

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE 8 MAI 1945

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention

DU GRADE DE **MAGISTER** EN GENIE MECANIQUE

Option : **Construction Mécanique**

Par

Mr. **MADI BELGACEM**

**CONTROLE D'ATTITUDE D'UN SATELLITE
RIGIDE GOUVERNE PAR DES RETROFUSEES**

Soutenu le : **23 MAI 1999** Devant le Jury :

Président	: N. OUALAA	M.C.	C.U. Guelma.
Rapporteur	: H. TEBBIKH	M.C.	C.U. Guelma.
Examineur	: N. DOGHMANE	M.C.	U. de Annaba.
Examineur	: M. DJ. YOUNSI	DOCTEUR	C.U. Guelma.

DEDICACE

A mes parents
A mes frères et surtout SAFI

A mes encadreurs M^{rs} :
PHAM VAN TYU et H.TEBBIKH

A tous mes amis

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur H. Tebbikh, sous directeur chargé de la Post-Graduation et de la recherche scientifique à l'Institut de Génie électrique, pour m'avoir proposé le sujet de cette thèse, pour ses conseils qu'il m'a souvent donné et de m'avoir faciliter énormément la tâche lors de la rédaction.

Je remercie également Monsieur N. Oualaa, de l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury, ainsi qu'à Messieurs N. Doghmane, Professeur à l'Université de Annaba, et M. DJ. Younsi, Docteur au C.U. Guelma, d'avoir accepter de juger le travail de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Monsieur Stefano Di Gennard, Ingénieur au Laboratoire de Génie électrique à l'Université de l'Aquila (Italy) pour m'avoir envoyer certains Articles récents sur les différents problèmes posés dans ce domaine.

Mes sincères remerciements vont également :

A tout le personnel des bibliothèques de l'Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs Electriciens de Grenoble, de l'Université de Annaba ainsi que celle du centre universitaire 8 mai 45 Guelma de m'avoir faciliter la tâche pendant toute la période de la recherche.

A M^{lle} L. Khalfallaoui responsable du centre de calcul de Génie électrique pour sa disponibilité à chaque fois que j'en eu besoin.

A Monsieur Boukharouba A/Hak de m'avoir aider à comprendre certains phénomènes qui ne sont pas conformes avec ma spécialité.

Je garde aussi un bon souvenir de mes amis de première année Biologie à l'Université de Annaba qui mon hébergé durant toutes les périodes des déplacements et surtout mon petit frère SAMOU.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail de recherche et plus particulièrement : Makhlouf, professeur à l'université de Annaba, spécialiste en système dynamique et commande optimale.

RESUME

Dans ce travail , nous avons étudié la contrôlabilité et la stabilisation par retour d'état du mouvement d'un satellite rigide gouverné par des rétrofusées. Le modèle mathématique décrivant complètement un tel mouvement est définie par G. Meyer dans [ME1.66] et [ME2.71].

Concernant le premier problème, nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité en considérant les cas où le dispositif de commande est assuré par une seule ou deux rétrofusées. Une analyse de ses conditions permet de donner une description complète du positionnement des rétrofusées conduisant à un système contrôlable. Ainsi, nous avons montré qu'il suffit d'un seul couple de rétrofusées pour avoir un système contrôlable.

Nous avons, ensuite, étudié le problème de stabilisation locale par retour d'état de la vitesse angulaire d'un satellite rigide gouverné par une ou deux rétrofusées. Nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation locale du système en se basant sur la théorie des variétés invariantes et en particuliers centrales. Pour valider ces résultats théoriques, nous avons procédé à des simulations numériques. Pour l'aspect global, nous avons montré, en appliquant la théorie développée par H. TEBBIKH dans [TE2.89], qu'il existe des retours d'état stabilisateurs pour le problème considéré.

Mots clés :

Systèmes non linéaires, Corps rigides, Equations d'Euler, Vitesse angulaire, Retour d'état, Variétés centrales, Contrôlabilité, Stabilisation.

NOTATIONS UTILISEES

- A : Matrice ($n \times n$).
- B : Matrice ($n \times m$), constante, décrivant la position des rétrofusées.
- E : Energie cinétique.
- E^c : Espace propre correspondant aux valeurs propres nulles.
- I : Matrice principale d'inertie.
- I_d : Matrice identité.
- k : Matrice Gain, caractérisant les retours d'état.
- M : Variété différentielle.
- D : Famille de champs de vecteurs sur la variété M.
- L : Algèbre de Lie.
- L(D) : Algèbre de Lie engendré par tous les éléments de D.
- R(t) : matrice des cosinus directeurs décrivant l'orientation du satellite à l'instant t.
- SO(3) : Groupe des matrices orthogonales d'ordre 3 et de déterminant 1.
- ω : Vecteur vitesse angulaire.
- S(ω) : Matrice de SO(3), associée au champs d'application antisymétrique.
- Q(ω) : Forme quadratique.
- $T_x M$: Espace tangent en x à M.
- u : Vecteur commande.
- v(x) : Voisinage de Zéro.
- V_{x_0} : Voisinage de x_0 .
- V(x) : Fonction de Lyapunov.
- W^c : Représentation graphique de la variété centrale.
- x : vecteur d'état.
- $x(t, x_0)$: Solution du système issue de x_0 à $t = 0$.
- $x(t, x_0, u)$: Solution associé au contrôle u issue de x_0 en $t = 0$.
- X, Y : Deux champs de vecteurs sur la variété M.
- [X, Y] : Crochets de Lie X et Y.
- θ : Angle de rotation propre.
- span : Espace engendré par un champs de vecteurs.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
-----------------------------	---

Chapitre 1 : CONTROLABILITE DU MOUVEMENT D'UN SATELLITE RIGIDE GOUVERNE PAR UNE OU DEUX RETROFUSEES

1. Introduction	6
2. Préliminaires	7
3. Poisson-stabilité	8
4. Accessibilité	10
5. Conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité	11
6 Conclusion	16

Chapitre 2 : STABILISATION PAR RETOUR D'ETAT DES SYSTEMES NON LINEAIRES

1. Introduction	17
2. Conditions nécessaires de stabilisation locale des systèmes non linéaires	19
3. Conditions suffisantes de stabilisation locale des systèmes non linéaires	20
3.1. Variétés centrales	21
3.2. Variétés centrales et stabilisation	21
4. Conditions suffisantes de stabilisation globale des systèmes non linéaires	25
5. Construction du retour d'état	27
6. Conclusion	30

Chapitre 3 : STABILISATION PAR RETOUR D'ETAT DE LA VITESSE
ANGULAIRE D'UN SATELLITE RIGIDE GOUVERNE PAR
DES RETROFUSEES

1.	Introduction	31
2.	Cas où le satellite est gouverné par deux rétrofusées	31
3.	Cas où le satellite est gouverné par une seule rétrofusée	36
3.1.	Cas où l'action de la rétrofusée est sur un axe d'inertie	36
3.2.	Cas où l'action de la rétrofusée est sur les trois axes d'inertie.	43
3.3.	Conclusion	44
4.	Simulation numérique	45
4.1	Cas où le satellite est gouverné par deux rétrofusées	46
4.1.1.	Analyse des résultats	46
4.2.	Cas où le satellite est gouverné par une seule rétrofusée	51
4.2.1.	Analyse des résultats	51
5.	Conclusion	58
	CONCLUSION GENERALE	59
	BIBLIOGRAPHIE	61
	ANNEXES	67
	Annexe 1 : Equation de mouvement d'un satellite rigide gouverné par des rétrofusées	67
	Annexe 2 : Exemple supplémentaire de retour d'état stabilisant avec Deux rétrofusées	70

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Problématique

Le problème de contrôle d'attitude de satellites est né au cours des années 60 avec la conquête de l'espace. Ces travaux et en particulier ceux de G. Mayer [MA.66] ont conduit, au cours de l'année 1966, au résultat suivant :

Le mouvement d'un satellite est caractérisé par le déplacement de son centre de gravité, qui est celui d'un point matériel dans un champs de forces centrales, et par la position ou l'attitude qu'il occupe par rapport à un référentiel dont l'origine est le centre de gravité et dont les axes occupent des directions que l'on considère approximativement fixes dans l'espace.

On choisit un tel référentiel orthonormé et on note e_1, e_2, e_3 ses axes.

L'attitude du satellite est caractérisée par les positions des axes $E_1(t), E_2(t), E_3(t)$ d'un repère lié au satellite et dont l'origine coïncide avec le centre de gravité. ces axes constituent le repère principal d'inertie.

En d'autres termes, l'attitude du satellite est donnée par la matrice des cosinus directeur et définie par $R(t) = r_{ij}(t)$ ou $r_{ij}(t) = (E_i(t) \bullet e_j)$ ou (\bullet) désigne le produit scalaire ordinaire de R^3 .

Si l'on suppose que le repère lié au satellite est un repère principal d'inertie et si l'on considère le repère e_1, e_2, e_3 galiléen, les principes fondamentaux de la dynamique permet de décrire complètement le mouvement du satellite par les équations suivantes :

$$\frac{dR(t)}{dt} = S(\omega(t)).R(t), \quad (0.1)$$

$$I_1 \cdot \frac{d\omega_1(t)}{dt} = (I_2 - I_3) \cdot \omega_2(t) \cdot \omega_3(t) + I_1 \cdot F_1(t),$$

$$I_2 \cdot \frac{d\omega_2(t)}{dt} = (I_3 - I_1) \cdot \omega_3(t) \cdot \omega_1(t) + I_2 \cdot F_2(t), \quad (0.2)$$

$$I_3 \cdot \frac{d\omega_3(t)}{dt} = (I_1 - I_2) \cdot \omega_1(t) \cdot \omega_2(t) + I_3 \cdot F_3(t).$$

où

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ est la matrice antisymétrique ,}$$

$R(t)$ est un élément de $SO(3)$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre 3 et de déterminant 1,

Les équations (0.2) ou équations d'Euler, décrivent le mouvement du vecteur vitesse angulaire de rotation $(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ dans le repère lié au satellite $E_1(t), E_2(t), E_3(t)$ qui est un repère principal d'inertie.

I_1, I_2, I_3 désignent les moments d'inertie principaux que l'on considère généralement tous distincts et plus particulièrement : $I_1 > I_2 > I_3$.

Le vecteur $(F_1(t), F_2(t), F_3(t))$ représente le moment des forces extérieures appliquées au satellite, les composantes étant prises dans le repère lié au satellite.

Dans le problème qui nous intéresse, ces moments sont créés par des rétrofusées fixées au satellite en émettant du gaz dans les deux sens opposés. Pour un tel couple, le moment des forces extérieures appliquées au satellite peut s'écrire :

$$(F_1(t), F_2(t), F_3(t)) = u(t), (I_1, b_1, I_2, b_2, I_3, b_3), \quad (0.3)$$

où b_1, b_2, b_3 sont des constantes et $u(t)$ désigne une application définie sur $[0, T], T > 0$ non fixé.

Dans le cas où le dispositif est équipé par m couples de rétrofusées, le système d'équations s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &= S(\omega(t)).R(t), & (0.1) \\ \frac{d\omega_1(t)}{dt} &= \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1}\right).\omega_2(t).\omega_3(t) + \sum_{k=1}^m u_k(t) \cdot \begin{bmatrix} b_1^k \\ b_2^k \\ b_3^k \end{bmatrix} \\ \frac{d\omega_2(t)}{dt} &= \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2}\right).\omega_3(t).\omega_1(t) \\ \frac{d\omega_3(t)}{dt} &= \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3}\right).\omega_1(t).\omega_2(t) \end{aligned} \quad (0.4)$$

Le système (0.4) peut être représenté sous la forme condensée suivante :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = Q(\omega(t)) + \sum_{k=1}^m u_k(t) . b^k, \quad (0.5)$$

où $B = (b_{ij})$ est une matrice $3 \times m$, constante, décrivant la position des rétrofusées.

$$Q(\omega(t)) = (I_{23} . \omega_2(t).\omega_3(t), I_{31} . \omega_3(t).\omega_1(t), I_{12} . \omega_1(t).\omega_2(t))^T,$$

avec $I_{23} = \frac{I_2 - I_3}{I_1}$, $I_{31} = \frac{I_3 - I_1}{I_2}$, $I_{12} = \frac{I_1 - I_2}{I_3}$.

Le système (0.1) et (0.4) est dit contrôlable si pour tout couple d'états (R, ω) , et (R', ω') de $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ il existe une commande $u(t)$ transférant (R, ω) en (R', ω') .

On dit que le mouvement de rotation du satellite est asymptotiquement stabilisable, s'il existe un retour d'état $u(t)$ tel que $\forall \omega(0), \omega(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$

Le problème est de calculer des retours d'états qui assurent la contrôlabilité du système ainsi que sa stabilisation asymptotique et cela dans les deux cas où le dispositif est équipé d'une seule ou deux rétrofusées.

Recherche Bibliographique

La recherche bibliographique que nous avons menée sur le sujet nous a conduit à la synthèse suivante:

Jusqu'au années 80, on se contentaient des techniques de commandes traditionnelles faisant intervenir trois paires de rétrofusées et possédant à des contrôles par rotation successives au tour des trois axes d'inertie. Parmi les derniers résultats sur ce sujet, nous mentionnons l'étude de BONNARD dans [BO3.81] sur la contrôlabilité des systèmes non linéaires dont les résultats obtenus ont été appliqué au problème contrôle d'attitude d'un satellite rigide gouverné par des rétrofusées [BO4.82]. Il a montré dans son étude que pour décrire de façon complète une loi de commande, on doit faire recours au problème de contrôle optimal.

Dans le prolongement de ces travaux, H. TEBBIKH, dans [TE2.89] et [TE3.95], a étudié la contrôlabilité des systèmes polynomiaux homogènes et en particulier quadratiques.

Pour le problème de stabilisation, parmi les études les plus marquantes, nous citons les travaux de WILSON [WI.67], dans lesquels il a étudié la stabilité asymptotique, basés sur la théorie de LYAPUNOV [ZU.64]. Le problème crucial pour étudier la stabilité asymptotique est la construction d'une fonction de Lyapunov. Cette difficulté est indiquée par le résultat de ARNOLD [AR1.74] qui montre implicitement que : « Même si un champs de vecteurs est polynomial, il n'existe pas de conditions algébriques sur les coefficients de ce champs de vecteurs pour étudier la stabilité asymptotique ». Notamment, une fonction de Lyapunov pour un champs de vecteurs n'est pas forcément polynomiale. Ce résultat est lié aux problèmes des cycles pour une équation différentielle plan qui n'est pas soluble algébriquement.

En 1976, LASSALLE [LA.76] a présenté une étude permettant d'obtenir des conditions nécessaire et suffisante de stabilisation des systèmes non linéaires.

En se basant sur l'étude théorique précédente, QUINN et JURDJEVIC [GB.79] généralise ses résultats pour les systèmes non linéaires à m entrées.

En 1981, CARR [CA.81] introduit la théorie des variété centrales, dans un contexte plus générale, qui permet d'analyser le comportement topologique d'une équation différentielle au voisinage de la position d'équilibre. Les difficultés pour résoudre le problème sont de deux ordres : complexité des calculs et d'analyse de la stabilité locale dans la variété centrale.

Ces résultats ont été utilisées par H. TEBBIKH dans [TE.2.89] pour étudier le problème de stabilisation des systèmes polynomiaux homogènes et en particulier quadratiques

Plan de la thèse

Après avoir présenté le problème et les résultats existants, il convient maintenant de préciser le contenu de cette thèse.

Dans ce travail, nous avons essayé de résoudre ce problème de la façon la plus complète possible en se basant sur la théorie de la commande des systèmes dynamiques non linéaires développée lors des quinze dernières années. Les résultats théoriques obtenus de l'analyse de la stabilité sont simulé numériquement afin de vérifier leur validité et de voir le comportement dynamique du système.

Pour arriver à notre objectif, nous avons réparti notre travail en trois chapitre :

Dans le premier chapitre, nous avons étudié le problème de contrôlabilité du système d'équations (0.1) et (0.4), décrivant le mouvement d'un satellite rigide.

Nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité lorsque le dispositif de commande est assuré par une seule et deux rétrofusées. Une analyse de ses conditions permet de donner une description complète de positionnement des rétrofusées.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les résultats les plus récents concernant le problème de stabilisation locale et globale des systèmes non linéaires.

Pour l'aspect local, l'étude standard consiste à utiliser la théorie des variétés invariantes et en particulier centrales introduites par J. Carr [CA.81] et qui consiste à :

- (i) Chercher un retour d'état qui permet de fixer localement cette variété centrale de telle sorte qu'elle soit exponentiellement attractive.
- (ii) Chercher une variété centrale $y = h(x)$, tel que l'origine soit localement stable pour la dynamique sur cette variété.

Pour l'aspect global, la théorie la plus récente est celle développée par H. TEBBIKH dans [TE2.89] qui consiste à construire une fonction de Lyapunov globalement attractive par l'origine.

En fin de ce chapitre et comme application de la théorie locale, nous avons présenté une méthode pratique de construction du retour d'état stabilisateur.

Dans le chapitre 3, nous avons utilisé la théorie développée en chapitre 2 pour étudier le problème de stabilisation locale et globale par retour d'état de la vitesse angulaire d'un satellite rigide gouverné par une seule et deux rétrofusées.

La simulation numérique dont le but est de vérifier la validité des résultats théoriques obtenus de l'étude de la stabilité et de voir le comportement dynamique du système étudié est proposée en boucle fermée. Elle consiste à résoudre numériquement un système d'équations différentielles dans l'espace d'état. La méthode que nous avons jugé la plus adaptée pour notre problème est celle de Runge-Kutta d'ordre supérieur.

CHAPITRE 1

CONTROLABILITE DU MOUVEMENT D'UN SATELLITE RIGIDE GOUVERNE PAR UNE OU DEUX RETROFUSEES

CHAPITRE 1

CONTROLABILITE DU MOUVEMENT D'UN SATELLITE RIGIDE GOUVERNE PAR UNE OU DEUX RETROFUSEES

1. INTRODUCTION

Considérons le système d'équations décrivant le problème de contrôle d'attitude d'un satellite rigide gouverné par des rétrofusées, suivant :

$$\frac{dR(t)}{dt} = S(\omega(t)).R(t), \quad (1.1)$$

$$I. \frac{d\omega(t)}{dt} = S(\omega(t)).I.\omega(t) + \sum_{i=1}^m b_i .u_i(t), \quad (1.2)$$

où : $I = \text{diag} (I_1, I_2, I_3)$ est la matrice d'inertie,

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \in \mathcal{R}^3$ est le vecteur vitesse angulaire,

$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ est une matrice constante de $\mathcal{R}^{3 \times m}$,

$u_i(t)$ est une application définie sur $[0, T]$, $T > 0$ non fixé ,

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ est la matrice antisymétrique.}$$

Le système décrit par les équations (1.1) et (1.2) est dit contrôlable si pour tout couple d'états $(R, \omega), (R', \omega')$ de $SO(3) \times \mathcal{R}^3$ il existe une commande $u(t)$ qui permet le transfert de (R, ω) en (R', ω') .

L'objet de ce chapitre est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité du système d'équations (1.1) et (1.2) dans le cas où le dispositif de commande serait assuré par une seule ou deux rétrofusées.

2. PRELIMINAIRES

Dans cette section, nous rappelons certaines définitions préliminaires sur les outils mathématiques nécessaires à l'étude du problème tels que les variétés, le crochet de Lie.

Une variété M de dimension q de \mathfrak{R}^n est une partie de \mathfrak{R}^n définie par $M = \{x \in \mathfrak{R}^n, F(x(t)) = 0\}$ où $F(x(t))$ est une application analytique de \mathfrak{R}^n dans \mathfrak{R}^{n-q} et le rang de la matrice jacobienne de $F(x)$ en x , $(\frac{\partial F}{\partial x})(x)$ est $(n-q)$ en tout point x de M .

L'espace tangent en x à M , noté $T_x M$, est le sous-espace vectoriel de dimension q de \mathfrak{R}^n défini par $T_x M = \{v \in \mathfrak{R}^n, (\frac{\partial F}{\partial x})(x).v = 0\}$.

Soit $X : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ une application analytique. Associons à cette application une équation différentielle sur \mathfrak{R}^n : $\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t))$. On appelle champ de vecteurs analytique X de \mathfrak{R}^n l'application analytique $X : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$.

On dit que X est un champ de vecteurs sur la variété M si $X(x(t))$ appartient à l'espace tangent $T_x M$, $\forall x \in M$.

Soit $\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t))$ une équation différentielle sur \mathfrak{R}^n et $x(t, x_0)$ la solution de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $x(0, x_0) = x_0$. Alors, si $x_0 \in M$, on dit que la solution $x(t, x_0)$ appartient à la variété M .

Un système asservi sur M est une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), u(t)),$$

où $u(t)$ est une application de \mathfrak{R}^n et $F(x(t), u(t))$ est un champ de vecteurs sur M .

Soit X et Y deux champs de vecteurs sur \mathfrak{R}^n . Le crochet de lie de X et de Y est un nouveau champ de vecteurs, notée $[X, Y]$, défini en coordonnées locales $x \in M$, par la relation :

$$[X, Y](x) = \frac{\partial X}{\partial x}(x).Y(x) - \frac{\partial Y}{\partial x}(x).X(x).$$

On appelle algèbre de lie, notée L , l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur la variété M muni de la loi de crochet de lie.

Soit D une famille de champ de vecteurs sur M . On désigne par $L(D)$ l'algèbre de lie engendrée par D . $L(D)$ est l'espace vectoriel engendré par tous les crochets formés à partir d'éléments de D .

Soit $x \in M$, l'ensemble $L(D)(x) = \{V(x); V \in L(D)\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent en x à M . Le rang au point x de la famille D est par définition la dimension de cet espace vectoriel .

3. POISSON-STABILITE

Dans cette section, nous introduisons la notion de Poisson-stabilité que nous appliquons sur la partie libre du système d'équations différentielles (1.1) et (1.2) définie par le système (1.3) et évoluant sur l'espace $SO(3) \times \mathcal{R}^3$:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= S(\omega).R , \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) . \omega_2 . \omega_3 , \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \right) . \omega_3 . \omega_1 , \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) . \omega_1 . \omega_2 . \end{aligned} \tag{1.3}$$

3.1. Définition

Soit $\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t))$ une équation différentielle sur une variété M . On suppose que la solution $x(t, x_0)$ issue de x_0 à $t = 0$ est définie $\forall t \geq 0$.

On dit que x_0 est stable au sens de Poisson si $\forall T > 0$ et $\forall V$ voisinage de x_0 , il existe $t_1 \geq T$ tel que $x(t_1, x_0) \in V$.

3.2. Proposition

L'ensemble des points Poisson-stables du système libre (1.3) est dense dans $SO(3) \times \mathcal{R}^3$.

Preuve :

Les équations d'Euler possèdent deux intégrales premières qui expriment :

- la conservation de l'énergie cinétique :

$$2E = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} ,$$

- la conservation de la norme du moment cinétique :

$$\| M \|^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 .$$

Les trajectoires évoluent sur des ellipsoïdes et sur chaque ellipsoïde toutes les trajectoires exceptées 8 trajectoires particulières sont périodiques de période supérieure à zéro [AR3.76].

Soit (R_0, ω_0) un élément de $SO(3) \times \mathfrak{R}^3$ et l'on suppose que la trajectoire $\omega(t, \omega_0)$ issue de ω_0 est périodique de période $T > 0$.

On va montrer, dans ce qui suit, que le point (R_0, ω_0) est stable au sens de Poisson .

L'équation différentielle $\frac{dR(t)}{dt} = S(\omega(t), \omega_0(t)).R(t)$ s'interprète comme une équation différentielle matricielle dont les coefficients sont périodiques de période T .

Notons $R(t, t_0)$ la solution de cette équation différentielle telle que $R(t_0, t_0) = I_d$ où I_d désigne la matrice identité d'ordre 3.

La solution $R(t, t_0)$ issue en $t = 0$ de $R(0, t_0) = R_0$ s'écrit $R(t, R_0) = R(t, 0).R_0$. D'autre part, on peut vérifier que $R(t, t_0) = R(t, t_1).R(t_1, t_0)$ et $R(t+T, t_0+T) = R(t, t_0)$, donc en particulier $R(nT, 0) = R^n(T, 0); \forall n \in \mathbb{N}$.

$R(T, 0)$ est une matrice de rotation de \mathfrak{R}^3 , elle est donc caractérisée par un axe H (de même direction que le moment cinétique) et par un angle θ .

Selon θ , deux cas sont distingués :

- Si $\frac{\theta}{2\pi}$ est rationnel alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $R^n(T, 0) = I_d$.
- Si $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel alors $\{R^n(T, 0); n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le groupe de toutes les rotations d'angle θ .

Donc, dans les deux cas il existe une suite croissante n_k d'entiers tendant vers $+\infty$ tel que la limite de $R(n_k T, 0)$, quand $n_k \rightarrow +\infty$, est égale à I_d .

Puisque $R(t, t_0) = R(t, 0).R_0$, la suite $R(n_k T, t_0)$ converge vers R_0 .

On a bien montré que le point (R_0, ω_0) est stable au sens de Poisson, d'où l'assertion \diamond .

3.3. Remarque

Le résultat ci-dessus est une conséquence du théorème de Poincaré-Hopf [GO.69] sur les propriétés de récurrence des trajectoires d'un système Hamiltonien sur un espace compact.

4. ACCESSIBILITE

Considérons sur \mathfrak{R}^n , le système asservi suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), u(t)), \quad (1.4)$$

où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t)$ est une application définie sur $[0, T]$, $T > 0$ non fixé et à valeurs dans une partie U de \mathfrak{R}^n et F une application analytique définie sur \mathfrak{R}^{n+p} et à valeurs dans \mathfrak{R}^n .

Notons $x(t, x_0, u)$ la solution de (1.4) associée au contrôle u issue en $t = 0$ de x_0 .

4.1. Définition

On dit qu'un point $x \in \mathfrak{R}^n$ est accessible à x_0 ou encore x_0 est recalable en x s'il existe une commande u et un temps $t > 0$ telle que $x(t, x_0, u) = x$.

4.2. Définition

On dit que (1.4) est contrôlable sur une variété M de \mathfrak{R}^n si et seulement si $\forall x_0$ et $x \in M$, x est accessible à x_0 .

5. CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES DE CONTROLABILITE

Dans cette section, nous allons caractériser la contrôlabilité du système asservi décrit par les équations (1.1) et (1.2), décrivant le problème de contrôle d'attitude d'un satellite rigide, en considérant les deux cas où le satellite est gouverné par une seule ou deux rétrofusées.

5.1. Proposition

Considérons le système d'équations (1.1) et (1.2) sous la forme suivante :

$$\frac{dx}{dt} = Q(x) + \sum_{k=1}^m G_k \cdot u_k, \quad (1.5)$$

où $Q(x) = \{f(\omega), S(\omega) \cdot R\}$, $G_k = (g_k, 0)$ avec $g_k = \Gamma^{-1} \cdot b_k$, $f(\omega) = \Gamma^{-1} \cdot S(\omega) \cdot I \cdot \omega$ et $u_k(t)$ une application définie sur $[0, 1]$, $\Gamma > 0$ non fixé.

Le système (1.5) est contrôlable si et seulement si :

$$L(x) = \{X(x) ; X \in L\} = T_x M ; \forall x \in M,$$

où L est l'algèbre de lie engendré par le champs de vecteurs \mathfrak{R}^n , Q , b^1 , ..., b^m , et $T_x M$ l'espace tangent en x à M , alors :

Preuve :

La proposition 3.2 monte que l'ensembles des points poisson-stables est dense dans M pour la partie libre du système .

Sachant que les conditions nécessaires et suffisantes d'accessibilité du système à tout point $x \in M$ [KH.77] sont :

$$L(x) = \{X(x) ; X \in L\} = T_x M ; \forall x \in M,$$

L'assertion découle, alors , de la définition 4.2 \diamond .

Comme première application, considérons le cas où le dispositif de commande du satellite serait assuré par deux rétrofusées ($m = 2$). Le résultat est alors annoncé dans la suivante :

5.2. Proposition

Considérons le système d'équations (1.1) et (1.2) avec deux commandes :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= S(\omega).R, \\ I \cdot \frac{d\omega}{dt} &= S(\omega).I.\omega + b_1.u_1 + b_2.u_2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Avec $|u_i| \leq \beta_i$, et b_1, b_2 linéairement indépendants.

Le système (1.6) est contrôlable, avec β_i arbitrairement petit, si et seulement si :

$$\mathfrak{R}^3 = \text{span}\{b_1, b_2, S(\omega).I^{-1}.\omega, \omega \in \text{span}\{b_1, b_2\}\}. \quad (1.7)$$

Preuve :

Dans ce cas, considérons les champs de vecteurs G_1, G_2 et $[Q, G_i](x)$ tel que :

$$[Q, G_i](x) = \left(\frac{df}{d\omega}(\omega).g_i, S(g_i).R \right); i = 1, 2. \quad (1.8)$$

et soit :

$$G_3(\gamma_1, \gamma_2) = [[Q, (\gamma_1.G_1 + \gamma_2.G_2)], (\gamma_1.G_1 + \gamma_2.G_2)] = (g_3(\gamma_1, \gamma_2), 0), \quad (1.9)$$

où $g_3(\gamma_1, \gamma_2) = 2.I^{-1}.S(\gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_2).I.(\gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_2)$,

ce qui entraîne :

$$[Q, G_3(\gamma_1, \gamma_2)](x) = \left(\frac{df}{d\omega}(\omega).g_3(\gamma_1, \gamma_2), S(g_3(\gamma_1, \gamma_2)).R \right). \quad (1.10)$$

Soit P le sous-espace de \mathfrak{R}^3 engendré par b_1 et b_2 et considérons la condition (1.7) qu'on peut écrire sous la forme :

$$\mathfrak{R}^3 = \text{span}\{b_1, b_2, S(\omega).I^{-1}.\omega, \omega \in P = \text{span}\{b_1, b_2\}\}, \quad (1.11)$$

qui est équivalente à :

$$\mathfrak{R}^3 = \text{span}\{g_1, g_2, g_3(\gamma_1, \gamma_2); \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{R}\}, \quad (1.12)$$

En tenant compte de cette condition, il suit que $G_1, G_2, \{G_3(\gamma_1, \gamma_2); \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{R}\}, [Q, G_1](x), [Q, G_2](x)$ et $\{[Q, G_3(\gamma_1, \gamma_2)](x); \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{R}\}$ engendrent l'espace tangent $T_x(\text{SO}(3) \times \mathfrak{R}^3)$ pour tout $x = (R, \omega) \in \text{SO}(3) \times \mathfrak{R}^3$.

Donc, la condition (1.7) est une condition suffisante d'accessibilité.

Pour montrer que la condition (1.7) est nécessaire pour l'accessibilité, substituons :

$$I.\omega = \gamma_1.b_1 + \gamma_2.b_2 + \gamma_3.S(b_2).b_1, \quad (1.13)$$

dans le système d'équations suivant :

$$I.\frac{d\omega}{dt} = S(\omega).I.\omega + b_1.u_1 + b_2.u_2, \quad (1.14)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= f_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + u_1, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= f_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + u_2, \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_3 \cdot f_3(\gamma_1, \gamma_2) + \frac{f_4(\gamma_1, \gamma_2)}{\|S(b_2)b_1\|^2}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

où $f_4(\gamma_1, \gamma_2) = b_1^t.S(b_2).S(\gamma_1.b_1 + \gamma_2.b_2).\Gamma^{-1}.\gamma_3.b_1 + \gamma_2.b_2$.

Il est clair que $f_4(\gamma_1, \gamma_2)$ est non nulle si et seulement si la condition (1.7) est satisfaite.

Dans le cas où $f_4(\gamma_1, \gamma_2)$ est nulle, l'espace \mathfrak{R}^3 ne peut être complètement accessible pour le système (1.15) et les variétés intégrales maximales sont :

$$\{\mathfrak{R}^3 \cap \gamma; \gamma_3 = 0\}, \{\mathfrak{R}^3 \cap \gamma; \gamma_3 < 0\}, \{\mathfrak{R}^3 \cap \gamma; \gamma_3 > 0\},$$

c'est à dire que l'espace engendré par $\{\mathfrak{R}^3 \cap \gamma; \gamma_3 = 0\}$ est un espace invariant pour le système (1.15), s'il l'atteint il y reste.

Donc, la condition suffisante (1.7) est aussi une condition nécessaire d'accessibilité. D'où, l'assertion \diamond .

Comme deuxième application, considérons le cas où le dispositif de commande du satellite serait assuré par une seule rétrofusée ($m = 1$). Le résultat est alors annoncé dans la proposition suivante :

5.3. Proposition

Considérons le système (1.1) et (1.2) avec une seule commande :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= S(\omega).R, \\ I.\frac{d\omega}{dt} &= S(\omega).I.\omega + b_1.u_1, \end{aligned} \quad (1.16)$$

avec $|u_i| \leq \beta_i$, et $b_1 \neq 0$, alors :

Le système (1.16) est contrôlable, avec β_i arbitrairement petit, si et seulement si :

$$\mathfrak{R}^3 = \text{span}\{b_1, S(b_1).I^{-1}.b_1, S(\omega).I^{-1}.\omega, \omega \in \text{span}\{b_1, S(b_1).I^{-1}.b_1\}\}. \quad (1.17)$$

Preuve :

Dans ce cas, considérons les champs de vecteurs G_1 , et $[Q, G_1](x)$ tel que :

$$[Q, G_1](x) = \left(\frac{df}{d\omega}(\omega).g_1, S(g_1).R\right),$$

et soit, aussi, le champs de vecteurs :

$$[[Q, G_1], G_1] = (g_4, 0) = G_4, \quad (1.18)$$

où $g_4 = 2.I^{-1}.S(g_1).I.g_1$.

Alors :

$$[Q, (\gamma_1.G_1 + \gamma_2.G_4)](x) = \left(\frac{df}{d\omega}(\omega).(\gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_4), S(\gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_4).R\right),$$

et $[[Q, (\gamma_1.G_1 + \gamma_2.G_4), (\gamma_1.G_1 + \gamma_2.G_4)] = (g_5(\gamma_1, \gamma_2), 0) = G_5(\gamma_1, \gamma_2), \quad (1.19)$

où $g_5(\gamma_1, \gamma_2) = 2.I^{-1}.S(\gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_4).I.(\gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_4)$.

Finalement, on obtient :

$$[Q, G_5(\gamma_1, \gamma_2)](x) = \left(\frac{df}{d\omega}(\omega).g_5(\gamma_1, \gamma_2), S(g_5(\gamma_1, \gamma_2)).R\right). \quad (1.20)$$

Considérons maintenant la condition (1.17) :

$$\mathfrak{R}^3 = \text{span}\{b_1, S(b_1).I^{-1}.b_1, S(\omega).I^{-1}.\omega, \omega \in \text{span}\{b_1, S(b_1).I^{-1}.b_1\}\}, \quad (1.17)$$

cette condition est équivalente à :

$$\mathfrak{R}^3 = \text{span}\{g_1, g_4, g_5(\gamma_1, \gamma_2); \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{R}\}. \quad (1.21)$$

En tenant compte de la condition (1.17), il suit que $G_1, G_4, \{G_5(\gamma_1, \gamma_2); \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{R}\}, [Q, G_1](x), [Q, G_4](x)$, et $\{[Q, G_5(\gamma_1, \gamma_2)](x); \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{R}\}$ engendre l'espace tangent $T_x(SO(3) \times \mathfrak{R}^3)$ pour tout $x = (R, \omega) \in SO(3) \times \mathfrak{R}^3$.

Donc, la condition (1.17) est une condition suffisante d'accessibilité.

Pour montrer que la condition (1.17) est nécessaire pour l'accessibilité, substituons l'expression :

$$I.\omega = \gamma_1.b_1 + \gamma_2.S(b_1).I^{-1}.b_1 + \gamma_3.S(b_1).S(b_1).I^{-1}.b_1, \quad (1.22)$$

dans le système d'équations :

$$I.\frac{d\omega}{dt} = S(\omega).I.\omega + b_1.u_1, \quad (1.23)$$

et en assumant que $S(b_1).I^{-1}.b_1 \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= f_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) + u_1, \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= f_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_3.f_3(\gamma_1, \gamma_2) + \frac{f_4(\gamma_1, \gamma_2)}{\|S(b_1).S(b_1).I^{-1}.b_1\|^2}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

où $f_4(\gamma_1, \gamma_2) = b_1^t.I^{-1}.S(b_1).S(b_1).S(\gamma_1.b_1 + \gamma_2.S(b_1).I^{-1}.b_1).I^{-1}.\gamma_3.b_1 + \gamma_2.S(b_1).I^{-1}.b_1)$ et $f_2(\gamma_1, 0, \gamma_3) \neq 0$.

Il est clair que $f_4(\gamma_1, \gamma_2)$ est non nulle si et seulement si la condition (1.17) est satisfaite.

Dans le cas où $f_4(\gamma_1, \gamma_2)$ est nulle, l'espace \mathfrak{R}^3 ne peut être complètement accessible pour le système (1.24) et les variétés intégrales maximales sont :

$$\{\mathfrak{R}^3 \cap \gamma; \gamma_3 = 0\}, \{\mathfrak{R}^3 \cap \gamma; \gamma_3 < 0\}, \{\mathfrak{R}^3 \cap \gamma; \gamma_3 > 0\},$$

c'est à dire que l'espace engendré par $\{\mathfrak{R}^3 \cap \gamma; \gamma_3 = 0\}$ est un espace invariant pour le système (1.24).

Notons que si $S(b_1).I^{-1}.b_1 = 0$, le système (1.24) ne peut être contrôlable, car cela correspondrait au cas où b_1 est un vecteur propre pour la matrice principale d'inertie I , i.e., un axe principal.

Donc, la condition nécessaire (1.17) est aussi une condition suffisante d'accessibilité. D'où, l'assertion \diamond .

6. CONCLUSION

Nous venons de montrer que le système décrivant l'attitude du satellite est contrôlable moyennant le bon emplacement des rétrofusées.

Cette emplacement est fixé par les relations (1.7) ou (1.17) selon le cas où le système est commandé par une seule ou deux rétrofusées (respectivement) .

CHAPITRE 2

STABILISATION PAR RETOUR D'ETAT DES SYSTEMES NON LINEAIRES

CHAPITRE 2

STABILISATION PAR RETOUR D'ETAT DES SYSTEMES NON LINEAIRES

1. INTRODUCTION

Considérons les systèmes linéaires à coefficients constants de la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (2.1)$$

La solution nulle du système autonome (2.1) (c'est à dire lorsque $B = 0$) est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives.

Si une des valeurs propres est à partie réelle strictement positive, la solution nulle est instable.

la solution nulle du système linéaire commandé (2.1) ($B \neq 0$) est asymptotiquement stabilisable si et seulement si il existe un retour d'état linéaire $k : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$, $K(0) = 0$, tel que toutes les valeurs propres de la matrice $A + B \cdot K$ sont à parties réelles strictement négatives.

Dans le cas non linéaire, il faut distinguer deux aspects local et global.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) + B \cdot u(t), \quad x(0) = 0, \quad (2.2)$$

où $x(t) \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^m$ et F, b_1, b_2, \dots, b_m sont des champs de vecteurs de \mathcal{R}^n .

Dans le cas où $B = 0$:

On dit que 0 est localement stable si pour tout voisinage v de 0, il existe un voisinage $v' \in v$ de 0 tel que toute trajectoire $x(t, x_0)$ issue en $t = 0$ de $x_0 \in v'$ reste dans v , $\forall t \geq 0$.

Si de plus $x(t, x_0) \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow +\infty$, on dit que 0 est localement asymptotiquement stable .

Il est dit globalement asymptotiquement stable si quelque soit $x_0 \in \mathfrak{R}^n$, $x(t, x_0) \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Une fonction de Lyapunov, pour l'équation autonome (2.2) ($B = 0$), de domaine D contenant 0 est une fonction, C^∞ , $V : D \rightarrow \mathfrak{R}$ qui vérifie :

- (1) $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq 0$.
- (2) $L_X V(x) < 0$ sur $D - \{0\}$ et $L_X V(0) = 0$.
- (3) V tend vers une limite constante, finie où non, à la frontière D .

Le système est alors dit asymptotiquement stable sur D si de plus 0 est un attracteur global sur D .

Rappelons le résultat suivant du à Massera [MA.56] :

Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit asymptotiquement stable dans le domaine D est qu'il existe une fonction de Lyapunov pour l'équation autonome (2.2), définie sur D .

Dans le cas où $B \neq 0$:

On dit que le système (2.2) est localement ou globalement stabilisable (respectivement localement ou globalement asymptotiquement stabilisable) en 0, s'il existe un bouclage $K : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, $K(0) = 0$, tel que le système bouclé :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F'(x(t)), \tag{2.3}$$

où $F' = F + B.K$, est localement ou globalement stable (respectivement localement ou globalement asymptotiquement stable) en 0 .

Dans ce chapitre, nous allons présenter les conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation locale et globale par retour d'état des systèmes non linéaires.

Pour l'aspect local, le traitement standard est l'utilisation de la théorie des variétés invariantes et en particuliers centrales introduites respectivement par P. Hartman [HA.82] et J. Carr [CA.81] qui permettent d'analyser le comportement topologique d'une équation différentielle au voisinage d'une position d'équilibre. Une approche plus systématique étant d'ailleurs, la construction des formes semi- normales pour les champs de vecteurs au voisinage des positions d'équilibres, relativement à l'action locale de difféomorphismes.

Les difficultés pour résoudre le problème sont de deux ordres : complexité des calculs et d'analyse de la stabilité locale dans la variété centrale.

Par ailleurs, on montre dans le chapitre 3, en utilisant la théorie des variétés centrales, qu'il existe des retours d'état stabilisateurs pour la solution nulle des équations d'Euler décrivant le mouvement d'un satellite rigide gouverné par une ou deux rétrofusées.

Pour l'aspect global, une approche classique est de globaliser le résultat local, par exemple en étudiant le domaine de validité d'une fonction de Lyapunov ou en évaluant le domaine d'attraction de l'origine.

Pour bien éclaircir les définitions de la stabilité locale et globale pour les systèmes non linéaires, rappelons les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité locale introduites par R. W. Brockett [BR1.78] et qui repose sur les résultats de F. W. Wilson [WI.67] et celles de la stabilité globale basées sur le théorème de LaSalle [LA.76], développé par Jurdjevic-Quinn [QJ.78] et généralisé aux systèmes non linéaires par H. Tebbikh [TE2.89].

2. CONDITIONS NECESSAIRES DE STABILISATION LOCALE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), u(t)), F(0, 0) = 0, \quad (2.4)$$

et son linéarisé en $(0, 0)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A. x(t) + B. u(t),$$

où $A. x(t)$ est la partie linéaire de $F(x(t), u(t))$.

Notons $v(x)$ le voisinage de zéro. Alors, d'après les travaux de R. W. Brockett [BR2.83], les conditions nécessaires de stabilisation du système (2.4) sont les suivantes :

Théorème

le système (2.4) ne peut être stabilisable que si :

- (i) Il existe un retour d'état linéaire $k : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, $K(0) = 0$, tel que toutes les valeurs propres de la matrice $A + B.K$ sont à parties réelles strictement négatives.
- (ii) Il existe $v(x)$ tel que $\forall \zeta \in v(x)$, le point Zéro est accessible à ζ .
- (iii) L'image de $F : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ de tout voisinage de $(0, 0) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ est un voisinage de Zéro de \mathfrak{R}^n .

Démonstration Voir [BR1.78].

3. CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILISATION LOCALE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Dans ce paragraphe, on rappelle les résultats de J. Carr [CA.81] sur les variétés centrales (dans un contexte plus général), qu'on applique pour résoudre le problème de stabilisation des équations d'Euler décrivant le mouvement d'un satellite rigide.

3.1. Variétés centrales

Considérons pour cela le système (2.2) suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) + B \cdot u(t), \quad (2.2)$$

où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ et F, b_1, b_2, \dots, b_m sont des champs de vecteurs de \mathfrak{R}^n .

Un ensemble $S \in \mathfrak{R}^n$ est dit variété invariante pour l'équation (2.2) ($B = 0$) si : $\forall x_0 \in \mathfrak{R}^n, \forall t \in \mathfrak{R}, x(t, x_0) \in S$.

Supposons qu'il existe un système de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ dans lequel $y = h(x)$ est une variété invariante pour le système (2.2) ($B = 0$) et supposons que la dynamique sur cette variété est décrite par :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x, h(x)) .$$

Alors, on dit que $y = h(x)$ est une variété stable (respectivement instable) si les valeurs propres de $\frac{\partial F}{\partial t}(0, h(0))$ sont à parties réelles négatives (respectivement positives).

Si ces valeurs propres sont nulles, on dit que $y = h(x)$ est une variété centrale.

Pour illustrer ce concept, considérons le linéarisé en 0 suivant du système non linéaire (2.2) :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + f(x) , \tag{2.5}$$

où u est une entrée de dimension m , B une matrice constante, $A = \frac{\partial F}{\partial x}(0)$ et $f(x)$ sont les termes ≥ 2 .

Par un changement de base approprié, (2.5) se transforme en :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A_{11} \cdot x_1 + f_1(x_1, x_2) , \\ \frac{dx_2}{dt} &= A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + f_2(x_1, x_2) + B_2 \cdot u , \end{aligned} \tag{2.6}$$

où (A_{22}, B_2) est une paire contrôlable . Donc , il existe un retour d'état linéaire $u = k_2 \cdot x_2$ tel que $A_{22} + B_2 \cdot k_2$ est stable.

En considérant le retour d'état $u = k_2 \cdot x_2 + v$, le système (2.6), en boucle fermé, s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A_{11} \cdot x_1 + f_1(x_1, x_2) , \\ \frac{dx_2}{dt} &= A_{21} \cdot x_1 + (A_{22} + B_2 \cdot k_2) \cdot x_2 + f_2(x_1, x_2) + B_2 \cdot v , \end{aligned} \tag{2.7}$$

3.2. Variétés centrales et stabilisation

Le système (2.7) est stabilisable par le retour d'état linéaire si les modes incontrôlables (correspondant aux valeurs propres de A_{11}) sont asymptotiquement stables.

D'autres part, si A_{11} a des valeurs propres à parties réelles positives, le système (2.7) ne peut être totalement stabilisable.

Le cas où les valeurs propres possèdent une partie réelle nulle s'appelle cas critique.

Considérons le cas où la matrice A_{11} n'a pas des valeurs propres à parties réelles positives. Alors, en effectuant un autre changement de base permettant la diagonalisation de A_{11} , on arrive (avec une notation adéquate) au système :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= A_{11}.x_1 + f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= A_{22}.x_2 + f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= A_{33}.x_3 + f_3(x_1, x_2, x_3) + B.u,\end{aligned}\tag{2.8}$$

avec A_{11} critique, A_{22} a des valeurs propres à parties réelles négatives et (A_{33}, B) est une paire contrôlable (image de la paire (A_{22}, B) du système (2.7)). Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont les termes d'ordre ≥ 2 . Ces termes disparaissent à l'origine.

Le problème est de construire un retour d'état $u = F(x_1, x_2, x_3)$ qui permet au système de revenir à 0 selon une trajectoire bien particulière appelée variété centrale.

Considérons l'espace propre E^c correspondant aux valeurs propres de A_{11} (où $x_2 = x_3 = 0$). Alors, d'après J. Carr [CA.81], il existe une variété centrale W^c tangente à E^c à l'origine représentée localement par le graphe :

$$W^c = \{(x_1, h_1(x_1), h_2(x_1)) ; h_1(0) = h_2(0) = Dh_1(0) = Dh_2(0) = 0\}.\tag{2.9}$$

La projection du champs de vecteurs de W^c dans E^c , donne :

$$\frac{dx_1}{dt} = A_{11}.x_1 + f_1(x_1, h_1(x_1), h_2(x_1)).\tag{2.10}$$

Puisque $h(x_1)$ est tangente à $x_2 = x_3 = 0$ et les équations en termes de $\frac{dx_2}{dt}$ et $\frac{dx_3}{dt}$ sont asymptotiquement stables, alors :

3.2.1. Théorème

Si l'origine de (2.10) est localement asymptotiquement stable, alors l'origine de (2.8) est aussi localement asymptotiquement stable.

Preuve voir [CA.81].

3.2.2. Approximation de la variété centrale

Considérons la variété centrale $h(x_1) = (h_1(x_1), h_2(x_1))$ et le retour d'état correspondant $u = F(x_1, x_2, x_3)$.

Par invariance de la dérivation sur $h(x_1)$, on a :

$$Dh(x_1) \cdot \frac{dx_1}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Pour calculer la variété centrale $h(x_1) = (h_1(x_1), h_2(x_1))$, on remplace x_2 par $h_1(x_1)$ et x_3 par $h_2(x_1)$ dans l'équation (2.11) et on obtient :

$$\begin{aligned} Dh(x_1) \cdot (A_{11} \cdot x_1 + f_1(x_1, h_1(x_1), h_2(x_1))) &= \dots\dots \\ \dots\dots &= \begin{bmatrix} A_{22} \cdot h_1(x_1) + f_2(x_1, h_1(x_1), h_2(x_1)) \\ A_{33} \cdot h_2(x_1) + f_3(x_1, h_1(x_1), h_2(x_1)) + B \cdot F(x_1, h_1(x_1), h_2(x_1)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec les conditions aux limites $Dh(0) = h(0) = 0$.

Alors, $h(x_1)$ est la solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles (2.12)

Le théorème suivant permet l'approximation de la solution $h(x_1)$ (par développement en série de Taylor au point $x_1 = 0$).

3.2.3. Théorème

S'il existe une fonction $\phi(x_1) = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_1))$ avec $\phi(0) = D\phi(0) = 0$, qui satisfait l'équation différentielle aux dérivées partielles (2.12), alors :

$$\begin{aligned} h_1(x_1) &= \phi_1(x_1) + O(|x_1|^p), \\ h_2(x_1) &= \phi_2(x_1) + O(|x_1|^p), \end{aligned}$$

où $O(|x_1|^p)$ sont les termes d'ordre supérieur à p ($p > 1$).

Preuve Voir [CA.81].

Le système (2.10) s'écrit alors :

$$\frac{dx_1}{dt} = A_{11} \cdot x_1 + f_1(x_1, \phi_1(x_1) + O(|x_1|^p), \phi_2(x_1) + O(|x_1|^p)). \quad (2.13)$$

Il est évident que ce système est localement asymptotiquement stable si et seulement si :

$$\frac{dx_1}{dt} = A_{11} \cdot x_1 + f_1(x_1, \phi_1(x_1), \phi_2(x_1)), \quad (2.14)$$

est localement asymptotiquement stable.

Sachant que la dynamique sur la variété centrale ($x_2 = h_1(x_1)$, $x_3 = h_2(x_1)$) est décrite par le système (2.14). Alors, le résultat essentiel de ce concept est le suivant :

3.2.4. Proposition

Le système est localement asymptotiquement stable en 0 si et seulement si :

- (i) La variété centrale est localement exponentiellement attractive.
- (ii) L'origine est localement stable pour la dynamique sur la variété centrale.

Preuve Voir [CA.81].

Le problème est alors d'adapter les résultats précédents au problème de stabilisation des équations d'Euler décrivant le mouvement d'un satellite rigide qui consiste à :

- (i) Chercher une variété centrale $y = h(x)$, tel que l'origine soit localement stable pour la dynamique sur cette variété.
- (ii) Chercher un retour d'état qui permet de fixer localement cette variété centrale de telle sorte qu'elle soit exponentiellement attractive.

3.2.5. Remarques

Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 dépendent de $u = F(x_1, x_2, x_3)$ et de l'équation différentielle aux dérivées partielles (2.12).

Cette approche est généralisable pour des systèmes de la forme $\frac{dx}{dt} = F(x, u)$ et permet de répondre aux différents problèmes posés dans la nature.

4. CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILISATION GLOBALE DES SYSTEMES NON LINEAIRES.

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler les conditions suffisantes de stabilisation globale des systèmes non linéaires de la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) + B \cdot u(t) . \quad (2.2)$$

Ces résultats sont basés sur le théorème de Lassalle [LA.76], développé par Jurdjevic-Quinn [QJ.78] dans la cas où $F(x) = A \cdot x$ et généralisé par la suite par H. Tebbikh [TE2.89] aux systèmes non linéaires.

Soit $V(x)$ une fonction qui satisfait les conditions suivantes :

- (i) $V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n - \{0\}$ et $V(0) = 0$.
- (ii) $\frac{\partial V}{\partial x}(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n - \{0\}$ et $\frac{\partial V}{\partial x}(0) = 0$.
- (iii) Les domaines $V_k(x) = \{x / V(x) \leq k\}$ sont compacts, $\forall k \geq 0$.

4.1. Définition

On dit que le champ de vecteurs $F(x)$ est compact, s'il existe une fonction $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ satisfaisant les conditions (2.15), telle que : $L_F V(x) = 0$.

Cela signifie que $V(x)$ est une intégrale première de $F(x)$.

En particulier, si $V(x)$ est une forme quadratique définie positive (ce qui est largement suffisant pour notre étude), les solutions de $F(x)$ évoluent sur les surfaces de niveau de $V(x) : V_k(x) = \{x / V(x) = k\}$ qui sont difféomorphes à des sphères.

Introduisons maintenant les notations suivantes :

$$E = \{x / \frac{\partial V}{\partial x}(x) = 0\}. \quad (2.16)_a$$

$$I = \{x \in E / \exp t.F(x) \in E, \forall t \in \mathfrak{R}\}. \quad (2.16)_b$$

où E et I désignent respectivement l'ensemble des points où $\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 0$ le long des trajectoires de B et le plus grand sous-ensemble invariant par rapport au système (2.2) ($B = 0$), inclus dans E .

4.2. Rappel du Théorème de Lassalle [LA.76]

Considérons le système autonome défini par :

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (2.17)$$

où $F(x)$ est un champ de vecteurs continu et complet sur \mathfrak{R}^n , et une fonction $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ localement lipchitzienne telle que :

$$\forall x \in \mathfrak{R}^n, \frac{\partial V}{\partial x}(x) \leq 0,$$

Alors, en utilisant les notations (2.16), I est un attracteur de l'ensemble des trajectoires du système (2.2) ($B = 0$), c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in \mathfrak{R}^n, x(t) = (\exp t.F)(x_0) \rightarrow \{I\} \cup \{\infty\} \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

La généralisation des résultats ci-dessus est la suivante :

4.3. Théorème [TE2.89]

Considérons le système non linéaire (2.2) et supposons que $F(x)$ admet une intégrale première $V(x)$, satisfaisant les conditions (2.15).

Alors, l'origine est globalement asymptotiquement stabilisable par le retour d'état $u(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x).B$ si :

$$\forall x \in E - \{0\}, \text{rang}\{ad^i F.B(x), i = 0, 1, \dots, n-1\} = n.$$

Démonstration : Voir [TE2.89]

5. CONSTRUCTION DU RETOUR D'ETAT

Dans cette section, on donne un aperçu sur le problème de construction des retours d'états stabilisateurs pour des systèmes non linéaires.

5.1. Calcul du retour d'état

A titre d'exemple, considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + g(x_1, x_2, y), \\ \frac{dy}{dt} &= l.y + u, \end{aligned} \tag{2.18}$$

où u est le retour d'état du système, y est la sortie du système et $g(x_1, x_2, y)$ une fonction contenant uniquement les termes d'ordre supérieur ou égal à 2.

Le problème est de construire un retour d'état $u = F(x_1, x_2, y)$ de telle sorte que le système (2.18) soit localement asymptotiquement stable.

En terme de compensation, le retour d'état stabilisateur, qui dépend de la fonction $g(x_1, x_2, y)$, est de la forme :

$$u = -l.y - k.y + w(x_1, x_2, y), \quad k > 0, \tag{2.19}$$

Alors le système (2.18) devient :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + g(x_1, x_2, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -k \cdot y + w(x_1, x_2, y),\end{aligned}\tag{2.20}$$

où $w(x_1, x_2, y)$ représente les termes d'ordre supérieur à 1.

Le système (2.20) est un cas particulier de (2.8) dans lequel on retrouve la forme diagonale avec des modes critiques non contrôlables.

$$\text{Soit : } y = h(x_1, x_2) = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 \cdot x_2 + c \cdot x_2^2 + O(3),\tag{2.21}$$

On dit que (2.21) est une variété centrale du système (2.20), si elle satisfait :

$$Dh(x) \cdot \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \frac{dy}{dt},\tag{2.22}$$

c'est-à-dire :

$$Dh(x) \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + g(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) \end{bmatrix} = -k \cdot h(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, h(x_1, x_2)).\tag{2.23}$$

$$\text{Prenons : } w(x_1, x_2, y) = \alpha \cdot x_1^2 + \beta \cdot x_1 \cdot x_2 + \gamma \cdot x_2^2,\tag{2.24}$$

En substituant w et h par leurs expressions respectives dans l'équation différentielle aux dérivées partielles (2.23) et en égalant les termes du second ordre à zéro, il suit que :

$$\phi(x_1, x_2) = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 x_2 + c \cdot x_2^2.$$

est une approximation du seconde ordre de la variété centrale, où a , b et c sont les solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned}
2.a - 2.c + k. - \beta &= 0 , \\
-b + k. - \alpha &= 0 , \\
b + k. - \gamma &= 0 .
\end{aligned}
\tag{2.25}$$

avec $k > 0$.

La résolution du système (2.25) permet de fixer les paramètres α , β , γ du retour d'état en fonction de ceux de la variété centrale a , b et c ou inversement .

D'après la proposition 3.2.4, le système (2.20) est localement asymptotiquement stable si :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 , \\
\frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + g(x_1, x_2, a.x_1^2 + b.x_1x_2 + c.x_2^2 + O(3)) ,
\end{aligned}
\tag{2.26}$$

est localement asymptotiquement stable.

Notons que la fonction g peut contenir des termes de la forme $x_1.y$ et /ou $x_2.y$. D'où le résultat suivant.

5.2. Proposition

Si g contient des termes de la forme $x_1.y$ et /ou $x_2.y$, alors le système (2.18) est localement stabilisable par le retour d'état $u(x_1, x_2, y)$ (i.e. il existe un retour d'état $u(x_1, x_2, y)$ tel que le système (2.18) est localement asymptotiquement stable à l'origine).

Preuve

Pour simplifier les calculs, supposons que la fonction g est de la forme :

$$g(x_1, x_2, y) = a_{13}x_1.y + O(3)$$

En remplaçant $y = a.x_1^2 + O(3)$ dans $g(x_1, x_2, y)$, on obtient :

$$g(x_1, x_2, a.x_1^2 + O(3)) = a_{13}.a.x_1^3 + O(3).$$

Alors le système est asymptotiquement stable si et seulement si $a_{13}a < 0$.

En procédant de la même manière, on montre facilement que ce résultat est applicable au cas le plus général, où :

$$g(x_1, x_2, y) = Q(x_1, x_2, y) + O(3)$$

où $Q(x_1, x_2, y)$ est une forme quadratique comprenant les termes $a_{13} x_1 \cdot y$ et /ou $a_{23} x_2 \cdot y$

5.3. Remarque

Le fait d'utiliser une équation linéaire ($\frac{dx_1}{dt} = x_2$) dans le système (2.18) n'entraîne aucune restriction sur l'universalité de l'application de la théorie des variétés centrales aux cas non linéaires de façon générale.

6. CONCLUSION

Nous avons maintenant tous les outils mathématiques nécessaires pour étudier la stabilité et la stabilité asymptotique de la vitesse angulaire d'un satellite rigide.

La théorie développée dans les sections 3, 4 et 5 permet de :

- 1) Calculer la variété centrale, tel que l'origine soit localement stable pour la dynamique sur cette variété.
- 2) Chercher un retour d'état qui permet de fixer localement la variété centrale calculée de telle sorte qu'elle soit exponentiellement attractive.
- 3) Chercher une fonction définie positive ayant un minimum unique en Zéro, c'est à dire que le zéro est une position d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

CHAPITRE 3

***STABILISATION PAR RETOUR D'ETAT DE
LA VITESSE ANGULAIRE D'UN SATELIITE
RIGIDE GOUVERNE PAR DES RETROFUSEES***

CHAPITRE 3

STABILISATION PAR RETOUR D'ETAT DE LA VITESSE ANGULAIRE D'UN SATELLITE RIGIDE GOUVERNE PAR DES RETROFUSEES

1. INTRODUCTION

Les équations décrivant le mouvement d'un satellite rigide sont celles d'Euler décrivant la rotation d'un corps rigide. Elles s'expriment par :

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = S(\omega) \cdot I \cdot \omega + B \cdot u, \quad (3.1)$$

où $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ est la matrice d'inertie,
 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \in \mathcal{R}^3$ est le vecteur vitesse angulaire,
 $B = \{b_1, b_2, b_3\} \in \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$ est une matrice constante décrivant la position des rétrofusées,
 $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ est le vecteur commande,
et $S(\omega)$ est la matrice antisymétrique suivante :

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notons que chaque u_i représente un moment extérieur, créé par une rétrofusée, dont la position, par rapport aux axes principaux d'inertie, est fixée par le vecteur b_i .

2. CAS OU LE SATELLITE EST GOUVERNE PAR DEUX RETROFUSEES

Supposons que les actions des rétrofusées sont alignées avec les deux derniers axes principaux d'inertie, c'est à dire que $b_1 = 0$, $b_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$ et $b_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$.

Alors, le système (3.1) s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} &= I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 , \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= I_{31} \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 + u_2 , \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= I_{12} \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 + u_3 ,\end{aligned}\tag{3.2}$$

où u_2, u_3 représentent les retours d'états et $I_{23} = \frac{I_2 - I_3}{I_1}$, $I_{31} = \frac{I_3 - I_1}{I_2}$, $I_{12} = \frac{I_1 - I_2}{I_3}$.

2.1. Proposition

Le système (3.2) est localement asymptotiquement stabilisable par le retour d'état :

$$\begin{aligned}u_2 &= -I_{31} \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 - \omega_2 + \alpha \cdot \omega_1^2 , \\ u_3 &= -I_{12} \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 - \omega_3 + \beta \cdot \omega_1^3 .\end{aligned}$$

si $I_{23} \cdot \alpha \cdot \beta < 0$.

Preuve :

Remarquons, en premier lieu, que sous l'action du retour d'état :

$$\begin{aligned}u_2 &= -I_{31} \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 + u , \\ u_3 &= -I_{12} \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 + v ,\end{aligned}$$

le système (3.2) est équivalent au suivant :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} &= I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 , \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= u , \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= v .\end{aligned}\tag{3.3}$$

Le problème est, alors, de construire u et v qui stabilisent localement le système (3.3).

Pour ce faire, considérons le retour d'état défini par la loi :

$$\begin{aligned}u &= -\omega_2 + \alpha \cdot \omega_1^2 , \\ v &= -\omega_3 + \beta \cdot \omega_1^3 .\end{aligned}\tag{3.4}$$

Le système (3.3) prend, ainsi, la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= -\omega_2 + \alpha \cdot \omega_1^2, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= -\omega_3 + \beta \cdot \omega_1^3. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega_1}{dt} \\ \frac{d\omega_2}{dt} \\ \frac{d\omega_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \\ \alpha \cdot \omega_1^2 \\ \beta \cdot \omega_1^3 \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

Le linéarisé à l'origine du système (3.6) a une valeur propre à partie réelle nulle et deux valeurs propres à parties réelles négatives. Donc, il a un sous-espace stable de dimension deux et un sous-espace de variété de dimension un correspondant à l'espace associé à la valeur propre nulle.

D'après la théorie décrite dans la section 3, il existe une variété centrale $h(\omega_1)$ définie par :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= h_2(\omega_1) = h_{21} \cdot \omega_1^2 + h_{22} \cdot \omega_1^3 + \dots, \\ \omega_3 &= h_3(\omega_1) = h_{31} \cdot \omega_1^2 + h_{32} \cdot \omega_1^3 + \dots \end{aligned} \tag{3.7}$$

Donc, d'après le théorème 3.2.1, le système (3.6) est stabilisable si le système réduit suivant l'est aussi :

$$\frac{d\omega_1}{dt} = I_{23} \cdot h_2(\omega_1) \cdot h_3(\omega_1). \tag{3.8}$$

Notons que cette variété centrale (3.7) est représentée localement par le graphe :

$$W^c = \{ \omega_1, h_2(\omega_1), h_3(\omega_1) \}, \tag{3.9}$$

et que $h_2(\omega_1)$ et $h_3(\omega_1)$ sont respectivement les solutions des équations aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{\partial h_2}{\partial \omega_1}(\omega_1) \cdot \frac{d\omega_1}{dt}, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{\partial h_3}{\partial \omega_1}(\omega_1) \cdot \frac{d\omega_1}{dt}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Des équations (3.7) et (3.10), il vient :

$$\begin{aligned}-\omega_2 + \alpha.\omega_1^2 &= (2.h_{21}.\omega_1 + 3.h_{22}.\omega_1^2 + \dots).(I_{23}.\omega_2.\omega_3), \\ -\omega_3 + \beta.\omega_1^3 &= (2.h_{31}.\omega_1 + 3.h_{32}.\omega_1^2 + \dots).(I_{23}.\omega_2.\omega_3),\end{aligned}\tag{3.11}$$

En substituant les expressions de ω_2 et ω_3 dans (3.11), on obtient :

$$h_{21} = \alpha, \quad h_{31} = 0, \quad h_{32} = \beta,$$

et le système réduit prend ainsi la forme :

$$\frac{d\omega_1}{dt} = I_{23}.\alpha.\omega_1^2 + \dots.\beta.\omega_1^3 + \dots,\tag{3.12}$$

c'est à dire :

$$\frac{d\omega_1}{dt} = I_{23}.\alpha.\beta.\omega_1^5 + \text{termes d'ordre supérieur}.\tag{3.13}$$

Le système (3.13) est localement asymptotiquement stable si $I_{23}.\alpha.\beta < 0$.

Donc, le retour d'état (3.4) défini par la loi :

$$\begin{aligned}u &= -\omega_2 + \alpha.\omega_1^2, \\ v &= -\omega_3 + \beta.\omega_1^3,\end{aligned}$$

avec $I_{23}.\alpha.\beta < 0$, est un retour d'état localement asymptotiquement stabilisateur et le système (3.3) prend ainsi la forme réduite :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} &= I_{23}.\alpha.\beta.\omega_1^5, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= -\omega_2 + \alpha.\omega_1^2, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= -\omega_3 + \beta.\omega_1^3.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Finalemment, en respectant la description du système (3.3), le retour d'état asymptotiquement stabilisateur est le suivant :

$$\begin{aligned} u_2 &= -I_{31} \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 - \omega_2 + \alpha \cdot \omega_1^2, \\ u_3 &= -I_{12} \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 - \omega_3 + \beta \cdot \omega_1^3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que des petites incertitudes sur le retour d'état stabilisateur du système sont permises et n'influent pas sur la stabilité du système.

2.2. Proposition

Considérons le retour d'état stabilisateur (3.15).

Alors, un petit changement dans les coefficients de $\omega_3 \cdot \omega_1$ et $\omega_1 \cdot \omega_2$ n'influe pas sur la stabilité asymptotique du système (3.3).

Preuve :

Pour illustrer ce résultat, prenons le système (3.3) et soit le retour d'état défini par la loi :

$$\begin{aligned} u &= -(I_{31}-\varepsilon) \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 - \omega_2 + \alpha \cdot \omega_1^2, \\ v &= -(I_{12}-\delta) \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 - \omega_3 + \beta \cdot \omega_1^3, \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec ε, δ petits.

Le système (3.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \varepsilon \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 - \omega_2 + \alpha \cdot \omega_1^2, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \delta \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 - \omega_3 + \beta \cdot \omega_1^3. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega_1}{dt} \\ \frac{d\omega_2}{dt} \\ \frac{d\omega_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \\ \varepsilon \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 + \alpha \cdot \omega_1^2 \\ \delta \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 + \beta \cdot \omega_1^3 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

D'après la théorie des variétés centrales, il existe une variété centrale $h(x_1)$ tel que :

$$\frac{d\omega_1}{dt} = I_{23}.h_2(\omega_1).h_3(\omega_1) . \quad (3.19)$$

En utilisant la même procédure de calcul que dans le cas précédent, on obtient :

$$h_{21} = \alpha , h_{31} = 0 , h_{32} = \delta.\alpha + \beta ,$$

et le système réduit prend ainsi la forme :

$$\frac{d\omega_1}{dt} = I_{23}.\alpha.(\delta.\alpha + \beta).\omega_1^5 + \text{termes d'ordre supérieur.} \quad (3.20)$$

Donc, avec $I_{23}.\alpha.\beta < 0$ et δ petit, le système réduit (3.20) ainsi que le système original restent asymptotiquement stables.

2.3. Conclusion

Le système avec deux rétrofusées (3.2) est localement asymptotiquement stabilisable.

Les retours d'état stabilisateurs calculés ne sont pas les seuls. A titre indicatif, nous proposons un autre exemple dans l'annexe 2.

3. CAS OU LE SATELLITE EST GOUVERNE PAR UNE RETROFUSEE

3.1. Cas où l'action de la rétrofusée est sur un axe d'inertie

En considérant le système (3.1) et en supposant que l'action de la rétrofusée est alignée avec le troisième axe principal d'inertie, c'est à dire que $b_1 = b_2 = 0$ et $b_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$, on obtient le système :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) . \omega_2 . \omega_3 , \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \right) . \omega_3 . \omega_1 , \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) . \omega_1 . \omega_2 + u , \end{aligned} \quad (3.21)$$

où u représente l'action du moment de contrôle alignée avec le troisième axe principal d'inertie.

Le problème est de trouver un retour d'état stabilisateur pour le système (3.21) (s'il existe) au point d'équilibre $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$.

Pour cela, considérons le retour d'état (polynomial) défini par :

$$u(\omega) = a \cdot \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 + k \cdot \omega_1 + l \cdot \omega_2 + m \cdot \omega_3 + F(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (3.22)$$

avec $a = -1$, k , l , m sont des constantes et $F(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une fonction contenant uniquement les termes d'ordre supérieur à 1.

Le système (3.21) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) \cdot \omega_2 \cdot \omega_3, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \right) \cdot \omega_3 \cdot \omega_1, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= k \cdot \omega_1 + l \cdot \omega_2 + m \cdot \omega_3 + F(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sous forme matricielle, (3.23) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega_1}{dt} \\ \frac{d\omega_2}{dt} \\ \frac{d\omega_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & l & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \\ I_{31} \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 \\ F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

avec $I_{23} = \frac{I_2 - I_3}{I_1}$ et $I_{31} = \frac{I_3 - I_1}{I_2}$.

Le linéarisé à l'origine de ce système a deux valeurs propres nulles et une valeur propre égale à m .

Par le changement de base suivant :

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{l}{m} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

on obtient les équations différentielles :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{23} \cdot x_2 \cdot (x_3 - \frac{k}{m} \cdot x_1 - \frac{l}{m} \cdot x_2) \\ I_{31} \cdot x_1 \cdot (x_3 - \frac{k}{m} \cdot x_1 - \frac{l}{m} \cdot x_2) \\ G(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

avec $G(x_1, x_2, x_3)$ contient, au même titre que $F(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, uniquement les termes d'ordre supérieur à 1.

Il est clair que pour que le système (3.26) puisse être localement stabilisable, il faut que la valeur de m soit négative ou nulle. Le cas où m est positive entraîne l'instabilité du système (3.26).

Dans ce qui suit, nous allons discuter le cas où m est négative. Généralement, on assume que $m = -1$, cas pour lequel le système (3.26) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{23} \cdot x_2 \cdot (x_3 + k \cdot x_1 + l \cdot x_2) \\ I_{31} \cdot x_1 \cdot (x_3 + k \cdot x_1 + l \cdot x_2) \\ G_1(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

Le linéarisé à l'origine possède un sous-espace stable de dimension un et un sous-espace de variété de dimension deux correspondant à l'espace propre E^c associé aux valeurs propres nulles.

D'après la théorie des équations différentielles non linéaires, il existe une variété centrale W^c tangente à E^c à l'origine représentée localement par le graphe :

$$W^c = \{((x_1, x_2), x_3) ; x_3 = h(x_1, x_2) ; h(0) = Dh(0) = 0\}, \quad (3.28)$$

Considérons la projection du champs de vecteurs de W^c dans E^c . Les propriétés de stabilité du système (3.27) sont déterminées par celles du système bidimensionnel réduit :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= I_{23} \cdot x_2 \cdot f(x_1, x_2) , \\ \frac{dx_2}{dt} &= I_{31} \cdot x_1 \cdot f(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{3.29}$$

Avec :

$$f(x_1, x_2) = h(x_1, x_2) + k \cdot x_1 + l \cdot x_2 ,\tag{3.30}$$

D'où le résultat :

3.1.1. Proposition

Si l'origine de (3.29) est localement stable (asymptotiquement stable), alors l'origine de (3.27) est localement stable (respectivement asymptotiquement stable).

Preuve

Puisque l'équation en terme de $\frac{dx_1}{dt}$ est asymptotiquement stable, la preuve découle de la proposition 3.1.2 du chapitre 2.

Le problème se réduit alors à l'étude de la stabilité locale du système réduit (3.29).

3.1.2. Proposition

Le système (3.1) est stabilisable par une seule rétrofusée si l'action de celle-ci n'est pas alignée avec l'axe d'inertie moyen (I_2 dans le cas où $I_1 > I_2 > I_3$ ou $I_1 < I_2 < I_3$).

Preuve

Considérons le cas général où :

$$u(\omega) = a \cdot \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 + k \cdot \omega_1 + l \cdot \omega_2 + m \cdot \omega_3 + F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) ,\tag{3.31}$$

avec $a = -1$, $m = -1$, k , l , sont des constantes et $F(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une fonction contenant uniquement les termes d'ordre supérieur à 1.

La variété centrale $x_3 = h(x_1, x_2)$ est la solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles :

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} , \quad (3.32)$$

avec $h(0) = Dh(0) = 0$.

Cette solution dépend de la fonction $G_1(x_1, x_2, x_3)$ qui regroupe des termes d'ordre 3 et plus. Donc, il n'est pas utile de résoudre cette dernière du fait que le résultat ne va pas influencer sur le comportement local du système.

Pour monter cela, considérons les courbes définies par :

$$H(x_1, x_2) = I_{23} \cdot x_2^2 - I_{31} \cdot x_1^2 = c , \quad (3.33)$$

qui sont invariantes sous la dérivation.

La différentiation de H le long de la solution de (3.29) donne :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} \\ &= 2 \cdot I_{31} \cdot I_{23} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot f - 2 \cdot I_{31} \cdot I_{23} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot f \equiv 0. \end{aligned}$$

i.e. $I_{23} \cdot x_2^2 - I_{31} \cdot x_1^2 = c$ est l'intégrale première du système plan (3.29).

Ceci implique que le portrait de phase de (3.29) est indépendant de k, l , et $G_1(x_1, x_2, x_3)$.

Si $\frac{I_{31}}{I_{23}} > 0$, le système plan (3.29) ainsi que le système original (3.27) sont instables et les courbes de niveau sont des hyperboles.

Si $\frac{I_{31}}{I_{23}} < 0$, le système plan (3.29) ainsi que le système original (3.27) sont stables et les courbes de niveau sont des ellipses.

Si on fait varier les paramètres du système en boucle fermé sans perdre la condition ci-dessus, le système reste stable.

Donc, dans ce cas le contrôle est robuste et le système considéré est stabilisable si le moment d'inertie I_3 est tel que : $I_1 > I_2 > I_3$ ou $I_1 < I_2 < I_3$.

Discutons maintenant le comportement du système en fonction des paramètres du retour d'état :

1) Dans le cas où $a = -1$, $m = -1$, $k = l = 0$ et $F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \equiv 0$, donc :

$$u = -\left(\frac{I_1 - I_2}{I_3}\right) \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 - \omega_3, \quad (3.35)$$

Le système réduit (3.21) prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= I_{31} \cdot \omega_1 \cdot \omega_3, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= -\omega_3. \end{aligned} \quad (3.36)$$

qui est stable indépendamment du signe de $\frac{I_{31}}{I_{23}}$.

2) Dans le cas où $a = 0$, $m = -1$, $k = l = 0$ et $F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \equiv 0$, donc :

$$u = -\omega_3, \quad (3.37)$$

Le système (3.21) prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= I_{31} \cdot \omega_1 \cdot \omega_3, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= I_{12} \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 - \omega_3. \end{aligned} \quad (3.38)$$

et la fonction d'énergie :

$$V(\omega(t)) = \frac{1}{2} \omega^T \cdot I \cdot \omega = \frac{1}{2} (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

avec $\omega \in \mathfrak{R}^3$. Alors :

$$\frac{dV(\omega(t))}{d\omega} = \frac{\partial V(\omega(t))}{\partial \omega} \cdot B \cdot u = -I_3 \cdot \omega_3^2. \quad (3.40)$$

En appliquant le théorème de Lassalle, il est clair que chaque trajectoire du système converge vers le plus grand sous-ensemble invariant du plan $\omega_3 = 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Un raisonnement simple montre que tout point de l'ensemble M suivant est un point d'équilibre :

$$M = \{ \omega : \omega = (\omega_1, 0, 0) \text{ ou } \omega = (0, \omega_2, 0) ; \omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{R} \}.$$

Rappelons que les ensembles définis par $\{ I_{31} \cdot \omega_1^2 - I_{23} \cdot \omega_2^2 = \text{constante} \}$ sont des cylindres invariants. Alors, on revient aux deux cas de (1) où $\frac{I_{31}}{I_{23}} < 0$ et $\frac{I_{31}}{I_{23}} > 0$.

Donc, au même titre que le cas (1), le système considéré est stabilisable si le moment d'inertie I_2 est tel que : $I_1 > I_2 > I_3$ ou $I_1 < I_2 < I_3$.

3) Dans le cas où $a = 0$ ou -1 , $m = -1$, $k \neq 0$, $l \neq 0$ et $F \equiv 0$, donc :

Dans ce cas, le système en boucle fermé est stable indépendamment des paramètres du retour d'état k et l (faibles ou fortes).

La condition limite d'instabilité est :

$$(a - 1) \cdot \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 + k \cdot \omega_1 + l \cdot \omega_2 - \omega_3 + F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0$$

Le traitement précédent montre que dans les cas où le système est stable, la solution converge vers le plan $\omega_3 = 0$. A ce niveau le comportement du système est celui du système réduit qui évolue sur des courbes de niveau de la forme :

$$I_{23} \cdot \omega_2^2 - I_{31} \cdot \omega_1^2 = \text{constante}.$$

Une fois le système est sur un point de M, il se stabilise.

3.2. Cas où l'action de la rétrofusée est sur les trois axes d'inertie

Considérons à nouveau le système d'équations décrivant le mouvement de rotation d'un satellite rigide avec un seul moment de contrôle mais appliqué, cette fois ci, selon une direction médiane par rapport aux trois axes principaux d'inertie. Alors le système (3.21) s'écrit de la forme:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} &= I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 + u, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= I_{31} \cdot \omega_1 \cdot \omega_3 + u, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= I_{12} \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 + u.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Proposition

Le système (3.41) est asymptotiquement stabilisable avec le retour d'état

$$u = - (I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 + I_3 \cdot \omega_3).$$

Preuve

Considérons la fonction d'énergie :

$$V(\omega(t)) = \frac{1}{2} \omega^T \cdot I \cdot \omega = \frac{1}{2} (I_1 \cdot \omega_1^2 + I_2 \cdot \omega_2^2 + I_3 \cdot \omega_3^2).\tag{3.42}$$

La dérivée $\frac{dV(\omega(t))}{d\omega}$ de $V(\omega(t))$ est :

$$\frac{dV(\omega(t))}{d\omega} = (I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 + I_3 \cdot \omega_3) \cdot u.\tag{3.43}$$

Posons : $u^* = - \frac{dV(\omega(t))}{d\omega} B = - (I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 + I_3 \cdot \omega_3)$,

Alors : $\frac{dV(\omega(t))}{d\omega} \leq 0$.(3.44)

Par le théorème de Lasalle, u^* rend l'origine asymptotiquement stable si le plus grand ensemble invariant M dans $\frac{dV(\omega(t))}{d\omega} = 0$ coïncide avec l'origine.

Montrons alors que M coïncide avec l'origine.

Considérons l'ensemble des trajectoires défini par :

$$M = \{ \omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)) : V(\omega(t)) = L, \frac{dV(\omega(t))}{d\omega} = 0, \frac{d^2V(\omega(t))}{d\omega^2} = 0 \},$$

Ces trajectoires sont les solutions du système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} (a) \quad & I_1 \cdot \omega_1^2 + I_2 \cdot \omega_2^2 + I_3 \cdot \omega_3^2 = L. \\ (b) \quad & I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 + I_3 \cdot \omega_3 = 0. \\ (c) \quad & (I_2 - I_3) \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 + (I_3 - I_1) \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 + (I_1 - I_2) \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Notons que (a) est un ellipse, (b) est un plan et (c) est un cône avec un sommet à l'origine.

L'ensemble $\{(b) \cap (c)\}$ est un nombre fini de lignes passant par l'origine et $\{(a) \cap (b) \cap (c)\}$ est un nombre fini de points isolés différents de l'origine ($L \geq 0$). Ceci implique que $(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ est un point d'équilibre différent de l'origine. Cependant, il est immédiate qu'avec le retour d'état proposé u^* et avec $b_i \neq 0$, les équations d'Euler de la vitesse angulaire ne possède pas des points d'équilibres autres que l'origine. Par conséquent, L doit être nulle, ce qui implique que M coïncide avec l'origine.

3.3. Conclusion

Dans le cas où l'action de la rétrofusée est sur le troisième axe d'inertie, le système est stabilisable et le retour d'état proposé est robuste. Mais le problème de stabilisation asymptotique reste posé.

Dans le cas où l'action de la rétrofusée est sur les trois axes d'inertie, le système est asymptotiquement stabilisable.

L'inconvénient de ce choix est qu'une telle action agit directement sur le centre de gravité du satellite.

4. SIMULATION NUMERIQUE

Afin de vérifier la validité des résultats théoriques obtenus de l'étude de la stabilité et de voir le comportement dynamique du système en boucle fermée, nous avons procédé à la simulation numérique dans l'espace d'état de ses problèmes. Ces derniers présentent une grande complexité dans l'analyse théorique du fait qu'il s'agit de systèmes non linéaires.

Le problème se ramène à résoudre des équations différentielles dans l'espace d'état par une méthode numérique. Pour ce genre de problèmes, la méthode la plus adaptée est celle de Runge-Kutta d'ordre supérieur.

Les grandeurs numériques utilisées pour la simulation sont :

- ◆ Les moments principaux d'inertie [ZP.94]:

$$I_1 = 70,86601 \text{ kg.m}^2.$$

$$I_2 = 67,891 \text{ kg.m}^2.$$

$$I_3 = 9,05443 \text{ kg.m}^2.$$

qui représentent des données réelles.

- ◆ $\alpha, \beta, \epsilon, \delta$ sont des constantes arbitraires avec ϵ, δ petits.

- ◆ Les conditions initiales sont :

$$T_{\text{initial}} = 1 \text{ sec.}$$

$$T_{\text{final}} = 100 \text{ sec.}$$

Vecteur vitesse initial.

Pour le vecteur vitesse initial, nous avons considéré plusieurs cas afin d'illustrer l'influence des conditions initiales sur le comportement du système. Les valeurs numériques de ce vecteur seront mentionnées avec les graphes.

Dans la présentation et l'analyse des résultats numériques ci-dessous, nous allons traiter le cas où le dispositif de commande est assuré par deux rétrofusées avant de passer au cas d'une seule rétrofusée.

4.1. Cas où le satellite est gouverné par deux rétrofusées

La simulation numérique va porter sur le système (3.2) bouclé, le retour d'état (3.15) et la variété centrale correspondante (3.9) dont les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} &= I_{23}.\omega_2.\omega_3 , \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= I_{31}.\omega_3.\omega_1 + u_2 , \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= I_{12}.\omega_1.\omega_2 + u_3 ,\end{aligned}\tag{3.2}$$

avec :

$$\begin{aligned}u_2 &= -I_{31}.\omega_3.\omega_1 - \omega_2 + \alpha.\omega_1^2 , \\ u_3 &= -I_{12}.\omega_1.\omega_2 - \omega_3 + \beta.\omega_1^3 ,\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\text{et } W^c = \{\omega_1, \alpha.\omega_1^2, \beta.\omega_1^3\}.\tag{3.9}$$

4.1.1. Analyse des résultats

Les graphes Gr.1 montrent le comportement de la vitesse angulaire en fonction du temps. Ces graphes représentent les trajectoires solutions du système (3.2) bouclé par le retour d'état (3.15). L'analyse graphique montre que toutes les trajectoires convergent d'une manière asymptotique vers la position d'équilibre nulle en partant d'une valeur initiale quelconque, c'est-à-dire que lorsque $t \rightarrow \infty$, $\omega(t) \rightarrow (0, 0, 0)$ pour les différentes $\omega(0)$. Ceci montre que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable.

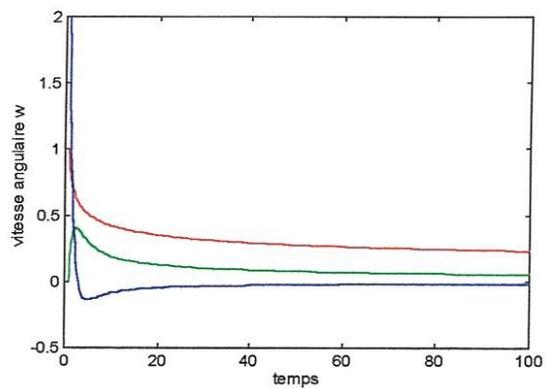
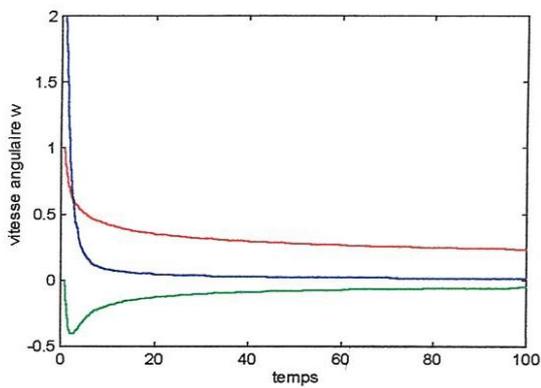
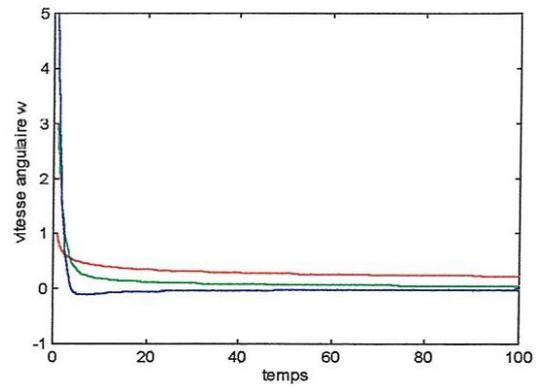
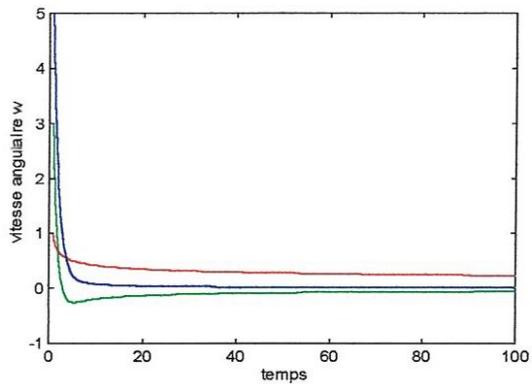
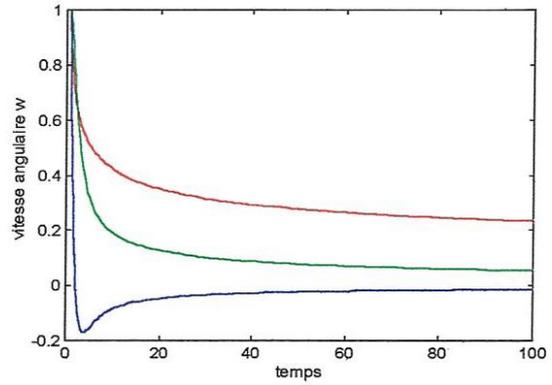
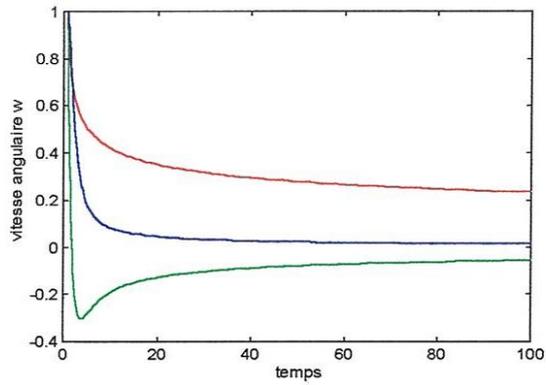
Les graphes Gr.2 représentent les comportements spatiaux de la vitesse angulaire et de la variété centrale. Ces graphes montrent que la vitesse angulaire rejoint la variété centrale sur laquelle la dynamique est attractive par l'origine. Cette variété illustre le comportement local de la solution du système au voisinage de la position d'équilibre.

Le comportement des retours d'état en fonction du temps est représenté par les graphes Gr.3 et Gr.4. Ces derniers servent à ramener le système sur la variété centrale après quoi ils reviennent à la position d'équilibre avec la vitesse angulaire.

Pour mettre en évidence la non unicité des retours d'état stabilisateurs, nous avons considéré deux cas où $\alpha = -1, \beta = +1$ et $\alpha = +1, \beta = -1$. Dans ces deux cas l'analyse des résultats graphiques de la simulation montre que le système considéré est localement asymptotiquement stable.

Cas a : $\alpha = -1, \beta = +1$

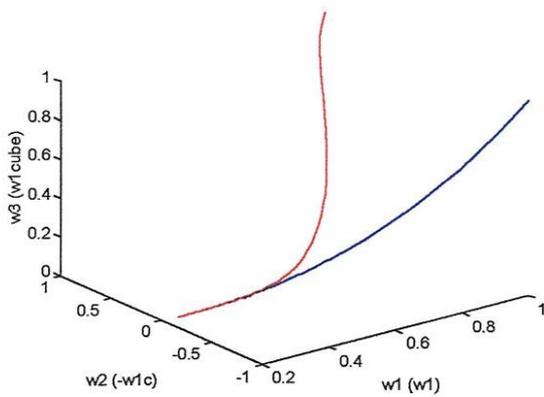
Cas a : $\alpha = +1, \beta = -1$



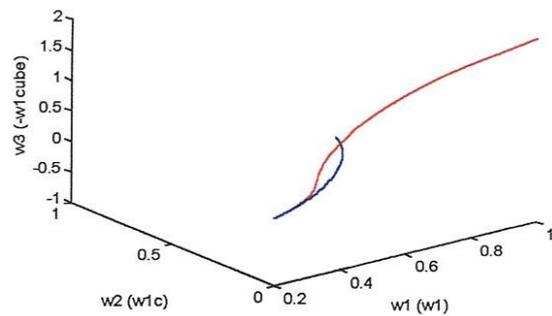
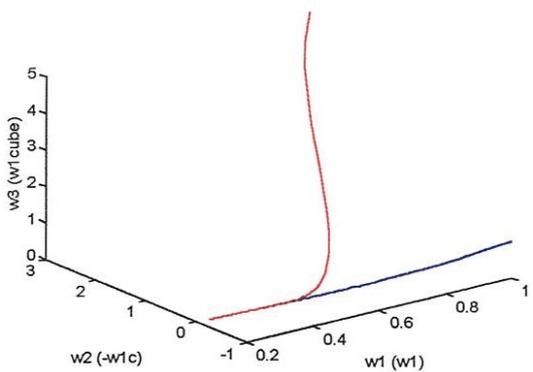
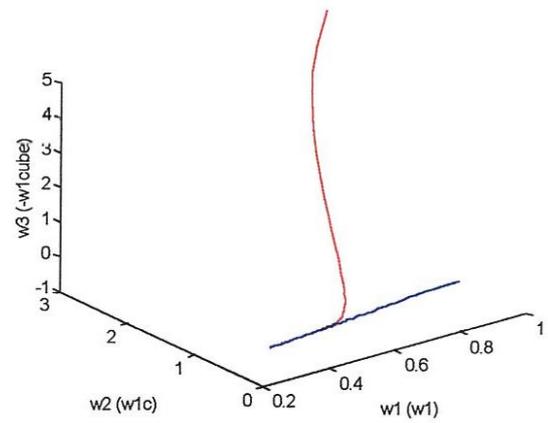
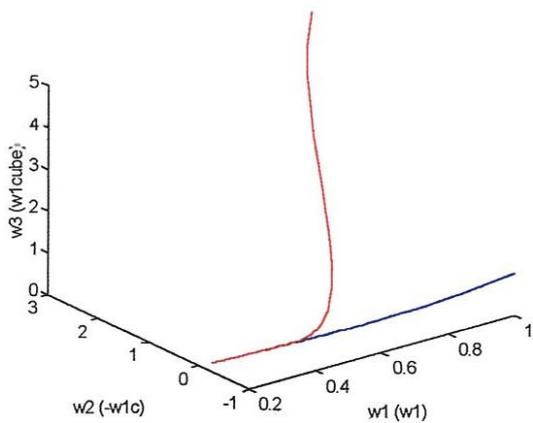
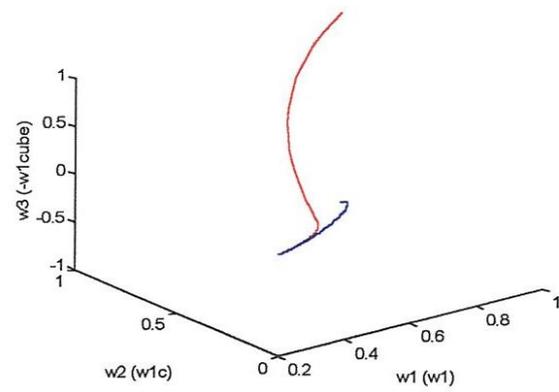
Gr.1 : Comportement de la vitesse angulaire en fonction du temps, **respectivement**, pour les différentes conditions initiales : $\omega_0 = (1, 1, 1)^T$, $\omega_0 = (1, 3, 5)^T$, $\omega_0 = (1, 0, 2)^T$.

— Vitesse angulaire ω_1
— Vitesse angulaire ω_2
— Vitesse angulaire ω_3

Cas a : $\alpha = -1, \beta = +1$



Cas a : $\alpha = +1, \beta = -1$

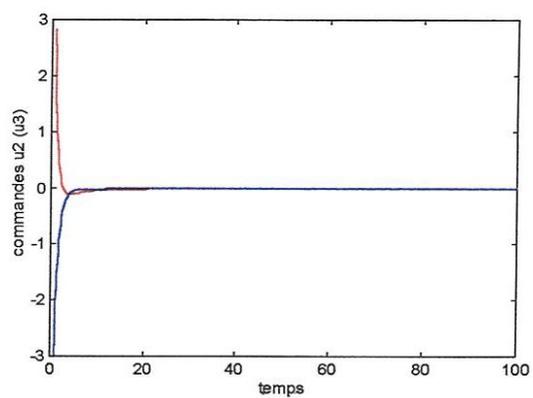
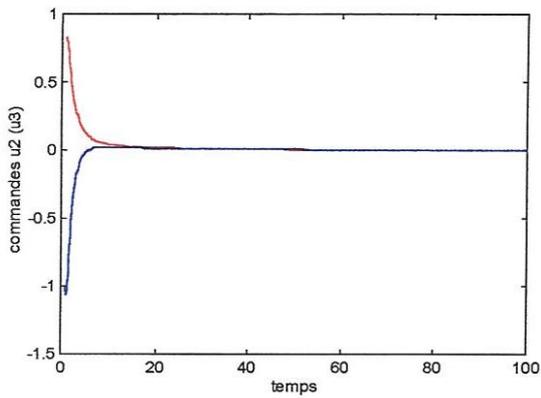
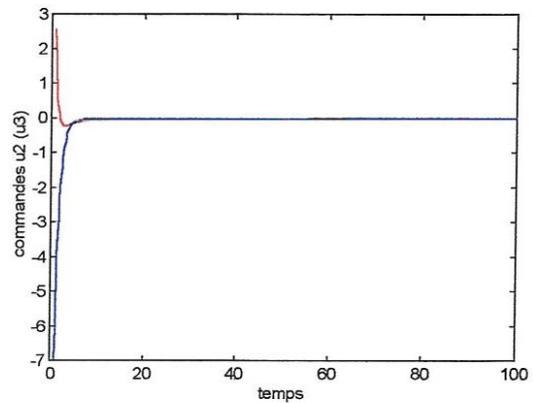
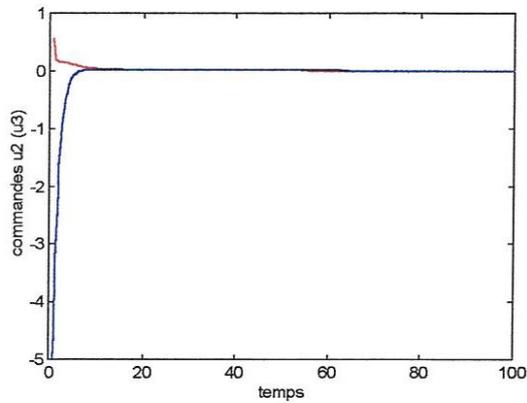
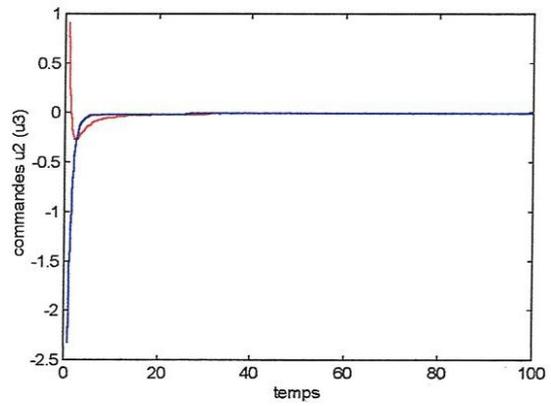
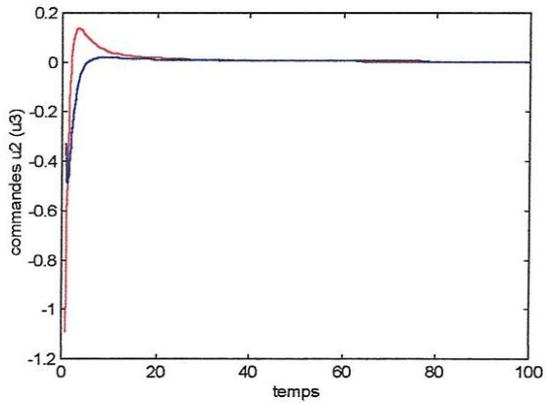


Gr.2 : Comportement spatial de la vitesse angulaire et de la variété centrale, respectivement, pour les différentes conditions initiales : $\omega_0 = (1, 1, 1)^T$, $\omega_0 = (1, 3, 5)^T$, $\omega_0 = (1, 0, 2)^T$.

- Comportement spatial de la vitesse angulaire $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$
- Comportement spatial de la variété centrale $(\omega_1, \alpha \cdot \omega_1^2, \beta \cdot \omega_1^3)$

Cas a : $\alpha = -1, \beta = +1$

Cas a : $\alpha = +1, \beta = -1$

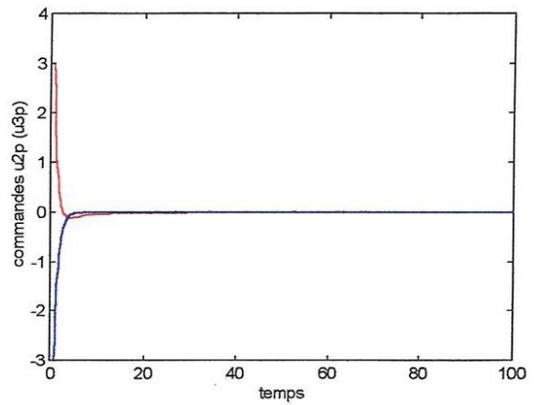
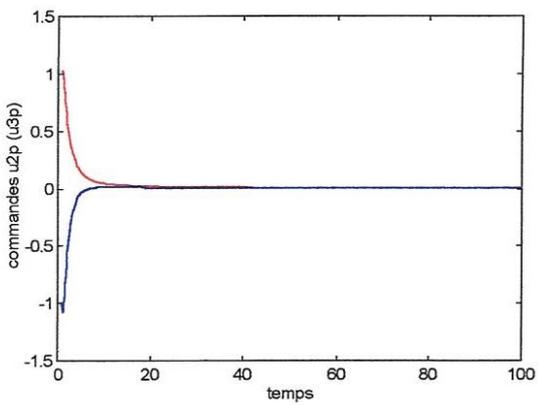
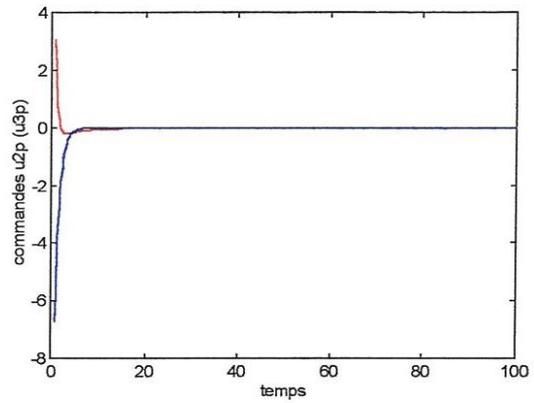
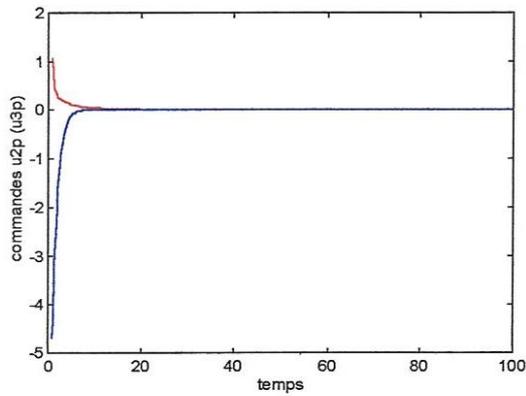
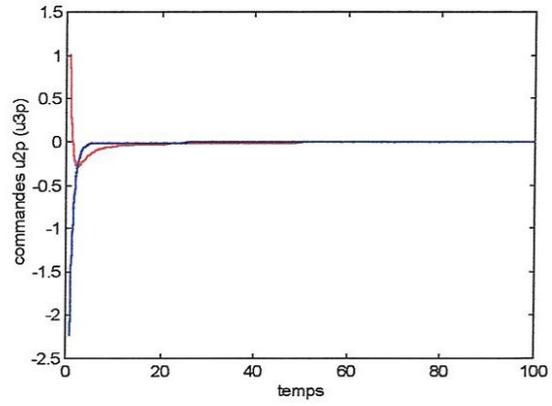
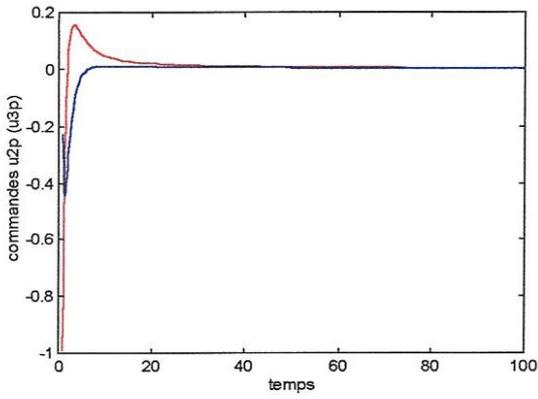


Gr.3 : Comportement des retours d'état en fonction du temps, **respectivement**, pour les différentes conditions initiales : $\omega_0 = (1, 1, 1)^T$, $\omega_0 = (1, 3, 5)^T$, $\omega_0 = (1, 0, 2)^T$.

— Commande u_2
 — Commande u_3

Cas a : $\alpha = -1, \beta = +1$

Cas a : $\alpha = +1, \beta = -1$



Gr.4 : Comportement des retours d'état en fonction du temps dans le cas où les coefficients des termes d'entraînements subissent des petits changements, respectivement, pour les différentes conditions initiales : $\omega_0 = (1, 1, 1)^T$, $\omega_0 = (1, 3, 5)^T$, $\omega_0 = (1, 0, 2)^T$.

— Commande u_{2p}
 — Commande u_{3p}

4.2. Cas où le satellite est gouverné par une seule rétrofusée

La simulation numérique va porter sur le système (3.21) en boucle fermé et le retour d'état (3.31) correspondant pour différents cas dont les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} &= \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 , \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \right) \cdot \omega_3 \cdot \omega_1 , \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 + u ,\end{aligned}\tag{3.21}$$

avec :

$$u = a \cdot \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 + k \cdot \omega_1 + l \cdot \omega_2 + m \cdot \omega_3 + F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) ,\tag{3.31}$$

4.2.1. Analyse des résultats

Les graphes Gr.5, Gr.6, Gr.7 et Gr.8 montrent les comportements de la vitesse angulaire et du retour d'état en fonction du temps, respectivement, pour les cas suivants :

Cas a : $a = -1$, $m = -1$, $k = l = 0$ et $F = 0$.

Cas b : $a = 0$, $m = -1$, $k = l = 0$ et $F = 0$.

Cas c : $a = -1$, $m = -1$, $k \neq 0$, $l \neq 0$ et $F = 0$.

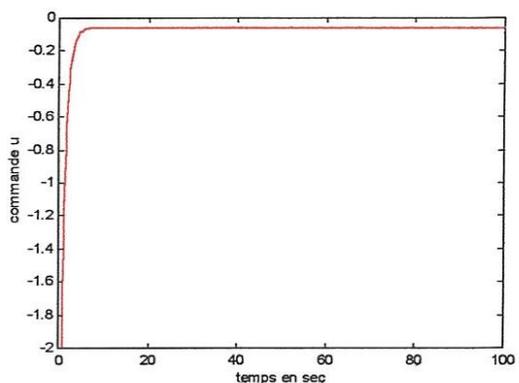
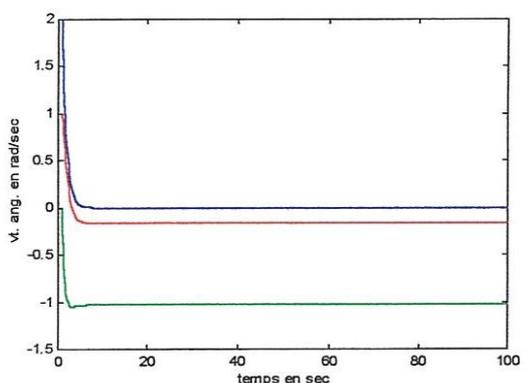
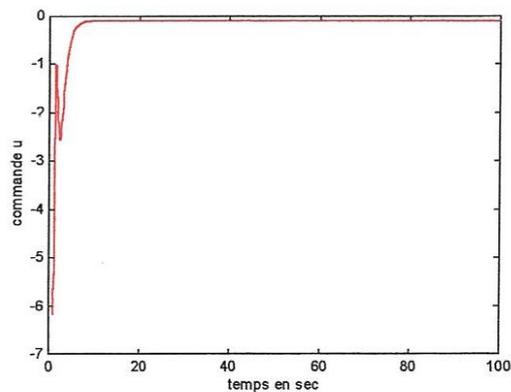
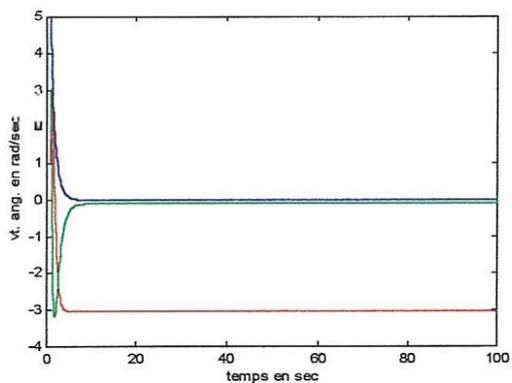
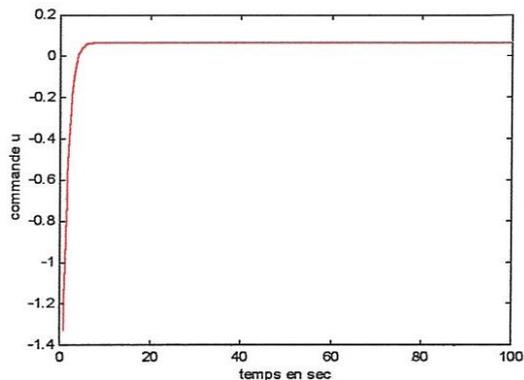
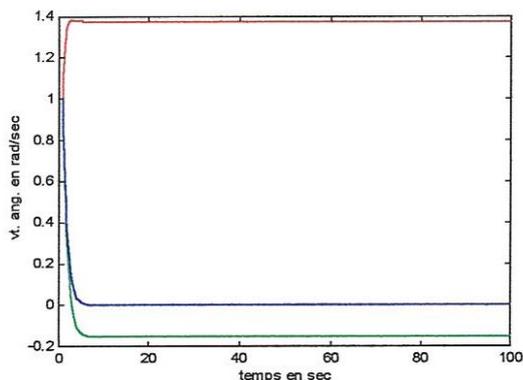
Cas d : $a = 0$, $m = -1$, $k \neq 0$, $l \neq 0$ et $F = 0$.

Dans presque tout les cas, nous avons le résultat tel que ω_1 , ω_2 convergent vers une constante, et $\omega_3 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

L'analyse graphique montre que, dans tout les cas, en partant d'une valeur initiale quelconque, les trajectoires $\omega_3(t)$ convergent d'une manière asymptotique vers la position d'équilibre nulle et $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ convergent vers une constante.

Le comportement des retours d'état montre que ces derniers convergent vers la position d'équilibre nulle, ce qui permet de dire que les retours d'état proposés sont stabilisateurs.

Cas a : $a = -1, m = -1, k = 1 = 0, F = 0$

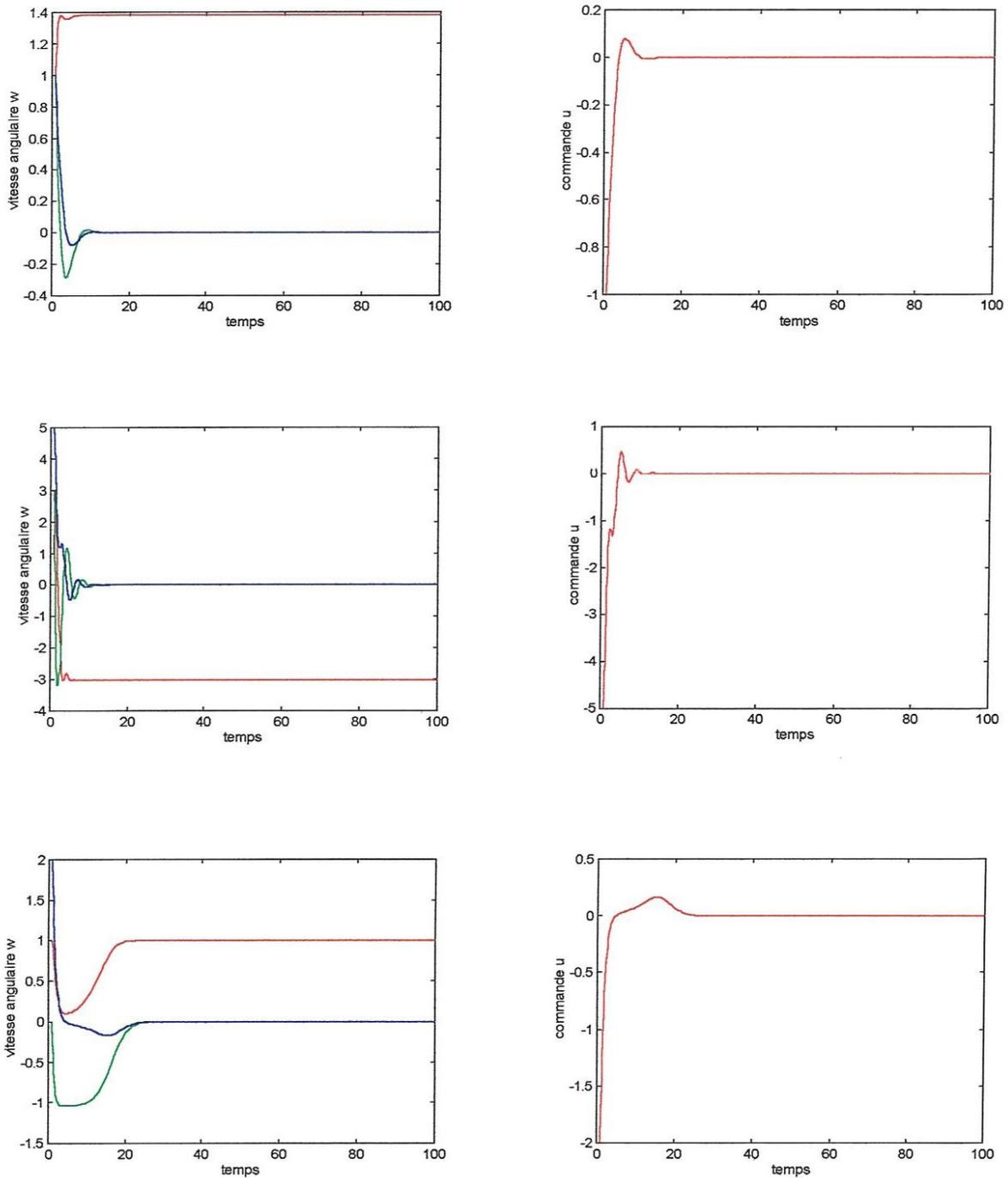


Gr.5 : Comportement de la vitesse angulaire et du retour d'état en fonction du temps, respectivement, pour les différentes conditions initiales :

$$\omega_0 = (1, 1, 1)^T, \quad \omega_0 = (1, 3, 5)^T, \quad \omega_0 = (1, 0, 2)^T.$$

- Vitesse angulaire ω_1
- Vitesse angulaire ω_2
- Vitesse angulaire ω_3

Cas b : $a = 0, m = -1, k = 1 = 0, F = 0$



Gr.6 : Comportement de la vitesse angulaire et du retour d'état en fonction du temps, **respectivement**, pour les différentes conditions initiales :

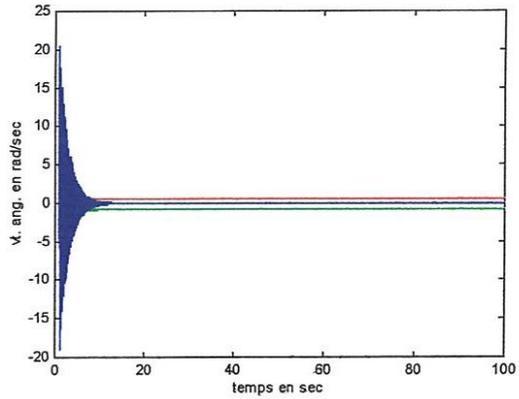
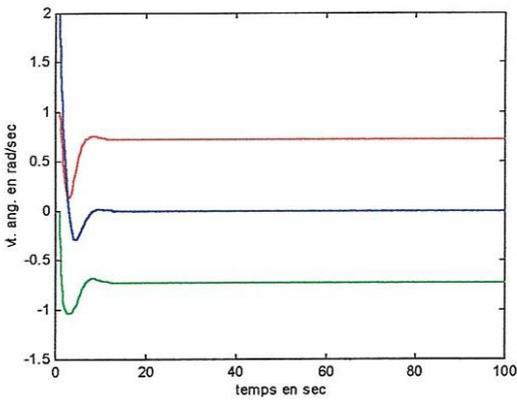
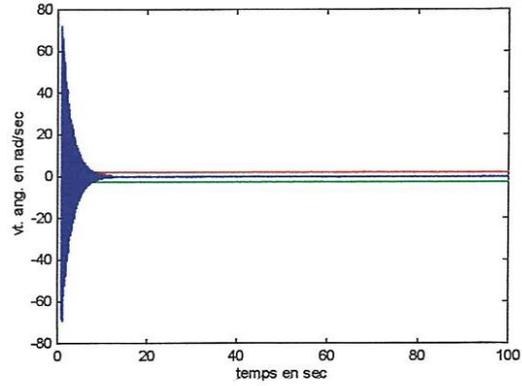
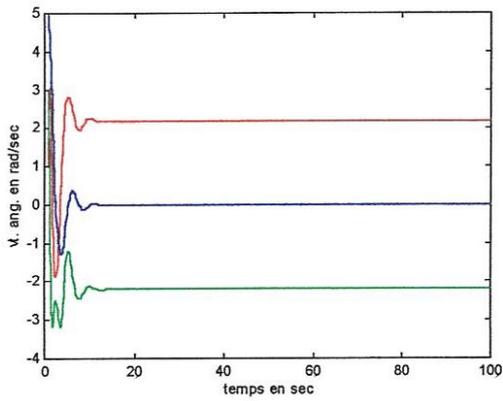
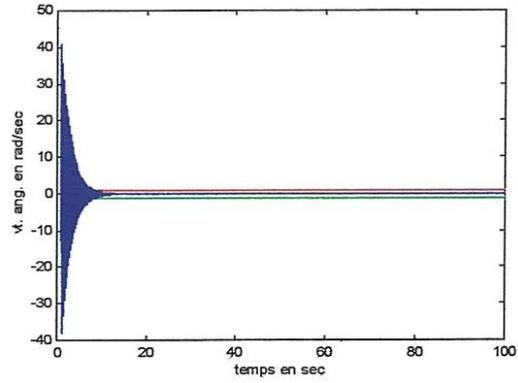
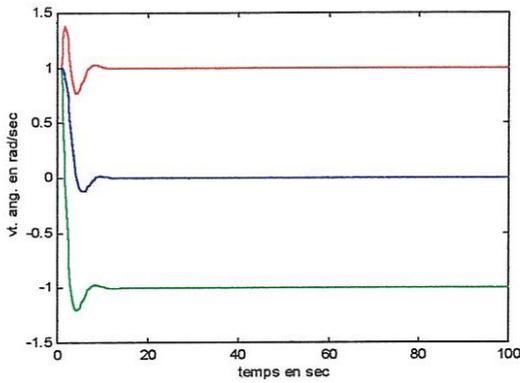
$$\omega_0 = (1, 1, 1)^T, \quad \omega_0 = (1, 3, 5)^T, \quad \omega_0 = (1, 0, 2)^T.$$

— Vitesse angulaire ω_1
— Vitesse angulaire ω_2
— Vitesse angulaire ω_3

Cas c : $a = -1, m = -1, k \neq 0, l \neq 0, F = 0$

k et l faibles ($k = 0.5, l = 0.5$)

k et l fortes ($k = 400, l = 300$)



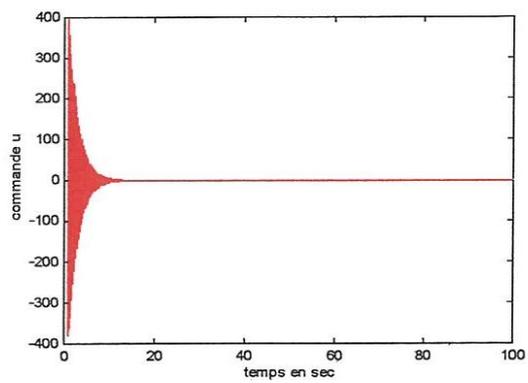
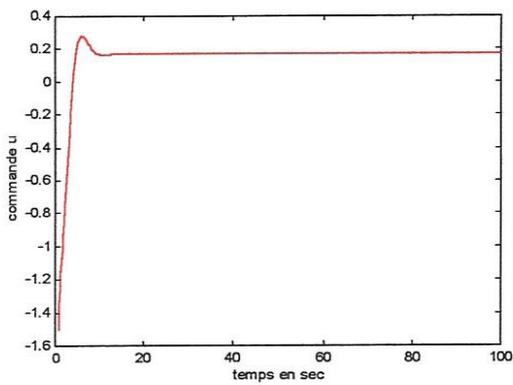
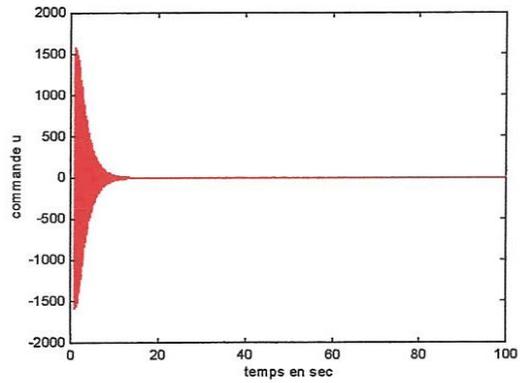
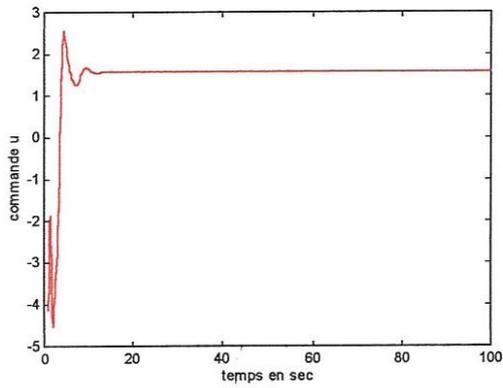
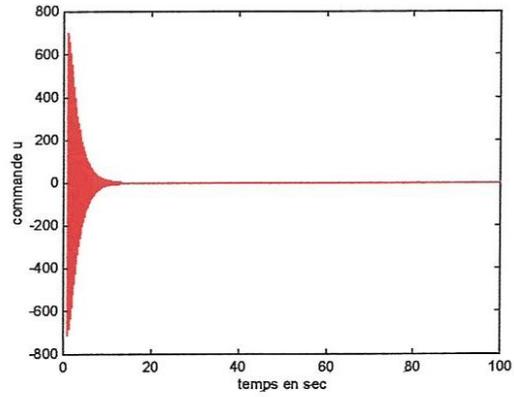
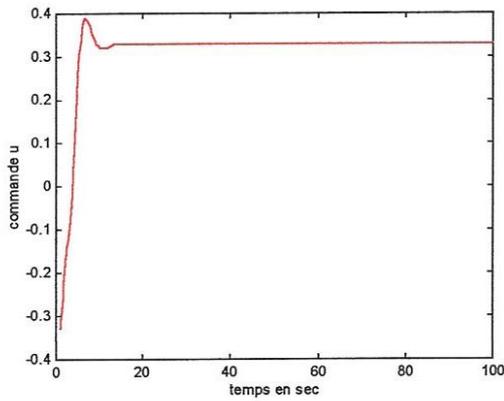
Gr.7a : Comportement de la vitesse angulaire en fonction du temps, respectivement, pour les différentes conditions initiales : $\omega_0 = (1, 1, 1)^T$, $\omega_0 = (1, 3, 5)^T$, $\omega_0 = (1, 0, 2)^T$.

— Vitesse angulaire ω_1
— Vitesse angulaire ω_2
— Vitesse angulaire ω_3

Cas c : $a = -1$, $m = -1$, $k \neq 0$, $l \neq 0$, $F = 0$

k et l faibles ($k = 0.5$, $l = 0.5$)

k et l fortes ($k = 400$, $l = 300$)



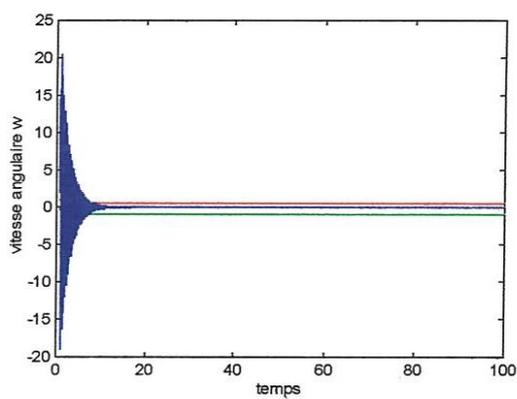
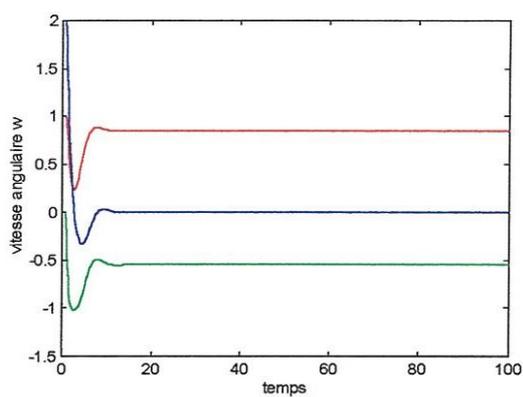
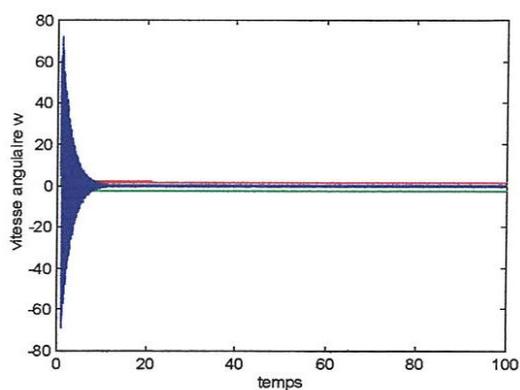
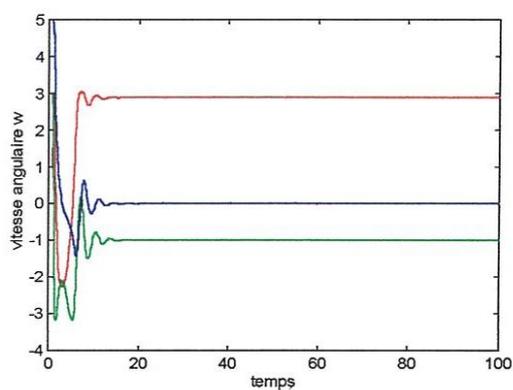
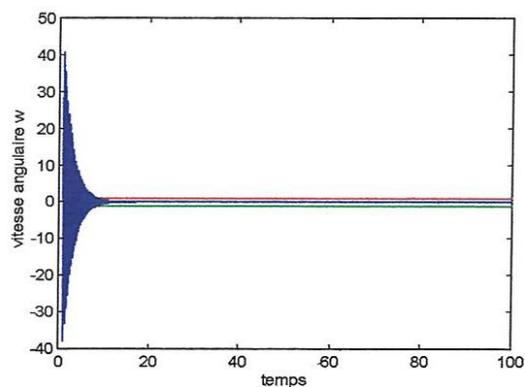
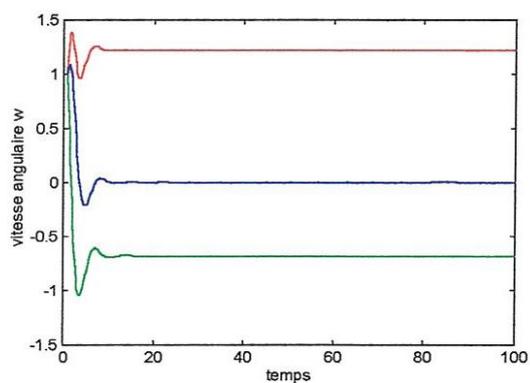
Gr.7b : Comportement du retour d'état en fonction du temps, respectivement, pour les différentes conditions initiales : $\omega_0 = (1, 1, 1)^T$, $\omega_0 = (1, 3, 5)^T$, $\omega_0 = (1, 0, 2)^T$.

— Commande u

Cas d : $a = -1, m = -1, k \neq 0, l \neq 0, F = 0$

k et l faibles ($k = 0.5, l = 0.5$)

k et l fortes ($k = 400, l = 300$)



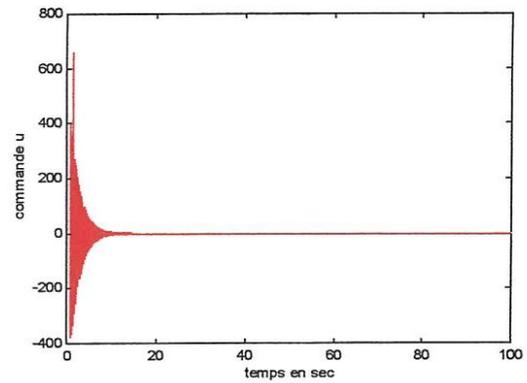
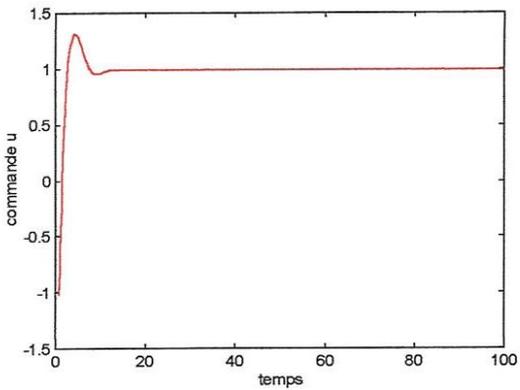
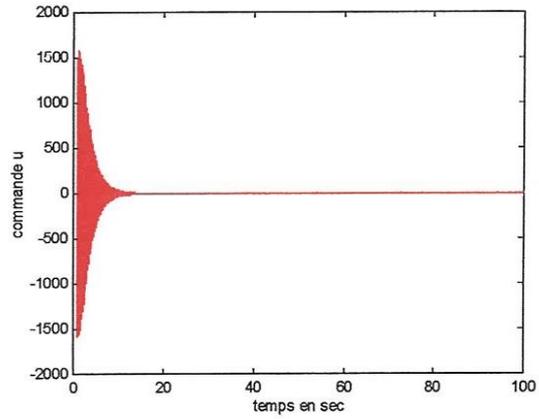
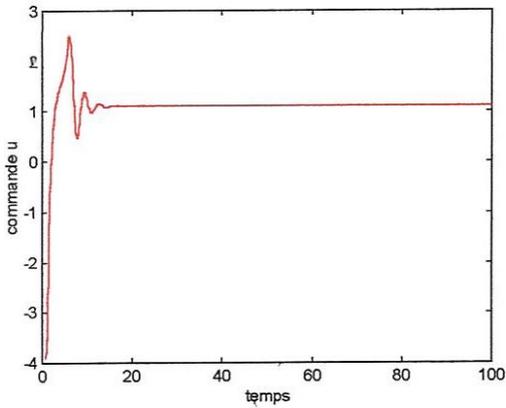
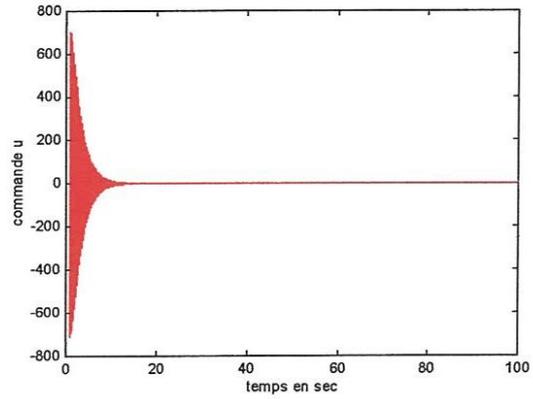
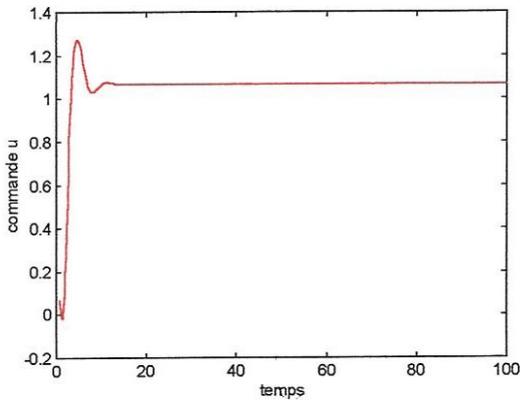
Gr.8a : Comportement de la vitesse angulaire en fonction du temps, respectivement, pour les différentes conditions initiales : $\omega_0 = (1, 1, 1)^T, \omega_0 = (1, 3, 5)^T, \omega_0 = (1, 0, 2)^T$.

— Vitesse angulaire ω_1
 — Vitesse angulaire ω_2
 — Vitesse angulaire ω_3

Cas d : $a = 0, m = -1, k \neq 0, l \neq 0, F = 0$

k et l faibles ($k = 0.5, l = 0.5$)

k et l fortes ($k = 400, l = 300$)



Gr.8b : Comportement du retour d'état en fonction du temps, respectivement, pour les différentes conditions initiales : $\omega_0 = (1, 1, 1)^T$, $\omega_0 = (1, 3, 5)^T$, $\omega_0 = (1, 0, 2)^T$.

— Commande u

5. CONCLUSION

Sur la base des résultats obtenus, nous pouvons faire les conclusions suivantes :

Dans le cas de deux rétrofusées :

- 1) Le système étudié est asymptotiquement stabilisable.
- 2) Les retours d'état asymptotiquement stabilisateurs proposés ne sont pas les seuls.
- 3) La variation non excessive des paramètres des retours d'état stabilisateurs n'influe pas sur la stabilité asymptotique du système bouclé. Ils sont donc robustes.

Dans le cas d'une seule rétrofusée :

Dans le cas où l'action de la rétrofusée est sur le troisième axe d'inertie, le système est stabilisable et le retour d'état proposé est robuste.

Dans le cas où l'action de la rétrofusée est sur les trois axes d'inertie, le système est asymptotiquement stabilisable.

L'inconvénient de ce choix est qu'une telle action agit directement sur le centre de gravité du satellite.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Ce travail, nous a permis de découvrir de nouvelles techniques avancées utilisées dans le traitement des problèmes de contrôlabilité et de stabilisation des systèmes dynamiques non linéaires. Notre tâche a consisté à regrouper les différents travaux réalisés dans ce domaine, de les appliquer au problème de contrôle d'attitude d'un satellite rigide gouverné par des rétrofusées et de valider numériquement les résultats théoriques obtenus.

Concernant le premier problème, nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité du satellite rigide en considérant les cas où le dispositif de commande est assuré par une seule ou deux rétrofusées. Une analyse de ses conditions permet de donner une description complète du positionnement des rétrofusées conduisant à un système contrôlable. Ainsi, nous avons montré qu'il suffit d'un seul couple de rétrofusées pour avoir un système contrôlable.

Concernant le problème de stabilisation des systèmes non linéaires, nous avons distingué, à l'inverse du cas linéaire, deux types de stabilisations locale et globale.

Pour l'aspect local, l'étude standard consiste à utiliser la théorie des variétés invariantes et en particulier centrales introduites par J. Carr [CA.81] et qui consiste à :

- (i) Chercher un retour d'état qui permet de fixer localement cette variété centrale de telle sorte qu'elle soit exponentiellement attractive.
- (ii) Chercher une variété centrale $y = h(x)$, tel que l'origine soit localement stable pour la dynamique sur cette variété.

Pour l'aspect global, la théorie la plus récente est celle développée par H. TEBBIKH dans [TE2.89] qui consiste à construire une fonction de Lyapunov globalement attractive par l'origine.

En application de cette théorie, nous avons étudié le problème de stabilisation locale par retour d'état de la vitesse angulaire d'un satellite rigide gouverné par une ou deux rétrofusées. Nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation locale du système en se basant sur la théorie des variétés invariantes et en particulier centrales. Pour valider ces résultats théoriques, nous avons procédé à des simulations numériques.

Pour l'aspect global, l'étude a montré que la stabilité asymptotique du système est possible et peut être assurée par une seule rétrofusée dont l'action agit sur les trois axes d'inertie.

Les résultats de simulation numérique montre la validité des résultats théoriques obtenus et illustrent le comportement dynamique de la solution du système étudié.

Trois problèmes récents constituent des perspectives ouvertes aux études :

- 1) La stabilité asymptotique du système décrivant le problème de contrôle d'attitude d'un satellite rigide lorsque le dispositif de commande est assuré par une seule rétrofusée dont l'action est alignée avec un axe d'inertie.
- 2) L'étude faite suppose que les actions des rétrofusées sont alignées avec les axes principaux d'inerties. Les cas où les rétrofusées sont perpendiculaires à ses axes restent toujours ouverts.
- 3) Le problème de contrôle optimal est toujours ouvert surtout lorsqu'on sait que les retours d'état stabilisateurs ne sont pas uniques.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [AE1.85] **D. Aeyels**, "Stabilization by smooth feedback of the angular velocity of a rigid body", systems and control letters, 5(1985), p.59-63.
- [AE2.85] **D. Aeyels**, "Stabilization of a class of nonlinear systems by smooth feedback control", systems and control letters, 5(1985), p.289-294.
- [AN.88] **A. Andreni et Col.**, "Stabilization of nonlinear systems by means a linear feedbacks", Nonlinear control conference at Nantes, 1988.
- [AR1.74] **V. I. Arnold**, "Algebraic unsolvability of the problem of lyapunov stability and the problem of topological classification of singular points of an analytic system of differential equations", Func. Anal. and its Applications, 4(1970), p.173-180.
- [AR2.74] **V. I. Arnold**, "Equations différentielles ordinaires", Editions Mir, 1974.
- [AR3.76] **V. I. Arnold**, "Les méthodes mathématiques de la mécanique classique", Editions Mir, 1976.
- [AR4.80] **V. I. Arnold**, "Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires", Editions Mir, 1980.
- [AV.86] **V. Arnold**, **A. Varchenko**, **S. Goussein-Zadé**, "Singularités des applications différentielles", Editions Mir, 1986.
- [BA.81] **J. Baillieul**, "Controllability and observability of polynomial dynamical systems", Nonlinear analysis theory, Methods and applications, Vol. 5, N° 5, p. 543-552, 1981.
- [BB.97] **A. Bara**, **M.L. Belhouchet**, **A.R. Deghdegha**, "La commande optimale : Le problème de poursuite", Mémoire de fin d'études soutenue en juin 1997, I.G.E. de Guelma.
- [BI.91] **C. I. Byrnes et A. Isidori**, "On the attitude stabilisation of rigid spacecraft", Automatica, Vol.27, N°1, 1991, p. 87-95.
- [BO1.80] **N. Bourbaki**, "Groupes et algèbre de lie", chapitres 2 et 3, Diffusion C. C. L. S., Paris 1971.

- [BO2.80] **B. Bonnard**, "Une loi de commande pour le problème de contrôle de l'attitude d'un satellite", N°8032, Université de Bordeaux, 1980.
- [BO3.81] **B. Bonnard**, "Contrôlabilité des systèmes non linéaires", C.R.A.S., Série I, t.292, (9/3/1981), p.535-537.
- [BO4.82] **B. Bonnard**, "Contrôle de l'attitude d'un satellite rigide", R.A.I.R.O. Aut./ Systems analysis and control, Vol.16, 1(1982), p.85-93.
- [BO5.83] **B. Bonnard**, "Contribution à la théorie des systèmes non linéaires", Thèse d'état, Grenoble, 1983.
- [BO6.88] **B. Bonnard**, "Remarques sur la classification des systèmes non linéaires", Acte du colloque d'Automatique de Nantes, 1988.
- [BO7.88] **B. Bonnard**, "Feedback equivalence for nonlinear systems and the time optimal control problem", Accepté à S.I.A.M.J. on control and optimization, 1988.
- [BO8.90] **B. Bonnard**, "Feedback equivalence for nonlinear systems and the time optimal control problem", SIAM J. Control and Decision, 1990.
- [BR1.78] **R. W. Brockett**, "Feedback invariants for nonlinear systems", Proc. I.F.A.C. Congress, Helsinki, 1978.
- [BR2.83] **R. W. Brockett**, "Asymptotic stability and feedback stabilization", In Differential Geometric Control, Ed. Brockett and as., Birkhauser, 1983.
- [BT1.87] **B. Bonnard et H. Tebbikh**, "Quadratic control systems", Note Laboratoire d'automatique de Grenoble, 1987.
- [BT2.87] **B. Bonnard et H. Tebbikh**, "Quadratic control systems", Proc.26th, I.E.E.E./C.D.C. Los Angeles, 1987.
- [BT3.90] **B. Bonnard et H. Tebbikh**, "Réalisation minimale en 0 des systèmes polynomiaux homogènes", R.A.I.R.O. A.P.I.I., N°4, 1990.
- [BT4.91] **B. Bonnard et H. Tebbikh**, "Quadratic control systems", M.C.S.S., N°4, 1991, p.139-160.
- [BU.88] **H. Buhler**, "Conception des systèmes automatiques", Press polytechnique romandes, 1988.

- [BY.88] **C.I. Byrnes et Col.**, "Analysis and simulation of a controlled rigid spacecraft : Stability and instability near attractors", Proceeding of the 27th conference on decision and control, 1988.
- [CA.81] **J. Carr**, "Applications of centre manifold theory", Springer-verlag, Applied mathematical sciences, 35, 1981.
- [CB.98] **J. M. Coron and A. N. Brigitte**, "Stabilization of a rotating body beam without damping", I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, Vol. 43, N° 5, p. 608-618,1998.
- [CK.96] **J. M. Coron and E. Kerai**, "Explicit feedbacks stabilizing the attitude of a rigid spacecraft with two control torques", Automatica, Vol.32,N° 5, p. 669 - 677, 1996.
- [CO1.92] **J. M. Coron**, "Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift", Math. of control, Signals and systems, p. 295-312, 1992.
- [CO2.95] **J. M. Coron**, "On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time varying feedback law", SIAM J. Control and Optimization, Vol. 33, N° 3, p. 804 - 833, 1995.
- [CO3.98] **J. M. Coron**, "On the stabilization of some nonlinear control systems : results, tools, and application", Nato Advanced Study and Institute, 'Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control', 1998.
- [CR.84] **P. E. Crouch**, "Spacecraft attitude control and stabilisation : Applications of geometric control theory to rigid body models", I.E.E.E. Trans. Automatique Control Letters, 29, 4(1984), p.321-331.
- [CR.85] **M. Crasnov, A. Késsélev**, "Fonction d'une variable complexe. Calcul opérationnel. Théorie de la stabilité", Editions Mir, 1985.
- [DI.83] **M. Dienner**, "Equations différentielles", Cours du module M108, Département de mathématiques de l'université d'Oran, Editions Office des publications Universitaires, 1983.
- [EK.84] **M. EL-Baraka, P.S. Krishnaprasad**, "Geometric methods for multibody dynamics", A.I.A.A. "Dynamics specialists", Conference Palm. Springs, 1984, p.1-9.
- [GA.66] **F. R. Gantmacher**, "Théorie des matrices", tome 1, Ed. Dunod, 1966.

- [GB.84] **J.P. Gauthier et B. Bonnard**, "Stabilisation des systèmes non linéaires", I. D. Landau, "Outils et models mathématiques pour l'automatique et le traitement de signal", Editions C.N.R.S., 1984.
- [GD.91] **S. Di Gennaro and A. Dyda**, "Attitude control of a satellite with damping compensation on the flexible boom", Proc. Conf. on Decision and Control, p. 1656-1660,1991.
- [GE1.91] **G. Georgiou et col.**, "On the nonlinear adaptive control of flexible spacecraft", Proc. First ESA Intenat. Conf. on 'Spacecraft Guidance, Navigation and Control Systems', ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 4 - 7 june 1991, p. 509 - 514.
- [GE2.95] **S. Di Gennaro**, "Adaptive robust stabilization of rigid spacecraft in presence of disturbances", Proc. of the 34th Conference on Decision and Control, New oricans, LA December 1995, p. 1147-1151.
- [GE3.96] **S. D. Gennaro et col.**, "Digital controllers for attitude manoeuvring : Experimental results", Proceedings third intenational conference on spacecraft guidance, Navigation and control systems, E.S.T.E.C., Noordwijk, the Netherlands, 26-29 November 1996, p.439-445.
- [GE4.96] **S. Di Gennaro**, "Output feedback stabilisation of flexible spacecraft", Proc. of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, December 1996.
- [GE5.97] **S. Di Gennaro**, "Adaptive vibration suppression for flexible spacecraft", Proc. Conference on Decision and Control, 1997.
- [GO.69] **G. Godbillon**, "Géométrie différentielle et mécanique analytique", Editions Herman, 1969.
- [HA.82] **P. Hartman**, "Ordinary differential equations", Birkhauser, 1982.
- [JK.85] **V. Jurdjevic and I. Kupka**, "Polynomial control systems", Maths annal., 272 , 1985 , p. 361-368.
- [KH.77] **A. J. Krener and R. Hermann**, "Nonlinear observability and controllability ", IEEE. Trans. Aut. Cont., Vol. AC-22, 1977, p.728-740.
- [KU.73] **A. Kurosh**, "Cours d'algèbre supérieur", Editions Mir, 1973.

- [QJ.78] **J.P. Quinn and J. Jurdjevic**, "Controllability and stability", J. of Diff. Equations, 28(1978), p.381-389.
- [LA.76] **J. P. Lassale**, "The stability of dynamical systems", Z. Arststein-Philadelphia : Society for industrial and Applied Mathematics, 1976.
- [LI.88] **J. L. Lions**, "Analyse mathématique et applications", Editions Gauthier-Villard, 1988.
- [MA.56] **J. L. Massera**, "Contributions to stability theory", Annals. Of Math., Vol.64, 1(1956), p.182-206.
- [ME1.66] **G. Meyer**, "On the use of Euler's theorem on rotations for the synthesis of attitude control systems", Ames. Res. Cen., Moffet field, CA, NASA Tech. Note NASA TN. D-3643, 1966.
- [ME2.66] **G. Meyer**, "Design and global analysis of spacecraft attitude control systems", Ames. Res. Cen., Moffet field, CA, NASA Tech. Note NASA TR. R-361, 1971.
- [MO.88] **G. Meisters and C. Olech**, "Solution of the asymptotic stability jacobian conjoncture for the polynomial case", Analyse mathématiques et applications, Gauthier-Villars, Paris 1988.
- [MT.99] **B. Madi et H. Tebbikh**, "Etude théorique et simulation numérique de la stabilisation par retour d'état de la vitesse angulaire d'un satellite rigide gouverné par deux rétrofusées", Congrès National de Mathématiques/99, Université de Badji Mokhtar , Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, 17-18-19 mai 1999.
- [OG.94] **K. Ogata**, "Discrete time control systems", 2nd Ed., Prentice-Hall, 1994.
- [RF.89] **M. Rivoire et J.L. Ferrrier**, "Cours d'automatique", Tome1.'Signaux et systèmes', Editions Eyrolles, 1989.
- [SJ.60] **H.J. Susmann and J. Jurdjevic**, "Controllability of nonlinear systems", J. of Diff. Eq., 12(1960), p. 95-116.
- [ST.84] **V. Strajinski**, "Mécanique rationnelle", Editions Mir , 1984.
- [ST.85] **V. Strajinski**, "Méthodes appliquées en théorie des oscillations non linéaires", Editions Mir , 1985.

- [TE1.85] **H. Tebbikh**, "Un survey sur le problème de contrôle de l'attitude d'un satellite", Rapport de D.E.A., I.N.P.G. 1985, L.A. de Grenoble.
- [TE2.89] **H. Tebbikh**, "Structure et commande des systèmes polynomiaux homogènes", Thèse I.N.P.G. soutenue le 13 Octobre 1989, Laboratoire d'Automatique de Grenoble.
- [TE3.95] **H. Tebbikh**, "Contrôlabilité des systèmes polynomiaux homogènes et en particulier quadratiques", Proceeding of the CMSES'95, Guelma 7th & 8th novembre 1995.
- [TE4.96] **H. Tebbikh**, "Classification par feedback des systèmes quadratiques", Revue des Sciences Technologiques : Synthèse, Vol N°1, 1996, p. 42-47.
- [TM.99] **H. Tebbikh et B. Madi**, "Controlé d'attitude d'un satellite rigide gouverné par des rétrofusées", 4^{ème} congrès de mécanique, Université Hassan II , Faculté des Sc. et Tech. de Mouhammadia, 13-16 Avril 1999.
- [WI.67] **F.W. Wilson**, "The structure of the level surfaces of lyapunov function", J. of Diff. Equations, Vol.4, 1967, p.323-329.
- [WO.79] **W. M. Wonham**, "Linear multivariable control : A geometric approach", Appl. Of Maths, 10(1979), Springer-verlag.
- [ZP.94] **R. Zhao, T.A. Posbergh**, "Feedback stabilisation of uniform rigid body rotation ", Systems and control letters, 22(1994), p.39-45.

ANNEXES

ANNEXE 1

EQUATION DE MOUVEMENT D'UN SATELLITE RIGIDE GOUVERNE PAR DES RETROFUSEES

Dans cet annexe, nous allons rappeler les équations du mouvement de rotation, autour du centre de gravité, d'un satellite rigide soumis à l'action des forces extérieures créées par des rétrofusées.

1. NOTATIONS

$M = (M_1, M_2, M_3)^t$ est le vecteur du moment cinétique du satellite par rapport au centre de gravité et par rapport au satellite lui même .

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^t$ est le vecteur vitesse angulaire par rapport au satellite .

$m = R. M$ est le vecteur du moment cinétique du satellite par rapport au centre de gravité dans l'espace est invariant par le moment (i.e. le vecteur M doit se déplacer de telle sorte que le vecteur $m = R. M(t)$ ne soit pas fonction du temps t).

$F(t) = u(t).(I_1.b_1, I_2.b_2, I_3.b_3)^t$ est le vecteur du moment des forces extérieures appliquées au satellite, créées par les rétrofusées.

$F = R. F(t)$ est le moment des forces extérieures par rapport au référentiel mobile (référentiel lié au satellite).

I_1, I_2, I_3 désignent les moments d'inertie principaux que l'on considère généralement tous distincts et plus particulièrement : $I_1 > I_2 > I_3$.

Les équations d'Euler sont basées sur les deux théorèmes suivants.

2. THEOREME [AR3.76]

Si le satellite tourne autour de son centre de gravité, la vitesse absolue est égale à la somme de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement de la rotation.

$$V = V_{rel} + V_{entr} , \quad (1)$$

Où : $V = \frac{dM}{dt}$ est la vitesse absolue ,

$V_{rel} = R. \frac{dM}{dt}$ est la vitesse relative ,

$V_{entr} = \frac{dR}{dt} \cdot M = [\omega, M]$ est la vitesse d'entraînement de la rotation.

3. THEOREME [AR3.76]

En présence des forces extérieures , les équations de mouvement d'un solide sont données par :

$$\frac{dM}{dt} = [M, \omega] + F(t) . \quad (2)$$

En appliquant le théorème 2 au mouvement du satellite par rapport au repère fixe, l'équation (2) s'écrit sous la forme :

$$\frac{dm}{dt} = R. \frac{dM}{dt} + [\omega, m] , \quad (3)$$

Si on note par f la somme des moments par rapport au centre de gravité dus à l'action des forces extérieures, appliquées au satellite par les rétrofusées, dans le système de coordonnées fixes et par F la même somme dans le système de coordonnées mobiles, alors la relation reliant f et F est la suivante :

$$\frac{dm}{dt} = f = R. F(t) , \quad (4)$$

L'équation (3) prend ainsi la forme de l'équation (2), telle que :

$$\frac{dM}{dt} = [M, \omega] + F(t) . \quad (2)$$

Si on note :

$$\omega = \omega_1.E_1(t) + \omega_2.E_2(t) + \omega_3.E_3(t) , \quad (5)$$

et $M = M_1.E_1(t) + M_2.E_2(t) + M_3.E_3(t) , \quad (6)$

Les composantes de ω et M suivant les axes d'inertie dont l'origine est le centre de gravité, sont alors :

$$M_i = I_i.\omega_i \quad (i= 1, 2, 3) , \quad (7)$$

et l'équation (2) prend ainsi la forme répartie suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_1(t)}{dt} &= a_1 \cdot M_2(t) \cdot M_3(t) + F_1(t) , \\
 \frac{dM_2(t)}{dt} &= a_2 \cdot M_3(t) \cdot M_1(t) + F_2(t) , \\
 \frac{dM_3(t)}{dt} &= a_3 \cdot M_1(t) \cdot M_2(t) + F_3(t) ,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

où : $a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 \cdot I_3}$, $a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1 \cdot I_3}$, $a_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 \cdot I_2}$.

Sachant que $M_i = I_i \cdot \omega_i$ ($i = 1, 2, 3$), les équations (8) peuvent être exprimées en fonction des composantes du vecteur vitesse angulaire et prennent ainsi la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\omega_1(t)}{dt} &= \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) \cdot \omega_2(t) \cdot \omega_3(t) + h_1 \cdot u(t) , \\
 \frac{d\omega_2(t)}{dt} &= \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \right) \cdot \omega_3(t) \cdot \omega_1(t) + b_2 \cdot u(t) , \\
 \frac{d\omega_3(t)}{dt} &= \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \cdot \omega_1(t) \cdot \omega_2(t) + b_3 \cdot u(t) .
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Sous forme condensée, le système (9) s'écrit :

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = Q(\omega(t)) + \sum_{k=1}^m u_k(t) \cdot b^k ,
 \tag{10}$$

ANNEXE 2

EXEMPLE SUPPLEMENTAIRE DE RETOUR D'ETAT STABILISANT AVEC DEUX RETROFUSEES

Considérons le retour d'état défini par la loi :

$$\begin{aligned} u &= -\omega_2 + \omega_1, \\ v &= -\omega_3 - \omega_1^2, \end{aligned} \quad (1)$$

Avec ce retour d'état, le système (3.3) prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= -\omega_2 + \omega_1, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= -\omega_3 - \omega_1^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega_1}{dt} \\ \frac{d\omega_2}{dt} \\ \frac{d\omega_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{23} \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \\ 0 \\ -\omega_1^2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Avec la transformation linéaire diagonalisable

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{23} (x_1 + x_2) \cdot x_3 \\ -(x_1 + x_2) \cdot x_3 \\ -x_1^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

Le système (5) a une forme diagonale dont son linearisation à une valeur propre à partie réelle nulle et deux valeurs propres à parties réelles négatives.

D'après la théorie des systèmes non linéaires, il existe une variété centrale $h(x_1)$ définie par :

$$\begin{aligned} x_2 &= h_2(x_1) = h_{21} \cdot x_1^2 + h_{22} \cdot x_1^3 + \dots, \\ x_3 &= h_3(x_1) = h_{31} \cdot x_1^2 + h_{32} \cdot x_1^3 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

En appliquant la même procédure de calcul du chapitre 2, on trouve que :

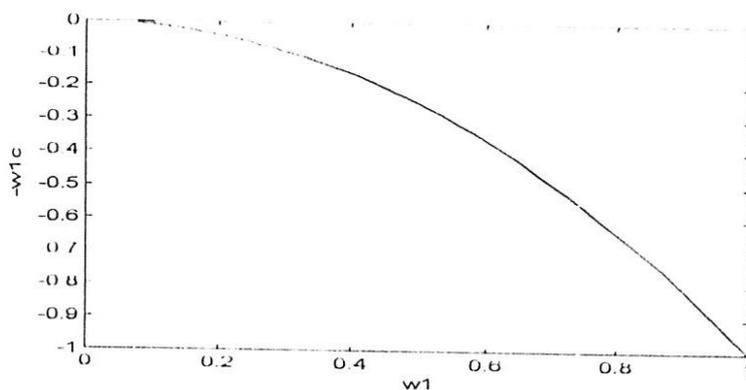
$$h_{21} = 0, \quad h_{31} = -1,$$

et l'équation réduite sera :

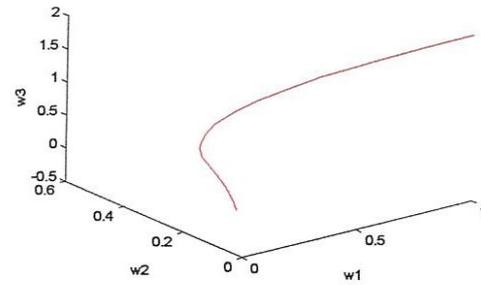
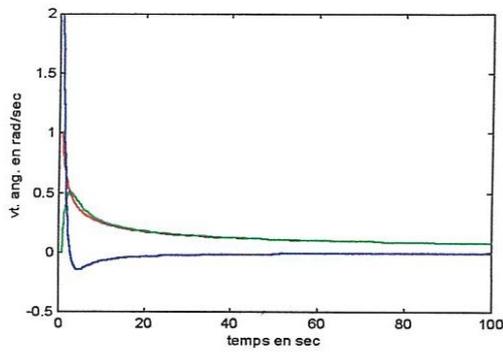
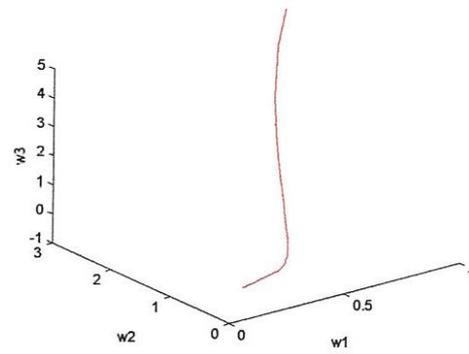
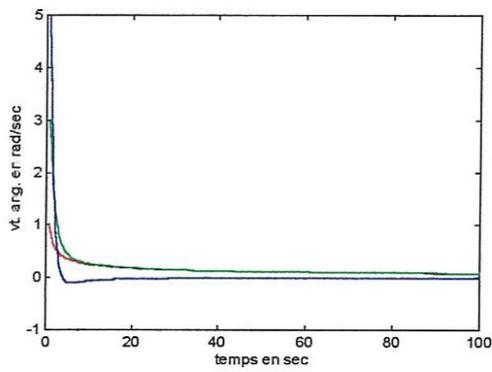
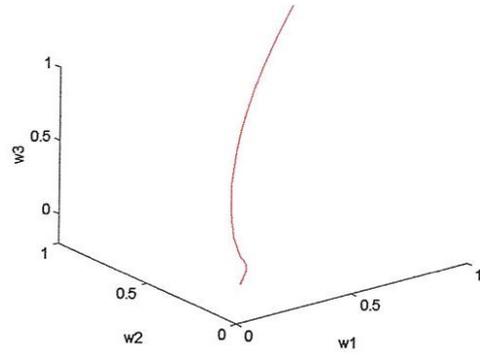
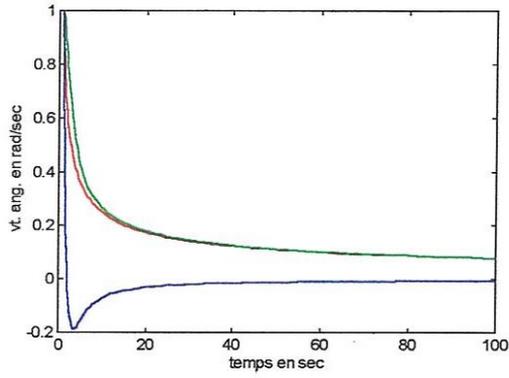
$$\frac{dx_1}{dt} = -l_{23} x_1^3 + \text{termes d'ordre supérieur}, \quad (7)$$

qui est localement asymptotiquement stable à l'origine.

En simulant les comportements du retour d'état, des vitesses angulaires pour différentes conditions initiales ainsi que celui de la variété centrale, nous avons obtenu les graphes suivants.



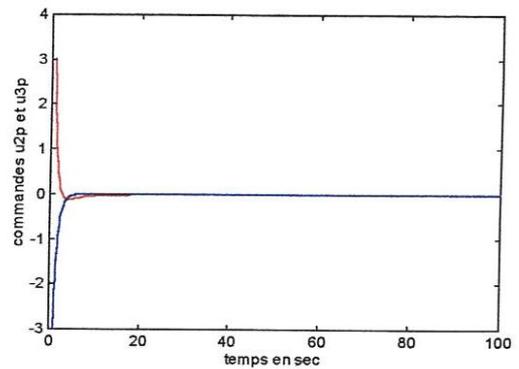
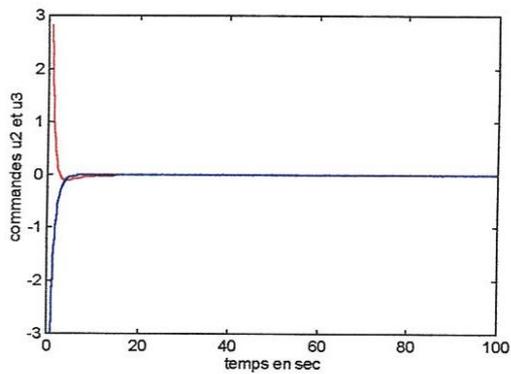
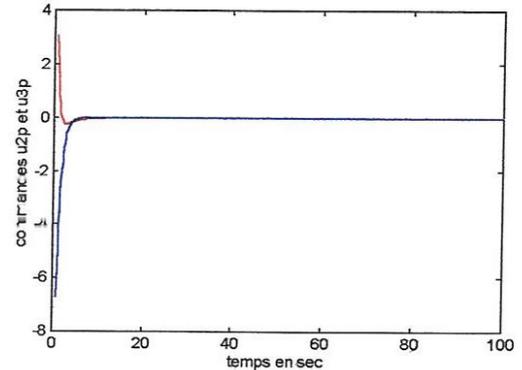
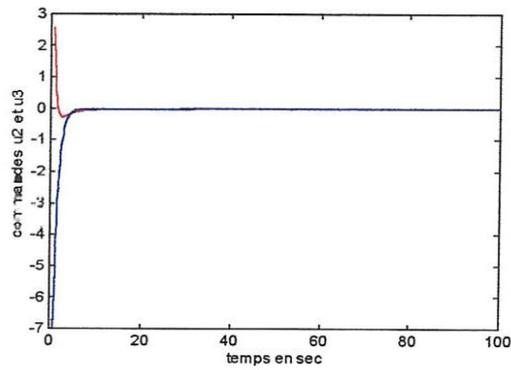
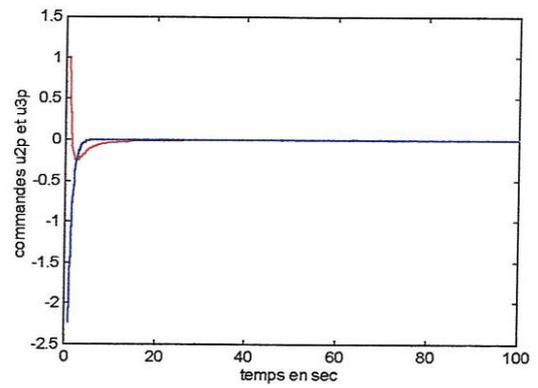
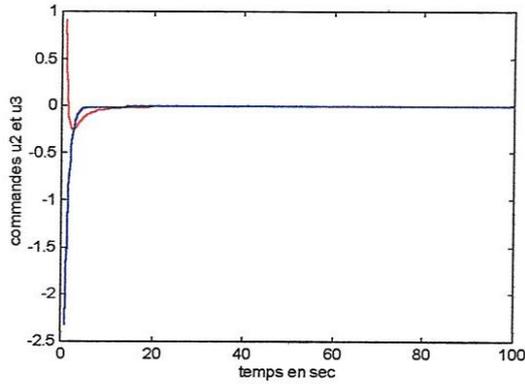
Gr.1 : Comportement de la variété centrale dans l'espace



Gr.2 : Comportement de la vitesse angulaire en fonction du temps, **respectivement**, pour les conditions initiales : $\omega_0 = (1, 1, 1)^T$, $\omega_0 = (1, 3, 5)^T$, $\omega_0 = (1, 0, 2)^T$.

— Vitesse angulaire ω_1
— Vitesse angulaire ω_2
— Vitesse angulaire ω_3

Gr.3 : Comportement spatial de la vitesse angulaire, **respectivement**, pour les conditions initiales : $\omega_0 = (1, 1, 1)^T$, $\omega_0 = (1, 3, 5)^T$, $\omega_0 = (1, 0, 2)^T$.



Gr.4 : Comportement des retours d'état en fonction du temps, **respectivement**, pour les conditions initiales : $\omega_0 = (1,1,1)^T$, $\omega_0 = (1,3,5)^T$, $\omega_0 = (1,0,2)^T$

— Commande u_2
 — Commande u_3

Gr.5 : Comportement des retours d'état en fonction du temps (cas où les coefficients des termes d'entraînements subissent des petits changements), **respectivement**, pour les conditions initiales : $\omega_0 = (1,1,1)^T$, $\omega_0 = (1,3,5)^T$, $\omega_0 = (1,0,2)^T$.

— Commande u_{2p}
 — Commande u_{3p}