp(\theta_i \cdot \vec{R} \wedge)$: Exprime la rotation d'un angle θ_i autour de l'axe \vec{R}

r_i : Variable articulaire de translation

NN : Nombre de segments articulés

NDF : Nombre d.d.l qui agit sur chaque segment

MRR : Matrice

$D(i,i+1)$: La position du repère $i+1$ dans le repère i

$\alpha(i), \beta(i), \gamma(i)$: Définissant l'orientation du repère R_i par rapport au repère R_{i-1}

(a, a^\wedge) : nombre pair définit le nombre dual a^\wedge

ε : Unité dual

\vec{u}, \vec{v} : Vecteur unité

Θ^\wedge : Angle de rotation dual [deg]

$c\alpha$: Cosinus directeurs

$c\alpha^\wedge$: Cosinus directeurs dual

d : Longueur des perpendiculaires commune entre les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v}

(partie duale) [m]

M^0 : Partie duale ($M^0 = PM$)

\hat{M} : Matrice rotation duale

INTRODUCTION

Le développement très important que connaissent actuellement les moyens et méthodes de production automatisée résulte d'un processus d'évolution continu. Compte tenu de l'évolution constatée dans les deux dernières décennies où les petites séries deviennent plus nombreuses et plus diversifiées, le coût de la main d'œuvre devient en même temps le facteur principal du coût de production. L'automatisation doit donc se poursuivre et faire appel à des machines qui gardent l'adaptabilité des machines à commande numérique. Parallèlement, les fonctions de manipulation, de montage, de contrôle et d'aide à la décision deviennent plus importantes pour satisfaire les objectifs de la production.

La naissance des « robots », il y a une vingtaine d'années environ, permet de satisfaire en partie ces nouvelles fonctions. Aujourd'hui, la robotique traite des machines bien tangibles qui sont:

- Les robots mobiles qui se déplacent sur roues, chenilles, pattes...etc.;
- Les robots manipulateurs qui saisissent, déplacent ou façonnent des objets;
- Les robots contrôleurs qui vérifient et trient des objets.

Cet ouvrage se propose de traiter la modélisation des seuls robots manipulateurs.

Pour concevoir, simuler ou commander un robot, il est nécessaire entre autre, de disposer de modèles de mécanisme. L'obtention de ces différents modèles n'est pas aisée, la difficulté variant selon la complexité de la cinématique de la chaîne articulée. Entrent en ligne de compte le nombre de degrés de liberté (d.d.l), le type des articulations mais aussi le fait que la chaîne peut être ouverte simple, arborescente ou fermée.

Les outils mathématiques que nous présentons dans ce mémoire utilisent une description des mécanismes fondée sur des notations originales qui permettent d'avoir la même approche quelque soit la structure.

Nous proposons de développer quelques descriptions, on rencontre notamment:

- La description de RENAUD-ZABALA (REN 75), (ZAB 78);
- La description de KHALIL (KHAL 76);
- La description de BORREL (BOR 79);
- La description de ROTH-PIEPPER (COIF 81).

Une fois la description faite, on aboutit soit :

- Modèle géométrique: s'il s'agit d'effectuer une commande en position;
- Modèle cinématique: s'il s'agit d'une commande en vitesse;
- Modèle dynamique: s'il s'agit d'un mouvement rapide; c'est à dire lorsque les couples et les forces de réaction induites par le mouvement ne sont pas négligeables.

Ce mémoire se divise en deux parties:

La première partie traitera l'étude bibliographique ainsi qu'une étude comparative entre différents modèles de commande.

Elle comportera trois chapitres. Nous donnerons dans le premier chapitre quelques définitions générales sur les robots manipulateurs, leurs structures et leurs caractéristiques. Des notions sont également données sur les actionneurs et les capteurs. Dans le second chapitre, nous introduirons les méthodes usuelles de description de la situation et des variations de situation d'un solide dans l'espace. Le troisième chapitre comportera une étude critique entre différents modèles de commande existant qui découlent des résultats de recherche récents.

La deuxième partie traitera l'étude cinématique d'un bras manipulateur basée sur deux principaux modèles de commande, qui sont:

- Les matrices de passage;
- l'algèbre de LIE.

Elle comportera aussi trois chapitres. Nous aborderons dans le quatrième chapitre le problème de la modélisation cinématique basée sur les matrices de passage homogènes, tandis que dans le cinquième chapitre nous traiterons le problème de la modélisation cinématique basée sur l'algèbre de LIE. Le dernier chapitre sera consacré à l'interprétation des résultats.

CHAPITRE I

INTRODUCTION A LA ROBOTIQUE

I. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons essayer de cerner la définition du robot et de la robotique, non pas sous une forme mathématique mais au contraire, en restant dans la réalité contemporaine. donc nous donnerons quelques définitions des termes concernant plus particulièrement les domaines de la modélisation et de la commande des robots.

II. PERSPECTIVE HISTORIQUE

L'Automate, selon le dictionnaire, est *une machine qui, par le moyen de dispositifs mécaniques, pneumatiques, hydrauliques ou électriques, est capable d'actes imitant ceux du corps animé.*

Dés la plus haute Antiquité, l'homme a voulu concevoir une machine à son image. Les premiers automates connus datent des *Egyptiens* [25] dont on peut admirer une réalisation au Musée du *Louvre*: une figurine égyptienne à bras articulé représentant un boulanger pétrissant sa pâte. Le véritable essor des automates a lieu avec l'avènement de l'horlogerie au 18^{ème} siècle. Les automates n'avaient pour seul but que d'imiter les mouvements de la vie. Mais ce n'est qu'au milieu du 18^{ème} siècle, que le Français Jacques de Vaucanson (1709-1782) fut associé au développement des automates par ses belles réalisations (le joueur de flûte, le joueur de tambourin, le canard) mais également par l'application des principes aux premières machines-outils (métier à tisser 1745).

Le terme *Robot* est bien plus récent. En 1920, Karel Capek a employé le mot *Robota* dans l'une de ses pièces de théâtre pour désigner un androïde capable d'accomplir les tâches qui lui ont été imposées [26]. Le terme *Robota* (Tchèque) signifiant travail (corvée). Avec la traduction de la pièce, le mot *Robot* entra dans la langue anglaise en 1923 et devint rapidement l'objet de nombreux livres de science fiction. Vingt ans plus tard, le célèbre auteur de science fiction Asimov fit des robots fabriqués par des roboticiens, il cria donc le terme de *roboticiens* et le nom de la science la *robotique*.

Néanmoins, le terme *Automate Industriel* est employé pour désigner une machine automatique capable de réaliser des mouvements cycliques. La robotique est probablement la première technique d'automatisation à présenter un caractère de souplesse par opposition machines, simples ou sophistiquées, qui constituent aujourd'hui la majeure partie du parc industriel, et qui sont complètement spécialisées et figées dans la tâche pour laquelle elles

ont été conçues. Par opposition la nouveauté des *Machines Robots* est de même nature que celles des machines informatiques qui grâce au concept de logiciel, ont été les premières machines souples, c'est à dire utilisables pour un ensemble de tâches non prédéterminées. D'après l'association Française de Normalisation **AFNOR**, un robot est un *Manipulateur* commandé en position, reprogrammable, polyvalent à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils des dispositifs spécialisés, au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution d'une variété de tâches.

III. ARCHITECTURE ET DESCRIPTION DES ROBOTS ARTICULES

Bien que toute comparaison ait ses limites et qu'il n'y ait pas lieu d'accentuer le caractère anthropomorphique qu'on attribue trop souvent au robot, on doit reconnaître qu'au niveau fonctionnel, ce dernier peut se comparer utilement au système *Bras + Cerveau* [25] de l'homme (tableau I-01). Il a souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet. Son unité de commande utilise, notamment un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances. Ses machines polyvalentes sont généralement étudiées pour effectuer la même fonction de façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autres fonctions sans modification permanente du matériel. Cette définition est le reflet des différentes composantes d'une cellule robotisée.

Bras et cerveau	Fonction	Equipement sur un robot
Vaisseaux sanguins	Arrivée du sang chargé des éléments énergétiques	Arrivée de la source d'énergie
Os	Squelette bras + main	Système mécanique articulé (bras + préhenseur ou outil)
Muscles	Fonction motrice	Actionnaires (moteurs)
Tendons	Liaison muscle-os	Transmissions
Capteurs proprioceptifs	Contrôle du niveau de contraction des muscles	Capteurs internes
Capteurs extéroceptifs	Information sur l'environnement	Capteurs externes
Moelle épinière et cerveau	Commande	Calculateur ou système de commande

Tableau I-01 : Comparaison d'un robot au système « bras + cerveau » de l'homme

- 1. Le mécanisme :** Ayant une structure plus ou moins proche de celle du bras humain, il permet de remplacer ou de prolonger son action. Sa motorisation est réalisée par des

actionneurs électriques, pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux articulations par des systèmes appropriés.

2. La perception : Qui permet de gérer les relations entre le robot et son environnement, les organes de perception sont des capteurs proprioceptifs lorsqu'ils mesurent l'état interne du robot (positions, vitesses des articulations) et extéroceptifs lorsqu'ils recueillent des informations sur l'environnement.

3. La commande : Qui synthétise les consignes des asservissements pilotant les actionneurs. A partir de la fonction de perception et des ordres de l'utilisateur, elle permet d'engendrer les mouvements du robot.

5. L'interface homme-machine : A travers laquelle l'utilisateur programme les tâches que le robot doit exécuter.

6. Le poste de travail : ou environnement dans lequel évolue le robot.

III. 1. Constituants mécaniques des robots

Un robot n'est pas fait pour décrire des trajectoires, c'est un outil destiné à exécuter ce qu'on appelle des tâches [25]. Or, de par sa versatilité on ne peut pas connaître à l'avance avec précision qu'elle tâche il aura à mener à bien. Comment alors concevoir une structure mécanique (cinématique) s'adaptant bien à ces tâches inconnus? c'est un problème important qu'on résout par certaines approximations.

III.1.1 *Eléments de la structure quasi indépendants des tâches*

On peut tout d'abord remarquer que la structure mécanique va comporter certains éléments quasi indépendants de la tâche alors que d'autres lui seront très liés, [25]. Prenons comme exemple générique la classe de tâche très générale concernant un déplacement d'objet c'est à dire une manutention, comme l'indique la figure I-01.

On vient prendre un objet C posé sur le plateau 1 et le déposer sur le plateau 2 Le robot va comporter 3 grandes parties mécaniques car:

1. Il doit se rendre près de l'endroit où se trouve l'objet C. Il faut donc un véhicule.
2. Il doit ensuite mettre son outil de préhension dans un endroit correct. Cet outil sera donc porté par un système articulé qu'on nomme bras ou porteur.
3. Enfin il doit correctement utiliser sa pince. La 3^{ème} partie du robot sera son organe terminal.

En principe on doit trouver ces trois ensembles sur un robot. La pratique industrielle est souvent autre: On aura les objets à saisir dans la zone atteignante par le bras du robot

aussi les robots industriels sont pratiquement toujours sans véhicule on dit qu'ils sont à « poste fixe ». Ils ne comportent que le bras + organe terminal.

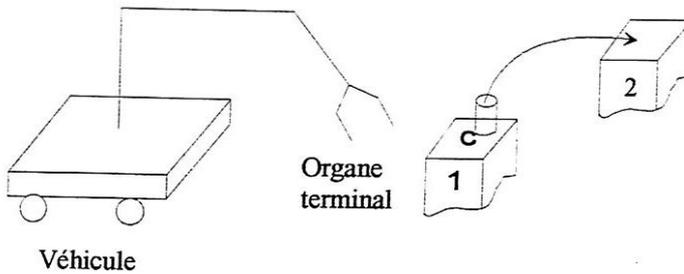


Figure I-01 : Saisie d'un objet par un manipulateur

III.1.2. Eléments de la structure dépendants des tâches

La partie terminale du robot reçoit un outil, c'est lui qui va vraiment agir sur l'environnement et exécuter des tâches. Même en ignorant la nature de l'outil et celle des tâches, on peut affirmer qu'un champ très large d'applications sera ouvert si on peut :

1. Emmener l'outil à un endroit quelconque de l'espace;
2. L'orienter suivant toutes les directions possibles.

Ceci nous amène donc à rechercher comment on définit ces propriétés de positionnement et d'orientation d'un outil c'est à dire d'un objet quelconque. Cette définition est basée sur la notion de degrés de liberté (d.d.l).

1. Degrés de liberté (d.d.l) d'un solide

Considérons un solide S isolé, indéformable, quelconque (figure I-02). Ses facultés de positionnement et d'orientation sont définies par ses d.d.l, [3],[25]. Pour les voir associons au solide un repère cartésien $OXYZ$. Les trois translations T_1 , T_2 et T_3 le long des trois axes OX , OY , OZ forment trois d.d.l indépendants autorisant le positionnement de S à un endroit quelconque de l'espace. Les trois rotations indépendantes R_1 , R_2 et R_3 autour des axes OX , OY , OZ , constituent trois autres d.d.l autorisant l'orientation quelconque du trièdre lié à S vis à vis d'une orientation prise comme référence.

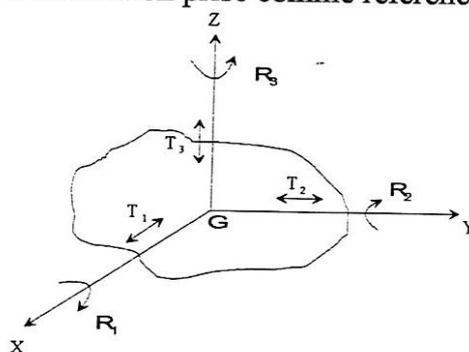


Figure I-02 : Les six degrés de liberté possibles d'un solide indéformable :
trois translations : T_1 , T_2 , T_3 , trois rotations : R_1 , R_2 , R_3

2. Degrés de liberté d'un robot

Si nous considérons les trois grandes parties du robot [6], [24], [25]: véhicule, bras, organe terminal. Chacune d'elle assure une fonction basée en particulier sur ses propres caractéristiques de mobilité. Ainsi le véhicule doit pouvoir se déplacer sur une surface (voiture, train, etc.) ou dans un volume (océan, espace). Il pourra donc avoir au maximum les six (06) d.d.l d'un solide. Le bras ayant comme fonction d'amener l'organe terminal dans une zone de l'espace, trois (03) d.d.l lui suffisent. L'organe terminal devant s'orienter convenablement. Trois(03) d.d.l en rotation lui suffisent également.

Un robot *universel* devrait donc comporter douze (12) d.d.l. Dans la pratique industrielle le véhicule étant absent, le robot dit universel possédera les six (06) d.d.l nécessaires à un positionnement et une orientation quelconque de son organe terminal dans le volume atteignable.

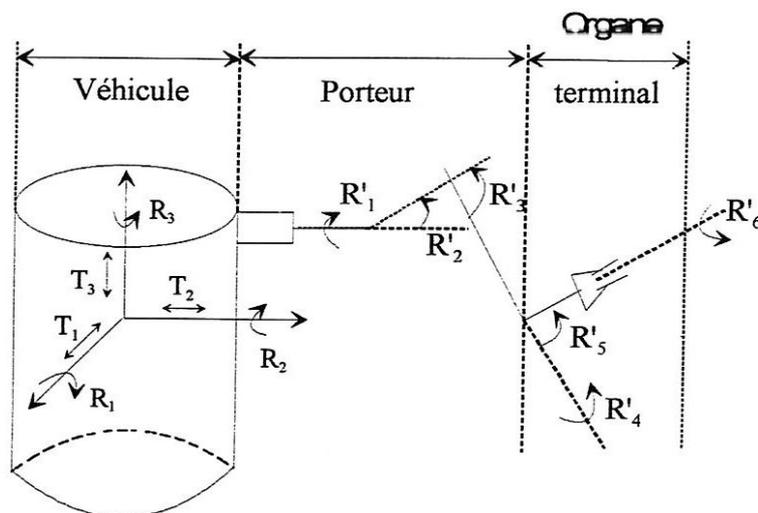


Figure I-03 : Robot sur satellite avec 12 d.d.l

III. 2. Propriétés caractéristiques du robot

On peut dégager deux propriétés très caractéristiques du robot que l'on cherche de nos jours à mettre en œuvre, [6].

III.2.1. La versatilité

Elle concerne la potentialité géométrique et mécanique du robot, c'est à dire son aptitude physique à l'exécution de tâches diverses, à l'exécution diversifiée d'une même tâche, d'autre part la versatilité implique une première caractéristique: tout robot possède une structure à géométrie variable.

III.2.2. L'auto - adaptativité à l'environnement

Il s'agit de la capacité d'initiative du robot [2] pour mener à bien des tâches incomplètement spécifiées, et ceci malgré des modifications imprévues de l'environnement. Cette propriété conduit le robot à mettre en jeu.

- a) Ses capacités d'appréhension de l'environnement (capteur);
- b) Ses capacités de réflexion pour analyser l'espace de la tâche et élaborer une stratégie d'exécution;
- c) Ses modes de commande automatique.

III.3. Représentation d'un robot

Lorsqu'on fait la description ou la représentation d'un objet ou d'une machine c'est que l'on a un objectif en vue. Il s'agit soit de mieux comprendre soi-même certains aspects de la machine en s'aidant d'un support matériel, soit de transmettre une information pertinente à « d'autres ». Les autres peuvent être des personnes, ou bien, dans le cas des robots leurs systèmes de commande qui sont souvent des ordinateurs. On a de nombreuses formes de représentation d'un robot.

1. La photographie ou la représentation en perspective d'un robot n'apporte qu'une information très générale sur son allure extérieure.
2. Un dessin mettant en évidence la nature des articulations sera déjà plus significatif de l'usage du robot. Pour cela, le dessin doit rester simple et pour être compris de tout le monde, utiliser des normes. Le tableau (I-02) donne ainsi les normes **AFNOR** pour des liaisons mécaniques effectivement réalisées industriellement.
3. Mais l'on se doute bien que l'on aura à faire des calculs sur cette architecture. On est donc amené à élaborer une description plus mathématique. Elle peut avoir deux objectifs:
 - La classification des robots
 - L'élaboration d'un modèle qui servira à la commande du robot

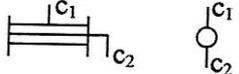
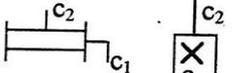
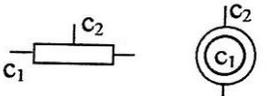
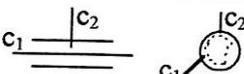
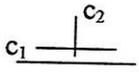
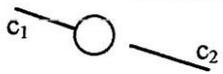
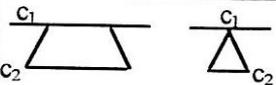
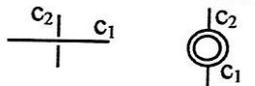
Nom de la liaison	Mouvements relatifs	Nombre de d.d.l	Symboles
Liaison encastrement	0 rotation 0 translation	0	
Liaison pivot	1 rotation 0 translation	1	
Liaison glissière	0 rotation 1 translation	1	
Liaison glissière hélicoïdale	1 rotation 1 translation conjuguées	1	
Liaison pivot glissant	1 rotation 1 translation	2	
Liaison appui plan	1 rotation 2 translations	3	
Liaison rotule	3 rotations 0 translation	3	
Liaison linéaire rectiligne	2 rotations 2 translations	4	
Liaison linéaire annulaire	3 rotations 1 translation	4	
Liaison ponctuelle	3 rotations 2 translations	5	
Liaison libre	3 rotations 3 translations	6	Pas de symbole Pas de contact entre les 2 corps

Tableau I-02 : Normes AFNOR de représentation des liaisons mécaniques

III.3.1. Le nombre de degré de liberté

Les commentaires précédents montrent que 6 degrés de liberté sont nécessaires et suffisants à une structure mécanique articulée [25] pour accomplir les déplacements les plus généraux, donc en principe les tâches les plus générales. Cependant de nombreux systèmes mécaniques articulés, utilisés surtout pour la manutention, ont moins de 6 degrés de liberté. D'autre part, on a parfois besoin de système à plus de 6 degrés de liberté. Ceci est dû essentiellement aux problèmes de précision positionnelle ou de fonctions spécialisées.

III.3.2. Les faux degrés de liberté

On appelle arbitrairement faux degré [25], [26] de liberté une mobilité apparente d'un segment ou d'une partie d'un système mécanique articulé qui, en réalité, ne conduit pas à augmenter le nombre de degré de liberté déjà présent en l'absence de cette mobilité apparente. On a par exemple:

1. Les degrés de liberté propres à un outil: L'organe terminal et ou porte outil. Celui-ci pour travailler doit avoir une mobilité qui est lui est propre.
2. L'augmentation du nombre d'articulations pour contourner les obstacles.
3. La compensation du déficit en nombre de degrés de liberté de l'organe terminal par la création de degré de liberté amont sur le porteur ou le véhicule

III.3.3. Les deux grandes boucles de contrôles

La figure I-04 fait clairement apparaître les deux boucles de contrôles notées **A** et **B** qu'on doit trouver sur un robot.

La boucle **A** est une sorte de boucle interne ; elle permet de traiter le problème en connaissant à l'avance la trajectoire que je désire faire suivre au robot. Le résultat de cette poursuite dépend de nombreux paramètres mais tous internes au robot et à son système de commande [24].

La boucle **B** est une boucle externe; elle va permettre non pas de suivre une trajectoire mais de déterminer quelle est la trajectoire à suivre pour correctement exécuter une tâche désirée.

Par exemple si je veux saisir l'objet **M** de la figure I-05 et que je suis gêné par l'obstacle **P** que je n'avais pas prévu, c'est la boucle **B** qui va permettre de générer les bons déplacements du robot afin qu'il soit saisi en dépit de la présence de **P**.

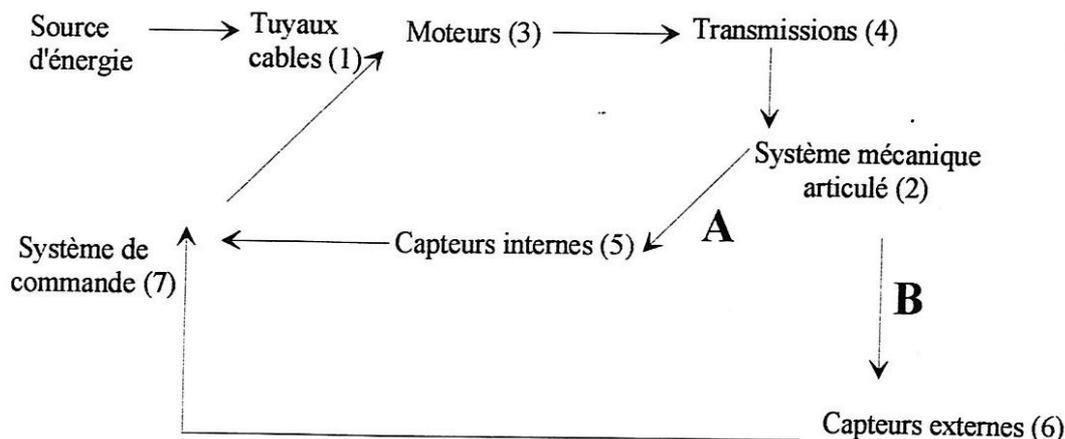


Figure I-04 : La grande boucle de contrôle dans un robot

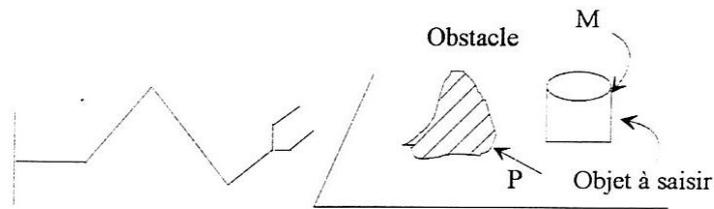


Figure I-05

IV. DEFINITIONS

IV.1. Articulation

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degré de liberté de l'une par rapport à l'autre.

Soit m le nombre de degré de liberté résultant, encore appelé mobilité [6] de l'articulation. La mobilité est telle que:

$$0 \leq m \leq 6$$

Lorsque $m=1$, ce qui est le cas le plus fréquent en robotique, l'articulation est dite simple, soit rotoïde, soit prismatique.

IV.1.1. Articulation rotoïde (notée R)

Il s'agit d'une articulation de type pivot [5], réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun. La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe. L'articulation rotoïde est représentée par le symbole de la figure I-06 suivante:

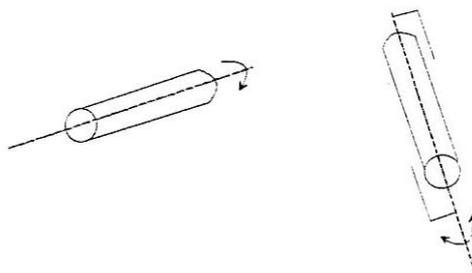


Figure I-06: Articulation rotoïde

IV.1.2. Articulation prismatique (notée P)

Il s'agit d'une articulation de type glissière réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La figure I-07 suivante donne sa représentation symbolique:

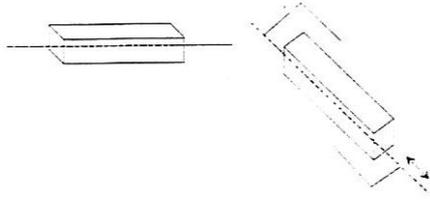


Figure I-07 : Articulation prismatique

V. DIFFERENTES STRUCTURES DE BASE

Elles sont dérivées des différents systèmes de repérage d'un point dans l'espace.

V.1. Structure PPP

Ce type de structure, concernant 14% des robots manipulateurs industriels [5], [7] est bien adapté à un repérage de O en coordonnées cartésiennes. Ce robot a trois articulations prismatiques, est donc codés par PPP. Le robot cartésien est caractérisé par un petit champ de travail mais il est doté d'une grande rigidité et est capables d'une grande précision dans la localisation de l'effecteur. Son contrôle est simple, dû au mouvement linéaire des liaisons.

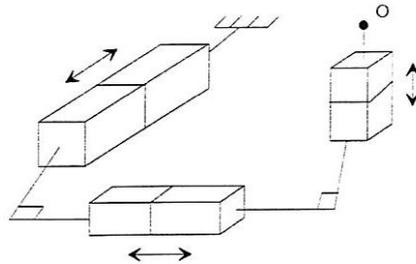


Figure I-08 : Structure PPP

V.2. Structure RPP ou PRP

Ce type de structure, concernant 47% des robots manipulateurs industriels est bien adapté à un repérage de O en coordonnées cylindriques. Ce robot est constitué d'une articulation de rotation et de deux articulations prismatiques [5], [15]; codés par RPP ou PRP. Leur champ de travail est plus large que celui du robot cartésien, mais leur rigidité mécanique est moins puissante.

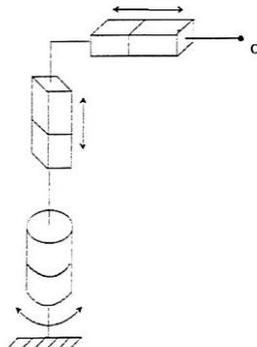


Figure I-09 : Structure RPP

V.3. Structure RRP

Ce type de structure, concernant 13% des robots manipulateurs industriels, est bien adapté à un repérage de O en coordonnées sphériques, [7]. Ce robot est constitué de deux articulations de rotations et d'une seule prismatic; codé RRP, [5]. Le champ de travail de ce type de robot est plus large que celui des robots cartésien et cylindrique.

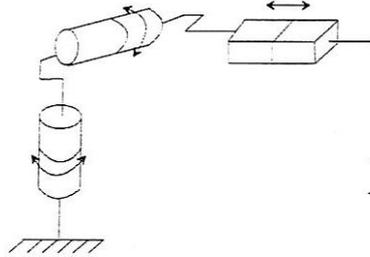


Figure I-10 : Structure RRP

V.4. Structure RPR ou PRR ou RRP

Ce type de structure, concerne 1% des robots manipulateurs industriels, est bien adapté à un repérage de O en coordonnées toriques [5], [17].

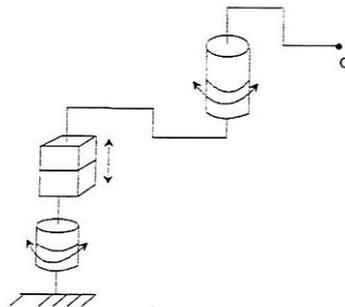


Figure I-11 : Structure RPR

V.5. Structure RRR

Ce type de structure, concerne 25% des robots manipulateurs industriels, est bien adapté à un repérage de O dans un système en coordonnées qualifiées d'anthropomorphes par analogie avec les bras humains [5]. Son champs de travail est plus grand que celui de n'importe quel autre type de robot et sa rigidité mécanique est la plus faible.

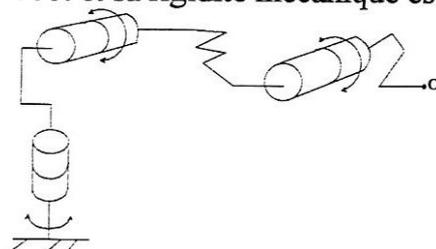


Figure I-12 : Structure RRR

VI. DIFFERENTES COMPOSANTES D'UNE CELLULE ROBOTISEE

VI.1. Les capteurs

Dans ce paragraphe on va étudier seulement quelques types de capteurs [5], on va parler:

- Des capteurs de position;
- Des capteurs de vitesse;
- Des systèmes associés qui permettent de connaître à tout instant l'ensemble des paramètres et leurs dérivées premières, appelées par la suite coordonnées et vitesses généralisées. Ces paramètres permettent de définir l'état du robot manipulateur à savoir la position et la vitesse relative des différents corps qui le constituent.

VI.1.1. Capteurs de position

La figure I-13 suivante indique les différents types des systèmes de mesure de position, [5].

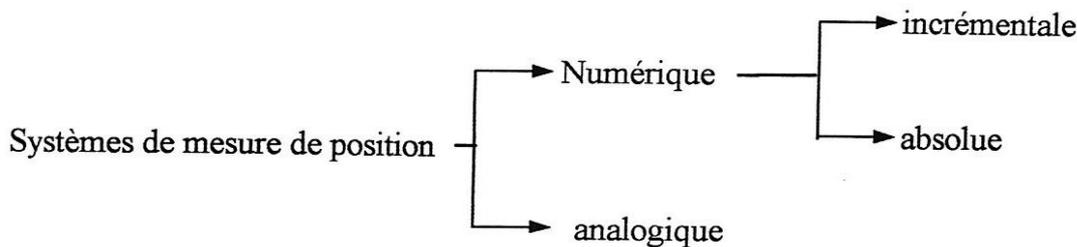


Figure I-13

1. Mesure de position numérique

a- Mesure de position incrémentale

Le capteur de mesure, très simple, émet une impulsion à chaque fois que le paramètre de configuration mesuré varie d'une quantité constante appelée pas du capteur.

b- Mesure de position numérique absolue

Le capteur de mesure, délicat à réaliser, délivre une information parallèle qui code en binaire pur ou en binaire réfléchi la valeur du paramètre de configuration mesuré.

2. Mesure de position analogique

Un tel système de mesure intègre un capteur qui délivre un signal analogique dont une caractéristique est proportionnelle à la position mesurée et réalise une conversion analogique - numérique de cette grandeur.

VI.1.2. Capteurs de vitesse

La figure I-14 ci-après indique les différents types de systèmes de mesure de vitesses [5].

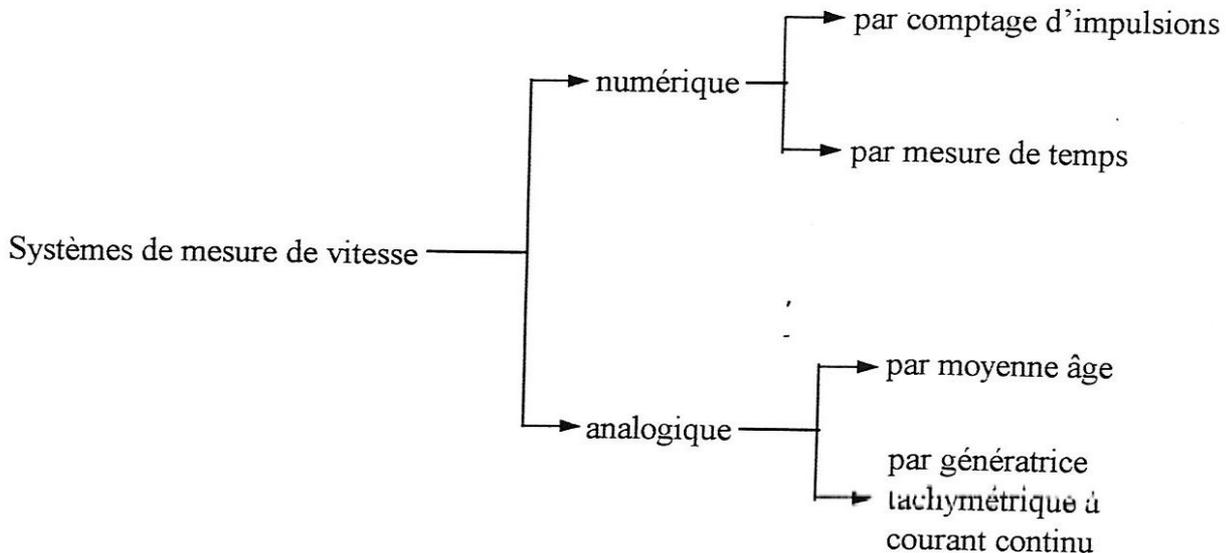


Figure I-14

Dans les systèmes de mesure de vitesse analogique par moyenne âge ou numérique, le capteur est incrémentale du type de ceux utilisés pour la mesure de position.

VI.2. LES ACTIONNEURS

Le terme d'actionneur [5] désigne tout dispositif générateur d'effort à vitesse variable qui permet de modifier la configuration d'un robot manipulateur par transformation d'une énergie source en énergie mécanique. Il est possible de les classer selon l'énergie utilisée.

VI.2.1. L'énergie pneumatique

L'énergie pneumatique est fréquemment employée sur les manipulateurs à cycles préréglés pour lesquels la précision n'est pas obtenue par une boucle d'asservissement mais par des butées mécaniques.

La difficulté de contrôle des mouvements et le rendement peu important sont les inconvénients majeurs des systèmes pneumatiques. Cependant certains avantages sont à considérer:

- La simplicité de mise en œuvre
- Economiques
- Robustesse

Les types d'actionneurs sont:

- Les vérins linéaires;
- Les vérins angulaires;
- Les moteurs.

VI.2.2. L'énergie hydraulique

L'énergie hydraulique est l'une des plus intéressantes dans le domaine de la robotique pour de multiples raisons:

- Puissance massique élevée;
- Temps de réponse court;
- Précision.

Certains problèmes sont cependant à considérer:

- L'étanchéité des conduites de fluide sous pression ainsi que les points de raccordement.
- Coût élevé de certains éléments.

VI.2.3. L'énergie électrique

L'énergie électrique est certainement celle qui est le mieux maîtrisée à l'heure actuelle. Les commandes sont aisées, précises et fiables, des développements importants ont été effectués et les applications à la robotique sont de plus en plus nombreuses. Cette énergie n'a pas que des avantages. Le principal inconvénient réside dans le rapport puissance - masse qui est faible.

La robotique emploie deux types d'actionneurs électriques :

- Les moteurs à courant continu ;
- Les incrémentaux ou pas à pas.

VI.3. EFFECTEURS

Les effecteurs sont les composants du robot qui forment l'interface avec l'environnement, ils sont classés selon deux types [5], [25]:

- Les préhenseurs;
- Les outils.

VI.3.1. Les préhenseurs

Le préhenseur est un système permettant de manipuler des objets. On considère les relations de saisie, de maintien et de dépôt :

- La saisie consiste à réaliser une relation de contact mécanique maintenue durant un temps déterminé. Le préhenseur universel n'existe pas en robotique. Les techniques employées en robotique sont orientées vers la saisie de familles d'objets.

- Le maintien du contact est obtenu selon plusieurs méthodes en considérant diverses caractéristiques des objets:

- ◆ Masse;
- ◆ Dimensions géométriques - formes;
- ◆ Nature du matériau;
- ◆ Aspect général (lisse, rugueux, etc.).

- Le dépôt constitue l'opération inverse de la saisie. Selon la tâche elle est réalisée soit sans contrainte sur l'environnement, c'est à dire sans se soucier des conséquences soit en considérant des contraintes de mise en contact avec le lieu de dépôt. En assemblage, par exemple, le dépôt est réalisé en un lieu géométrique précis

Il existe diverses techniques de préhension.

- ◆ La préhension par serrage mécanique;
- ◆ La préhension par dépression;
- ◆ La préhension magnétique;
- ◆ Les crochets;
- ◆ La préhenseur électrostatique;
- ◆ Les cuillères;
- ◆ Les bandes adhésives;
- ◆ Les plates-formes ou spatules;
- ◆ Les terminaux d'assemblage.

VI.3.2. Les outils

La tâche du robot n'est pas toujours liée à la manipulation de pièces. Des outils viennent de substituer au préhenseur dans de nombreuses applications. Un système de jonction automatique est utilisé pour permettre le changement de l'outil en cours de tâche.

Citons quelques exemples d'outils employés couramment :

- ◆ Tête de soudage par points;
- ◆ Pistolet de peintre;
- ◆ Meules;
- ◆ Visseuses;
- ◆ Perceuses;
- ◆ Tête de soudage à l'arc.

VII. CONCLUSION

Un robot est un système mécanique articulé avant tout fonctionnel. La conception d'une architecture mécanique pour un robot pour apparaître un problème assez simple. En réalité, il s'agit d'une difficulté de base très complexe car elle devrait prendre en compte non seulement les possibilités mécaniques de réalisation mais dans le même temps les possibilités d'élaboration d'une commande qui passe par celles d'un modèle mathématique. Ces dernières réagissent fortement sur la conception mécanique si on recherche de bonnes performances. Nous nous sommes contentés dans ce chapitre de cerner la définition des robots et de la robotique, non pas sous une forme mathématique mais au contraire en restant proche de la réalité contemporaine nécessairement appelée à évoluer avec le progrès des techniques. Aussi, on a donné quelques définitions de termes concernant plus particulièrement les domaines de la modélisation et de la commande des robots.

CHAPITRE II

DESCRIPTION DE LA SITUATION D'UN SOLIDE DANS L'ESPACE

I. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons essayer de présenter différentes descriptions concernant la situation d'un solide dans l'espace. Pour ce faire, nous allons essayer de cerner la majorité des méthodes de descriptions en position et en orientation.

Un solide indéformable et libre dans l'espace possède six degrés de liberté, il est en effet nécessaire pour le positionner et l'orienter à un instant donné de fixer 06 paramètres indépendants, 03 pour la position de l'origine d'un repère fixe, qui lui est associée est 03 pour l'orientation de ce repère par rapport à un repère de référence, [7]. En robotique ces paramètres constituent ce que l'on appelle les coordonnées opérationnelles et sont définis dans le repère de référence du poste de travail ou espace opérationnel. Plusieurs méthodes existant pour définir la situation d'un solide dans l'espace. Quelle que soit la méthode utilisée, la matrice de transformation correspondante peut se mettre sous la forme.

$$T = \begin{bmatrix} M & P_R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-01})$$

La matrice M représente l'orientation alors que la matrice colonne P représente la position.

I.1. Hypothèse de base pour le calcul du modèle direct

Afin de simplifier le calcul, nous allons supposer les conditions suivantes remplies.

- 1- La base du robot est fixe.
- 2- Le repère de référence R_0 est lié à la base robot.
- 3- Il n'existe pas d'obstacles dans le volume atteignable du robot.
- 4- Toute tâche peut être exécutée en contrôlant la position et l'orientation de l'organe terminal.

II. DEFINITION DE LA POSITION DE L'ORGANE TERMINAL (O-T)

Pour définir la position de L'O-T, le choix le plus spontané consiste à définir la position du point O_n centre de gravité de L'O-T [4], qui peut être éventuellement virtuel, par rapport à O_0 centre de repère fixe R_0 (O_0, X_0, Y_0, Z_0) lié au bâti du robot.

Selon la structure du robot la position peut être définie par :

II.1. Coordonnées cartésiennes

Elles donnent directement les composantes P_x , P_y et P_z de l'origine, cette représentation est la plus utilisée, [7], [8].

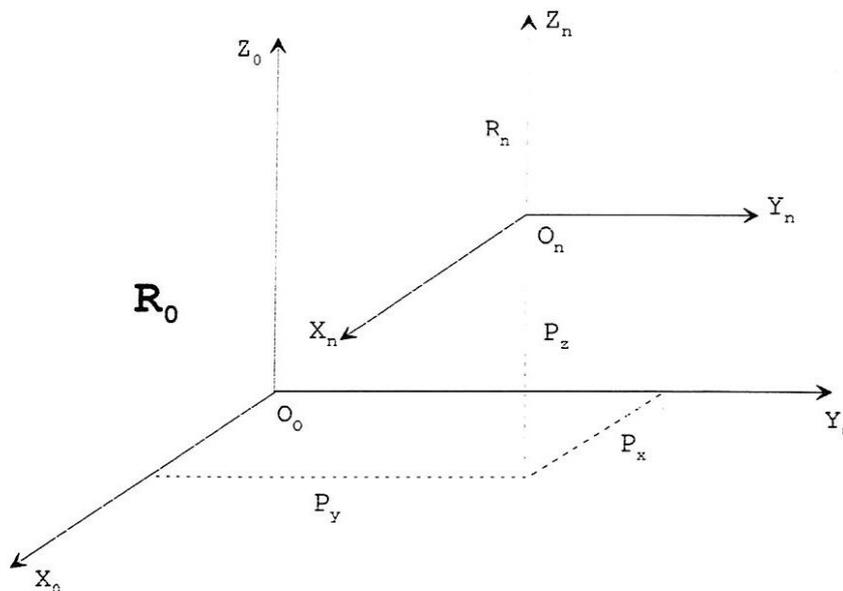


Figure II-01

II.2. Coordonnées cylindriques

Cette description est préférable lorsque le robot présente une structure cylindrique. La matrice position à pour expression [8]:

$$P_{\text{cyl}} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ Z \end{bmatrix} \quad (\text{II-02})$$

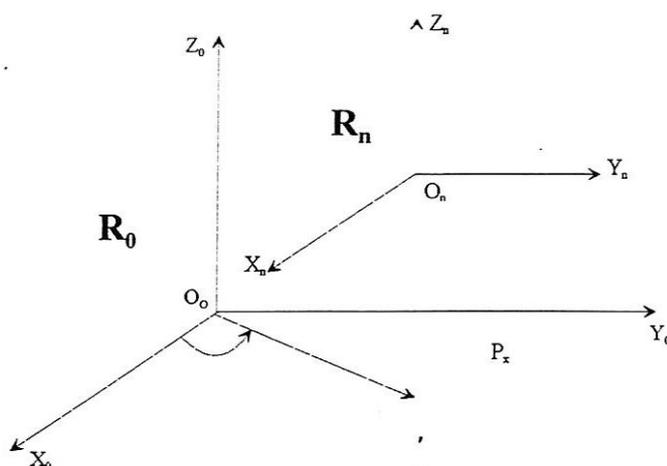


Figure II-02

Inversement, pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques, on peut utiliser les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \\
 \alpha &= A \tan 2(P_x, P_y) \\
 Z &= P_z
 \end{aligned}
 \tag{II-03}$$

Remarque:

ATAN 2 est une fonction FORTRAN qui calcule l'arc tangent à partir de la donnée de deux arguments.

II.3. Coordonnées sphériques

$$\text{Psph} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \sin \beta \\ r \sin \alpha \cos \beta \\ r \cos \beta \end{bmatrix}
 \tag{II-04}$$

On peut obtenir les coordonnées sphériques (α, β, r) à partir des coordonnées grâce aux relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= A \tan 2(P_y, P_x) & \text{si } \beta \neq 0 \\
 \alpha &= 0 & \text{si } \beta = 0 \\
 \beta &= A \tan 2\left(\frac{P_y}{S_\alpha}, P_z\right) & \text{si } \alpha \neq 0 \\
 \beta &= A \tan 2(P_x, P_z) & \text{si } \alpha = 0 \\
 r &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}
 \end{aligned}
 \tag{II-05}$$

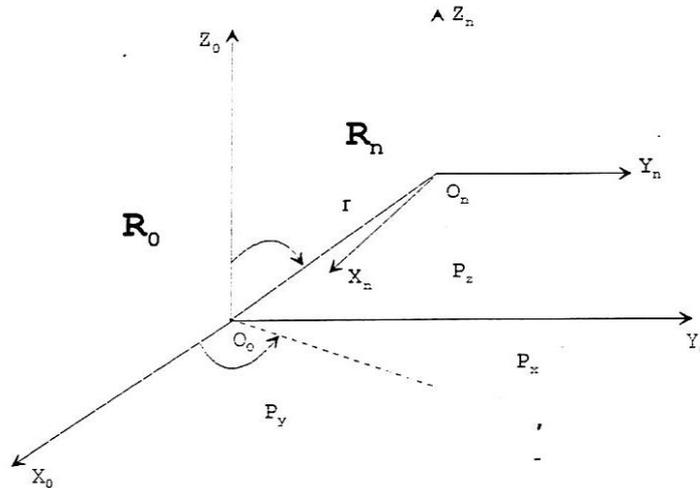


Figure II-03

III. DEFINITION DE L'ORIENTATION DE L'ORGANE TERMINAL (O-T)

Si la définition de la position est assez naturelle et par conséquent simple, celle de l'orientation est moins évidente, car il est difficile d'avoir une notion de l'orientation d'un corps dans l'espace, sauf situations particulières. Afin de préciser cette notion d'orientation, on va doter L'O-T d'un repère orthonormé $R_n (O_n X_n Y_n Z_n)$ qui va représenter des directions qui lui seront relativement fixes [3].

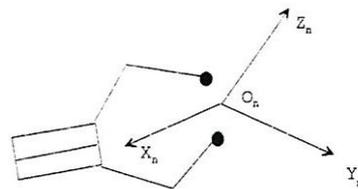


Figure II-04

Ainsi l'orientation du repère R_n par rapport à R_0 peut être définie d'un grand nombre de manières.

- Les cosinus directeurs.
- Les angles d'Euler.
- Les angles de Bryant.
- Les paramètres d'Euler (ou d'Olinde-Rodrigues).
- Les angles de Roulis-Tangage-Lacet.

III.1. Cosinus directeurs

L'orientation est définie par la donnée de trois vecteurs S , n et a , constituant 9 éléments appelés cosinus directeurs [3], [7]. Ces vecteurs étant unitaires et orthogonaux.

- La donnée de deux vecteurs arbitrairement choisis parmi les trois est suffisante, puisque le troisième se déduit directement.
- Trois composantes, seulement sont indépendantes mais, dans le cas général, il est difficile de les fixer.

Cette méthode est donc redondante puisqu'elle donne plus de paramètres qu'il n'en faut, quoiqu'elle a l'avantage de conserver la symétrie intrinsèque du problème, et de définir l'orientation de l'O-T uniquement à l'aide de la matrice de passage. La matrice d'orientation associée s'écrit :

$$A_{CD} = \begin{bmatrix} S_x & n_x & a_x \\ S_y & n_y & a_y \\ S_z & n_z & a_z \end{bmatrix} \quad (\text{II-06})$$

III.2. Angles classiques d'Euler

On considère que le passage du repère R_0 au repère R_n peut être obtenu en effectuant trois rotations dans l'ordre suivant [3]:

- D'un angle β (précession) autour de Z_0 amenant au repère R' (O_0, X', Y', Z')
- D'un angle α (nutation) autour de X' amenant au repère R'' (O_0, X'', Y'', Z'')
- D'un angle γ (rotation propre) autour de Z'' amenant au repère R_i (O_0, X_i, Y_i, Z_i)

Dans ce cas si l'on calcule la matrice de passage du repère R_0 au repère R_i qu'on note R_0^i qui est le produit de trois matrices de passage correspondant chacune à une rotation autour d'un axe.

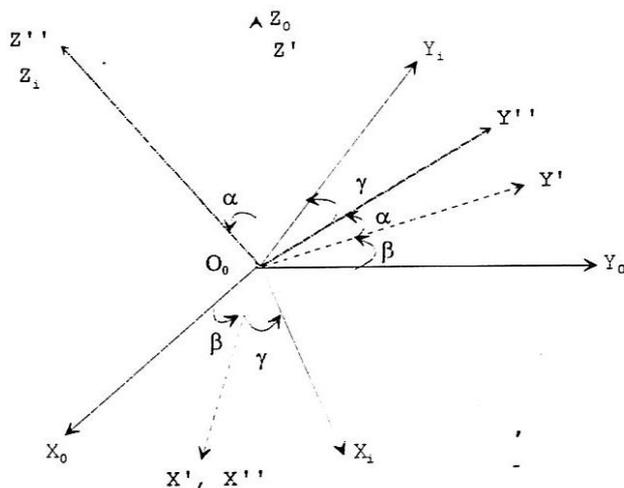


Figure II-05

$$A_{Eul} = R_0^i = \begin{bmatrix} C\beta & -S\beta & 0 \\ S\beta & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\gamma & S\gamma & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Précession β/Z_0 Nutation α/X_1 Rotation propre γ/Z''

$$A_{Eul} = \begin{bmatrix} C\beta C\gamma - C\alpha S\beta S\gamma & -C\beta S\gamma - C\alpha S\beta C\gamma & S\alpha S\beta \\ S\beta C\gamma + C\alpha C\beta S\gamma & C\alpha C\beta C\gamma - S\beta S\gamma & -S\alpha C\beta \\ S\alpha S\gamma & S\alpha C\gamma & C\alpha \end{bmatrix} \tag{II-07}$$

Les variations autorisées pour les angles d'EULER sont les suivantes:

$$\alpha \in [0, \pi]$$

$$\beta \in [-\pi, \pi]$$

$$\gamma \in [-\pi, \pi]$$

Si on connaît les cosinus directeurs et qu'on veut calculer α , β et γ , on le peut à l'aide des équations suivantes:

$$\cos\alpha = a_z$$

$$\sin\alpha = \pm(1 - \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\beta = -\left(\frac{n_z}{\sin\alpha}\right)$$

$$\sin\beta = \frac{S_z}{\sin\alpha}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_y}{\sin\alpha}$$

$$\sin\gamma = \frac{a_x}{\sin\alpha}$$

(II-08)

L'inconvénient de l'utilisation des angles d'Euler est que la symétrie du problème est déduite, car il y a toujours une direction privilégiée par rapport aux autres, [3], [8]. En plus du fait que le choix conduit à des singularités pour certaines orientations bien précises, en particulier a_z vaut ± 1 (on peut seulement connaître $\beta+\gamma$) cet inconvénient peut être supprimé en utilisant l'une des six configurations non classiques des angles d'Euler.

III.3. Angles non classiques d'Euler (Angles de Bryant)

Les angles de Bryant [3], [7] permettent aussi de définir l'orientation de l'O-T dans le repère fixe R_0 par trois rotations successives:

- D'un angle ϕ_1 autour de X_0 amenant au repère R' (O, X', Y', Z')
- D'un angle ϕ_2 autour de Y' amenant au repère R'' (O, X'', Y'', Z'')
- D'un angle ϕ_3 autour de Z'' amenant au repère R_i (O, X_i, Y_i, Z_i)

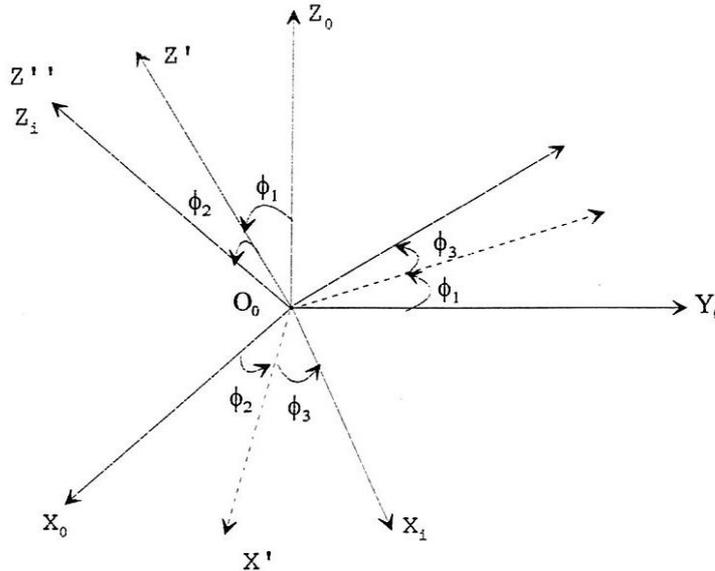


Figure II-06

Dans ce cas, si on calcule la matrice de passage du repère R_0 à R_i qu'on note R_0^i est qui est le produit de trois matrices de passage correspondant chacune à une rotation autour d'un axe.

$$A_{R_{II}}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} C\phi_2 C\phi_3 & -C\phi_2 S\phi_3 & S\phi_2 \\ C\phi_1 S\phi_3 + S\phi_1 S\phi_2 C\phi_3 & C\phi_1 C\phi_3 - S\phi_1 S\phi_2 S\phi_3 & -S\phi_1 C\phi_2 \\ S\phi_1 S\phi_3 - C\phi_1 S\phi_2 C\phi_3 & S\phi_1 C\phi_3 + C\phi_1 S\phi_2 S\phi_3 & C\phi_1 C\phi_2 \end{bmatrix} \quad (II-9)$$

Les variations autorisées pour les angles de Bryant sont les suivantes:

$$\phi_1 \in [-\pi, \pi]$$

$$\phi_2 \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\phi_3 \in [-\pi, \pi]$$

Le calcul des angles de Bryant en fonction des éléments de la matrice A_{CD} :

$$\sin \phi_2 = S_Z$$

$$\cos \phi_2 = \pm (1 - \sin^2 \phi_2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin \phi_1 = -n_Z / \cos \phi_2$$

$$\cos \phi_1 = a_Z / \cos \phi_2$$

$$\sin \phi_3 = -S_X / \cos \phi_2$$

$$\cos \phi_3 = S_Y / \cos \phi_2$$

(II-10)

L'avantage de l'utilisation des angles de Bryant [19] est que la symétrie du problème est mieux préservée que lors de l'utilisation des angles d'Euler, mais l'inconvénient demeure l'apparition de certaines singularités, en particulier lorsque $a_X = \pm 1$ (dans ce cas on ne peut connaître que $(\phi_1 + \phi_3)$). Il serait alors intéressant de tester a_Z et a_X avant d'opter pour l'une des méthodes.

III.4. Paramètres d'Euler

Le repère R_i est obtenu en faisant pivoter le repère R_0 d'un angle ε autour d'une direction d'un vecteur unitaire \vec{e} . (Si l'on fait abstraction de la translation qui amène O_0 en O_i), [9].

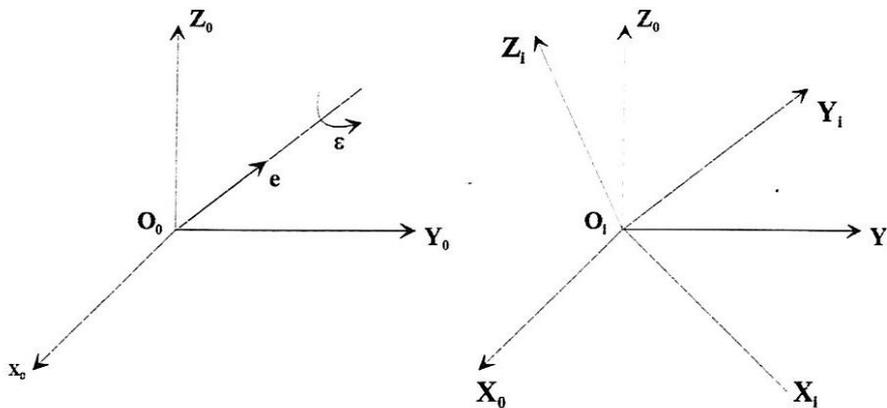


Figure (II-07)

L'orientation du repère R_i par rapport au repère R_0 est définie par le couple (\vec{e}, ε) ou le quadruple (p, q, r, s) tel que:

$$\begin{aligned} p &= e_X \sin(\varepsilon/2) \\ p &= e_Y \sin(\varepsilon/2) \\ p &= e_Z \sin(\varepsilon/2) \\ p &= \cos(\varepsilon/2) \\ \text{avec : } \vec{e} &= [e_X, e_Y, e_Z]^T \\ \text{notons que : } p^2 + q^2 + r^2 + s^2 &= 1 \end{aligned} \tag{II-11}$$

Si la plage de variation de ε peut être limitée à $[0, \pi]$ (ce qui est le cas généralement sauf pour les opérations de vissage) alors $S \geq 0$ ce qui permet d'écrire que :

$$\varepsilon = 2 \operatorname{Arccos} \left[1 - \left(p^2 + q^2 + r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

On tire par conséquent:

$$\begin{aligned} e_X &= p/A \\ e_Y &= q/A \\ e_Z &= r/A \\ \text{avec : } A &= \left(p^2 + q^2 + r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{Si } p.q.r &\neq 0 \end{aligned} \tag{II-12}$$

On conclut que le triplet (p, q, r) permet de calculer le quadruplé $(e_X, e_Y, e_Z, \varepsilon)$ donc de connaître l'orientation de R_i par rapport à R_0 .

La matrice de passage s'exprime de la façon suivante :

$$R_0^i = A_{PE} = \begin{bmatrix} 2(p^2 + s^2) - 1 & 2(pq - rs) & 2(pr + qs) \\ 2(pq + rs) & 2(q^2 + s^2) - 1 & 2(qr - ps) \\ 2(pr - qs) & 2(qr + ps) & 2(r^2 + s^2) - 1 \end{bmatrix} \tag{II-13}$$

Où S peut être remplacé par: $S = (1 - p^2 - q^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$

Il est alors possible d'exprimer très simplement les paramètres d'Euler en fonction des cosinus directeurs.

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{1}{2} \sqrt{s_x + n_y + a_z + 1} \\
 p &= \frac{1}{2} \operatorname{Sgn}(n_z - a_y) \sqrt{s_x - n_y - a_z + 1} \\
 q &= \frac{1}{2} \operatorname{Sgn}(a_x - s_z) \sqrt{-s_x + n_y - a_z + 1} \\
 r &= \frac{1}{2} \operatorname{Sgn}(s_y - n_x) \sqrt{-s_x - n_y + a_z + 1}
 \end{aligned} \tag{II-14}$$

Ces expressions ne font intervenir aucune position singulière. L'intérêt des paramètres d'Euler, c'est qu'ils conservent la symétrie intrinsèque du problème, ne privilégient aucune direction.

III.5. Angles de Roulis-Tangage-Lacet

La convention adoptée est celle de la figure II-08, les angles ϕ , θ et ψ désignant respectivement le Roulis, le Tangage et le Lacet [3].

La matrice d'orientation correspondante est donc :

$$\begin{aligned}
 A_{RTL}(\phi, \theta, \psi) &= A(Z, \phi) \cdot A(Y, \theta) \cdot A(X, \psi) \\
 A_{RTL}(\phi, \theta, \psi) &= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & C\theta S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix} \tag{II-15}
 \end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression des angles de Roulis - Tangage - Lacet en fonction des cosinus directeurs ; on utilise la même méthode que les paragraphes précédents, en multipliant à gauche par $A^{-1}(Z, \phi)$, on obtient : $A(Z, -\phi) \cdot A_{CD} = A(Y, \theta)A(X, \psi)$.

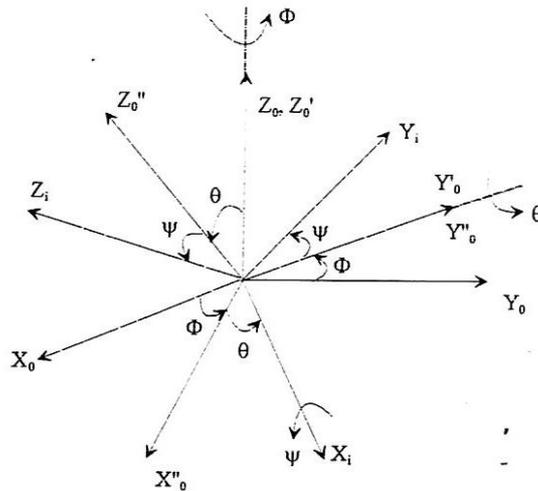


Figure II-08

On déduit donc les solutions suivantes :

$$\phi = A \tan 2(S_Y, S_X)$$

$$\phi' = A \tan 2(-S_Y, -S_X) = \phi + 180^\circ$$

Il y a singularité si S_X et S_Y sont nuls.

De même, on tire

$$\theta = A \tan 2(-S_Z, C\phi S_X + S\theta S_Y)$$

$$\psi = A \tan 2(S\phi a_X - C\phi a_Y, -S\phi n_X + C\phi n_Y)$$

IV. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté différentes descriptions concernant la situation d'un solide dans l'espace. Donc nous avons défini la position de l'organe terminal en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques ainsi en orientation en adoptant cinq (05) représentations différentes.

Pour notre part, on a choisit la méthode des coordonnées cartésiennes pour positionner l'organe terminal à cause de sa simplicité et par souci de généralisation. On a utilisé la méthode des cosinus directeurs pour l'orienter, car elle présente l'avantage de symétrie. En plus, il n'y a pas présence de singularité.

CHAPITRE III

ETUDE CRITIQUE DES DIFFERENTES METHODES DE COMMANDE

I. INTRODUCTION

I.1. Position du problème

Différents outils mathématiques sont utilisés pour représenter les déplacements de solides, chacun possède ses avantages et ses inconvénients.

Des recherches ont abouti à des résultats intéressants quant à l'utilisation de la théorie des graphes issue de la recherche opérationnelle comme outil général [13], simple et efficace d'aide à l'étude de la cinématique elle permet de déterminer l'identité structurale d'une chaîne cinématique, c'est un bon moyen de classification et de clarification. Par sa définition très générale, le graphe ne permet pas de caractériser la fonction d'un mécanisme, en plus, l'intérêt de la théorie des graphes diminue pour les mécanismes simples. Cependant cette théorie reste un outil qui facilite l'étude des mécanismes à chaîne cinématique complexe [29]. C'est la raison pour laquelle des méthodes algébriques sont développées en s'appuyant sur un système de paramétrage qui permet une description complète des propriétés cinématique du mécanisme.

I.2. Objet de l'étude

Notre sujet porte sur l'étude d'un type de mécanisme particulier qui est le robot manipulateur. De façon générale, l'étude porte sur des mécanismes constitués de corps rigides localisés de façon parfaite grâce à des liaisons de type prismatique P ou rotoïde R sans jeu.

La diversité des méthodes d'étude des mécanismes fait ressortir plusieurs critères de comparaison difficiles à évaluer, rend délicate toute étude critique c'est pourquoi on a fait le classement suivant :

- La notation de description (le système de paramétrage);
- La géométrie et le formalisme mathématique;
- La représentation des déplacements.

II. SYSTEMES DE PARAMETRAGE DES CHAINES CINEMATIQUE

L'ambiguïté qui entoure la définition du terme *notation pour la description* et le fait qu'une notation est l'outil de base pour la mise en équation, nous conduisent à éclaircir ce point.

L'unification de la notation élimine les différences superficielles et facilite par conséquent la comparaison entre les différentes façons de formuler et de résoudre les problèmes de cinématique des mécanismes.

Une notation complète pour décrire entièrement une chaîne cinématique d'un robot manipulateur comprend:

- La numérotation des corps et des liaisons;
- La description topologique de la chaîne cinématique;
- La spécification de la nature de la liaison;
- La disposition des repères locaux;
- La spécification de la position initiale;
- Le choix de l'opérateur de passage entre deux repères consécutifs.

II.1. La notation de DENAVIT et HARTENBERG

La notation **D&H** est la plus répandue [3], [7], elle introduit des hypothèses simplificatrices qui sont:

- Robot manipulateur ayant une structure de chaîne cinématique simple;
- Entre deux corps consécutifs C_i et C_{i+1} , il ne peut y avoir qu'une seule rotation ou translation autour ou le long de Z_{i+1} du repère R_{i+1} ;
- Entre deux corps consécutifs il ne peut y avoir qu'un seul degré de liberté (si ce n'est pas le cas, on intercale un corps fictif de longueur nulle lors de la modélisation);
- La notation définit les relations géométriques entre les axes de liaisons en introduisant une mesure de distance bien définie qui est la *normale commune*, d'où l'avantage de cette notation.

II.1.1. Application de la méthode

La notation **D&H** a été introduite pour la 1^{ère} fois au paramétrage des robots manipulateurs par **PIEPER (1968)**, [29]. Elle décrit le passage entre deux repères consécutifs par quatre (04) paramètres; La géométrie des corps est caractérisée par deux quantités, la normale commune **a**, l'angle de torsion α , les deux autres quantités θ et **r** étant respectivement les variables articulaires de rotation et de translation.

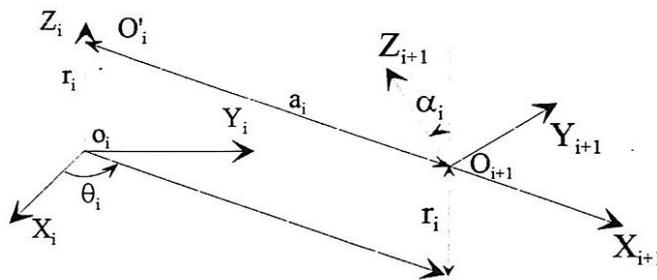


Figure III-01

- a_i : distance entre les axes de liaison (i) et (i+1).
- α_i : angle entre Z_i et Z_{i+1} mesuré autour de X_{i+1} .
- θ_i : angle entre X_i et X_{i+1} mesuré autour de Z_i .
- r_i : distance algébrique sur Z_i de X_i et X_{i+1} .

Alors pour passer du repère R_i au repère R_{i+1} on procède de la façon suivante:

- Rotation d'un angle θ_i du repère R_i autour de l'axe Z_i amène X_i à X_{i+1} ;
- Translation de r_i sur Z_i amène l'origine O_i en O'_i ;
- Translation de a_i sur X_{i+1} amène O'_i en O_{i+1} ;
- Rotation de α_i autour de X_{i+1} amène Z_i en Z_{i+1} .

Comme le mouvement se fait exclusivement autour ou le long de l'axe Z , alors c'est le paramètre r_i qui est variable lorsqu'il s'agit d'une translation et c'est le paramètre θ_i qui est variable si c'est une rotation.

Lorsque l'angle α_i est tel $0 < \alpha_i < \pi$, la définition de l'orientation et de la position est unique, un coefficient permet de distinguer les liaisons rotoïdes des liaisons prismatiques.

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{Si la liaison est rotoïde} \\ 1 & \text{Si la liaison est prismatique} \end{cases}$$

Ceci permet d'écrire la $j^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée q_j

$$q_i = \bar{\sigma}_j \cdot \theta_j + \sigma_j \cdot r_j \tag{III-01}$$

II.1.2. Matrice de passage homogène

Les paramètres de **D&H** permettent de définir le repère R_{i+1} à partir du repère R_i par une matrice T_i^{i+1} de dimension 4×4 dite matrice de passage élémentaire entre deux repères R_i et R_{i+1} , Elle est obtenue de la façon suivante:

$$T_i^{i+1} = Rot(Z_i, \theta_i) * Trans(Z_i, r_i) * Trans(X_{i+1}, a_i) * Rot(X_{i+1}, \alpha_i)$$

$$T_i^{i+1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_i^{i+1} = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III-02)$$

$$T_i^{i+1} = \begin{bmatrix} M_i^{i+1} & P_i^{i+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M_i^{i+1} : Matrice 3x3 définissant la projection des vecteurs unitaires du repère R_{i+1} sur le repère R_i , elle est dite matrice d'orientation.

$$P_i^{i+1} = \begin{bmatrix} P_x^{i+1} & P_y^{i+1} & P_z^{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{Coordonnées du point } O_{i+1} \text{ dans le repère } R_i$$

II.1.3. Etude critique de la notation D&H

La notation de **D&H** est la mieux adaptée pour les structures ouvertes simples, mais présente des lacunes surtout pour les structures fermées ou arborescentes [26], [29]. Les critiques portent essentiellement sur les points suivants:

1- L'ambiguïté dans la disposition des repères locaux:

- Ce qui induit à la non-unicité dans l'orientation des repères locaux.
- La notation impose Z aligné avec l'axe de la liaison sans donner de direction a priori.
- Dans le cas où deux axes sont concourants, on retrouve deux autres choix possibles quant à la direction de la normale commune aux deux axes.

On est devant les 4 cas de figures suivantes:

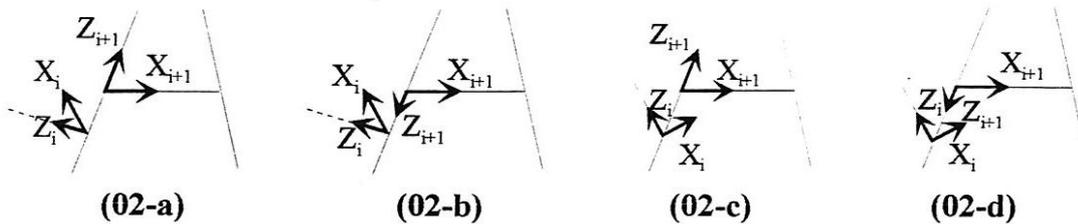


Figure III-02

2- L'impossibilité de décrire les chaînes cinématique complexes.

3- La dépendance entre les paramètres et les formes des corps constituant la chaîne cinématique.

4- L'instabilité des paramètres qui cause des problèmes lors des processus de calibration quand deux axes consécutifs sont parallèles. L'origine du repère O_i se situe suivant les deux cas :

- Axes parallèles : le choix de la normale commune telle que $r_{i+1} = 0$,
- Axes concourants : O_i est à l'intersection des deux axes de liaisons.

II.2. Notation proposée par YIH

Il tire deux défauts essentiels de la notation **D&H**

- Les paramètres **D&H** décrivent la position relative entre deux axes, cette position dépend d'un troisième axe;
- Instabilité des paramètres.

Il résout le problème en constituant une matrice de passage homogène composée des paramètres de **BRYANT** et des coordonnées cylindriques [8], [29]. L'auteur élimine de façon radicale ces défauts en ignorant les propriétés géométriques, mais il introduit un problème plus grave, celui de l'unicité de la notation, la localisation de repères locaux se fait de façon arbitraire, l'auteur pense qu'il existe toujours des points remarquables qui seront choisis comme références.

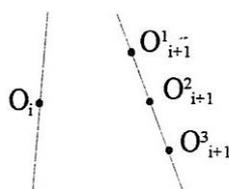


Figure III-03

La source d'erreur de la définition de cette notation vient d'une mauvaise identification de la difficulté, l'auteur s'est borné à définir uniquement l'opérateur de passage entre repères locaux. La normale commune n'a pas pour rôle uniquement de minimiser le nombre de paramètres mais aussi d'assurer l'unicité de la notation.

II.3. Notation proposée par HORN

Il insiste sur l'ambiguïté et l'arbitraire de la notation, avec le raisonnement suivant : Une notation sans choix arbitraires conduit à des paramètres stables [29].

HORN construit une notation basée sur des propriétés géométriques, on passe d'un repère local à un autre, de la base à l'organe terminal, par une succession de vecteurs perpendiculaires aux axes d'arrivée.

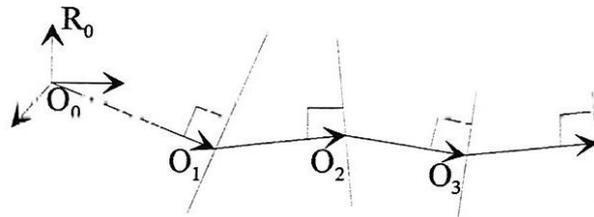


Figure III-04

Le point faible de cette notation, outre le nombre de paramètres, est le positionnement du repère Ro dont dépend l'unicité de la description.

II.4. Le paramètre supplémentaire utilisé par HAYATI

Pour réussir un problème de calibration HAYATI propose d'utiliser la notation de D&H et d'introduire un paramètre supplémentaire dans le cas où deux axes consécutifs sont parallèles [29].

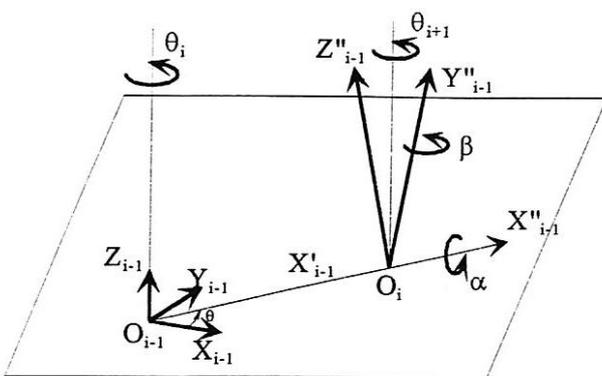


Figure III-05: Liaison rotoïde

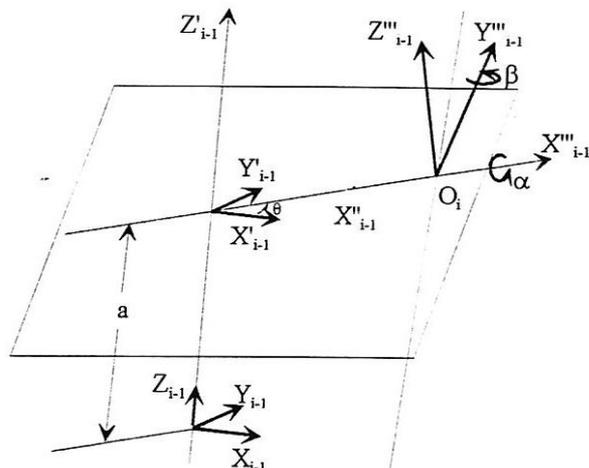


Figure III-06: Liaison prismatique

Cependant, cette notation ne peut pas se généraliser à toutes les chaînes cinématique, car elle pose des problèmes dans le cas où deux axes consécutifs sont perpendiculaires.

Remarque

Ces travaux avaient pour but de résoudre le problème spécifique de la calibration, ce qui explique en partie les résultats incomplets; ils montrent aussi la difficulté de construire une notation de description valable. Ces descriptions ne dépendent pas de la forme du corps, ceci a pour conséquences:

- L'incapacité d'utiliser ces notations pour la modélisation dynamique;
- L'impossibilité de décrire les chaînes cinématique complexes.

III. FORMULATION SYMBOLIQUE D'UNE NOTATION

Une notation doit être exploitable par un passage d'une description géométrique de la notation à une autre syntaxique et structurée, basée sur une symbolique simple pour deux raisons:

- Pouvoir comparer et classer les géomètres des robots;
- Rendre la notation compréhensible et manipulable sur ordinateur, et ouvrir des perspectives nouvelles dans le domaine de la conception et la simulation assistée.

De nombreuses recherches énumérées par **COIFFET** ont abordé le sujet, parmi elles nous citons:

III.1. La notation de KHALIL

C'est une exploitation automatique par programme [3], [7], [25]. Elle comporte les éléments suivants:

- 1- Le nombre de segments articulés composant le système. Ce nombre est appelé NN;
- 2- Un vecteur NDF (de dimension NN) qui donne le nombre de degrés de liberté agissant sur chaque segment;
- 3- Une matrice MRR de dimension (NN,4) qui spécifie la matrice et la direction du déplacement de chaque corps par rapport au précédent, chaque ligne correspond à un d.d.l. Le dernier de la ligne vaut « 0 » pour rotation, « 1 » pour translation. Parmi les trois autres éléments, un seul n'est pas nul. La position de cet élément correspond à l'axe autour ou le long duquel s'effectue la rotation ou la translation. La valeur de cet élément correspond au numéro du d.d.l;
- 4- L^λ ($1 \leq \lambda \leq NN$);

5- Pour chaque corps, on donne la masse, la position du centre de masse et les moments d'inertie par rapport au repère lié au corps.

Exemple

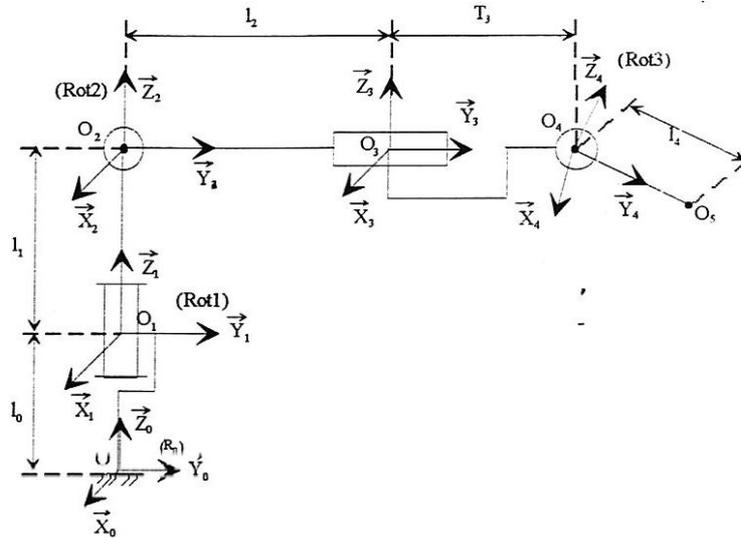


Figure III-07

1- NN=4

2- NDF=1,2,3,4

$$3 - MRR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{---} & C1 \\ \text{---} & C2 \\ \text{---} & C3 \\ \text{---} & C4 \end{matrix}$$

$$4- L^1 = (0,0,LZ_1)^T \quad L^2 = (0,Ly_2,0)^T \quad L^3 = (0,TY_3,0)^T \quad L^4 = (0,LY_4,0)^T$$

Cette méthode est plus pratique, elle est ensuite réexportée au calculateur dans un langage adéquat qui a souvent été le **FORTRAN**. Par contre, elle n'est pas faite pour comparer, au premier coup d'œil, deux structures articulées.

III.2. La notation de RENAUD-ZABALA

Cette méthode aussi est exploitable par le calculateur [25], elle comporte les éléments suivants :

1- On commence par générer la matrice [E] tel que:

$E_{ij} = 1$ si le corps i est directement articulé sur le corps j

$E_{ij} = 0$ dans le cas contraire

2- On définit la matrice des mouvements relatifs $[\sigma]$ telle que:

$\sigma_i = 0$ si le corps n_i tourne autour d'un axe lié au corps précédent.

$\sigma_i = 1$ si le corps n_i se translate d'un axe lié au corps précédent.

3- L'axe Z de chaque corps doit coïncider avec l'axe du mouvement de ce corps par rapport à son précédent.

4- Les positions relatives des repères font partie de la description et sont définies par les vecteurs $D(i,i+1)$ qui donnent la position du repère $i+1$ dans le repère i . On adjoint également les vecteurs $D(i,i)$ qui donne la position du centre de masse du corps i dans son propre repère. Chaque composante de ces vecteurs est codée 0 si elle est nulle, 1 si elle est constante, 2 si elle est variable.

5- Les orientations relatives des divers repères sont définies à l'aide des angles d'EULER $\alpha(i), \beta(i), \gamma(i)$ définissent l'orientation du repère lié au corps i par rapport au repère lié au corps $i-1$.

Exemple

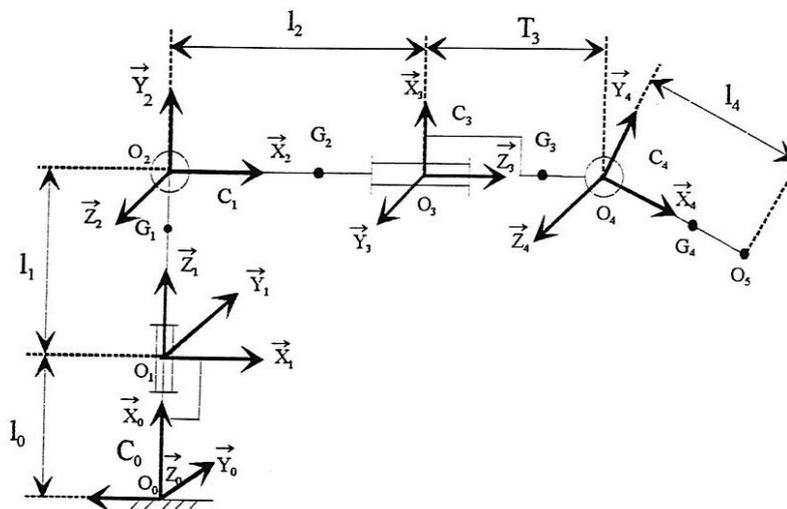


Figure III-08

1- $E =$

$i \backslash j$	C1	C2	C3	C4
C1	0	0	0	0
C2	1	0	0	0
C3	0	1	0	0
C4	0	0	1	0

2- $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ll}
 3- & D(0,1) = (1,0,0) & D(2,3) = (1,0,0) \\
 & D(1,2) = (0,0,1) & D(3,4) = (0,0,2) \\
 & D(1,1) = (0,0,1) & D(3,3) = (0,0,2) \\
 & D(2,2) = (1,0,0) & D(4,4) = (1,0,0)
 \end{array}$$

$$4- \beta(1) = -\pi/2 \quad \alpha(2) = -\pi/2 \quad \alpha(3) = \gamma(3) = -\pi/2$$

Toutes les autres grandeurs sont nulles ou variables. La description est complétée par les masses et par les moments d'inertie de chaque corps. Cette description se prête bien à chaque exploitation informatique. Elle vise des objectifs voisins de ceux de **KHALIL**, cependant elle reste symbolique, c'est à dire que l'on n'a pas la possibilité d'affecter des valeurs numériques aux grandeurs concernées [25], [26].

III.3. Description de BORREL

Contrairement aux descriptions précédentes, composées de données telles que vecteurs et matrices, **BORREL** s'est attaché à une description de style linguistique et il a écrit le compilateur qui permet de comprendre le langage [25].

La description est applicable à tout mécanisme articulé arborescent (c'est à dire boucles mécaniques), dont chaque corps est animé, par rapport à ses voisins immédiats, de mouvement de rotation et de translation. L'un des corps ℓ_0 est appelé base du mécanisme et on lui affecte un repère orthonormé R_0 . On appelle R_{ti} un repère orthonormé associé à l'un des corps qui n'a pas de successeur.

III. 3.1. Association d'un graphe au mécanisme

BORREL associe au mécanisme un graphe orienté.

- dont les nœuds sont les repères intermédiaires entre R_0 et R_{ti} ;
- dont les axes sont les changements de repères (P_j);

La figure suivante donne un exemple de l'association d'un graphe au mécanisme. Deux types de changement de repères seulement sont utilisés:

- a) Rotation d'un corps autour d'un des axes du repère lié au corps précédent.
- b) Translation d'un corps le long d'un des axes du repère lié au corps précédent.

Cette hypothèse implique le passage par plusieurs repères intermédiaires pour passer du repère d'un corps au repère de son precesseur.

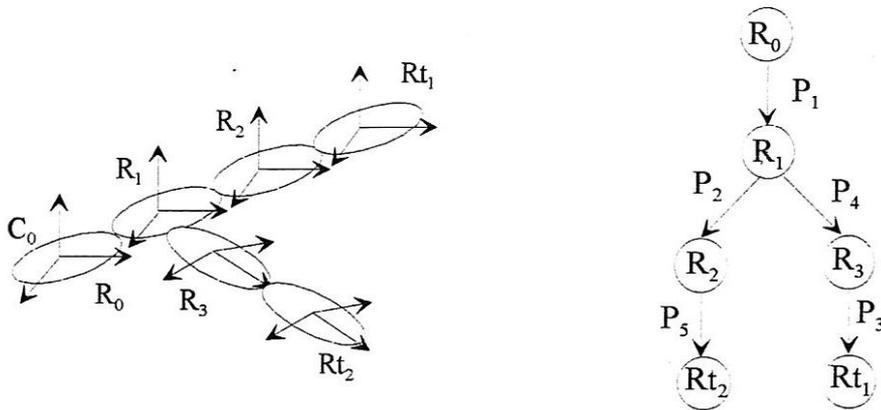


Figure III-09: Exemple d'association graphe - mécanisme

III.3.2. Ecriture d'un changement de repère

Dans l'optique d'une utilisation informatique de la description, une transformation géométrique est caractérisée par:

- 1- Son type: toute suite de caractère commençant par R (rotation) ou T(translation);
- 2- Son axe : X, Y ou Z;
- 3- Son amplitude: s'il s'agit d'une variable, on indique entre parenthèses les valeurs externes qu'elle peut atteindre séparées par une virgule; S'il s'agit d'une constante, on indique la valeur de cette constante précédée par la lettre K.

Ces valeurs peuvent être données sous forme numérique ou alphanumérique. Pour la rotation, la convention de signe à donner d'abord la limite de départ lorsqu'on parcourt le domaine de variation dans le sens trigonométrique positif.

III.3.3. Exemple de description d'un robot manipulateur

Reprenons le système de la figure III-07 qui ne comporte qu'une seule chaîne. Supposons que les limites de variation des variables articulaires soient:

$$\begin{aligned}
 Rot_1 & \begin{cases} R_{1min} = -90 \\ R_{1max} = 90 \end{cases} & Rot_2 & \begin{cases} R_{2min} = -30 \\ R_{2max} = 50 \end{cases} & TR & \begin{cases} R_{1min} = 0 \\ R_{1max} = 150 \end{cases} \\
 Rot_3 & \begin{cases} R_{3min} = -20 \\ R_{3max} = 90 \end{cases} & & & & &
 \end{aligned}$$

et que les longueurs aient les valeurs suivantes:

Nom	L ₁ (O ₀ O ₁)	L ₂ (O ₁ O ₂)	L ₃ (O ₂ O ₃)	L ₄ (O ₄ O ₅)
valeur	100	50	50	20

Le système peut alors se décrire par l'expression:

$TZK(L_1)$, $RZ(R_{1 \min}, R_{1 \max})$, $TZK(L_2)$, $RX(R_{2 \min}, R_{2 \max})$,
 $TYK(L_3)$, $TY(T_{\min}, T_{\max})$, $RX(R_{3 \min}, R_{3 \max})$, $TYK(L_4)$.

On peut prêter attention à la simplicité de cette description proche du langage naturel. On peut aussi remarquer qu'elle n'est pas unique car une rotation, par exemple, peut toujours s'écrire comme le produit de deux autres rotations. D'autre part la description est liée au choix du nom des axes de mouvements.

Remarque

La recherche d'une notation unique passe par la définition de propriétés géométriques. La normale commune est la seule propriété géométrique assez puissante pour imposer une notation unique pour une chaîne cinématique simple, c'est le cas de la notation **D&H** et ses dérivées.

Les difficultés qu'on trouve dans cette notation sont d'ordre pratique. L'étude de certains travaux qui avaient pour but d'améliorer cette notation montre des difficultés à saisir tous les aspects d'une notation.

Les applications actuelles de la **CAO** montrent l'intérêt pratique d'une description basée sur la notation **D&H** pour la classification dans les bases de données, mais aussi la nécessité d'éliminer les ambiguïtés de cette notation.

IV. REPRESENTATION DES DEPLACEMENTS

Certaines méthodes de représentation des déplacements sont fortement favorisées du fait de leur place dans les programmes d'enseignement, elles nous paraissent simples, c'est le cas notamment des méthodes vectorielles et matricielles à l'opposé des méthodes hypercomplexes.

Il est difficile d'évaluer de façon claire l'effet du formalisme algébrique sur la puissance d'une méthode, c'est pourquoi notre jugement porte essentiellement sur des aspects pratiques liés au contexte de l'application.

Généralement on considère l'espace tridimensionnel comme un ensemble de ∞^3 points, on décrit les propriétés de l'espace en termes de points, cependant il est aussi possible de décrire l'espace comme un ensemble de ∞^4 droites.

séduisante que celle des matrices 3x3 lorsqu'on fait les calculs à la main. Sur ordinateur, elle n'est pas toujours plus performante en temps de calcul à cause du grand nombre de multiplication par 1 ou 0 "inutile" du point de vue du résultat.

1.1) Remarques et discussions sur l'application de la matrice homogène

1.1.A) Le modèle géométrique direct

$X(R_0) = f(\theta)$ X: Coordonnées opérationnelles
 θ : Coordonnées articulaires.

La séparation dans la matrice entre les éléments de la rotation et ceux de la translation, permet un grand choix dans le type des coordonnées opérationnelles [29]. Le produit des matrices de transformation entre la suite des repères locaux, donne par identification à la matrice des coordonnées opérationnelles le modèle géométrique direct, le nombre d'opération est liée à la redondance de l'opérateur.

Dans le but de minimiser le nombre d'opération, l'étude critique faite par **Megahed** sur les différentes façons de calculer le produit des matrices homogènes, conclut à la supériorité des méthodes analytiques sur les méthodes numériques, la méthode analytique optimale est celle qui consiste à développer les calculs en sens inverse tout en utilisant les propriétés d'orthonormalité de la sous-matrice de rotation:

$$T_n^0 = T_1^0 T_2^1 \dots T_{n-2}^{n-3} T_{n-1}^{n-2} T_n^{n-1} \quad (\text{III-03})$$

C'est à dire suivant la récurrence:

$$T_n^i = T_{i+1}^i T_n^{i+1} \quad (\text{III-04})$$

On peut exclure l'une des deux premières colonnes de T_n^{i+1} , la colonne correspondante dans T_n^i ne sera pas calculée, ainsi de suite jusqu'à T_n^0 , la colonne manquante est calculée à partir des deux autres.

1.1.B) Les méthodes analytiques d'inversion du modèle géométrique direct

Une méthode analytique donne le modèle géométrique inverse sous forme littérale, malheureusement elle s'applique seulement à des robots manipulateurs simples, ce dernier point n'enlève en rien de leur importance, car les méthodes numériques itératives qui sont générales nécessitent un grand nombre d'opération mathématique et posent des problèmes de convergence

1.1.C) Le modèle différentiel direct

$\delta X = J(q) \delta q$ $J(q)$ est appelée la matrice Jacobienne.

Il existe deux méthodes de calcul:

a) La méthode indirecte

On utilise le modèle géométrique du robot: $J(q) = \partial f(q)/\partial q$, Cette méthode demande un nombre important de calculs.

b) La méthode directe:

Elle ne nécessite pas le calcul du modèle géométrique direct, on définit les accroissements élémentaires pour une liaison prismatique, et une liaison rotoïde, on utilise donc les relations de base.

Liaison prismatique $\Rightarrow Z \delta s$

Liaison rotoïde d'axe $Z \Rightarrow \delta p_i = (Z_i \wedge P_i) \delta \theta_i$

P_i : position d'origine.

On construit ainsi la Jacobienne vectorielle, cette entité intrinsèque donne des résultats intéressants quant à l'expression la plus simple de la Jacobienne après projection dans un repère [7]. La méthode directe sort du cadre limité de la matrice homogène, elle est valable pour toutes les autres représentations.

2- La matrice complexe

De même façon qu'avec la matrice homogène usuelle, nous pouvons dériver la matrice complexe 4x4 de la matrice spéciale unitaire 3x3 de rotation présentée par **ROONEY** par le passage aux coordonnées homogènes [26].

On ne peut pas la considérer comme une forme de la matrice homogène car ces éléments sont des nombres complexes et les coordonnées d'un point sont formulés de façon différente.

Un point (X_1, X_2, X_3) est représenté par : $\left(X_1 - iX_2/\sqrt{2}, X_3, X_1 + iX_2/\sqrt{2}, 1 \right)^T$ (III-05)

Cette représentation est compliquée et n'offre pas d'avantages par rapport à la matrice homogène suivant les critères qui nous intéressent. Ceci montre l'importance de préciser les critères selon lesquels on évalue un opérateur de transformation. Néanmoins nous présentons sa formulation de la matrice **D&H**.

$T_i^{i-1} = \text{vissage}(X, \alpha_i, a_i) \text{ vissage}(Z, \theta_i, s_i)$

$$T_i^{i+1} = \begin{bmatrix} (1+C\alpha_i)/2 & iS\alpha_i/\sqrt{2} & (C\alpha_i-1)/2 & a_i/\sqrt{2} \\ iS\alpha_i/\sqrt{2} & C\alpha_i & iS\alpha_i/\sqrt{2} & 0 \\ (C\alpha_i-1)/2 & iS\alpha_i/\sqrt{2} & (1+C\alpha_i)/2 & a_i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\theta_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & S_i \\ 0 & 0 & \exp(i\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-06})$$

$$T_i^{i+1} = \begin{bmatrix} ((1+C\alpha_i)/2) * \exp(-i\theta_i) & iS\alpha_i/\sqrt{2} & ((C\alpha_i-1)/2) * \exp(i\theta_i) & S_i * \left(\frac{iS\alpha_i}{\sqrt{2}} \right) + \frac{a_i}{\sqrt{2}} \\ \left(\frac{iS\alpha_i}{\sqrt{2}} \right) * \exp(-i\theta_i) & C\alpha_i & \left(\frac{iS\alpha_i}{\sqrt{2}} \right) * \exp(i\theta_i) & S_i C\alpha_i \\ ((C\alpha_i-1)/2) * \exp(-i\theta_i) & iS\alpha_i/\sqrt{2} & ((1+C\alpha_i)/2) * \exp(i\theta_i) & S_i * \left(\frac{iS\alpha_i}{\sqrt{2}} \right) + \frac{a_i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-7})$$

IV.1.2. Les méthodes intrinsèques

Les méthodes de calcul intrinsèques conduisent à des résultats généraux, qui ne sont pas seulement valables pour un repère particulier. Une démarche puissante consiste à développer les calculs le plus loin possible par des méthodes intrinsèques et passer à des quantités extrinsèques en projetant sur un système d'axes [13].

1- L'algèbre des rotations

Un déplacement général est défini par deux quantités vectorielles. La formule de la rotation élémentaire.

$$R_1 \xrightarrow{\text{Rot}(\theta, \omega)} R_2 = C\theta \cdot R_1 + (1-C\theta)(\omega \cdot R_1) \omega + S\theta (\omega \wedge R_1) = \theta \omega \otimes R_1 \quad (\text{III-08})$$

$$P_1 \xrightarrow{\text{Trans } t} P_2 = P_1 + t$$

Les relations suivantes donnent l'expression R_n de R_1 après n rotations successives d'origines différentes:

$$R_n = (\theta_{n1} \omega_{n1}) \otimes R_1 + (\theta_n \omega_n) \otimes d_{n-1} + \sum_{i=2}^n ((\theta_{ni} \omega_{ni}) \otimes d_{i-1}) \quad (\text{III-09})$$

$$(\theta_{ni} \omega_{ni}) \otimes R = (\theta_n \omega_n) \otimes \left\{ (\theta_{n-1} \omega_{n-1}) \otimes \left\{ \dots \left\{ (\theta_{i+1} \omega_{i+1}) \otimes (\theta_i \omega_i) \otimes R \right\} \dots \right\} \right\} \quad (\text{III-10})$$

La puissance de l'opérateur de rotation \otimes lâche certains caractéristiques géométriques sans pour autant simplifier les expressions algébriques, ainsi nous sommes face à des calculs encombrants dans le cas des rotations successives, et les translations rendent difficile l'établissement d'une récurrence dans l'équation de fermeture de la chaîne cinématique du robot manipulateur.

2- Méthode tensorielle basée sur le tenseur de rotation

La translation d'un point de référence d'un corps de P_1 à P_2 puis sa rotation autour d'un axe passant par ce point sont décrites par le tenseur de rotation obtenu de la formule de la rotation élémentaire [7] :

$$t = C\theta_i + (1 - C\theta_i) \omega o\omega + S\theta_i \omega A \quad (\text{III-11})$$

O: Symbole du produit tensoriel

ωA : Tenseur pré-produit vectoriel associé à ω

L'opérateur intrinsèque homogène prend la forme :

$$Th = \begin{bmatrix} t & P_1 P_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3- Méthode tensorielle basée sur l'algèbre de LIE

La formulation de l'opérateur de transformation en utilisant l'algèbre de **LIE** faite par **HERVE** [18] apporte une concision et plus d'élégance et d'autres avantages comme le passage aux déplacements petits.

Un déplacement est décrit sous la forme intrinsèque suivante:

$$\forall P_1 \in \xi^3, P_1 \xrightarrow{D} P_2 = O + a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} + \exp((f\vec{x} + g\vec{y} + h\vec{z}) \wedge) \vec{OP}_1 \quad (\text{III-12})$$

\forall le point de référence O, $P_2 \in \xi^3$

a, b, c, f, g, h sont six paramètres (l'ensemble des déplacements est un groupe de **LIE** de dimension 6).

On simplifie les notations en posant:

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = t\vec{T}$$

$$\text{et } f\vec{x} + g\vec{y} + h\vec{z} = \theta\vec{R}$$

donc, le déplacement D devient:

$$P_1 \xrightarrow{D} P_2 = O + t\vec{T} + \exp(\theta\vec{R} \wedge) \vec{OP}_1, \text{ ou bien: } \vec{OP}_2 = t\vec{T} + \exp(\theta\vec{R} \wedge) \vec{OP}_1 \quad (\text{III-13})$$

L'opérateur intrinsèque homogène:

$$\begin{bmatrix} \vec{OP}_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(\theta \vec{R} \wedge) & t\vec{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{OP}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-14})$$

Cette formulation permet un passage direct aux petits déplacements par le développement en série de Taylor au second ordre.

$$\exp(\theta \vec{R} \wedge) = 1 + \frac{1}{1!} \theta \vec{R} \wedge + \frac{1}{2!} \theta^2 \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge) + \dots + \frac{1}{n!} \theta^n (\vec{R} \wedge)^n + \dots \quad (\text{III-15})$$

Nous retrouvons la formule de **Combell-Hansdorf**.

Pour une rotation infinitésimale: $\exp(\theta \vec{R} \wedge) = I + (\theta \vec{R} \wedge)$

Cela veut dire aussi que cette méthode permet un passage direct à la cinématique instantanée:

$$\vec{OP}_2 = \partial t\vec{T} + [I + (\theta \vec{R} \wedge)] \vec{OP}_1 \quad (\text{III-16})$$

$$\Rightarrow V(P) = V(O) + \theta (R \wedge \vec{OP}_2) \quad (\text{III-17})$$

Cette méthode pousse plus loin la notion de formulation intrinsèque. Il est intéressant de constater comment des formalismes mathématiques différents (matrice homogène et l'algèbre de LIE) se complétant entre eux.

IV.2. La géométrie des droites

IV.2.1. Coordonnées d'une droite

La droite a un degré de liberté de plus que le point, cependant étant donné que les déplacements relatifs entre les corps du robot manipulateur sont soit des rotations, soit des translations le long des axes d'articulation, il est évident qu'on peut tirer certains avantages en considérant l'espace comme un ensemble de droites.

La situation d'une droite est définie complètement par quatre paramètres (une projection sur deux plans orthogonaux), [29].

Soit la droite paramétrée:

$$D(t) = p_1 + t (p_2 - p_1)$$

p_1, p_2 deux points quelconques $\in D$ tels que:

$$|p_2 - p_1| \cdot |p_2 - p_1| = 1$$

$$L = p_2 - p_1, \quad L_0 = p_1 \wedge L_0$$

La situation de la droite est définie par le bi-vecteur (L, L_0) respectivement l'orientation et la position (le moment de droite par rapport à un point).

Les deux relations de dépendance entre les six paramètres sont:

$$L \cdot L = 1$$

$$L \cdot L_0 = 0$$

On vérifie donc qu'on a quatre paramètres indépendants:

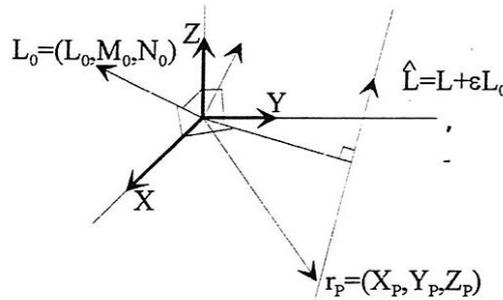


Figure III-10

IV.2.2. Déplacement de viration et nombres hypercomplexes

La position relative entre deux droites orientées est décrite par l'unique normale commune et les deux quantités qu'elle définit, sa longueur a et l'angle α entre les deux droites dans le plan normal.

Tout déplacement général d'un corps rigide dans l'espace est équivalent à la combinaison d'une rotation autour d'un axe et d'une translation le long du même axe, ce type de déplacement est appelé « viration ». Il est avantageux de combiner ces deux quantités réelles en une seule complexe (a, α) ; Ceci nous amène à l'introduction des nombres duaux dont l'utilité se présente à deux niveaux.

- La description de la situation relative entre deux droites (distance a , angle α) et la description d'un mouvement de viration (translation d , rotation θ), on définit ce qu'on appelle l'angle dual $\hat{a} = \alpha + \xi a$ et

$$\hat{\theta} = \theta + \epsilon d \text{ (le symbole } \wedge \text{ désigne une quantité duale) avec } \epsilon^2 = 0$$

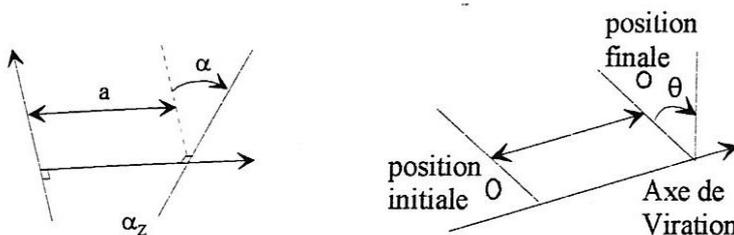


Figure III-11

- Décrire de façon concise la situation dans l'espace d'une droite associée à trois angles duaux $(\alpha_x + \varepsilon a_x, \alpha_y + \varepsilon a_y, \alpha_z + \varepsilon a_z)$, (Figure III-12).

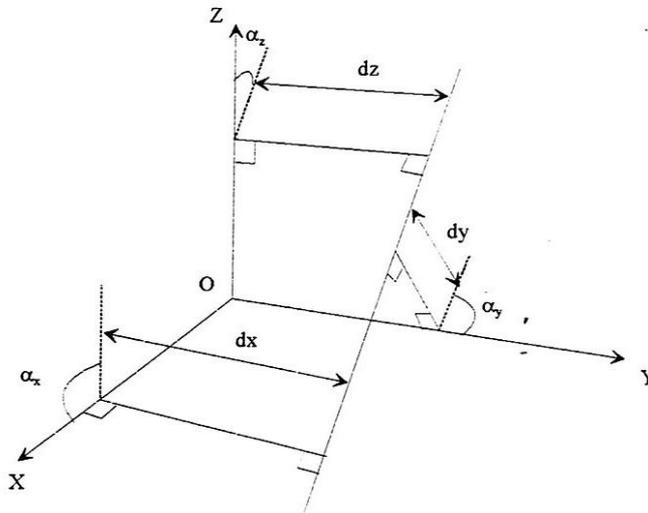


Figure III-13

Une fonction duale \hat{f} à variable duale peut être construite à partir de deux fonctions réelles.

On démontre que : $\hat{f}(\hat{a}) = f(a) + \varepsilon \left[\frac{df(a)}{da} \right] a_0$ Tel que: $\hat{a} = a + \varepsilon a_0$ (III-18)

Il est possible de construire les fonctions trigonométriques:

$$\text{Cos}(\hat{a}) = \text{Cos}(\alpha + \varepsilon a) = \text{Cos}(\alpha) - \varepsilon a \text{Sin}(\alpha)$$

$$\text{Sin}(\hat{a}) = \text{Sin}(\alpha + \varepsilon a) = \text{Sin}(\alpha) + \varepsilon a \text{Cos}(\alpha)$$

$\text{Cos}(\alpha_x), \text{Cos}(\alpha_y), \text{Cos}(\alpha_z)$ sont les cosinus directeurs.

$a_x \text{Sin}(\alpha_x), -a_y \text{Sin}(\alpha_y), -a_z \text{Sin}(\alpha_z)$ sont les composants du moment de la droite par rapport à l'origine du repère, les $C\hat{a}$ sont les cosinus directeurs duaux.

Le vecteur dual associé à un glisseur:

$$\hat{L} = L + \varepsilon L_0 \begin{pmatrix} C\alpha_x \\ C\alpha_y \\ C\alpha_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -aS\alpha_x \\ -aS\alpha_y \\ -aS\alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\hat{a}_x \\ C\hat{a}_y \\ C\hat{a}_z \end{pmatrix} \quad \text{(III-19)}$$

Il décrit la situation de n'importe quelle droite dans l'espace ξ^3 .

IV.2.3. Principe de transférence

KOTELNIKOV (1895) a étudié la relation entre la géométrie sphérique et la géométrie spatiale de droites qu'il formalisa par le principe dit de transférence [26], que **ROONEY** énonce comme suit:

Toutes les lois et les formules en relation avec des configurations sphériques restent valides quand appliquées à des configurations dans l'espace équivalentes, on remplace dans la formule originale les angles réels par leurs correspondants duaux.

$$\theta \Leftrightarrow \hat{\theta} = \theta + \varepsilon d$$

IV.3. Les opérations de transformation

On a vu que le mouvement de viration est défini par six paramètres, quatre paramètres pour spécifier l'axe de viration, les deux autres sont les variables de viration (angle, distance) [29]. Il apparaît donc à première vue qu'une viration peut être représentée par un vecteur dual, malheureusement, on se heurte aux problèmes de la composition de plusieurs virations, des représentations alternatives sont requises:

- La matrice duale orthogonale 3x3.
- La matrice duale spéciale 2x2.
- Le quaternion dual.

IV.3.1. La matrice orthogonale duale 3x3

Principe

Le nombre dual introduit par **CLIFFORD** est défini comme l'ordre pair des nombres réels (a, a^0) exprimé comme $\hat{a} = a + \varepsilon a_0$, [26].

a : partie réelle a_0 : partie duale de \hat{a} .

ε : l'unité duale, telle que $\varepsilon^2 = 0$

Le vecteur unitaire, noté \hat{u} , est un vecteur unité qui représente une ligne directe dans un espace tridimensionnel.

L'angle $\hat{\theta}$ est donné à partir des lignes \hat{u} et \hat{v} dans l'espace, définit comme:

$$\hat{\theta} = \theta + \varepsilon d$$

θ : partie réelle (projection de l'angle)

d : partie duale (c'est la longueur des perpendiculaires communes entre les deux lignes \hat{u} et \hat{v}).

Les matrices du nombre dual \hat{M} s'écrivent $\hat{M} = M + \varepsilon M_0$

M : Partie réelle est une matrice orthogonale exprimant l'orientation pour deux structures arbitraires.

M_0 : Partie duale ($M_0 = P M$) est une matrice symétrique orthogonale, constituée des éléments de la matrice colonne $P = [P_x, P_y, P_z]^T$ qui dénote la position de l'origine des deux structures.

IV.3. 2. La matrice spéciale duale unitaire 2x2

Principe

Elle dérive de la matrice spéciale unitaire 2x2 par le principe de transférence, cette dernière fut introduite par **WEYL** en 1931 pour être utilisée en physique théorique. La matrice spéciale unitaire 2x2 est constituée de nombres complexes, la présentation détaillée de ses caractéristiques et ses propriétés est faite par **ROONEY** [10], [26]. Après l'application du principe de transférence, et l'écriture des équations de contrainte, on retrouve la forme suivante:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} + i \hat{b}_{11} & \hat{a}_{12} + i \hat{b}_{12} \\ -\hat{a}_{12} + i \hat{b}_{12} & \hat{a}_{11} - i \hat{b}_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{III-20})$$

On associe à la matrice \hat{Q} la représentation des coordonnées de la droite:

$$\hat{L} Q_i = \begin{bmatrix} \hat{N}_i & \hat{L}_i - i \hat{M}_i \\ \hat{L}_i + i \hat{M}_i & -\hat{N}_i \end{bmatrix}$$

Le déplacement de viration de \hat{L}_1 à \hat{L}_2 s'exprime par:

$$\begin{aligned} \hat{L}_2 &= \hat{Q} \hat{L}_1 \hat{Q}^{-1} \\ \hat{Q} \hat{Q}^{-1} &= \hat{Q}^{-1} \hat{Q} = I \Rightarrow \hat{Q}^{-1} = \overline{\hat{Q}}^t \quad \text{Conjugué de la matrice transposée} \end{aligned} \quad (\text{III-21})$$

Le grand avantage de cette matrice est sa concision, le nombre d'opérations dans le développement des calculs est nettement moins important qu'avec la matrice duale 3x3.

Pour améliorer les caractéristiques, nous proposons d'utiliser une écriture plus concise et plus simple, utilisée en physique moderne.

IV.3.3. Le quaternion dual

Comme le quaternion définit le rapport entre deux vecteurs, le quaternion dual définit le rapport entre deux duaux [12]. Il a été introduit par **CLIFFORD (1873)**.

Les quatre composants du quaternion dual sont des nombres duaux, on a donc huit composantes réelles, quatre pour définir la normale commune aux deux vecteurs, deux composantes représentent l'angle dual, les deux dernières donnent le rapport de norme entre les parties primaires et duales.

Selon le principe de transférence on montre que toutes les propriétés du quaternion sont valables au quaternion dual par équivalence. Pour représenter la viration, le quaternion dual doit être unitaire.

Les deux types de quaternion duaux unitaires de viration du vecteur dual \hat{a} en \hat{b} d'angle dual $\hat{\theta}$ suivant le glisseur \hat{n} sont:

$$\hat{q} = C\hat{\theta} + \hat{n}S\hat{\theta} \quad \text{telle que: } \hat{a} = \hat{q}\hat{b} \quad \text{avec } \hat{q} \perp \hat{a} \text{ et } \hat{b} \quad (\text{III-22})$$

$$\hat{q} = C\frac{\hat{\theta}}{2} + \hat{n}S\frac{\hat{\theta}}{2} \quad \text{telle que: } \hat{a} = \hat{q}^{-1}\hat{b}\hat{q} \quad (\text{III-23})$$

V. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons essayé de présenter différents outils mathématiques qui permettent de déterminer l'identité structurale d'une chaîne cinématique. Nous avons essayé de présenter quelques méthodes d'étude qui ont fait ressortir plusieurs critères de comparaison. Pour étudier un mécanisme spatial, il est nécessaire d'établir une méthode algébrique basée sur une notation de paramétrage pour contourner la complexité des relations cinématique.

Il existe une seule notation qui soit unique, complète, et minimale pour le paramétrage d'une chaîne cinématique (la notation de **D&H**), malgré les recherches faites pour concevoir de nouvelles notations.

Quant aux méthodes algébriques, nous sommes partis de l'hypothèse qu'il existe deux classes distinctes selon que nous considérons l'espace Euclidien comme un ensemble de ∞^3 points, ou bien un ensemble ∞^4 droites.

En ce qui concerne la matrice de passage homogène, on peut dire qu'elle permet de déterminer les compositions de mouvements par de simples produits matriciels, mais les douze termes réels de cette matrice sont fortement dépendants.

Tandis que pour la matrice duale 3x3, on peut dire que c'est un opérateur qui dérive directement de la matrice orthonormale de rotation, elle duale contient 18 éléments réels pour six paramètres indépendants, cette redondance a poussé les recherches d'un opérateur plus concis. D'où l'adaptation par **DENAVIT** de la matrice

spéciale 2×2 . **DENAVIT** utilise sa forme duale, cette matrice contient seulement 8 éléments significatifs, mais elle utilise en plus des nombres duaux, des nombres complexes, enfin l'expression de la transformation géométrique est analogue à la similitude et conduit à l'introduction du demi-angle dual. La matrice duale 2×2 est vite supplantée par quaternions duaux dans l'étude des mécanismes pour trois raisons:

- La concision;
- L'utilisation des seuls nombres duaux;
- L'adaptation au système de paramétrage utilisé.

Toutes ces méthodes utilisent la formulation du mouvement comme une viration, cela ne pose pas de problème pour l'analyse des mécanismes particulièrement aux chaînes cinématique fermées, mais cette formulation n'est pas commode pour la commande d'un robot manipulateur,

où les coordonnées de l'organe terminal sont difficilement exprimées en termes de coordonnées Plückeriennes.

Si la géométrie des torseurs apporte de grands avantages dans l'analyse des mécanismes, la géométrie du point est plus intéressante pour la modélisation et la commande des robots manipulateurs.

Nous pouvons remarquer que l'opérateur de transformation géométrique le plus performant selon des critères liés aux besoins des applications robotique dans le premier cas est la matrice homogène, et dans le second cas le quaternion dual.

Pour notre part, nous allons faire l'étude comparative entre deux méthodes basées sur la géométrie du point, la première est une méthode extrinsèque qui est les **matrices de passage homogène**, que nous présenterons dans le chapitre 4, en l'appliquant sur un mécanisme poly-articulé et un mécanisme fermé. La seconde est une méthode intrinsèque qui est l'**algèbre de LIE**, que nous allons l'étudier dans le chapitre 5, et l'appliquerons sur les mêmes mécanismes que le chapitre 4. Nous essayerons ainsi de montrer l'intérêt de cette dernière qui n'a pas été très exploitée par les roboticiens.

CHAPITRE IV

ETUDE CINEMATIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR BASEE SUR LES MATRICES DE PASSAGE HOMOGENES

I. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons utiliser la méthode la plus courante, celle qui consiste sur les matrices de passage homogènes à trois composantes, car la technique des matrices 4x4 apparaît comme plus séduisante que celle des matrices 3x3 lorsque nous faisons les calculs à la main. Sur ordinateur, elle n'est pas toujours plus performante en temps de calcul à cause du grand nombre de multiplications par 1 et 0 du point de vue du résultat.

Les éléments cinématique concernent donc, connaissant les paramètres structuraux, l'établissement des coordonnées et vitesse de différents points du système articulé, ainsi que l'orientation et les vitesses de déplacement de différents repères liés au corps du système articulé, dans l'espace de la tâche et en fonction des variables articulées.

II. LES MATRICES DE TRANSFORMATION HOMOGENE

En robotique, on associe à tout élément du poste de travail un ou plusieurs repères. Ces repères sont généralement définis de telle sorte que leurs axes et leurs origines correspondent respectivement à des directions et à des points privilégiés ayant un rôle fonctionnel lors de l'exécution de la tâche. Ils permettent de situer dans l'espace des objets fixes de l'environnement (distributeurs, etc.) ainsi que les corps mobiles constitutifs du robot ou transportés par lui [25], [26].

La notion de changement de repère est donc fondamentale. Elle permet :

- D'exprimer les déplacements relatifs des différents éléments du mécanisme articulé les uns par rapport aux autres.
- De spécifier les situations successives que doit prendre le repère associé à l'organe terminal du robot pour réaliser une tâche donnée, ainsi que les vitesses correspondantes.
- De décrire et de contrôler les efforts mis en jeu lorsque le robot interagit avec son environnement.
- D'intégrer à la commande les informations sensorielles issues de capteur ayant chacun leur système de référence propre.

II.1. Coordonnées homogènes

II.1.1 Représentation d'un point

En coordonnées homogènes, la représentation d'un point se fait par un vecteur colonne à quatre composantes. Les trois premières sont les coordonnées cartésiennes du point, tandis que la composante supplémentaire est considérée comme un facteur d'échelle, égale à 1 en robotique [7], on a alors :

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-01})$$

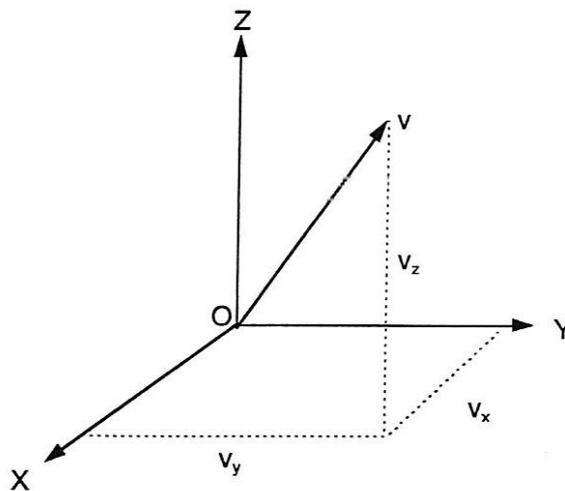


Figure IV-01 : représentation d'un point

II.1.2. Représentation d'une direction

La représentation d'une direction se fait aussi par quatre composantes, mais la quatrième est nulle [7]. Si l'on note U_x , U_y , U_z les coordonnées cartésiennes d'un vecteur U , en coordonnées homogènes on écrit :

$$U = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-02})$$

II.1.3. Représentation d'un plan

Le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est représenté par un vecteur ligne Q :
 $Q = [\alpha, \beta, \gamma, \delta]$

pour tout point v appartenant au plan Q , le produit matriciel $Q \cdot v$ est nul [6] :

$$Q \mathbf{v} = [\alpha, \beta, \gamma, \delta] \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV-03})$$

II.2. Transformations homogènes

II.2.1. Transformation des repères

Faisons subir une transformation quelconque, de translation et/ou de rotation, au repère R_i , transformation qui l'amène sur le repère R_j (Figure IV-02). Cette transformation qui est définie par la matrice, appelée matrice de transformation homogène, de dimension (4x4), telle que [6], [7] :

$$T_i^j = \begin{bmatrix} s_i^j & n_i^j & a_i^j & p_i^j \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-04})$$

Où s_i^j, n_i^j et a_i^j désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes X_j, Y_j et Z_j du repère R_j exprimés dans le repère R_i et où p_i^j est l'origine du repère R_j exprimée dans le repère R_i .

On dit également que la matrice T_i^j définit le repère R_j dans le repère R_i .

Par la suite, on notera la matrice de transformation (IV-04) sous forme d'une matrice partitionnée :

$$T_i^j = \begin{bmatrix} M_i^j & P_i^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_i^j & n_i^j & a_i^j & p_i^j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

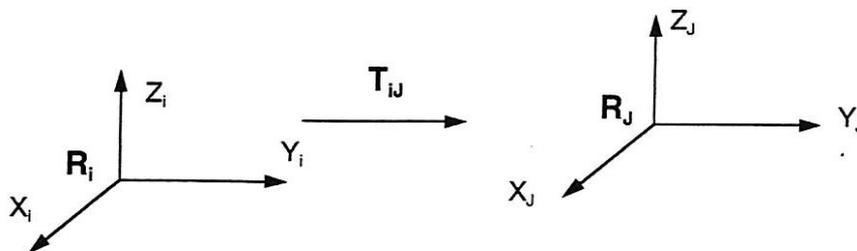


Figure IV-02 : Transformation des repères

Il s'agit d'un abus de notation, puisque les vecteurs n'ont alors que trois composantes. Mais cette description, en isolant la matrice d'orientation, est plus pratique.

En conclusion, la matrice T_i^j représente la transformation permettant de passer du repère R_i au repère R_j .

II.2.2. Matrice de transformation de translation pure

Soit $Trans(P_x, P_y, P_z)$ cette transformation, où P_x, P_y et P_z désignent les composantes de la translation le long des axes X, Y et Z respectivement. L'orientation étant conservée dans cette transformation, $Trans(P_x, P_y, P_z)$ a pour expression [8], [25]:

$$T_i^j = Trans(P_x, P_y, P_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{IV-05}$$

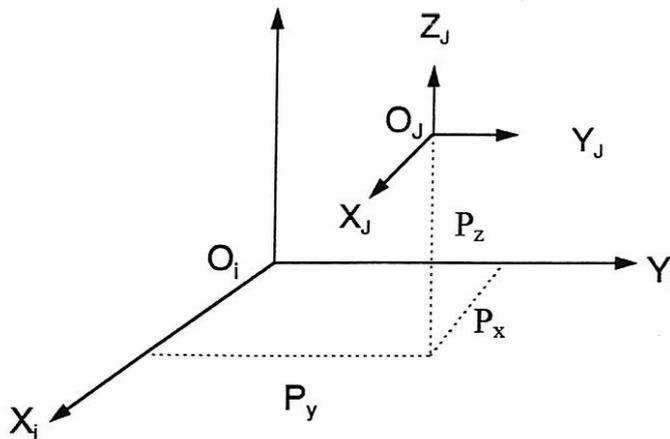


Figure IV-03 : transformation de translation pure

II.2.3. Matrice de transformation de rotation autour des axes principaux

1- Matrice de transformation correspondant à une rotation θ autour de l'axe x

On exprime la rotation par $rot(x, \theta)$. On déduit de la figure IV-04 les composantes des vecteurs unitaires s_i^j, n_i^j, a_i^j portés respectivement par les axes x_j, y_j et z_j du repère R_j et exprimés dans R_i [3], [25].

Remarque: $\begin{cases} C\theta = \cos \theta \\ S\theta = \sin \theta \end{cases}$

Donc les composantes sont :

$$\begin{aligned} s_i^j &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ n_i^j &= [0 \quad C\theta \quad S\theta \quad 0]^T \\ a_i^j &= [0 \quad -S\theta \quad C\theta \quad 0]^T \end{aligned}$$

$$T_i^j = \text{rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(x, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-06})$$

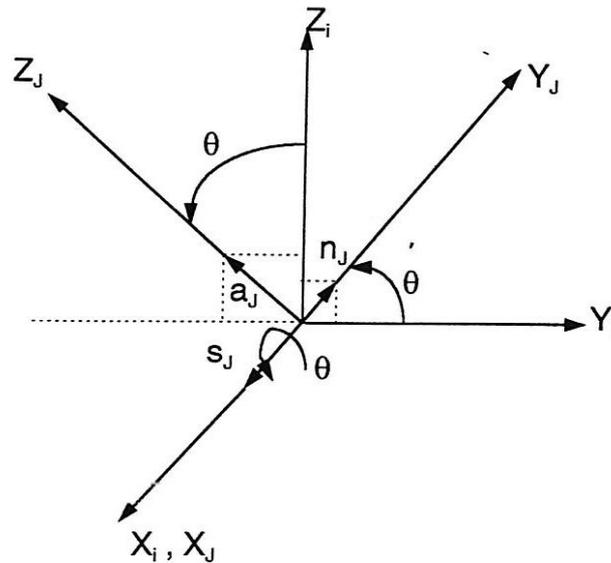


Figure IV-04 : Transformation de rotation pure autour de l'axe X

2- Matrice de transformation correspondant à une rotation \$\theta\$ autour de l'axe Y.

Soit \$\text{rot}(y, \theta)\$ cette rotation

$$T_i^j = \text{rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(y, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-07})$$

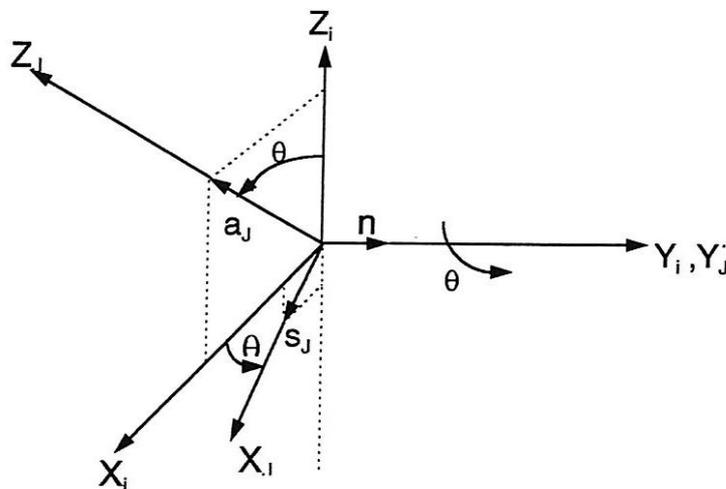


Figure IV-05 : Transformation de rotation pure autour de l'axe Y

3- Matrice de transformation correspondant à une rotation θ autour de l'axe Z

On obtient [3], [8] :

$$T_i^j = \text{rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & & \\ M(z, \theta) & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{IV-08}$$

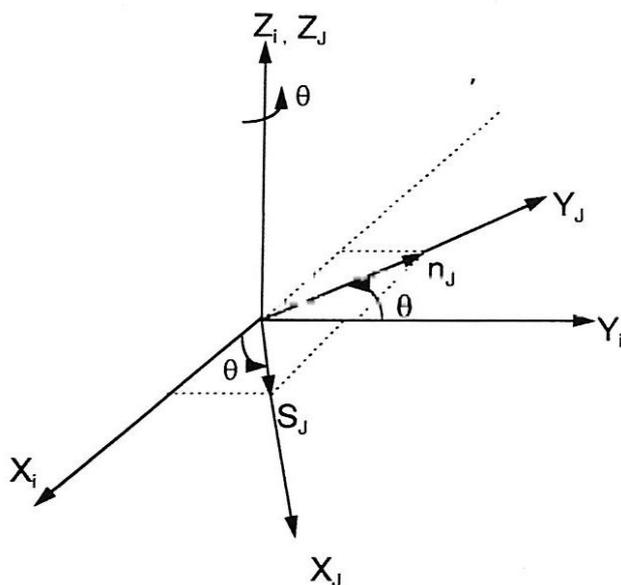


Figure IV-06 : Transformation de rotation pure autour de l'axe Z

III. DETERMINATION DES ELEMENTS CINEMATIQUE

Nous allons considérer un système mécanique articulé formant une chaîne de corps au sens de la description de « **BORREL** ». A chacun de ces corps l_0, l_1, \dots, l_n est relié un repère cartésien $R_0(X_0, Y_0, Z_0) \dots R_i(X_i, Y_i, Z_i) \dots R_n(X_n, Y_n, Z_n)$ pour passer du repère R_i au repère R_{i+1} (figure IV-07) on peut avoir jusqu'à 6 transformations géométriques.

- 3 rotations respectivement autour de X_i, Y_i et Z_i ;
- 3 translations le long des même axes.

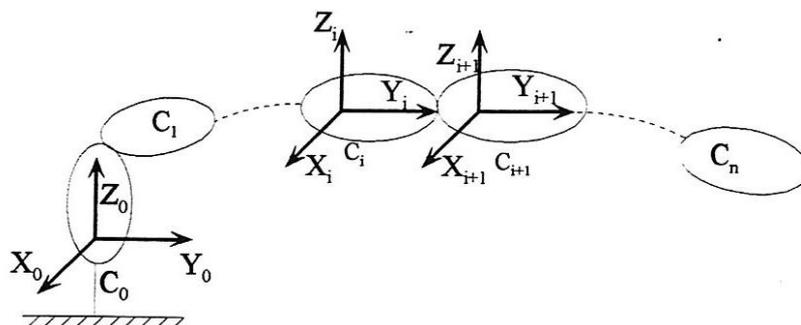


Figure IV-07 : Chaîne articulatoire et repères associés

Pour simplifier et faciliter la démarche de calcul, on suppose que pour passer du repère R_i au repère R_{i+1} , on ne peut avoir qu'une seule de ces 6 transformations. Ceci a pour conséquence, lorsque l'on passe réellement de R_i à R_{i+1} , le rajout de corps fictifs C_{ij} , (Figure IV-08), en nombre égal au maximum à 5, sans masse, ni dimension, et qui n'ont pour rôle que d'assurer le respect de l'hypothèse précédente (une seule transformation pour passer d'un corps au suivant).

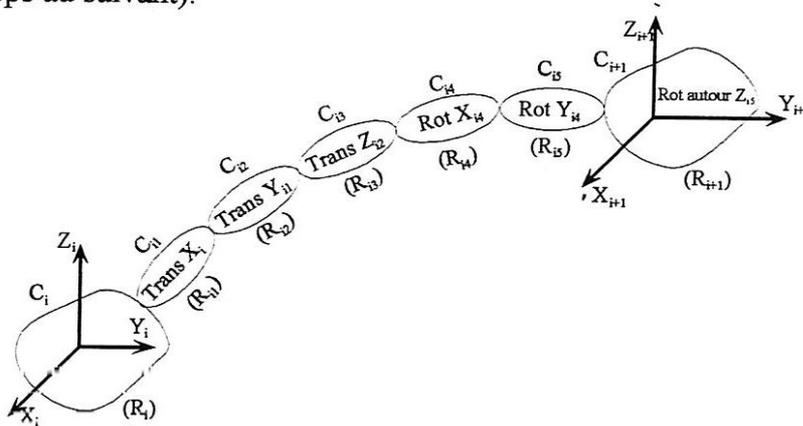


Figure IV-08 : Insertion de corps fictifs C_{ij} entre C_i et C_{i+1}

III.1. Calcul de l'orientation d'un corps de la chaîne par rapport à un repère lié à un corps amont

Puisque dans cette partie nous nous intéressons qu'aux variations d'orientation des repères, nous pouvons noter que toute translation sera représentée par une matrice unité de changement de repère. Trois corps fictifs au maximum suffisent entre C_i et C_{i+1} .

Considérons la chaîne complète formée de tous les corps réels et fictifs, numérotés de C_0 à C_n . Si M_i^{i+1} représente la matrice des cosinus directeurs exposés dans le chapitre II, exprimant le passage du repère R_i au repère R_{i+1} [7], [8], on peut écrire :

$$i = M_i^{i+1} i+1 \tag{IV-09}$$

Par commodité, écrivons (IV-09) sous la forme :

$$(R_i) = M_i^{i+1} (R_{i+1}) \tag{IV-10}$$

Prenons la figure IV-09, on pourra donc aller du repère R_0 au repère R_i par les transformations successives :

$$\begin{aligned} (R_0) &= M_0^1 (R_1) \\ (R_1) &= M_1^2 (R_2) \\ &\dots \\ (R_{i-1}) &= M_{i-1}^i (R_i) \end{aligned}$$

soit:

$$(R_0) = M_0^1 M_1^2 M_2^3 \cdots M_{i-2}^{i-1} M_{i-1}^i (R_i) = M_0^i (R_i) \quad (\text{IV-11})$$

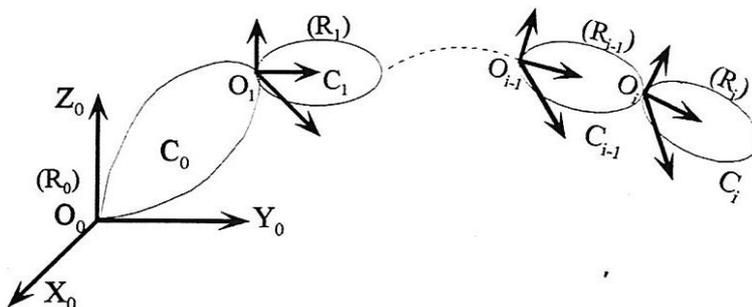


Figure IV-09

Donc pour n'importe quel vecteur V connu dans le repère R_i on pourra écrire :

$$\vec{V}(R_0) = M_0^i \vec{V}(R_i) \quad (\text{IV-12})$$

soit:

$$\begin{aligned} \vec{V}(R_i) &= [M_0^i]^{-1} \vec{V}(R_0) \\ \vec{V}(R_i) &= [M_0^i]^T \vec{V}(R_0) \end{aligned} \quad (\text{IV-13})$$

tel que :

$$M_0^i = M_0^1 M_1^2 M_2^3 \cdots M_{i-2}^{i-1} M_{i-1}^i \quad (\text{IV-14a})$$

On peut donc connaître tous les repères associés à chacun des corps du mécanisme par rapport à un repère fixe de référence lié au corps de base C_0 .

III.2. Calcul de l'orientation d'un corps de la chaîne par rapport à un repère lié à un corps aval

Les matrices M_i^{i+1} qui représentent une rotation non nulle ou nulle (translation), ont la propriété suivante (voir Annexe II) :

$$[M_i^{i+1}]^{-1} = [M_i^{i+1}]^T \quad (\text{IV-14b})$$

L'inverse de M_i^{i+1} est notée M_{i+1}^i et correspond effectivement au passage du repère R_i au repère.

$$M_{i+1}^i = [M_i^{i+1}]^T \quad (\text{IV-15})$$

L'utilisation de la récurrence conduit :

$$M_i^0 = [M_0^i]^{-1} = [M_0^1 M_1^2 M_2^3 \dots M_{i-2}^{i-1} M_{i-1}^i]^{-1} \tag{IV-16}$$

$$M_i^0 = [M_{i-1}^i]^{-1} [M_{i-2}^{i-1}]^{-1} \dots [M_1^2]^{-1} [M_0^1]^{-1}$$

$$M_i^0 = [M_{i-1}^i]^T [M_{i-2}^{i-1}]^T \dots [M_1^2]^T [M_0^1]^T$$

(IV-16) donne l'orientation du repère lié au solide C_0 par rapport au repère lié au repère du corps C_i par simple transposition de la matrice.

III.3. Calcul de la position d'un point de la chaîne dans un repère lié à un corps amont

Supposons qu'à chaque corps C_q de la chaîne soit affecté un repère R_q de sommet O_q (Figure IV-10), [26]

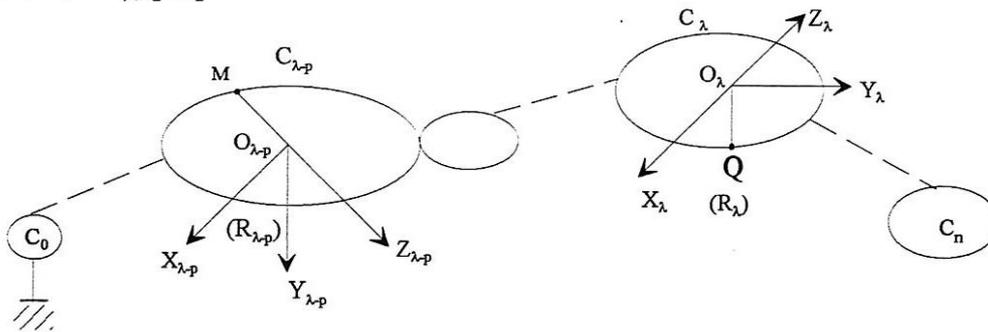


Figure IV-10 : Chaîne articulée et repères associés

Supposons que l'on veuille calculer la position du point Q du corps C_λ dans le repère lié au corps $C_{\lambda-p}$ ($p \leq \lambda$). On peut écrire la relation vectorielle :

$$\vec{O_{\lambda-p}Q} = \vec{O_{\lambda-p}O_\lambda} + \vec{O_\lambda Q} \tag{IV-17}$$

Exprimons cette relation dans le repère $(R_{\lambda-p})$

$$\vec{O_{\lambda-p}Q}(R_{\lambda-p}) = \vec{O_{\lambda-p}O_\lambda}(R_{\lambda-p}) + \vec{O_\lambda Q}(R_{\lambda-p}) \tag{IV-18}$$

Le vecteur $\vec{O_\lambda Q}$ appartenant tout entier au corps C_λ est connu dans le repère (R_λ) . Pour connaître dans le repère $(R_{\lambda-p})$, il suffit de lui appliquer la transformation $M_{\lambda-p}^\lambda$ définie précédemment et qui fournit dans $(R_{\lambda-p})$ les composantes d'un vecteur connu dans (R_λ) . L'équation prend alors la forme:

$$\vec{O_{\lambda-p}Q}(R_{\lambda-p}) = \vec{O_{\lambda-p}O_\lambda}(R_{\lambda-p}) + M_{\lambda-p}^\lambda \vec{O_\lambda Q}(R_\lambda) \tag{IV-19}$$

La relation (IV-20) est récurrente et permet de calculer les coordonnées de n'importe quel point de la chaîne dans n'importe quel repère lié à un corps amont.

III.4. Calcul de la position d'un point de la chaîne dans le repère lié à un corps aval

On se reporte à la figure IV-10, on peut poser de la même manière que précédemment [25], [26].

$$\vec{O}_\lambda M(R_\lambda) = \vec{O}_\lambda O_{\lambda-p}(R_\lambda) + M_\lambda^{\lambda-p} O_{\lambda-p} \vec{O}_{\lambda-p} M(R_{\lambda-p}) \quad (\text{IV-20})$$

Sachant que : $M_\lambda^{\lambda-p} = [M_{\lambda-p}^\lambda]^T$ le calcul s'effectue normalement.

III.5. Détermination des vecteurs vitesses des divers corps par rapport à un repère de la chaîne

Le mouvement du repère R_λ lié au corps C_λ par rapport à un autre corps de la chaîne, par exemple le corps $C_{\lambda-p}$ s'exprime, dans une optique cinématique, par un vecteur vitesse qui est la somme d'une vitesse de translation et d'une vitesse de rotation instantanée.

III.5.1. La loi de composition des vitesses

Considérons la figure IV-11. Un corps solide auquel on attache le repère R_2 en O_2 , et un repère de référence fixe R_1 [7], [25].



Figure IV-11

On sait classiquement que la vitesse du point quelconque Q appartenant au solide, par rapport au repère R_1 , peut s'exprimer par la somme de trois vecteurs vitesses :

- La vitesse absolue de translation du point O_2 par rapport à R_1 : $\vec{V}_{O_2}^{0_1}$
- La vitesse de translation relative de Q vis-à-vis de R_2 : $\vec{V}_Q^{0_2}$
- La vitesse d'entraînement produite par la rotation de R_2 vis-à-vis de R_1 : $\vec{\omega}_{0_2}^{0_1} \wedge \vec{O}_2 Q$

$$\vec{V}_Q^{0_1} = \vec{V}_{O_2}^{0_1} + \vec{V}_Q^{0_2} + \vec{\omega}_{0_2}^{0_1} \wedge \vec{O}_2 Q \quad (\text{IV-22})$$

III.5.2. Détermination des vecteurs vitesses de rotation des divers corps par rapport à un repère de la chaîne

Prenons le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_\lambda^{\lambda-P}$ du repère R_λ lié au corps C_λ par rapport au repère $R_{\lambda-p}$ lié au corps $C_{\lambda-p}$, [25]. Ce vecteur doit être exprimé dans un certain repère. Si l'on choisit le repère $R_{\lambda-p}$ on écrira :

Les théorèmes de mécanique nous permettent de trouver ce vecteur dans le repère R_λ (supposé connu dans $R_{\lambda-p}$) en passant par un repère intermédiaire par exemple R_q et en utilisant les matrices de changements de repère M_i^j déjà utilisées.

$$\vec{\Omega}_\lambda^{\lambda-P}(R_\lambda) = \vec{\Omega}_\lambda^{\lambda-P}(R_{\lambda-1}) + M_\lambda^q \vec{\Omega}_q^{\lambda-P}(R_q) \tag{IV-22}$$

Le terme $\vec{\Omega}_\lambda^{\lambda-1}(R_{\lambda-1})$ représente la rotation du repère R_λ , par rapport à un repère aux axes parallèles à ceux du repère $R_{\lambda-1}$ mais de sommet O_λ .

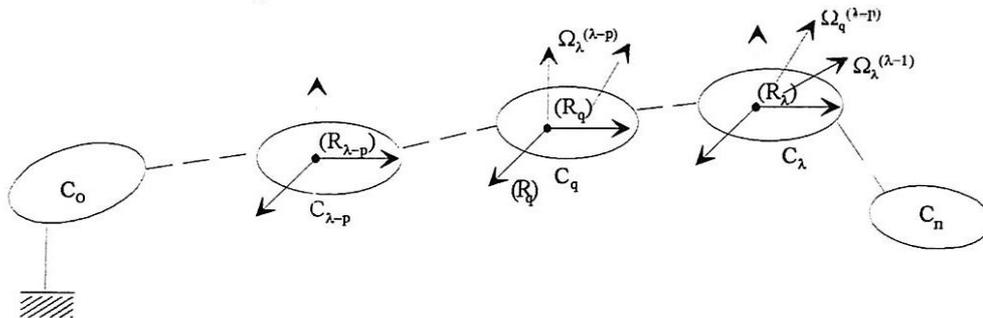


Figure IV-12 : Chaîne et repère associé

On prend comme référence le corps C_0 base fixe de la chaîne et on prend comme repère intermédiaire, celui lié au corps C_q tel que $q=\lambda-1$, on établit une récurrence très utile pour les calculs [25], [26].

$$\vec{\Omega}_\lambda^O(R_\lambda) = \vec{\Omega}_\lambda^{\lambda-1}(R_{\lambda-1}) + M_\lambda^{\lambda-1} \vec{\Omega}_{\lambda-1}^O(R_{\lambda-1})$$

ou encore :

$$\vec{\Omega}_\lambda^O(R_\lambda) = \vec{\Omega}_\lambda^{\lambda-1}(R_{\lambda-1}) + [M_{\lambda-1}^\lambda]^T \vec{\Omega}_{\lambda-1}^O(R_{\lambda-1}) \tag{IV-23}$$

III.5.3. Détermination des vecteurs vitesses des divers corps par rapport à un repère

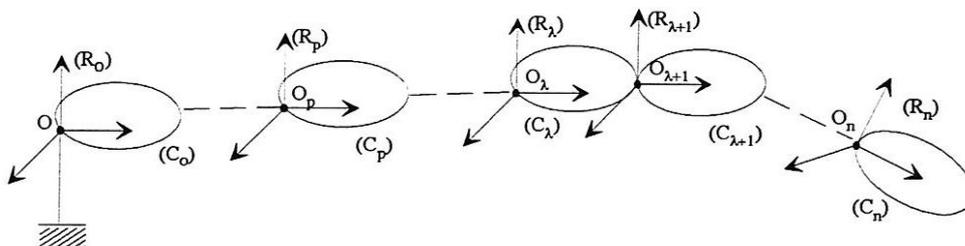


Figure IV-13

On prend comme référence le corps C_0 , base fixe de la chaîne. On obtient la formule générale de translation [7], [25]:

$$\vec{V}_{O_{\lambda+1}}^O(R_\lambda) = \vec{V}_{O_\lambda}^O(R_\lambda) + \vec{V}_{O_{\lambda+1}}^{O_\lambda}(R_\lambda) + \vec{\Omega}_\lambda^O(R_\lambda) \wedge \vec{O}_\lambda O_{\lambda+1}(R_\lambda) \quad (IV-24)$$

Avec :

$$\vec{V}_{O_{\lambda+1}}^O(R_{\lambda+1}) = M_{\lambda+1}^\lambda \cdot \vec{V}_{O_{\lambda+1}}^O(R_\lambda) \quad (IV-25)$$

IV. EXEMPLES

IV.1. Mécanisme ouvert (Bras manipulateur)

Calcul cinématique du bras manipulateur suivant.

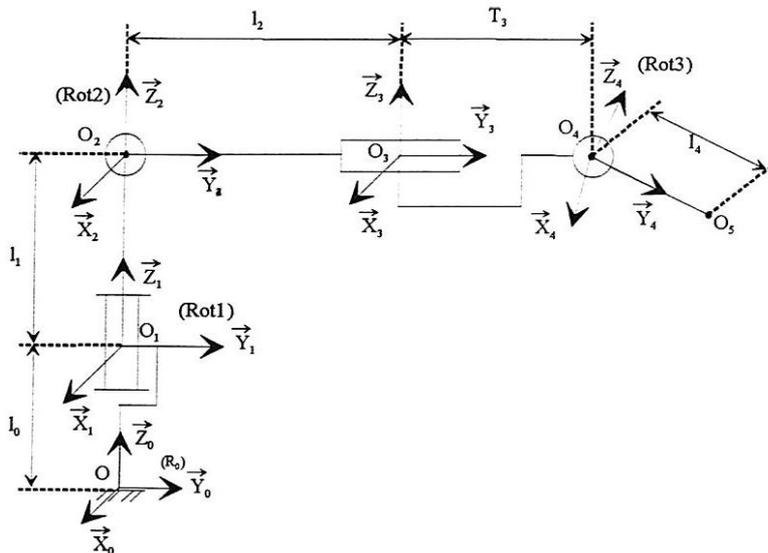


Figure IV-13 : Robot à 4 d.d.l., selon la notation pour la description de **Borrel**

Les transformations de repères sont les suivantes : Le robot de la figure a 4 degrés de liberté ; 3 en rotation θ_1, θ_2 et θ_4 et un en translation P_3 .

Remarque

Pour simplifier l'écriture on posera :

$$\cos\theta_i = c_i$$

$$\sin\theta_i = s_i$$

$$\cos(\theta_i + \theta_j) = c(i+j)$$

$$\sin(\theta_i + \theta_j) = s(i+j)$$

1) *calculons l'orientation d'un corps de la chaîne par rapport à un repère lié à un corps amont*

On obtient la transformation du repère R_1 par rapport au repère R_0 , par une rotation d'un angle θ_1 , autour de Z_0 . On aura donc:

$$M_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 \\ S1 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

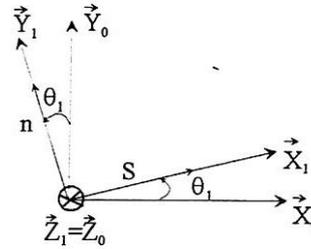


Figure IV-14

La transformation du repère R_2 par rapport au repère R_1 correspond à une rotation θ_2 autour de X_1 :

$$M_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C2 & -S2 \\ 0 & S2 & C2 \end{bmatrix}$$

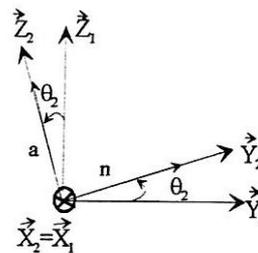


Figure IV-15

La transformation du repère R_3 par rapport au repère R_2 correspond à une translation P_3 le long de Y_3 :

$$M_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

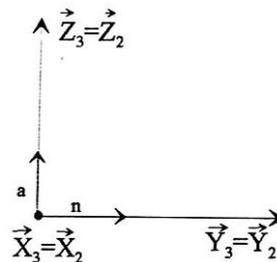


Figure IV-16

La transformation du repère R_4 par rapport au repère R_3 correspond à une rotation θ_4 autour de X_3 :

$$M_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C4 & -S4 \\ 0 & S4 & C4 \end{bmatrix}$$

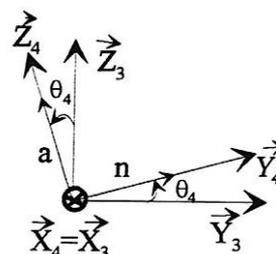


Figure IV-17

Les matrices de passage M_0^i

1- Transformation du repère R_2 p/r au repère de référence R_0 :

$$M_0^2 = M_0^1 M_1^2 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 \\ S1 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C2 & -S2 \\ 0 & S2 & C2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C1 & -S1C2 & S1S2 \\ S1 & C1C2 & -C1S2 \\ 0 & S2 & C2 \end{bmatrix}$$

2- Transformation du repère R_3 au repère de référence R_0 :

$$M_0^3 = M_0^2 M_2^3 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 \\ S1 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C2 & -S2 \\ 0 & S2 & C2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C1 & -S1C2 & S1S2 \\ S1 & C1C2 & -C1S2 \\ 0 & S2 & C2 \end{bmatrix}$$

3- Transformation du repère R_4 au repère de référence R_0 :

$$M_0^4 = M_0^1 M_1^2 M_2^3 M_3^4 = M_0^3 M_3^4 = \begin{bmatrix} C1 & -S1C2 & S1S2 \\ S1 & C1C2 & -C1S2 \\ 0 & S2 & C2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C4 & -S4 \\ 0 & S4 & C4 \end{bmatrix}$$

$$M_0^4 = \begin{pmatrix} C1 & -S1C(2+4) & S1S(2+4) \\ S1 & C1C(2+4) & -C1S(2+4) \\ 0 & S(2+4) & C(2+4) \end{pmatrix}$$

Donc l'orientation du repère R_4 lié à l'élément O_4O_5 par rapport au repère de référence R_0 lié à la base est :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C1 & -S1C(2+4) & S1S(2+4) \\ S1 & C1C(2+4) & -C1S(2+4) \\ 0 & S(2+4) & C(2+4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix}$$

2) Calculons l'orientation d'un corps de la chaîne par rapport à un repère lié à un corps aval

On a les mêmes matrices de passage et qui sont comme suit:

$$M_0^1 = \begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 \\ S1 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C2 & -S2 \\ 0 & S2 & C2 \end{pmatrix},$$

$$M_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C4 & -S4 \\ 0 & S4 & C4 \end{pmatrix}$$

L'orientation du repère R_0 par rapport à R_4 est :

$$\begin{aligned} M_4^0 &= [M_0^1 M_1^2 M_2^3 M_3^4]^T = [M_0^4]^T \\ &= [M_3^4]^T [M_2^3]^T [M_1^2]^T [M_0^1]^T \\ \vec{V}(R_4) &= M_4^0 \cdot \vec{V}(R_0) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CI & SI & 0 \\ -SIC(2+4) & CIC(2+4) & S(2+4) \\ SIS(2+4) & -CIS(2+4) & C(2+4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

3) Calcul de la position (les coordonnées) du point O_5 par rapport au repère de référence R_0 lié à la base

$$\vec{OO}_5(R_0) = \vec{OO}_4(R_0) + M_0^4 \vec{O}_4 \vec{O}_5(R_4)$$

$$\vec{OO}_4(R_0) = \vec{OO}_3(R_0) + M_0^3 \vec{O}_3 \vec{O}_4(R_3)$$

$$\vec{OO}_3(R_0) = \vec{OO}_2(R_0) + M_0^2 \vec{O}_2 \vec{O}_3(R_2)$$

$$\vec{OO}_2(R_0) = \vec{OO}_1(R_0) + M_0^1 \vec{O}_1 \vec{O}_2(R_1)$$

Or:

$$\vec{OO}_1(R_0) = [0, 0, \ell_0]^T$$

$$\vec{O}_1 \vec{O}_2(R_1) = [0, 0, \ell_1]^T$$

$$\vec{O}_2 \vec{O}_3(R_2) = [0, \ell_2, 0]^T$$

$$\vec{O}_3 \vec{O}_4(R_3) = [0, T_3, 0]^T$$

$$\vec{O}_4 \vec{O}_5(R_4) = [0, \ell_4, 0]^T$$

Calcul des Vecteurs positions des divers centres des repères exprimés par rapport au repère de référence R_0 .

$$\vec{OO}_2(R_0) = \vec{OO}_1(R_0) + M_0^1 \vec{O}_1 \vec{O}_2(R_1)$$

$$\vec{OO}_2(R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} CI & -SI & 0 \\ SI & CI & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell_0 + \ell_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OO}_3(R_0) = \vec{OO}_2(R_0) + M_0^2 O_2 \vec{O}_3(R_2)$$

$$\vec{OO}_3(R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 + l_1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C1 & -S1C2 & S1S2 \\ S1 & C1C2 & -C1S2 \\ 0 & S2 & C2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 + l_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l_2 S_1 C_2 \\ l_2 C_1 C_2 \\ l_2 S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_2 S_1 C_2 \\ l_2 C_1 C_2 \\ l_0 + l_1 + l_2 S_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OO}_4(R_0) = \vec{OO}_3(R_0) + M_0^3 O_3 \vec{O}_4(R_3)$$

$$= \begin{pmatrix} -l_2 S_1 C_2 \\ l_2 C_1 C_2 \\ l_0 + l_1 + l_2 S_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C1 & -S1C2 & S1S2 \\ S1 & C1C2 & -C1S2 \\ 0 & S2 & C2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ T_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -l_2 S_1 C_2 \\ l_2 C_1 C_2 \\ l_0 + l_1 + l_2 S_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T_3 S1C2 \\ T_3 C1C2 \\ T_3 S2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(l_2 + T_3) S1C2 \\ (l_2 + T_3) C1C2 \\ l_0 + l_1 + (l_2 + T_3) S2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OO}_5(R_0) = \vec{OO}_4(R_0) + M_0^4 O_4 \vec{O}_5(R_4)$$

$$= \begin{pmatrix} -(l_2 + T_3) S1C2 \\ (l_2 + T_3) C1C2 \\ l_0 + l_1 + (l_2 + T_3) S2 \end{pmatrix} + [M_0^4] \begin{pmatrix} 0 \\ l_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(l_2 + T_3) S1C2 \\ (l_2 + T_3) C1C2 \\ l_0 + l_1 + (l_2 + T_3) S2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 (S1S2S4 - S1C2C4) \\ l_4 (C1C2C4 - C1S2S4) \\ l_4 (S2C4 + C2S4) \end{pmatrix}$$

$$\vec{OO}_5(R_0) = \begin{pmatrix} -(l_2 + T_3) S1C2 - l_4 S1C(2+4) \\ (l_2 + T_3) C1C2 + l_4 C1C(2+4) \\ l_0 + l_1 + (l_2 + T_3) S2 + l_4 S(2+4) \end{pmatrix}$$

On a donc:

$$X_{0_5}(R_0) = -(l_2 + T_3) S1C2 + l_4 S1C(2+4)$$

$$Y_{0_5}(R_0) = (l_2 + T_3) C1C2 + l_4 C1C(2+4)$$

$$Z_{0_5}(R_0) = l_0 + l_1 + (l_2 + T_3) S2 + l_4 S(2+4)$$

4) Détermination des vecteurs vitesses de rotation des divers corps par rapport à un repère de la chaîne

On connaît les vecteurs vitesses initiaux qui sont :

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_0^{(0)}(R_0) &= [0, 0, 0]^T & \bar{\Omega}_1^{(0)}(R_0) &= [0, 0, \dot{\theta}_1]^T \\ \bar{\Omega}_2^{(1)}(R_1) &= [\dot{\theta}_2, 0, 0]^T & \bar{\Omega}_3^{(2)}(R_2) &= [0, 0, 0]^T \text{ (translation)} \\ \bar{\Omega}_4^{(3)}(R_3) &= [\dot{\theta}_4, 0, 0]^T\end{aligned}$$

On peut donc calculer les vecteurs vitesses de rotation suivant :

$$\bar{\Omega}_1^0(R_1) = \bar{\Omega}_1^0(R_0) + [M_0^1]^T \cdot \bar{\Omega}_0^0(R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_2^0(R_2) = \bar{\Omega}_2^1(R_1) + [M_1^2]^T \cdot \bar{\Omega}_1^0(R_1)$$

$$\bar{\Omega}_2^0(R_2) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C2 & S2 \\ 0 & -S2 & C2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ S2\dot{\theta}_1 \\ C2\dot{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_3^0(R_3) = \bar{\Omega}_3^2(R_2) + [M_2^3]^T \cdot \bar{\Omega}_2^0(R_2) = \bar{\Omega}_2^0(R_2) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ S2\dot{\theta}_1 \\ C2\dot{\theta}_1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_4^0(R_4) = \bar{\Omega}_4^3(R_3) + [M_3^4]^T \cdot \bar{\Omega}_3^0(R_3)$$

$$\bar{\Omega}_4^0(R_4) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C4 & S4 \\ 0 & -S4 & C4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ S2\dot{\theta}_1 \\ C2\dot{\theta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_1(S2C4 + C2S4) \\ \dot{\theta}_1(C2C4 - S2S4) \end{pmatrix}$$

5) Détermination des vecteurs vitesses des divers corps par rapport à un repère de la chaîne

Le manipulateur qu'on étudie contient une seule translation et trois rotations. Donc on a les vitesses de translations suivantes :

$$\vec{V}_{0_1}^0(R_0) = \vec{V}_{0_2}^0(R_1) = \vec{V}_{0_3}^0(R_2) = \vec{V}_{0_5}^0(R_4) = [0, 0, 0]^T$$

$$\vec{V}_{0_4}^0(R_3) = [0, \dot{T}_3, 0]^T$$

Et successivement on peut calculer les différents vecteurs vitesses :

$$\vec{V}_{0_2}^0(R_1) = \vec{V}_{0_1}^0(R_1) + \vec{\Omega}_1^0(R_1) \wedge \vec{O}_1\vec{O}_2(R_1) + \vec{V}_{0_2^{0_1}}^0(R_1)$$

$$\vec{V}_{0_2}^0(R_2) = [M_1^2]^T \cdot \vec{V}_{0_2}^0(R_1) = [0, 0, 0]^T$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{0_3}^0(R_2) &= \vec{V}_{0_2}^0(R_2) + \vec{\Omega}_2^0(R_2) \wedge \vec{O}_2\vec{O}_3(R_2) + \vec{V}_{0_3^{0_2}}^0(R_2) \\ &= [-\ell_2 C 2\dot{\theta}_1, 0, \ell_2 \dot{\theta}_2]^T \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{0_3}^0(R_3) = [M_2^3]^T \cdot \vec{V}_{0_3}^0(R_2) = \vec{V}_{0_3}^0(R_2)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{0_4}^0(R_3) &= \vec{V}_{0_3}^0(R_3) + \vec{\Omega}_3^0(R_3) \wedge \vec{O}_3\vec{O}_4(R_3) + \vec{V}_{0_4^{0_3}}^0(R_3) \\ &= [-(\ell_2 + T_3)C 2\dot{\theta}_1, \dot{T}_3, \dot{\theta}_2(\ell_2 + T_3)]^T \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{0_4}^0(R_4) = [M_3^4]^T \cdot \vec{V}_{0_4}^0(R_3) = \begin{pmatrix} -C 2\dot{\theta}_1(\ell_2 + T_3) \\ \dot{T}_3 C 4 + S 4\dot{\theta}_2(\ell_2 + T_3) \\ C 4\dot{\theta}_2(\ell_2 + T_3) - \dot{T}_3 S 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{0_5}^0(R_4) &= \vec{V}_{0_4}^0(R_4) + \vec{\Omega}_4^0(R_4) \wedge \vec{O}_4\vec{O}_5(R_4) \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1 C 2(\ell_2 + T_3) - \ell_4 \dot{\theta}_1 C(2 + 4) \\ \dot{T}_3 C 4 + S 4\dot{\theta}_2(\ell_2 + T_3) \\ -S 4\dot{T}_3 + C 4\dot{\theta}_2(\ell_2 + T_3) + \ell_4(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

IV.2. Mécanisme fermé (sphérique)

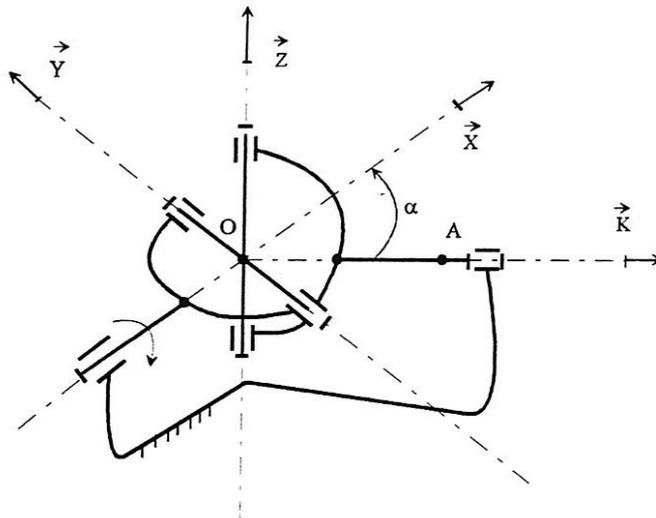


Figure IV-18: Mécanisme sphérique (joint cardan)

Ce mécanisme a 3 degrés de liberté en rotation θ_1, θ_2 et θ_3 . Les repères sont les suivantes:

$\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0$ repère orthonormé

$$\vec{OK} = C\alpha \vec{X}_0 + S\alpha \vec{Y}_0$$

$$\vec{OA} = \ell C\alpha \vec{X}_0 + \ell S\alpha \vec{Y}_0$$

1) calculons l'orientation d'un corps de la chaîne par rapport à un repère lié à un corps amont

Les matrices de passage sont les suivantes :

On obtient la première transformation du repère $R_1(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$ par une rotation d'un angle θ_1 , autour de \vec{X}_0

$$M_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C1 & -S1 \\ 0 & S1 & C1 \end{bmatrix}$$

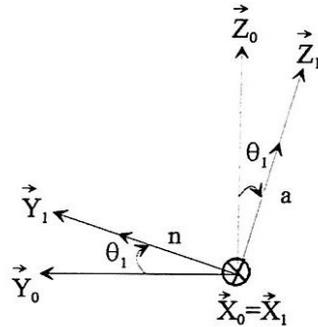


Figure IV-19

La deuxième transformation correspond à une rotation θ_2 autour de \vec{Y}_1 .

$$M_1^2 = \begin{bmatrix} C2 & 0 & S2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S2 & 0 & C2 \end{bmatrix}$$

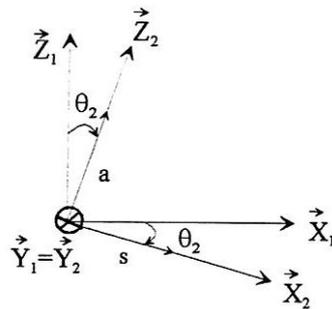


Figure IV-20

La troisième transformation correspond à une rotation θ_3 autour de \vec{Z}_2 .

$$M_2^3 = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 \\ S3 & C3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

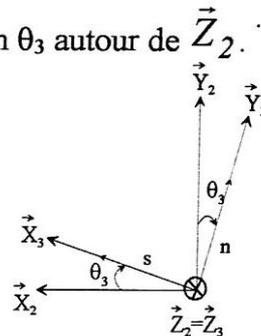


Figure IV-21

Les matrices de passage M_0^i

1- Transformation du repère R_2 par rapport au repère de référence R_0 :

$$M_0^2 = M_0^1 M_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C1 & -S1 \\ 0 & S1 & C1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C2 & 0 & S2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S2 & 0 & C2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C2 & 0 & S2 \\ SIS2 & C1 & -SIC2 \\ -CIS2 & S1 & CIC2 \end{bmatrix}$$

2- Transformation du repère R_3 par rapport au repère de référence R_0 est :

$$M_0^3 = M_0^2 M_2^3 = \begin{bmatrix} C2 & 0 & S2 \\ SIS2 & C1 & -SIC2 \\ -CIS2 & S1 & CIC2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 \\ S3 & C3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

$$M_0^3 = \begin{bmatrix} C2C3 & -C2S3 & S2 \\ SIS2C3 + CIS3 & -SIS2S3 + CIC3 & -SIC2 \\ -CIS2C3 + SIS3 & CIS2S3 + SIC3 & CIC2 \end{bmatrix}$$

2) Calcul de la position (les coordonnées) du point A lie à l'axe de sortie

Les points 1, 2, 3 et 4 ne varient pas par rapport à l'origine 0 car c'est un mécanisme sphérique.

Donc : $\vec{OO}_1(R_0)$, $\vec{OO}_2(R_0)$, $\vec{OO}_3(R_0)$, $\vec{OA}(R_0)$ sont considérés comme connue et leur valeurs sont:

$$\vec{OO}_1(R_0) = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{OO}_2(R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{OO}_3(R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell_3 \end{pmatrix} \quad \vec{OA}(R_0) = \begin{pmatrix} \ell C\alpha \\ \ell S\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

1- Après les trois transformations, calculons les nouvelles coordonnées du vecteur position du point A exprimées par rapport au repère de référence R_0 .

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = [M_0^3] \begin{pmatrix} \ell C\alpha \\ \ell S\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C2C3 & -C2S3 & S2 \\ SIS2C3 + CIS3 & -SIS2S3 + CIC3 & -SIC2 \\ -CIS2C3 + SIS3 & CIS2S3 + SIC3 & CIC2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ell C\alpha \\ \ell S\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell C\alpha C2C3 - \ell S\alpha C2S3 \\ \ell C\alpha(S1S2C3 + C1S3) + \ell S\alpha(C1C3 - S1S2S3) \\ \ell C\alpha(S1S3 - C1S2C3) + \ell S\alpha(C1S2S3 + S1C3) \end{pmatrix}$$

Donc les nouvelles coordonnées du point A exprimées par rapport au repère de référence est :

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C2C(\alpha + 3) \\ S(\alpha + 3)C1 + S2S1C(\alpha + 3) \\ S(\alpha + 3)S1 - S2C1C(\alpha + 3) \end{pmatrix}$$

2- Maintenant, on exprime la position du point A après les trois transformations, dans le repère R_3 :

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = [M_{0}^3]^T \begin{pmatrix} \ell C\alpha \\ \ell S\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C2C3 & S1S2C3 + C1S3 & -C1S2C3 + S1S3 \\ -C2S3 & -S1S2S3 + C1C3 & C1S2S3 + S1C3 \\ S2 & S1C2 & C1C2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ell C\alpha \\ \ell S\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enfin les nouvelles coordonnées du point A exprimées par rapport au repère R_3 est :

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell C\alpha C2C3 + \ell S\alpha(S1S2C3 + C1S3) \\ -\ell C\alpha C2S3 + \ell S\alpha(-S1S2S3 + C1C3) \\ \ell C\alpha S2 + \ell S\alpha S1C2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

3) Détermination des vecteurs vitesses de rotation des divers corps par rapport à un repère de la chaîne

On connaît les vecteurs vitesses suivant :

$$\vec{\Omega}_0^0(R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega}_1^0(R_0) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega}_2^1(R_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega}_3^2(R_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}$$

Maintenant on calcule les vecteurs vitesses de rotation

$$\bar{\Omega}_1^0(R_1) = \bar{\Omega}_1^0(R_0) + [M_0^1]^T \bar{\Omega}_0^0(R_0)$$

$$\bar{\Omega}_1^0(R_1) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C1 & S1 \\ 0 & -S1 & C1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_2^0(R_2) = \bar{\Omega}_2^1(R_1) + [M_1^2]^T \bar{\Omega}_1^0(R_1)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C2 & 0 & -S2 \\ 0 & 1 & 0 \\ S2 & 0 & C2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_2^0(R_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C2\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ S2\dot{\theta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 C2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 S2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_3^0(R_3) = \bar{\Omega}_3^2(R_2) + [M_2^3]^T \bar{\Omega}_2^0(R_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} C3 & S3 & 0 \\ -S3 & C3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 C2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 S2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Omega}_3^0(R_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 C2 C3 + \dot{\theta}_2 S3 \\ -\dot{\theta}_1 C2 S3 + \dot{\theta}_2 C3 \\ \dot{\theta}_1 S2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 C2 C3 + \dot{\theta}_2 S3 \\ -\dot{\theta}_1 C2 S3 + \dot{\theta}_2 C3 \\ \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S2 \end{pmatrix}$$

4) Détermination du vecteur vitesse du point A lié à l'axe de sortie par rapport au repère de référence R_0 , mais exprimée dans le repère R_3 .

Les vitesses de translation sont tous nulles car il n'y a pas de translation

$$\vec{V}_0^0(R_0) = \vec{V}_1^0(R_0) = \vec{V}_2^1(R_1) = \vec{V}_3^2(R_2) = \vec{V}_4^3(R_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut calculer le vecteur vitesse

$$\begin{aligned}\vec{V}_4^0(R_3) &= \vec{\Omega}_3^0(R_3) \wedge \vec{OA}(R_3) + \vec{V}_4^3(R_3) \\ \vec{V}_4^0(R_3) &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 C_2 C_3 + \dot{\theta}_2 S_3 \\ -\dot{\theta}_1 C_2 S_3 + \dot{\theta}_2 C_3 \\ \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \ell C \alpha C_2 C_3 + \ell S \alpha (S_1 S_2 C_3 + C_1 S_3) \\ -\ell C \alpha C_2 S_3 + \ell S \alpha (-S_1 S_2 S_3 + C_1 C_3) \\ \ell C \alpha S_2 + \ell S \alpha S_1 C_2 \end{pmatrix} \\ \vec{V}_4^0(R_3) &= \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S_2) & -\dot{\theta}_1 C_2 S_3 + \dot{\theta}_2 C_3 \\ \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S_2 & 0 & -(\dot{\theta}_1 C_2 C_3 + \dot{\theta}_2 S_3) \\ \dot{\theta}_1 C_2 S_3 - \dot{\theta}_2 C_3 & \dot{\theta}_1 C_2 C_3 + \dot{\theta}_2 S_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ell C \alpha C_2 C_3 + \ell S \alpha (S_1 S_2 C_3 + C_1 S_3) \\ -\ell C \alpha C_2 S_3 + \ell S \alpha (-S_1 S_2 S_3 + C_1 C_3) \\ \ell C \alpha S_2 + \ell S \alpha S_1 C_2 \end{pmatrix} \\ \vec{V}_4^0(R_3) &= \begin{pmatrix} -(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S_2) B + (-\dot{\theta}_1 C_2 S_3 + \dot{\theta}_2 C_3) C \\ (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S_2) A - (\dot{\theta}_1 C_2 C_3 + \dot{\theta}_2 S_3) C \\ (\dot{\theta}_1 C_2 S_3 - \dot{\theta}_2 C_3) A + (\dot{\theta}_1 C_2 C_3 + \dot{\theta}_2 S_3) B \end{pmatrix}\end{aligned}$$

V. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'étude cinématique d'un bras manipulateur basé sur les matrices de passage homogène. Ensuite nous l'avons appliqué sur des mécanismes ouverts et fermés.

L'utilisation de cette méthode sur les mécanismes ouverts a présenté des avantages surtout en ce qui concerne la simplicité des calculs. Mais il se trouve qu'en l'appliquant sur des mécanismes fermés, la résolution se complique.

Dans le prochain chapitre, nous allons présenter l'étude cinématique basée sur l'algèbre de Lie.

CHAPITRE V

ETUDE CINEMATIQUE D'UN BRAS-MANIPULATEUR BASEE SUR L'ALGEBRE DE LIE

I. INTRODUCTION

En 1973, GUPTA a montré que l'on peut étudier un mécanisme quelconque en associant à chaque couple cinématique un ensemble de transformations géométriques qui ne sont pas spécifiques d'un choix particulier d'axes. Il s'agit de matrices représentant dans un repère de référence des opérateurs de déplacements agissant sur les points de l'espace représentés par leurs trois coordonnées dans le même repère de référence, [18].

Le calcul vectoriel moderne permet d'effectuer des déductions d'une façon indépendante du choix d'un repère de référence. On peut distinguer un point Q grâce à ses trois coordonnées X_Q, Y_Q, Z_Q , un vecteur \vec{u} de trois composantes scalaires X, Y, Z, ainsi qu'un opérateur de déplacement de sa représentation matricielle.

II. DEPLACEMENT ET TORSEUR DES VITESSES

II.1. Formulation intrinsèque d'un opérateur de déplacement

Grâce aux mathématiques de l'algèbre de Lie des torseurs (*) et du groupe de Lie des déplacements, il est possible de trouver l'expression intrinsèque d'un opérateur de déplacement, [18]. Un opérateur de déplacement D est une transformation géométrique agissant sur les points A de l'espace, telle que les longueurs des vecteurs soient conservées ainsi que les orientations des angles. Ainsi, si un déplacement agit sur les points d'un corps rigide quelconque en position donnée, on obtient les points d'une nouvelle position du même corps, [17]. Un tel déplacement D peut être écrit sous la forme intrinsèque suivante:

$\forall A \in \xi^3$ (ξ^3 espace affine euclidien de dimension 3)

$$A \xrightarrow{D} A' = O + a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} + \exp((f\vec{x} + g\vec{y} + h\vec{z}) \wedge) \vec{OA} \quad (\text{V-01})$$

\forall le point de référence O, $A' \in \xi^3$

a, b, c, f, g, h sont six paramètres (ensemble des déplacements est un groupe de lie de dimension 6).

Le point O et les vecteurs \vec{X}, \vec{Y} et \vec{Z} forment un repère quelconque de l'espace ξ^3 . Par la suite, on choisira, par commodité, des vecteurs unités.

On simplifie les notations en posant:

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = t\vec{T} \quad (\text{V-02})$$

$$\text{et } f\vec{x} + g\vec{y} + h\vec{z} = \theta \vec{R}$$

donc, le déplacement D devient:

$$A \xrightarrow{D} A' = O + t\vec{T} + \exp(\theta \vec{R} \wedge) \vec{OA}, \text{ ou bien: } \vec{OA}' = t\vec{T} + \exp(\theta \vec{R} \wedge) \vec{OA} \quad (\text{V-03})$$

L'opérateur intrinsèque homogène:

$$\begin{bmatrix} \vec{OA}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(\theta \vec{R} \wedge) & t\vec{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{OA} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V-04})$$

Il reste à rendre explicite le terme exponentiel par le développement en série de Taylor au second ordre:

$$\exp(\theta \vec{R} \wedge) = 1 + \frac{1}{1!} \theta \vec{R} \wedge + \frac{1}{2!} \theta^2 \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge) + \dots + \frac{1}{n!} \theta^n (\vec{R} \wedge)^n + \dots$$

On en déduit:

$$\exp(\theta \vec{R} \wedge) = 1 + \sin \theta \vec{R} \wedge + (1 - \cos \theta) (\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge))$$

ou bien:

$$\exp(\theta \vec{R} \wedge) \vec{OA} = \vec{OA} + \sin \theta (\vec{R} \wedge \vec{OA}) + (1 - \cos \theta) (\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{OA})) \quad (\text{V-05})$$

L'exponentielle correspond à une rotation (*) dont l'axe est déterminé par le couple (O, \vec{R}) caractérisant un vecteur glissant dont le support passe par le point O et dont l'angle est θ .

(*) On vérifie par calcul vectoriel que l'on peut écrire:

$$\exp(\theta \vec{R} \wedge) \vec{OA} = (\vec{R} \cdot \vec{OA}) \cdot \vec{R} + \sin \theta \cdot \vec{R} \wedge (\vec{OA} - (\vec{R} \cdot \vec{OA}) \cdot \vec{R}) + \cos \theta (\vec{OA} - (\vec{R} \cdot \vec{OA}) \cdot \vec{R}) \quad (\text{V-06})$$

$(\vec{R} \cdot \vec{OA}) \vec{R}$ est la projection orthogonale de \vec{OA} sur l'axe (O, \vec{R})

$\vec{OA} - (\vec{R} \cdot \vec{OA}) \vec{R}$ est la projection orthogonale de \vec{OA} sur le plan orthogonal à cet axe

$\vec{R} \wedge (\vec{OA} - (\vec{R} \cdot \vec{OA}) \vec{R}) = \vec{R} \wedge \vec{OA}$ est un vecteur orthogonal au précédent dans le même plan.

II.2. Déplacement et torseur des vitesses

Un déplacement infiniment petit est obtenue lorsque les six (06) paramètres du déplacement sont infiniment petits. Alors, la série exponentielle se réduit aux deux premiers termes en négligeant les infiniment petits du second ordre, [18], [29].

$$\exp((df\vec{X} + dg\vec{Y} + dh\vec{Z})\wedge) = 1. + (df\vec{X} + dg\vec{Y} + dh\vec{Z})\wedge \quad (V-07)$$

un déplacement infiniment petit s'écrit:

$$\begin{aligned} A \rightarrow A' &= O + da\vec{X} + db\vec{Y} + dc\vec{Z} + \vec{OA} + (df\vec{X} + dg\vec{Y} + dh\vec{Z})\wedge \vec{OA} \\ &= A + da\vec{X} + db\vec{Y} + dc\vec{Z} + (df\vec{X} + dg\vec{Y} + dh\vec{Z})\wedge \vec{OA} \\ \text{Donc : } \vec{AA'} &= \vec{dA} = da\vec{X} + db\vec{Y} + dc\vec{Z} + (df\vec{X} + dg\vec{Y} + dh\vec{Z})\wedge \vec{OA} \end{aligned} \quad (V-08)$$

En faisant intervenir le paramètre de temps τ et en supposant que le passage de A_1 en A_2 infiniment voisin résulte du passage de la date τ à la date $\tau + d\tau$, on obtient la vitesse du point A:

$$\vec{V}(A) = \frac{da}{d\tau}\vec{X} + \frac{db}{d\tau}\vec{Y} + \frac{dc}{d\tau}\vec{Z} + \left(\frac{df}{d\tau}\vec{X} + \frac{dg}{d\tau}\vec{Y} + \frac{dh}{d\tau}\vec{Z}\right)\wedge \vec{OA} \quad (V-09)$$

Le torseur vitesse se présente donc: $\vec{V}(A) = \vec{V}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OA} \quad (V-10)$

II.3. Représentation intrinsèque des couples cinématique

Elle est donnée par le tableau suivant; chaque couple cinématique sera associé à l'ensemble des déplacements caractéristiques des possibilités de mouvement d'un corps du couple par rapport à l'autre.

ddl	Couple cinématique	Données	Variables	Transformations
0	Couple rigide			$A \rightarrow A$
	Couple prismatique	\vec{X}	a	$A \rightarrow A + a\vec{X}$
1	Couple rotoïde	O, \vec{X}	f	$A \rightarrow O + \exp(f\vec{X}\wedge)\vec{OA}$
	Couple de vis	O, \vec{X} $p = 2K\pi$	f	$A \rightarrow O + fK\vec{X} + \exp(f\vec{X}\wedge)\vec{OA}$
2	Couple verrou	O, \vec{X}	a, f	$A \rightarrow O + a\vec{X} + \exp(f\vec{X}\wedge)\vec{OA}$
	Couple plan	$\Gamma = (\vec{X}, \vec{Y})$ $\vec{Z} \perp (\vec{X}, \vec{Y})$	a, b, h	$A \rightarrow O + a\vec{X} + b\vec{Y} \exp(h\vec{Z}\wedge)\vec{OA}$
3	Couple sphérique	O	f, g, h	$A \rightarrow O + \exp((f\vec{X} + g\vec{Y} + h\vec{Z})\wedge)\vec{OA}$

III. EXEMPLES

III.1. Application aux mécanismes en chaîne ouvertes

Prenant l'exemple de la figure V-03. Le mécanisme à 4 degrés de liberté qui a pour couple les suivants:

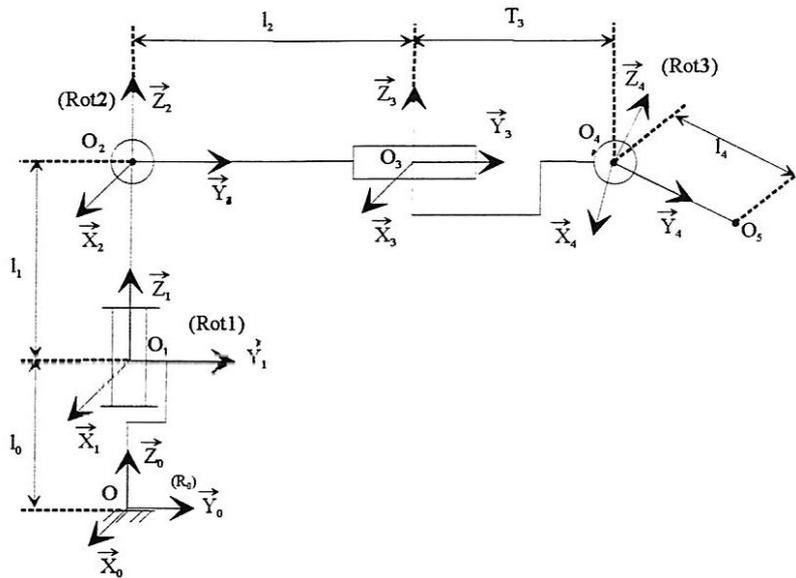


Figure V-03: Mécanisme poly-articulé

- Un couple rotoïde d'axe déterminé par (O_1, \vec{Z}) avec un angle θ_1 .
- Un couple rotoïde d'axe déterminé par (O_2, \vec{X}) avec un angle θ_2 .
- Un couple prismatique de direction \vec{Y} et d'amplitude T_3 .
- Un couple rotoïde d'axe déterminé par (O_4, \vec{X}) avec un angle θ_4 .

$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ sont des vecteurs unités; O_1, O_2, O_3 et O_4 sont les origines des systèmes de coordonnées successives.

1) Détermination du vecteur position du point du point O'_5 transformé du point O_5 lié au corps terminal mobile du mécanisme exprimé par rapport au repère de référence R_0 .

On commence par fonctionner le dernier couple, jusqu'à ce qu'on arrive au premier:

$$O_5 \text{ — } M_1 = O_4 + \exp(\theta_4 \vec{X}) O_4 O_5$$

$$M_1 \text{ — } M_2 = O_3 + T_3 \vec{Y}$$

$$M_2 \text{ — } M_3 = O_2 + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) O_2 M_2$$

$$M_3 \text{ — } O'_5 = O_1 + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) O_1 M_3$$

Donc on déduit

$$\vec{OO}'_5 = \vec{OO}_1 + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) \left[\vec{O}_1 \vec{O}_2 + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) (\vec{O}_2 \vec{O}_3 + T_3 \vec{Y} + \exp(\theta_4 \vec{X} \wedge) \vec{O}_4 \vec{O}_5) \right] \quad (\text{V-11})$$

On a comme donné :

$$\begin{aligned} \vec{OO}_1 &= \ell_0 \vec{Z} & \vec{O}_1 \vec{O}_2 &= \ell_1 \vec{Z} & \vec{O}_2 \vec{O}_3 &= \ell_2 \vec{Y} \\ \vec{O}_3 \vec{O}_4 &= \ell_3 \vec{Y} & \vec{O}_4 \vec{O}_5 &= \ell_4 \vec{Y} \end{aligned}$$

Donc l'équation de la position du point O'_5 devient :

$$\vec{OO}'_5(R_0) = \ell_0 \vec{Z} + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) \left[\ell_1 \vec{Z} + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) \left((\ell_2 + T_3) \vec{Y} + \exp(\theta_4 \vec{X} \wedge) \ell_4 \vec{Y} \right) \right]$$

Procédons par étape et rendons l'expression précédente plus explicite. Pour simplifier l'écriture, on prend:

$$\cos \theta_i = C_i$$

$$\sin \theta_i = S_i$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{OO}'_5(R_0) &= \ell_0 \vec{Z} + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) \left[\ell_1 \vec{Z} + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) \left((\ell_2 + T_3) \vec{Y} + \exp(\theta_4 \vec{X} \wedge) \ell_4 \vec{Y} \right) \right] \\ &= \ell_0 \vec{Z} + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) \left[\ell_1 \vec{Z} + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) \left((\ell_2 + T_3) \vec{Y} + \ell_4 \exp(\theta_4 \vec{X} \wedge) \vec{Y} \right) \right] \\ &= \ell_0 \vec{Z} + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) \left[\ell_1 \vec{Z} + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) \left((\ell_2 + T_3) \vec{Y} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \ell_4 \left(\vec{Y} + S_4 \vec{X} \wedge \vec{Y} + (1 - C_4) \left(\vec{X} \wedge (\vec{X} \wedge \vec{Y}) \right) \right) \right) \right] \\ &= \ell_0 \vec{Z} + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) \left[\ell_1 \vec{Z} + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) \left((\ell_2 + T_3) \vec{Y} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \ell_4 \left(S_4 \vec{Z} + C_4 \vec{Y} \right) \right) \right] \\ &= \ell_0 \vec{Z} + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) \left[\ell_1 \vec{Z} + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) \left(\left((\ell_2 + T_3) + \ell_4 C_4 \right) \vec{Y} + \ell_4 S_4 \vec{Z} \right) \right] \\ &= \ell_0 \vec{Z} + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) \left[\ell_1 \vec{Z} + \right. \\ &\quad \left(\left((\ell_2 + T_3) + \ell_4 C_4 \right) \left(\vec{Y} + S_4 \vec{X} \wedge \vec{Y} + (1 - C_2) \left(\vec{X} \wedge (\vec{X} \wedge \vec{Y}) \right) \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\ell_4 S_4 \right) \left(\vec{Z} + S_2 \vec{X} \wedge \vec{Z} + (1 - C_2) \left(\vec{X} \wedge (\vec{X} \wedge \vec{Z}) \right) \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\vec{OO}'_5(R_0) = \ell_0 \vec{Z} + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) [\ell_1 \vec{Z} + ((\ell_2 + T_3) + \ell_4 C4)(S2 \vec{Z} + C2 \vec{Y}) + (\ell_4 S4)(C2 \vec{Z} - S2 \vec{Y})]$$

$$\vec{OO}'_5(R_0) = \ell_0 \vec{Z} + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) [\ell_1 \vec{Z} + (\ell_1 + ((\ell_2 + T_3) + \ell_4 C4)S2) + (\ell_4 S4 C2) \vec{Z} + ((\ell_4 C4 + (\ell_2 + T_3))C4 - \ell_4 S4 S2) \vec{Y}]$$

$$\vec{OO}'_5(R_0) = \ell_0 \vec{Z} + (\ell_1 + ((\ell_2 + T_3) + \ell_4 C4)S2 + \ell_4 S4 C2)(\vec{Z} + S1 \vec{Z} \wedge \vec{Z} + (1 - C1)(\vec{Z} \wedge (\vec{Z} \wedge \vec{Z}))) + (\ell_4 C2 C4 + (\ell_2 + T_3)C2 - (\ell_4 S2 S4))(\vec{Y} + S1 \vec{Z} \wedge \vec{Y} + (1 - C1)(\vec{Z} \wedge (\vec{Z} \wedge \vec{Y})))$$

$$\vec{OO}'_5(R_0) = (\ell_0 + \ell_1 + (\ell_2 + T_3)S2 + \ell_4(C4S2 + C2S4))\vec{Z} + ((\ell_2 + T_3)C2 + \ell_4(C3C4 - S2S4))(C1\vec{Y} - S1\vec{X})$$

Donc le vecteur position du point O'_5 transformé du point O_5 exprimé par rapport au repère de référence R_0 est :

$$\begin{aligned} \vec{OO}'_5(R_0) &= (-(\ell_2 + T_3)S1C2 - \ell_4 S1C(2+4))\vec{X}_0 \\ &+ ((\ell_2 + T_3)C1C2 + \ell_4 C1C(2+4))\vec{Y}_0 \\ &+ (\ell_0 + \ell_1 + (\ell_2 + T_3)S2 + \ell_4 S(2+4))\vec{Z}_0 \end{aligned} \quad (V-12)$$

1.2) Détermination du vecteur position du point O'_5 exprimé par rapport au repère (R_4)

Donc, on doit commencer par fonctionner le premier couple, jusqu'à ce qu'on arrive au dernier.

$$\begin{aligned} O_5 \rightarrow M_1 &= O_1 + \exp(\theta_1 \vec{Z} \wedge) \vec{O}_1 O \\ M_1 \rightarrow M_2 &= O_2 + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) \vec{O}_2 M_1 \\ M_2 \rightarrow M_3 &= O_3 + T_3 \vec{Y} \\ M_3 \rightarrow O &= O_4 + \exp(\theta_4 \vec{X} \wedge) \vec{O}_4 M_3 \end{aligned}$$

Donc on déduit :

$$\vec{O}_5' O(R_4) = \vec{O}_5 \vec{O}_4 + \exp(\theta_4 \vec{X} \wedge) \left[\vec{O}_4 \vec{O}_3 + \vec{O}_3 \vec{O}_2 + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) (\vec{O}_2 \vec{O}_1 + \exp(\theta_2 \vec{X} \wedge) (\vec{O}_1 \vec{O})) \right]$$

Donc, on aura:

$$\begin{aligned} \vec{O} \vec{O}_5' (R_4) &= \ell_4 \vec{Y} + \exp(-\theta_4 \vec{X} \wedge) [T_3 \vec{Y} + \ell_2 \vec{Y} + \\ &\quad \exp(-\theta_2 \vec{X} \wedge) (\ell_1 \vec{Z} + \exp(-\theta_1 \vec{X} \wedge) (\ell_0 \vec{Z}))] \end{aligned} \quad (\text{V-13})$$

On développe par étape :

$$\begin{aligned} \vec{O} \vec{O}_5' (R_4) &= \ell_4 \vec{Y} + \exp(-\theta_4 \vec{X} \wedge) \left[(\ell_2 + T_3) \vec{Y} + \exp(-\theta_2 \vec{X} \wedge) (\ell_1 \vec{Z} + \right. \\ &\quad \left. [\ell_0 (\vec{Z} + \sin \theta_1 (\vec{Z} \wedge \vec{Z}) + (1 - \cos \theta_1) (-\vec{Z} \wedge (-\vec{Z} \wedge \vec{Z}))]) \right] \\ &= \ell_4 \vec{Y} + \exp(-\theta_4 \vec{X} \wedge) [(\ell_2 + T_3) \vec{Y} + \exp(-\theta_2 \vec{X} \wedge) (\ell_1 + \ell_0) \vec{Z}] \\ &= \ell_4 \vec{Y} + \exp(-\theta_4 \vec{X} \wedge) [(\ell_2 + T_3) \vec{Y} + ((\ell_1 + \ell_0) \exp(-\theta_2 \vec{X} \wedge) \vec{Z})] \\ &= \ell_4 \vec{Y} + \exp(-\theta_4 \vec{X} \wedge) \left[(\ell_2 + T_3) \vec{Y} \right. \\ &\quad \left. + (\ell_1 + \ell_0) [\vec{Z} + S2(-\vec{X} \wedge \vec{Z}) + (1 - C2)(-\vec{X} \wedge (-\vec{X} \wedge \vec{Z}))] \right] \\ &= \ell_4 \vec{Y} + \exp(-\theta_4 \vec{X} \wedge) [(\ell_2 + T_3) \vec{Y} + (\ell_1 + \ell_0) (S2 \vec{Y} + C2 \vec{Z})] \\ &= \ell_4 \vec{Y} + \exp(-\theta_4 \vec{X} \wedge) [((\ell_2 + T_3) + (\ell_1 + \ell_0) S2) \vec{Y} + (\ell_1 + \ell_0) C2 \vec{Z}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{O} \vec{O}_5' (R_4) &= \ell_4 \vec{Y} + \\ &\quad [(\ell_2 + T_3) + (\ell_1 + \ell_0) S2] [\vec{Y} + S4(-\vec{X} \wedge \vec{Y}) + (1 - C4)(-\vec{X} \wedge (-\vec{X} \wedge \vec{Y}))] \\ &\quad + [(\ell_1 + \ell_0) C2] [\vec{Z} + S4(-\vec{X} \wedge \vec{Z}) + (1 - C4)(-\vec{X} \wedge (-\vec{X} \wedge \vec{Z}))] \\ &= \ell_4 \vec{Y} + ((\ell_2 + T_3) + (\ell_1 + \ell_0) S2) (C4 \vec{Y} - S4 \vec{Z}) \\ &\quad + [(\ell_1 + \ell_0) C2] [S4 \vec{Y} + C4 \vec{Z}] \\ &= [\ell_4 + ((\ell_2 + T_3) C4 + (\ell_1 + \ell_0) (S2 C4 + C2 S4))] \vec{Y}_4 \\ &\quad + [-(\ell_2 + T_3) S4 + (\ell_1 + \ell_0) (C2 C4 - S2 S4)] \vec{Z}_4 \end{aligned}$$

Enfin le vecteur position du point O_5 exprimé dans le repère (R_4) .

$$\begin{aligned} \vec{OO}'_5(R_4) = & \left[\ell_4 + ((\ell_2 + T_3)C4 + (\ell_1 + \ell_0)S(2+4)) \right] \vec{Y}_4 \\ & + \left[-(\ell_2 + T_3)S4 + (\ell_1 + \ell_0)C(2+4) \right] \vec{Z}_4 \end{aligned} \quad (V-14)$$

2) Détermination du vecteur vitesse du point O_5 qui appartient à l'organe terminal exprimé par rapport au repère (R_4)

$$\vec{V}_{O_5}^0(R_4) = \frac{d}{dt}(\vec{OO}'_5)_{R_4} = \frac{d}{dt}(\vec{OO}'_5)_{R_0} + \vec{\Omega}_4^0(R_4) \wedge \vec{OO}'_5(R_4)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} (S\theta)' &= \dot{\theta}C\theta \\ (C\theta)' &= -\dot{\theta}S\theta \end{aligned}$$

2-1) Calculons d'abord la vitesse de translation absolue :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{OO}'_5)_{R_0} = & \left[-\dot{\theta}_4(\ell_2 + T_3)S4 + \dot{T}_3C4 + (\ell_0 + \ell_1)(\dot{\theta}_2C2C4 - \dot{\theta}_4S2S4 - \dot{\theta}_2S2S4 + \dot{\theta}_4C2C4 \right] \vec{Y}_4 \\ & + \left[-(\ell_2 + T_3)\dot{\theta}_4C4 - \dot{T}_3S4 + (\ell_0 + \ell_1)(-\dot{\theta}_2S2C4 - \dot{\theta}_4C2S4 - \dot{\theta}_2C2S4 - \dot{\theta}_4S2C4 \right] \vec{Z}_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{OO}'_5) = & \left[-(\ell_2 + T_3)\dot{\theta}_4S4 + \dot{T}_3C4 + (\ell_0 + \ell_1)[(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)C(2+4)] \right] \vec{Y}_4 \\ & + \left[-(\ell_2 + T_3)\dot{\theta}_4C4 - \dot{T}_3S4 - (\ell_0 + \ell_1)[(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)S(2+4)] \right] \vec{Z}_4 \end{aligned}$$

2-2) Détermination du vecteur vitesse de rotation du point O_4 par rapport au repère de référence R_0 , exprimé dans le repère R_4 , $\vec{\Omega}_{O_4}^0(R_4)$

$$\vec{\Omega}_4^0(R_4) = \vec{\Omega}_1^0(R_4) + \vec{\Omega}_2^1(R_4) + \vec{\Omega}_3^2(R_4) + \vec{\Omega}_4^3(R_4)$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_4^0(R_4) &= [\dot{\theta}_1\vec{Z}_1 + \dot{\theta}_2\vec{X}_2 + \vec{0} + \dot{\theta}_4\vec{X}_4] \\ &= [\dot{\theta}_1(S2\vec{Y}_2 + C2\vec{Z}_2) + \dot{\theta}_2\vec{X}_4 + \dot{\theta}_4\vec{X}_4] \\ &= [\dot{\theta}_1(S2(C4\vec{Y}_4 - S4\vec{Z}_4) + C2(-S4\vec{Y}_4 + C4\vec{Z}_4)) + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)\vec{X}_4] \end{aligned}$$

$$\vec{\Omega}_4^0(R_4) = (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \vec{X}_4 + \dot{\theta}_1 S(2+4) \vec{Y}_4 + \dot{\theta}_1 C(2+4) \vec{Z}_4 \quad (\text{V-15})$$

2-3) calcul du produit vectoriel suivant

$$\vec{\Omega}_4^0(R_4) \wedge \vec{OO}_5'(R_4) = [(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \vec{X}_4 + \dot{\theta}_1 S(2+4) \vec{Y}_4 + \dot{\theta}_1 C(2+4) \vec{Z}_4] \wedge \left[[\ell_4 + ((\ell_2 + T_3)C4 + (\ell_1 + \ell_0)S(2+4))] \vec{Y} + [-(\ell_2 + T_3)S4 + (\ell_1 + \ell_0)C(2+4)] \vec{Z}_4 \right]$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_4^0(R_4) \wedge \vec{OO}_5'(R_4) = & [(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)(\ell_4 + (\ell_2 + T_3)C4 + (\ell_1 + \ell_0)S(2+4))] \vec{Z}_4 \\ & - [(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)(-(\ell_2 + T_3)S4 + (\ell_1 + \ell_0)C(2+4))] \vec{Y}_4 \\ & + [(\dot{\theta}_1 S(2+4))(-(\ell_2 + T_3)S4 + (\ell_0 + \ell_1)C(2+4))] \vec{X}_4 \\ & - [(\dot{\theta}_1 C(2+4))(\ell_4 + (\ell_2 + T_3)C4 + (\ell_0 + \ell_1)S(2+4))] \vec{X}_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_4^0(R_4) \wedge \vec{OO}_5'(R_4) = & [-\dot{\theta}_1 C(2+4)\ell_4 - \dot{\theta}_1(\ell_2 + T_3)C2] \vec{X}_4 \\ & [(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)(\ell_2 + T_3)S4 - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)(\ell_0 + \ell_1)C(2+4)] \vec{Y}_4 \\ & [(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)(\ell_4 + (\ell_2 + T_3)C4 + (\ell_0 + \ell_1)S(2+4))] \vec{Z}_4 \end{aligned}$$

Enfin, on peut déterminer le vecteur vitesse du point O_5 exprimé dans le repère R_4 .

$$\vec{V}_{O_5}^0(R_4) = \frac{d}{dt} \left(\vec{OO}_5' \right)_{R_4} = \frac{d}{dt} \left(\vec{OO}_5' \right)_{R_0} + \vec{\Omega}_4^0(R_4) \wedge \vec{OO}_5'(R_4) \quad (\text{V-16})$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{O_5}^0(R_4) = & [-\dot{\theta}_4(\ell_2 + T_3)S4 + \dot{T}_3 C4 + (\ell_0 + \ell_1)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)C(2+4)] \vec{Y}_4 \\ & + [-\dot{\theta}_4(\ell_2 + T_3)C4 - \dot{T}_3 S4 - (\ell_0 + \ell_1)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)S(2+4)] \vec{Z}_4 \\ & + [-\dot{\theta}_1 C(2+4)\ell_4 - \dot{\theta}_1(\ell_2 + T_3)C2] \vec{X}_4 \\ & + [(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)(\ell_2 + T_3)S4 - (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)(\ell_0 + \ell_1)C(2+4)] \vec{Y}_4 \\ & + [(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)(\ell_4 + (\ell_2 + T_3)C4 + (\ell_0 + \ell_1)S(2+4))] \vec{Z}_4 \end{aligned}$$

Le vecteur vitesse est :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{0_3}^0(R_4) = & \left[-\dot{\theta}_1 \ell_4 C(2+4) - \dot{\theta}_1 (\ell_2 + T_3) C2 \right] \vec{X}_4 \\
& + \left[\dot{T}_3 C4 + (\ell_2 + T_3) \dot{\theta}_2 S4 \right] \vec{Y}_4 \\
& + \left[-\dot{T}_3 S4 + \ell_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) + \dot{\theta}_2 (\ell_2 + T_3) C4 \right] \vec{Z}_4
\end{aligned} \tag{V-17}$$

III.2. Application aux mécanismes en chaînes fermées

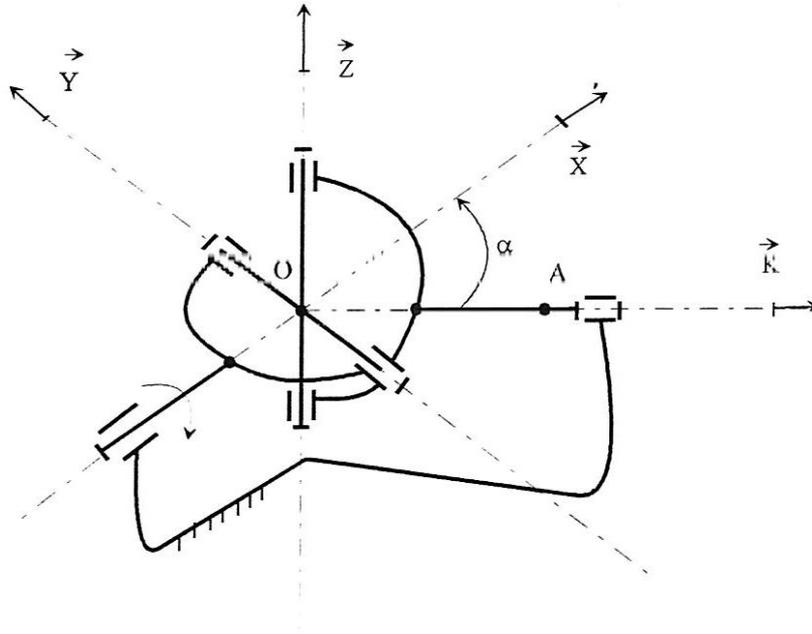


Figure V-04: Joint cardan

On représente un exemple emprunté à *DENAVIT & HARTENBERG*. Il s'agit d'un joint cardan (Figure V-04). $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ forment un repère direct d'axes orthonormés qui sont les axes des trois premiers couples rotoïdes, le quatrième couple rotoïde qui referme la chaîne est (O, \vec{K}) situé dans le plan (O, \vec{X}, \vec{Y}) . L'angle entre l'arbre d'entrée (O, \vec{X}) et l'arbre de sortie (O, \vec{K}) est α .

Pour simplifier l'écriture, on prend:

$$\cos \theta_i = Ci$$

$$\sin \theta_i = Si$$

$$\cos \alpha = C\alpha$$

$$\sin \alpha = S\alpha$$

et l'on a :

$$\vec{K} = C\alpha \vec{X} + S\alpha \vec{Y}$$

$$\vec{OA} = \ell C\alpha \vec{X} + \ell S\alpha \vec{Y}$$

Soit A un point quelconque du corps de l'arbre de sortie. On considère un mécanisme auxiliaire en chaîne ouverte obtenu en coupant en deux le corps de l'arbre de sortie. On fait fonctionner le mécanisme auxiliaire avec des angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4 . Selon la partie du corps coupé en deux, le point A vient en A' :

1) Détermination du vecteur position du point du point A' transformé du point A lié à l'axe de sortie par rapport au repère de référence R_0

$$A' = O + \exp(\theta_1 \vec{X} \wedge) \exp(\theta_2 \vec{Y} \wedge) \exp(\theta_3 \vec{Z} \wedge) \vec{OA} \quad (\text{V-18})$$

1- On calcule La position de A après les trois transformations, en fonction de θ_1, θ_2 et θ_3 , exprimé dans le repère de référence R_0 , donc on développe l'expression \vec{OA}'

$$\vec{OA}' = \exp(\theta_1 \vec{X} \wedge) \exp(\theta_2 \vec{Y} \wedge) \exp(\theta_3 \vec{Z} \wedge) (\ell C \alpha \vec{X} + \ell S \alpha \vec{Y})$$

$$\exp(\theta_3 \vec{Z} \wedge) (\ell C \alpha \vec{X} + \ell S \alpha \vec{Y}) = \ell C \alpha (\vec{X} + S3(\vec{Z} \wedge \vec{X}) + (1 - C3)(\vec{Z} \wedge (\vec{Z} \wedge \vec{X}))) + \ell S \alpha (\vec{Y} + S3(\vec{Z} \wedge \vec{Y}) + (1 - C3)(\vec{Z} \wedge (\vec{Z} \wedge \vec{Y})))$$

$$\begin{aligned} &= \ell C \alpha (\vec{X} + S3\vec{Y} + (1 - C3)(-\vec{X})) + \ell S \alpha (\vec{Y} + S3(-\vec{X}) + (1 - C3)(-\vec{Y})) \\ &= \ell C \alpha (S3\vec{Y} + C3\vec{X}) + \ell S \alpha (-S3\vec{X} + C3\vec{Y}) \\ &= \ell C(\alpha + 3)\vec{X} + \ell S(\alpha + 3)\vec{Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(\theta_2 \vec{Y} \wedge) (\ell C(\alpha + 3)\vec{X} + \ell S(\alpha + 3)\vec{Y}) &= \ell C(\alpha + 3)(\vec{X} + S2(\vec{Y} \wedge \vec{X}) + (1 - C2)(\vec{Y} \wedge (\vec{Y} \wedge \vec{X}))) + \ell S(\alpha + 3)(\vec{Y}) \\ &= \ell C(\alpha + 3)(-S2\vec{Z} + C2\vec{X}) + \ell S(\alpha + 3)(\vec{Y}) \\ &= \ell C2C(\alpha + 3)\vec{X} + \ell S(\alpha + 3)\vec{Y} - \ell S2C(\alpha + 3)\vec{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(\theta_1 \vec{X} \wedge) (\ell C2C(\alpha + 3)\vec{X} + \ell S(\alpha + 3)\vec{Y} - \ell S2C(\alpha + 3)\vec{Z}) &= \\ &= \ell C2C(\alpha + 3)\vec{X} + \ell S(\alpha + 3)(\vec{Y} + S1(\vec{X} \wedge \vec{Y}) + (1 - C1)(\vec{X} \wedge (\vec{X} \wedge \vec{Y}))) \\ &\quad - \ell S2C(\alpha + 3)(\vec{Z} + S1(\vec{X} \wedge \vec{Z}) + (1 - C1)(\vec{X} \wedge (\vec{X} \wedge \vec{Z}))) \\ &= \ell(C2C(\alpha + 3)\vec{X} + S(\alpha + 3)(S1\vec{Z} + C1\vec{Y}) - S2C(\alpha + 3)(-S1\vec{Y} + C1\vec{Z})) \\ &= \ell(C2C(\alpha + 3)\vec{X} + (S(\alpha + 3)S1 - S2C(\alpha + 3)C1)\vec{Z} + (S(\alpha + 3)C1 + S2S1C(\alpha + 3))\vec{Y}) \end{aligned}$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{OA}'(R_0) &= \ell C2C(\alpha + 3)\vec{X}_0 \\ &\quad + \ell(S(\alpha + 3)C1 + S2S1C(\alpha + 3))\vec{Y}_0 \\ &\quad + \ell(S(\alpha + 3)S1 - S2C1C(\alpha + 3))\vec{Z}_0 \end{aligned} \quad (\text{V-19})$$

2- Maintenant, on développe le vecteur position \vec{OA} après les trois transformations exprimé dans le repère R_3

$$\vec{OA}'(R_3) = \exp(\theta_3(-\vec{Z}) \wedge) \exp(\theta_2(-\vec{Y}) \wedge) \exp(\theta_1(-\vec{X}) \wedge) \vec{OA} \quad (\text{V-20})$$

$$\begin{aligned} \vec{OA}'(R_3) &= \exp(\theta_3(-\vec{Z}) \wedge) \exp(\theta_2(-\vec{Y}) \wedge) \exp(\theta_1(-\vec{X}) \wedge) \left(\ell C\theta \vec{X} + \ell S\alpha \vec{Y} \right) \\ &= \exp(\theta_3(-\vec{Z}) \wedge) \exp(\theta_2(-\vec{Y}) \wedge) \left[\ell C\alpha \vec{X} + \ell S\alpha (\vec{Y} + S1(-\vec{X} \wedge \vec{Y}) + (1-C1)(-\vec{X} \wedge (-\vec{X} \wedge \vec{Y}))) \right] \\ &= \exp(\theta_3(-\vec{Z}) \wedge) \exp(\theta_2(-\vec{Y}) \wedge) \left[\ell C\alpha \vec{X} + \ell S\alpha (-S1\vec{Z} + C1\vec{Y}) \right] \\ &= \exp(\theta_3(-\vec{Z}) \wedge) \left[\ell C\alpha (\vec{X} + S2(-\vec{Y} \wedge \vec{X}) + (1-C2)(-\vec{Y} \wedge (-\vec{Y} \wedge \vec{X}))) + \ell S\alpha C1\vec{Y} \right. \\ &\quad \left. - \ell S\alpha S1(\vec{Z} + S2(-\vec{Y} \wedge \vec{Z}) + (1-C2)(-\vec{Y} \wedge (-\vec{Y} \wedge \vec{Z}))) \right] \\ &= \exp(\theta_3(-\vec{Z}) \wedge) \left[(\ell C\alpha C2 + \ell S\alpha S1S2)\vec{X} + \ell S\alpha C1\vec{Y} + (\ell C\alpha S2 - \ell S\alpha S1C2)\vec{Z} \right] \\ &= (\ell C\alpha C2 + \ell S\alpha S1S2) \left[\vec{X} + S3(-\vec{Z} \wedge \vec{X}) + (1-C3)(-\vec{Z} \wedge (-\vec{Z} \wedge \vec{X})) \right] + \\ &\quad \ell S\alpha C1 \left[\vec{Y} + S3(-\vec{Z} \wedge \vec{Y}) + (1-C3)(-\vec{Z} \wedge (-\vec{Z} \wedge \vec{Y})) \right] + (\ell C\alpha S2 - \ell S\alpha S1C2)\vec{Z} \\ &= (\ell C\alpha C2 + \ell S\alpha S1S2) (-S3\vec{Y} + C3\vec{X}) + \ell S\alpha C1 (S3\vec{X} + C3\vec{Y}) + (\ell C\alpha S2 + \ell S\alpha S1C2) \vec{Z} \end{aligned}$$

Enfin, on obtient le vecteur position de A exprimé dans le repère R_3

$$\begin{aligned} \vec{OA}'(R_3) &= \ell \left[C\alpha C2C3 + S\alpha (S1S2C3 + C1S3) \right] \vec{X}_3 \\ &\quad + \ell \left[-C\alpha C2S3 + S\alpha (-S1S2S3 + C1C3) \right] \vec{Y}_3 \\ &\quad + \ell \left[C\alpha S2 + S\alpha S1C2 \right] \vec{Z}_3 \end{aligned} \quad (\text{V-21})$$

2) Détermination du vecteur vitesse du point A par rapport au repère de référence, exprimé dans le repère R_3

$$\vec{V}_{A'}^0(R_3) = \frac{d}{dt} \left(\vec{OA}' \right)_{R_0} = \frac{d}{dt} \left(\vec{OA}' \right)_{R_3} + \vec{\Omega}_3^0(R_3) \wedge \vec{OA}'(R_3) \quad (\text{V-22})$$

2-1) vecteur vitesse translation

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{OA'} \right)_{R_3} = 0$$

2-2) Détermination du vecteur vitesse de rotation

$$\vec{\Omega}_3^0(R_3) = \vec{\Omega}_3^2(R_3) + \vec{\Omega}_2^1(R_3) + \vec{\Omega}_1^0(R_3)$$

$$\vec{\Omega}_3^2(R_3) = \dot{\theta}_3 \vec{Z}_3$$

$$\vec{\Omega}_2^1(R_3) = \dot{\theta}_2 \vec{Y}_2 = \dot{\theta}_2 (S3 \vec{X}_3 + C3 \vec{Y}_3)$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_1^0(R_3) &= \dot{\theta}_1 \vec{X}_1 = \dot{\theta}_1 (C2 \vec{X}_2 + S2 \vec{Z}_2) \\ &= \dot{\theta}_1 (C2(C3 \vec{X}_3 - S3 \vec{Y}_3) + S2) \vec{Z}_3 \end{aligned}$$

$$\vec{\Omega}_3^0(R_3) = \dot{\theta}_3 \vec{Z}_3 + \dot{\theta}_2 (S3 \vec{X}_3 + C3 \vec{Y}_3) + \dot{\theta}_1 (C2(C3 \vec{X}_3 - S3 \vec{Y}_3) + S2) \vec{Z}_3$$

Donc :

$$\vec{\Omega}_3^0(R_3) = (\dot{\theta}_2 S3 + \dot{\theta}_1 C2 C3) \vec{X}_3 + (\dot{\theta}_2 C3 - \dot{\theta}_1 C2 S3) \vec{Y}_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S2) \vec{Z}_3 \quad (\text{V-23})$$

Donc le vecteur vitesse est :

$$\vec{V}_{A'}^0(R_3) = \vec{\Omega}_3^0(R_3) \wedge \vec{OA'}(R_3)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{A'}^0(R_3) &= [(\dot{\theta}_2 S3 + \dot{\theta}_1 C2 C3) \vec{X}_3 + (\dot{\theta}_2 C3 - \dot{\theta}_1 C2 S3) \vec{Y}_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S2) \vec{Z}_3] \wedge \\ & \quad [\ell [C\alpha C2 C3 + S\alpha (S1 S2 C3 + C1 S3)] \vec{X}_3 + \ell [-C\alpha C2 S3 + S\alpha (-S1 S2 S3 + C1 C3)] \vec{Y}_3 \\ & \quad + \ell [C\alpha S2 + S\alpha S1 C2] \vec{Z}_3] \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{A'}^0(R_3) = [(\dot{\theta}_2 S3 + \dot{\theta}_1 C2 C3) \vec{X}_3 + (\dot{\theta}_2 C3 - \dot{\theta}_1 C2 S3) \vec{Y}_3 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S2) \vec{Z}_3] \wedge (A \vec{X}_3 + B \vec{Y}_3 + C \vec{Z}_3)$$

$$\vec{V}_{A'}^0(R_3) = (\dot{\theta}_2 S3 + \dot{\theta}_1 C2 C3) (B \vec{Z}_3 - C \vec{Y}_3) + (\dot{\theta}_2 C3 - \dot{\theta}_1 C2 S3) (-A \vec{Z}_3 + C \vec{X}_3) + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S2) (A \vec{Y}_3 - B \vec{X}_3)$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{A'}^0(R_3) &= ((\dot{\theta}_2 C3 - \dot{\theta}_1 C2 S3) C - (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S2) B) \vec{X}_3 \\ & \quad + (-(\dot{\theta}_2 S3 + \dot{\theta}_1 C2 C3) C + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 S2) A) \vec{Y}_3 \\ & \quad + ((\dot{\theta}_2 S3 + \dot{\theta}_1 C2 C3) B - (\dot{\theta}_2 C3 - \dot{\theta}_1 C2 S3) A) \vec{Z}_3 \end{aligned} \quad (\text{V-24})$$

IV. CONCLUSION

La représentation intrinsèque des opérateurs de déplacements permet d'établir des propriétés générales, de simplifier des calculs avant les calculs numériques proprement dits, d'établir un pont avec la théorie des torseurs.

D'une façon plus générale, La représentation intrinsèque des opérateurs de déplacement permet de faire la synthèse entre beaucoup de travaux déjà effectués et d'ouvrir la porte vers beaucoup d'autres recherches.

CHAPITRE VI

INTERPRETATIONS DES RESULTATS

Comme, l'étude des deux mécanismes par les deux différentes méthodes déjà citées (algèbre de LIE et matrice de passage), a confirmé à chaque fois que les résultats étaient pareils, donc, dans ce chapitre, nous seulement allons établir les éléments cinématique concernant les deux mécanismes étudiés précédemment. Nous présenterons les résultats obtenus sous forme de graphes, que nous essayerons par la suite d'interpréter. Au début, nous allons présenter les graphes concernant le mécanisme poly-articulé en position et vitesse, ensuite, nous présenterons ceux du mécanisme sphérique.

Donc, commençons par exposer les résultats concernant le mécanisme poly-articulé (figure VI-01), d'abord, en position (cm) puis en vitesse (cm/s).

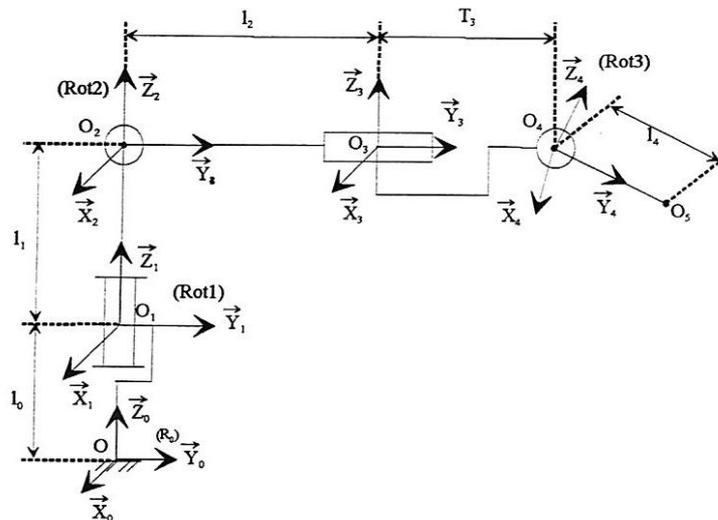


Figure VI-01 : Mécanisme poly-articulé

Ce bras manipulateur est un mécanisme ouvert, formé par une succession de corps solides indéformables formant une chaîne mécanique articulée. Le corps C_0 et le repère (R_0) qui lui est attaché sont fixes. Les corps C_1 ainsi que chaque corps intermédiaire sont connus dans leur propre repère et sont mobiles.

Le corps C_1 est animé par un couple rotoïde d'axe déterminé par (O_1, \vec{Z}_1) , d'un angle θ_1 . Le corps C_2 est animé par un couple rotoïde d'axe déterminé par (O_2, \vec{X}_2) , d'un angle θ_2 . Le corps C_3 est animé par un couple prismatique de direction \vec{Y}_3 et d'amplitude T_3 . Le corps C_4 est animé par un couple rotoïde d'axe déterminé par (O_4, \vec{X}_4) ,

d'un angle θ_4 . Le bras manipulateur se termine par un effecteur, dont nous voulons obtenir ses éléments cinématique qui ont pour nous un intérêt primordial.

En faisant varier les quatre d.d.l. du mécanisme, on peut obtenir une large gamme des différentes positions (cm) et vitesses (cm/s) que peut atteindre cet effecteur. Donc nous pouvons avoir une fiche technique complète en ce qui concerne ce mécanisme.

et que les longueurs aient les valeurs suivantes:

Nom	$L_1 (O_0O_1)$	$L_2 (O_1O_2)$	$L_3 (O_2O_3)$	$L_4 (O_4O_5)$
valeur	100	50	50	20

Les valeurs des angles de rotations sont :

$$\theta_1 = - 90 \text{ degrés}$$

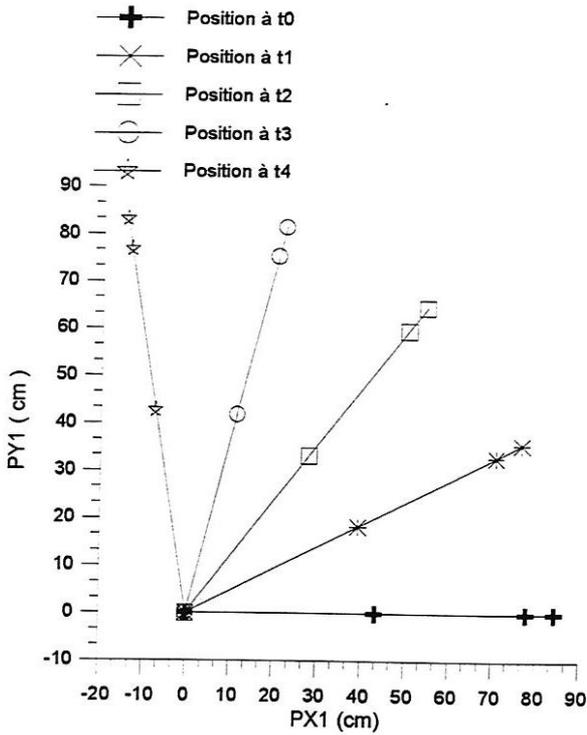
$$\theta_2 = - 30 \text{ degrés}$$

$$\theta_3 = - 20 \text{ degrés}$$

Dans les graphes qui suivent, on peut voir les différentes positions (cm) des différentes articulations du mécanisme en fonction de la variation des différents d.d.l. Dans chaque page, on peut remarquer quatre graphes. Ces derniers, représentent la variation de la position de chaque articulation du mécanisme en fonction de la variation du même d.d.l.

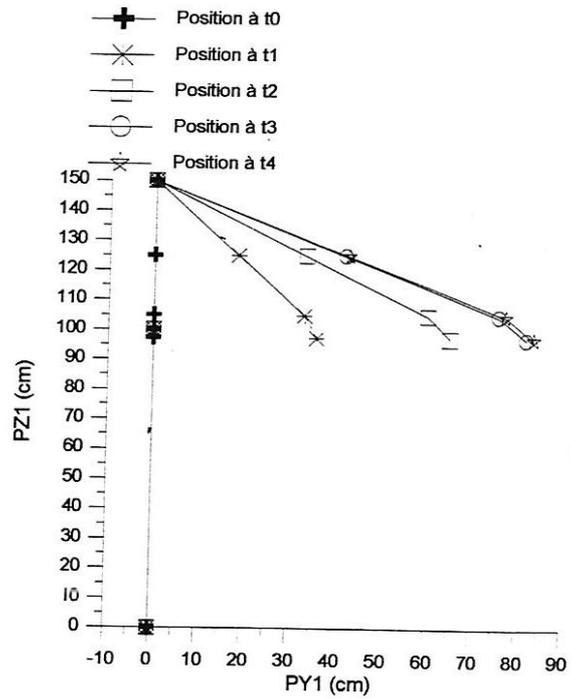
Les deux graphes d'en haut représentent la variation de la position en fonction de grandes variations du d.d.l. Tandis que ceux d'en bas représentent la variation de la position en fonctions de petites variations du d.d.l. On peut voir l'évolution du mécanisme dans les deux plans XY et YZ.

Les grandes ou petites variations sont données de la même manière dans tous les graphes tels que à l'instant t_0 , c'est la position initiale du mécanisme. Ensuite l'évolution du système par rapport aux différents instant (t_1, t_2, t_3 et t_4) est donnée de la façon suivante : Pour les grandes variations, nous avons pris une **marge** allant jusqu'à 100 (degrés ou cm) puis nous l'avons divisée par quatre (instant). Donc à chaque instant ($t_1, t_2 \dots$), on rajoute au d.d.l. un **pas** de 25 (degrés ou cm). Tandis que pour les petites variations, nous avons pris une **marge** allant jusqu'à 8 (degrés ou cm) qu'on a aussi divisé par 4 (instants), donc on rajoute à chaque instant ($t_1, t_2 \dots$) un **pas** de 2 (degrés ou cm) au d.d.l.



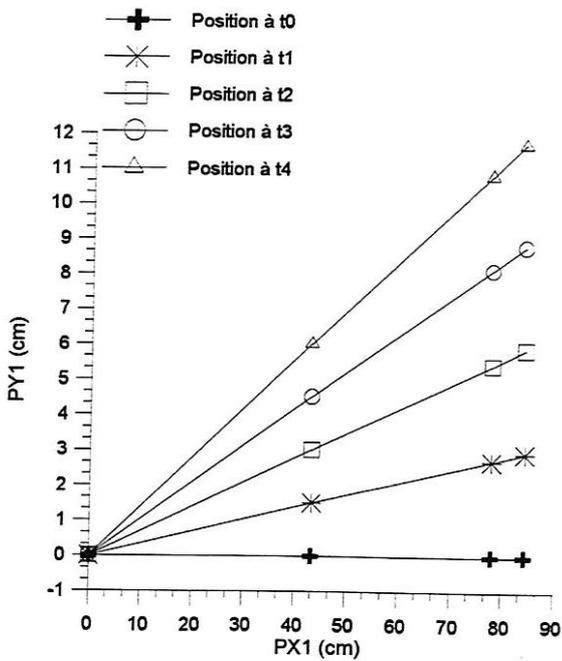
Graphe I-01 :

Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_1 (degré) dans le plan XY



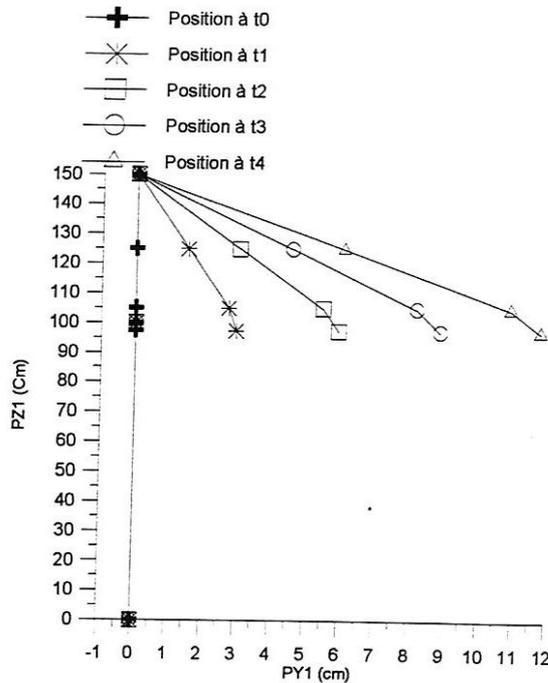
Graphe I-02 :

Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_1 (degré), dans le plan YZ



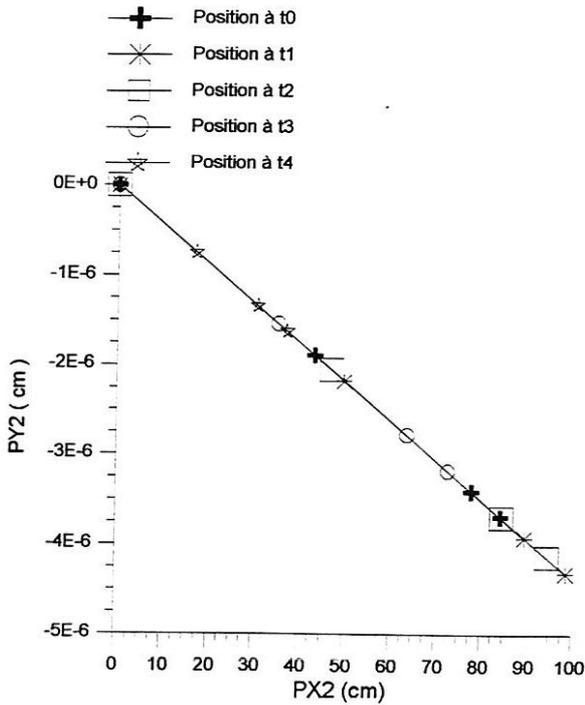
Graphe I-03 :

Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_1 (degré) dans le plan XY

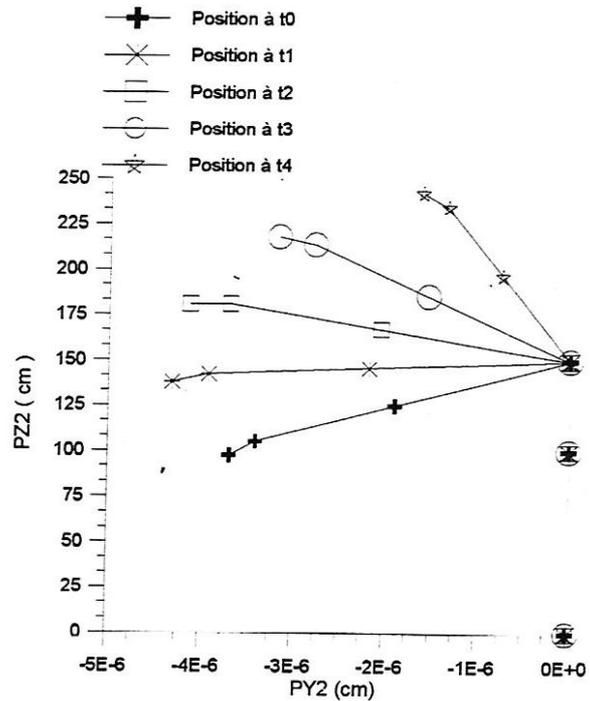


Graphe I-04 :

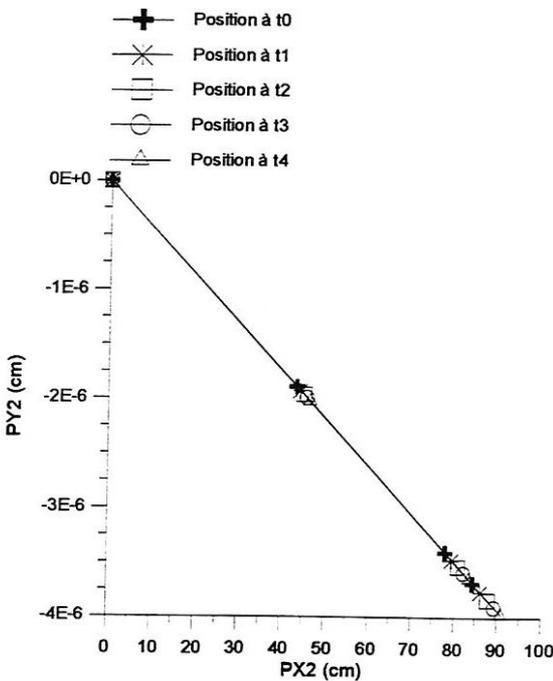
Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_1 (degré), dans le plan YZ



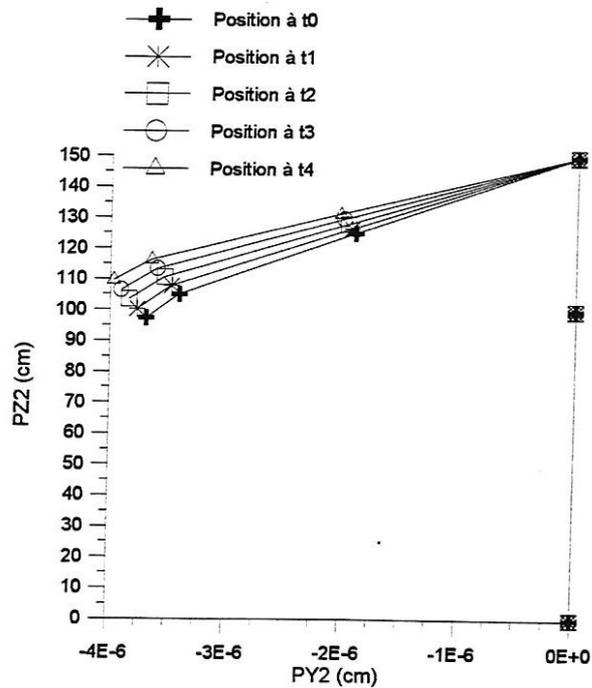
Grappe I-05 :
Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_2 (degré) dans le plan XY



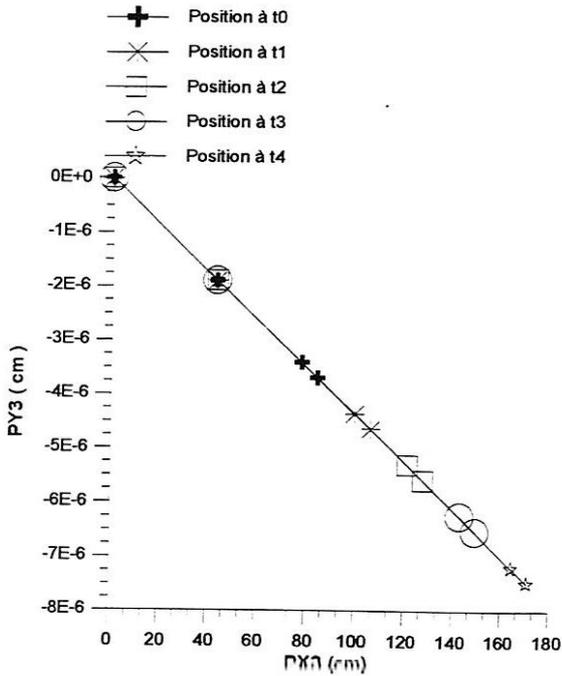
Grappe I-06 :
Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_2 (degré), dans le plan YZ



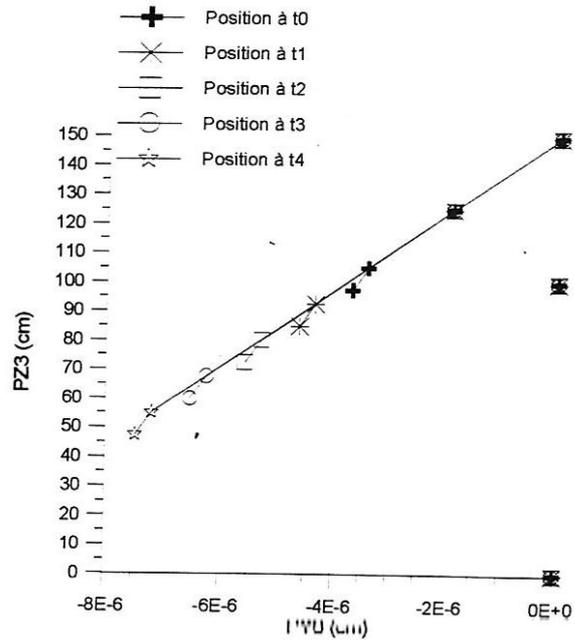
Grappe I-07 :
Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_2 (degré) dans le plan XY



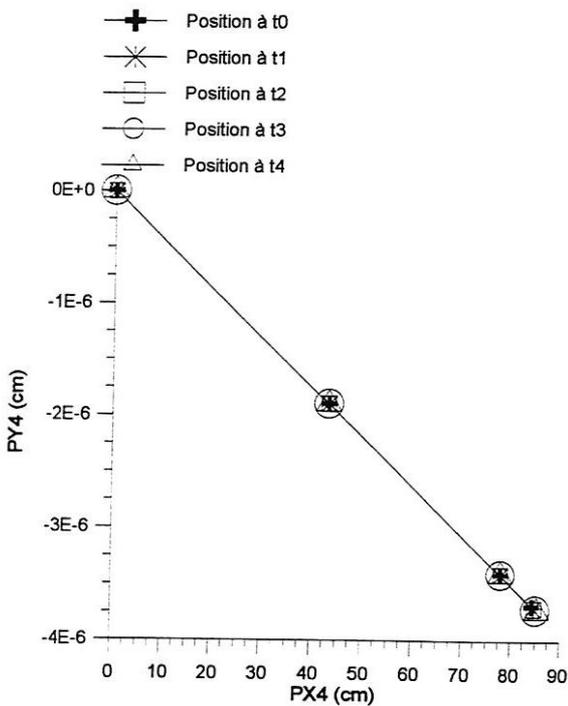
Grappe I-08 :
Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_2 (degré), dans le plan YZ



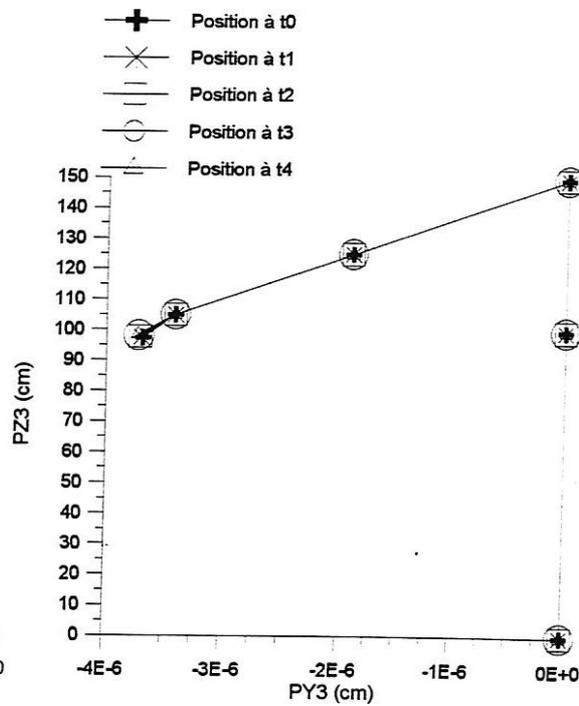
Graphe I-09 :
Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de T_3 (cm) dans le plan XY



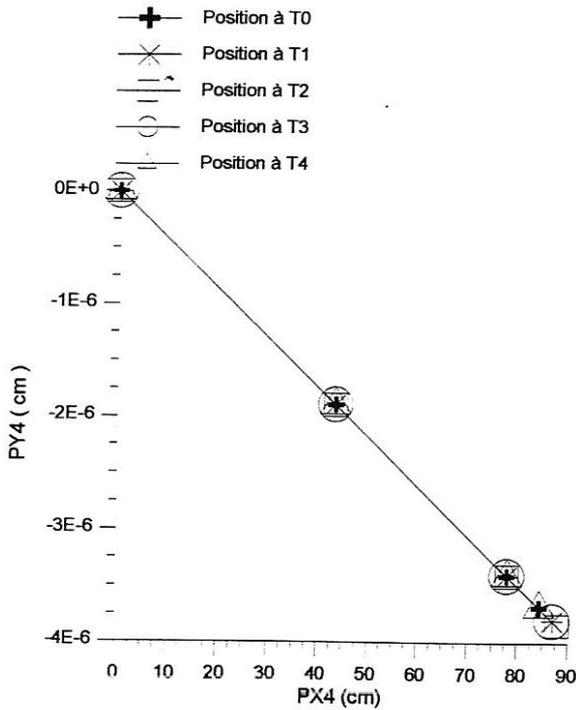
Graphe I-10 :
Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de T_3 (cm), dans le plan YZ



Graphe I-11 :
Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de T_3 (cm) dans le plan XY

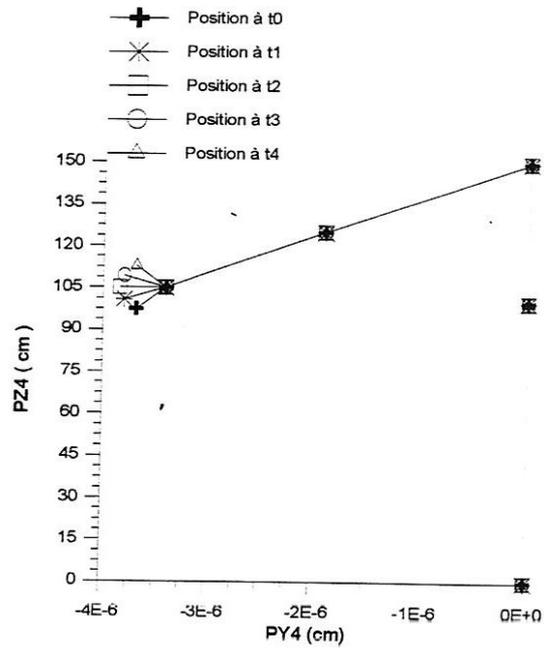


Graphe I-12 :
Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de T_3 (cm), dans le plan YZ



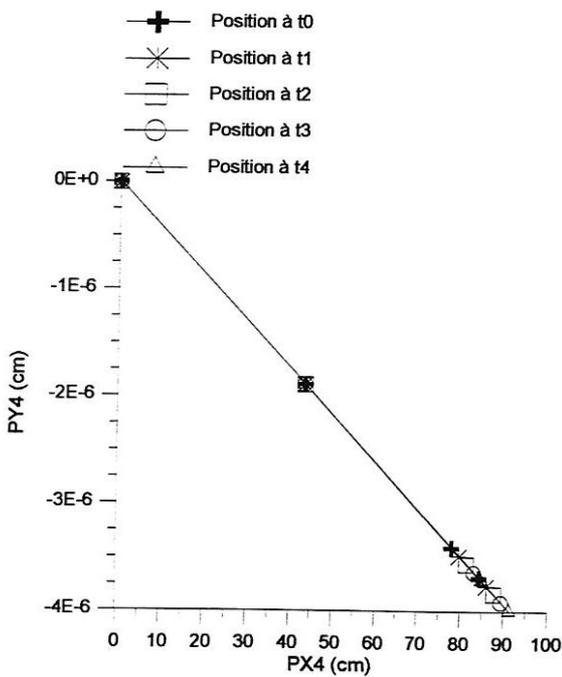
Graphe I-13 :

Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_4 (degré) dans le plan XY



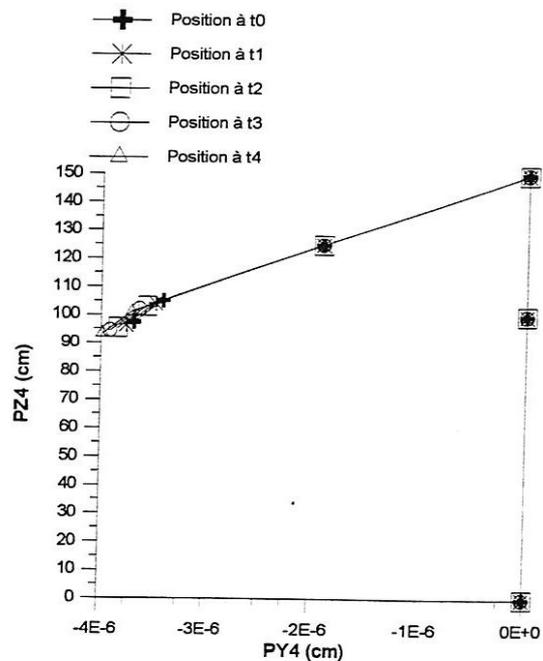
Graphe I-14 :

Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_4 (degré), dans le plan YZ



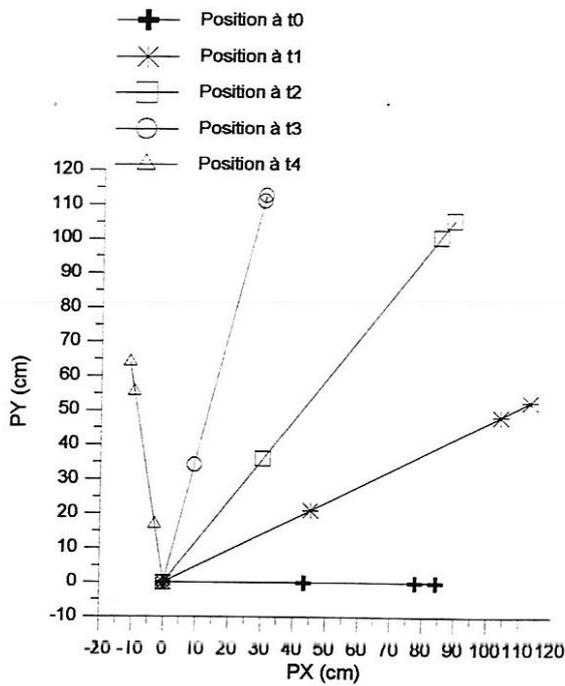
Graphe I-15 :

Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_4 (degré) dans le plan XY



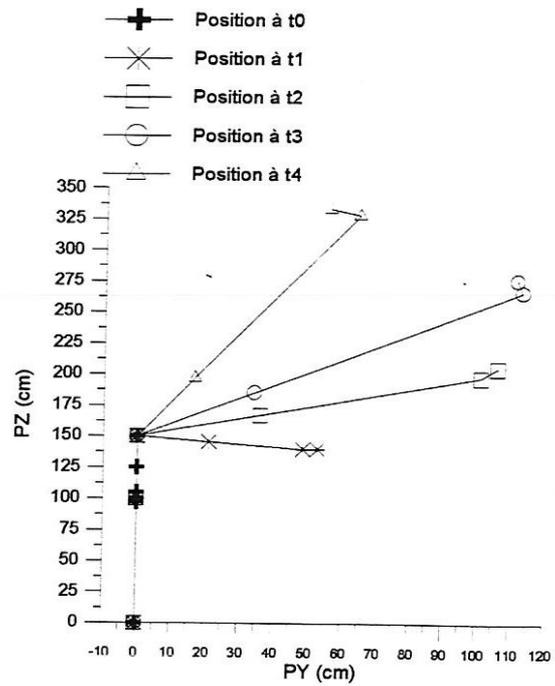
Graphe I-16 :

Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_4 (degré), dans le plan YZ



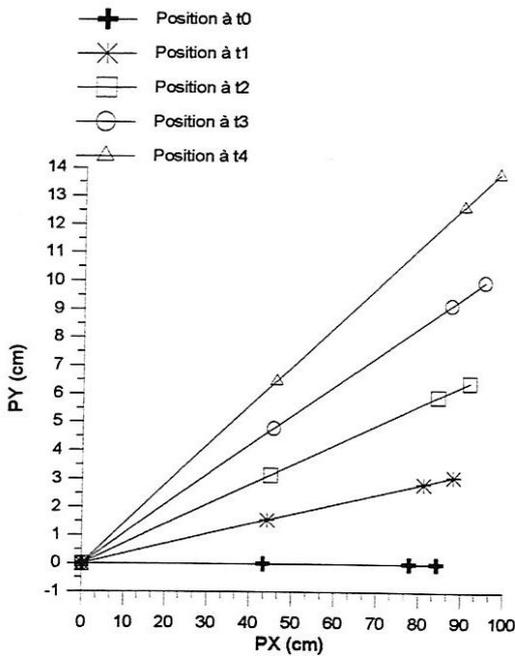
Graphe I-17 :

Grandes variations des différents points du mécanisme en fonction de tous les d.d.l $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (degré) et T_3 (cm) dans le plan XY



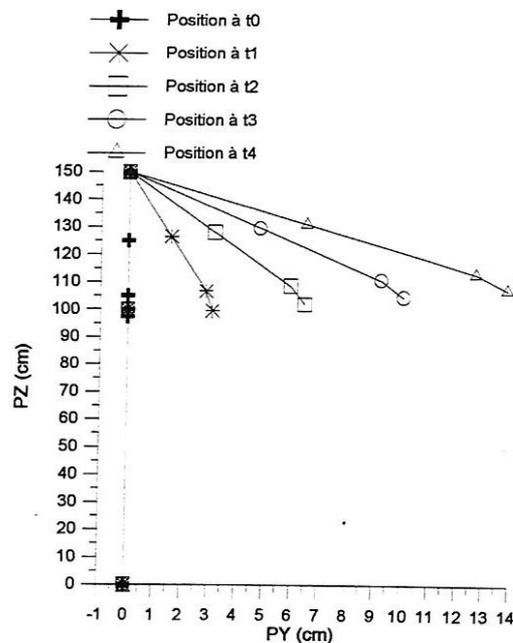
Graphe I-18 :

Grandes variations des différents points du mécanisme en fonction de tous les d.d.l $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (degré) et T_3 (cm) dans le plan YZ



Graphe I-19 :

Petites variations des différents points du mécanisme en fonction de tous les d.d.l $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (degré) et T_3 (cm) dans le plan XY



Graphe I-20 :

Petites variations des différents points du mécanisme en fonction de tous les d.d.l $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (degré) et T_3 (cm) dans le plan YZ

Les quatre graphes I-01, I-02, I-03 et I-04 représentent la variation en terme de position du mécanisme poly-articulé (figure VI-01) dans les deux plans XY et YZ en fonction du premier d.d.l, $\theta_1 = -90$ degrés, qui fait une rotation autour de l'axe (O_1, \vec{Z}) .

Pour les graphes I-01 et I-02, nous avons injecté de grandes variations à θ_1 , contrairement aux graphes I-03 et I-04 auxquels, nous lui avons injecté de petites variations. Dans le plan XY, on peut voir le mécanisme d'en haut. Les articulations O, O₁ et O₂, sont confondus mais, on peut clairement voir l'évolution du mécanisme pour le reste des articulations qui tournent autour de l'axe \vec{Z} . Dans le plan YZ, on a une vue de profil du mécanisme, d'ailleurs, on distingue toutes les articulations O, O₁, O₂, O₃, O₄ et O₅ et leurs évolutions à différent instants.

Les graphes I-05, I-06, I-07 et I-08 représentent la variation en terme de position dans les deux plans XY et YZ en fonction du second d.d.l $\theta_2 = -30$ degrés qui fait une rotation autour de l'axe (O_1, \vec{X}) . Dans le plan XY, on voit le mécanisme d'en haut, donc les points O, O₁ et O₂, sont toujours confondus, la position des autres points varient proportionnellement avec la variation de θ_2 . Dans le plan YZ, on peut voir tous les points et on remarque que les articulations O₃, O₄ et O₅ du bras manipulateur évoluent de bas en haut selon la variation du θ_2 .

Les graphes I-09, I-10, I-11 et I-12 représentent la variation en terme de position du mécanisme en fonction du troisième d.d.l., T₃ qui est une translation le long de l'axe \vec{Y}_3 . Les points O, O₁, O₂ et O₃ ne varient pas, mais les points O₄ et O₅ varient selon la variation de T₃ qui se fait au niveau de ℓ_3 (O₃, O₄). Donc l'articulation O₃ est fixe, mais le point O₄ est mobile, donc la longueur de ℓ_3 augmente avec l'augmentation de la valeur de la translation T₃. D'ailleurs, on peut remarquer que lorsque on fait de grandes variations de T₃, la longueur de ℓ_3 varie rapidement contrairement aux petites variations.

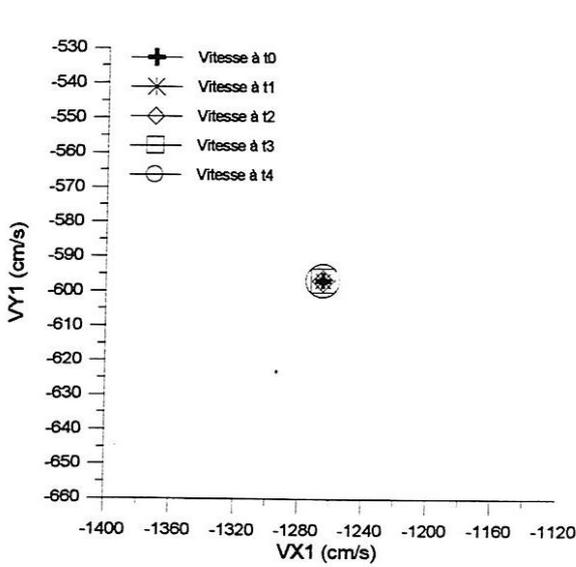
Les graphes I-13, I-14, I-15 et I-16 représentent la variation en terme de position du mécanisme en fonction du dernier d.d.l., $\theta_4 = -20$ degrés, d'axe déterminé par (O_4, \vec{X}) . Dans le plan XY, les points O, O₁ et O₂, sont toujours confondus. Dans le plan YZ, on distingue tous les points. On remarque, qu'il y a une variation qui s'effectue seulement au niveau de O₅ et que l'élément O₄O₅ évolue de bas en haut selon la variation de l'angle θ_4 . On remarque que pour les grandes variations de θ_4 , l'effecteur atteint un plus grand volume que pour les petites variations.

les graphes I-17, I-18, I-19 et I-20 représentent la variation en terme de position du mécanisme poly-articulé dans les deux plans XY et YZ. On remarque l'évolution du système par rapport aux différents instants (t_1, t_2, t_3 , et t_4) en fonction de la variation de

tous les d.d.l. Dans le plan XY, on peut remarquer l'évolution des points O_3 , O_4 et O_5 qui balayent une certaine partie du plan YZ, on peut voir clairement toutes les articulations à partir du corps C_0 jusqu'à l'effecteur. A l'instant t_0 , on remarque que les points O , O_1 et O_2 sont disposés de bas en haut puis les points O_3 , O_4 et O_5 redescendent suivant l'axe \vec{Z} , car ils ont de très faibles valeurs selon l'axe \vec{Y}_3 . Ensuite aux instant t_1 , t_2 , t_3 , et t_4 , on remarque que le bras-manipulateur balayent un plus grand volume que pour les variations présentées précédemment et à chaque fois qu'on augmente la valeur de la variation des différents d.d.l, le bras-manipulateur atteint un plus grand volume, donc l'effecteur a plus de possibilité d'atteindre les points qu'on désire.

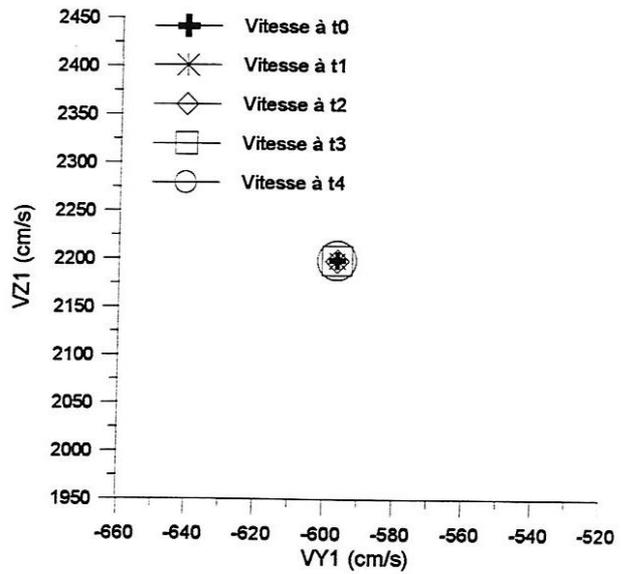
après avoir présenté la variation en terme de position du mécanisme en fonction de la variation des différents d.d.l, maintenant, nous présentons la variation en terme de vitesse seulement pour le dernier point, c'est à dire pour l'effecteur, car c'est lui qui agit sur l'environnement, et donc ses éléments cinématique nous intéressent plus que ceux des autres articulations.

La présentation des graphes concernant la variation des vitesses en fonction des d.d.l., va être de la même façons que pour celle de la variation en terme de position. c'est à dire qu'on présente dans chaque page quatre graphes, qui représentent la variation de la vitesse (cm/s) de l'effecteur en fonction du même d.d.l.



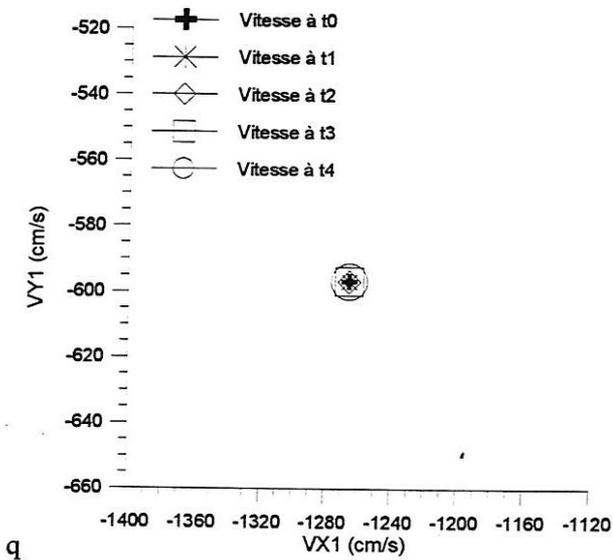
Graphe I-21

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_1 (degré) dans le plan XY



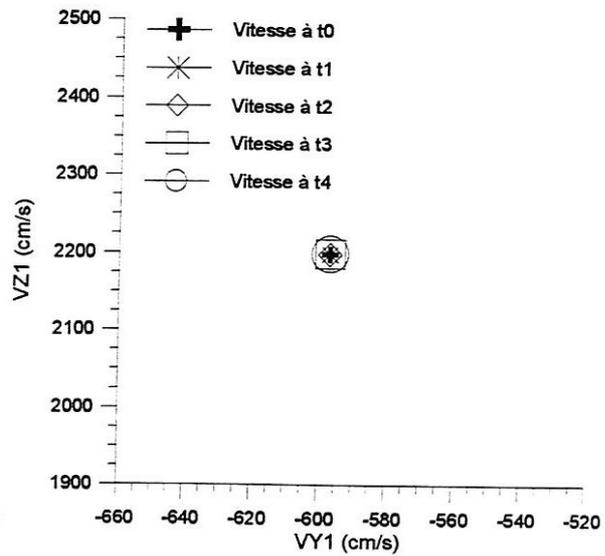
Graphe I-22

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_1 (degré), dans le plan YZ



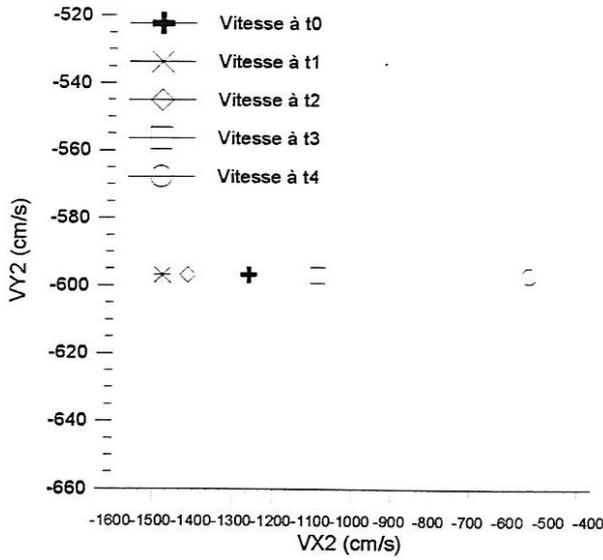
Graphe I-23

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_1 (degré) dans le plan XY



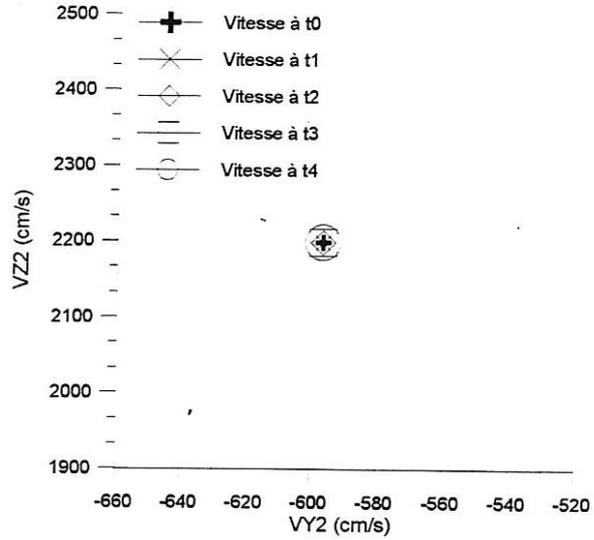
Graphe I-24

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_1 (degré), dans le plan YZ



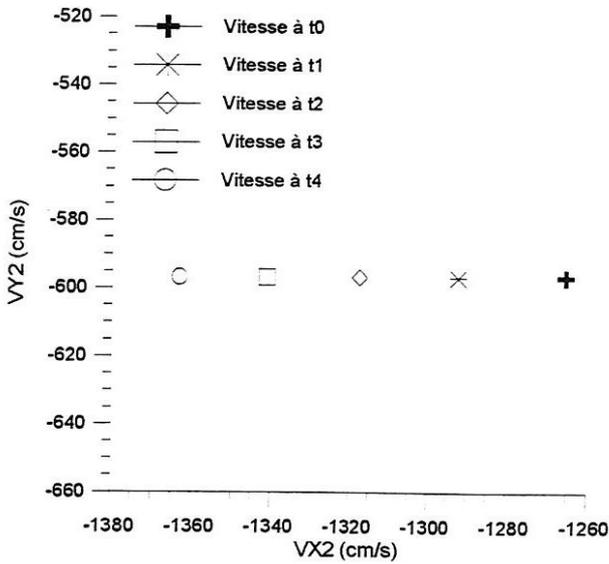
Graphe I-25

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_2 (degré) dans le plan XY



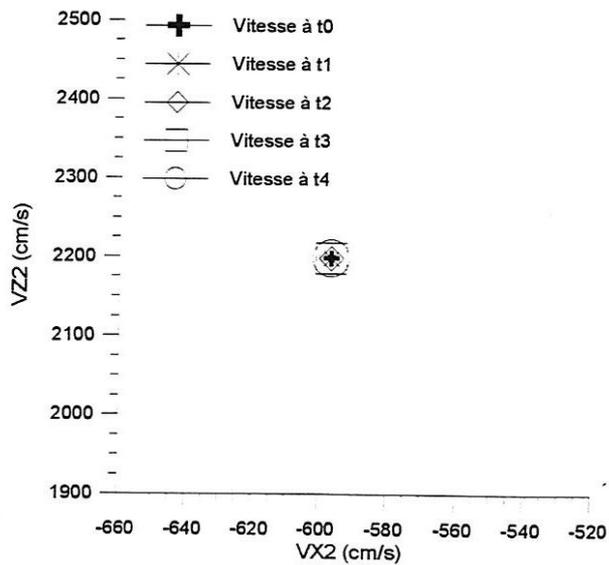
Graphe I-26

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_2 (degré), dans le plan YZ



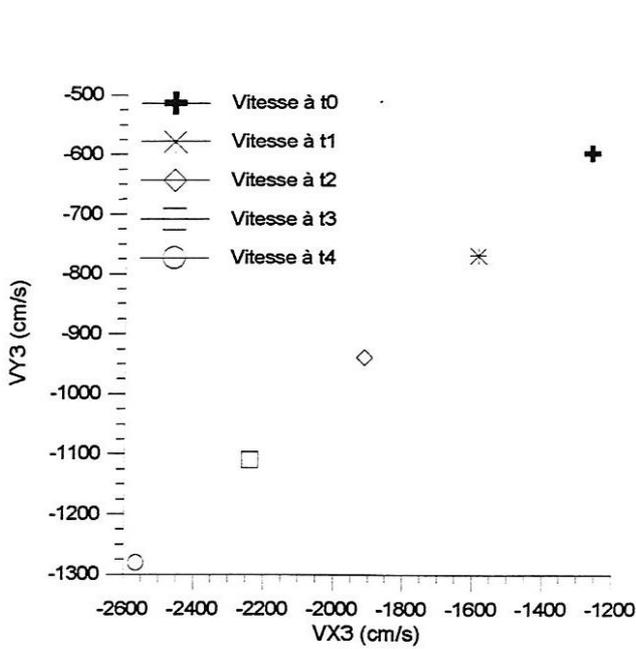
Graphe I-27

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_2 (degré) dans le plan XY



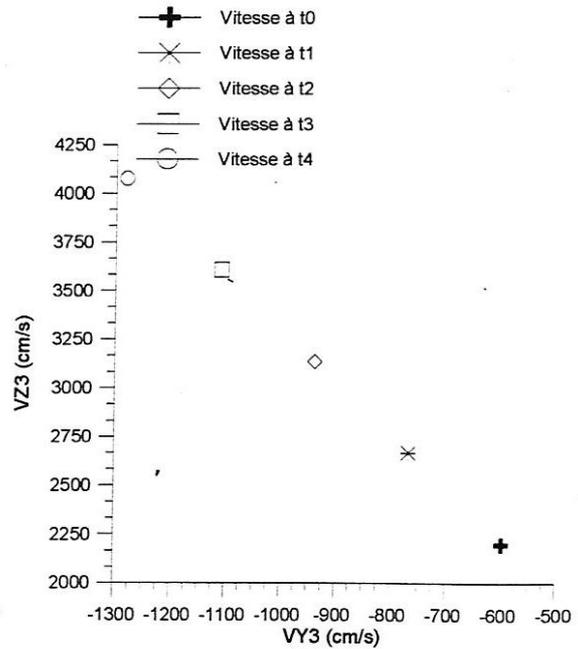
Graphe I-28

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_2 (degré), dans le plan YZ



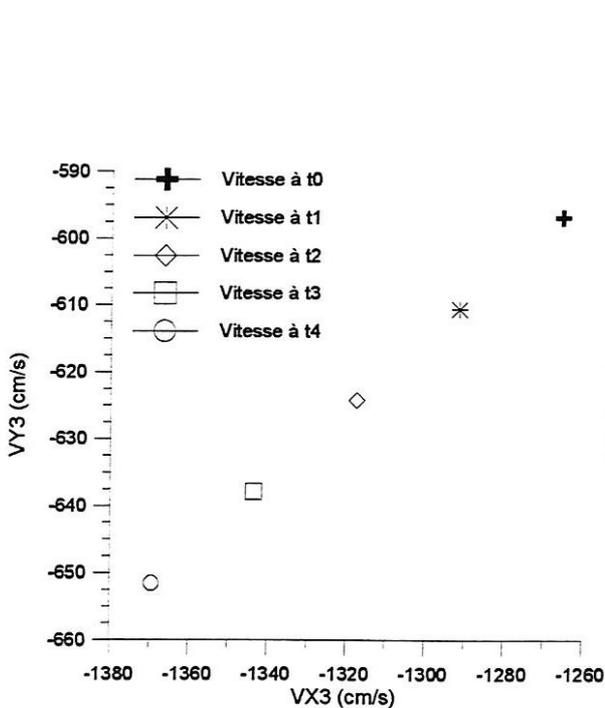
Graphe I-29

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de T_3 (cm), dans le plan XY



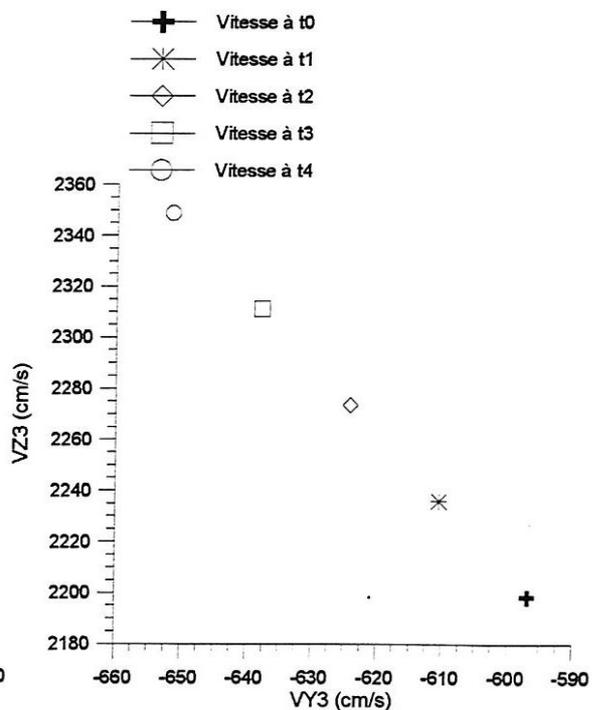
Graphe I-30

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de T_3 (cm), dans le plan YZ



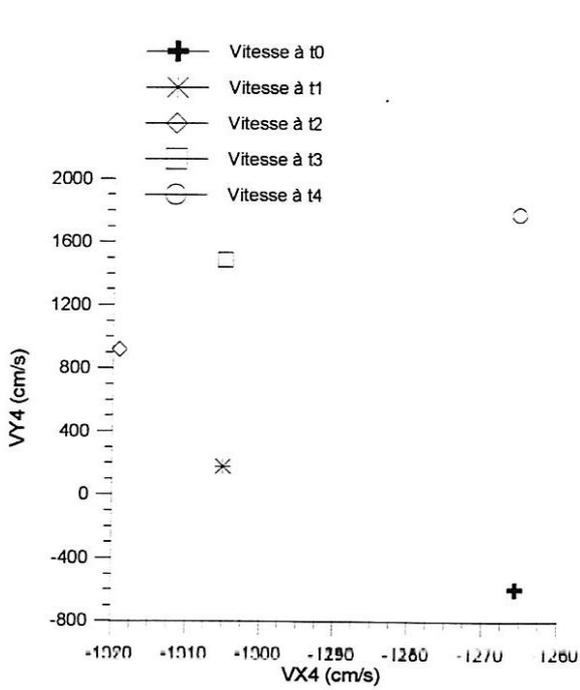
Graphe I-31

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de T_3 (cm) dans le plan XY



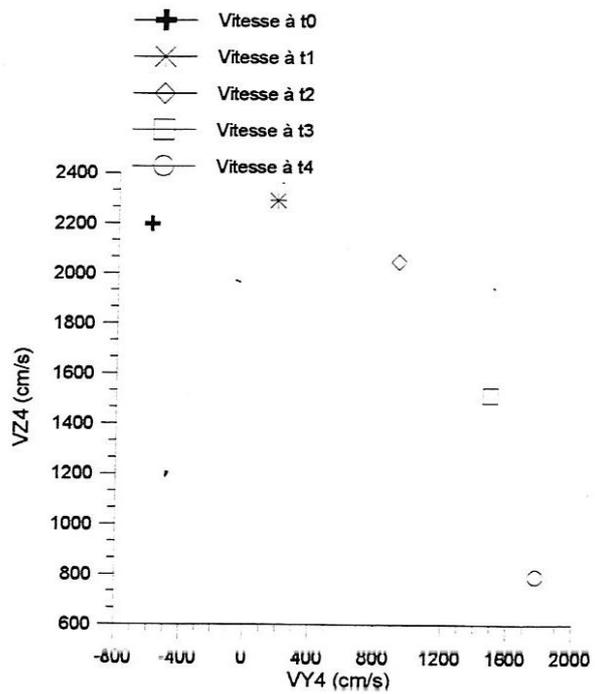
Graphe I-32

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de T_3 (cm), dans le plan YZ



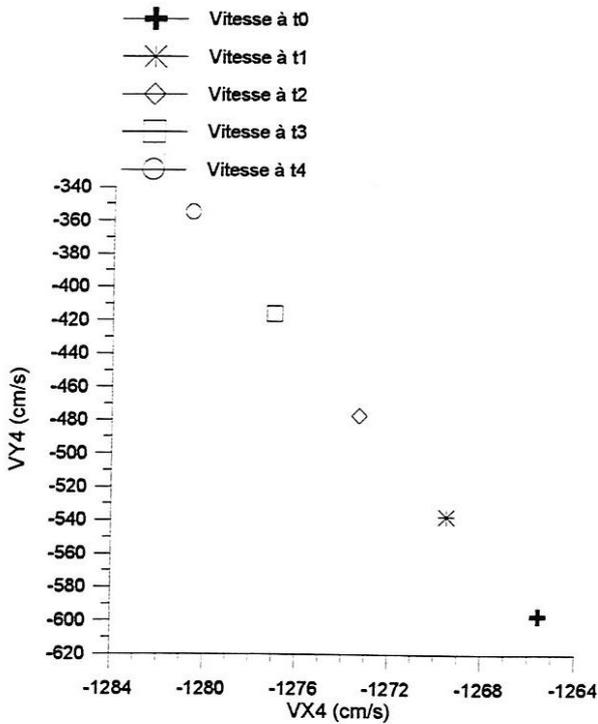
Graphe I-33

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_4 (degré) dans le plan XY



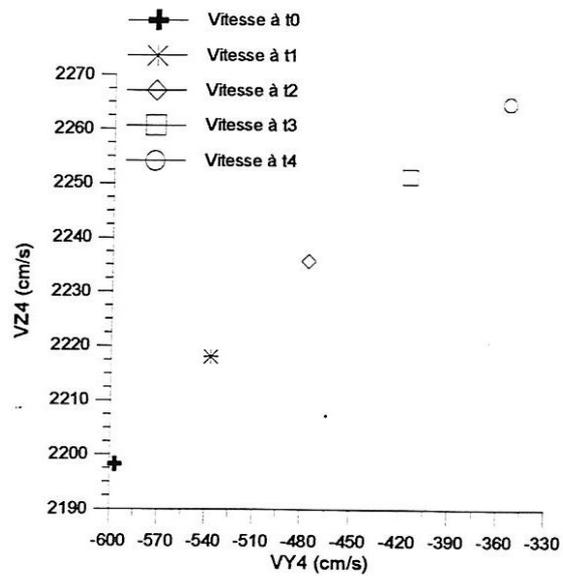
Graphe I-34

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_4 (degré), dans le plan YZ



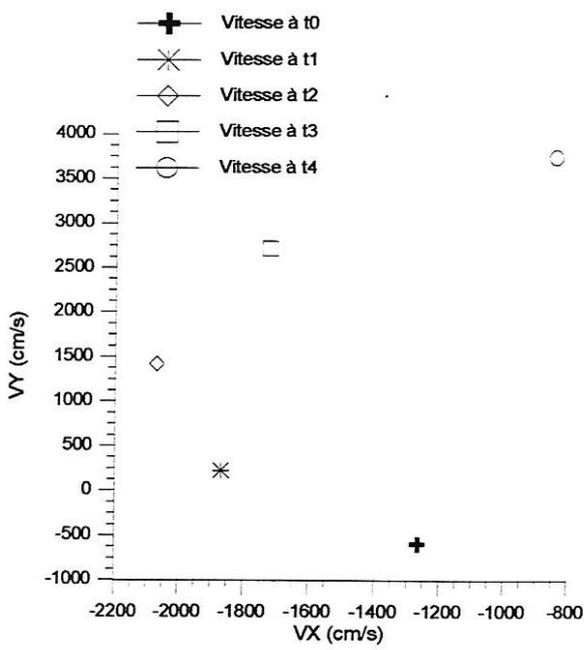
Graphe I-35

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_4 (degré) dans le plan XY



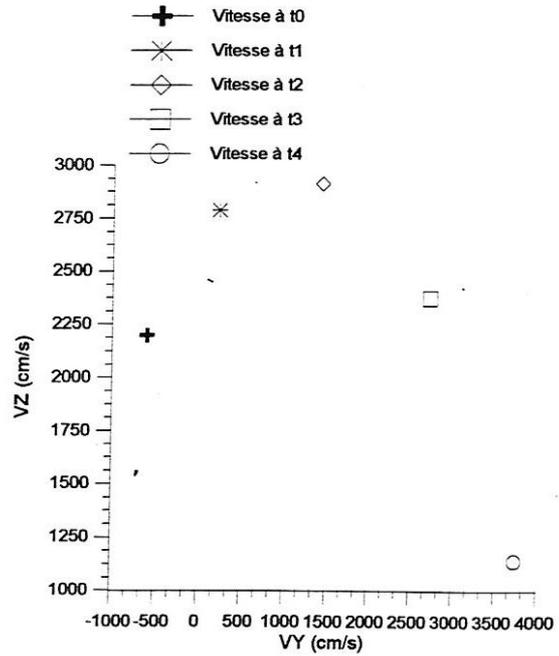
Graphe I-36

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_4 (degré), dans le plan YZ



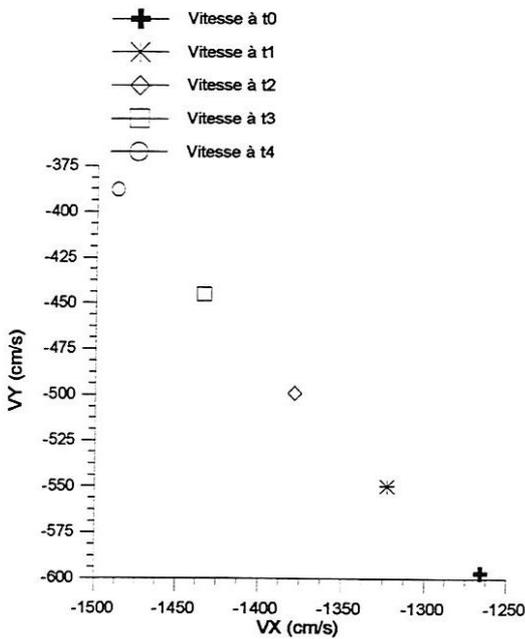
Graphe I-37

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de tous les d.d.l (cm et/ou degré) dans le plan XY



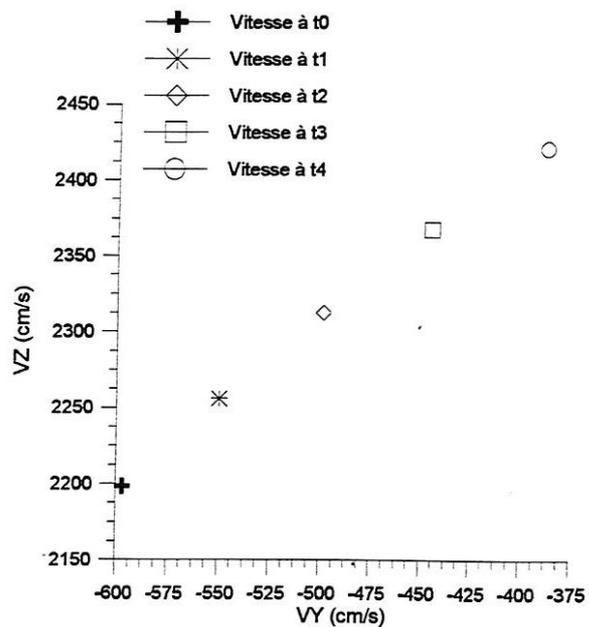
Graphe I-38

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de tous les d.d.l (cm et/ou degré) dans le plan YZ



Graphe I-39

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de tous les d.d.l (cm et/ou degré) dans le plan XY



Graphe I-40

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de tous les d.d.l (cm et/ou degré) dans le plan YZ

les graphes I-21, I-22, I-23 et I-24 représentent l'évolution en terme de vitesse du derniers point en fonction des grandes et petites variation de θ_1 (degrés). On remarque que se soit dans le plan XY ou YZ, les vitesses du point O_5 sont tous confondues donc égalent et ne changent pas en fonction de la variation de θ_1 .

Dans les graphes I-25, I-26, I-27 et I-28 on représente l'évolution en terme de vitesse du dernier point en fonction de la variation de θ_2 (degrés) dans les deux plans XY et YZ. On remarque que les vitesses de l'effecteur varient dans le plan XY, mais sont confondues dans le plan YZ. Cela est expliqué par la faible variation de la vitesse selon l'axe des \vec{Y} .

Les graphes I-29, I-30, I-31 et I-34 représentent l'évolution en terme de vitesse de l'effecteur en fonction des grandes et petites variations de translation T_3 (cm). On remarque, dans les deux plans XY et YZ, qu'à chaque fois qu'on augmente la variation de T_3 , la valeur de la vitesse augmente et varie rapidement. Dans le plan XY les valeurs sont négatives. Pour les valeurs selon la composante Z, elles sont positives. Tous cela revient au sens négatif des rotations $\theta_1, \theta_2, \theta_4$.

Les graphes I-33, I-34, I-35 et I-36 représentent la variation en terme de vitesse du dernier point en fonction de θ_4 (degrés). On remarque la variation de la vitesse dans les deux plans XY et YZ. Les vitesses dans le plan XY sont négatives et dans le plan YZ elles sont positives selon l'axe des \vec{Z} . Lorsqu'on donne de grandes variations aux d.d.l., on obtient de grande variation des valeurs de la vitesse.

Dans les graphes I-37, I-38, I-39 et I-40, on représente la variation en terme de vitesses du mécanisme en fonction de tous les d.d.l (degré ou/et cm). En donnant de grandes variations aux différents d.d.l., la vitesse augmente de plus en plus rapidement. On remarque, aussi que lorsqu'on varie tous les d.d.l. en même temps, les valeurs des vitesses sont supérieure à celles que lorsqu'on varie chaque d.d.l. seul.

Maintenant, nous allons présenter les graphes en terme de position (cm) puis en terme de vitesse (cm/s) pour le deuxième bras-manipulateur qui est un mécanisme sphérique (figure VI-02).

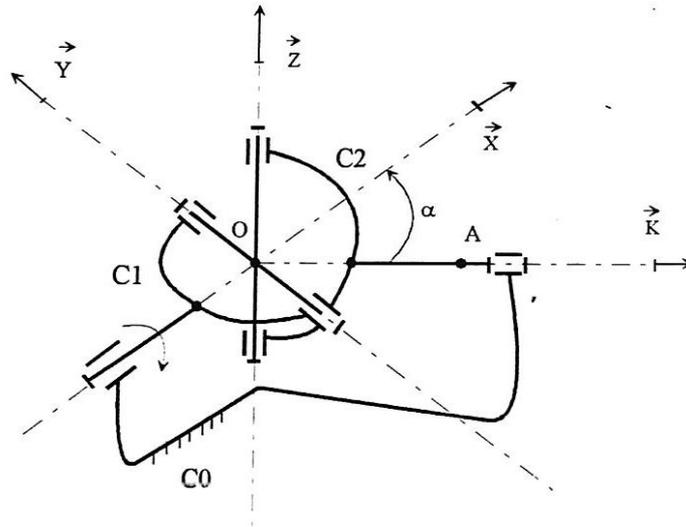
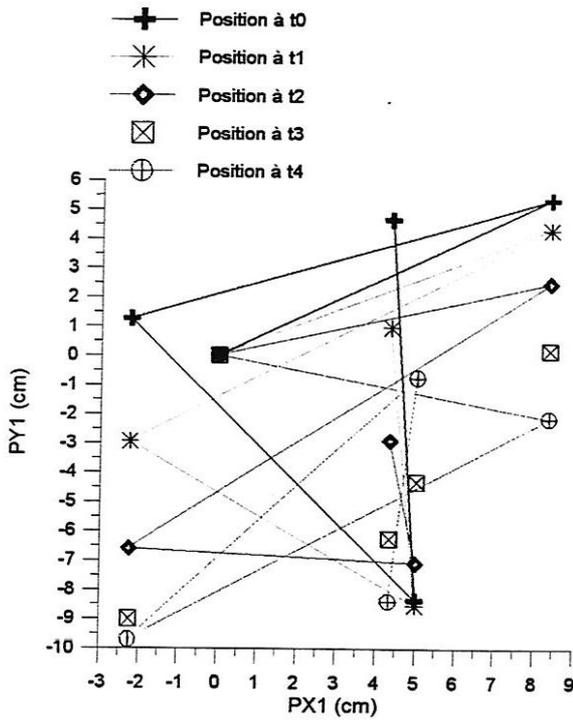


Figure VI-02 : Mécanisme sphérique (joint cardan)

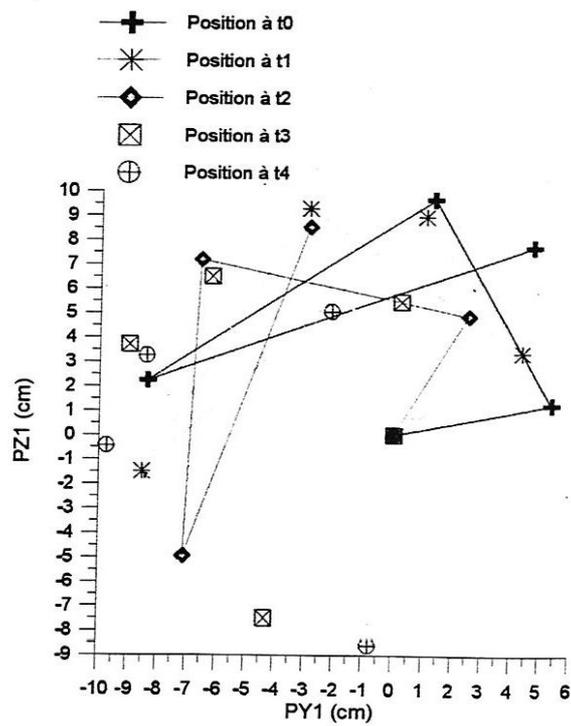
Il formé par trois articulations qui constituent un repère orthonormé $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. Chacune des articulations est animée par un d.d.l. Le premier est une rotation d'un angle $\theta_1 = 75$ degrés, autour de l'axe \vec{X}_0 . Il entraîne avec lui tous le système. Le deuxième d.d.l., est une rotation $\theta_2 = 30$ degrés, autour de l'axe \vec{Y}_1 qui fait subir une deuxième transformation au mécanisme donc à l'axe de sortie. Le troisième et le dernier est une rotation d'un angle $\theta_3 = 15$ degrés, autour de l'axe \vec{Z}_2 et on obtient la position finale du point A qui est lié à l'axe de sortie, ainsi que sa vitesse.

Pour mieux comprendre ce mécanisme, on donne les explicatifs suivants : d'abord il y a une rotation autour de l'axe \vec{X} qui entraîne avec lui le corps C_1 . A ce dernier est lié l'axe \vec{Y} qui entraîne avec lui l'axe \vec{Z} fait pivoter le corps C_2 . L'axe de sortie est lié à C_2 donc il est entraîné par le mouvement. Si on fait varier les trois d.d.l. à différents instants, on peut connaître plusieurs possibilités en terme de positions et vitesses que peut avoir l'axe de sortie.

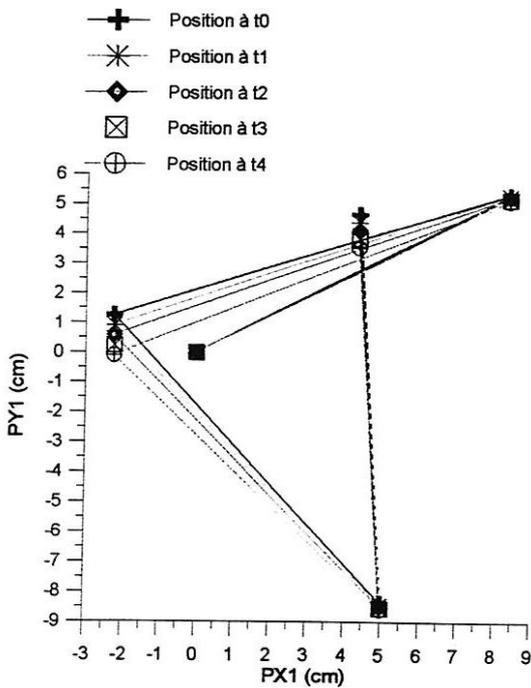
Pour les graphes nous allons procéder de la même manière que pour le mécanisme poly-articulé. Alors, dans chaque page nous trouverons quatre graphes, ils varient en fonction du même d.d.l. Ceux d'en haut varient en fonction de grandes variations du d.d.l., tandis que les graphes d'en bas, varient en fonction de petites variations du d.d.l, présentés dans les deux plans (XY et YZ).



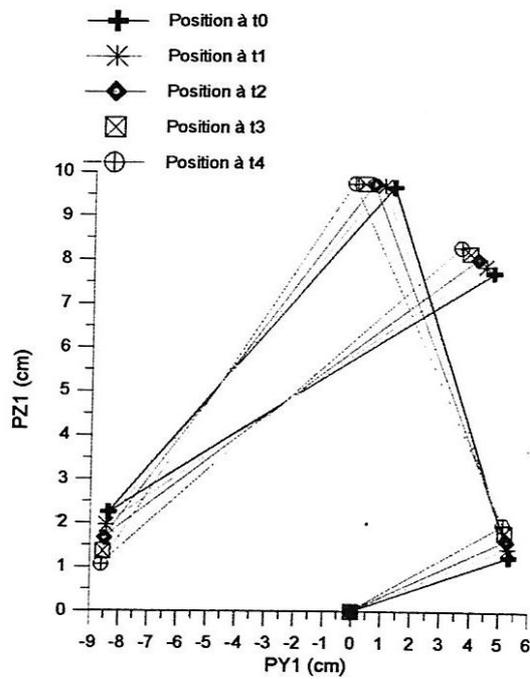
Graphe II-01 :
Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_1 (degré) dans le plan XY



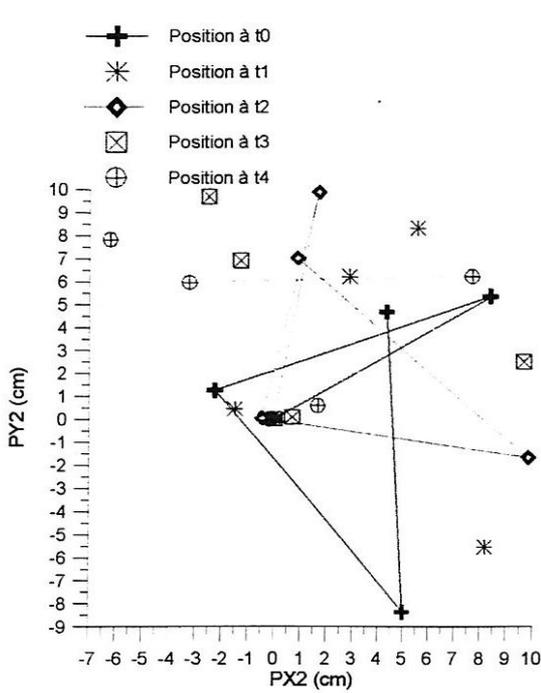
Graphe II-02 :
Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_1 (degré), dans le plan YZ



Graphe II-03 :
Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_1 (degré) dans le plan XY

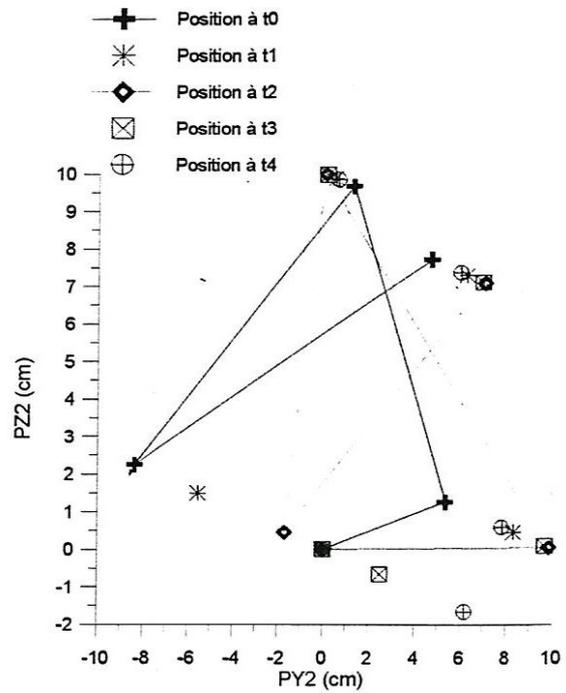


Graphe II-04 :
Petites Variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_1 (degré) dans le plan YZ



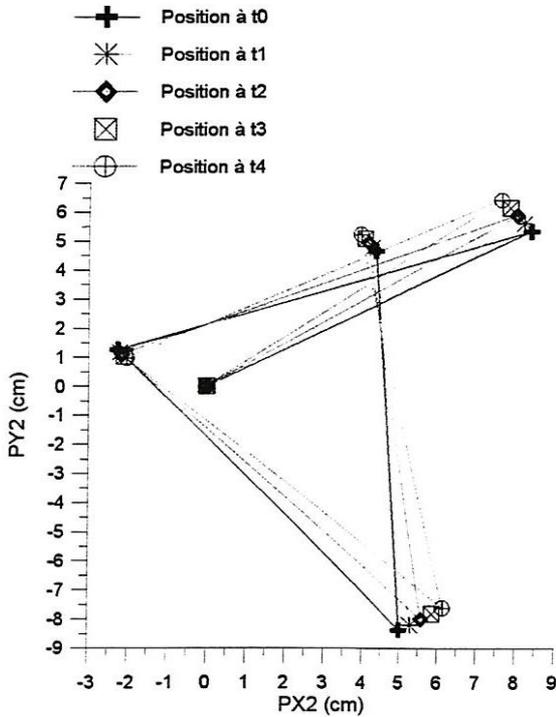
Graphe II-05 :

Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_2 (degré) dans le plan XY



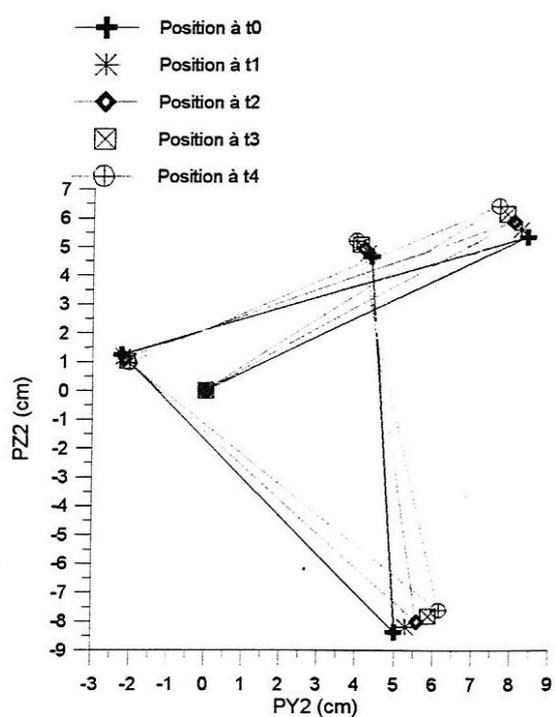
Graphe II-06 :

Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_2 (degré), dans le plan YZ



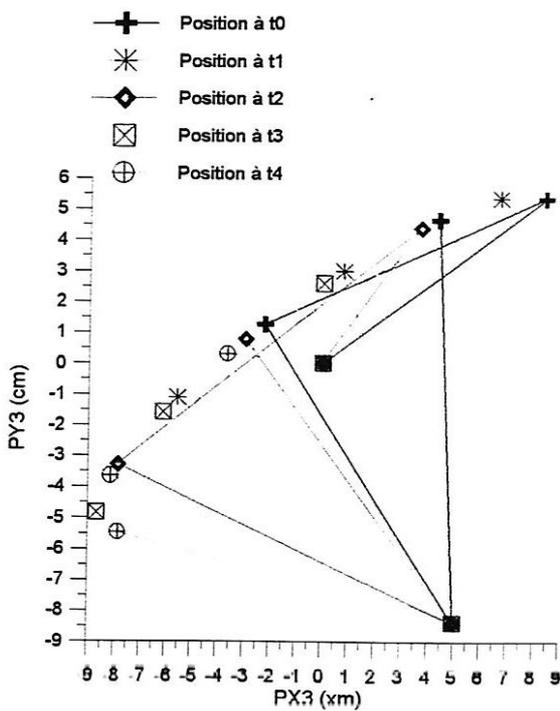
Graphe II-07 :

Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_2 (degré) dans le plan XY



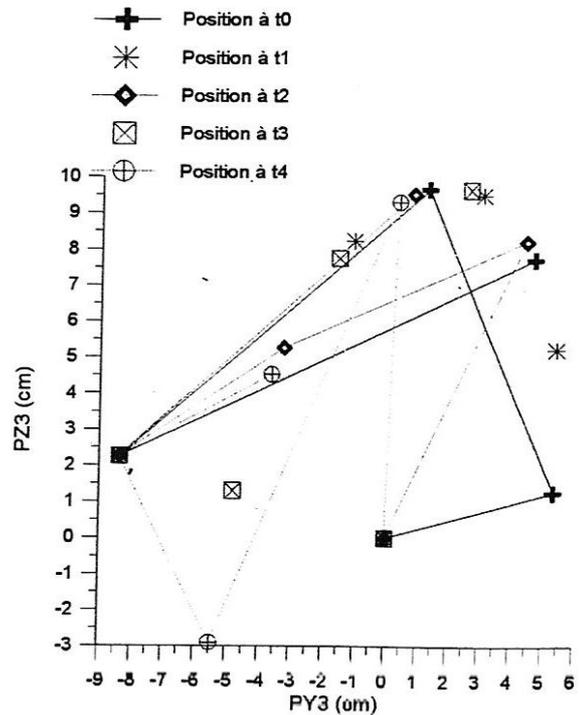
Graphe II-08 :

Petites Variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_2 (degré) dans le plan YZ



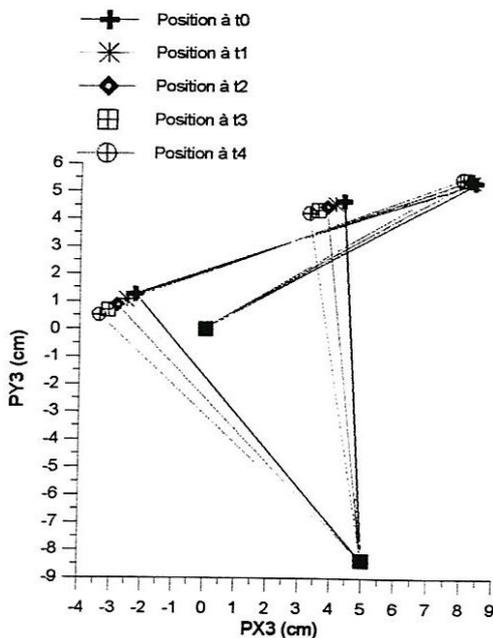
Graphe II-09 :

Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_3 (degré) dans le plan XY



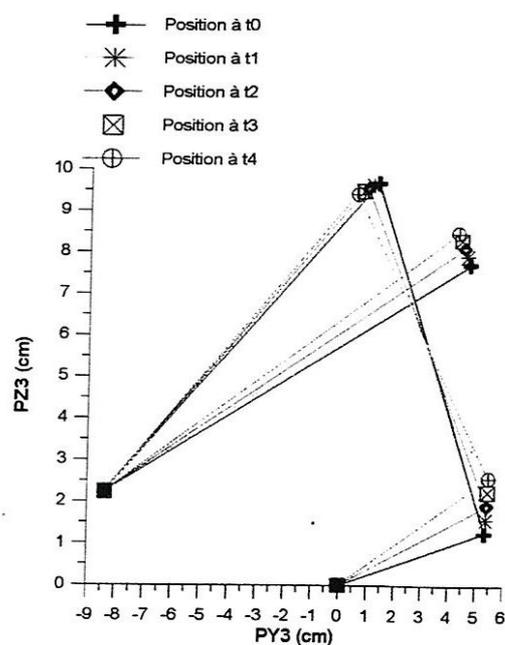
Graphe II-10 :

Grandes variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_3 (degré), dans le plan YZ



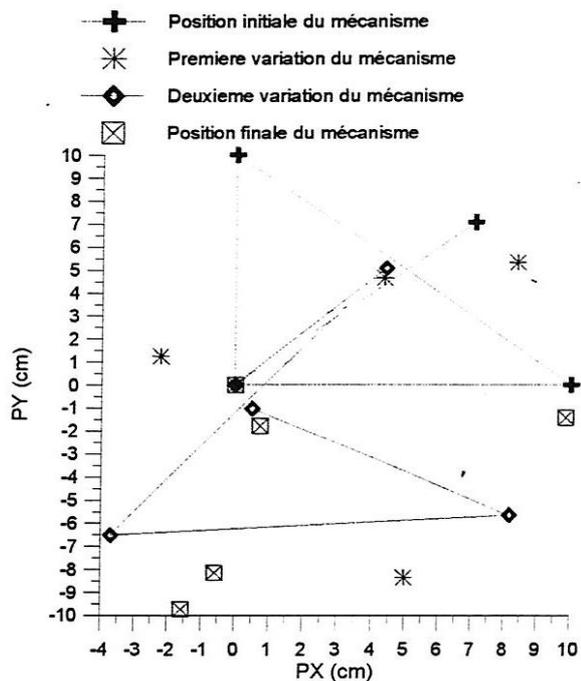
Graphe II-11 :

Petites variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_3 (degré) dans le plan XY

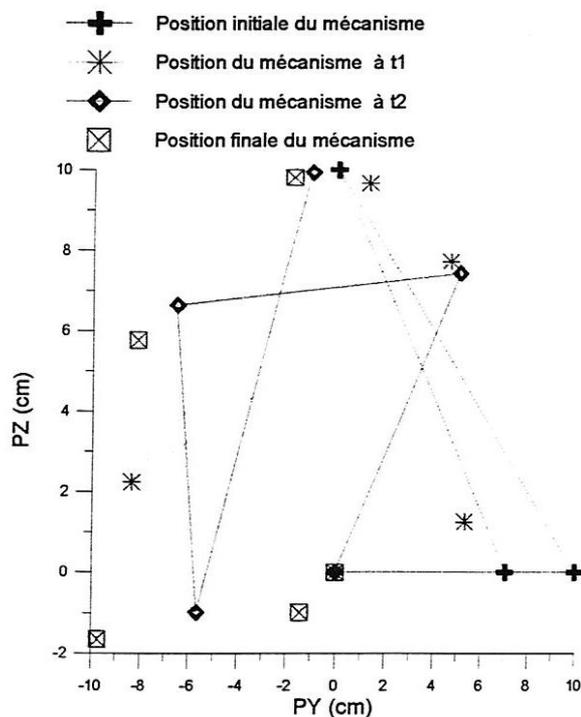


Graphe II-12 :

Petites Variations de la position des différents points du mécanisme en fonction de θ_3 (degré) dans le plan YZ



Graphe II-13 :
Variation de la position des différents points du mécanisme en fonction successivement des trois d.d.l, θ_1 , θ_2 et θ_3 en (degré), dans le plan XY



Graphe II-14 :
Variation de la position des différents points du mécanisme en fonction successivement des trois d.d.l, θ_1 , θ_2 et θ_3 en (degré), dans le plan YZ

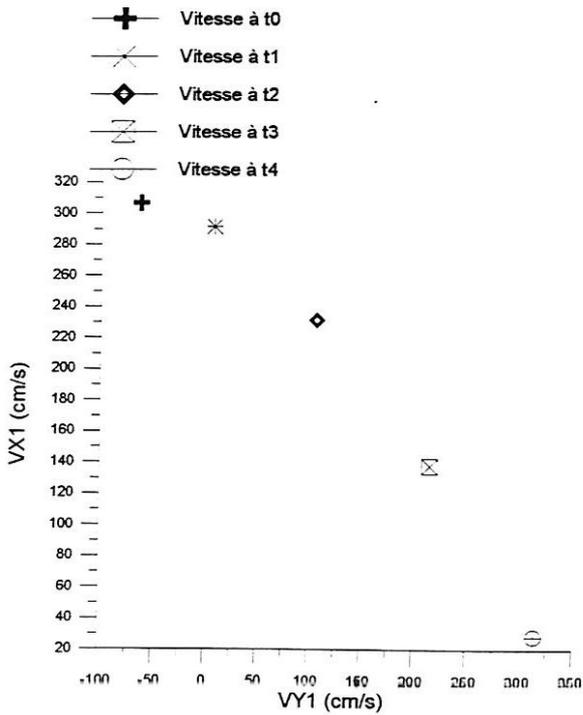
Les graphes II-01, II-02, II-03 et II-04 représentent la variation en terme de position (cm) du mécanisme sphérique (figure VI-02) dans les deux plans XY et YZ. Nous pouvons voir l'évolution du mécanisme à différents instants en fonction de la variation du premier d.d.l $\theta_1=75$ degrés d'axe déterminé par (O, \vec{X}_0) . Pour les graphes II-01 et II-02, nous avons fait de grandes variations de θ_1 , contrairement aux graphes II-03 et II-04. D'ailleurs, nous pouvons remarquer, que lorsque les variations sont grandes, le mécanisme balaye un plus grand volume que pour les petites variations.

Les graphes II-05, II-06, II-07 et II-08 représentent la variation en terme de position (cm) du mécanisme sphérique (figure VI-02), toujours dans les deux plans XY et YZ. Nous pouvons voir l'évolution de tous les points du mécanisme en fonction des grandes et petites variations du deuxième d.d.l $\theta_2=30$ degrés.

Les graphes II-09, II-10, II-11 et II-12 représentent la variation en terme de position (cm) en fonction de grandes et petites variations de $\theta_3=15$ degrés. Nous remarquons que pour les grandes variations, le mécanisme fait un grand balayage du volume, donc l'effecteur peut atteindre énormément de points. Pour les petites variations, l'évolution du mécanisme est minime, mais plus claire. Nous pouvons distinguer le centre O, les différents points O_1, O_2, O_3 et en plus nous pouvons voir l'évolution du point A lié à l'axe de sortie.

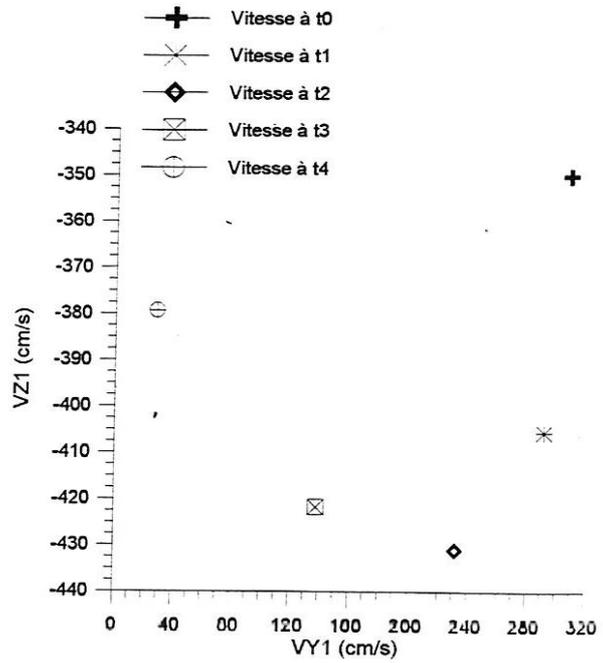
Les graphes II-13 et II-14 représentent l'évolution du mécanisme sphérique en terme de position (cm) en fonction successivement des différents d.d.l. On remarque au début que c'est la position initiale du mécanisme. Après lorsque nous lui avons injecté le premier d.d.l. nous avons obtenus la première transformation du mécanisme. Ensuite, nous avons injecté le deuxième d.d.l., et donc, nous remarquons sa deuxième évolution. Enfin, nous injectons le troisième d.d.l. et nous obtenons la position finale du mécanisme exprimée dans les deux plans XY et YZ.

Maintenant nous présentons les graphes concernant la variation de la vitesse suivant les différents d.d.l.



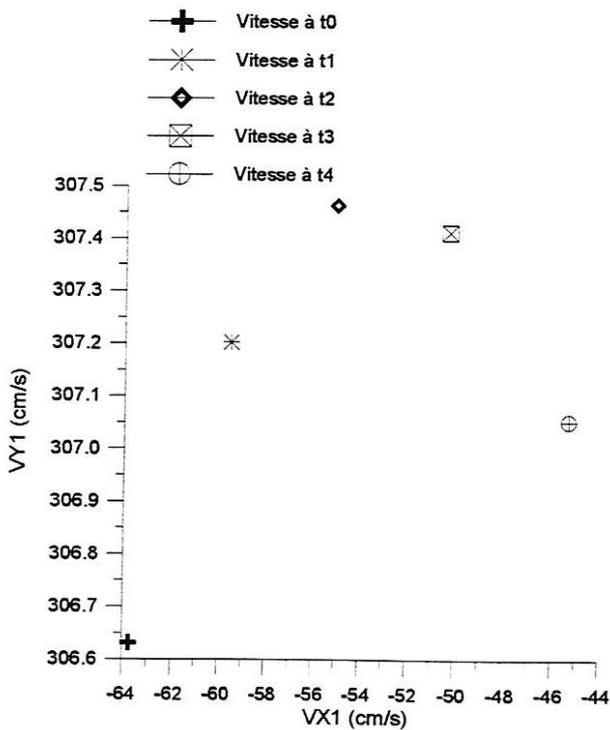
Graphe II-15

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_1 (degré) dans le plan XY



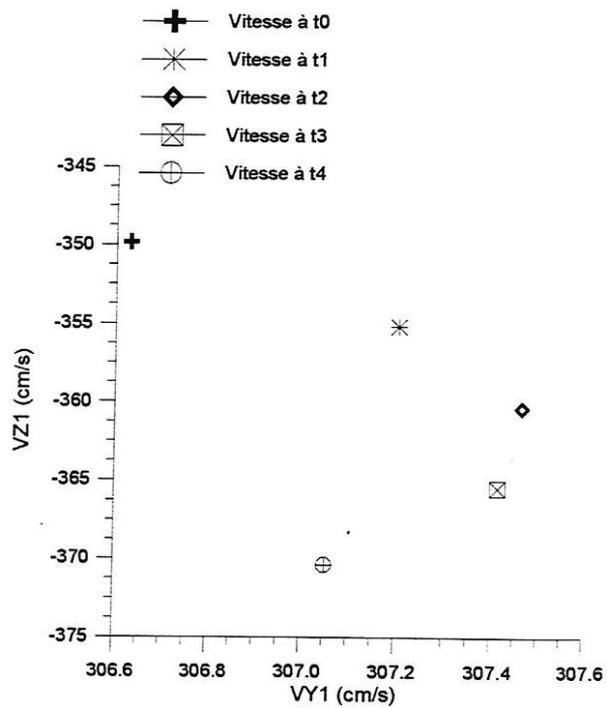
Graphe II-16

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_1 (degré), dans le plan YZ



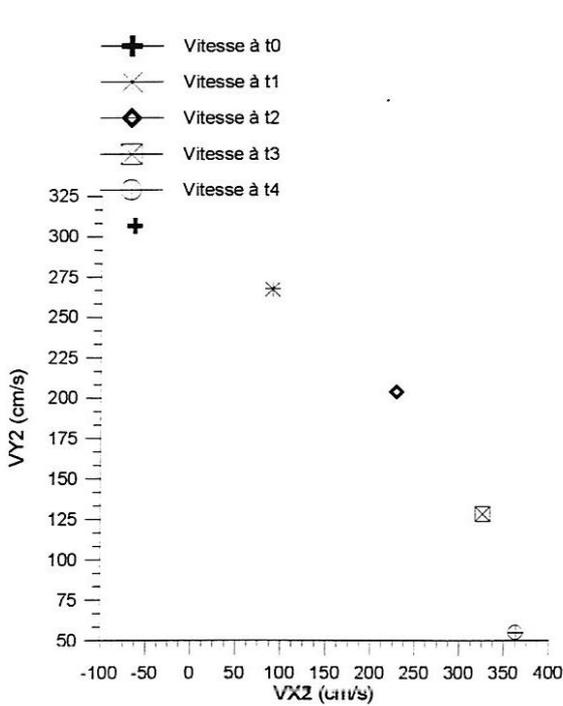
Graphe II-17

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_1 (degré) dans le plan XY



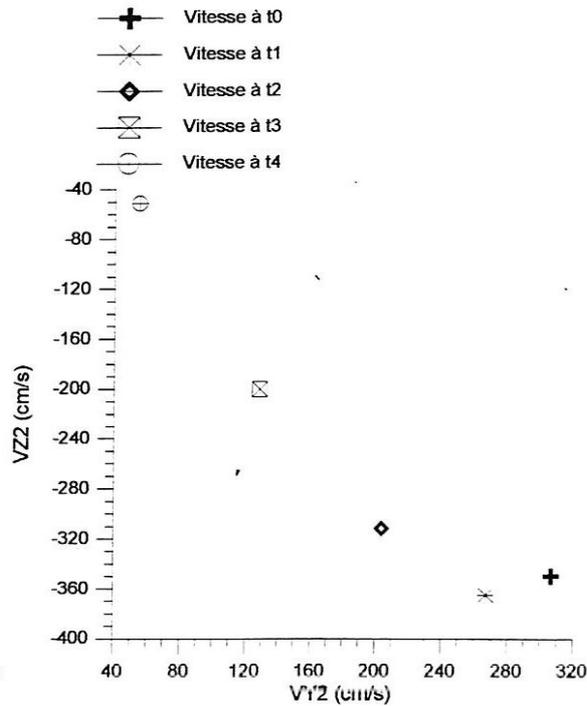
Graphe II-18

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_1 (degré), dans le plan YZ



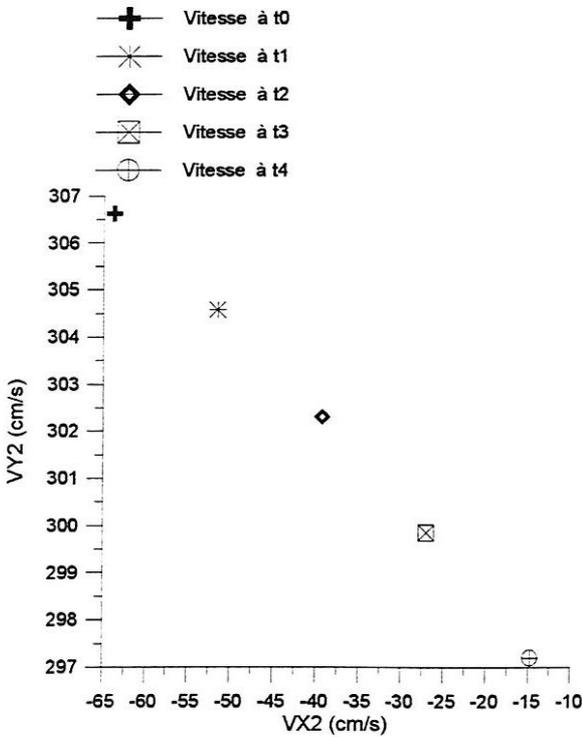
Graphe II-19

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_2 (degré) dans le plan XY



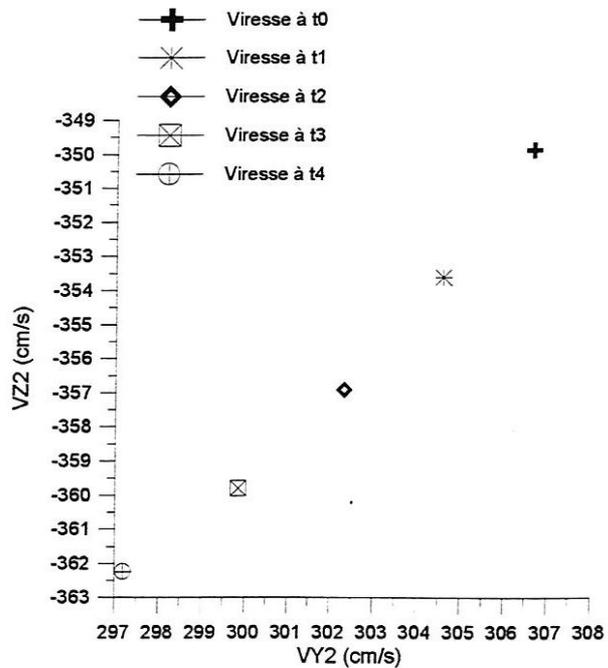
Graphe II-20

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_2 (degré), dans le plan YZ



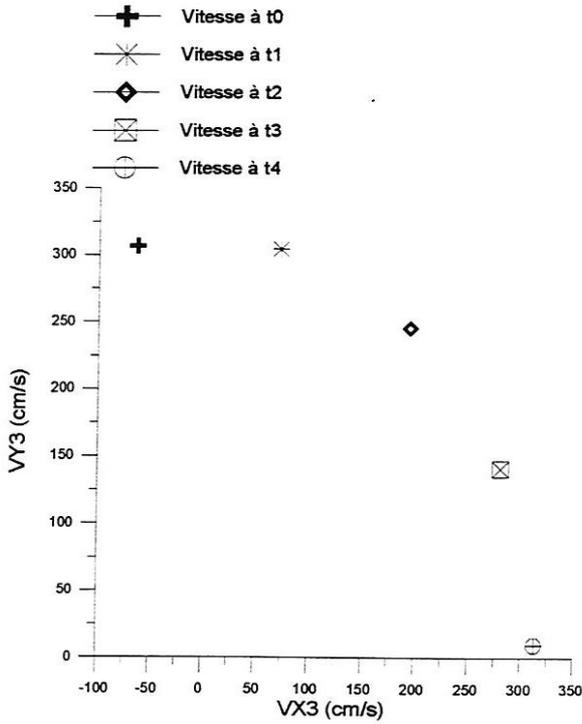
Graphe II-21

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_2 (degré) dans le plan XY



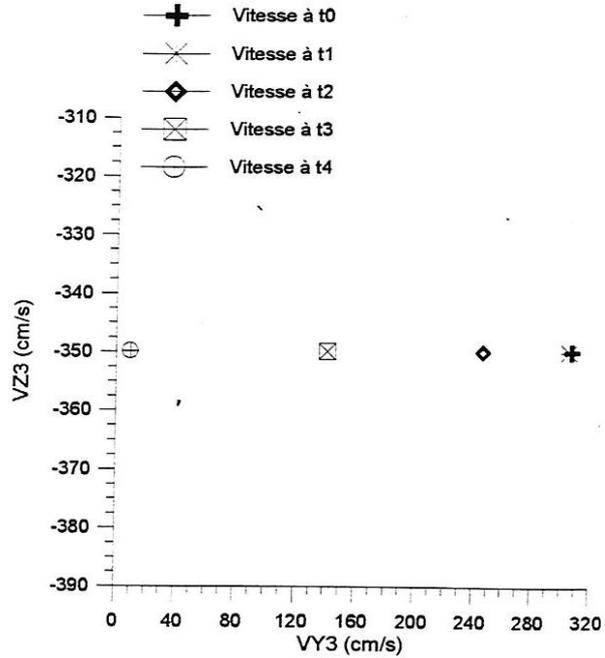
Graphe II-22

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_2 (degré), dans le plan YZ



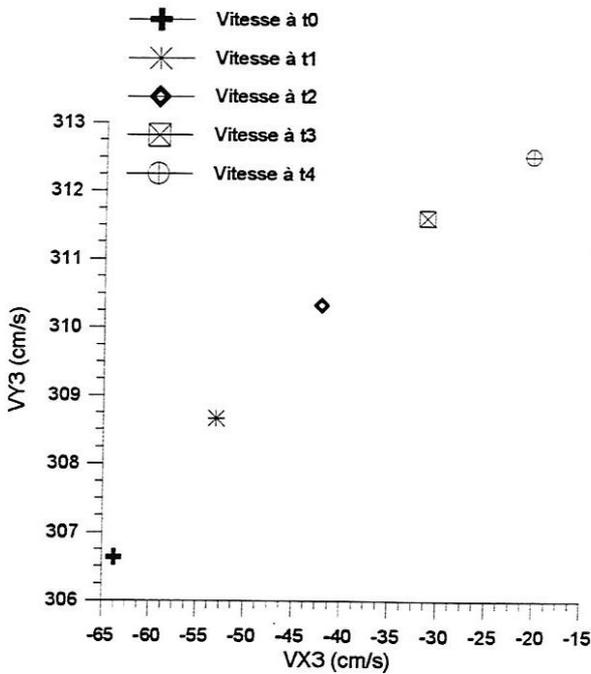
Graphe II-23

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_3 (degré) dans le plan XY



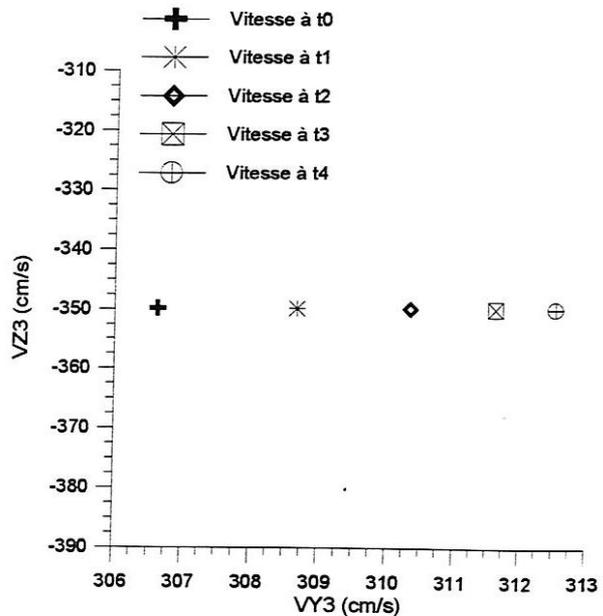
Graphe II-24

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de θ_3 (degré), dans le plan YZ



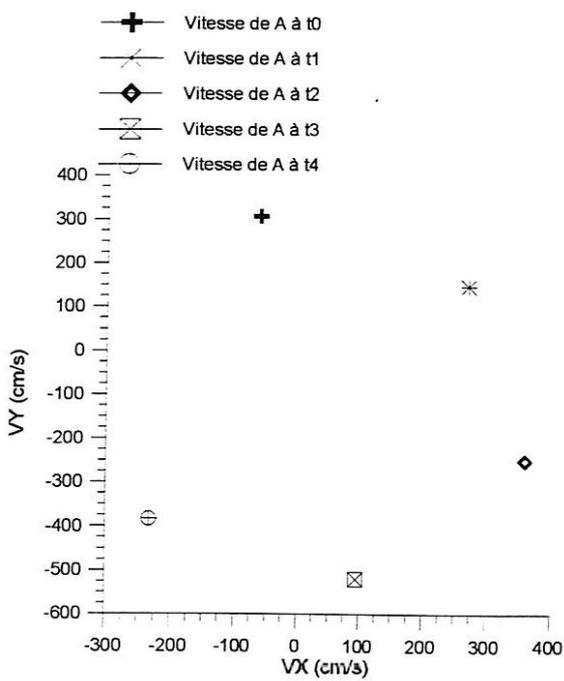
Graphe II-25

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_3 (degré) dans le plan XY



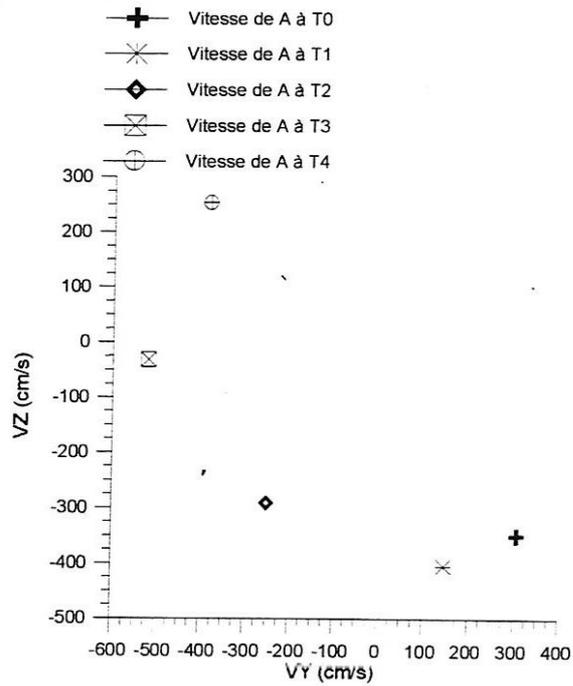
Graphe II-26

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de θ_3 (degré), dans le plan YZ



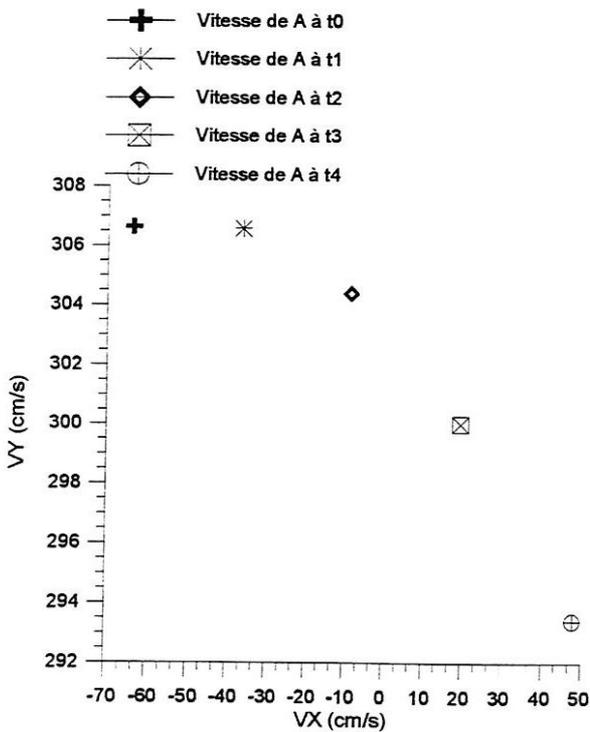
Graphe II-27

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de tous les d.d.l (degrés) dans le plan XY



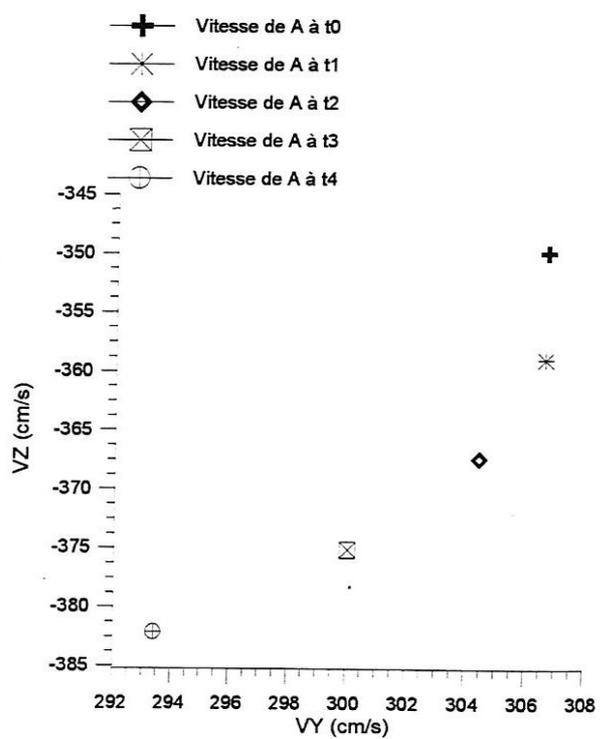
Graphe II-28

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de grandes variations de tous les d.d.l (degrés) dans le plan YZ



Graphe II-29

Variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de tous les d.d.l (degrés) dans le plan XY



Graphe II-30

variations de la vitesse de l'effecteur en fonction de petites variations de tous les d.d.l (degrés) dans le plan YZ

Les graphes II-15, II-16, II-17 et II-18 représentent la variation en terme de vitesse (cm/s) de l'effecteur en fonction des grandes et petites variations de $\theta_1=75$ degrés. Nous remarquons que pour le graphe II-15 (plan XY), les valeurs de la vitesse de l'effecteur augmentent suivant l'axe \vec{X} et diminuent suivant l'axe des \vec{Y} . Tandis que dans le graphe II-16, les valeurs de la vitesse commencent à diminuer suivant les deux axes (\vec{Y} et \vec{Z}) puis au deuxième instant, la vitesse change de direction et commence à augmenter suivant l'axe \vec{Z} . Dans les graphes II-17 et II-18, on a injecté des petites variations à θ_1 . On remarque, dans le graphe II-17 l'augmentation de la vitesse qui commence à diminuer au deuxième instant par rapport à l'axe \vec{Y} . Pour le graphe II-18, les valeurs de la vitesse diminuent suivant l'axe \vec{Z} mais augmentent par rapport à l'axe des \vec{Y} . Au deuxième instant, on remarque, une diminution de la valeur suivant les deux axes. Si on compare entre les graphes II-16 et II-18, on remarque que pour le graphe II-18 suivant l'axe \vec{Y} les valeurs augmentent puis diminuent au deuxième instant, mais pour le graphe II-16 les valeurs suivant l'axe des \vec{Y} diminuent constamment. Ceci est expliqué par: l'intervalle des valeurs sur l'axe \vec{Y} du graphe II-18 vaut presque une seule graduation du graphe II-16.

Les graphes II-19, II-20, II-21 et II-22 représentent la variation en terme de vitesse (cm/s) de l'effecteur du mécanisme sphérique en fonction des grandes et petites variations de $\theta_2 =30$ degrés. Nous remarquons que pour les grandes variations de θ_2 , nous avons l'évolution de la vitesse en forme hyperbolique, cela implique que nous avons des variations assez importantes pour le passage d'une valeur à une autre. Pour les petites variations, les pentes sont presque en ligne.

Les graphes II-23, II-24, II-25 et II-26 représentent la variation de la vitesse de l'effecteur en fonction des grandes et petites variations de $\theta_3 =15$ degrés. On remarque que pour les grandes variations, dans le plan XY les valeurs diminuent suivant l'axe \vec{Y} , mais augmentent selon l'axe \vec{X} , tandis que, dans le plan YZ les valeurs décroissent suivant l'axe des \vec{Y} et elles sont constantes suivant l'axe \vec{Z} . Pour les petites variations, dans le plan XY, les valeurs augmentent par rapport aux deux axes. Mais dans le plan YZ elles croient suivant l'axe des \vec{Y} et sont constantes suivant l'axe des \vec{Z} .

Les graphes II-27, II-28, II-29 et II-30 représentent la variation de la vitesse de l'effecteur en fonction des grandes et petites variations de tous les d.d.l (degrés). On remarque que pour les grandes variations des d.d.l, nous avons des courbes hyperbolique qui indiquent des changements brusque des valeurs de la vitesse. Pour les petites variations, les courbes sont des branches hyperbolique dont les valeurs ne changent brusquement de signe.

Dans ce mémoire, notre étude s'est basée sur deux genres de bras-manipulateur. Le premier est un mécanisme poly-articulé (ouvert) à quatre degrés de liberté ayant quatre articulations, se terminant par un effecteur. Le deuxième bras-manipulateur est un mécanisme sphérique (fermé) à trois degrés de liberté formé par trois articulations qui constituent un repère orthonormé $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$.

Nous avons traité ces mécanismes par deux modèles de commande. A partir de ces derniers, on obtient leurs études cinématique complète. C'est à dire connaître la position et vitesse des différents points du mécanisme. Le premier modèle est très courant, basé sur les matrices de passage homogène. Ce modèle a présenté de nombreux avantages parmi eux la simplicité des calculs. Il a été traité par plusieurs auteurs, chacun d'eux l'a exposé d'une manière différente mais, tous arrivent au même résultats. Après maintes recherches et réflexions, nous avons essayer de le simplifier pour que le lecteur puisse facilement le comprendre. Ce dernier se résume à l'utilisation des matrices de passage pour passer d'un repère à un autre sans aucune ambiguïté. Nous arrivons facilement à connaître la transformation de tous les points du mécanisme par rapport à n'importe quel repère, seulement, il faut faire attention au sens de rotation.

La résolution de ce modèle prend beaucoup de temps, surtout pour les mécanismes redondant. Malgré sa simplicité, sa programmation en langage Fortran n'a pas été faciliter par la représentation indicielle des matrices de transformation ainsi que celle des vecteurs position et vitesse.

En ce qui concerne son application sur le mécanisme sphérique, la résolution a été compliquée car tous les axes se rencontrent au même centre ; donc c'est le même repère qui subit les différentes transformations, d'ailleurs nous avons utilisé les angles classique d'**EULER**. Au début les trois axes forment un repère orthonormé $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ qui représente le repère de référence (R_0). Après la première transformation, ce même repère devient $R_1(O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$. Ensuite, lorsqu'il subit la deuxième transformation le repère R_1 devient $R_2(O, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$. Enfin, après la troisième transformation on obtient le repère $R_3(O, \vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$.

Par contre, le deuxième modèle qui est basé sur l'algèbre de **LIE**, n'a pas été exploité par les roboticiens. D'ailleurs nous avons rencontré beaucoup de difficultés à trouver des bibliographies qui le traite, malgré les nombreux recherches que nous avons faites. Tous cela a rendu difficile notre besogne. Mais enfin de compte, lorsqu'on a pu comprendre et établir ce dernier, on a constaté les nombreux avantages qu'il présente. Parmi eux l'établissement des propriétés générales, la simplification des calculs numériques avant son passage à la programmation sur ordinateur.

Nous avons aussi pu constater sa maniabilité, et les bons résultats qu'il a donné pour les deux mécanismes (ouvert et fermé). Nous obtenons le vecteur position et le vecteur vitesse de l'effecteur par rapport au repère de référence (exprimés dans le repère de référence ou bien dans le dernier repère ; cela dépend du sens qu'on prend, que se soit en amont ou en aval).

L'établissement de l'équation qui nous donne le vecteur position, est délicate. Mais en ce qui concerne son développement et l'obtention du résultat, nous l'avons trouvé plus séduisant et plus pratique que celui des matrices de passage.

A la fin de ce mémoire, on a pu constater, que les deux modèles nous donnent des résultats similaires, ce qui prouvent que le deuxième modèle basé sur l'algèbre de **LIE** est fiable et que nous pouvons l'utiliser pour l'étude cinématique de n'importe quel mécanisme.

En plus, nous l'avons trouvé plus intéressant pratique, surtout en ce qui concerne la rapidité des calculs. En plus, nous ne risquons pas de se tromper pour le sens que peut prendre la rotation, parce que le produit vectoriel entre les axes du repère orthonormé nous donne directement le signe et l'axe que prend la nouvelle transformation.

CONCLUSION GENERALE

Pour concevoir, simuler ou commander un robot, il est nécessaire, entre autres, de disposer de modèles du mécanisme. Le but de notre travail a été justement de proposer quelques techniques et les développer dans le souci de nous conduire au modèle le plus performant.

Dans cet ouvrage, nous avons traité la modélisation des seuls robots manipulateurs, et comme outils mathématiques, nous avons utilisé le modèle cinématique qui nous a aidé à établir les coordonnées et vitesses des différents points du système articulé, ainsi que l'orientation et les vitesses de déplacement des différents repères liés au corps du système articulé.

Dans ce mémoire, nous avons d'abord essayé de donner quelques définitions générales sur les robots et la robotique, l'historique de leur naissance et leur développement. Ensuite, nous avons présenté différentes descriptions concernant la situation d'un solide dans l'espace.

Dans le troisième chapitre, nous avons développé quelques méthodes de commandes des chaînes cinématique, parmi lesquelles, nous avons choisi la méthode cinématique extrinsèque, qui est très courante et très utilisée par les roboticiens. Cette méthode s'est bien présentée à la traduction en langage machine. Son application sur des mécanismes poly-articulés et sphériques a donné de bons résultats. Elle est relativement simple pour les mécanismes ouverts, quant à son application sur les mécanismes sphériques, elle a présenté certaines difficultés.

Pour passer d'un repère à un autre, et d'une transformation à une autre, nous utilisons ces matrices de passage, dont le nom l'indique clairement. La résolution numérique de cette dernière prend beaucoup de temps et se complique pour les bras-manipulateurs redondant (qui ont plus de six d.d.l.).

Nous avons ensuite choisi la méthode cinématique intrinsèque basée sur l'algèbre de **LIE**. Elle demeure non exploitable par les roboticiens, malgré qu'elle présente de nombreux avantages, notamment le passage aux déplacements petits. C'est pourquoi, nous l'avons développé, pour démontrer que son application sur les bras manipulateurs présente elle aussi de bons résultats.

Effectivement l'utilisation de cette méthode sur les mêmes mécanismes utilisés précédemment, nous a permis d'aboutir à des résultats similaires. Par ailleurs nous avons constaté qu'en temps de calcul à la main, la méthode basée sur l'algèbre de **LIE** est meilleurs. Après avoir établi l'équation qui définit la position, son développement devient automatique et le résultats est sûr, parce que , nous ne pouvons pas nous trompé sur le sens que prennent les rotations puisque le produit vectoriel nous le donne directement.

Pour sa programmation sur ordinateur, nous avons pu constater sa simplicité, car les équations qui définissent la position et la vitesse après transformation, sont déjà établit numériquement.

Enfin, on a pu constater comment des formalismes mathématiques différents se complètent entre eux.

ANNEXE A1

RAPPEL MATHÉMATIQUES UTILES AU CALCULS

1- Transformation d'un produit vectoriel en produit scalaire

$$a \wedge b = \tilde{a} \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad (A1-01)$$

\tilde{a} est un tenseur antisymétrique. Cette transformation facilite l'écriture et les calculs des expressions dont nous avons besoin.

2- Dérivée temporelle ou vitesse d'un vecteur

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r} \quad (A1-02)$$

considérons le vecteur $\mathbf{r}(t)$ de la Figure A1-01 tournant avec le temps autour de l'axe Z.

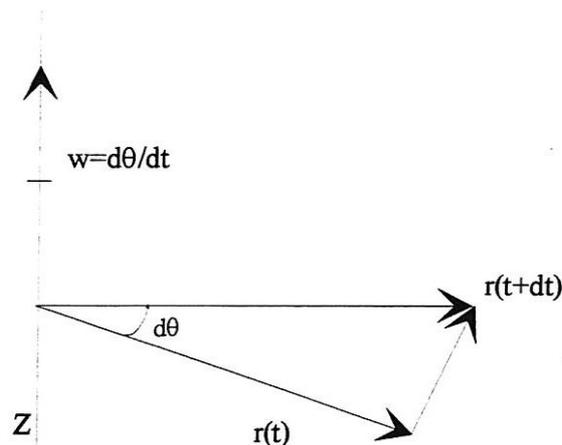


Figure A1-01

A l'instant $t+dt$, $\mathbf{r}(t)$ a tourné autour de l'axe d'une valeur $d\theta$ et se trouve maintenant en $(\mathbf{r}+d\mathbf{r})$.
 On peut donc écrire :

$$\mathbf{r}(t+dt) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{r}$$

Le vecteur $d\mathbf{r}$ a :

- pour longueur : $|\mathbf{r}(t)|d\theta$
- pour direction : la normale au plan défini par l'axe Z et le vecteur $\mathbf{r}(t)$ soit :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}(t) \wedge \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r} \quad , \quad (\text{A1-03})$$

ANNEXE A2

PROPRIETES DES MATRICES DE TRANSFORMATION HOMOGENE

1- Une matrice de transformation peut se mettre sous la forme:

$$T = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2-01})$$

la matrice M représente la rotation alors que la matrice colonne P représente la translation. Pour une transformation de translation pure, $M = I$. (I représente la matrice unité d'ordre 3), tandis que pour une transformation de rotation pure, $P=0$

2- La matrice M est orthogonal, c'est à dire que la matrice inverse est égale à la matrice transposée:

$$M^{-1} = M^T \quad (\text{A2-02})$$

Ses éléments représentent les cosinus directeurs d'orientation. Elle ne contient que trois paramètres indépendant (l'un des vecteurs s , n ou a se déduit du produit vectoriel des deux autres, exemples, $s = n \times a$; en outre, le produit scalaire $n \cdot a$ est nul).

3- L'inverse de la matrice T_i^j définit la matrice T_j^i .

4- On peu vérifier que :

$$\text{Rot}^{-1}(u, \theta) = \text{Rot}(u, -\theta) = \text{Rot}(-u, \theta) \quad (\text{A2-03})$$

5- L'inverse d'une matrice de transformation, représentée par la relation (a) peut être mise sous la forme:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} & & -S^T P \\ M^T & & -n^T P \\ & & -a^T P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & -M^T P \\ M^T & & \\ & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2-04})$$

6- Si un repère R_0 a subit K transformations consécutives et si la $i^{\text{ème}}$ transformation ($i=1;n$) est définie par rapport au repère courant R_{i-1} (figure A2.1), alors la transformation T_0^K peut être déduite de la composition des multiplications à droite de ces transformations:

$$T_0^K = T_0^1 + T_1^2 + T_2^3 + \dots + T_{K-1}^K \tag{A2-05}$$

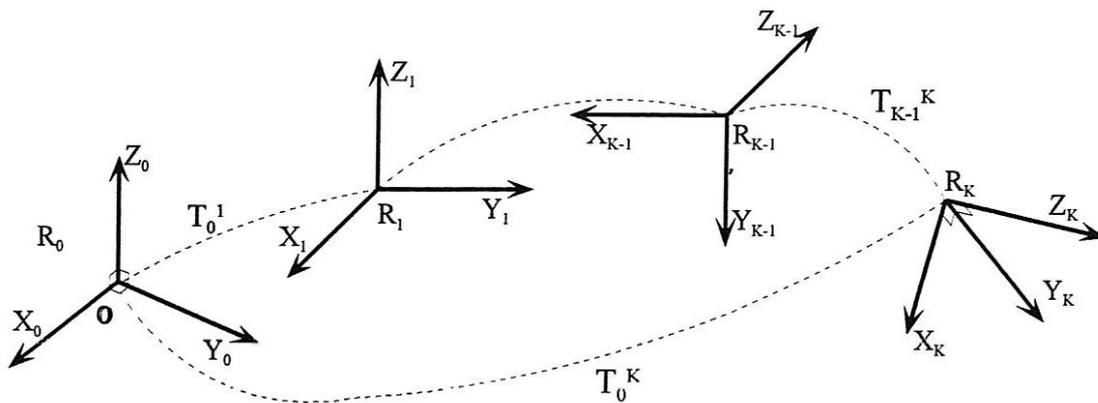


Figure A2.1 : Composition des transformations

7- Composition de deux matrices

La multiplication de deux matrices de transformation donne une matrice de transformation:

$$T_1 T_2 = \begin{bmatrix} M_1 & P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 & P_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_1 P_2 + P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A2-06}$$

8- Décomposition de la matrice de transformation

une matrice de transformation peut se décomposer en deux matrices de transformation, l'une représente une translation pure, l'autre une rotation pure .

$$T = \begin{bmatrix} M & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A2-07}$$

On obtient:

$$\vec{O}_0 A' = O_0 O_1 + \exp(\theta_1 \vec{X} \wedge) (O_1 O_2 + \exp(\theta_2 \vec{Y} \wedge) (O_2 A + a_3 \vec{Z})) \quad (\text{A3-01})$$

O_0 est un point choisi arbitrairement. On met cette dernière expression sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \vec{O}_0 A' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(\theta_1 \vec{X} \wedge) & \vec{O}_0 O_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp(\theta_2 \vec{Y} \wedge) & \vec{O}_1 O_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a_3 \vec{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{O}_2 A \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A3-02})$$

Les éléments de ces matrices sont des opérateurs linéaires ou des vecteurs. En voulant rendre explicites les formules précédentes, on prend la configuration initiale choisie telle que \vec{Z} soit orthogonal au plan (\vec{X}, \vec{Y}) .

On choisit:

$O_0 = O_1 = O_2 = 0$ et $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ de façon à former une base orthonormée directe.

On cherche la transformé O' du point mobile O afin d'obtenir les coordonnées sphériques usuelles d'un point:

$$\begin{aligned} \vec{OO}' &= \exp(\theta_1 \vec{X} \wedge) (\exp(\theta_2 \vec{Y} \wedge) a_3 \vec{Z}) \\ &= a_3 \exp(\theta_1 \vec{X} \wedge) (\vec{Z} + \sin \theta_2 \vec{Y} \wedge \vec{Z} + (1 - \cos \theta_2) ((\vec{Y} \wedge \vec{Y} \wedge \vec{Z}))) \\ &= a_3 \exp(\theta_1 \vec{X} \wedge) (\sin \theta_2 \vec{X} + \cos \theta_2 \vec{Z}) \\ &= a_3 (\sin \theta_2 \vec{X} + \cos \theta_2 \vec{Z} + \sin \theta_1 \vec{X} \wedge (\cos \theta_2 \vec{Z}) + (1 - \cos \theta_1) \vec{X} \wedge (\vec{X} \wedge \cos \theta_2 \vec{Z})) \\ &= a_3 (\sin \theta_2 \vec{X} - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \vec{Y} + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \vec{Z}) \end{aligned}$$

Donc le vecteur position est :

$$\vec{OO}' = a_3 (\sin \theta_2 \vec{X} - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \vec{Y} + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \vec{Z})$$

On peut vérifier que le résultat est correcte grâce à la géométrie élémentaire.

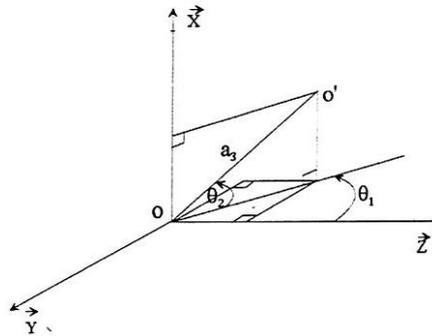
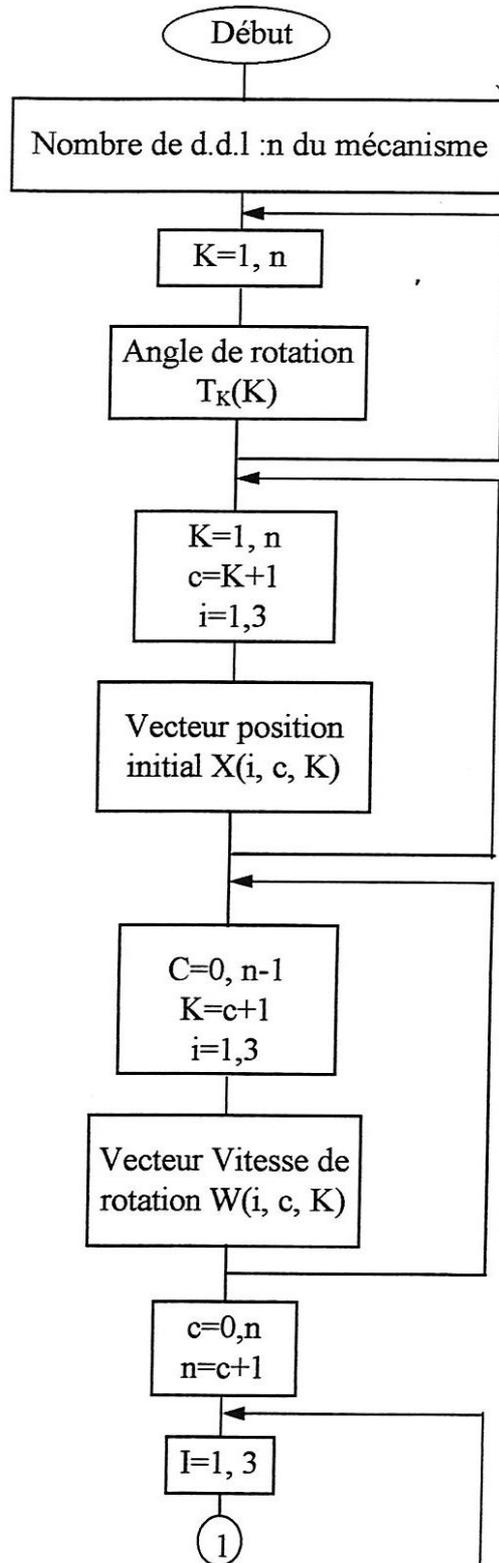


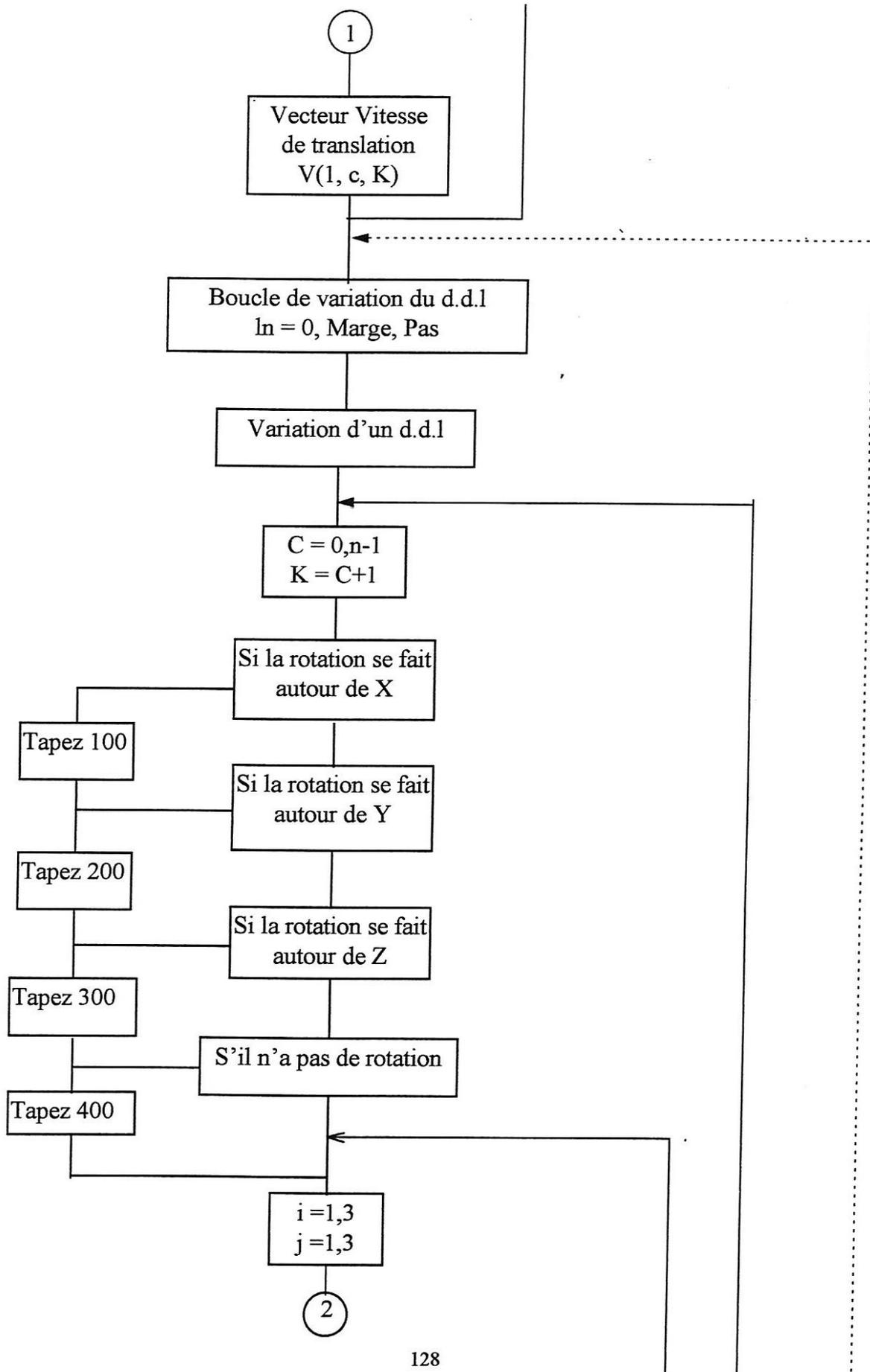
Figure A3-02

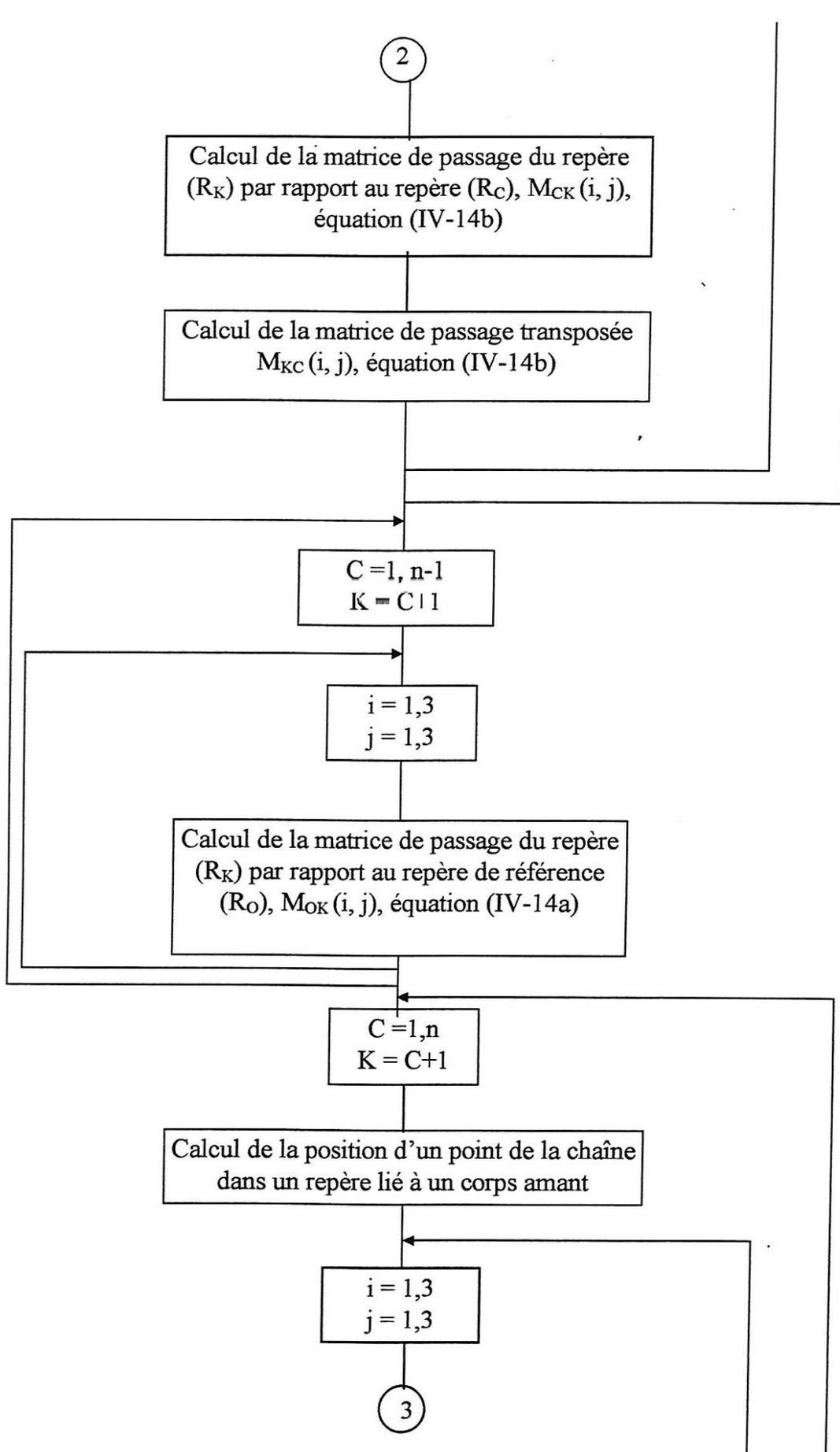
ANNEXE A4

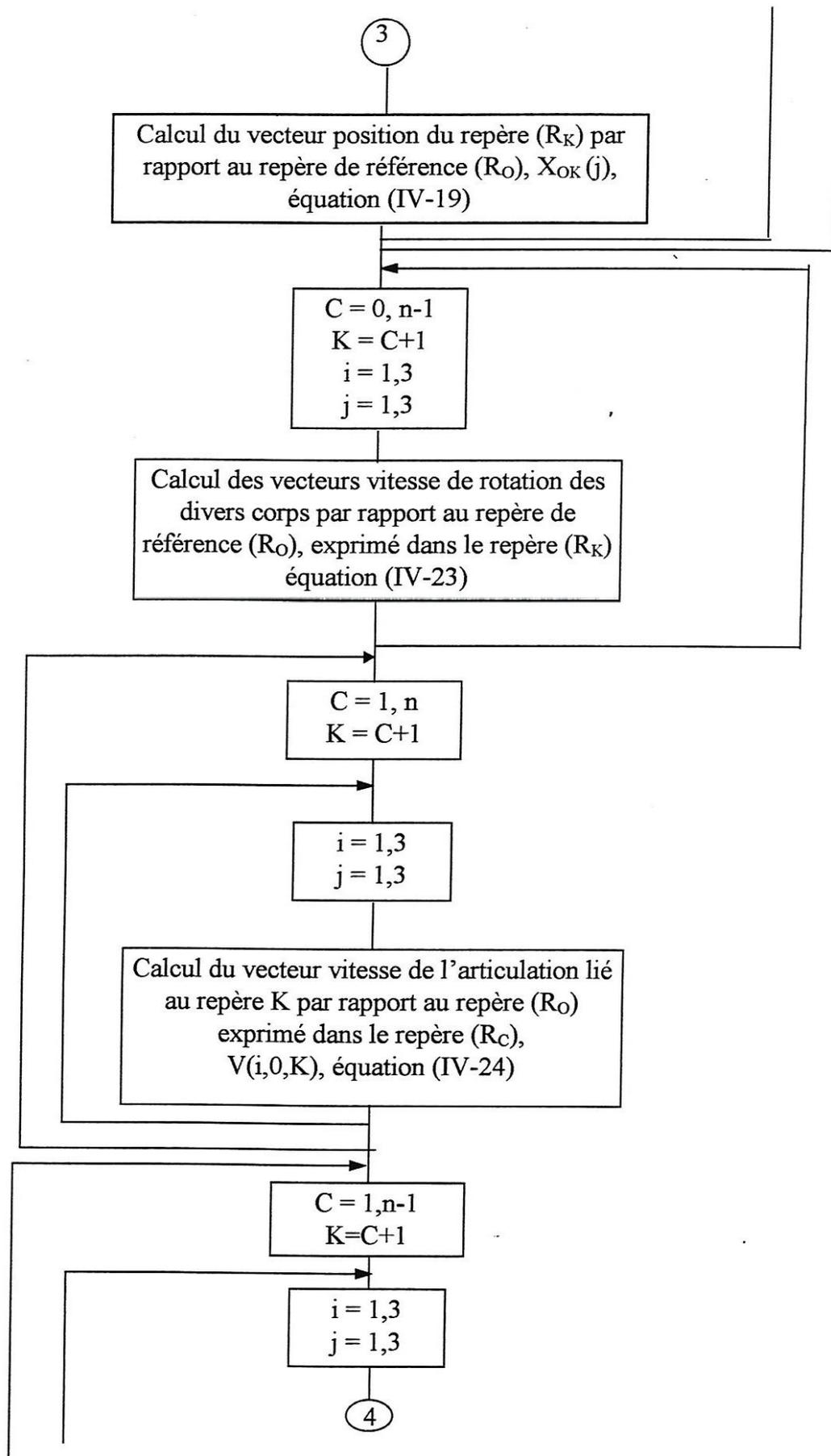
Organigrammes

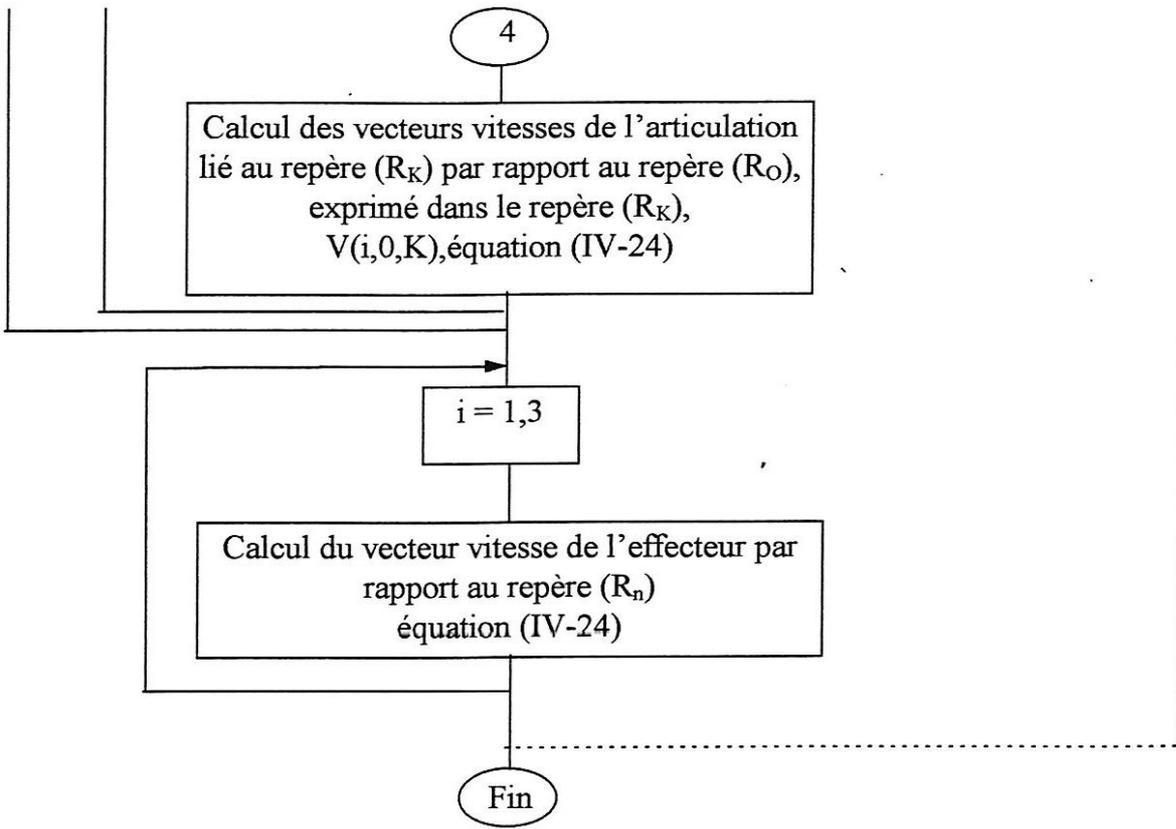
Calcul cinématique d'un bras manipulateur poly-articulé
basée sur les matrices de passage



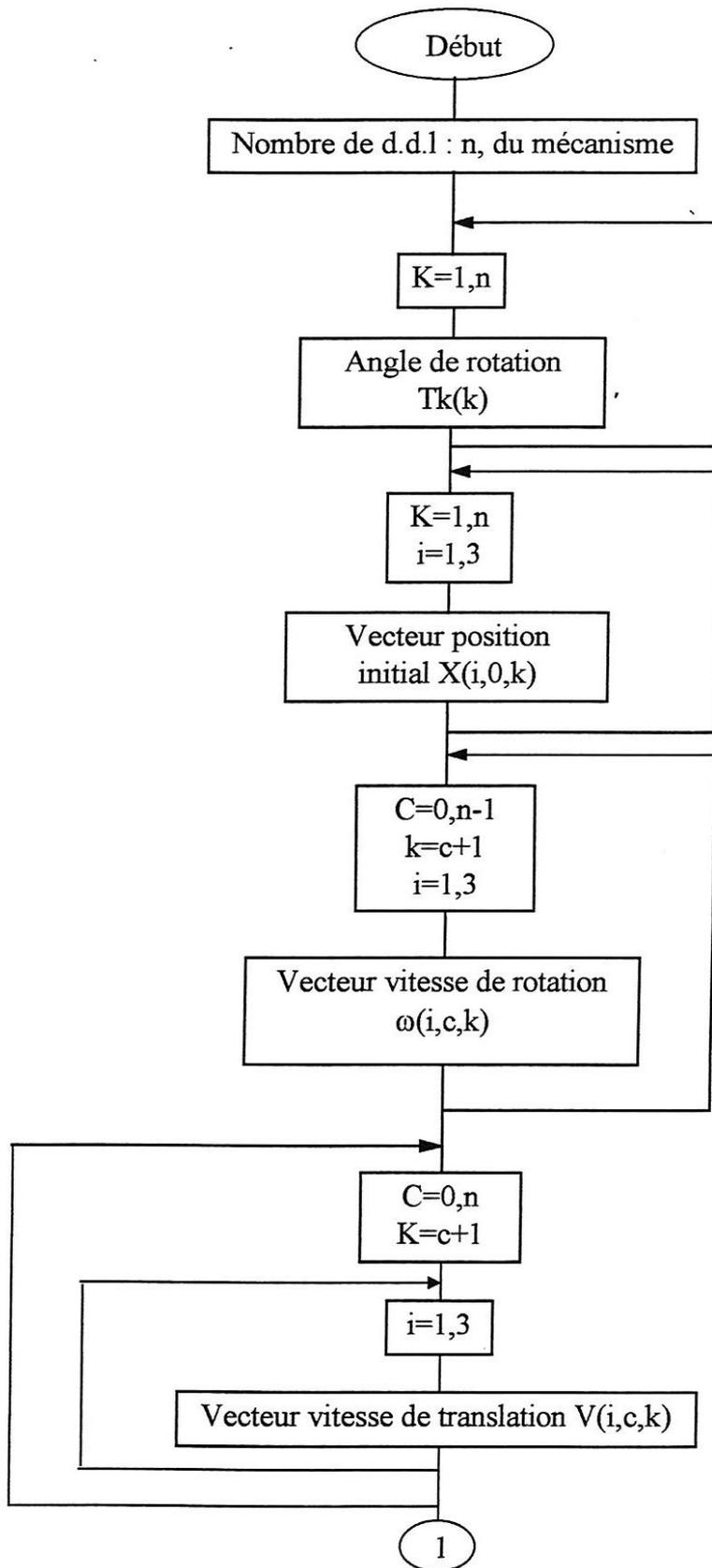


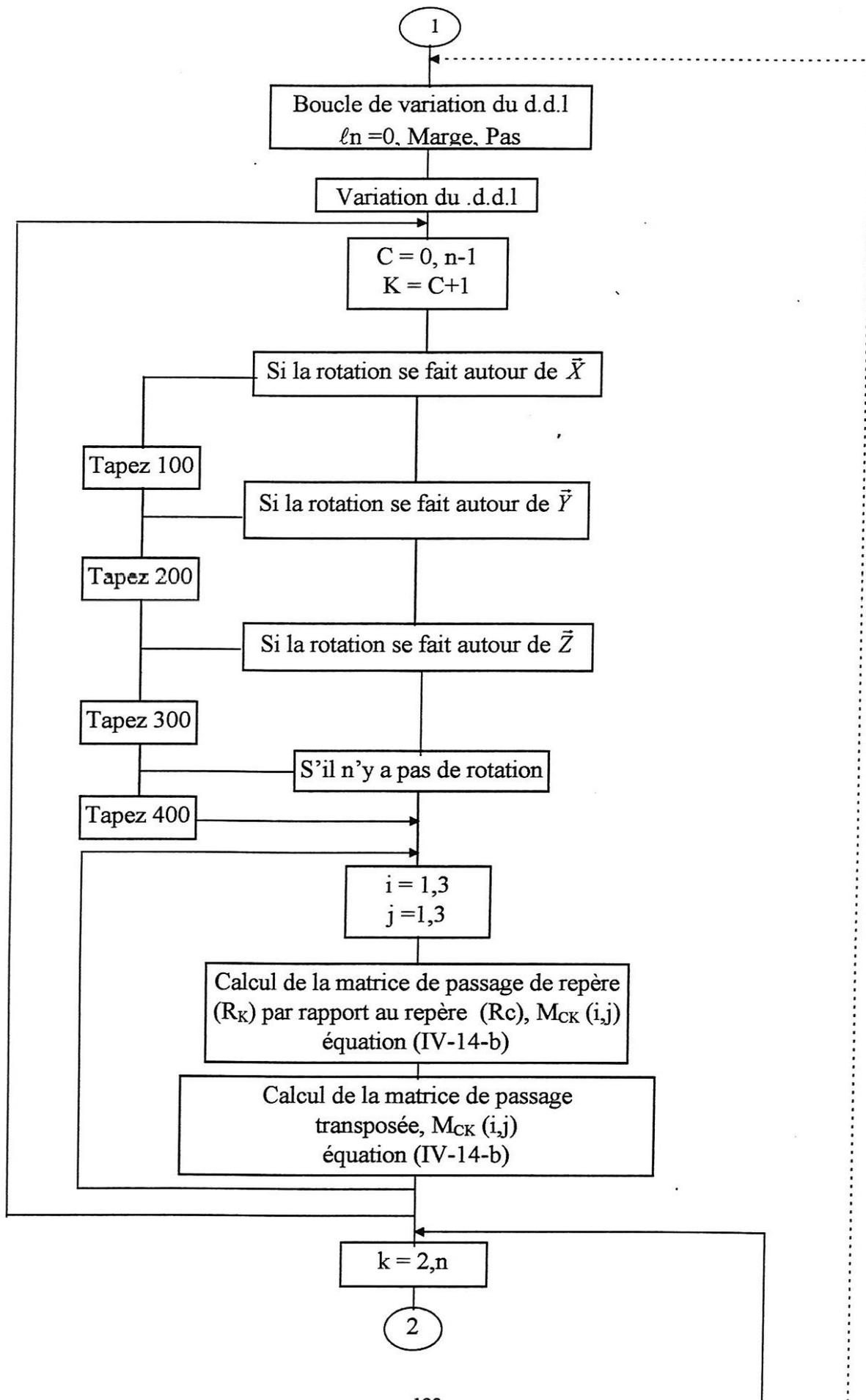


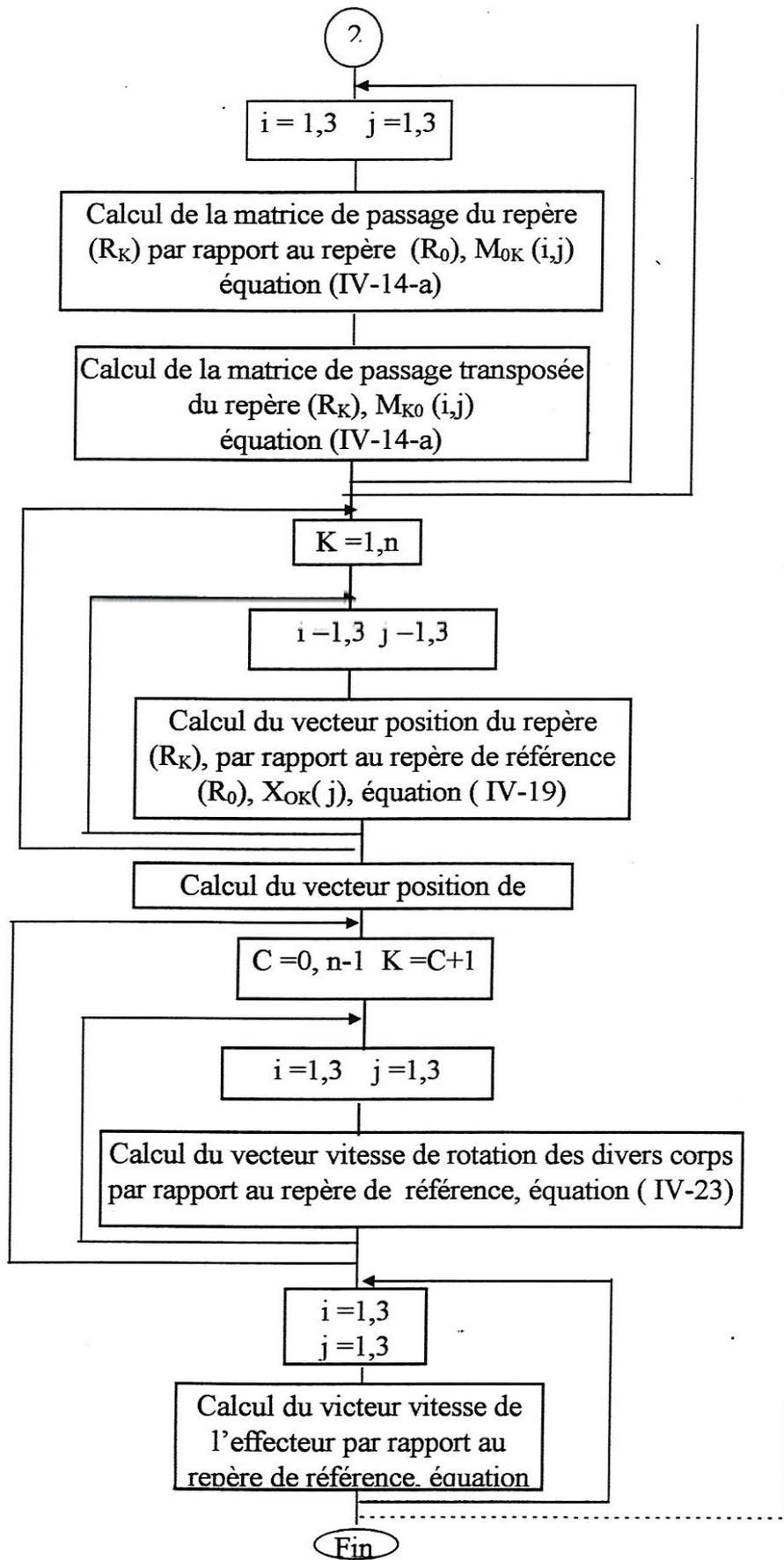




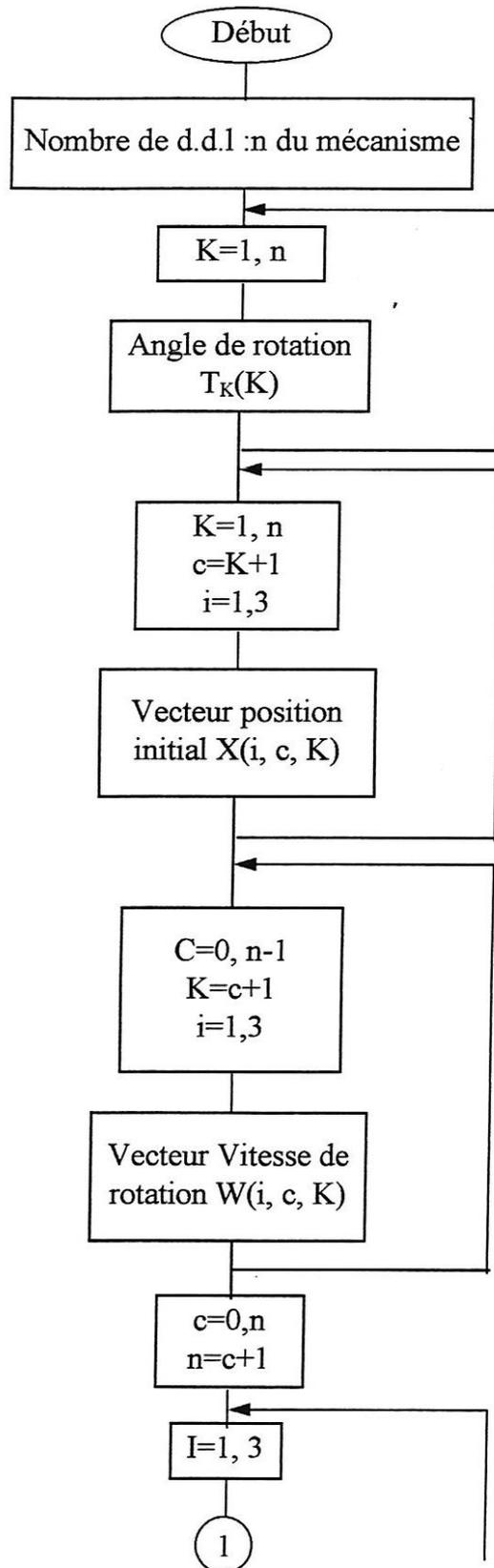
Calcul cinématique d'un bras-manipulateur sphérique basé sur les matrices de passage

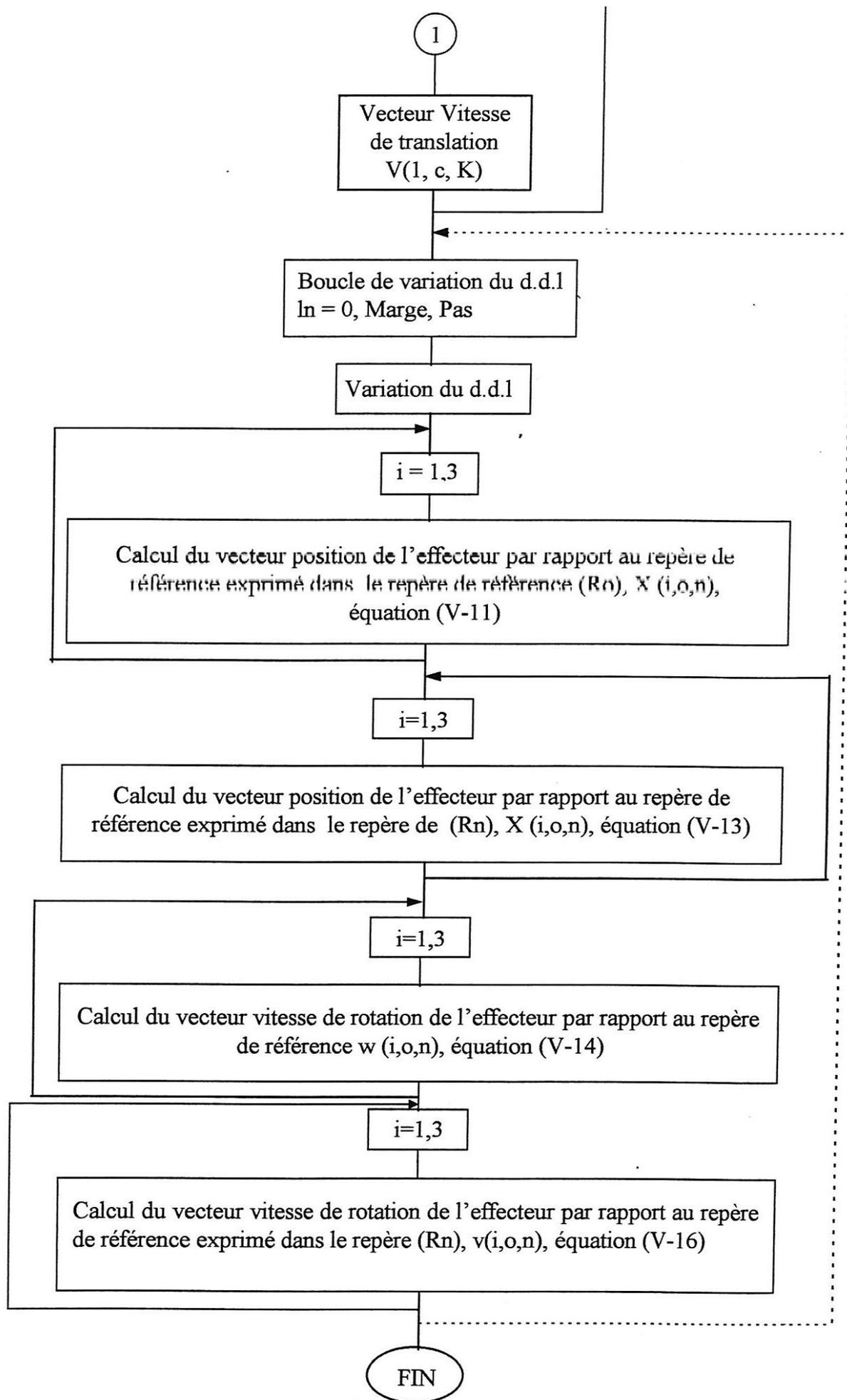




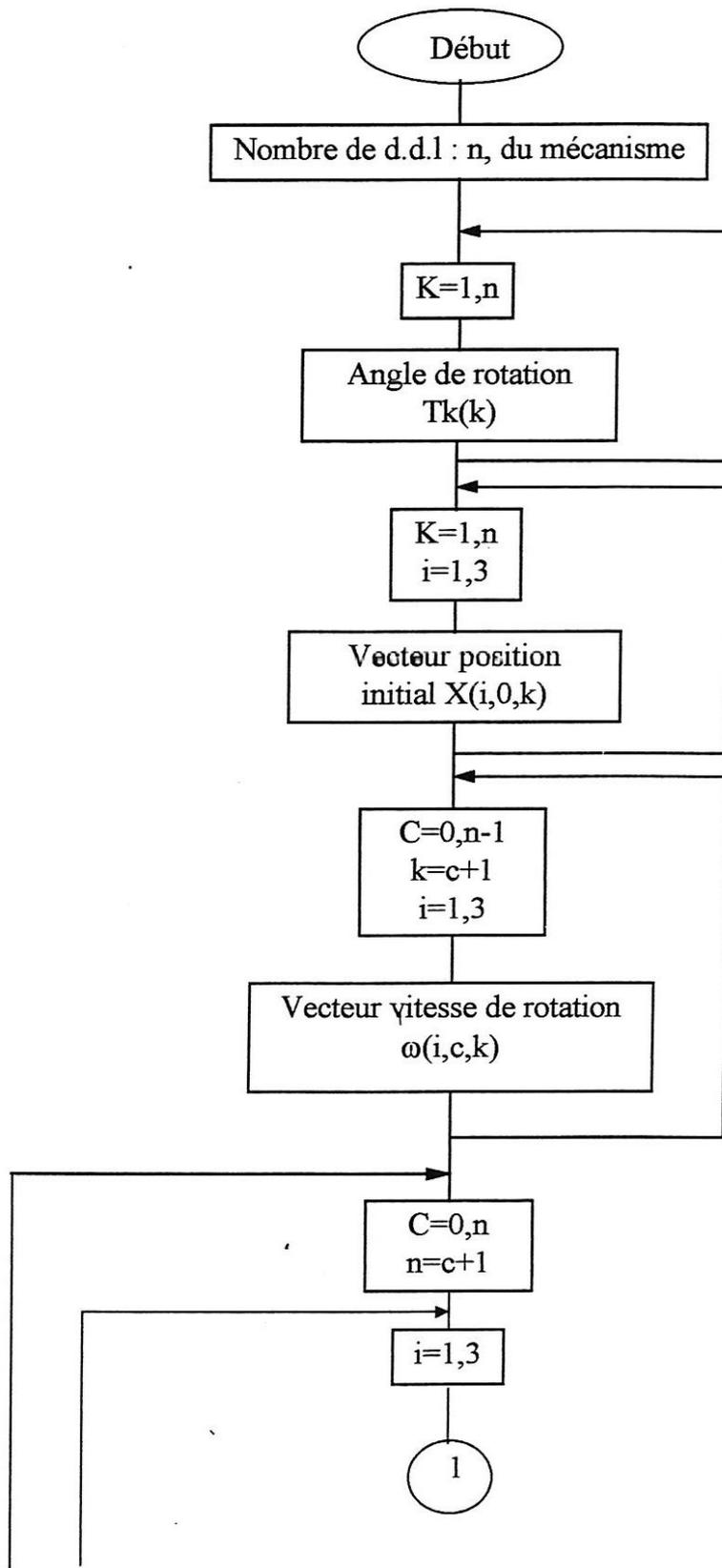


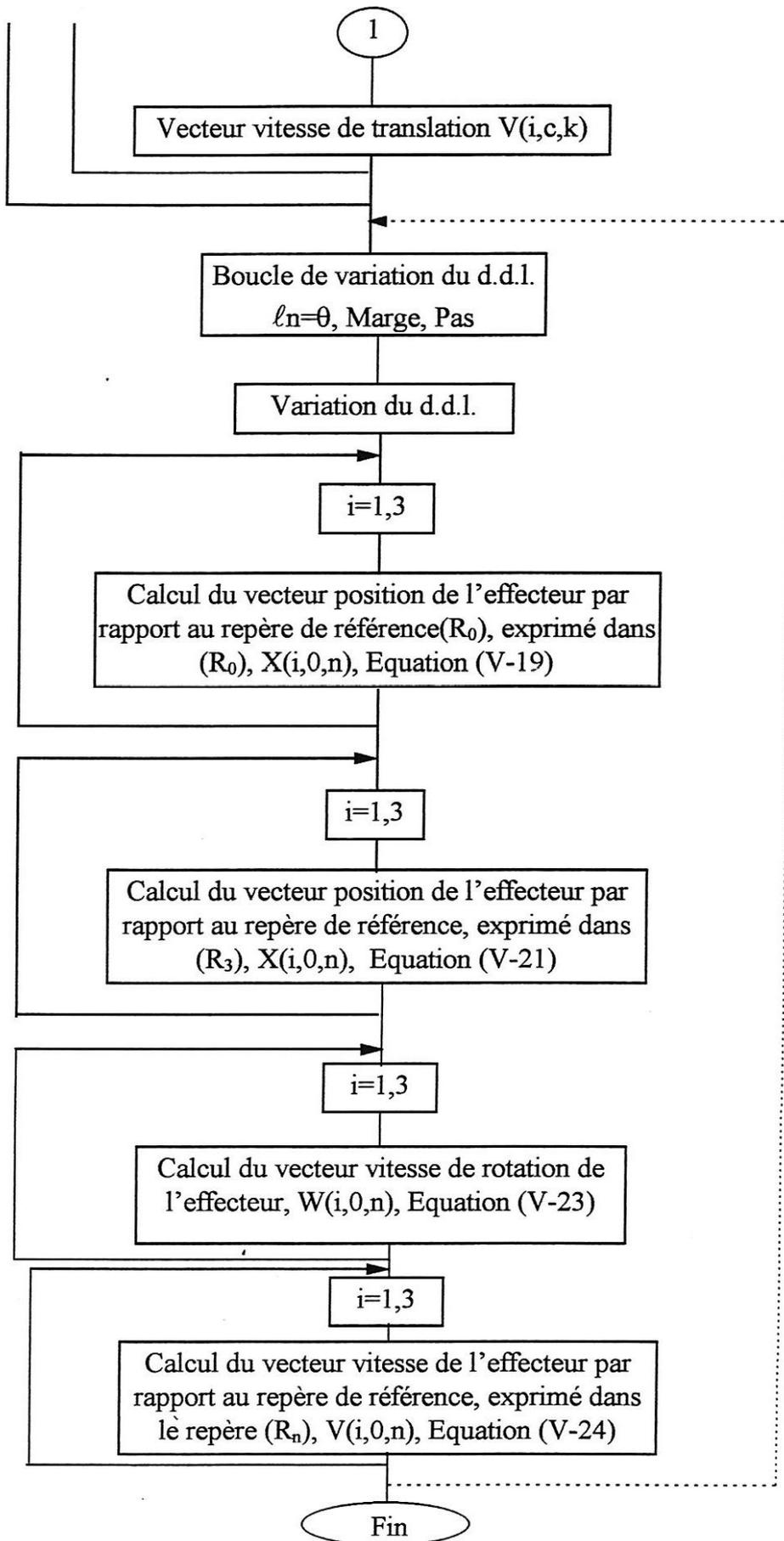
Calcul cinématique d'un bras manipulateur poly-articulé basé sur l'algèbre de LIE





Calcul cinématique d'un bras manipulateur sphérique basé sur l'algèbre de LIE





REFERENCES

- [1]- A. CHERKAOUI & M. BREZINA, "Modèle cinématique pour des bras-manipulateurs contraints". The international journal of robotics Research, Vol.12, No.4, PP.191-198, 1988.
- [2]- ALAIN PRUSKI, "Robotique générale". Edition : Ellipses, 1988.
- [3]- ALI KHATTAB, "Etude des problèmes d'élaboration du modèle géométrique inverse en robotique". Thèse de Magister.
- [4]- A.T. YANG, "On the intrinsic properties of point trajectories in three-Dimensional Kinematics". Journal of Mechanisms, V.107, PP. 401-405, 1985.
- [5]- B.GORLA & M.RENAUD, "Modèles des Robots manipulateurs, application à leur commande". Edition : Cépadues, 1984.
- [6]- CLAUDE VIBET, "Robots, principes et contrôle". Edition : Ellipses, 1987.
- [7]- ETIENNE DOMBRE & WISAMA KHALIL, "Modélisation et commande des robots". Edition : Hermès, 1988.
- [8]- FARID. M. L. AMIROUCHE, "Computational methods in multibody dynamics" Edited by Prentice hall, Englewood Cliffs, New jersey, 1992.
- [9]- F. L.. LITVIN & V. PARENTI CASTELLI & R. H. PHILLIPS, "Manipulators : Execution of prescribed trajectories Special link positions and versions of assembly". Mechanism and machine theory Vol.21, pp.173-185,1986.
- [10]- F. L.. LITVIN & V. PARENTI CASTELLI, " Configurations of robot's manipulators and their identification, and the execution of prescribed trajectories". Part 1: Basic concepts Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 107, pp.170- 178, JUNE 1985.
- [11]- F. L.. LITVIN & ZHANG YI, "Robotic Bevel-gear differential train". The international journal of Robotics research, vol5, No. 2,1986.
- [12]- G. R. PENNOCK & A. T. YANG, "Application of dual-number matrices to the inverse kinematics problem of Robot manipulators". Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 107, pp.201-208, JUNE 1985.
- [13]- G. R. PENNOCK & A. T. YANG, " Instantaneous Kenamatics of Three-Parameter Motions". Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 107, pp.157-162, JUNE 1985.
- [14]- I. ARTOBOLEVSKI, " Théorie des méccnismes et des machines". Edition : Mir. Moscou,1977.

- [15]- JADRAN LENARCIC, "Computing techniques for robots". Edited : Chapman and Hall,1986.
- [16]- J. M. HERVE, "Nouvelle méthodes de conception des mécanismes". Mechanism and machine theory, pp.1-8,1978
- [17]- J. M. HERVÉ, "Analyse structurelle des mécanismes par groupe des déplacements". Mechanism and machine theory Vol.13, pp. 437-450, 1978.
- [18]- J. M. HERVÉ; "Formulation intrinsèque des problèmes de géométrie et cinématique des mécanismes". Point en Robotique, Vol.1, Chap.10, pp. 146-156, 1978.
- [19]- JIM Z. C. LAI & DANIEL YANG, "An efficient motion control Algorithm for Robots with wrist singularities". Transactions on Robotics and Automation, Vol.6, No.1, pp.113-117, February 1990.
- [20]- KRISHNA C. GUPTA, "A note on position analysis of manipulators". Mechanism and Machine Vol.19, No.1, PP. 5-8,1984.
- [21]-D. J. TODD, "Fundamentals of Robot technology : an introduction to industrial robots, teleoperators and robot vehicles". Edited by Anchor Brendon Ltd, 1986.
- [22]- M.BAUSSET, "Mécanique des systèmes de solides". Edition : MASSON, 1990.
- [23]-M. GIORDANO, " Analyse géométrique des mécanismes à l'aide d'Angles d'EULER duaux". Mechanism and machine theory Vol. 26 , pp. 403-414,1991.
- [24]- MOSHE SHOHAN, "A textbook of Robotics: 1, Basic concepts". Edited : Chapman and Hall,1987.
- [25]- PHILIPPE COIFFET, "La robotique, Principes et application". Edition : Hermès, 1986.
- [26]- PHILIPPE COIFFET, "Les robots, Modélisation et commande". Edition : Hermès,1981.
- [27]- RICHARD P.PAUL & CHARLES N.STEVENSON, "Kinematics of robot wrists". The international Journal of Robotics research, V.2, No.1, pp. 31-38, Spring 1983.
- [28]- RICHARD P.PAUL, " Robot Manipulators : Mathematics, programming and control". Edited by The Mit Press Cambridge, series in Artificial Intelligence, MAI 1981.
- [29]- SAIDOUNI TARIK, "Etude critique et classification des méthodes de description des robots manipulateurs". D E A de robotique, laboratoire de robotique de Paris, SEPTEMBRE 1990.

ملخص المذكرة

إن الإنسان الآلي عبارة عن جملة ميكانيكية منفصلة، عملي قبل كل شيء. إن إنشاء التصميم الميكانيكي لإنسان آلي يمكن تصوره شيء سهل التطبيق. في الحقيقة، يتعلق الأمر بصعوبة أساسية معقدة إذ يجب أن نأخذ بعين الاعتبار ليس فقط الإمكانيات الميكانيكية للتطبيق، يمكن في نفس الوقت إمكانيات تطبيق تحكم يمر عبر مثال رياضي. هاته الأخيرة تؤثر بقوة على التركيبة الميكانيكية إذا كنا نريد الوصول إلى نجاعة أكثر.

من أجل ذلك، إهتمنا من خلال هذه الدراسة بتطبيق مثالين تحكم مختلفين لذراع آلية على ميكانيزمات مفتوحة ومغلقة ثم مقارنة النتائج للحصول على المثال الأكثر نجاعة. في البداية، حاولنا تقديم دراسة ناقدة حول مختلف طرق التحكم للسلاسل الحركية الموجودة، والتي من بينها إختارنا طريقتين.

الطريقة الأولى الأكثر شيوعا في مجال الآليات تعتمد على مصفوفات التحويل المتجانس وهي بسيطة نسبيا خاصة للميكانيزمات المفتوحة، أما عن تطبيقها على ميكانيزمات مغلقة فإنها تطرح بعض الصعوبات.

الطريقة الثانية والتي هي باطنية تعتمد على جبر « لي »، رغم الإيجابيات الكثيرة التي تتميز بها خاصة التحول إلى الإنتقالات الصغيرة، لكنها تبقى غير مستغلة جيدا من طرف الباحثين في مجال الآليات. من جهة أخرى لاحظنا بأن تطبيقها سهل على ميكانيزمات مغلقة ويعطي نتائج مرضية.

أخيرا، لاحظنا كيف أن قوانين رياضية مختلفة (مصفوفات التحويل وجبر "لي") تتكامل فيما بينها.

الكلمات الجوهرية:

إنسان آلي، ميكانيزم، ذراع آلية، سلسلة حركية، الحركية، الوضعية، التوجيه، السرعة، مصفوفات التحويل، جبر "لي".

Abstract

A robot is a functional, articulated mechanical system. The conception of the architecture of a mechanical robot may appear to be an easy one. In fact, it is not because we have to take into account the possibility of a mechanical realisation and at the same time the possibility of elaborating a command, which is based on a mathematical model.

The elaboration of the command has a big impact on the mechanical conception and that is why we have proposed two different models of command of a manipulator arm on a closed and opened mechanisms, Then compare the results to decide which one is the best performing model.

First, we have tried to present a critical study on the different methods of the existing cinematically chains of command. Among all of these methods, we have chosen two.

The first one is highly known in the robotics field, which is based on the transformation matrices. It is a simple one for the open mechanism and presents some difficulties for the closed one.

The second one is based on the algebra of **LIE**. This method has many advantages, especially when we are dealing with small displacement.

Finally, we could notice how different mathematical formalisms (passing matrices and Algebra of **LIE** are completing each other.

Key words

Robot, Mechanism, arm-manipulator, Kinematics chain, Kinematics, Position, Orientation, Velocity, Transformation matrix, Algebra of **LIE**.

Résumé

Un robot est un système mécanique articulé, avant tout fonctionnel. La conception d'une architecture mécanique pour un robot peut apparaître un problème assez simple. En réalité, il s'agit d'une difficulté de base très complexe car elle devrait prendre en compte non seulement des possibilités mécaniques de réalisation, mais en même temps les possibilités d'élaboration d'une commande qui passe par celle d'un modèle mathématique. Ces dernières réagissent fortement sur la conception mécanique si on recherche de bonnes performances. C'est pourquoi, nous nous sommes intéressés dans cette étude à l'application de deux modèles différents de commande de bras-manipulateur sur des mécanismes fermés et ouverts, puis comparer entre les résultats pour obtenir le modèle le plus performant.

D'abord, nous avons essayé de présenter une étude critique sur les différentes méthodes de commande des chaînes cinématique existantes, parmi lesquelles on a choisi deux méthodes.

La première méthode qui est très répandue dans le domaine de la robotique est basée sur la matrice de passage homogène. Elle est relativement simple surtout pour les mécanismes ouverts, quant à son application sur les mécanismes fermés elle présente certaines difficultés.

La deuxième méthode qui est intrinsèque, basée sur l'algèbre de LIE. Malgré de nombreux avantages qu'elle présente, notamment le passage aux déplacements petits, elle demeure non exploitable par les roboticiens. Par ailleurs, on a pu constater que son application sur les mécanismes fermés est facile et donne de bons résultats.

Enfin, on a pu remarquer comment des formalismes mathématiques différents (matrices de passage et l'algèbre de LIE) se complètent entre eux.

Mots clés

Robot, Mécanisme, Bras-manipulateur, Chaîne cinématique, Cinématique, Position, Orientation, Vitesse, Matrice de passage, Algèbre de LIE.