

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA**  
**RECHERCHES SCIENTIFIQUE**

**CENTRE UNIVERSITAIRE 08 MAI 45 GUELMA**  
**INSTITUT DE MECANIQUE**

N° d'ordre :

Année : 1999

**THESE**

Présentée pour l'obtention du diplôme de Magister en MECANIQUE

**OPTION**  
**CONSTRUCTION**

**par**  
**LAHLAH Mohamed**

**THEME**

**APPROCHES SEMI - ANALYTIQUES DES PROBLEMES ELASTIQUES**  
**DANS LES PALIERS MULTI-COUCHES**

**Soutenu le**

**Devant le Jury :**

|                   |                           |                             |                        |
|-------------------|---------------------------|-----------------------------|------------------------|
| <b>Président</b>  | <b>: Guenfoud Mohamed</b> | <b>Maître de Conférence</b> | <b>C.U de GUELMA</b>   |
| <b>Rapporteur</b> | <b>: LAHMAR Mustapha</b>  | <b>Docteur</b>              | <b>C.U de GUELMA</b>   |
| <b>Examineurs</b> | <b>: CHAOUI Kamel</b>     | <b>Maître de Conférence</b> | <b>Univ. de ANNABA</b> |
|                   | <b>: HARIRECHE Ouahid</b> | <b>Maître de Conférence</b> | <b>C.U de GUELMA</b>   |

---

## Résumé

L'étude du comportement élasto-hydrodynamique en régime isotherme ( EHDI ) des paliers multicouches nécessite une résolution simultanée des équations de la lubrification hydrodynamique et de l'élasticité linéaire à travers un processus de calcul itératif.

L'utilisation des revêtements de surfaces dans les paliers fluides conduit à des déformations élastiques importantes de la surface du coussinet qui peuvent être de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du film lubrifiant. Ces revêtements qui peuvent être métalliques (métaux blancs) ou non métalliques (Elastomères) se caractérisent par de faibles valeurs du module d'élasticité.

L'écoulement du lubrifiant dans le palier est décrit par l'équation de Reynolds et l'état élastique des revêtements multicouches est déterminé à partir d'une approche semi-analytique basée sur un développement, en séries de Fourier complexes, de la pression hydrodynamique.

Comparativement aux méthodes numériques classiques (méthode des éléments finis, méthodes des éléments de frontière), le modèle élastique proposé est précis aussi bien pour le calcul des contraintes que pour les déplacements et ne nécessite pas une discrétisation spatiale du milieu élastique traité.

L'analyse montre que les déformations élastiques ont une influence non négligeable sur le comportement statique et dynamique des paliers hydrodynamiques notamment dans le cas des revêtements constitués de matériaux quasi-incompressibles comme les élastomères. D'autre part, les résultats obtenus montrent que la pression maximale, la portance hydrodynamique, la force de frottement et la masse critique diminuent avec l'épaisseur du revêtement et la flexibilité du matériau tandis que l'épaisseur minimale du film et la fréquence de fouettement augmentent.

## Mots clés

Lubrification élasto-hydrodynamique

Paliers multicouches

Revêtement de surface

Approche semi-analytique

Séries de Fourier

Couronnes élastiques circulaires

---

## AVANT - PROPOS

Cette étude a été faite au Centre de Calcul de l'Institut de Mécanique du Centre Universitaire 08 Mai 45 de Guelma.

Je tiens à exprimer à mon rapporteur Dr. M. LAHMAR mes vifs remerciements et ma profonde gratitude pour son aide précieuse, sa patience et ses conseils judicieux qu'il n'a pas cessé de me fournir tout le long de l'élaboration de ce travail.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait le Dr M. GUENFOUD, d'avoir accepté de juger mon travail et de présider le jury.

Il m'est particulièrement agréable de remercier le Dr. K. CHAOUI, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie vivement Dr. O. HARIRECHE, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et d'accepter de faire partie du jury.

Mes remerciements vont également à tout le personnel de l'Institut de Mécanique pour la contribution que chacun d'eux a pu m'apporter.

Enfin, je ne saurais oublier tous ceux qui, par leur amitié, m'ont aidé et encouragé au cours de la réalisation de ce modeste travail.

---

## إهداء

إلى أمي و أبي

إلى أخوتي و أخواتي و أنخص بالذكر : ناصر الدين ،سهام  
إلى كافة الأصدقاء و الزملاء خاصة : عادل ،رفيق ،فريد علي  
مساعدهم و إلى كل من مدّ يد المساعدة من قريب أو من  
بعيد لإنجاز هذه الأطروحة .

---

## SOMMAIRE

### AVANT-PROPOS

### RESUME

### SOMMAIRE

### INTRODUCTION 1

## CHAPITRE I

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES D'ELASTICITE

|   |    |
|---|----|
| I-1. Introduction   | 3  |
| I-2. Hypothèses   | 4  |
| I-2.1. Hypothèses fondamentales   | 4  |
| I-2.2. Hypothèses simplificatrices  | 5  |
| I-3. Equations de l'élasticité linéaire   | 5  |
| I-3.1. Notations  | 5  |
| I-3.2. Système équations de Lamé  | 7  |
| I-4. Méthodes de résolution   | 8  |
| I-4.1. La méthode des potentiels  | 8  |
| I-4.1.1. Solution de Kelvin   | 8  |
| I-4.1.2. Solution de Clebsh   | 9  |
| I-4.1.3. Solution de Trefftz  | 10 |
| I-4.1.4. Solution de Grodski  | 10 |
| I-4.2. Formulation dans le plan complexe  | 12 |
| I-4.3 Résolution par développement en séries  | 13 |
| I-4.4. Méthode des éléments finis   | 14 |
| I-4.4.1. Principe de la méthode des éléments finis  | 14 |
| I-4.4.2. Formulation variationnelle   | 14 |
| I-4.4.3. Formulation élémentaire  | 14 |
| I-4.4.4. Formulation globale  | 16 |
| I-4.5. Méthodes des équations intégrales de frontière                                     | 17 |
| I-4.5.1. Equations intégrales pour les corps élastique tridimensionnels                   | 17 |
| I-4.5.2. Solutions élémentaires de l'élasticité linéaire                                  | 20 |
| I-4.5.3. Les équations intégrales de base   | 22 |
| I-4.5.4. Contraintes en tous les points du domaine  | 23 |
| I-4.5.5. Discrétisation de l'équation intégrale de frontière<br>par éléments de frontière | 24 |
| I-5. Conclusion   | 25 |

---

## CHAPITRE II

### SOLUTIONS DES PROBLEMES DE VALEURS AUX LIMITES POUR LES COURONNES ELASTIQUES CIRCULAIRES

|  |    |
|--|----|
| II-1. Introduction   | 26 |
| II-2. Equations dans le plan complexe  | 26 |
| II-2.1. Plan complexe et notations   | 27 |
| II-2.1.1 Position et déplacement   | 27 |
| II-2.1.2 contraintes   | 28 |
| II-2.2. Equations du problème  | 29 |
| II-2.3. Equations en variables complexes   | 30 |
| II-2.3.1. Transformation des équations   | 30 |
| II-2.3.2 Intégration des équations : fonction de Kolosov<br>et Muskhelishvili          | 31 |
| II-2.4. Nature et propriétés des fonctions de Kolosov et Muskhelishvili                | 33 |
| II-3. Couronne circulaire  | 35 |
| II-3.1. Géométrie et notations   | 35 |
| II-3.2. Méthode des séries   | 36 |
| II-3.2.1. Développements de $\phi_0$ et $\psi_0$                                       | 37 |
| II-3.3. Expressions des contraintes et déplacements                                    | 38 |
| II-3.4. Notations des séries   | 39 |
| II-4. Résolution des problèmes aux limites fondamentaux<br>pour la couronne circulaire | 41 |
| II-4.1. Introduction   | 41 |
| II-4.2. Conditions aux limites pour la couronne circulaire                             | 41 |
| II-4.2.1. Problème de Dirichlet  | 41 |
| II-4.2.2. Problème mixte   | 42 |
| II-4.3. Solution du problème de Dirichlet  | 42 |
| II-4.3-1. Systèmes d'équations   | 42 |
| II-4.3-2. Contraintes et déplacements  | 46 |
| II-4.4. Solution du problème mixte   | 50 |
| II-4.4.1. Systèmes d'équations   | 50 |
| II-4.4.2. Contraintes et déplacements  | 51 |
| II-4.5. Contraintes et déplacements de la frontière                                    | 53 |
| II-4.5.1. Solution du problème mixte   | 53 |
| II-4.5.2. Solution du problème de Dirichlet  | 56 |
| II-5. Conclusion   | 57 |

---

## Chapitre III

### SOLUTIONS DES PROBLEMES DE VALEURS AUX LIMITES POUR UN ASSEMBLAGE DE PLUSIEURS COURONNES.

|  |    |
|--|----|
| III 1. Introduction  | 58 |
| III-2. Notations-conditions aux limites  | 58 |
| III-2.1. Notations - Géométrie   | 58 |
| III-2.2. Conditions aux limites en ( $r = R_1$ )                               | 60 |
| III-2.3. Notations matricielles  | 60 |
| III-3. Equations matricielles  | 61 |
| III-4. Solution du problème mixte relatif a l'ensemble formé de deux couronnes | 63 |
| III-5. Conclusion  | 65 |

## Chapitre IV

### EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDES NEWTONIENS

|   |    |
|---|----|
| IV-1. Introduction  | 66 |
| IV-2. Equations générales de la mécanique des films minces visqueux | 66 |
| IV-3. Analyse dimensionnelle  | 68 |
| IV-4. Dérivation de l'équation de Reynolds                          | 71 |
| IV-5. Application au cas des paliers lisses                         | 75 |
| IV-5.1. Description géométrique et cinématique                      | 75 |
| IV-5.2. Equation géométrique du film                                | 77 |
| IV-5.2.1. Palier rigide aligné                                      | 77 |
| IV-5.2.2. Palier déformable aligné                                  | 78 |
| IV-5.3. Equation de Reynolds  | 78 |
| IV-5.4. Conditions aux limites                                      | 79 |
| IV-6. Hypothèse du palier infiniment court                          | 80 |
| IV-7. Hypothèse du palier infiniment long                           | 82 |
| IV-7.1. Cas du palier indéformable                                  | 82 |
| IV-7.2. Cas du palier déformable                                    | 84 |
| IV-8. Expressions des déplacements radial et tangentiel             | 86 |
| IV-8.1. Cas d'un palier monocouche                                  | 86 |
| IV-8.2. Cas d'un palier multicouches                                | 89 |
| IV-9. Couplage structure-fluide                                     | 89 |

|   |     |
|---|-----|
| IV-10. Comportement dynamique des paliers lisses  |     |
| Modélisation linéaire   | 91  |
| IV-10.1. Modélisation du film lubrifiant  | 91  |
| IV-10.2. Calcul des coefficients dynamiques «méthode de perturbation»   | 92  |
| IV-10.3. Etude de la stabilité dynamique d'un point de fonctionnement<br>critère de Lund                                | 95  |
| IV-10.4. Calcul de la trajectoire du centre de l'arbre  | 97  |
| IV-11. Conclusion   | 98  |
| <b>Chapitre V</b>   |     |
| <b>ETUDE DU COMPORTEMENT ELASTO-HYDRODYNAMIQUE<br/>DES PALIERS MONOCOUCHE ET MULTICOUCHE</b>                            |     |
| V-1. Introduction   | 99  |
| V-2. Validation des approches élastohydrodynamiques   | 102 |
| V-3. Validation du modèle couche-mince  | 103 |
| V-3.1. Calcul du déplacement radial $U_r$   | 103 |
| V-3.2. Calcul du déplacement tangentiel $U_t$   | 106 |
| V-4. Etude de cas concrets  | 107 |
| V-4.1. Effets des déformations élastiques sur le champ de pression<br>et la géométrie du film                           | 107 |
| V-4.1.1 Influence du module d'élasticité et de l'épaisseur<br>du revêtement sur le champ de pression                    | 108 |
| V-4.1.2. Influence du module d'élasticité et de l'épaisseur<br>du revêtement sur la géométrie du film                   | 110 |
| V-4.2. Influence du module d'élasticité et de l'épaisseur du revêtement<br>sur les caractéristiques statiques du palier | 112 |
| V-4.2.1 Cas des paliers monocouches   | 112 |
| V-4.2.2 Cas des paliers multicouches  | 113 |
| V-4.3. Effets des déformations élastiques sur les caractéristiques dynamiques   | 117 |
| V-4. Conclusion   | 120 |
| <b>Conclusion générale</b>  | 121 |
| <b>Bibliographie</b>  | 123 |
| <b>Notations</b>  | 126 |

---

## INTRODUCTION

Au cours de ces dernières années, la théorie de l'élasticité a été appliquée, très fréquemment, à la résolution de problèmes industriels. Dans de nombreux cas, les méthodes élémentaires de la résistance des matériaux sont incapables de donner des indications précises sur la répartition des tensions dans les pièces constituant les systèmes mécaniques. Pour cela, le recours aux méthodes plus puissantes de la théorie de l'élasticité s'avère nécessaire. D'autre part, la théorie élémentaire est insuffisante pour fournir des renseignements précis sur les contraintes locales qui se produisent au voisinage du point d'application des charges, et dans la région voisine des points d'appui d'une pièce.

Les méthodes numériques traitent des situations complexes et variées avec une bonne précision au prix de moyens et de temps de calculs conséquents. En particulier, la méthode des éléments finis (M.E.F) a montré son efficacité pour résoudre des difficiles problèmes rencontrés par les ingénieurs. De nombreux programmes ou systèmes (ANSYS, ABAQUS, etc...) ont été développés et sont maintenant couramment utilisés.

Néanmoins, cette méthode présente un certain nombre d'inconvénients :

- le découpage et la discrétisation spatiale du milieu étudié;
- la préparation et la vérification des données nécessitent un travail long et fastidieux surtout pour les pièces tridimensionnelles, malgré le développement de programme automatique (générateur de maillage automatique );
- le temps de résolution du système d'équations est également important;
- La formulation la plus utilisée, dite [aux déplacements ], donne de bons résultats

pour les déplacements, mais s'avère d'une précision inférieure pour les contraintes.

Ces considérations nous ont amenées à proposer, dans le cadre de ce travail, un modèle semi-analytique de calcul des champs de contraintes et de déplacements adapté à des formes géométriques simples telles que les couronnes circulaires. Ce modèle, basé sur des développements en séries de Fourier, a pour objectif principal d'être intégré dans des processus de calcul élasto-hydrodynamique de paliers lisses revêtus.

---

Au chapitre I, nous présentons une revue bibliographique sur les différentes méthodes de résolution des équations de l'élastostatique linéaire qui sont :

- les méthodes analytiques groupant la théorie des potentiels, la théorie d'une fonction à variable complexe et les développements en séries;
- les méthodes numériques qui sont : la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière basée sur la théorie des équations intégrales.

Au chapitre II, nous développons une méthode semi-analytique pour la résolution des problèmes fondamentaux de l'élasticité plane (Dirichlet, Mixte) dans le cas de domaines élastiques formés par des couronnes circulaires. Cette méthode utilise la formulation dans le plan complexe des équations de l'élasticité et permet de présenter l'état élastique, en un point du milieu étudié, à l'aide de deux potentiels complexes appelés fonctions de Kolosov et Muskhelishvili.

Au chapitre III, nous présentons les solutions des trois problèmes fondamentaux pour un assemblage de deux couronnes circulaires concentriques de caractéristiques élastiques différentes. La présentation de ces solutions sont analogues à la présentation des solutions pour une seule couronne. La technique utilisée permet d'étendre ces résolutions à des domaines formés de plusieurs couronnes. L'outil ainsi obtenu va permettre d'étudier les mécanismes à géométrie circulaire tels que les paliers fluides.

Au chapitre IV, nous écrivons les équations de base de la lubrification hydrodynamique à savoir l'équation de la mécanique des films minces visqueux et l'équation géométrique du film pour un palier cylindrique dans le cas de paliers déformable et indéformable. Dans le cas du palier déformable, l'équation de Reynolds est résolue par une méthode des différences finies centrées. Le système d'équations algébriques obtenu est résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec facteur de sur relaxation.

Finalement au chapitre V, Nous appliquons le modèle élastique proposé pour étudier l'influence des déformations élastiques des revêtements sur le comportement statique et dynamique des paliers monocouche et multicouches.

---

## Chapitre I

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES D'ELASTICITE

#### I-1. INTRODUCTION

Ce chapitre présente une revue bibliographique sur les différentes méthodes d'élasticité. En général, la résolution de tout problème d'élasticité se ramène à celle d'un système d'équations aux dérivées partielles ou à une minimisation d'une fonctionnelle représentant une certaine quantité physique (énergie), moyennant certaines conditions aux limites.

Les méthodes de résolution qu'elles soient analytiques, numériques (méthode des éléments finis et méthode des éléments finis de frontière) ou expérimentales (photo-élasticimétrie, interférométrie holographique, etc...) sont souvent jugées par leur simplicité et leur efficacité.

Parmi les méthodes de résolution, on cite celles qui représentent un intérêt fondamental dans le domaine de l'élasticité linéaire, telles que :

- La théorie des fonctions d'une seule variable complexe permettant la résolution des problèmes plans et antiplans d'une façon condensée. **Kolosov** [1] et **Muskhelishvili** [2] furent les premiers auteurs à établir cet outil de résolution qui a trouvé par la suite une large application.
- La théorie des potentiels harmoniques de déplacement permettant la résolution des problèmes tridimensionnels et en particulier les problèmes de contact de solides. Parmi les auteurs qui ont contribué d'une façon ou d'une autre, et cela bien sûr d'après la littérature on cite **Neuber** [3], **Papkovitch** [4], **Grodski** [5], **Hertz** [6], **Boussinesq** [7]. Notons que **Neuber**, **Papkovitch** et enfin **Grodski** furent les premiers à développer ce type de solution qui est la base de la théorie de **Hertz** dont se servent les mécaniciens pour approcher et décrire certains contacts entre solides élastiques tels que les engrenages et les roulements.
- Les méthodes numériques dont la plus employée est celle des éléments finis permettant de résoudre d'une façon numérique les différents problèmes et quelle que soit la géométrie du solide étudié en se basant sur une minimisation d'une fonctionnelle (méthode de **Rayleigh-Ritz**).
- La théorie des potentiels peut être efficace quand on lui associe le calcul symbolique qui permet en effet de surmonter les difficultés de résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles. On cite à titre d'exemple **Lur'e** [8] et **Sneddon** [9] qui ont traité certains cas en utilisant le principe de séparation de variables combiné à ce calcul symbolique.

L'élaboration et la mise en œuvre de toutes ces méthodes de résolution a nécessité certaines hypothèses fondamentales et simplificatrices dont il convient de préciser les plus importantes d'entre elles.

---

## I-2. HYPOTHESES

Dans l'ouvrage [10], L. Solomon explicite en détail l'ensemble des hypothèses qui sont liées à la théorie de l'élasticité linéaire. Dans cet ouvrage, l'auteur classe ces hypothèses en deux catégories :

- Hypothèses fondamentales.
- Hypothèses simplificatrices.

### I-2.1 HYPOTHESES FONDAMENTALES

Nous présentons, dans ce paragraphe, quelques hypothèses fondamentales qui doivent caractériser le modèle du corps élastique.

- a)- *Hypothèse du milieu continu* : chaque domaine élémentaire contient de la matière. Ce point de vue trouve sa justification dans « la petitesse » des particules élémentaires par rapport aux dimensions des corps usuels. Il peut être utilisé même pour des corps composés de particules de propriétés différentes (microcristaux dans un alliage, ciment et gravier dans le béton). Pourvu que les dimensions des corps soient très grandes par rapport à celles des composantes. Cette hypothèse permet de considérer toutes les quantités comme fonctions de point dans le domaine occupé par le corps, et non comme des fonctions de la position des particules qui le composent. Grâce à elle, la mécanique des milieux déformables peut largement utiliser l'appareil de l'analyse classique. Plus on doit accorder d'attention aux propriétés physiques proprement dites du matériau (comme c'est le cas dans certaines variantes modernes de la théorie de la plasticité ou dans certaines questions de rhéologie), moins cette hypothèse peut nous servir.
- b)- *Hypothèse de la rigidisation des parties (ou de la solidification)* : Un corps se trouve en équilibre si et seulement si les forces agissant sur chacune de ses parties forment un système de torseur nul. Cette hypothèse permet de séparer (par la pensée) une partie arbitraire du corps, de remplacer l'action du reste par certaines forces, et de déterminer ces dernières par la condition que l'équilibre du corps entier reste intact. Comme cette partie peut être arbitrairement petite, ceci conduit à formuler les relations d'équilibre sous forme différentielle, valable en chaque point du corps.
- c)- *Hypothèse de la dépendance locale* : Les forces intérieures (tensions) sont des fonctions du point, de la déformation, de la température, etc... Mais ne dépendent pas explicitement du gradient c'est à dire des dérivées spatiales de ces grandeurs. Ceci établit une dépendance ponctuelle, locale entre les paramètres statiques et géométriques, en excluant (l'action à distance) et en interprétant les forces intérieures comme forces de cohésion intermoléculaires.

Les hypothèses ( a ) et ( b ) correspondent à un cadre plus général, et ce n'est qu'avec l'hypothèse ( c ) que l'on introduit des notations spécifiques, quoi qu'ayant un sens pour tout milieu continu et déformable. Pour définir le corps élastique, on leur ajoute :

- d)- *Hypothèse de l'élasticité idéale* : Il existe une correspondance biunivoque entre les déformations et les tensions. Ceci caractérise donc un certain état de la matière, état dans lequel la connaissance des tensions et celle des déformations fournissent des informations équivalentes. Cette hypothèse implique le caractère réversible de la déformation, et se trouve en concordance avec la manière courante de définir un corps *élastique* : un corps qui revient à son état initial, une fois la charge supprimée.

### 1-4.1.3. SOLUTION DE TREFFTZ

On cherche le vecteur  $\underline{u}$ , de l'équation (I-4.) ou (I-5.), sous forme d'une somme de deux vecteurs  $\underline{B}$  et  $x_j \nabla \underline{h}$  tel que :

$\underline{u} = \underline{B} + x_j \nabla \underline{h}$  et  $x_j \nabla \underline{h}$  dépend d'une seule fonction scalaire et s'annule sur l'un des plans coordonnées  $x_j = 0$ .

et le vecteur  $\underline{B}$  est la solution de l'équation :

$$\nabla^2 \underline{B} + \frac{F}{\mu} = 0 \quad (\text{I-8.})$$

Suite à cette décomposition, on obtient les relations suivantes :

$$\nabla^2 \underline{u} = -\frac{F}{\mu} + 2[\nabla \underline{h}]_{,j} + x_j \nabla(\nabla^2 \underline{h})$$

$$\nabla \underline{u} = \nabla \underline{B} + \underline{h}_{,j} + x_j \nabla^2 \underline{h}$$

On note que :

$$\nabla x_j = \underline{i}_j$$

$$(3 - 4\nu)(\nabla \underline{h})_{,j} + \nabla(\nabla \cdot \underline{B}) + 2(1 - \nu)x_j \nabla \cdot (\nabla^2 \underline{h}) + \underline{i}_j \nabla^2 \underline{h} = 0$$

A priori cette équation a pour solution :

$$\nabla^2 \underline{h} = 0$$

$$\underline{h}_{,j} = \frac{-1}{(3 - 4\nu)} \nabla \cdot \underline{B}$$

avec  $h_{,j} = \frac{\partial h}{\partial x_j}$

On constate que la fonction  $h$  doit vérifier à la fois les deux équations, ce qui revient à résoudre un problème de **Dirichlet** pour l'équation de **Poisson**.

### 1-4.1.4. SOLUTION DE GRODSKI

On cherche le vecteur  $\underline{u}$ , de l'équation (I-4.) ou (I-5.), sous la forme d'une somme de deux vecteurs  $\underline{B} = (B_1, B_2, B_3)$  et  $\nabla F$  tel que :

$$\underline{u} = \underline{B} + \nabla F \quad (\text{I-9.})$$

où le potentiel  $\underline{B}$  est solution de l'équation de **Poisson** (I-8.).

Le report des relations (I-8.) et (I-9.) dans l'équation (I-4.), nous conduit à écrire :

$$\nabla[\nabla^2 \underline{F} + \frac{1}{2(1-\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{B}] = 0 \quad \text{avec} \quad 0 < \nu < 0.5$$

ou encore

$$\nabla^2 \underline{F} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{B} \quad (\text{I-10.})$$

On remarque que :

$$\nabla^2 (\underline{x} \cdot \underline{B}) = 2 \underline{\nabla} \cdot \underline{B} + \underline{x} \cdot \nabla^2 \underline{B} \quad (\text{I-11.})$$

La relation (I-10.) s'écrit en tenant compte de (I-7.)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = \frac{1}{2} \nabla^2 (\underline{x} \cdot \underline{B}) + \frac{1}{2\mu} (\underline{x} \cdot \underline{F}) \quad (\text{I-12.})$$

Le report de (I-11.) dans (I-9.) permet d'écrire :

$$\nabla^2 \left[ \underline{F} + \frac{1}{4(1-\nu)} (\underline{x} \cdot \underline{B}) \right] = -\frac{1}{4(1-\nu)\mu} (\underline{x} \cdot \underline{B})$$

On pose :

$$\left[ \underline{F} + \frac{1}{4(1-\nu)} (\underline{x} \cdot \underline{B}) \right] = -\frac{1}{4(1-\nu)} \underline{B}_0$$

tel que  $\underline{B}_0$  représente la solution générale de l'équation :

$$\nabla^2 \underline{B}_0 = \underline{x} \cdot \underline{F} \frac{1}{\mu}$$

Suite à cette notation, on en déduit l'expression  $\underline{F}$ .

$$\underline{F} = -\frac{1}{4(1-\nu)} [\underline{B}_0 + \underline{x} \cdot \underline{B}]$$

Finalement la solution de l'équation (I-4.) est donnée par :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{B} - \frac{1}{4(1-\nu)} \underline{\nabla} \cdot [\underline{B}_0 + \underline{x} \cdot \underline{B}] \\ \nabla^2 \underline{B} &= \underline{F} \frac{1}{\mu} \end{aligned} \quad (\text{I-13.})$$

$$\nabla^2 \underline{B}_0 = \underline{x} \cdot \underline{F} \frac{1}{\mu}$$

Ainsi tout vecteur  $\underline{u}$  de la forme donnée par la relation (I-13.) est une solution des équations de l'élasto-statique. On peut vérifier facilement les relations suivantes, en tenant compte des relations (I-12.) et (I-8.)

$$\nabla^2 \underline{u} = -\frac{F}{\mu} - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla(\nabla \cdot \underline{B})$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \nabla \cdot \underline{B}$$

Ce qui explique que la relation (I-12.) forme une condition suffisante mais non nécessaire pour que  $\underline{u}$  soit une solution des équations de l'élasto-statique non homogènes.

La solution donnée par la relation (I-12.) est appelée représentation de **Grodski** et les potentiels  $\underline{B}_0, \underline{B}_1, \underline{B}_2, \underline{B}_3$  sont appelés aussi fonctions de **Grodski**.

Dans le cas où  $\underline{F}=0$ , forces volumiques nulles, les quatre potentiels sont harmoniques

$$\nabla^2 \underline{B}_\alpha = 0 \quad \alpha=0,1,2,3 \quad (\text{I-14.})$$

#### I-4.2. FORMULATION DANS LE PLAN COMPLEXE

La technique utilise souvent des corps qui ne sont pas massifs, mais dont une des dimensions (l'épaisseur) est petite par rapport aux autres. Le fuselage d'un avion, le corps d'un navire, les voiles auto-portants, les profils laminés, les réservoirs, sont quelques exemples.

L'étude des corps de ce type constitue aujourd'hui une théorie ayant ses problèmes et ses moyens propres : La théorie des voiles (minces ou d'épaisseur quelconque). Parmi la riche littérature sur ce sujet indiquons : **A. Love** [15], **P. Naghdi** [16] et **Y. Rabotnov** [17].

Un cas particulier important de corps de ce type est celui des voiles qui peuvent être considérés comme des éléments plans matérialisés, et qu'on appelle plaques. Pour de tels corps, les équations se simplifient (quoique moins que pour l'état anti-plan), et l'on est conduit à des problèmes bidimensionnels: on a affaire à des fonctions de deux variables. Le problème correspondant est *le problème plan de la théorie de l'élasticité*.

Le problème plan peut se réduire à la détermination de deux fonctions d'une variable Complexe, ce qui permet d'aborder les problèmes fondamentaux par des méthodes directes.

L'efficacité de ce point de vue dépend en grande mesure de la manière dont on établit la liaison entre les grandeurs élastiques et les potentiels complexes.

Les résultats les plus importants ont été obtenus par **N. Muskhelishvili** [2], et trouvent leur origine dans les travaux de **G. Kolosov** [1] en 1909.

**Kolosov** et **Muskheshvili** ont développé cette méthode pour la résolution des problèmes plans, elle consiste à exprimer les équations d'équilibre et de compatibilité au moyen de deux fonctions d'une variable complexe, cette solution s'exprime au moyen de deux potentiels de déplacement appelés fonctions **Kolosov** et **Muskhelishvili**.

Les équations de compatibilité pour le problème plan, dans le cas où les forces volumiques sont nulles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_{nm,kk} + (1+\nu)^{-1} \sigma_{kk,nm} &= 0 && \text{en état de déformations planes;} \\ \sigma_{nm,kk} + (1+\nu^*)^{-1} \sigma_{kk,nm} &= 0 && \text{en état de contraintes moyennes planes.} \end{aligned} \quad (\text{I-15.})$$

avec  $n,m,k=1,2$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \nabla^2 \sigma_{11} + S_{0,11} = 0 \\ \nabla^2 \sigma_{22} + S_{0,22} = 0 \\ \nabla^2 \sigma_{12} + S_{0,12} = 0 \end{cases} \quad (\text{I-16.})$$

où  $S_0(M)$  et  $S(M)$  sont deux fonctions de contraintes définies en tout point  $M(x_1, x_2)$  du plan complexe telle que :

$$\begin{cases} S_0(M) = \sigma_{11}(M) + \sigma_{22}(M) \\ S(M) = \sigma_{22}(M) - \sigma_{11}(M) + 2i\sigma_{12}(M) \end{cases}$$

La fonction  $S_0(M)$  caractérise la pression *hydrostatique* et le module de la fonction  $S(M)$  est égale au diamètre du cercle de **Mohr** des contraintes.

Les fonctions  $S_0(M)$  et  $S(M)$  qu'il convient de déterminer pour connaître l'état élastique en tout point:

$$\begin{cases} \nabla^2 S_0(x_1, x_2) = 4S_{0,z\bar{z}}(x_1, x_2) \\ \nabla^2 S_0(x_1, x_2) = 4S_{,zz}(x_1, x_2) \\ S_{0,z\bar{z}}(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{I-17.})$$

Notons que toutes ces fonctions qui décrivent l'état élastique sont des fonctions des deux variables  $x_1$  et  $x_2$  définies dans une section quelconque telle que rien ne modifie l'état élastique quand on passe d'une section  $x_3$  égale à une constante à une autre.

### I-4.3 RESOLUTION PAR DEVELOPPEMENT EN SERIES

Cette méthode se base sur la formulation dans le plan complexe. Les deux potentiels qui figurent dans la solution en déplacements et en contraintes sont exprimés au moyen de séries.

Cette résolution est fort intéressante pour les domaines circulaires et en particulier pour les couronnes concentriques; à titre d'exemple, on cite le problème de la couronne circulaire, qui a été traité par **L. Solomon** [10] puis repris par **B. Villechaise** [18], **M. Lahmar** [19] et **A. Bettayeb** [20] en exprimant les deux potentiels de **Kolosov** et **Muskhelishvili** par des séries de **Laurent**.

Cette méthode est largement appliquée pour la résolution de nombreux problèmes relatifs aux singularités, contacts et fissures [21],[22].

#### I-4.4. METHODE DES ELEMENTS FINIS

##### I-4.4.1. PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis est une méthode approchée de calcul numérique permettant de déterminer l'équilibre élastique des structures continues à deux ou trois dimensions : structures planes, solides élastiques, plaques minces, membranes et coques. Cette méthode est largement utilisée aujourd'hui. Les ouvrages qui la présentent sont très nombreux; on cite par exemple l'ouvrage de **Zienkiewicz** [23].

Le principe de cette méthode consiste à minimiser une fonctionnelle représentant l'énergie potentielle totale pour un domaine donné. Ce dernier est subdivisé en un nombre fini de sous-domaines de forme relativement simple appelés éléments finis reliés entre eux par des points appelés noeuds situés sur leurs frontières figure (I-3.).

##### I-4.4.2. FORMULATION VARIATIONNELLE

Une forme intégrale associée aux équations d'équilibre (I-3.) peut être obtenue par l'application du principe des travaux virtuels:

$$\delta U - \delta W = 0 \quad (I-18.)$$

où :

$$\delta U = \int_D \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dD$$

et

$$\delta W = \int_D \delta u_i F_i dD + \int_{S_a} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dS \quad i, j = 1, 2, 3$$

puisque les variations de déplacement  $\delta u_i$  sont cinématiquement admissibles; c'est-à-dire,  $\delta u_i = 0$  sur la partie de la frontière ( $S_u$ ).

On remarque que l'expression (I-18.) correspond à la première variation de l'énergie potentielle totale de la structure qui s'exprime par :

$$\pi = U - W$$

où : U est l'énergie de déformation de la structure;  
W est le travail des forces extérieures.

##### I-4.4.3. FORMULATION ELEMENTAIRE

L'écriture de l'équation (I-18.) sur un sous domaine ( $D^e$ ) puis la discrétisation de cette équation par éléments finis donne sous forme matricielle :

$$\delta \pi_e \approx \delta \pi_e^h = \langle \delta q_e \rangle ( [k_e] \{q_e\} - \{f_e\} ) \quad (I-19.)$$

où :

$\langle \delta q_e \rangle$  est le vecteur regroupant les variations des déplacements nodaux de l'élément.

$[k_e]$  est la matrice de rigidité élémentaire définie par :

$$[k_e] = \int_{D^e} [B]^t [C] [B] dD^e$$

$\{q_e\}$  est le vecteur regroupant les déplacements nodaux de l'élément;

$\{F_e\}$  est le vecteur sollicitation élémentaire qui s'exprime par :

$$\{F_e\} = \int_{D^e} [N]^t \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} dD^e + \int_{S_c^e} [N]^t \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} dS^e$$

avec  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  qui est la  $i^{ème}$  composante du vecteur contrainte.

ou  $\{T^n\} = [\sigma] \{n\}$

Dans les expressions de  $\{k_e\}$  et  $\{f_e\}$  :

$[N]$  représente la matrice des fonctions d'interpolation permettant de relier le vecteur déplacement  $\{u\}$  d'un point quelconque de  $(D^e)$  aux valeurs des déplacements nodaux  $\{q^e\}$  soit :

$$\{u\} = [N] \{q_e\}$$

de même  $\{\delta u\} = [N] \{\delta q_e\}$

$[B]$  représente la matrice des gradients, c'est-à-dire les dérivées spatiales, des fonctions d'interpolations.

$[C]$  est la matrice constitutive du matériau.

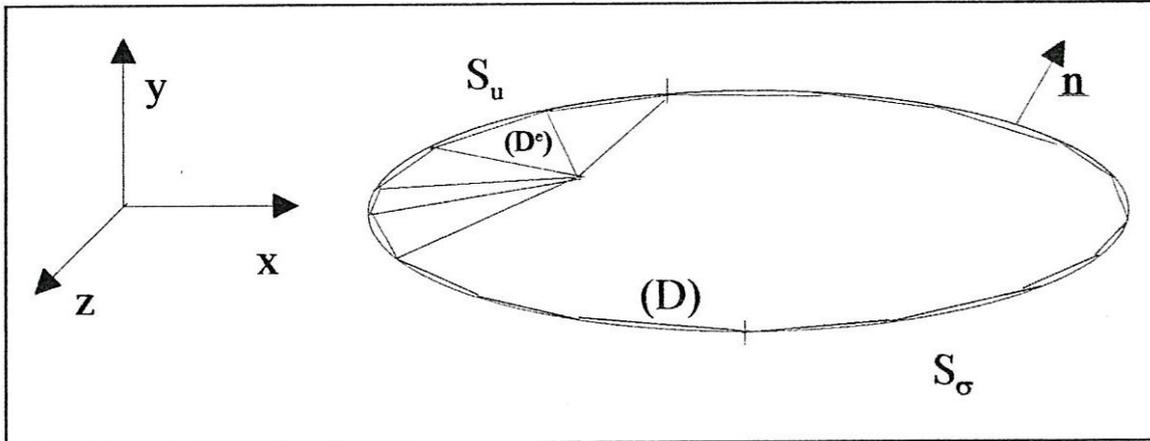


Fig I.3. Discrétisation par éléments finis

#### I-4.4.4. FORMULATION GLOBALE

La solution approchée du problème s'obtient à partir de l'écriture de l'équation (I-19.) sur tout le domaine (D) par l'utilisation des techniques d'assemblage :

$$\delta\pi^h = \sum_{e \geq 1} \delta\pi_e^h = \langle \delta Q \rangle \left( [K] \{Q\} - \{F\} \right) = 0 \quad (\text{I-20.})$$

$$\forall \langle \delta Q \rangle$$

où:  $[K]$  est la matrice de rigidité globale tel que  $[K] = A [k_e]$

$\{Q\}$  est le vecteur regroupant tous les degrés de liberté de la structure.

$\{F_e\}$  est le vecteur sollicitation global tel que  $\{F\} = A \{F_e\}$

$\{\delta Q\}$  est le vecteur des variations des déplacements ou des degrés de liberté.

$A$  est l'opérateur d'assemblage.

Le vecteur  $\{Q\}$  est déterminé par l'inversion du système d'équations :

$$[K] \{Q\} = \{F\}$$

La méthode d'élimination de **Gauss** est très souvent utilisée.

La matrice  $[K]$  est toujours symétrique et de structure bandée.

## I.4.5. METHODES DES EQUATIONS INTEGRALES ET DE FRONTIERE

La méthode des équations intégrales est un développement des travaux de **Fredholm** sur l'utilisation des théories du potentiel et des équations intégrales linéaires. **Fredholm** fut le premier à l'appliquer à l'élasticité [24]. En 1963, **Kupradze** [25] reconsidère les problèmes aux limites, dans le cas général des milieux élastiques soumis à des oscillations périodiques, et établit des théorèmes d'existence et d'unicité pour des corps homogènes. La même année **Jawson** et **Ponter** [26] publient leurs premiers travaux sur l'utilisation d'une équation intégrale de surface pour traiter le problème de la torsion élastique d'une barre de section quelconque.

En 1967, **Rizzo** [27] analyse numériquement quelques problèmes simples d'élasticité. **Rizzo** et **Cruse** [28] étendent la formulation élastique au domaine dynamique en utilisant une transformation de **Laplace** pour la variable temporelle.

**Cruse** et **Vanburen** [29] analysent par équations intégrales, en situation tridimensionnelle, une éprouvette de mécanique de la rupture. En 1971, **Swedlow** et **Cruse** [30] proposent une formulation *équation intégrale* pour traiter le cas d'un comportement élasto-plastique d'un matériau présentant un écrouissage. Cette formulation est reprise par **Mendelson** [31] qui publie un article présentant des résultats numériques.

La méthode des éléments de frontières repose sur la discrétisation d'équations intégrales de frontière. Le développement de cette méthode en tant qu'outil de résolution numérique est toutefois postérieur à celui des méthodes d'éléments finis et de différences finis. La méthode des éléments de frontière repose fortement sur l'adaptation de notations initialement créées et développées dans le contexte de la méthode des éléments finis : maillage, interpolation par fonctions à support borné. L'avantage conceptuel de la méthode des éléments de frontière sur d'autres techniques comme les éléments finis est le gain d'une dimension d'espace pour la discrétisation : le support des inconnus est la frontière, et non le domaine qu'elle limite figures (I-4.) et (I-5.). De plus, les méthodes intégrales présentent une supériorité pour le traitement de certaines situations (propagation des ondes, présence de milieux infinis, etc...).

### I-4.5.1 EQUATIONS INTEGRALES POUR LES CORPS ELASTIQUES TRIDIMENSIONNELS

Pour établir l'équation intégrale, nous utilisons le théorème de réciprocité de **Betti** [33], qui est l'analogue de la deuxième formule de **Green** pour l'opérateur de **Laplace**.

- Première formule de **Betti** :

L'identité de réciprocité pour l'élasticité est une conséquence du théorème des travaux virtuels, qui s'énonce :

Quel que soit le champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  en équilibre statique avec  $\underline{F}$  (c'est-à-dire vérifiant les équations I-1 à I-5), quel que soit le champ de vecteurs (déplacement virtuel)  $\underline{v}$  continûment différentiable sur (D) :

$$\int_D \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) dD - \int_{\partial D} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \underline{v} dS - \int_D \underline{F} \cdot \underline{v} dD = 0 \quad (I-21.)$$

L'expression (I-21) est appelée première formule de **Betti**.

• Deuxième formule de **Betti** :

On considère deux états élasto-statiques  $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}), \underline{F}(\underline{u}))$  et  $(\underline{v}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}), \underline{F}(\underline{v}))$  d'un même système élastique.

Appliquant le théorème des travaux virtuels (I-21.) à  $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}), \underline{F}(\underline{u}))$  travaillant dans le déplacement virtuel  $\underline{v}$ , puis à  $(\underline{v}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}), \underline{F}(\underline{v}))$  travaillant dans le déplacement virtuel  $\underline{u}$ , et retranchant les relations obtenues, on obtient :

$$\int_D [ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) - \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) ] dD - \int_D [ \underline{F}(\underline{u})\underline{v} - \underline{F}(\underline{v})\underline{u} ] dD = \int_{\partial D} [ T^n(\underline{u})\underline{v} - T^n(\underline{v})\underline{u} ] dS$$

De plus, la symétrie de la loi de comportement élastique  $( C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jilk} = C_{ljk i} )$  implique l'égalité :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$$

Il en résulte que tout couple  $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}), \underline{F}(\underline{u}))$ ,  $(\underline{v}, \underline{\underline{\sigma}}(\underline{v}), \underline{F}(\underline{v}))$  d'états élasto-statiques sur (D) vérifie l'identité de réciprocité de **Maxwell-Betti** :

$$\int_{\partial D} [ T^n(\underline{v})\underline{u} - T^n(\underline{u})\underline{v} ] dS = \int_D [ \underline{v}L(\underline{u}) - \underline{u}L(\underline{v}) ] dD \quad (I-22.)$$

$T^n(\underline{u})$  étant l'opérateur qui, à  $\underline{u}$  associe le vecteur contrainte  $T^n(\underline{u}) \equiv \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u})\underline{n}$

L est l'opérateur de **Lamé**.

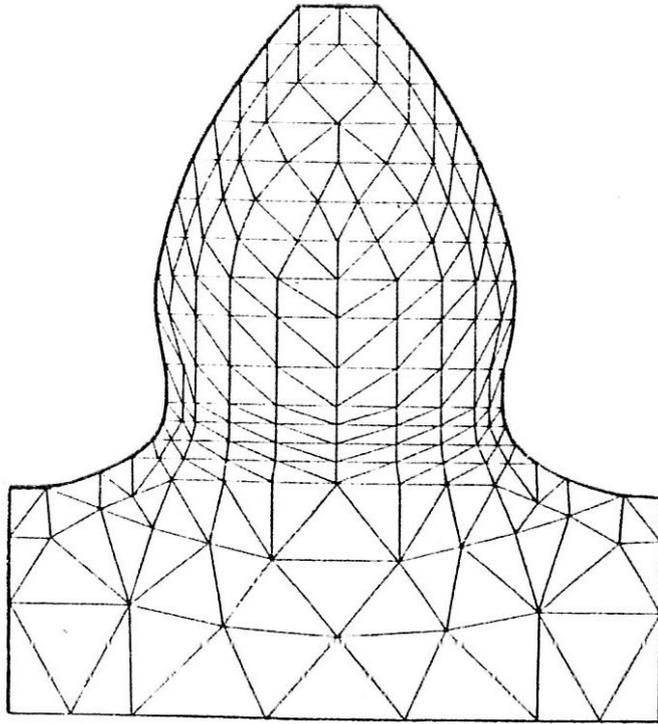
Pour les deux champs de vecteurs  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$ , nous avons :

$$L(\underline{u}) = -\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u})) = -[(\lambda + \mu)\underline{grad}(\underline{div}\underline{u}) + \mu\Delta\underline{u}]$$

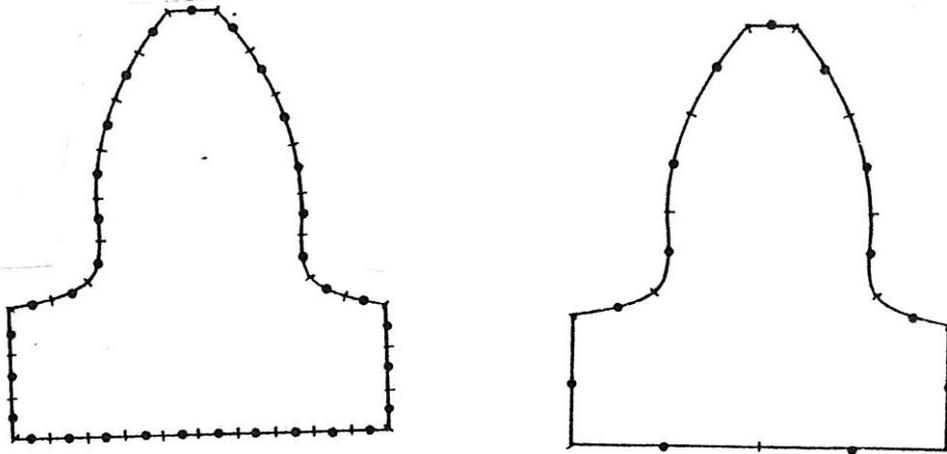
$$L(\underline{v}) = -\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{v})) = -[(\lambda + \mu)\underline{grad}(\underline{div}\underline{v}) + \mu\Delta\underline{v}]$$

Le théorème de réciprocité s'énonce :

Soient deux états d'équilibre d'un même système élastique; le travail des forces extérieures du première état dans le champ des déplacements du second est égal au travail des forces extérieures du second état dans le champ des déplacements du premier.



**Fig I.4.** : Maillage par éléments finis de la denture d'engrenage [32]



**Fig I.5.** Maillage par éléments de frontière de la denture d'engrenage[32]

### I-4.5.2. SOLUTIONS ELEMENTAIRES DE L'ELASTICITE LINEAIRE

La solution élémentaire, encore appelée solution fondamentale ou singulière dans la littérature, joue un rôle essentiel dans l'application de la méthode des équations intégrales de frontière à l'analyse des structures.

On appelle solution élémentaire de l'élasto-statique un état élasto-statique  $(\underline{U}^k, \underline{\underline{\Sigma}}^k, \underline{F}^k)$  associé à une force ponctuelle unitaire appliquée en un point fixé  $\underline{x}$  appelé point de source Figure (I-6.) et de direction  $e_k$  :

$$\underline{F}^k(\underline{y}) = \delta(\underline{y} - \underline{x}) \underline{e}_k \quad (\text{I-23.})$$

Le vecteur déplacement  $\underline{U}^k(\underline{x}, \underline{y})$  et le tenseur des contraintes élastiques  $\underline{\underline{\Sigma}}^k(\underline{x}, \underline{y})$  dépendent du point courant  $\underline{y}$ , du point d'application  $\underline{x}$  et de la direction k de la force ponctuelle (I-23.).

Les composantes cartésiennes  $U_i^k(\underline{x}, \underline{y})$ ,  $\Sigma_{ij}^k(\underline{x}, \underline{y})$  de toute solution élémentaire vérifient les équations d'équilibre et de comportement :

$$\begin{cases} \Sigma_{ij,j}^k(\underline{x}, \underline{y}) + \delta(\underline{x} - \underline{y}) \delta_{ik} = 0 \\ \Sigma_{ij,j}^k(\underline{x}, \underline{y}) = C_{ijab} U_{a,b}^k(\underline{x}, \underline{y}) \end{cases} \quad (\text{I-24.})$$

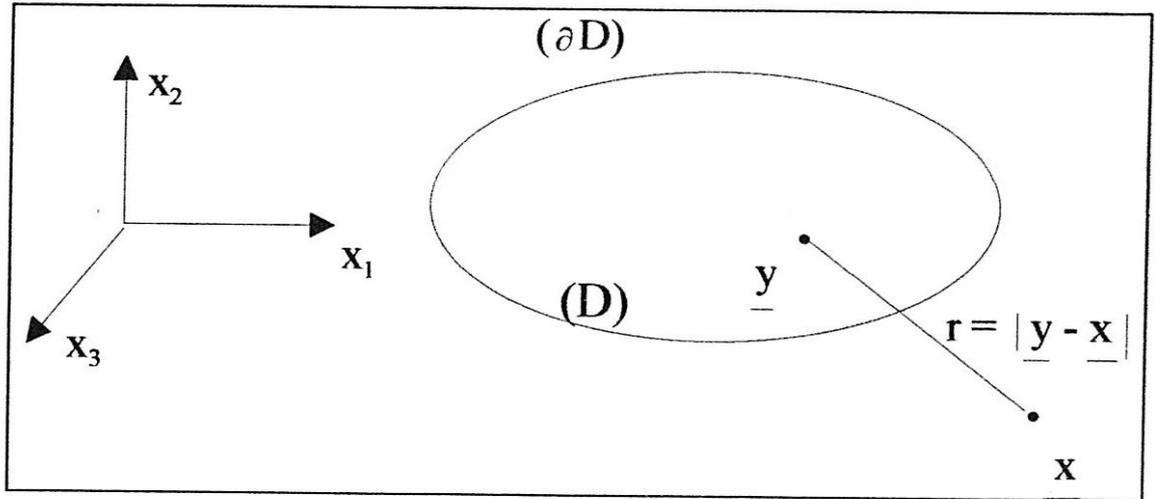
La notation  $f_{,a}(\underline{x}, \underline{y})$  désigne par convention la dérivée partielle de f par rapport à la composante  $y_a$  du point courant  $\underline{y}$ .

On introduit également la notation  $T_i^k(\underline{x}, \underline{y})$  pour désigner le vecteur-contrainte associé à la solution élémentaire au point  $\underline{y}$  :

$$T_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = \Sigma_{ij}^k(\underline{x}, \underline{y}) n_j(\underline{y}) \quad (\text{I-25})$$

$\underline{x}$  : point fixe

$\underline{y}$  : point courant (variable)



**Fig I.6** Représentation du domaine (D) et de son contour ( $\partial D$ ).

Pour un espace infini élastique isotrope, la solution fondamentale dite solution de **Kelvin** [34] est représentée par le tenseur :

$$U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [r_{,i}r_{,k} + (3-4\nu)\delta_{ik}] \quad (\text{I-26})$$

de même :

$$\Sigma_{ij}^k(\underline{x}, \underline{y}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [3r_{,i}r_{,k}r_{,j} + (1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k})] \quad (\text{I-27})$$

où :  $r = |\underline{r}| = |\underline{y} - \underline{x}|$ . soit :  $r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = \frac{r_\alpha}{r} = \frac{x_\alpha - y_\alpha}{r}; (\alpha=i,j,k)$$

La solution de **Kelvin** est singulière en  $\underline{y} = \underline{x}$  ( $r=0$ ).

La relation (I-25) permet d'exprimer le vecteur -contrainte associé à la solution élémentaire :

$$T_i^k(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left\{ (1-2\nu) \left[ n_i(\underline{y}) \frac{x_k - y_k}{r} - n_k(\underline{y}) \frac{x_i - y_i}{r} \right] \right. \\ \left. + \left[ (1-2\nu)\delta_{ik} + 3 \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r^2} \right] n_s(\underline{y}) \frac{x_s - y_s}{r} \right\} \quad (\text{I-28})$$

avec :

$$(x_s - y_s)n_s = \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)n_i$$

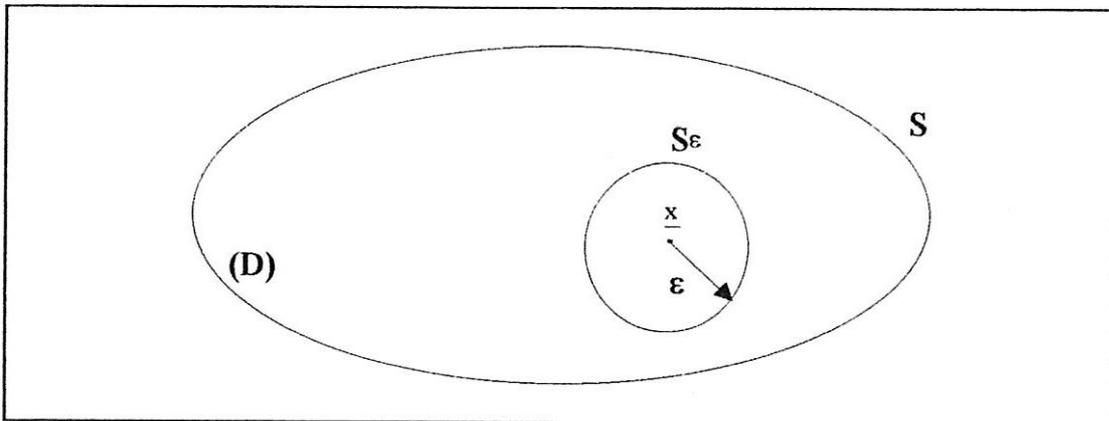
I-4.5.3. LES EQUATIONS INTEGRALES DE BASE

-a)  $\underline{x} \in (D)$

Utilisons le théorème de réciprocité de **Maxwell-Betti** dans le cas particulier où  $\underline{u}$  est le champ de déplacement que l'on cherche, tel que :

$$L\underline{u} = -\underline{F} \text{ et } v_k = U_i^k(\underline{x}, \underline{y})e_i$$

c'est-à-dire  $L\underline{v} = 0$ . La solution  $v_k$  a une singularité lorsque  $\underline{y} \rightarrow \underline{x}$ . Pour rendre régulier le domaine (D), nous excluons une boule  $B(\underline{x}, \epsilon)$  de surface  $S_\epsilon$ , de centre  $\underline{x}$ , de rayon  $\epsilon$  (figure I-7.)



**Fig I-7** : Domaines D et  $D_\epsilon$  ( $D_\epsilon = D - B(\underline{x}, \epsilon)$ ) avec  $\partial D = S \cup S_\epsilon$  et dans le cas où  $\underline{x} \in (D)$

En appliquant le théorème de **Betti** pour le domaine ( $D_\epsilon = D - B(\underline{x}, \epsilon)$ ), il vient lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$u_k(\underline{x}) = \int_D U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) F_i(\underline{y}) dD + \int_S \{ \psi_i(\underline{y}) U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) - u_i(\underline{y}) T_i^k(\underline{x}, \underline{y}) \} dS \quad (I-29)$$

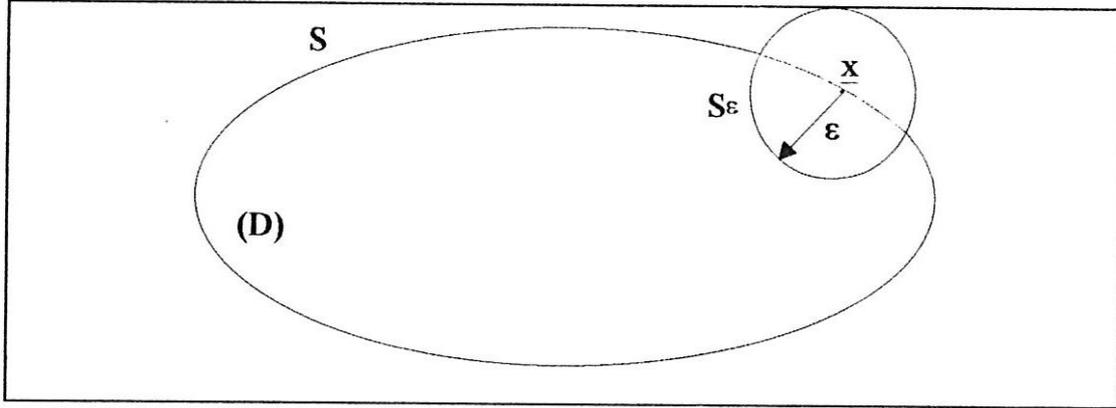
Cette première équation intégrale relie les déplacements en un point  $\underline{x}$  quelconque intérieur au domaine (D) aux déplacements et tensions en un point  $\underline{y}$  de la surface (S) sauf pour le premier terme qui est une intégrale de volume :

$$\int_D U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) F_i(\underline{y}) dD$$

Dans le cas où les forces de volume sont quelconques on doit évaluer ce terme.

-b)  $\underline{x} \in (S)$

L'équation intégrale de frontière est obtenue lorsque le point  $\underline{x}$  est situé sur la surface (S). Cette fois-ci le domaine d'exclusion étant une portion de sphère (Figure I-8.).



**Fig.I-8** : Domaine D et  $D_\epsilon$  ( $D_\epsilon = D - B(x, \epsilon)$ ) avec  $\partial D = S \cup S_\epsilon$  dans le cas où  $\underline{x} \in (S)$

L'application du théorème de **Betti** donne :

$$\frac{1}{2} u_k(\underline{x}) = \int_S U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) t_i(\underline{y}) dS - \int_S T_i^k(\underline{x}, \underline{y}) t_i(\underline{y}) dS + \int_D U_i^k(\underline{x}, \underline{y}) F_i(\underline{y}) dD \quad (I-30)$$

#### I-4.5.4 CONTRAINTES EN TOUS LES POINTS DU DOMAINE

$$\sigma_{ij}(\underline{x}) = \int_S D_{kij} t_k(\underline{y}) dS - \int_S S_{kij} u_k dS + \int_D D_{kij} F_k dD \quad (I-31)$$

où les composantes des tenseurs du troisième ordre  $D_{kij}$  et  $S_{kij}$  sont :

$$D_{kij} = \frac{1}{r^2} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}] + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)} \quad (I-32)$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu}{r^\beta} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - \gamma r_{,i} r_{,j} r_{,k}] + \beta \nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + \dots \right. \\ \left. \dots + (1-2\nu) (\beta n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)} \quad (I-33)$$

où :

$\alpha = 1, \beta = 2$  et  $\gamma = 4$  en élasticité bidimensionnelle

$\alpha = 2, \beta = 3$  et  $\gamma = 5$  en élasticité tridimensionnelle

Remarque:

Pour un problème d'élasticité en déformations planes, la solution fondamentale s'écrit :

$$U_i^k = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad (\text{I-34})$$

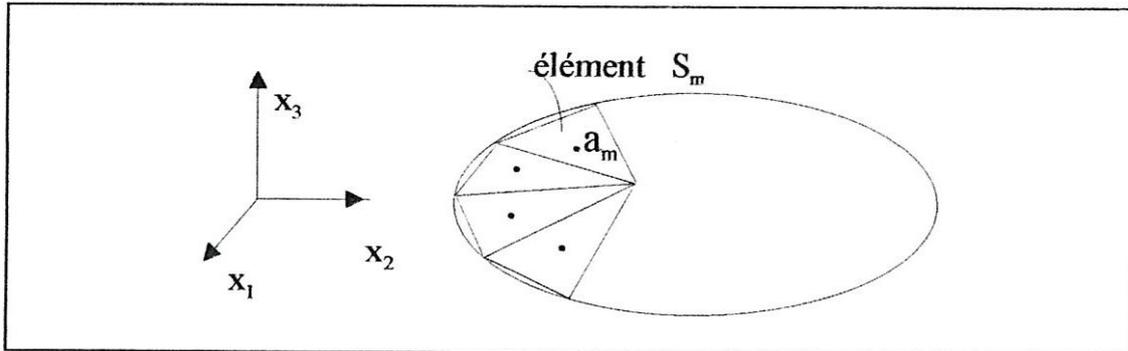
**I-4.5.5. DISCRETISATION DE L'EQUATION INTEGRALE DE FRONTIERE PAR ELEMENTS DE FRONTIERE**

*principe:*

- On discrétise la surface (S) en M éléments constants figure (I-9.).

- Sur chaque élément  $S_m$  on suppose que :

$$\begin{cases} t_j \approx t_j(a_m) = t_{jm} \\ u_j \approx u_j(a_m) = u_{jm} \end{cases}$$



**Fig. I.9:** Discrétisation du domaine tridimensionnel par des éléments de frontière constants

- Pour un point de source  $a_i$ , l'équation intégrale de frontière s'écrit alors pour  $\underline{F} = \underline{0}$  :

$$\frac{1}{2} u_i^l = \sum_{m=1}^M t_{jm} \int_{S_m} U_{ij}(a_i) dS - \sum_{m=1}^M u_{jm} \int_{S_m} T_{ij}(a_i) dS$$

soit :

$$\frac{1}{2} u_i^l = \sum_{m=1}^M A_{ijlm} t_{jm} - \sum_{m=1}^M B_{ijlm} u_{jm} \quad (\text{I-35})$$

---

avec :

$$i,j=1,2,3 \text{ et } l,m=1,M, \begin{cases} A_{ijlm} = \int_{S_m} U_{ij}(a_l) dS \\ B_{ijlm} = \int_{S_m} T_{ij}(a_l) dS \end{cases}$$

Remarque:

Pour les éléments de frontière linéaires, quadratiques ou autres, on utilise le concept de l'élément de référence comme dans la méthode des éléments finis.

Ainsi, la quadrature de **Gauss** peut aussi être appliquée pour évaluer les différentes intégrales.

## II-2. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté une revue bibliographique succincte sur les différentes méthodes de résolution des équations de l'élasticité linéaire qui peuvent être classées en deux catégories :

1- les méthodes analytiques groupant la théorie des potentiels ( solution de **Kelvin, Clebsh, Trefftz, Grodski** ), la théorie des fonctions à variables complexes et les méthodes basées sur des développements en séries;

2- les méthodes numériques utilisant soit la méthode des différences finies ou méthodes des éléments finis et des éléments finis de frontière.

A travers cette étude bibliographique, il ressort que la méthode analytique basée sur la formulation dans le plan complexe des équations de l'élasticité plane ( contraintes moyennes planes et déformations planes ) dont la solution est exprimée à l'aide des potentiels complexes de **Kolosov** et **Muskhelishvili** convient pour la détermination de l'état élastique dans le cas de domaines doublement connexes, telles que les couronnes circulaires. L'avantage essentiel de cette technique est qu'elle permet, à partir des solutions en contraintes et en déplacements obtenues pour une couronne circulaire, de construire la solution des différents problèmes aux limites pour un assemblage de deux ou plusieurs couronnes. Ces dernières schématisent convenablement les revêtement de surfaces utilisées dans les paliers lisses.

---

## Chapitre II

# SOLUTIONS DES PROBLEMES DE VALEURS AUX LIMITES POUR LES COURONNES ELASTIQUES CIRCULAIRES

### II-1. INTRODUCTION

Les équations de l'élasticité linéaire plane seront utilisées dans notre étude pour la description du comportement des milieux solides déformables. Le passage du comportement réel de ces milieux à cette schématisation nécessite de nombreuses hypothèses simplificatrices. Elles concernent :

- La nature physico-chimique du matériau et les caractéristiques mécaniques qui en découlent. Ce sont les hypothèses classiques conduisant à l'écriture de la loi de **Hooke** [10].

- L'ordre de grandeur des paramètres géométriques caractérisant l'état du milieu; Ce sont les hypothèses de petits déplacements et de petites déformations qui permettent d'appliquer les conditions aux limites et de traiter les équations sur le domaine géométrique initial non déformé et d'obtenir des équations linéaires en déplacements.

- Les caractéristiques dimensionnelles du domaine déformable considérées; Ce sont les hypothèses qui caractérisent les états bidimensionnels :

- \* Contraintes moyennes planes : le domaine est limité par deux plans parallèles au plan d'étude, à faible distance l'un de l'autre et les surfaces formées par ces deux plans sont libres de toutes tensions.

- \* Déformations planes, lorsque la dimension des milieux dans la direction orthogonale au plan d'étude est grande devant les autres dimensions du milieu.

Nous présenterons tout d'abord la méthode d'obtention des équations du problème dans le plan complexe, puis la solution des problèmes fondamentaux (**Dirichlet**, mixte) pour la couronne circulaire. Enfin, le dernier paragraphe du chapitre est consacré à l'écriture matricielle de ces solutions et à la présentation de la méthode permettant d'obtenir les solutions pour des domaines constitués par l'assemblage de plusieurs couronnes circulaires.

### II-2. EQUATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE

L'exploitation de l'hypothèse du *problème plan* - déformations planes ou contraintes moyennes planes - pour cette étude conduit à utiliser les techniques de variables complexes qui sont adaptées à ce type de problème.

Tout d'abord, nous précisons les notations utilisées dans le plan complexe en définissant pour chaque point du domaine d'étude les trois représentations possibles *cartésienne, polaire et complexe* des sept quantités réelles indépendantes attachées à ce point, soit :

- les deux coordonnées de ce point;
- les deux composantes du déplacement de ce point;
- les trois composantes du tenseur des contraintes intervenant dans les équations.

Par la suite, nous écrivons les équations du problème et présenterons la méthode permettant d'obtenir la formulation de ces équations à l'aide des fonctions de **Kolosov-Muskhelishvili**. Nous reprendrons la méthode exposée par **L.Solomon** [10] qui considère les fonctions de deux variables intervenant dans la formulation connue des fonctions de  $z$  et  $\bar{z}$ . La nature des fonctions introduites  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  sera précisée.

### II-2.1. PLAN COMPLEXE ET NOTATIONS

Dans le plan, rapporté au repère  $(o, x, y)$ , un point  $M$  évidemment susceptible de plusieurs définitions (Fig.II.1) :

- Définition cartésienne : le point est défini par les deux coordonnées cartésiennes notées  $x$  et  $y$ .
- Définition polaire : le point est défini par la direction  $OM = r$  et par l'angle  $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$  noté  $\theta$ . Cet angle est défini modulo  $2\pi$ . Nous choisisons en général la valeur de  $\theta \in [0, 2\pi]$ .
- Définition complexe : le point est défini par son affixe  $z$ . Nous aurons  $z = x + iy$  ou  $z = re^{i\theta}$  avec  $i = \sqrt{-1}$ .

Lors du changement d'état du plan matériel, le point  $M$  vient occuper la position  $M'$  figure (II-1). Le déplacement du point  $M$  est défini par :

$$\vec{U}(M) = \overrightarrow{MM'}$$

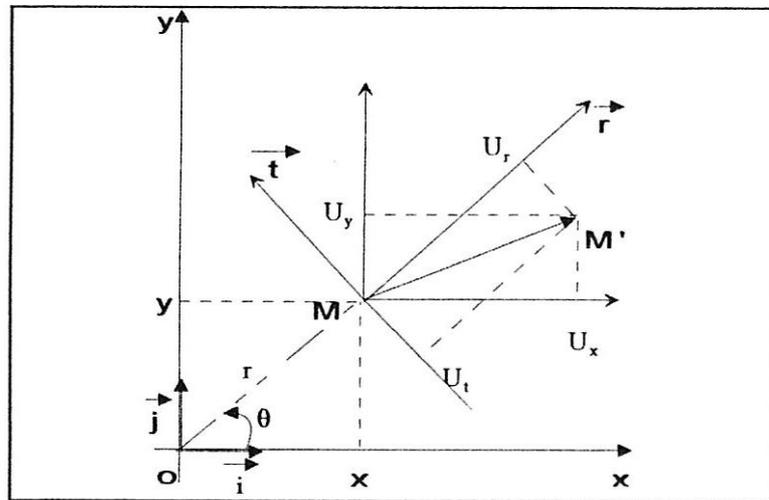


Fig. II.1 : Position et déplacements dans le plan complexe

La représentation cartésienne conduit à définir dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  les composantes cartésiennes,  $U_x$  et  $U_y$ , du déplacement de  $M$  par la relation :

$$\vec{U}(M) = U_x(M)\vec{i} + U_y(M)\vec{j}$$

La représentation polaire conduit à définir dans la base orthonormée  $(\vec{r}, \vec{t})$  attachée à chaque point  $M$ , les déplacements polaires  $U_r$  et  $U_t$  par la relation :

$$\vec{U}(M) = U_r \vec{r} + U_t \vec{t}$$

Les relations liant  $U_x$  et  $U_y$  à  $U_r$  et  $U_t$  s'obtiennent en utilisant la rotation qui fait passer de la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  à la base  $(\vec{r}, \vec{t})$ , soit :

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ U_t \end{Bmatrix} \text{ et inversement : } \begin{Bmatrix} U_r \\ U_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix}$$

Dans le plan complexe le vecteur  $\vec{U}(M)$  est également défini par son affixe  $U$ . Nous avons alors :

$$U = U_x + iU_y \text{ ou encore } U = (U_r + iU_t)e^{i\theta}$$

Ainsi sous la forme la plus condensée, l'état de déplacement du domaine d'étude peut être caractérisé par une fonction à valeurs complexes de la variable complexe.

### II-2.1.2. CONTRAINTES

Les simplifications entraînées par l'hypothèse des déformations planes ou celles des contraintes moyennes planes conduisent à ne considérer pour caractériser l'état de contraintes d'un point que les trois composantes agissant sur des facettes dont la normale est contenue dans le plan. Suivant la représentation choisie, nous aurons (fig. II-2) :

- en cartésien, les composantes  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$
- en polaire, les composantes  $\sigma_{rr}, \sigma_{rt}, \sigma_{tt}$

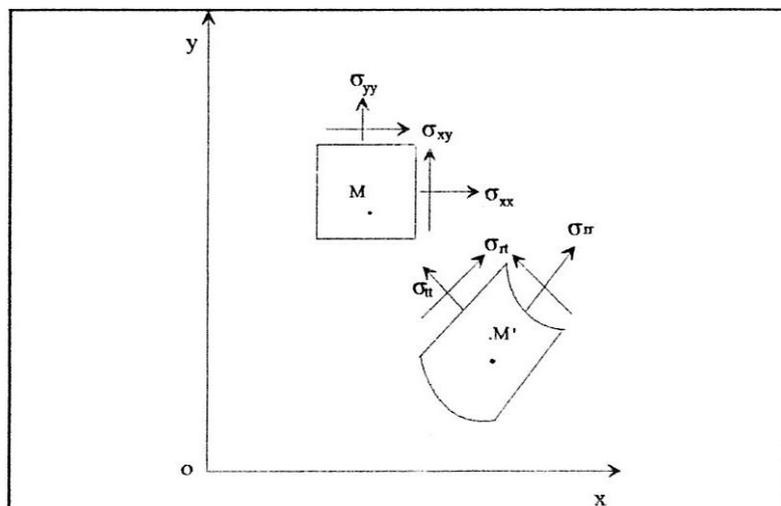


Fig. II.2 : Contraintes cartésiennes et polaires

Les relations qui lient ces deux groupes de composantes découlent des relations tensorielles de changement de base, soit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

L'état de contraintes en un point ne peut pas être caractérisé par un seul complexe, (une seule fonction complexe). Nous introduirons cependant par la suite des fonctions complexes liées aux contraintes, soit :

- La dilatation volumique  $\sigma_{xx}(M) + \sigma_{yy}(M) = \sigma_{rr}(M) + \sigma_{\theta\theta}(M)$  qui sera caractérisée par la fonction réelle  $S_0$  de la variable complexe  $z$ ,

- La fonction  $\sigma_{yy}(M) - \sigma_{xx}(M) + 2i\sigma_{xy}(M) = e^{-2i\theta} (\sigma_{\theta\theta}(M) - \sigma_{rr}(M) + 2i\sigma_{r\theta}(M))$  qui sera notée  $S$ . Cette fonction est directement liée au changement de forme au voisinage du point. Le module de  $S(z)$  est d'ailleurs le rayon du cercle de **Mohr**.

### II-2.2. EQUATIONS DU PROBLEME

L'hypothèse d'élasticité plane et celle des forces volumiques nulles permettent d'aboutir à un système simplifié d'équations. Nous utiliserons ici la forme cartésienne de ces équations qui est plus simple. Nous reviendrons ultérieurement sur la forme polaire à partir des équations complexes.

- Les deux équations d'équilibre s'écrivent :

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = 0 \tag{II-1.}$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0 \tag{II-2.}$$

- Les trois équations de compatibilité sont :

$$\nabla^2 \sigma_{xx} + S_{0,xx} = 0 \tag{II-3.}$$

$$\nabla^2 \sigma_{yy} + S_{0,yy} = 0 \tag{II-4.}$$

$$\nabla^2 \sigma_{xy} + S_{0,xy} = 0 \tag{II-5.}$$

- La loi de **Hooke** s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu \epsilon_{xy} \end{aligned} \tag{II-6.}$$

avec

$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$  qui est la trace du tenseur de déformation.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{en déformations planes;}$$

et

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{en état de contraintes moyennes planes.}$$

$\lambda$  et  $\mu$  étant les constantes de **Lamé**.

- Les relations déformations- déplacements avec l'hypothèse des petites déformations, sont :

$$\varepsilon_{xx} = U_{x,x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = U_{y,y} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(U_{x,y} + U_{y,x}).$$

### II-2.3. EQUATIONS EN VARIABLES COMPLEXES

Nous rappellerons la méthode de transcription des équations précédentes (II-1 à II-5), d'après **Solomon** [10]. Les équations s'expriment uniquement à l'aide de deux fonctions de la variable complexe. Les fonctions de points initialement fonctions des variables  $x$  et  $y$  deviennent des fonctions des complexes  $z$  et  $\bar{z}$  comme indépendants.

#### II-2.3.1 TRANSFORMATION DES EQUATIONS

Le déplacement d'un point  $M$  noté  $\bar{U}(M)$  sera une fonction des variables  $z$  et  $\bar{z}$  :

$$U(z, \bar{z}) = U_x(x, y) + iU_y(x, y)$$

Les fonctions de contraintes  $S_0$  et  $S$  sont introduites :

$$S_0(z, \bar{z}) = \sigma_{xx}(x, y) + \sigma_{yy}(x, y)$$

$$\text{et} \quad S(z, \bar{z}) = \sigma_{yy}(x, y) - \sigma_{xx}(x, y) + 2i\sigma_{xy}(x, y)$$

D'après les propriétés des fonctions  $S_0$  et  $S$ , nous avons :

$$\nabla^2 S_0 = 4S_{0,z\bar{z}} \quad \text{et} \quad S_{0,xx} - S_{0,yy} - 2iS_{0,xy} = 4S_{0,zz}$$

Les équations de compatibilité (II-3 à II-5) deviennent :

$$S_{0,z\bar{z}} = 0 \quad \text{(II-7.)}$$

$$S_{,z\bar{z}} - S_{0,zz} = 0 \quad \text{(II-8.)}$$

Il y a équivalence entre le système formé par les trois équations (II-3 à II-5), et celui formé par les deux équations (II-7. et II-8.). L'équation (II-8.) porte sur une fonction à valeurs complexes et contient en fait deux informations indépendantes. De la même façon, le système formé des équations d'équilibre (II-1. et II-2.) est équivalent à l'équation :

$$S_{0,z} - S_{,z} = 0 \quad (\text{II-9.})$$

L'équation (II-8.) se déduit de l'équation (II-9.) par simple dérivation par rapport à la variable  $z$ . Le système formé des équations (II-1. à II-5.) est donc finalement équivalent au système formé des équations (II-7. et II-9.). Enfin, l'utilisation des relations déformations-déplacements et de l'expression des contraintes en fonction de  $S_0$  et  $S$  conduit à :

$$U_{,z} = -\frac{1}{4\mu} \bar{S} \quad (\text{II-10.})$$

$$U_{,z} + \bar{U}_{,z} = \frac{S_0}{2(\mu + \lambda)} \quad (\text{II-11.})$$

Les équations (II-7.) et (II-9.) sont donc les équations en contraintes du problème plan et que les équations (II-10.), (II-11.) sont les équations physico-géométriques du problème.

### **II-2.3.2. INTEGRATION DES EQUATIONS : FONCTIONS DE KOLOSOV ET MUSKHELISHVILI**

L'intégration des équations (II.7.) et (II.9.) permet de résoudre le problème élastique plan en contraintes. Compte tenu de cette solution, l'intégration des équations (II-10.) et (II-11.) donnera la solution en déplacements du problème :

#### *- Solution en contraintes*

En tenant compte des règles opératoires attachées à l'intégration des fonctions des deux variables  $z$  et  $\bar{z}$ , l'intégration de l'équation (II-7.) par rapport à  $\bar{z}$ , puis par rapport à  $z$  conduit à :

$$S_0(z, \bar{z}) = \int S_1(z) dz + S_2(z) \quad S_1 \text{ et } S_2 \text{ sont des fonctions arbitraires.}$$

Puis en posant :  $2\Phi(z) = \int S_1(z) dz$  et en considérant que  $S_0(z, \bar{z})$  est une fonction à valeurs réelles, nous obtenons :

$$S_0(z, \bar{z}) = 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})] \quad (\text{II-12.})$$

Le report de cette solution dans l'équation (II-9.) permet d'obtenir après intégration par rapport à  $\bar{z}$ . La solution pour  $S$ , soit :

$$S(z, \bar{z}) = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \quad (\text{II-13.})$$

$\Psi(z)$  étant une nouvelle fonction arbitraire.

- Solution en déplacements

L'intégration des équations (II-10.) et (II-11.) nécessite la connaissance des primitives des fonctions  $\Phi(z)$  et  $\Psi(z)$ , pour cela nous poserons :

$$\Phi(z) = \phi'(z) \quad \text{et} \quad \Psi'(z) = \psi(z)$$

Les solutions (II-12.) et (II-13.) deviennent alors :

$$S_0 = 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \quad \text{(II-14.)}$$

et

$$S = 2[z\phi''(z) + \psi'(z)] \quad \text{(II-15.)}$$

Nous reportons ces solutions dans l'équation (II-10.) et (II-11.) et nous intégrons par rapport à  $\bar{z}$  :

$$U_{,z} = -\frac{1}{2\mu} [z\overline{\phi''(z)} + \overline{\psi'(z)}] \quad \text{(II-16.)}$$

$$U_{,z} + \overline{U_{,z}} = \frac{1}{(\mu + \lambda)} [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \quad \text{(II-17.)}$$

et

$$U = \frac{-1}{2\mu} [z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}] + U_1(z) \quad \text{(II-18.)}$$

L'utilisation de l'équation (II-17.) et de la solution (II-18.) permet de calculer  $U_1(z)$ . On obtient :

$$U_1(z) = \left( \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\mu + \lambda} \right) \phi(z) = \frac{\chi}{2\mu} \phi(z)$$

Finalement, on a :

$$U(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\mu} [\chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \quad \text{(II-19.)}$$

Avec

$$3 - 4\nu \quad \text{en déformation planes.}$$

$$\chi =$$

$$\frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{en contraintes moyennes planes.}$$

$\nu$  étant le coefficient de **Poisson**.

La solution du problème plan en l'absence de forces volumiques est donc donnée par la relation (II-19.) pour les déplacements et par les relations (II-14.) et (II-15.) pour les contraintes. Cette solution dépend de deux potentiels  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$ . Ces potentiels sont les fonctions de **Kolosov** et **Muskhelishvili**. Les solutions se regroupent ainsi :

- Solutions cartésiennes :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] = S_0(z, \bar{z})$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[z\phi''(z) + \psi'(z)] = S(z, \bar{z}) \quad (\text{II-20.})$$

$$2\mu(U_x + iU_y) = \chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

- Solutions polaires :

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] = S_0(z, \bar{z})$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = 2[z\phi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta} = S(z, \bar{z}) \quad (\text{II-21.})$$

$$2\mu(U_r + iU_\theta) = [\chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}]e^{-i\theta}$$

## 2.4 NATURE ET PROPRIETES DES FONCTIONS DE KOLOSOV ET MUSKHELISHVILI

La nature des fonctions  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  dépend des propriétés des composantes des contraintes et des déplacements qu'elles permettent de calculer. Nous n'envisagerons dans cette étude que le cas où les contraintes et déplacements sont uniformes et bornés dans le domaine d'étude (D) (figure.II-3). Les fonctions  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  ne peuvent donc pas avoir de points singuliers dans le domaine (D). Signalons qu'il peut y avoir éventuellement des points singuliers sur la frontière de (D) ou à l'extérieur de (D). Il en résulte que si le domaine (D) est un domaine borné, simplement connexe, d'après le théorème de la monodromie, les fonctions analytiques  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  sont uniformes donc holomorphes dans (D). Il n'en est pas de même pour des domaines multiplement connexes. Dans cette étude, nous considérons des domaines formés de couronnes circulaires qui sont des domaines doublement connexes bornés. Par conséquent, il est nécessaire de préciser la nature des fonctions  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  pour de tels domaines.

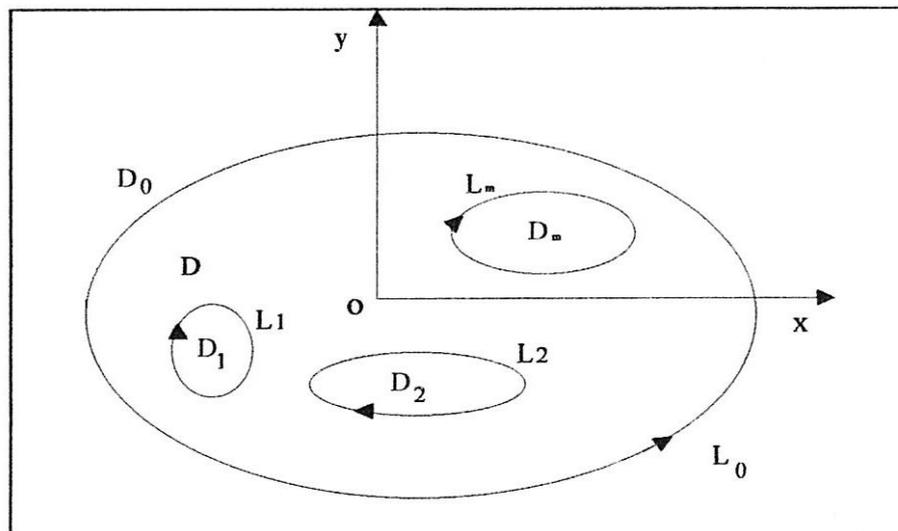


Fig.II.3 : Domaine borné multiplement connexe

La condition d'uniformité des contraintes et déplacements implique la même propriété pour les fonctions  $S_0$ ,  $S$  et  $U$ . Dans la référence [ 10 ], on montre que les expressions des fonctions de **Kolosov** et **Muskhelishvili**  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  pour un domaine borné multiplement connexe (figure II-3. ) sont :

$$\phi(z) = \sum_{j=1}^m A'_j z \ln(z - z_j) + \sum_{j=1}^m \gamma_j \ln(z - z_j) + \phi_0(z) \quad (\text{II-22.})$$

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^m \gamma'_j \ln(z - z_j) + \psi_0(z) \quad (\text{II-23.})$$

avec  $\gamma_j$  et  $\gamma'_j$  : des constantes complexes

$\phi_0(z)$  et  $\psi_0(z)$  sont des fonctions holomorphes dans (D).

La condition d'uniformité pour le déplacement  $U_0$  doit ensuite être assurée. L'équation (II-19.) et les relations (II-22.) et (II-23.) conduisent à l'expression du déplacement  $U$ . La fonction obtenue doit être holomorphe, pour cela il faut que :

$$\chi A'_j z + \chi \gamma_j + A'_j z + \overline{\gamma'_j} = 0 \quad A'_j \in \mathbb{R}$$

Pour  $j = 1, 2, \dots, m$  et  $z \in D$ ,  $m$  étant le nombre de contours intérieurs

Par suite, nous obtenons :

$$A'_j = 0 \quad \text{et} \quad \gamma'_j = -\chi \overline{\gamma_j} \quad (\text{II-24.})$$

Finalement, l'uniformité sera garantie dans le domaine (D) pour toutes les composantes des contraintes et déplacements si :

$$\begin{cases} \phi(z) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \ln(z - z_j) + \phi_0(z) \\ \psi(z) = -\chi \sum_{j=1}^m \overline{\gamma_j} \ln(z - z_j) + \psi_0(z) \end{cases} \quad (\text{II-25.})$$

Les relations (II-25.) donnent donc la forme générale des fonctions de **Kolosov** et **Muskhelishvili** pour un domaine borné multiplement connexe.

## II-3. COURONNE CIRCULAIRE

Les relations (II-25.) présentées au paragraphe précédent explicitant la nature des fonctions de **Kolosov-Muskhelishvili** pour un domaine borné multiplement connexe. La couronne circulaire fait partie de cet ensemble de domaine. Aussi, nous allons dans ce paragraphe à partir des relations (II-25.) et du système (II-21.) donner la solution générale du problème plan pour la couronne circulaire. Nous représenterons les fonctions holomorphes  $\phi_0(z)$  et  $\psi_0(z)$  par des séries de **Laurent** et établirons les expressions des contraintes et déplacements à l'aide de ces séries. En particulier, nous expliciterons les expressions des déplacements et des contraintes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{r\theta}$  obtenues pour les cercles limites de la couronne de rayons  $R_1$  et  $R_0$ , permettant ainsi l'utilisation directe de conditions aux limites exprimées sous forme de séries de **Fourier**.

### II-3.1. GEOMETRIE ET NOTATIONS

Le domaine (D) constituant la couronne circulaire est le domaine du plan complexe, représenté (Fig.II-4. ), tel que :

$|z| \in [R_1, R_0]$  où  $R_1$  et  $R_0$  sont respectivement les rayons des cercles intérieur et extérieur de la couronne.

Nous noterons  $h$  le rapport  $\frac{R_0}{R_1}$  des rayons des cercles limites de la couronne.

Un point  $M$  du domaine D est défini par son affixe  $z = re^{i\theta}$  nous noterons :

$$\ell = \frac{r}{R_1}$$

nous aurons :  $M \in (D) \Leftrightarrow \ell \in [1, h]$ .

les normales à la couronne sont orientées vers l'extérieur de D. Ainsi, la tension  $\overline{\sigma}_n(M)$  pour  $M$  appartenant à un des cercles limites représentera l'action du milieu extérieur sur la couronne. Les tangentes définies sur les cercles limites, se déduisent des normales par rotation de  $+\frac{\pi}{2}$ . Nous utiliserons, comme la forme du domaine D le suggère, la représentation polaire pour les contraintes et les déplacements.

les quantités se référant aux points de la surface seront notées :

- pour  $r = R_0 (\ell = h)$  : les contraintes  $\sigma_{0rr}, \sigma_{0r\theta}$  .  
les déplacements  $U_{0r}, U_{0\theta}$  .
- pour  $r = R_1 (\ell = 1)$  : les contraintes  $\sigma_{1rr}, \sigma_{1r\theta}$  .  
les déplacements  $U_{1r}, U_{1\theta}$  .

Enfin, les constantes élastiques du matériau seront notées  $\mu$  et  $\chi$ .  $\mu$  étant le module de Coulomb.

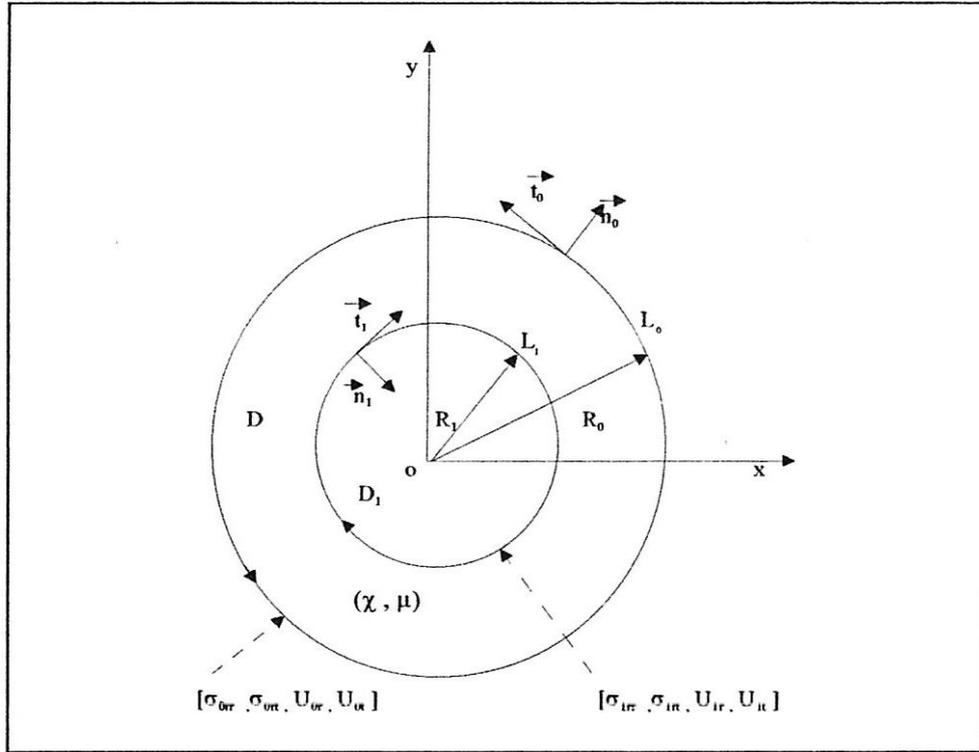


Fig.II.4 : Géométrie et notations

### II-3.2. METHODE DES SERIES

Les équations (II-21.) et (II-25.), rappelées ci-dessous seront utiles à la recherche de la solution du problème plan pour la couronne circulaire :

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \quad (\text{II-26.})$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = 2[z\phi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta} \quad (\text{II-27.})$$

$$2\mu(U_r + iU_\theta) = [\chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}]e^{-i\theta} \quad (\text{II-28.})$$

$$\phi(z) = \sum_{j=1}^m \gamma_j \ln(z - z_j) + \phi_0(z) \quad (\text{II-29.})$$

$$\psi(z) = -\chi \sum_{j=1}^m \overline{\gamma_j} \ln(z - z_j) + \psi_0(z) \quad (\text{II-30.})$$

Puisque le domaine (D) est doublement connexe, nous avons  $m = 1$ . Le domaine ( $D_1$ ) est le domaine contenant l'origine du plan complexe et est limité par le cercle centré à l'origine du rayon inf. ( $R_0, R_1$ ).  $z_1$  devant appartenir à ( $D_1$ ), nous choisissons  $z_1 = 0$ . L'indice attaché en  $\gamma_j$  devenant inutile, nous réécrivons (II-29.) et (II-30.) sous la forme :

$$\phi(z) = \gamma \ln(z) + \phi_0(z) \quad (\text{II-31.})$$

$$\psi(z) = -\chi\bar{\gamma}\ln(z) + \psi_0(z) \quad (\text{II-32.})$$

L'écriture utilisée pour les fonctions  $\phi_0$  et  $\psi_0$  holomorphes dans (D) doit alors être précisée

### II-3.2.1. DEVELOPPEMENTS DE $\phi_0$ ET $\psi_0$

Les fonctions  $\phi_0(z)$  et  $\psi_0(z)$  doivent être holomorphes dans le domaine (D). Nous allons choisir de représenter ces fonctions par deux séries de **Laurent** obtenues dans un voisinage de  $z = 0$ . Les notations sont choisies afin d'obtenir une écriture simple des dérivées des séries. Nous noterons donc :

$$\phi_0(z) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1}} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1} + \alpha \quad (\text{II-33.})$$

et

$$\psi_0(z) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1}} \frac{a'_k}{k+1} z^{k+1} + \beta \quad (\text{II-34.})$$

Nous supposerons dans un premier temps que le domaine (D) est inclus dans la couronne de convergence de ces deux séries. La démonstration de la convergence de ces séries ne peut se faire en effet qu'avec la solution effective, c'est-à-dire compte tenu de la nature des conditions aux limites imposées. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant, quand il s'agira de préciser les conditions aux limites et donc d'assurer l'existence de la solution.

Les propriétés des fonctions holomorphes indiquent d'autre part que leur développement en séries de **Laurent** converge uniformément et absolument vers leurs somme dans la couronne de convergence. Il s'en suit que les séries sont dérivables termes à termes et que la série des termes dérivés converge, dans la même couronne de convergence, vers la dérivée de la fonction holomorphe. Ceci est d'ailleurs vrai à tout ordre.

Dans la notation des séries (II-33.) et (II-34.), il n'y a pas de termes  $a_{-1}$  et  $a'_{-1}$ , pour uniformiser l'écriture des séries dérivées, nous utiliserons ces notations pour les quantités  $\gamma$  et  $-\chi\bar{\gamma}$  intervenant dans (II-31.) et (II-32.).

Finalement, nous avons :

$$\phi(z) = a_{-1}\ln(z) + \alpha + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1}} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1} \quad (\text{II-35.})$$

$$\psi(z) = -\chi\bar{a}_{-1}\ln(z) + \beta + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1}} \frac{a'_k}{k+1} z^{k+1} \quad (\text{II-36.})$$

Ce sont ces définitions de  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  que nous allons introduire dans les relations (II-26.), (II-27.) et (II-28.) pour obtenir la solution générale du problème plan relatif à la couronne circulaire.

### II-3.3. EXPRESSIONS DES CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS

L'utilisation des séries (II-35.) et (II-36.) dans les expressions des contraintes et déplacements en fonction de  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  conduit aux relations :

$$\sigma_r(r, \theta) + \sigma_n(r, \theta) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ a_k z^k + \overline{a_k} z^{-k} \right\} \quad (\text{II-37.})$$

$$\sigma_n(r, \theta) - \sigma_r(r, \theta) + 2i\sigma_n(r, \theta) = 2e^{2i\theta} \left[ -\chi \overline{a_{-1}} z^{-1} - a_{-1} z^{-2} \overline{z} + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1}} \left\{ k a_k z^{k-1} \overline{z} + a'_k z^k \right\} \right] \quad (\text{II-38.})$$

$$2\mu(U_r(r, \theta) + iU_t(r, \theta)) = e^{-i\theta} \left[ \chi a_{-1} \ln(z) + \chi \overline{a_{-1}} \ln(\overline{z}) + \alpha \chi - \beta - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{a_k} z^k + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1}} \left\{ \frac{\chi a_k}{k+1} z^{k+1} - \frac{\overline{a'_k}}{k+1} z^{-k+1} \right\} \right] \quad (\text{II-39.})$$

En écrivant maintenant le complexe  $z$  sous sa forme polaire,  $z = re^{i\theta}$ , les séries intervenant ci-dessus peuvent être vues comme des séries de **Fourier** définies pour chaque valeur de  $r$ . La convergence des séries de **Laurent** étant acquise dans le domaine (D), chacune des séries de **Fourier** converge.

Nous allons maintenant réécrire les relations (II-37.) à (II-39.) en regroupant les termes de façon à pouvoir considérer ces séries comme des séries de **Fourier** :

$$\sigma_r(r, \theta) + \sigma(r, \theta)_n = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ a_k r^k + \overline{a_{-k}} r^{-k} \right\} e^{ik\theta} \quad (\text{II-40.})$$

$$\sigma_n(r, \theta) - \sigma_r(r, \theta) + 2i\sigma_n(r, \theta) = 2(a_{-1} r - \chi \overline{a_{-1}} r^{-1}) e^{i\theta} + 2 \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1}} \left\{ k a_k r^k + a'_{k-2} r^{k-2} \right\} e^{ik\theta} \quad (\text{II-41.})$$

$$2\mu(U_r(r, \theta) + iU_t(r, \theta)) = (2\chi a_{-1} \ln(r) + \alpha \chi - \beta - \overline{a_{-1}} r^2) e^{-i\theta} + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1}} \left\{ \frac{\chi a_k}{k+1} r^{k+1} - \overline{a_{-k}} r^{1-k} + \frac{\overline{a'_{-2-k}}}{k+1} r^{-1-k} \right\} e^{ik\theta} \quad (\text{II-42.})$$

Les relations (II-40.) à (II-42.) seront utilisées ultérieurement pour la détermination des coefficients  $a_k$  et  $a'_k$  afin de satisfaire les conditions aux limites. Ces dernières ne pourront porter que sur les déplacements de points appartenant aux frontières ou sur les tensions appliquées à ces frontières. La relation (II-42.) sera donc conservée tandis que la relation (II-41.) sera remplacée par la différence (II-40.)-(II-41.) qui porte sur la quantité  $(\sigma_r - i\sigma_n)$ . Cette

quantité peut pour  $r = R_0$  et  $r = R_1$  être déterminée à partir de l'action du milieu extérieur sur la couronne.

Afin d'adimensionner les relations vues précédemment, nous définirons :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \alpha_k = \alpha_k R_1^k \quad \text{et} \quad \alpha'_k = \alpha'_k R_1^k$$

Ainsi les solutions du problème plan s'écrivent :

$$\sigma_{rr}(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \alpha_k \ell^k + \overline{\alpha_{-k}} \ell^{-k} \right\} e^{ik\theta} \quad (\text{II-43.})$$

$$\sigma_{rr}(r, \theta) - i\sigma_{r\theta}(r, \theta) = (1 + \chi) \ell^{-1} \overline{\alpha_{-1}} e^{i\theta} + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 1}} \left\{ (1-k) \alpha_k \ell^k + \overline{\alpha_{-k}} \ell^{-k} - \alpha'_{k-2} \ell^{k-2} \right\} e^{ik\theta} \quad (\text{II-44.})$$

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{r} (U_r + iU_t) = & \left\{ 2\alpha_{-1} \ell^{-1} \ln(r) + \frac{(\alpha\chi - \overline{\beta})}{r} - \overline{\alpha_1} \ell \right\} e^{-i\theta} + \dots \\ & + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1}} \left\{ \frac{\chi \alpha_k}{k+1} \ell^k - \overline{\alpha_{-k}} \ell^{-k} + \frac{\overline{\alpha'_{-2-k}}}{1+k} \ell^{-2-k} \right\} e^{ik\theta} \end{aligned} \quad (\text{II-45.})$$

Notons que dans la relation (II-45.), le déplacement complexe  $(U_r + iU_t)$  est rapporté au rayon  $r$ . Cette opération trouvera sa justification lors de l'assemblage de plusieurs couronnes au chapitre III.

### II-3.4 NOTATIONS DES SERIES

Les relations (II-43.) à (II-45.) présentent les contraintes et les déplacements, sous forme de séries qui, pour une valeur donnée du rayon  $r$ , sont des séries de **Fourier**. Ainsi, nous allons utiliser une notation découlant de cette remarque :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\ell) e^{ik\theta} \\ \sigma_{rr}(r, \theta) - i\sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k(\ell) e^{ik\theta} \end{aligned} \quad (\text{II-46.})$$

$$\frac{2\mu}{r} (U_r(r, \theta) + iU_t(r, \theta)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k(\ell) e^{ik\theta}$$

et l'expression des coefficients  $V_k(\ell)$ ,  $\sigma_k(\ell)$  et  $U_k(\ell)$  en fonction des coefficients  $\alpha_k$  et  $\alpha'_k$  est donnée par les relations (II-43.) à (II-45.). De plus en  $r = R_0$  et  $r = R_1$ , on aura :

- pour  $r = R_0$  ( $\ell = h$ ), cercle extérieur

$$\begin{aligned}\sigma_{0rr}(\theta) + \sigma_{0\theta}(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} V_{0,k}(\ell) e^{ik\theta} \\ \sigma_{0rr}(\theta) - i\sigma_{0r\theta}(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_{0,k}(\ell) e^{ik\theta}\end{aligned}\quad (\text{II-47.})$$

$$\frac{2\mu}{R_0} (U_{0r}(\theta) + iU_{0\theta}(\theta)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_{0,k}(\ell) e^{ik\theta}$$

$$V_{0,k} = 2(\alpha_k h^k + \overline{\alpha_{-k}} h^{-k}) \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma_{0,1} = (1 + \chi) h^{-1} \overline{\alpha_{-1}} \quad , \quad \text{pour } k=1$$

$$\sigma_{0,k} = (1 - k) \alpha_k h^k + \overline{\alpha_{-k}} h^{-k} - \alpha'_{k-2} h^{k-2} \quad , \quad \forall k \in \{\mathbb{Z} - \{1\}\} \quad (\text{II-48.})$$

$$U_{0,-1} = 2\chi \alpha_{-1} h^{-1} \ln(R_0) + \frac{(\alpha\chi - \overline{\beta})}{R_0} \overline{\alpha_1} h \quad , \quad \text{pour } k=-1$$

$$U_{0,k} = \frac{\chi \alpha_k}{k+1} h^k - \overline{\alpha_{-k}} h^{-k} + \frac{\overline{\alpha'_{-2-k}}}{1+k} h^{-2-k} \quad , \quad \forall k \in \{\mathbb{Z} - \{1\}\}$$

- pour  $r = R_1$  ( $\ell = 1$ ), cercle intérieur

$$\begin{aligned}\sigma_{1rr}(\theta) + \sigma_{1\theta}(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} V_{1,k}(\ell) e^{ik\theta} \\ \sigma_{1rr}(\theta) - i\sigma_{1r\theta}(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_{1,k}(\ell) e^{ik\theta}\end{aligned}\quad (\text{II-49.})$$

$$\frac{2\mu}{R_1} (U_{1r}(\theta) + iU_{1\theta}(\theta)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_{1,k}(\ell) e^{ik\theta}$$

$$V_{1,k} = 2(\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}}) \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma_{1,1} = (1 + \chi) \overline{\alpha_{-1}} \quad , \quad \text{pour } k=1$$

$$\sigma_{1,k} = (1 - k) \alpha_k + \overline{\alpha_{-k}} - \alpha'_{k-2} \quad ; \quad \forall k \in \{\mathbb{Z} - \{1\}\} \quad (\text{II-50.})$$

$$U_{1,-1} = 2\chi \alpha_{-1} \ln(R_1) + \frac{(\alpha\chi - \overline{\beta})}{R_1} \overline{\alpha_1} \quad , \quad \text{pour } k=-1$$

$$U_{1,k} = \frac{\chi \alpha_k}{k+1} - \overline{\alpha_{-k}} + \frac{\overline{\alpha'_{-2-k}}}{1+k} \quad , \quad \forall k \in \{\mathbb{Z} - \{-1\}\}$$

---

## REMARQUE

La solution du problème élastique plan pour la couronne circulaire, obtenue sous forme de séries de **Laurent** et présentée ensuite sous forme de séries de **Fourier**, fournit un outil suffisamment élaboré pour permettre la résolution des problèmes aux limites fondamentaux.

La solution obtenue n'a un sens que si les séries qui la définissent sont convergentes dans le domaine (D) et prolongeables par continuité sur la frontière de ce domaine. La démonstration de ces propriétés, et par conséquent la démonstration de l'existence de la solution, nécessite la connaissance de la nature des conditions aux limites du problème. Ce point sera traité au paragraphe suivant.

## 4. RESOLUTION DES PROBLEMES AUX LIMITES FONDAMENTAUX POUR LA COURONNE CIRCULAIRE

### II-4.1. INTRODUCTION

Une solution générale du problème plan a été obtenue au paragraphe précédent, et qui est relative à la couronne circulaire. Nous allons maintenant étudier deux types de problème afin de trouver des solutions particulières à ce problème :

- le problème de **Dirichlet** pour lequel les déplacements sont connus sur la frontière,
- le problème mixte pour lequel les tensions sont connues sur un cercle limite, les déplacements sont données sur l'autre.

Les conditions suffisantes d'existence des solutions seront précisées de nouveau. Nous indiquons également la méthode utilisée dans le cas où les conditions aux limites ne satisfont pas ces conditions suffisantes. La convergence des séries sera prouvée à postériori. La notation matricielle sera adaptée pour la présentation des solutions de chacun des problèmes.

### II-4.2. CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA COURONNE CIRCULAIRE

Les problèmes aux limites de l'élasticité plane sont des problèmes qui, par nature de leurs conditions aux limites, assurent l'existence et l'unicité de la solution en contraintes et en déplacements. Il est toutefois possible d'admettre des solutions définies à un déplacement rigide près de l'ensemble du domaine élastique.

#### II-4.2.1. PROBLEME DE DIRICHLET

Pour le problème de **Dirichlet**, les conditions aux limites portent sur les déplacements complexes  $(U_{0r} + iU_{0i})$  et  $(U_{1r} + iU_{1i})$ . La donnée de ces déplacements assure l'unicité de la solution en déplacements et contraintes.

Une condition suffisante d'existence d'une solution régulière est donnée par **Solomon** [10]. Cette condition impose aux fonctions déplacements imposées sur la frontière de posséder une dérivée seconde à variations bornées. Ces conditions étant satisfaisantes, nous écrirons les conditions aux limites du problème de **Dirichlet** sous la forme :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad U_{0k} = g_{0k} \quad \text{et} \quad U_{1k} = g_{1k} \quad (\text{II-51.})$$

### II-4.2.2. PROBLEME MIXTE

La formulation du problème mixte suppose la partition de la frontière (L) du domaine (D) en deux sous ensembles  $L'$  et  $L''$ . Les données sont  $(U_r + iU_i)$  sur  $L'$  et  $(\sigma_r - i\sigma_n)$  sur  $L''$  ou inversement.

La forme de la solution utilisée ultérieurement impose un choix restrictif pour la partition de la frontière. Les choix des cercles complets, comme sous ensembles de la frontière. Les choix des cercles complets, comme sous ensembles de la frontière conduit à une résolution simple. Nous limiterons donc l'étude du problème mixte au cas où les déplacements sont connus sur un cercle frontière et les contraintes sont imposées sur l'autre cercle.

L'unicité de la solution est assurée tant en contraintes qu'en déplacements. L'existence de la solution reposant sur les mêmes conditions de convergence des séries de **Laurent** et de prolongation par continuité sur la frontière  $L$  des fonctions  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  de problème de **Dirichlet**. Les conditions suffisantes d'existence sont pour chaque cercle analogue à celle formulée pour le problème de **Dirichlet**. Nous supposons pour la résolution de chacun de ces problèmes que les conditions aux limites assurent l'existence d'une solution régulière. D'après les notations définies précédemment, deux cas de problèmes mixtes peuvent se présenter :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \sigma_{0,k} = f_{0,k} \quad \text{et} \quad u_{1,k} = g_{1,k} \quad (\text{II-52.})$$

$$\text{et} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \sigma_{1,k} = f_{1,k} \quad \text{et} \quad u_{0,k} = g_{0,k} \quad (\text{II-53.})$$

Notons que l'on peut passer d'un cas à l'autre par simple changement de notation.

### II-4-3. SOLUTION DU PROBLEME DE DIRICHLET

La résolution du problème de **Dirichlet** nous conduit à la résolution de systèmes linéaires de quatre équations à quatre inconnues. Dans ce paragraphe, nous allons présenter les solutions de ces systèmes d'équations et les solutions en contraintes et en déplacements.

#### II-4-3-1. SYSTEME D'EQUATIONS - CALCUL DE $\alpha_k$ ET $\alpha'_k$

Les 4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> relations des systèmes (II-48.) et (II-50.) donnent :

$$U_{0,-1} = 2\chi\alpha_{-1}h^{-1} \ln(R_0) + (\alpha\chi - \bar{\beta})R_0^{-1} - \bar{\alpha}_1h \quad (\text{II-54.})$$

$$U_{0,k} = \frac{\chi\alpha_k}{(k+1)}h^k - \bar{\alpha}_{-k}h^{-k} + \frac{\bar{\alpha}'_{-2-k}}{(k+1)}h^{-2-k}, \quad \forall k \in \{ \mathbb{Z} - \{-1\} \} \quad (\text{II-55.})$$

$$U_{1,-1} = 2\chi\alpha_{-1} \ln(R_1) + (\alpha\chi - \bar{\beta})R_1^{-1} - \bar{\alpha}_1 \quad (\text{II-56.})$$

$$U_{1,k} = \frac{\chi\alpha_k}{(k+1)} - \bar{\alpha}_{-k} + \frac{\bar{\alpha}'_{-2-k}}{(k+1)}, \quad \forall k \in \{ \mathbb{Z} - \{-1\} \} \quad (\text{II-57.})$$

écrivons la relation (II-55.) et la relation (II-57.) pour  $k=1$  et faisons leur conjuguées :

$$\begin{cases} U_{0,1} = \frac{\chi\alpha_1}{2} h - \bar{\alpha}_{-1} h^{-1} + \frac{\alpha'_{-3}}{2} h^{-3} \\ U_{1,1} = \frac{\chi\alpha_1}{2} - \bar{\alpha}_{-1} + \frac{\alpha'_{-3}}{2} \end{cases} \quad (\text{II-58.})$$

soit :

$$\begin{cases} \overline{U_{0,1}} = \frac{\chi\bar{\alpha}_1}{2} h - \alpha_{-1} h^{-1} + \frac{\alpha'_{-3}}{2} h^{-3} \\ \overline{U_{1,1}} = \frac{\chi\bar{\alpha}_1}{2} - \alpha_{-1} + \frac{\alpha'_{-3}}{2} \end{cases} \quad (\text{II-59.})$$

en rajoutant la relation (II-54.) et la relation (II-56.) :

$$\begin{cases} \overline{U_{0,1}} = \frac{\chi\bar{\alpha}_1}{2} h - \alpha_{-1} h^{-1} + \frac{\alpha'_{-3}}{2} h^{-3} \\ \overline{U_{1,1}} = \frac{\chi\bar{\alpha}_1}{2} - \alpha_{-1} + \frac{\alpha'_{-3}}{2} \\ U_{0,-1} = 2\chi\alpha_{-1} h^{-1} \ln(R_0) + (\alpha\chi - \bar{\beta})R_0^{-1} - \bar{\alpha}_1 h \\ U_{1,-1} = 2\chi\alpha_{-1} \ln(R_1) + (\alpha\chi - \bar{\beta})R_1^{-1} - \bar{\alpha}_1 \end{cases} \quad (\text{II-60.})$$

on obtient un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues :

$$\bar{\alpha}_1, \alpha_{-1}, \alpha'_{-3} \text{ et } (\alpha\chi - \bar{\beta}).$$

- Résolution du système : éliminons  $\alpha'_{-3}$  dans les deux premières équations et  $(\alpha\chi - \bar{\beta})$  dans les deux dernières du système (II-60.), le système se réduit à :

$$\begin{cases} \overline{U_{0,1}} - h^{-3}\overline{U_{1,1}} = \frac{\chi}{2}\bar{\alpha}_1[h - h^{-3}] - \alpha_{-1}[h^{-1} - h^{-3}] \\ U_{0,-1} - h^{-1}U_{1,-1} = 2\chi\alpha_{-1}h^{-1} \ln(h) - \bar{\alpha}_1[h - h^{-1}] \end{cases} \quad (\text{II-61.})$$

multiplions la première équation par  $h^3$  et la seconde par  $h$  du système (II-61.) :

$$\begin{cases} h^3\overline{U_{0,1}} - \overline{U_{1,1}} = \frac{\chi}{2}\bar{\alpha}_1[h^4 - 1] - \alpha_{-1}[h^2 - 1] \\ hU_{0,-1} - U_{1,-1} = 2\chi\alpha_{-1} \ln(h) - \bar{\alpha}_1[h^2 - 1] \end{cases} \quad (\text{II-62.})$$

$$h^3 \overline{U_{0,1}} - \overline{U_{1,1}} + \frac{\chi h}{2} (h^2 + 1) U_{0,-1} - \frac{\chi}{2} (h^2 + 1) U_{1,-1} = \alpha_{-1} [1 - h^2 + \chi^2 (h^2 + 1) \ln(h)]$$

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{\Delta U_1} \{ 2h^3 \overline{U_{0,1}} - 2\overline{U_{1,1}} + h\chi (h^2 + 1) U_{0,-1} - \chi (h^2 + 1) U_{1,-1} \}$$

avec  $\Delta U_1 = 2[\chi^2 (h^2 + 1) \ln(h) + 1 - h^2]$

- Calcul de  $\alpha_1$  : multiplions la première équation par  $\frac{2\chi \ln(h)}{h^2 - 1}$  et la seconde par 1 du système (II-62.) soit :

$$\frac{2\chi \ln(h)}{h^2 - 1} [h^3 \overline{U_{0,1}} - \overline{U_{1,1}}] + 2hU_{0,-1} - 2U_{1,-1} = \overline{\alpha_1} [\chi^2 (h^2 + 1) \ln(h) - h^2 + 1]$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta U_1} \left\{ \frac{4\chi h^3 \ln(h)}{h^2 - 1} U_{0,1} - \frac{4\chi \ln(h)}{h^2 - 1} U_{1,1} + 2h\overline{U_{0,-1}} - 2\overline{U_{1,-1}} \right\}$$

et  $\alpha'_{-3} = 2\overline{U_{1,1}} + 2\alpha_{-1} - \chi \overline{\alpha_1}$

$$(\alpha\chi - \overline{\beta}) = R_0 U_{0,-1} - 2\chi h^{-1} R_0 \ln(R_0) \alpha_{-1} + R_0 h \overline{\alpha_1}$$

- Donc pour k=1, le système s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{-1} = \frac{1}{\Delta U_1} \{ 2h^3 \overline{U_{0,1}} - 2\overline{U_{1,1}} + h\chi (h^2 + 1) U_{0,-1} - \chi (h^2 + 1) U_{1,-1} \} \\ \alpha_1 = \frac{1}{\Delta U_1} \left\{ \frac{4\chi h^3 \ln(h)}{h^2 - 1} U_{0,1} - \frac{4\chi \ln(h)}{h^2 - 1} U_{1,1} + 2h\overline{U_{0,-1}} - 2\overline{U_{1,-1}} \right\} \\ \alpha'_{-3} = 2\overline{U_{1,1}} + 2\alpha_{-1} - \chi \overline{\alpha_1} \\ (\alpha\chi - \overline{\beta}) = R_0 U_{0,-1} - 2\chi h^{-1} R_0 \ln(R_0) \alpha_{-1} + R_0 h \overline{\alpha_1} \end{array} \right. \quad (\text{II-63.})$$

On peut vérifier que  $\Delta U_1 \neq 0$  car  $h$  est différent de 0 et 1.

La constante élastique  $\chi \in ]1,3[$  en état de déformation planes et à  $\left] \frac{5}{3}, 3 \right[$  en état de contraintes moyennes planes.

\* Les relations 5<sup>ème</sup> du système (II-48.) et 5<sup>ème</sup> du système (II-50.) obtenues pour  $\{ Z - \{-1,0,1\} \}$  et leur conjuguées obtenues pour la valeur opposée  $-k$  forment un système régulier de quatre équations à quatre inconnues  $\alpha_k, \overline{\alpha}_{-k}, \alpha'_{k-2}$  et  $\overline{\alpha}'_{-k-2}$ , soit :

$$\begin{cases} U_{0,k} = \frac{\chi\alpha_k}{(k+1)}h^k - \overline{\alpha}_{-k}h^{-k} + \frac{\overline{\alpha}'_{-2-k}}{(k+1)}h^{-2-k} \\ U_{1,k} = \frac{\chi\alpha_k}{(k+1)} - \overline{\alpha}_{-k} + \frac{\overline{\alpha}'_{-2-k}}{(k+1)} \\ \overline{U}_{0,-k} = \frac{\chi\overline{\alpha}_{-k}}{(1-k)}h^{-k} - \alpha_k h^k + \frac{\alpha'_{-2+k}}{(1-k)}h^{-2+k} \\ \overline{U}_{1,-k} = \frac{\chi\overline{\alpha}_{-k}}{(1-k)} - \alpha_k + \frac{\alpha'_{-2+k}}{(1-k)} \end{cases} \quad (\text{II-64.})$$

éliminons  $\overline{\alpha}'_{-2-k}$  et  $\alpha'_{-2+k}$  dans les deux premières et les deux dernières équations du système (II-64.), le système se réduit à :

$$\begin{cases} h^{2+k}U_{0,k} - U_{1,k} = \frac{\chi}{1+k}\alpha_k[h^{2+2k} - 1] - \overline{\alpha}_{-k}(h^2 - 1) \\ h^{2-k}\overline{U}_{0,-k} - \overline{U}_{1,-k} = \frac{\chi}{1-k}\overline{\alpha}_{-k}[h^{2-2k} - 1] - \alpha_k(h^2 - 1) \end{cases} \quad (\text{II-65.})$$

éliminons maintenant  $\overline{\alpha}_{-k}$  dans le système (II-65.), il vient :

$$\frac{\chi}{1-k}(h^{2-2k} - 1)h^{2+k}U_{0,k} - \frac{\chi}{1-k}(h^{2-2k} - 1)U_{1,k} + (h^2 - 1)(h^{2-k})\overline{U}_{0,-k} - (h^2 + 1)\overline{U}_{1,-k} = \frac{\alpha_k}{1-k^2} \left[ \chi^2(h^{2-2k} - 1)(h^{2+2k} - 1) - (1-k^2)(h^2 - 1)^2 \right]$$

$$(1+k)\chi h^{2+k}(h^{2-2k} - 1)U_{0,k} - (1+k)\chi(h^{2-2k} - 1)U_{1,k} + (1-k^2)h^{2-k}(h^2 - 1)\overline{U}_{0,-k} - (1-k^2)(h^2 - 1)\overline{U}_{1,-k} = \alpha_k \left[ \chi^2(h^{2+2k} - 1)(h^{2-2k} - 1) - (1-k^2)(h^2 - 1)^2 \right]$$

$\forall k \in \{ Z - \{-1,0,1\} \}$

$$\alpha_k = \frac{1}{\Delta U_k} \left\{ (1+k)\chi h^{2+k}(h^{2-2k} - 1)U_{0,k} - (1+k)\chi(h^{2-2k} - 1)U_{1,k} + \dots + (1-k^2)h^{2-k}(h^2 - 1)\overline{U}_{0,-k} - (1-k^2)(h^2 - 1)\overline{U}_{1,-k} \right\} \quad (\text{II-66.})$$

avec :  $\Delta U_k = \chi^2(h^{2+2k} - 1)(h^{2-2k} - 1) - (1-k^2)(h^2 - 1)^2 \neq 0$

la 4<sup>ème</sup> relation du système (II-64.) donne :

$$\alpha'_{k-2} = (1-k)\overline{U}_{1,-k} - \chi\overline{\alpha}_{-k} + (1-k)\alpha_k \quad (\text{II-67.})$$

\*  $\overline{\alpha}_{-k}$  et  $\overline{\alpha}'_{-2-k}$  se déduisent de  $\alpha_k$  et  $\alpha'_{k-2}$  en remplaçant  $k$  par  $-k$  et en faisant le conjugué de ces expressions.

Comme dans le cas  $k=1$ , on démontre aisément que  $\Delta U_k \neq 0$ .

#### II-4-3-2 : CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS

Les résultats précédents reportés dans les relations (II-43.), (II-44.) et (II-45.) donnant les expressions qui définissent les coefficients  $V_k, \sigma_k$  et  $U_k$  à partir des conditions aux limites.

Nous noterons :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad ; \text{ la matrice ligne } D_k = \langle U_{0,k} \ U_{1,k} \ \overline{U}_{0,-k} \ \overline{U}_{1,-k} \rangle$$

$$\text{Nous rappelons la relation : } V_k(\ell) = 2[\alpha_k \ell^k + \overline{\alpha}_{-k} \ell^{-k}]$$

$$\begin{aligned} V_k(\ell) = & \frac{2}{\Delta U_k} \left\{ \ell^k [(1+k)\chi h^{2+k} (h^{2-2k} - 1)U_{0,k} - (1+k)\chi (h^{2-2k} - 1)U_{1,k} + \right. \\ & \left. + (1-k^2)h^{2-k} (h^2 - 1)\overline{U}_{0,-k} - (1-k^2)(h^2 - 1)\overline{U}_{1,-k} ] + \right. \\ & \left. + \ell^{-k} [(1-k)\chi h^{2-k} (h^{2+2k} - 1)\overline{U}_{0,-k} - (1-k)\chi (h^{2+2k} - 1)\overline{U}_{1,-k} + (1-k^2)h^{2+k} (h^2 - 1)U_{0,k} - (1-k^2)(h^2 - 1)U_{1,k} ] \right\} \end{aligned}$$

Soit en écriture matricielle :

$\forall k \in \{ \mathbb{Z} - \{-1, 1\} \}$ , nous obtenons :

$$V_k(\ell) = D_k \cdot \begin{bmatrix} 2(1+k)h^{2+k} [ \chi(h^{2-2k} - 1)\ell^k + (1-k)(h^2 - 1)\ell^{-k} ] \\ \frac{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2}{2(1+k) [ \chi(h^{2-2k} - 1)\ell^k + (1-k)(h^2 - 1)\ell^{-k} ]} \\ \frac{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2}{2(1-k)h^{2-k} [ (1+k)(h^2 - 1)\ell^k + (h^{2+2k} - 1)\chi\ell^{-k} ]} \\ \frac{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2}{2(1-k) [ (1+k)(h^2 - 1)\ell^k + (h^{2+2k} - 1)\chi\ell^{-k} ]} \\ \frac{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2}{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II-68.})$$

$$\sigma_k(\ell) = (1-k)\alpha_k \ell^k + \overline{\alpha}_{-k} \ell^{-k} - \alpha'_{k-2} \ell^{k-2}$$

qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\sigma_k(\ell) = D_k \bullet \left[ \begin{array}{l} \frac{(1-k^2)h^{2+k} [ \chi(h^{2-2k}-1)(\ell^2-1)\ell^{k-2} + (1+\chi\ell^{2k-2})(h^2-1)\ell^{-k} ]}{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2} \\ - \frac{(1-k^2) [ \chi(h^{2-2k}-1)(\ell^2-1)\ell^{k-2} + (1+\chi\ell^{2k-2})(h^2-1)\ell^{-k} ]}{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2} \\ \frac{(1-k)h^{2-k}\ell^{k-2} [ \chi(\ell^{2-2k} + \chi)(h^{2+2k}-1) + (1-k^2)(h^2-1)(\ell^2-1) ]}{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2} \\ \frac{(1-k)\ell^{k-2} [ -\chi(\ell^{2-2k} + \chi h^{2-2k})(h^{2+2k}-1) + (1-k^2)(h^2-1)(h^2-\ell^2) ]}{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2} \end{array} \right] \quad (\text{II-69.})$$

$$U_k(\ell) = \frac{\chi\alpha_k}{(k+1)}\ell^k - \bar{\alpha}_{-k}\ell^{-k} + \frac{\bar{\alpha}'}{(k+1)}\ell^{-2-k}$$

qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$U_k(\ell) = D_k \bullet \left[ \begin{array}{l} \frac{\chi^2(h^{2-2k}-1)(\ell^{2+2k}-1) - (1-k^2)(h^2-1)(\ell^2-1)\left(\frac{h}{\ell}\right)^{k+2}}{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2} \left(\frac{h}{\ell}\right)^{k+2} \\ \frac{\chi^2(h^{2-2k}-1)(h^{2+2k}-\ell^{2+2k}) + (1-k^2)(h^2-1)(\ell^2-h^2)}{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2} \ell^{-2-k} \\ \frac{\chi(1-k)h^{2-k}[(h^2-1)(\ell^{2+2k}-1) - (\ell^2-1)(h^{2+2k}-1)]}{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2} \ell^{-2-k} \\ - \frac{\chi(1-k)[(h^2-1)(\ell^{2+2k}-1) - (\ell^2-1)(h^{2+2k}-1)]}{\chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2} \ell^{-2-k} \end{array} \right] \quad (\text{II-70.})$$

- pour  $k=-1$  on obtient :

$$V_{-1}(\ell) = 2(\alpha_{-1}\ell^{-1} + \bar{\alpha}_1\ell)$$

$$V_{-1}(\ell) = D_{-1} \bullet \left[ \begin{array}{l} \frac{h[\chi(h^2+1)\ell^{-1} + 2\ell]}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \\ - \frac{[\chi(h^2+1)\ell^{-1} + 2\ell]}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \\ \frac{2h^3[\ell^{-1} + 2\chi\ell\ln(h)/(h^2-1)]}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \\ - \frac{2[\ell^{-1} + 2\chi\ell\ln(h)/(h^2-1)]}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \end{array} \right]$$

$$\sigma_{-1}(\ell) = 2\alpha_{-1}\ell^{-1} + \bar{\alpha}_1\ell - \alpha'_{-3}\ell^{-3}$$

$$\sigma_{-1}(\ell) = D_{-1} \bullet \left[ \begin{array}{l} \frac{[\chi(h^2+1)(\ell^2-1) + \chi + \ell^4] h \ell^{-3}}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \\ - \frac{[\chi(h^2+1)(\ell^2-1) + \chi + \ell^4] \ell^{-3}}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \\ \frac{2[(\ell^2-1)(1-h^2) - \chi(\chi + \ell^4)\ln(h)] h^3 \ell^{-3}}{[\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)](1-h^2)} \\ \frac{2[(h^2-\ell^2)(1-h^2) + \chi(\chi h^4 + \ell^4)\ln(h)] \ell^{-3}}{[\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)](1-h^2)} \end{array} \right]$$

$$U_{-1}(\ell) = 2\chi\alpha_{-1}\ell^{-1}\ln(r) + \frac{(\alpha\chi - \bar{\beta})}{r} - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_1\ell}$$

$$U_{-1}(\ell) = D_{-1} \bullet \left[ \begin{array}{l} \frac{[\chi^2(h^2+1)\ln(\ell) + 1 - \ell^2] h \ell^{-1}}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \\ \frac{[\chi^2(h^2+1)\ln(h/\ell) + \ell^2 - h^2] \ell^{-1}}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \\ \frac{2\chi[(1-h^2)\ln(\ell) - (1-\ell^2)\ln(h)] h^3 \ell^{-1}}{[\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)](1-h^2)} \\ - \frac{2\chi[(1-h^2)\ln(\ell) - (1-\ell^2)\ln(h)] \ell^{-1}}{[\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)](1-h^2)} \end{array} \right]$$

(II-71.)

- pour  $k=+1$  on obtient :

$$V_1(\ell) = 2(\alpha_1\ell + \bar{\alpha}_{-1}\ell^{-1})$$

$$V_1(\ell) = D_1 \bullet \left[ \begin{array}{l} \frac{2h^3[\ell^{-1} + 2\chi\ell\ln(h)/(h^2-1)]}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \\ - \frac{2[\ell^{-1} + 2\chi\ell\ln(h)/(h^2-1)]}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \\ \frac{h[\chi(h^2+1)\ell^{-1} + 2\ell]}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \\ - \frac{[\chi(h^2+1)\ell^{-1} + 2\ell]}{\chi^2(h^2+1)\ln(h) + (1-h^2)} \end{array} \right]$$

$$\sigma_1(\ell) = (1+\chi)\ell^{-1}\bar{\alpha}_{-1}$$

$$\sigma_1(\ell) = D_1 \bullet \left[ \begin{array}{c} \frac{(1+\chi)h^3\ell^{-1}}{\chi^2(h^2+1)\ln(h)+(1-h^2)} \\ - \frac{(1+\chi)\ell^{-1}}{\chi^2(h^2+1)\ln(h)+(1-h^2)} \\ \frac{(1+\chi)\chi(h^2+1)h\ell^{-1}}{2[\chi^2(h^2+1)\ln(h)+(1-h^2)]} \\ - \frac{(1+\chi)\chi(h^2+1)\ell^{-1}}{2[\chi^2(h^2+1)\ln(h)+(1-h^2)]} \end{array} \right]$$

$$U_1(\ell) = \frac{\chi\alpha_1\ell}{2} - \overline{\alpha_{-1}}\ell^{-1} + \frac{\overline{\alpha'_{-3}}\ell^{-3}}{2}$$

$$U_1(\ell) = D_1 \bullet \left[ \begin{array}{c} \frac{[\chi^2(\ell^2+1)\ln(h)+(1-h^2)](1-\ell^2)h^3\ell^{-3}}{(1-h^2)[\chi^2(h^2+1)\ln(h)+(1-h^2)]} \\ \frac{[\chi^2(\ell^2+h^2)\ln(h)+(1-h^2)](\ell^2-h^2)\ell^{-3}}{(1-h^2)[\chi^2(h^2+1)\ln(h)+(1-h^2)]} \\ \frac{\chi(\ell^2-1)(\ell^2-h^2)h\ell^{-3}}{2[\chi^2(h^2+1)\ln(h)+(1-h^2)]} \\ - \frac{\chi(\ell^2-1)(\ell^2-h^2)\ell^{-3}}{2[\chi^2(h^2+1)\ln(h)+(1-h^2)]} \end{array} \right] \quad (\text{II-72.})$$

Ainsi la solution du problème de **Dirichlet** en contraintes et en déplacements dans la couronne circulaire et sur la frontière ( $\ell = 1$  ou  $\ell = h$ ) est donnée par les formules précédentes.

## II-4.4. SOLUTION DU PROBLEME MIXTE

La recherche de la solution du problème mixte se fera de la même façon que pour le problème de **Dirichlet**, le problème mixte considéré dans notre étude, peut correspondre à deux situations qui se déduisent éventuellement l'une de l'autre en changeant  $h$  en  $h^{-1}$ .

Nous allons résoudre le cas de déplacements imposés en  $r = R_0$  (rayon externe de la couronne) et de tensions imposées en  $r = R_1$  (rayon interne de la couronne).

### II-4.4.1. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS 0 CALCUL DE $\alpha_k$ ET $\alpha_{-k}$ .

Les relations permettant d'utiliser les conditions aux limites du problème mixte sont les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> relations du système (II-50.) et les 4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> relations du système (II-48.), soit :

$$\sigma_{1,1} = (1 + \chi)\overline{\alpha_{-1}} \quad (\text{II-73.})$$

$$\sigma_{1,k} = (1 - k)\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}} - \alpha'_{k-2}, \quad \forall k \in \{Z - \{1\}\} \quad (\text{II-74.})$$

$$U_{0,-1} = 2\chi\alpha_{-1}h^{-1}\ln(R_0) + (\alpha\chi - \overline{\beta})R_0^{-1} - \overline{\alpha_1}h \quad (\text{II-75.})$$

$$U_{0,k} = \frac{\chi}{k+1}h^k\alpha_k - \overline{\alpha_{-k}}h^{-k} + \frac{\overline{\alpha'_{-k-2}}}{1+k}h^{-2-k}, \quad \forall k \in \{Z - \{-1\}\} \quad (\text{II-76.})$$

La relation (II-73.) donne directement :

$$\alpha_{-1} = \frac{\overline{\sigma_{1,1}}}{1 + \chi}$$

La relation (II-75.), la relation (II-74.) pour  $k=-1$  et la relation (II-76.) pour  $k=1$  donnent ensuite :

$$\begin{cases} U_{0,-1} = 2\chi\alpha_{-1}h^{-1}\ln(R_0) + \frac{\alpha\chi - \overline{\beta}}{R_0} - \overline{\alpha_1}h \\ \sigma_{1,-1} = 2\alpha_{-1} + \overline{\alpha_1} - \alpha'_{-3} \\ U_{0,1} = \frac{\chi\alpha_1}{2}h - \overline{\alpha_{-1}}h^{-1} + \frac{\overline{\alpha'_{-3}}}{2}h^{-3} \end{cases} \quad (\text{II-77.})$$

$$\text{soit : } \begin{cases} \alpha_{-1} = \frac{\overline{\sigma_{1,1}}}{1 + \chi} \\ \alpha_1 = \frac{2(h^2 - 1)}{(1 + \chi)(1 + \chi h^4)}\sigma_{1,1} + \frac{2h^3 U_{0,1}}{(1 + \chi h^4)} + \frac{\overline{\sigma_{1,-1}}}{(1 + \chi h^4)} \\ \alpha'_{-3} = \overline{\alpha_1} + 2\alpha_{-1} - \sigma_{1,-1} \\ (\alpha\chi - \overline{\beta})R_0^{-1} = h\overline{\alpha_1} + U_{0,-1} - 2\chi\alpha_{-1}h^{-1}\ln(R_0) \end{cases} \quad (\text{II-78.})$$

Puis pour  $k \neq \pm 1$ , les relations (II-74.) et (II-76.) prises pour  $k$  et leurs conjuguées prises pour  $-k$  soit :

$$\begin{cases} \sigma_{1,k} = (1-k)\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}} - \alpha'_{k-2} \\ U_{0,k} = \frac{\chi\alpha_k h^k}{1+k} - \overline{\alpha_{-k}} h^{-k} + \frac{\overline{\alpha'_{-2-k}}}{1+k} h^{-2-k} \\ \overline{\sigma_{1,-k}} = (1+k)\overline{\alpha_{-k}} + \alpha_k - \overline{\alpha'_{k-2}} \\ \overline{U_{0,-k}} = \frac{\chi\overline{\alpha_{-k}} h^{-k}}{1-k} - \alpha_k h^k + \frac{\alpha'_{k-2}}{1-k} h^{k-2} \end{cases} \quad (\text{II-79.})$$

Il vient :

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{1}{\Delta M_k} \left\{ (1+k)(1-h^2)\sigma_{1,k} - (1+k)(1+\chi h^{2+2k})h^{2+k}U_{0,k} - (1+\chi h^{-2k+2})\overline{\sigma_{1,-k}} + (1-k^2)(1-h^2)h^{2-k}\overline{U_{0,-k}} \right\} \\ \alpha'_{k-2} = (1-k)\alpha_k + \overline{\alpha_{-k}} - \sigma_{1,k} \end{cases} \quad (\text{II-80.})$$

avec:

$$\Delta M_k = (1-k^2)(1-h^2)^2 - (1+\chi h^{2+2k})(1+\chi h^{2-2k})$$

on démontre également que  $\Delta M_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .

$$\overline{\alpha_{-k}} = \frac{1}{\Delta M_k} \left\{ (1+\chi h^{2+2k})\sigma_{1,k} - (1-k)(1+\chi h^{2+2k})h^{2-k}\overline{U_{0,-k}} + (1-k)(1-h^2)\overline{\sigma_{1,-k}} + (1-k^2)(1-h^2)h^{2+k}U_{0,k} \right\}$$

#### II-4.4.2. CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS

En reportant les résultats (II-78.) et (II-80.) dans les relations (II-43.), (II-44.) et (II-45.). Nous obtenons la solution en contraintes et déplacements du problème mixte. Soit :

$$V_k(\ell) = 2(\alpha_k \ell^k + \overline{\alpha_{-k}} \ell^{-k}) \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$V_k(\ell) = M_k \cdot \left[ \begin{array}{c} \frac{2[(1+k)(1-h^2)\ell^k - (1+\chi h^{2+2k})\ell^{-k}]}{(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})} \\ -2(1+k)h^{2+k} \left[ (1+\chi h^{2-2k})\ell^k - (1-k)(1-h^2)\ell^{-k} \right] \\ \frac{(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})}{-2[(1+\chi h^{2-2k})\ell^k - (1-k)(1-h^2)\ell^{-k}]} \\ \frac{(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})}{2(1-k)h^{2-k} \left[ (1+k)(1-h^2)\ell^k - (1+\chi h^{2+2k})\ell^{-k} \right]} \\ \frac{(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})}{2(1-k)h^{2-k} \left[ (1+k)(1-h^2)\ell^k - (1+\chi h^{2+2k})\ell^{-k} \right]} \end{array} \right]$$

(II-81.)

avec  $M_k$  : matrice ligne définie  $\forall k \in Z$ , telle que

$$M_k = \begin{bmatrix} \sigma_{1,k} \\ U_{0,k} \\ \sigma_{1,-k} \\ U_{0,-k} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_k(\ell) = (1-k)\alpha_k \ell^k + \overline{\alpha_{-k}} \ell^{-k} - \alpha'_{k-2} \ell^{k-2}, \quad \forall k \in \{Z - \{1\}\}$$

$$\sigma_k(\ell) = M_k \cdot \left[ \begin{array}{l} \frac{[(1-k^2)(1-h^2)(\ell^2-h^2) - (1+\chi h^{2+2k})(\ell^{2-2k} + \chi h^{2-2k})] \ell^{k-2}}{(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})} \\ \frac{(1-k^2)h^{2+k}[(1+\chi h^{2-2k})(1-\ell^2) + (1-h^2)(\ell^{2-2k}-1)] \ell^{-2+k}}{(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})} \\ \frac{(1-k)[(1+\chi h^{2-2k})(1-\ell^2) + (1-h^2)(\ell^{2-2k}-1)] \ell^{-2+k}}{(1-k^2)h^7 - 1 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})} \\ \frac{(1-k)h^{2-k}[(1-k^2)(1-h^2)(\ell^2-1) + (1+\chi h^{2+2k})(1-\ell^{2-2k})] \ell^{-2+k}}{(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})} \end{array} \right] \quad (\text{II-82.})$$

$$U_k(\ell) = \frac{\chi \alpha_k}{k+1} \ell^k - \overline{\alpha_{-k}} \ell^{-k} + \frac{\alpha'_{-2-k}}{1+k} \ell^{-2-k} \quad \forall k \in \{Z - \{-1\}\}$$

$$U_k(\ell) = M_k \cdot \left[ \begin{array}{l} \frac{[(\chi \ell^{2+2k} + 1)(1-h^2) + (\ell^2-1)(1+\chi h^{2+2k})] \ell^{-2-k}}{(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})} \\ \frac{[(1+\chi h^{2-2k})(1+\chi \ell^{2+2k}) + (1-k^2)(1-h^2)(\ell^2-1)] \left(\frac{h}{\ell}\right)^{2+k}}{(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})} \\ \frac{[\chi(h^{2+2k} - \ell^{2+2k})(1+\chi h^{2-2k}) + (h^2 - \ell^2)(1-k^2)(1-h^2)] \ell^{-2-k}}{[(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})](1+k)} \\ \frac{(1-k)h^{2-k}[(\chi \ell^{2+2k} + 1)(1-h^2) + (\ell^2-1)(1+\chi h^{2+2k})] \ell^{-2-k}}{(1-k^2)(h^2-1)^2 - (\chi+h^{2+2k})(\chi+h^{2-2k})} \end{array} \right] \quad (\text{II-83.})$$

• pour  $k=-1$  :

$$U_{-1}(\ell) = 2\chi \alpha_{-1} \ell^{-1} \ln(r) + \frac{\alpha \chi - \beta}{r} - \overline{\alpha_1} \ell$$

$$U_{-1}(\ell) = \begin{bmatrix} \frac{(h^2 - \ell^2)}{(1 + \chi h^4)\ell} \\ \frac{h}{\ell} \\ \frac{2}{(\chi + 1)} \left( -\chi \ell^{-1} \ln\left(\frac{h}{\ell}\right) + \frac{(1 - h^2)(\ell - h^2 \ell^{-1})}{(1 + \chi h^4)} \right) \\ \frac{2h^3(h^2 - \ell^2)}{\ell(1 + \chi h^4)} \end{bmatrix} M_{-1} \quad (\text{II-84.})$$

Ainsi les formules (II-84.) donnent La solution en contraintes et déplacements du problème mixte pour la couronne circulaire.

#### II-4.5.CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS DE LA FRONTIERE

Les solutions obtenues au paragraphe précédente portent sur les déplacements et contraintes dans la couronne circulaire pour les deux problèmes aux limites.

Nous avons supposé de plus que les conditions aux limites, étaient suffisamment régulières pour permettre de prolonger ces solutions par continuité sur la frontière du domaine. Une présentation matricielle que nous rappelons ici, facilitera la présentation des résultats :  $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$D_k = \langle U_{0,k} \ U_{1,k} \ \overline{U_{0,-k}} \ \overline{U_{1,-k}} \rangle$$

$$S_k = \langle \sigma_{0,k} \ \sigma_{1,k} \ \overline{\sigma_{0,-k}} \ \overline{\sigma_{1,-k}} \rangle$$

$$M_k = \langle \sigma_{1,k} \ U_{0,k} \ \overline{\sigma_{1,-k}} \ \overline{U_{0,-k}} \rangle$$

$$M'_k = \langle \sigma_{0,k} \ U_{1,k} \ \overline{\sigma_{0,-k}} \ \overline{U_{1,-k}} \rangle$$

Lorsque les conditions aux limites portent sur une de ces quatre matrices, une autre de ces matrices est inconnue. Ainsi nous avons :

- $D_k$  connues  $\rightarrow S_k$  inconnue ( problème de **Dirichlet**).
- $M_k$  connues  $\rightarrow M'_k$  inconnue ( problème mixte )

La solution proposée pour chacun des deux problèmes, permet donc de calculer, cette matrice inconnue, ces déterminations sont présentées par les relations matricielles suivantes :

##### II-4.5.1.SOLUTION DU PROBLEME MIXTE

Si nous intéressons au cas des déplacements connus en  $r = R_0$  (rayon extérieur de la couronne ) et contrainte imposées en  $r = R_1$  (rayon intérieur de la couronne ). La solution en contraintes et déplacements s'écrit sous la forme matricielle suivante :

- pour  $k=1$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{0,1} \\ U_{1,1} \\ \frac{\sigma_{0,-1}}{\sigma_{0,1}} \\ \frac{U_{1,-1}}{U_{1,1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{-1} & 0 & 0 \\ \frac{h^2-1}{(1+\chi h^4)} & \frac{(1+\chi)h^3}{(1+\chi h^4)} & \frac{\chi(1-h^4)}{2(1+\chi h^4)} \\ \frac{2h(h^2-1)}{(1+\chi h^4)} & \frac{2(h^4-1)}{(1+\chi h^4)} & \frac{(1+\chi)h}{(1+\chi h^4)} \\ \frac{2}{(1+\chi)} \left[ \frac{(1-h^2)^2}{(1+\chi h^4)} - \chi \ln(h) \right] & \frac{2h^3(h^2-1)}{(1+\chi h^4)} & \frac{h^2-1}{(1+\chi h^4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} \\ U_{0,1} \\ \frac{\sigma_{1,-1}}{\sigma_{1,1}} \\ \frac{U_{0,-1}}{U_{0,1}} \end{bmatrix} \quad (\text{II-85.})$$

- pour  $k \in \{Z - \{1\}\}$ .

$$\Delta' M k = (1-k^2)(1-h^2)^2 - (1+\chi h^{2+2k})(1+\chi h^{2-2k})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{0,k} \\ U_{1,k} \\ \frac{\sigma_{0,-k}}{\sigma_{0,k}} \\ \frac{U_{1,-k}}{U_{1,k}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta' M k} \begin{bmatrix} -(1+\chi)(1+\chi h^{2+2k})h^{-k} & (1-k^2)(1-h^2)(1+\chi)h^2 \\ (1+\chi)(1-h^2) & -(1+\chi)(1+\chi h^{2-2k})h^{2+k} \\ (1+k)(1+\chi)(1-h^2)h^k & (1+k)\left[(1+\chi h^{2+2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2\right] \\ -\left[\frac{(1-k^2)(1-h^2)^2 + \chi(1-h^{2-2k})(1+\chi h^{2+2k})}{(1-k)}\right] & (1+k)(1-h^2)(1+\chi)h^{2+k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1-k)(1+\chi)(1-h^2)h^{-k} & (1-k)\left[(1+\chi h^{2+2k})(1-h^{2-2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2\right] \\ -\frac{1}{1+k}\left[(1-k^2)(1-h^2)^2 + \chi(1-h^{2+2k})(1+\chi h^{2-2k})\right] & (1-k)(1-h^2)(1+\chi)h^{2+k} \\ -(1+\chi)(1+\chi h^{2-2k})h^k & (1-k^2)(1-h^2)(1+\chi)h^2 \\ (1+\chi)(1-h^2) & -(1+\chi)(1+\chi h^{2+2k})h^{2-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,k} \\ U_{0,k} \\ \frac{\sigma_{1,-k}}{\sigma_{1,k}} \\ \frac{U_{0,-k}}{U_{0,k}} \end{bmatrix} \quad (\text{II-86.})$$

Les matrices (II-85.) et (II-86.) du problème mixte peuvent s'écrire sous la forme suivante

- $k=1$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{0,1} \\ \frac{\sigma_{0,-1}}{\sigma_{0,1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{-1} & 0 \\ \frac{2h(h^2-1)}{1+\chi h^4} & \frac{(1+\chi)h}{1+\chi h^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} \\ \frac{\sigma_{1,-1}}{\sigma_{1,1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2(h^4-1)}{1+\chi h^4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,1} \\ \frac{U_{0,-1}}{U_{0,1}} \end{bmatrix} \quad (\text{II-87.})$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{1,-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2 - 1}{1 + \chi h^4} \\ \frac{2}{1 + \chi} \left[ \frac{(1 - h^2)^2}{1 + \chi h^4} - \chi \ln(h) \right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\chi(1 - h^4)}{2(1 + \chi h^4)} \\ \frac{h^2 - 1}{1 + \chi h^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} \\ \sigma_{1,-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(1 + \chi)h^3}{1 + \chi h^4} \\ \frac{2h^3(h^2 - 1)}{1 + \chi h^4} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} U_{0,1} \\ U_{0,-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II-88.})$$

soit sous forme condensée :

$$\{S_{0,1}\} = [F_{1,1}] \{S_{1,1}\} + [F_{2,1}] \{D_{0,1}\} \quad (\text{II-89.})$$

$$\{D_{1,1}\} = [G_{1,1}] \{S_{1,1}\} + [G_{2,1}] \{D_{0,1}\} \quad (\text{II-90.})$$

$F_{1,1}$ ,  $F_{2,1}$ ,  $G_{1,1}$  et  $G_{2,1}$  sont des matrices carrées ( $2 \times 2$ ) avec :

$$\{S_{0,1}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{0,1} \\ \sigma_{0,-1} \end{Bmatrix} ; \quad \{S_{1,1}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{1,1} \\ \sigma_{1,-1} \end{Bmatrix} ; \quad \{D_{0,1}\} = \begin{Bmatrix} U_{0,1} \\ U_{0,-1} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{D_{1,1}\} = \begin{Bmatrix} U_{1,1} \\ U_{1,-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-91.})$$

• pour  $k \neq 1$

$$\begin{aligned} [S_{0,k}] &= \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} -(1 + \chi)(1 + \chi h^{2+2k})h^{-k} & (1 - k)(1 + \chi)(1 - h^2)h^{-k} \\ (1 + k)(1 + \chi)(1 - h^2)h^k & -(1 + \chi)(1 + \chi h^{2-2k})h^k \end{bmatrix} [S_{1,k}] + \\ &+ \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} (1 - k^2)(1 - h^2)(1 + \chi)h^2 & (1 - k) \left[ \frac{(1 + \chi h^{2+2k})(1 - h^{2-2k})}{(1 - k^2)(1 - h^2)^2} - \right] \\ (1 + k) \left[ \frac{(1 + \chi h^{2-2k})(1 - h^{2+2k}) - (1 - k^2)(1 - h^2)^2}{(1 - k)} \right] & (1 - k^2)(1 - h^2)(1 + \chi)h^2 \end{bmatrix} [D_{0,k}] \end{aligned} \quad (\text{II-92.})$$

$$\begin{aligned} [D_{1,k}] &= \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} (1 + \chi)(1 - h^2) & -\frac{1}{1 + k} \left[ \frac{(1 - k^2)(1 - h^2)^2 + \chi(1 - h^{2+2k})(1 + \chi h^{2-2k})}{(1 - k)} \right] \\ -\frac{(1 - k^2)(1 - h^2)^2 + \chi(1 - h^{2-2k})(1 + \chi h^{2+2k})}{(1 - k)} & (1 + \chi)(1 - h^2) \end{bmatrix} [S_{1,k}] + \\ &\frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} -(1 + \chi)(1 + \chi h^{2-2k})h^{2+k} & (1 - k)(1 - h^2)(1 + \chi)h^{2-k} \\ (1 + k)(1 - h^2)(1 + \chi)h^{2+k} & -(1 + \chi)(1 + \chi h^{2+2k})h^{2-k} \end{bmatrix} [D_{0,k}] \end{aligned} \quad (\text{II-93.})$$

soit sous forme condensée :

$$\{D_{1,k}\} = [G_{1,k}] \{S_{1,k}\} + [G_{2,k}] \{D_{0,k}\} \quad (\text{II-94.})$$

$$\{S_{0,k}\} = [F_{1,k}] \{S_{1,k}\} + [F_{2,k}] \{D_{0,k}\} \quad (\text{II-95.})$$

avec, 
$$\{S_{0,k}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{0,k} \\ \sigma_{0,-k} \end{Bmatrix} ; \{S_{1,k}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{1,k} \\ \sigma_{1,-k} \end{Bmatrix} ; \{D_{0,k}\} = \begin{Bmatrix} U_{0,k} \\ U_{0,-k} \end{Bmatrix} \text{ et}$$

$$\{D_{1,k}\} = \begin{Bmatrix} U_{1,k} \\ U_{1,-k} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-96.})$$

#### II-4.5.2. SOLUTION DU PROBLEME DE DIRICHLET

Dans le cas du problème de **Dirichlet**, les conditions aux limites sur les déplacements en  $r = R_0$  et  $r = R_1$ . Comme pour la solution du problème mixte, la solution du problème de **Dirichlet** s'écrit :

- pour  $k=0$

$$\Delta U_0 = (1 - \chi)(1 - h^2)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{0,0} \\ \sigma_{1,0} \\ \sigma_{0,0} \\ \sigma_{1,0} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta U_0} \begin{bmatrix} h^2 & -1 & h^2 - 1 + \chi & -\chi \\ h^2 & -1 & h^2 \chi & h^2(1 - \chi) - 1 \\ h^2 - 1 + \chi & -\chi & h^2 & -1 \\ h^2 \chi & h^2(1 - \chi) - 1 & h^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,0} \\ U_{1,0} \\ U_{0,0} \\ U_{1,0} \end{bmatrix}$$

(II-97.)

- pour  $k=1$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,0} \\ \sigma_{0,-1} \\ \sigma_{1,-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta U_1} \begin{bmatrix} (1 + \chi)h^2 & -\frac{(1 + \chi)}{h} \\ -2 \frac{[(h^2 - 1)^2 + \chi(\chi + h^4)\ln(h)]}{(1 - h^2)} & \frac{2\chi(1 + \chi)h\ln(h)}{(1 - h^2)} \\ -2 \frac{\chi(1 + \chi)h^3 \ln(h)}{(1 - h^2)} & \frac{2[\chi(1 + \chi h^4)\ln(h) - (1 - h^2)^2]}{(1 - h^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(1 + \chi)\chi(1 + h^2)}{2} \\ (1 + \chi)h^2 \\ (1 + \chi)h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,1} \\ U_{1,1} \\ U_{0,-1} - \frac{1}{h}U_{1,-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II-98.})$$

$$\Delta U_1 = \chi^2(1+h^2)\ln(h) + 1 - h^2$$

- pour  $k \neq 1$  et  $k \neq 0$

$$\Delta U_k = \chi^2(1-h^{2-2k})(1-h^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h^2)^2$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{0,k} \\ \sigma_{1,k} \\ \sigma_{1,-k} \\ \sigma_{1,-k} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta U_k} \begin{bmatrix} (1-k^2)(1+\chi)(h^2-1)h^2 \\ (1-k^2)(1+\chi)(h^2-1)h^{2+k} \\ (1+k)\left[(1-k^2)(h^2-1)^2 + \chi(\chi+h^{2+2k})(h^{2-2k}-1)\right] \\ (1+k)\chi(1+\chi)(h^{2-2k}-1)h^{2+k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-k^2)(1+\chi)(1-h^2)h^{-k} \\ (1-k^2)(1+\chi)(1-h^2) \\ (1+k)\chi(1+\chi)(1-h^{2-2k})h^k \\ (1+k)\left[(1-k^2)(h^2-1)^2 - (1+\chi h^{2+2k})(h^{2-2k}-1)\right] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1-k)\left[(1-k^2)(h^2-1)^2 + \chi(\chi+h^{2-2k})(h^{2+2k}-1)\right] \\ (1-k)\chi(1+\chi)(h^{2+2k}-1)h^{2-k} \\ (1-k^2)(1+\chi)(h^2-1)h^2 \\ (1-k^2)(1+\chi)(h^2-1)h^{2-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-k)\chi(1+\chi)(1-h^{2+2k})h^{-k} \\ (1-k)\left[(1-k^2)(h^2-1)^2 - \chi(1+\chi h^{2-2k})(h^{2+2k}-1)\right] \\ (1-k^2)(1+\chi)(1-h^2)h^k \\ (1-k^2)(1+\chi)(1-h^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{0,k} \\ U_{1,k} \\ U_{0,-k} \\ U_{1,-k} \end{bmatrix}$$

(II-99.)

#### II.4.6. CONCLUSION

Les équations de l'élasticité plane ont été résolues dans le plan complexe à l'aide de deux fonctions analytiques  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  appelées fonctions de **Kolosov** et **Muskhelishvili**. La solution pour la couronne circulaire a été obtenue à partir de cette formulation par la méthode des séries proposées par **N. Muskhelishvili**.

Les solutions explicites ont été obtenues pour deux cas de conditions au limites ( **Dirichlet** et **mixte** ) en termes de coefficients de **Fourier** complexes. La présentation matricielle donnée à ces solutions permettra d'aborder et de résoudre le problème de l'assemblage de deux couronnes circulaires élastiques.

Le modèle ainsi obtenu va permettre d'étudier les mécanismes à géométrie circulaire tels que les paliers cylindriques revêtus.

Dans le chapitre suivant, nous allons construire les solutions, en déplacement et en contrainte, du problème mixte dans le cas d'un assemblage de deux couronnes rendues solidaires sur une de leur frontière.

---

## Chapitre III

### SOLUTION DU PROBLEME MIXTE POUR UN ASSEMBLAGE DE PLUSIEURS COURONNES

#### III 1.INTRODUCTION

Dans la pratique, les paliers lisses sont composés d'un arbre en acier traité supposé rigide et d'un coussinet constitué d'un revêtement en polymères ( Elastomère, P.T.F.E ) ou en alliages anti-friction ( métaux blancs, babbitt ) encastré dans une bague en acier ou en bronze. L'ensemble revêtement-bague peut être schématisé par l'assemblage de deux couronnes élastiques circulaires de caractéristiques élastiques différentes.

Dans ce chapitre, nous présentons une solution du problème mixte pour l'assemblage de deux couronnes basée sur les solutions obtenues pour une couronne dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet et mixte.

#### III.2.NOTATIONS-CONDITIONS AUX LIMITES

##### III.2.1.NOTATIONS - GEOMETRIE

Les notations attachées à la définition géométrique et élastique de l'assemblage des deux couronnes sont précisées (figure III-1).

- La couronne interne a pour rayons limites les rayons  $R_0$  et  $R_1$  et pour constantes élastiques  $\mu_1$  et  $\chi_1$ .

Nous noterons :  $h_1 = \frac{R_0}{R_1}$

$$r = R_0 \quad \begin{cases} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_{0,k} e^{ik\theta} \\ \frac{2\mu_1}{R_0} (U_r + iU_\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_{0,k} e^{ik\theta} \end{cases}$$

$$r = R_1 \quad \begin{cases} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_{1,k}^{(1)} e^{ik\theta} \\ \frac{2\mu_1}{R_1} (U_r + iU_\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_{1,k}^{(1)} e^{ik\theta} \end{cases}$$

pour  $R_0$  et  $R_1$  les normales  $\vec{r}$  aux limites sont dirigées positivement vers l'extérieur de la couronne. Les quantités  $\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta}$  définies ci-dessus par  $\sigma_{0,k}$  et  $\sigma_{1,k}^{(1)}$  sont donc les actions du milieu extérieur sur la couronne.

- La couronne externe a pour rayons limites les rayons  $R_1$  et  $R_2$  et pour constantes élastiques  $\mu_2$  et  $\chi_2$ .

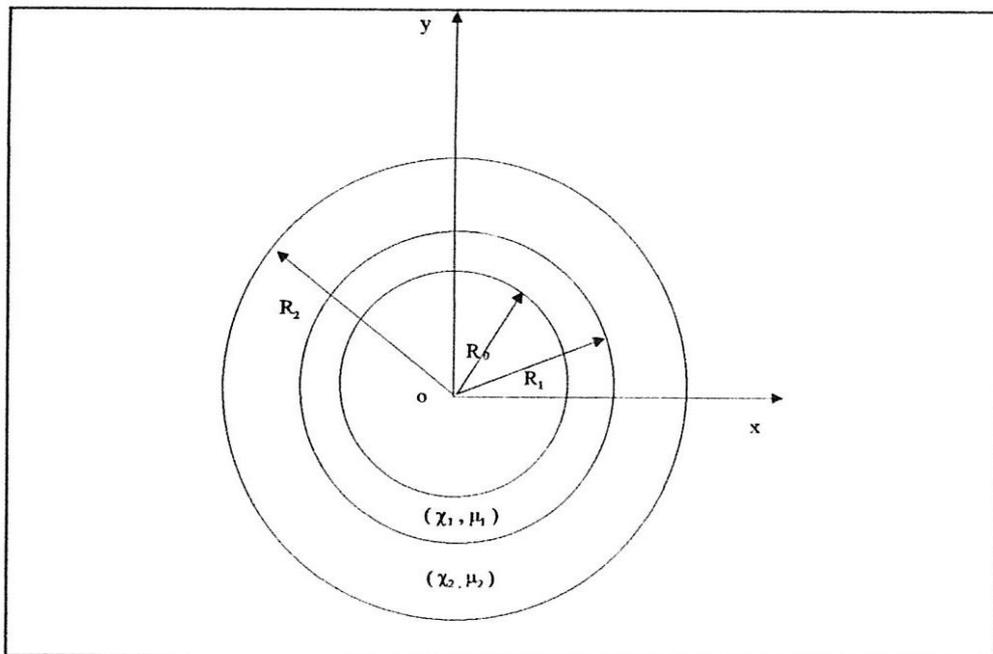
$$\text{Nous noterons : } h_2 = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et } \rho = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Le cercle de rayon  $R_1$  est donc la frontière commune aux deux couronnes.

$$\text{- pour } r = R_1 \begin{cases} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_{1,k}^{(2)} e^{ik\theta} \\ \frac{2\mu_2}{R_1} (U_r + iU_\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_{1,k}^{(2)} e^{ik\theta} \end{cases}$$

$$\text{- pour } r = R_2 \begin{cases} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_{2,k} e^{ik\theta} \\ \frac{2\mu_2}{R_2} (U_r + iU_\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_{2,k} e^{ik\theta} \end{cases}$$

En  $R_1$  et  $R_2$  les normales  $\vec{r}$  sont dirigées positivement vers l'extérieur de la couronne. Les quantités  $\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta}$  définies par  $\sigma_{1,k}^{(2)}$  et  $\sigma_{2,k}$  sont les actions du milieu extérieur sur cette couronne.



**Fig.III.1** Shématisation de l'assemblage de deux couronnes

### III.2.2.CONDITIONS AUX LIMITES EN ( $r = R_1$ )

Sur le cercle de rayon  $R_1$ , frontière commune aux deux couronnes, nous écrivons que :

- Les déplacements des points matériels de l'une et l'autre des couronnes occupant en  $r = R_1$  la même position angulaire  $\theta$  sont égaux. Il résulte alors de l'identification termes à termes des deux séries de **Fourier** définissant ces déplacements.

$$\forall k \in Z \quad \frac{1}{\mu_1} U_{1,k}^{(1)} = \frac{1}{\mu_2} U_{1,k}^{(2)}$$

ou encore

$$\rho U_{1,k}^{(1)} = U_{1,k}^{(2)} \quad (\text{III-1.})$$

- Le cercle  $r = R_1$  est en équilibre statique, l'action de la couronne (2) sur la couronne (1) équilibre donc l'action de la couronne (1) sur la couronne (2).

Compte tenu de l'orientation des normales  $\vec{r}$  et des tangentes  $\vec{t}$  pour l'une et l'autre de ces couronnes, nous aurons :

$$k \in Z \quad \sigma_{1,k}^{(1)} = \sigma_{1,k}^{(2)} \quad (\text{III-2.})$$

Ces conditions rendent solidaires les deux couronnes sur leur frontière commune. L'assemblage obtenu peut être regardé comme étant une couronne circulaire élastique non homogène. Ce type de conditions permet de transmettre intégralement tous les mouvements et tous les efforts d'une couronne à l'autre. Notons que des conditions traduisant une liaison moins complète des deux couronnes pourrait être imaginée. Par exemple, l'égalité des déplacements radiaux, accompagnée d'une condition sur les contraintes tangentielles à l'interface.

Certaines précautions devraient alors être prises pour la formulation des conditions aux limites car ce type d'assemblage ne peut pas transmettre n'importe quel effort d'une couronne à l'autre. Une situation idéale consisterait à pouvoir inclure dans ce type de conditions celles qui résultent du contact de deux corps. Mais ces conditions sont mixtes sur un même cercle et ne peuvent pas être abordées par identification termes à termes de deux séries.

Les conditions retenues explicitées par les équations (III-1.) et (III-2.) vont permettre de résoudre le problème de l'assemblage des deux couronnes.

### III-2.3.NOTATIONS MATRICIELLES

Les coefficients définissant tensions et déplacements aux frontières sont les coefficients:

$$\sigma_{0,k}, \sigma_{1,k}^{(1)}, \sigma_{1,k}^{(2)}, \sigma_{2,k} \quad k \in Z \text{ pour les contraintes.}$$

$$U_{0,k}, U_{1,k}^{(1)}, U_{1,k}^{(2)}, U_{2,k} \quad k \in Z \text{ pour les déplacements.}$$

Afin de condenser les écritures, les notations matricielles seront utilisées :

Pour  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_{0,k} &= \left| \begin{array}{c} \sigma_{0,k} \\ \bar{\sigma}_{0,-k} \end{array} \right| & S_{1,k}^{(1)} &= \left| \begin{array}{c} \sigma_{1,k}^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{1,-k}^{(1)} \end{array} \right| & S_{1,k}^{(2)} &= \left| \begin{array}{c} \sigma_{1,k}^{(2)} \\ \bar{\sigma}_{1,-k}^{(2)} \end{array} \right| & S_{2,k} &= \left| \begin{array}{c} \sigma_{2,k} \\ \bar{\sigma}_{2,-k} \end{array} \right| \text{ et} \\ D_{0,k} &= \left| \begin{array}{c} U_{0,k} \\ \bar{U}_{0,-k} \end{array} \right| & D_{1,k}^{(1)} &= \left| \begin{array}{c} U_{1,k}^{(1)} \\ \bar{U}_{1,-k}^{(1)} \end{array} \right| & D_{1,k}^{(2)} &= \left| \begin{array}{c} U_{1,k}^{(2)} \\ \bar{U}_{1,-k}^{(2)} \end{array} \right| & D_{2,k} &= \left| \begin{array}{c} U_{2,k} \\ \bar{U}_{2,-k} \end{array} \right| \end{aligned}$$

Avec ces notations, les conditions (III-1.) et (III-2.) s'écrivent :

$$k \in \mathbb{N} \quad \rho D_{1,k}^{(1)} = D_{1,k}^{(2)} \quad \text{et} \quad S_{1,k}^{(1)} = S_{1,k}^{(2)} \quad (\text{III-3.})$$

Nous noterons par la suite :

$$S_{1,k}^{(1)} = S_{1,k}^{(2)} = S_{1,k}$$

### III.3.EQUATIONS MATRICIELLES

Les équations du problème sont obtenues pour chacune des couronnes circulaires à partir des relations matricielles du chapitre II ; (II-97.), (II-89.) et (II-99.) du problème de **Dirichlet** et de (II-85.), (II-86.) du problème mixte, appliquées respectivement pour  $(h_1, \chi_1)$  et  $(h_2, \chi_2)$ .

L'utilisation des notations définies ci-dessus conduit à écrire ces relations à l'aide des matrices  $2 \times 2$  exception faite pour  $k=1$  du problème de **Dirichlet** soit :

- Couronne interne : (problème mixte)

- A partir de (II-94.) et (II-95.) pour  $k \in \{\mathbb{N}\}$

$$\begin{aligned} \{D_{1,k}\} &= [G_{1,k}]\{S_{1,k}\} + [G_{2,k}]\{D_{0,k}\} \\ \{S_{0,k}\} &= [F_{1,k}]\{S_{1,k}\} + [F_{2,k}]\{D_{0,k}\} \end{aligned} \quad (\text{III-3.})$$

tel que

$$[G_{1,k}] = \frac{1}{\Delta M_k} \left[ \begin{array}{cc} (1 + \chi_1)(1 - h_1^2) & -\frac{1}{1+k} \left[ (1 - k^2)(1 - h_1^2)^2 + \chi_1(1 - h_1^{2+2k})(1 + \chi_1 h_1^{2-2k}) \right] \\ -\frac{[(1 - k^2)(1 - h_1^2)^2 + \chi_1(1 - h_1^{2-2k})(1 + \chi_1 h_1^{2+2k})]}{(1 - k)} & (1 + \chi_1)(1 - h_1^2) \end{array} \right]$$

$$[G_{2,k}] = \frac{1}{\Delta M_k} \left[ \begin{array}{cc} -(1 + \chi_1)(1 + \chi_1 h_1^{2-2k}) h_1^{2+k} & (1 - k)(1 - h_1^2)(1 + \chi_1) h_1^{2-k} \\ (1 + k)(1 - h_1^2)(1 + \chi_1) h_1^{2+k} & -(1 + \chi_1)(1 + \chi_1 h_1^{2+2k}) h_1^{2-k} \end{array} \right]$$

$$[F_{1,k}] = \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} -(1+\chi_1)(1+\chi_1 h_1^{2+2k}) h_1^{-k} & (1-k)(1+\chi_1)(1-h_1^2) h_1^{-k} \\ (1+k)(1+\chi_1)(1-h_1^2) h_1^k & -(1+\chi_1)(1+\chi_1 h_1^{2-2k}) h_1^k \end{bmatrix}$$

$$[F_{2,k}] = \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} (1-k^2)(1-h_1^2)(1+\chi_1) h_1^2 & (1-k) \left[ (1+\chi_1 h_1^{2+2k})(1-h_1^{2-2k}) - (1-k^2)(1-h_1^2)^2 \right] \\ (1+k) \left[ (1+\chi_1 h_1^{2-2k})(1-h_1^{2+2k}) - (1-k^2)(1-h_1^2)^2 \right] & (1-k^2)(1-h_1^2)(1+\chi_1) h_1^2 \end{bmatrix}$$

avec  $\Delta M_k = (1-k^2)(1-h_1^2)^2 - (1+\chi_1 h_1^{2+2k})(1+\chi_1 h_1^{2-2k})$

- Couronne externe (problème de Dirichlet)

- A partir de (II-99.) pour  $k \neq 1$

$$\begin{aligned} S_{2,k} &= C'_{1,k} D_{2,k} + C'_{2,k} D_{1,k}^{(2)} \\ S_{1,k} &= E'_{1,k} D_{2,k} + E'_{2,k} D_{1,k}^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{III-4.})$$

tel que

$$C'_{1,k} = \frac{1}{\Delta U_k} \left[ \frac{(1-k^2)(1+\chi_2)(h_2^2-1)h_2^2}{(1+k) \left[ (1-k^2)(h_2^2-1)^2 + \chi_2(\chi_2 + h_2^{2+2k})(h_2^{2-2k}-1) \right]} \right. \\ \left. \frac{(1-k) \left[ (1-k^2)(h_2^2-1)^2 + \chi_2(\chi_2 + h_2^{2-2k})(h_2^{2+2k}-1) \right]}{(1-k^2)(1+\chi_2)(h_2^2-1)h_2^2} \right]$$

$$C'_{2,k} = \frac{1}{\Delta U_k} \begin{bmatrix} (1-k^2)(1+\chi_2)(1-h_2^2)h_2^{-k} & (1-k)\chi_2(1+\chi_2)(1-h_2^{2+2k})h_2^{-k} \\ (1+k)\chi_2(1+\chi_2)(1-h_2^{2-2k})h_2^k & (1-k^2)(1+\chi_2)(1-h_2^2)h_2^k \end{bmatrix}$$

$$E'_{1,k} = \frac{1}{\Delta U_k} \begin{bmatrix} (1-k^2)(1+\chi_2)(h_2^2-1)h_2^{2+k} & (1-k)\chi_2(1+\chi_2)(h_2^{2+2k}-1)h_2^{2-k} \\ (1+k)\chi_2(1+\chi_2)(h_2^{2-2k}-1)h_2^{2+k} & (1-k^2)(1+\chi_2)(h_2^2-1)h_2^{2-k} \end{bmatrix}$$

$$E'_{2,k} = \left[ \frac{(1-k^2)(1+\chi_2)(1-h_2^2)}{(1+k) \left[ (1-k^2)(h_2^2-1)^2 - \chi_2(1+\chi_2 h_2^{2+2k})(h_2^{2-2k}-1) \right]} \right. \\ \left. \frac{(1-k) \left[ (1-k^2)(h_2^2-1)^2 - \chi_2(1+\chi_2 h_2^{2-2k})(h_2^{2+2k}-1) \right]}{(1-k^2)(1+\chi_2)(1-h_2^2)} \right]$$

avec  $\Delta U_k = \chi_2^2 (1 - h_2^{2-2k}) (1 - h_2^{2+2k}) - (1 - k^2) (1 - h_2^2)^2$

- pour  $k = 1$

$$\begin{aligned} S_{2,1} &= C'_{1,1} D_{2,1} + C'_{2,1} D_{1,1}^{(2)} \\ S_{1,1} &= E'_{1,1} D_{2,1} + E'_{2,1} D_{1,1}^{(2)} \end{aligned} \tag{III-5.}$$

tel que

$$C'_{1,1} = \frac{1}{\Delta U_1} \left[ \begin{array}{l} (1 + \chi_2) h_2^2 \\ -2 \left[ \frac{(h_2^2 - 1)^2 + \chi_2 (\chi_2 + h_2^4) \ln(h_2)}{(1 - h_2^2)} \right] \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \frac{(1 + \chi_2) \chi_2 (1 + h_2^2)}{2} \\ (1 + \chi_2) h_2^2 \end{array} \right]$$

$$C'_{2,1} = \frac{1}{\Delta U_1} \left[ \begin{array}{l} \frac{-(1 + \chi_2)}{h_2} \\ \frac{2 \chi_2 (1 + \chi_2) h_2 \ln(h_2)}{(1 - h_2^2)} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} -\frac{\chi_2}{2} (1 + \chi_2) (1 + h_2^2) h_2^{-1} \\ -(1 + \chi_2) h_2 \end{array} \right]$$

$$E'_{1,1} = \frac{1}{\Delta U_1} \left[ \begin{array}{l} (1 + \chi_2) h_2^3 \\ -2 \chi_2 (1 + \chi_2) h_2^3 \ln(h_2) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \frac{\chi_2}{2} (1 + \chi_2) (1 + h_2^2) h_2 \\ (1 + \chi_2) h_2 \end{array} \right]$$

$$E'_{2,1} = \frac{1}{\Delta U_1} \left[ \begin{array}{l} -(1 + \chi_2) \\ -2 \left[ \frac{(h_2^2 - 1)^2 - \chi_2 (1 + \chi_2 h_2^4) \ln(h_2)}{(1 - h_2^2)} \right] \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} -\frac{\chi_2}{2} (1 + \chi_2) (1 + h_2^2) \\ -(1 + \chi_2) \end{array} \right]$$

avec  $\Delta U_1 = \chi_2^2 (1 + h_2^2) \ln(h_2) + 1 - h_2^2$

#### **4 SOLUTION DU PROBLEME MIXTE RELATIF A L'ENSEMBLE FORME DE DEUX COURONNES**

Nous allons présenter les solutions sous un forme analogue à la forme prise par les relations relatives à la couronne.

Soit pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$G_{2,k}'' = \rho E_{2,k}' - F_{2,k}$$

$G_{2,k}''$  : est une matrice régulière ( inversible ).

La condition (III-2.) permet d'écrire :

$$E_{1,k}' D_{2,k} + E_{2,k}' D_{1,k}^2 = F_{1,k} S_{0,k} + F_{2,k} D_{1,k}^1 \quad \text{et compte tenu de la relation (III-1.) on a :}$$

$$\rho E_{2,k}' D_{1,k}^1 - F_{2,k} D_{1,k}^1 = F_{1,k} S_{0,k} - E_{1,k}' D_{2,k}$$

$$\underbrace{\rho E_{2,k}' D_{1,k}^1 - F_{2,k} D_{1,k}^1}_{G_{2,k}'' D_{1,k}^1} = F_{1,k} S_{0,k} - E_{1,k}' D_{2,k}$$

Soit :

$$D_{1,k}^1 = \left| G_{2,k}''^{-1} F_{1,k} \right| S_{0,k} - \left| G_{2,k}''^{-1} E_{1,k}' \right| D_{2,k} \quad (\text{III-6.})$$

La première équation du système (III-3.) permet d'écrire :

$$S_{1,k} = \left| F_{1,k} \right| S_{0,k} + \left| F_{2,k} G_{2,k}''^{-1} F_{1,k} \right| S_{0,k}^0 - \left| F_{2,k} G_{2,k}''^{-1} E_{1,k}' \right| D_{2,k}^2$$

Soit :

$$S_k^1 = \left| F_{1,k} + F_{2,k} G_{2,k}''^{-1} F_{1,k} \right| S_{0,k} - \left| F_{2,k} G_{2,k}''^{-1} E_{1,k}' \right| D_{2,k} \quad (\text{III-7.})$$

La deuxième équation donne :

$$D_k^0 = \left| G_{1,k} \right| S_{0,k} + \left| G_{2,k} G_{2,k}''^{-1} F_{1,k} \right| S_{0,k} - \left| G_{2,k} G_{2,k}''^{-1} E_{1,k}' \right| D_{2,k}$$

Soit :

$$D_k^0 = \left| G_{1,k} + G_{2,k} G_{2,k}''^{-1} F_{1,k} \right| S_{0,k} - \left| G_{2,k} G_{2,k}''^{-1} E_{1,k}' \right| D_{2,k} \quad (\text{III-8.})$$

et enfin, la première équation du système (III-4.) donne :

$$S_{2,k} = \left| C_{1,k}' \right| D_{2,k} + \rho \left| C_{2,k}' G_{2,k}''^{-1} F_{1,k} \right| S_{0,k} - \rho \left| C_{2,k}' G_{2,k}''^{-1} E_{1,k}' \right| D_{2,k}$$

Soit :

$$S_{2,k} = +\rho \left| C_{2,k}' G_{2,k}''^{-1} F_{1,k} \right| S_{0,k} + \left| C_{1,k}' - \rho C_{2,k}' G_{2,k}''^{-1} E_{1,k}' \right| D_{2,k} \quad (\text{III-9.})$$

Si l'ensemble formé des deux couronnes est maintenu rigide par l'extérieur, on a alors

$$D_{2,k} = \begin{Bmatrix} U_{2,k} \\ U_{2,-k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les relations (III-6.) à (III-9.) se simplifient et s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} D_{1,k}^1 = |G_{2,k}^{n-1} F_{1,k}| S_{0,k} \\ S_{1,k}^1 = S_{1,k}^2 = S_k^1 = |F_{1,k} + F_{2,k} G_{2,k}^{n-1} F_{1,k}| S_{0,k} \\ D_{0,k} = |G_{1,k} + G_{2,k} G_{2,k}^{n-1} F_{1,k}| S_{0,k} \\ S_{2,k} = \rho |C'_{2,k} G_{2,k}^{n-1} F_{1,k}| S_{0,k} \end{cases} \quad (\text{III-10.})$$

### III.5. CONCLUSION

La méthode développée dans ce chapitre a permis de construire dans le cas du problème mixte, la solution du problème élastique plan l'ensemble formé de deux couronnes circulaires de caractéristiques élastiques différentes.

La présentation de la solution est analogue à la présentation de la solution pour une seule couronne. Il est donc possible d'utiliser cette dernière solution afin d'obtenir la solution du problème mixte pour des assemblages de plus de deux couronnes.

---

## Chapitre IV

### EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDES NEWTONIENS

#### IV-1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons les équations de la lubrification hydrodynamique permettant de déterminer les caractéristiques statiques et dynamiques d'un écoulement en film mince tels que la pression hydrodynamique dans le film, la portance hydrodynamique, la force de frottement, les coefficients dynamiques du film, la masse critique et la fréquence de frottement d'un palier lisse rigide et déformable.

Les équations de la théorie hydrodynamique isotherme permettent de décrire convenablement les caractéristiques d'un contact lubrifié dans lequel les actions hydrodynamiques engendrées sont faibles comparées aux caractéristiques mécaniques des solides formant le contact, lorsque les pressions engendrées dans le film sont très importantes, c'est le cas des contacts fortement chargés, elles peuvent provoquer des modifications non négligeables de la géométrie du contact, cette dernière a une importance considérable en lubrification hydrodynamique, car les épaisseurs du film sont généralement très faibles et sont de l'ordre de grandeur des déplacements élastiques. Dans ces conditions, il est nécessaire d'introduire dans les calculs une équation supplémentaire permettant de calculer les déplacements élastiques des surfaces en regard du film fluide. Le couplage fluide-structure est assuré à l'aide d'un processus itératif permettant de relier les parties hydrodynamique et élastique.

Dans cette étude, nous supposons que seul le coussinet est déformable, l'arbre du palier étant rigide. Le coussinet peut être composé d'une ou plusieurs couches élastiques fixées dans un support infiniment rigide.

#### IV.2. EQUATIONS GENERALES DE LA MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX

Les équations générales de la mécanique des films minces visqueux permettent, compte tenu de conditions géométriques et cinématiques, de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince et en particulier sa portance.

Elles sont déduites des lois fondamentales qui gouvernent la mécanique des milieux continus, appliquées à un fluide newtonien et qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :

- la loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad i = 1,2,3 \quad (IV-1.)$$

- la loi fondamentale de la dynamique :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad i = 1,2,3 \quad (\text{IV-2.})$$

- la loi de comportement rhéologique qui pour un fluide newtonien s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \varepsilon_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{IV-3.})$$

$$i, j = 1,2,3$$

avec :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

- la loi de conservation de l'énergie pour un fluide newtonien :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho r \quad (\text{IV-4})$$

$$i, j = 1,2,3$$

avec :

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{dans le cas d'un solide}$$

et

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \phi \quad \text{dans le cas d'un fluide.}$$

$\phi$  est la fonction de dissipation visqueuse.

Si le fluide est stokesien  $\left( \lambda + \frac{2}{3} \mu = 0 \right)$ , la fonction de dissipation s'écrit :

$$\phi = \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad i, j = 1,2,3$$

En reportant l'équation de comportement rhéologique (IV-3.) dans l'équation de la dynamique (IV.2) et en négligeant les forces massiques extérieures, on obtient les équations de **Navier-Stokes** qui s'écrivent :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (\text{IV.5})$$

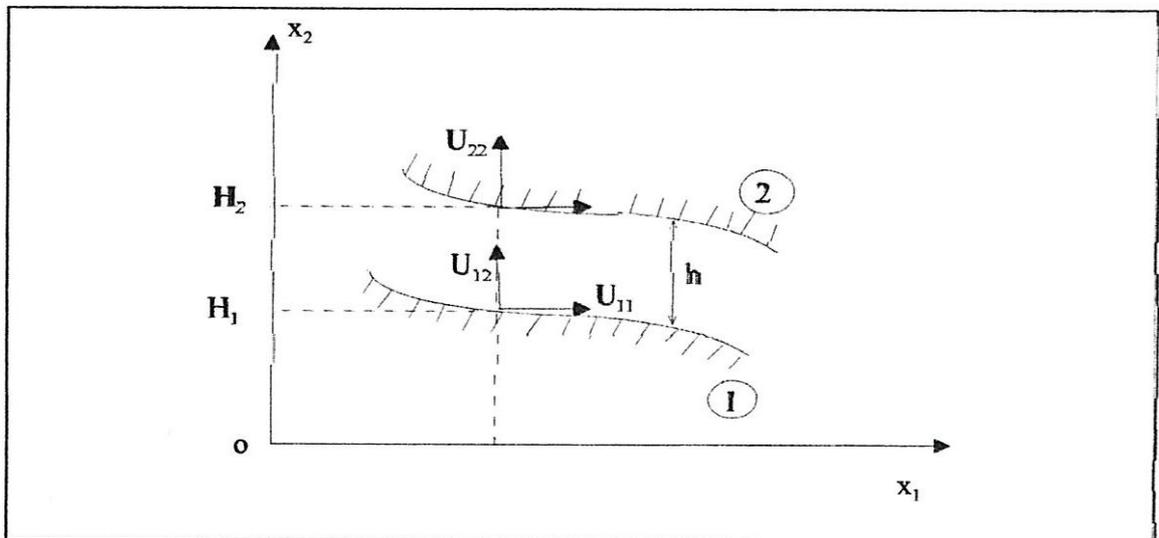
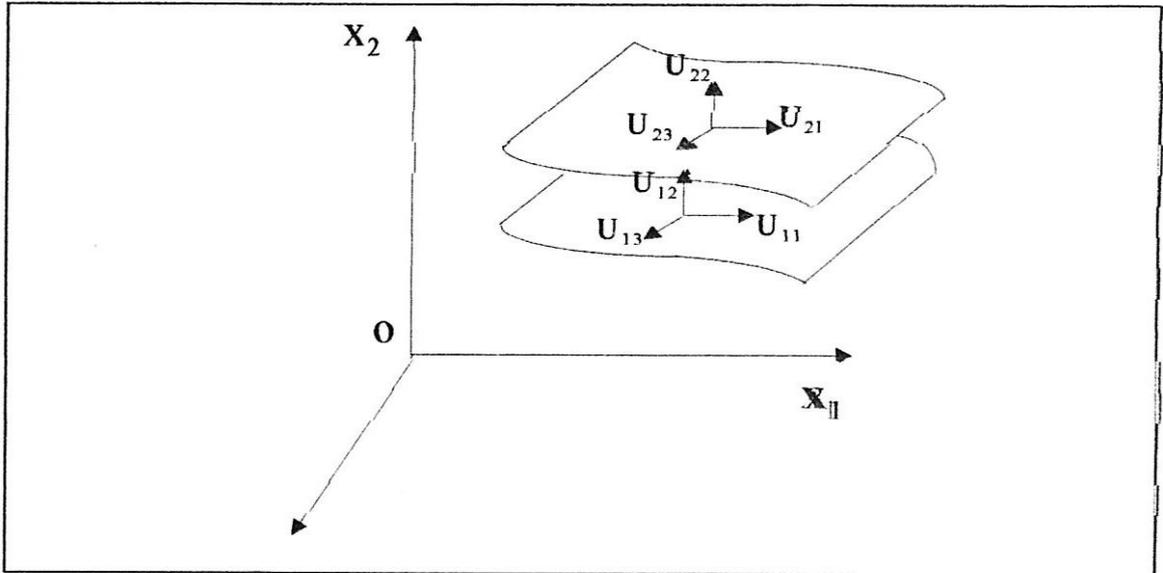
---

Dans ces équations :

|                    |   |
|--------------------|---|
| $x_i$ et $t$       | : variables d'espace et de temps ;                          |
| $u_j$              | : composantes de la vitesse ;                               |
| $\rho$             | : la masse volumique du fluide ;                            |
| $F_i$              | : forces massiques extérieures ;                            |
| $\sigma_{ij}$      | : tenseur des contraintes ;                                 |
| $K$                | : coefficient de conductibilité thermique du fluide ;       |
| $T$                | : température du fluide ;                                   |
| $p$                | : pression dans le fluide ;                                 |
| $\varepsilon_{ij}$ | : tenseur des taux de déformation ;                         |
| $\theta$           | : taux de dilatation cubique ;                              |
| $\delta_{ij}$      | : symbole de Kronecker ;                                    |
| $\lambda$ et $\mu$ | : coefficients de Navier ;                                  |
| $C_p$              | : chaleur massique à pression constante ;                   |
| $r$                | : source de chaleur interne au système par unité de masse . |

### **IV-3. ANALYSE DIMENSIONNELLE**

En mécanique des films minces visqueux, la dimension suivant l'épaisseur du film  $(\overline{0, x_2})$  est très faible par rapport aux deux autres dimensions ( longueur et largeur du contact ) figure IV-1, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation (IV.5) d'écrire :



**Fig IV.1.** Systèmes d'axes et notations

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{L} \quad , \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{h} \quad , \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{L} \quad ;$$

$$\bar{t} = \frac{tV}{L} \quad , \quad \bar{u}_1 = \frac{u_1}{V} \quad , \quad \bar{u}_2 = \frac{u_2 L}{Vh} \quad , \quad \bar{u}_3 = \frac{u_3}{V}$$

et d'ajouter pour cette étude :

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad , \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad \text{et} \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Dans ces expressions :

$V$  : représente la vitesse d'une des parois du contact.

$(\mu_0, \lambda_0)$  et  $\rho_0$  : les constantes de **Navier** et la **masse volumique de référence** à  $T = T_0$ .

Ce changement de variables conduit à poser :

$$\bar{p} = p \frac{h^2}{\mu_0 VL}$$

Compte tenu de ces changements de variables, les équations de Navier-Stokes (IV.5.) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_1} = \varepsilon \left[ -\bar{\rho} \mathfrak{R} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \left( \bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3^2} \right) \right] + \dots \\ + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2^2} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} \right) \right] + \dots \\ + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} = \varepsilon^2 \left\{ \varepsilon \left[ -\bar{\rho} \mathfrak{R} \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \left( \bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3^2} \right) \right] + \dots \right. \\ \left. + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{IV-6.})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_3} = \varepsilon \left[ -\bar{\rho} \mathfrak{R} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \left( \bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3^2} \right) \right] + \dots \\ + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2^2} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} \right) \right] + \dots \\ + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3} \right), \end{aligned}$$

avec :  $\mathfrak{R} = \rho_0 \frac{Vh}{\mu_0}$  : nombre de **Reynolds** relatif à l'épaisseur de l'écoulement;

$\varepsilon = \frac{h}{L}$  : paramètre d'échelle qui est, en mécanique des films minces visqueux, de l'ordre de  $10^{-3}$ .

En négligeant les termes multipliés soit par  $\varepsilon^2$ , soit par  $\varepsilon^3$ , il reste :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} = -\varepsilon \mathcal{R} \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} \right] + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} = 0 \end{array} \right. \quad (i = 1 \text{ et } 3) \quad (\text{IV-7.})$$

Les termes  $\varepsilon \mathcal{R}$  ou termes d'inertie, l'équation (IV-7.) seront négligeables devant les termes de viscosité quand  $\varepsilon \mathcal{R} \ll 1$ ; ce qui est vérifié dans la plupart des écoulements rencontrés en lubrification.

Si par hypothèse, on néglige les forces d'inertie il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} = \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} = 0 \end{array} \right. \quad (i = 1 \text{ et } 3) \quad (\text{IV-8.})$$

et en revenant aux variables dimensionnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{IV-9.})$$

#### **IV-4. DERIVATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS**

Très souvent on admet que la masse volumique et la viscosité du fluide ne varient pas selon l'épaisseur du film et on place l'origine du système d'axes sur l'une des parois du contact (Figure IV-2.).

Nous avons utilisé jusqu'ici les notations  $x_i$  pour les variables d'espace et  $u_i$  pour les composantes de la vitesse d'écoulement du fluide. Il sera plus pratique d'utiliser les nouvelles notations  $(x, y, z)$  et  $(u, v, w)$  pour les mêmes éléments.

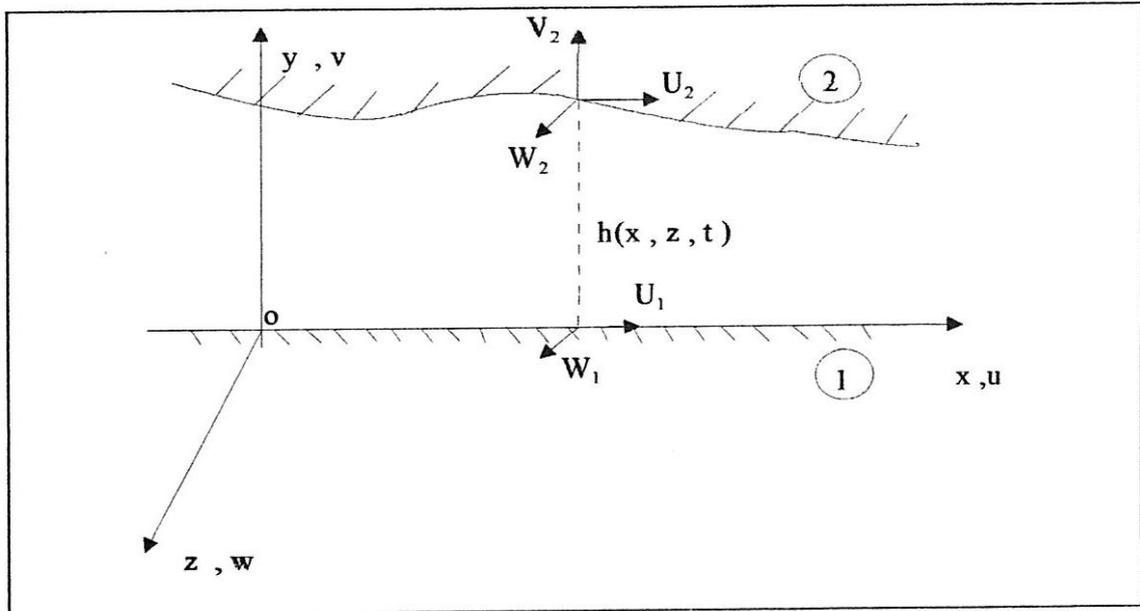


Fig IV.2. : Géométrie et cinématique du contact

Avec la nouvelle notation, les équations de Navier (IV-9.) prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (\text{IV-10.})$$

D'après la 2<sup>ème</sup> équation du système (IV-10.), la pression à travers l'épaisseur du film est supposée constante.

Par conséquent, l'écoulement bidimensionnel est régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (\text{IV-11.})$$

Après deux intégrations par rapport à la variable y, nous obtenons :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial p}{\partial x} \int \frac{y}{\mu} dy + A(x, z) \int \frac{dy}{\mu} + C(x, z) \\ w = \frac{\partial p}{\partial z} \int \frac{y}{\mu} dy + B(x, z) \int \frac{dy}{\mu} + D(x, z) \end{cases} \quad (\text{IV-12.})$$

Les constantes d'intégration  $A, B, C$  et  $D$  sont déterminées par les conditions limites sur les vitesses en supposant que les particules fluides adhèrent parfaitement aux parois 1 et 2 :

$$\begin{cases} y=0, & u=U_1, & V_1=0 & \text{et } w=W_1 \\ y=h, & u=U_2, & V_2 = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} & \text{et } w=W_2 \end{cases} \quad (\text{IV-13.})$$

Le fluide étant isovisqueux, les relations (IV-12.) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \frac{A}{\mu} y + C \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + \frac{B}{\mu} y + D \end{cases} \quad (\text{IV-14.})$$

L'utilisation des conditions limites (IV-13.), les deux composantes de la vitesse d'écoulement s'expriment :

$$\begin{cases} u = \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh)}_{\text{Écoulement de Poiseuille}} + \underbrace{\frac{y}{h} U_2 + U_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right)}_{\text{Écoulement de Couette}} \\ w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} W_2 + W_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \end{cases} \quad (\text{IV-15.})$$

De ces relations, on déduit les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) + (U_2 - U_1) \frac{\mu}{h} \\ \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y - h) + (W_2 - W_1) \frac{\mu}{h} \end{cases} \quad (\text{IV-16.})$$

En utilisant l'hypothèse d'un fluide incompressible, l'équation de conservation de la masse (IV-1.) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV-17.})$$

L'intégration de l'équation (IV-17.) à travers l'épaisseur du film permet d'écrire :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (\text{IV-18.})$$

avec :

$$I_1 = \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dy, \quad I_2 = \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial v}{\partial y} dy = [v]_0^h = V_2 \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial w}{\partial z} dy$$

pour l'évaluation des intégrales  $I_1$  et  $I_3$ , nous utilisons la règle d'intégration de **Leibnitz** :

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial x_i} dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{h_1}^{h_2} F(x,y,z,t) dy - F(x,h_2,z,t) \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x,h_1,z,t) \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \quad (\text{IV-19.})$$

$$i = 1,2,3$$

Il vient :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\partial Q_x}{\partial x} - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \\ I_3 = \frac{\partial Q_z}{\partial z} - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} Q_x = \int_0^h u(y) dy = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h}{2} (U_1 + U_2) \\ Q_z = \int_0^h w(y) dy = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{h}{2} (W_1 + W_2) \end{cases} \quad (\text{IV-20.})$$

$Q_x$  et  $Q_z$  sont les débits volumiques par unité de longueur dans les directions  $ox$  et  $oz$ .

par conséquent, l'équation (IV-18.) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h}{2} (U_1 + U_2) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h}{2} (W_1 + W_2) \right) - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + V_2 \quad (\text{IV-21.})$$

puisque  $V_2 = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z}$ , l'équation (IV-21.) prend la forme suivante :

$$\text{div} \left( \frac{h^3}{12\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p \right) = \frac{1}{2} \text{div} (h \overrightarrow{U}) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{IV-22.})$$

L'équation (IV-22.) est l'équation de base de la lubrification appelée **équation de Reynolds**. Notons que cette équation a été présentée par **Osborne Reynolds** en 1886 [35] dans le but d'expliquer les résultats expérimentaux obtenus par **Beauchamp Tower** [36,37] en 1883.

Dans cette équation :

$$\text{div}(\ ) = \frac{\partial}{\partial x}(\ ) + \frac{\partial}{\partial z}(\ ), \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\ ) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\ ) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\ ) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{U} = \begin{Bmatrix} U_1 + U_2 \\ W_1 + W_2 \end{Bmatrix}$$

$\text{div}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}$  étant les opérateurs divergence et gradient.

L'équation (IV-22.) s'écrit aussi :

$$\operatorname{div}(\bar{Q}) = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{IV-23.})$$

avec:

$$\bar{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_z \end{Bmatrix} \text{ et } \frac{\partial h}{\partial t} : \text{ la vitesse d'écrasement du film.}$$

La dérivation de l'équation de **Reynolds** (IV-22.) ou (IV-23.) a nécessité l'emploi des hypothèses suivantes :

- le milieu est continu;
- le fluide est newtonien et incompressible;
- l'écoulement est laminaire;
- les forces massiques extérieures sont négligeables ainsi que les forces d'inertie dans le fluide;
- Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact.
- l'épaisseur du film est très faible devant la largeur et la longueur du contact  
 $\left( \varepsilon = \frac{h}{L} \approx 10^{-3} \right)$ ; c'est l'hypothèse fondamentale de la lubrification;
- la variation de la viscosité du fluide à travers l'épaisseur du film est négligée;
- les surfaces sont supposées rigides et parfaitement lisses.

#### **IV-5. APPLICATION AU CAS DES PALIERS LISSES**

Les paliers lisses sont fréquemment utilisés; les plus simples sont constitués d'un arbre en acier traité tournant dans un alésage en bronze en présence d'un film lubrifiant. On les rencontre dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les groupes turbo-alternateurs, les réducteurs de grande puissance, etc....

##### **IV.5.1. DESCRIPTION GEOMETRIQUE ET CINEMATIQUE**

Un palier lisse est constitué d'un coussinet, de centre  $O_c$  et de rayon  $R_c$ , et d'un arbre de centre  $O_a$  et de rayon  $R_a$ . La distance  $O_a O_c$  est l'excentricité  $e_0$ . L'angle que fait la ligne des centres  $\overline{O_a O_c}$  avec la direction de la charge est l'angle de calage  $\phi_0$  (figure IV-3.). Si les axes du coussinet et de l'arbre sont parallèles (palier aligné), ces deux paramètres  $(e_0, \phi_0)$  sont suffisants pour repérer le positionnement de l'arbre à l'intérieur du coussinet. Les rayons  $R_a$  et  $R_c$  étant très voisins, on peut, en négligeant la courbure du film, développer le coussinet et l'assimiler à un plan (fig IV-4.).

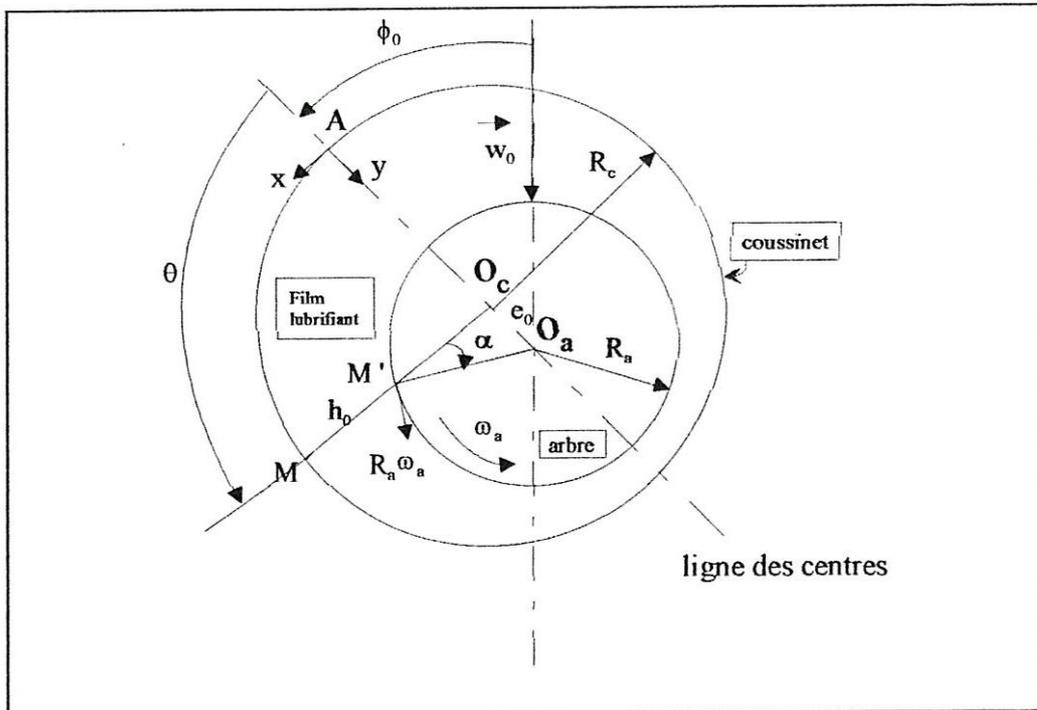


Fig IV.3. : Section droite du palier

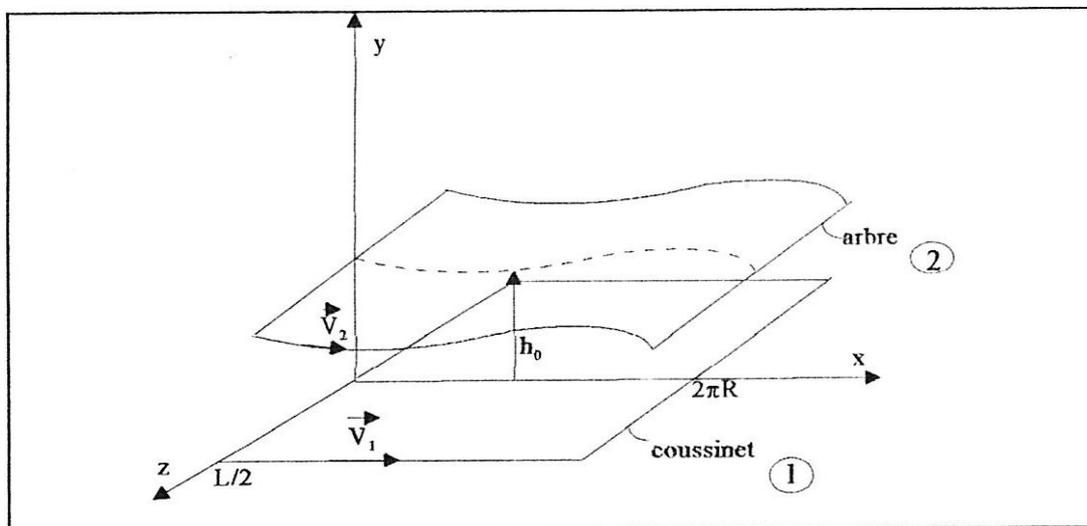


Fig IV.4 : Palier développé

## IV.5.2. EQUATION GEOMETRIQUE DU FILM

L'équation géométrique définit en chaque point et à chaque instant l'épaisseur  $h$  du film lubrifiant. Dans ce paragraphe, nous donnerons les expressions de l'équation géométrique dans le cas :

- d'un palier à axes parallèles (palier aligné);
- d'un palier déformable aligné

### IV.5.2.1. PALIER RIGIDE ALIGNE

Considérons une section droite du palier ( fig IV-3 ). Un point M appartenant à la surface du coussinet sera repéré par la coordonnée angulaire:  $\theta = (\overrightarrow{O_c A}, \overrightarrow{O_c M})$ .

L'épaisseur du film d'huile est :

$$h_0 = O_c M - O_c M'$$

$$h_0 = R_c - O_c M' = R_a + C - O_c M'$$

$C$  étant le jeu radial du palier ( $C = R_c - R_a$ ).

En appliquant la règle des sinus au triangle  $O_c M' O_a$ , il vient :

$$\frac{R_a}{\sin \theta} = \frac{e_0}{\sin \alpha} = \frac{O_c M'}{\sin(\theta - \alpha)}$$

$$\text{d'où : } \sin \alpha = \frac{e_0}{R_a} \sin \theta$$

$$\text{et } O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(\theta - \alpha)$$

$$\text{or } \sin(\theta - \alpha) = \sin \theta \sqrt{1 - (\sin \alpha)^2} - \frac{e_0}{R_a} \sin \theta \cos \theta$$

il vient :

$$O_c M' = R_a \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{e_0}{R_a} \sin \theta \right)^2} - \frac{e_0}{R_a} \cos \theta \right]$$

La quantité  $\left(\frac{e_0}{R_a}\right)$  est très petite devant l'unité (de l'ordre de  $10^{-3}$ ). On peut donc négliger le terme  $\left(\frac{e_0}{R_a} \sin \theta\right)^2$  devant 1. On a alors :

$$h(\theta) = C(1 + \varepsilon_0 \cos \theta) \quad (\text{IV-24.})$$

Où  $\varepsilon_0$  est l'excentricité relative définie par  $\varepsilon_0 = \frac{e_0}{C}$ .

Si  $\varepsilon_0 = 0$ , l'arbre et le coussinet sont coaxiaux.

Si  $\varepsilon_0 = 1$ , il y a présence d'un contact entre les surfaces de l'arbre et du coussinet.

#### IV.5.2.2. PALIER DEFORMABLE ALIGNE

Dans la pratique, le coussinet est souvent constitué d'un revêtement élastique qui peut être métallique (alliages antifricction, métaux blancs, etc...) ou viscoélastiques (élastomère, caoutchouc, etc...).

L'arbre réalisé en acier traité, est supposé rigide donc indéformable, le champ de pression, engendré dans le film lubrifiant par la rotation de l'arbre, provoque des déformations élastiques qui peuvent être de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du film.

Dans ces conditions, l'équation géométrique du film modifiée s'écrit alors [ 19 ] :

$$h(\theta, z) = C + e_0 \cos \theta + L(p) \quad (\text{IV-25.})$$

où:  $L(p)$  est l'opérateur de compliance permettant de relier le champ de déplacement élastique à la pression hydrodynamique.

### IV 5.3. EQUATION DE REYNOLDS

Dans le cas d'un palier où l'arbre est muni d'un mouvement de rotation dans un coussinet fixe, les composantes des vitesses s'écrivent :

$$\begin{cases} U_1 = 0 & ; & V_1 = 0 & ; & W_1 = 0 \\ U_2 = R_a \omega_a \cos \alpha & ; & V_2 = R_a \omega_a \sin \alpha & ; & W_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-26.})$$

où  $\alpha$  représente la pente de la courbe  $h(x)$  :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{1}{R_a} \frac{dh}{d\theta} = -\frac{e_0}{R_a} \sin \theta \quad (\text{IV-27.})$$

la quantité  $\left(\frac{e_0}{R_a}\right)$  étant très petite, on peut effectuer un développement et se limiter au 1<sup>er</sup> ordre :

$$\cos \alpha \cong 1 \quad ; \quad \sin \alpha = \alpha = \frac{1}{R_a} \frac{dh}{d\theta}$$

Dans ces conditions, les relations (IV-26) s'écrivent :

$$\begin{cases} U_1 = 0 & ; & V_1 = 0 & ; & W_1 = 0 \\ U_2 = R_a \omega_a & ; & V_2 = \omega_a \frac{dh}{d\theta} & ; & W_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-28.})$$

Si on reporte (IV-28.) dans l'équation de **Reynolds** (IV-21.) et si on pose  $R \cong R_a \cong R_c$  et  $\omega_a = \omega$ , on obtient :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu_0 \left( \omega_a \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (\text{IV-29.})$$

où :

$\theta - \frac{x}{R}$  est la coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur la ligne des centres.

Dans le cas d'un fluide piézo-visqueux, la littérature nous offre plusieurs lois permettant de relier la viscosité à la pression suivant la nature des fluides utilisés.

Nous retenons la relation de **Barus** qui, pour une huile minérale, s'écrit :

$$\mu_p = \mu_0 e^{\alpha p} \quad (\text{IV-30.})$$

$\alpha$  : est le coefficient de piézo-viscosité;

$\mu_0$  : est la viscosité du lubrifiant mesurée à la pression atmosphérique.

Le changement de variable :

$$p(\theta, z) = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \alpha q(\theta, z)) \quad (\text{IV-31.})$$

Permet de conserver la forme de l'équation (IV-29.) ainsi que les conditions aux limites et les bornes d'intégration à condition de remplacer  $p(\theta, z)$  par  $q(\theta, z)$ .

#### IV-5.4. CONDITIONS AUX LIMITES

Dans le cas d'une rainure d'alimentation axiale située sur la ligne des centres et pour une pression d'alimentation égale à la pression atmosphérique, les conditions aux limites sur la pression qui correspondent le plus à la réalité physique sont celles de **Swift-Stieber** [38,39] dites encore conditions de **Reynolds**, qui s'écrivent :

$$\text{suivant } oz : p\left(\theta, z = -\frac{L}{2}\right) = p\left(\theta, z = \frac{L}{2}\right) = 0; \quad (\text{IV-32.})$$

$$\text{suivant } \theta : p(\theta = 0, z) = p(\theta = \theta_s, z) = 0; \quad (\text{IV-33.})$$

$$\text{et } \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, z) = 0$$

où  $\theta_s$  est l'abscisse de rupture du film lubrifiant qui est une inconnue supplémentaire du problème.

On distingue ainsi deux régions dans le palier :

- une région active où la pression est positive et le film complet pour des valeurs de  $\theta$  comprises entre 0 et  $\theta_s$ .
- une région inactive à pression nulle dans laquelle peut apparaître le phénomène de cavitation pour  $\theta_s < \theta < 2\pi$ . Cette dernière région est partiellement remplie de fluide et il faut en tenir compte lors du calcul du couple de frottement.

l'équation de **Reynolds** (IV-29.) est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique qui n'admet pas de solutions analytiques.

Les méthodes numériques utilisées actuellement sont la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis qui nécessitent l'emploi des ordinateurs. Néanmoins, cette équation peut admettre des solutions analytiques pour des écoulements de fluide unidimensionnels (hypothèse du palier long ou du palier court).

#### **IV-6 HYPOTHESE DU PALIER INFINIMENT COURT**

Lorsque le rapport  $\frac{L}{D}$  de la longueur au diamètre du palier est faible, on peut négliger le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial. Les résultats obtenus sont applicables aux paliers dont le rapport  $\frac{L}{D} < \frac{1}{8}$ .

Dans ces conditions l'équation de **Reynolds** (IV.29) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu_0 \omega \frac{dh}{d\theta} \quad (\text{IV-34.})$$

Avec les conditions aux limites qui supposent que la zone de pression est limitée à la partie convergente du film (conditions de demi-Sommerfeld ou de Gumbel) :

$$\begin{cases} p(\theta, z = -L/2) = p(\theta, z = +L/2) = 0 \\ p(\theta, z) = 0 \quad \text{pour } \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{IV-35.})$$

Le champ de pression s'écrit :

$$p(\theta, z) = -\frac{3\mu V}{C^2 R} \left( z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \frac{\varepsilon_0 \sin \theta}{(1 + \varepsilon_0 \cos \theta)^3} \quad (\text{IV-36.})$$

Il est évident que la pression varie comme  $\sin \theta$  ; elle est positive pour  $\theta \in [0, \pi]$ . Pour obtenir la charge, **Ocvirk** et **Dubois** [40] utilisent les conditions aux limites de **Gumbel** (IV-35) :

- La charge :

$$W = \mu L V \left( \frac{L}{D} \right)^2 \left( \frac{R}{C} \right)^2 \frac{\varepsilon_0}{(1 - \varepsilon_0^2)^2} \left[ 16\varepsilon_0^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon_0^2) \right]^{1/2} \quad (\text{IV-37.})$$

- Le nombre de **Sommerfeld** :

$$S = \frac{1}{\left( \frac{L}{D} \right)^2} \frac{(1 - \varepsilon_0^2)^2}{\pi \varepsilon_0 \left[ 16\varepsilon_0^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon_0^2) \right]^{1/2}} \quad (\text{IV-38.})$$

- L'angle de calage :

$$\phi_0 = \text{Arctg} \left( \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}}{4 \varepsilon_0} \right) \quad (\text{IV-39.})$$

- Le couple de frottement sur l'arbre est donné par la relation :

$$C_a = \frac{\mu V R^2 L}{C} \frac{\pi(2 + \varepsilon_0)}{(1 + \varepsilon_0) \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}} \quad (\text{IV-40.})$$

- Le nombre de frottement sur l'arbre s'écrit :

$$f = \frac{R}{C} f_a = \frac{\pi^2 S (2 + \varepsilon_0)}{(1 + \varepsilon_0) \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}} \quad (\text{IV-41.})$$

- Le débit axial est :

$$Q_z = L C V \varepsilon_0 \quad (\text{IV-42.})$$

L'hypothèse du palier infiniment court est très utilisée en pratique, elle est d'autant plus précise que l'excentricité et le rapport  $L/D$  sont faibles.

## IV-7 HYPOTHESE DU PALIER INFINIMENT LONG

### IV-7.1. CAS DU PALIER INDEFORMABLE

Lorsque le rapport  $\frac{L}{D}$  de la longueur au diamètre du palier est grand  $\frac{L}{D} \rightarrow \infty$ , on peut négliger le débit axial. L'écoulement est donc purement circonférentiel. En pratique ce calcul s'applique aux paliers ayant des rapports  $\frac{L}{D} > 4$ .

En régime permanent, l'équation de **Reynolds** (IV-29.) se réduit à :

$$\frac{d}{d\theta} \left( h_0^3 \frac{dp}{d\theta} \right) = 6\mu_0 RV \frac{dh_0}{d\theta} \quad (\text{IV-43.})$$

avec  $V = \omega R$  qui est la vitesse linéaire de l'arbre.

dans le cas du palier indéformable

$$h_0(\theta) = C + e_0 \cos \theta$$

La solution de l'équation (IV-43.) est recherchée en effectuant le changement de variable de **Sommerfeld** [41] :

$$1 + \varepsilon_0 \cos \theta = \frac{1 - \varepsilon_0^2}{1 - \varepsilon_0 \cos \psi} \quad (\text{IV-44.})$$

tel que :  $\theta = 0$  ou  $2\pi$  correspond à  $\psi = 0$  ou  $2\pi$ .

Dans ces conditions, l'expression de la pression dans le film s'écrit :

$$p(\psi) = \frac{6\mu_0 RV}{C^2 (1 - \varepsilon_0^2)^{3/2}} \left[ \psi - \varepsilon_0 \sin \psi - \frac{2\psi - 4\varepsilon_0 \sin \psi + \varepsilon_0^2 \psi + \varepsilon_0^2 \sin \psi \cos \psi}{2(1 - \varepsilon_0 \cos \psi_s)} \right] \quad (\text{IV-45.})$$

avec  $\psi_s$  abscisse de rupture du film d'huile définie par la relation :

$$\varepsilon_0 (\sin \psi_s \cos \psi_s - \psi_s) + 2(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s) = 0 \quad (\text{IV-46.})$$

On remarque que  $\psi_s$  ne dépend que de l'excentricité relative  $\varepsilon_0$ . Les valeurs de  $\psi_s$  et  $\theta_s$  en fonction de  $\varepsilon_0$  sont reportées dans le tableau (IV-1.). La valeur de  $\psi_s$  qui annule l'équation non linéaire (IV-46.) est recherchée par une méthode type Régula-Falsi.

- Sur le coussinet

$$C_c = \frac{\mu_0 R^2 V}{C} \left[ \frac{2\pi + \varepsilon_0 (\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\sqrt{1 - \varepsilon_0^2} (1 - \varepsilon_0 \cos \psi_s)} \right] - \frac{C \varepsilon_0}{2} W \sin \phi_0 \quad (\text{IV-51.})$$

on remarque que

$$C_c = C_a - C \varepsilon_0 F_u \sin \phi \quad (\text{IV-52.})$$

Cette relation exprime l'équilibre du palier.

Le nombre de frottement relatif à l'arbre est donné par la relation :

$$f = \pi S \left[ \frac{2\pi + \varepsilon_0 (\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\sqrt{1 - \varepsilon_0^2} (1 - \varepsilon_0 \cos \psi_s)} \right] + \frac{\varepsilon_0}{2} \sin \phi_0 \quad (\text{IV-53.})$$

Pour les conditions aux limites choisies, l'angle de calage  $\phi_0$ , le nombre de frottement  $f$  et le nombre de **Sommerfeld**  $S$  ne sont fonction que de l'excentricité relative  $\varepsilon_0$ .

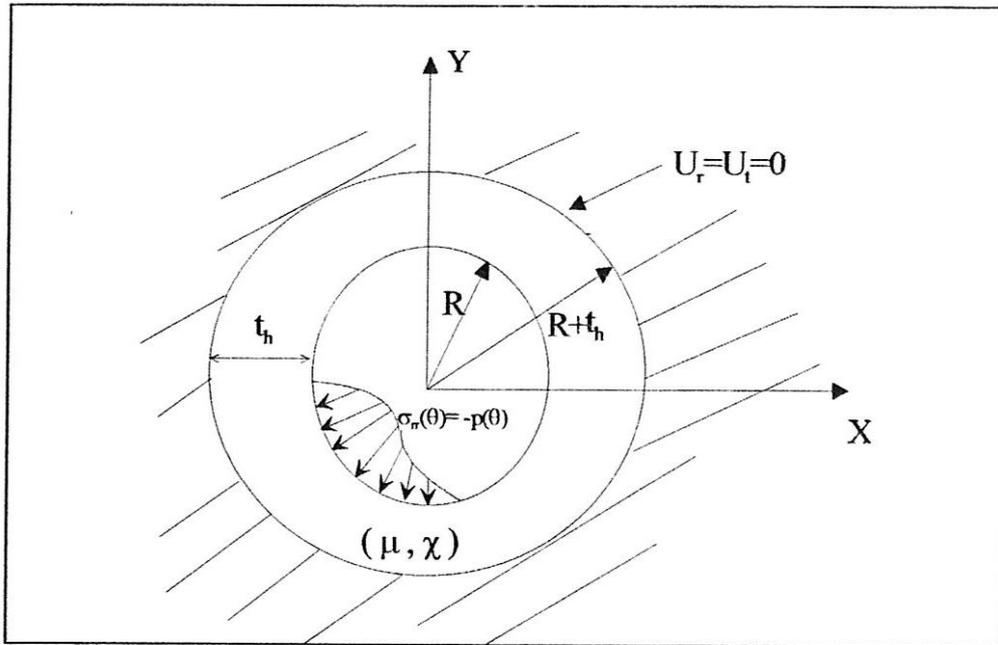
#### IV-7.2. CAS DEFORMABLE

Pour un coussinet muni d'un revêtement élastique encastré dans un milieu infiniment rigide figure IV-5, l'équation de **Reynolds** prend la forme suivante :

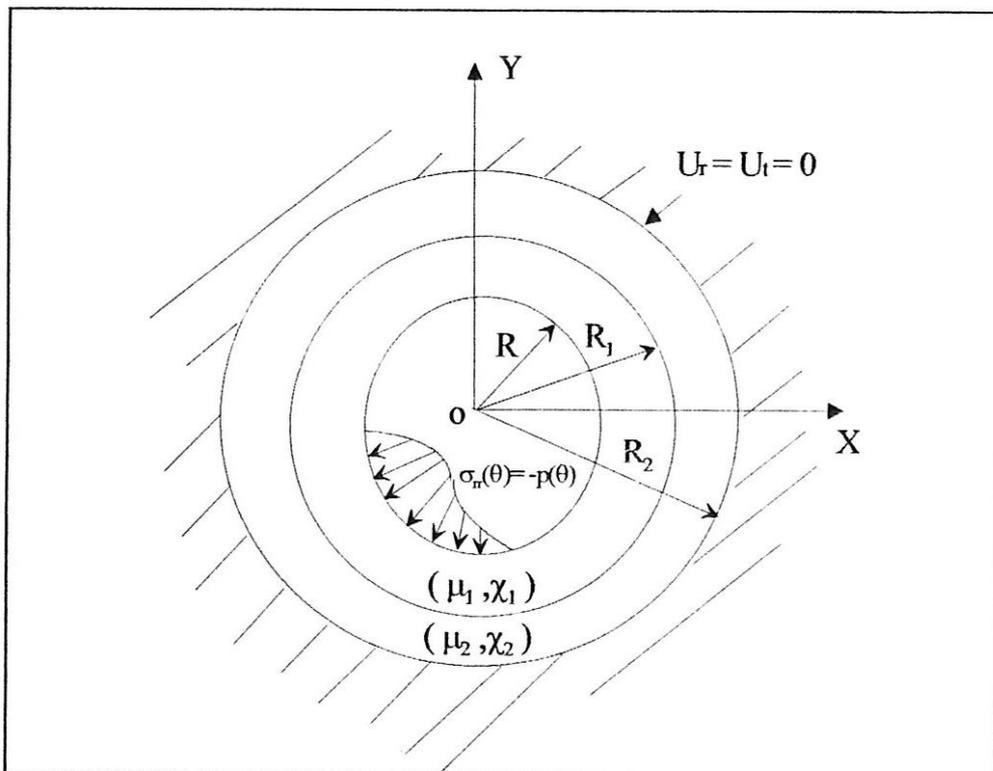
$$\frac{d}{d\theta} \left[ (h_0 + U_r)^3 \frac{dp}{d\theta} \right] = 6\mu_0 R V \frac{d(h_0 + U_r)}{d\theta} \quad (\text{IV-54.})$$

$U_r$  : étant le déplacement élastique radial à l'interface fluide-solide.

L'équation (IV-54.) est intégrée numériquement à l'aide de la méthode des différences finies centrées. Le système d'équations obtenu est résolu par méthode itérative de **Gauss-Seidel** avec coefficient de sur-relaxation dont la valeur est comprise entre 1 et 2.



a)



b)

**Fig. IV.5 : Schéma du coussinet**

a) Cas d'un revêtement élastique et d'un substrat rigide;

b) Cas de revêtement et de substrat élastiques.

## IV-8. EXPRESSIONS DES DEPLACEMENTS RADIAL ET TANGENTIEL

Le développement en séries de **Fourier** du déplacement complexe sur le cercle intérieur ( $r = R$ ) où  $R$  est le rayon du palier s'écrit :

$$\frac{2\mu}{R}(U_r(R, \theta) + iU_t(R, \theta)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k e^{ik\theta} \quad (\text{IV-55.})$$

L'expression (IV-55.) peut aussi s'écrire :

$$\frac{2\mu}{R}(U_r(R, \theta) + iU_t(R, \theta)) = U_0 + \sum_{k \geq 1} (U_k e^{ik\theta} + U_{-k} e^{-ik\theta}) \quad (\text{IV-56.})$$

$$\text{avec } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Les conditions aux limites sur le cercle extérieur sont :

$$U_r(R+t_h, \theta) + iU_t(R+t_h, \theta) = 0 \quad (\text{cas d'une couche élastique})$$

$$U_r(R_2, \theta) + iU_t(R_2, \theta) = 0 \quad (\text{cas de deux couches élastiques}) \quad (\text{IV-57.})$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

et les conditions aux limites sur le cercle intérieur sont connues sous forme de distributions discrètes de pressions. En tenant compte des conventions de signe sur la frontière du coussinet, on définit la contrainte complexe :

$$\sigma_r(R, \theta) - i\sigma_t(R, \theta) = -p(\theta) + i\tau(\theta) \quad (\text{IV-58.})$$

où :  $p$  et  $\tau$  sont respectivement la pression et la contrainte de cisaillement qu'exerce le fluide sur la paroi interne du coussinet. L'expression de la contrainte de cisaillement est donnée par la relation (IV-16.).

En lubrification hydrodynamique, la contribution de la contrainte de cisaillement à la modification de la géométrie du film est négligeable devant la pression. Dans ces conditions, la seule contrainte qui agit sur l'interface fluide-paroi est la contrainte radiale  $\sigma_r(R, \theta) = -p(\theta)$ .

### IV-8.1. CAS DUN PALIER MONOCOUCHE

#### a) méthode analytique :

Les coefficients complexes  $U_k$  et  $U_{-k}$  de l'équation (IV-56.) sont déterminés à partir des équations matricielles (II-90.) et (II-95.), et dans le cas où le cercle extérieur est rigide (figure IV-5) :

$$\begin{Bmatrix} U_k \\ U_{-k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_k & G_k \\ G_{-k} & H_{-k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_k \\ \sigma_{-k} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-59.})$$

avec

- pour  $k = 1$

$$\begin{cases} H_1 = H_{-1} = \frac{h^2 - 1}{1 + \chi h^4} \\ G_1 = \frac{\chi(1 - h^4)}{2(1 + \chi h^4)} \\ G_{-1} = \frac{2}{1 + \chi} \left[ \frac{(1 - h^2)^2}{1 + \chi h^4} - \chi \ln(h) \right] \end{cases}$$

- pour  $k \neq 1$

$$\begin{cases} H_k = H_{-k} = \frac{(1 - h^2)(1 + \chi)}{\Delta M_k} \\ G_k = \frac{-\frac{1}{k+1} \left[ (1 - k^2)(h^2 - 1)^2 + \chi(1 - h^{2+2k})(1 + \chi h^{2-2k}) \right]}{\Delta M_k} \\ G_{-k} = \frac{-\frac{1}{1-k} \left[ (1 - k^2)(h^2 - 1)^2 + \chi(1 - h^{2-2k})(1 + \chi h^{2+2k}) \right]}{\Delta M_k} \end{cases}$$

avec

$$\Delta M_k = (1 - k^2)(1 - h^2)^2 - (1 + \chi h^{2-2k})(1 + \chi h^{2+2k}); \quad \Delta M_k \neq 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

et  $h = 1 + \frac{t_h}{R}$

Puisque  $\sigma_r(R, \theta)$  est une fonction réelle, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_k(R, \theta) = \overline{\sigma_{-k}(R, \theta)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_r(R, \theta) e^{ik\theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) e^{ik\theta} d\theta \end{aligned} \quad (\text{IV-60.})$$

Avec ces notations, nous obtenons pour les déplacements  $U_r(R, \theta)$  et  $U_t(R, \theta)$  les séries :

$$\frac{2\mu}{R} U_r(R, \theta) = \Re_e \left\{ (H_0 + G_0) \sigma_0 + \sum_{k \geq 1} \left[ (H_k + G_k) \sigma_k e^{ik\theta} + (H_{-k} + G_{-k}) \overline{\sigma_k} e^{-ik\theta} \right] \right\} \quad (\text{IV-61.})$$

$$\frac{2\mu}{R} U_t(R, \theta) = \Im_m \left\{ (H_0 + G_0) \sigma_0 + \sum_{k \geq 1} \left[ (H_k + G_k) \sigma_k e^{ik\theta} + (H_{-k} + G_{-k}) \overline{\sigma_k} e^{-ik\theta} \right] \right\} \quad (\text{IV-62.})$$

où  $\Re$  et  $\Im$  désignent les parties réelles et imaginaires.

En variables adimensionnées, les séries (IV-61.) et (IV-62.) peuvent s'écrire :

$$\overline{U_r}(R, \theta) = (1 + \nu) \overline{C_d} \Re_e \left\{ (H_0 + G_0) \sigma_0^* + \sum_{k \geq 1} \left[ (H_k + G_k) \sigma_k^* e^{ik\theta} + (H_{-k} + G_{-k}) \overline{\sigma_k^*} e^{-ik\theta} \right] \right\} \quad (\text{IV-63.})$$

$$\overline{U_t}(R, \theta) = (1 + \nu) \overline{C_d} \Im_m \left\{ (H_0 + G_0) \sigma_0^* + \sum_{k \geq 1} \left[ (H_k + G_k) \sigma_k^* e^{ik\theta} + (H_{-k} + G_{-k}) \overline{\sigma_k^*} e^{-ik\theta} \right] \right\} \quad (\text{IV-64.})$$

avec 
$$\left( \overline{U_r}, \overline{U_t} \right) = \frac{(U_r, U_t)}{C} \quad \text{et} \quad \sigma_k^* = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{ik\theta} d\theta$$

$P$  étant la pression sans dimension tel que 
$$P = \frac{P}{\mu\omega \left( \frac{R}{C} \right)^2}.$$

Les coefficients de **Fourier** complexes  $\sigma_k$  sont évalués numériquement à l'aide des relations (IV-60.) en utilisant la méthode des trapèzes.

$\overline{C_d}$  est le coefficient de déformation adimensionné, il s'exprime par: 
$$\overline{C_d} = \frac{\mu\omega}{E} \left( \frac{R}{C} \right)^3,$$
  
 $0 \leq \overline{C_d} < \infty$

$C$  étant le jeu radial du palier,  $E$  et  $\nu$  sont le module **d'Young** et le coefficient de **Poisson** du matériau.

On remarque que lorsque  $E = \infty$  (théorie du palier rigide), le coefficient  $\overline{C_d}$  prend alors la valeur zéro.

• b)-modèle de la couche mince

Ce modèle est utilisé pour le calcul du champ de déplacement radial dans le cas où l'épaisseur de la couche élastique est très faible devant le rayon du palier, c'est -à-dire  $\frac{t_h}{R} \rightarrow 0$ .

Dans le cas d'un palier infiniment long et pour un état de déformations planes, **M. Lahmar** [19] a montré que les expressions des déplacements radial et tangentiel prennent la forme :

$$\begin{cases} U_r = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \frac{t_h}{E} p(\theta) \\ U_t = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-65.})$$

Soit en variables adimensionnées :

$$\overline{U_r} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \overline{C_d} \frac{t_h}{R} P(\theta) \quad (\text{IV-66.})$$

## IV-7.2. CAS DUN PALIER MULTICOUCHES

Les séries (IV-61. ) et (IV-62.) peuvent aussi être utilisées pour calculer les déplacements à l'interface revêtement-fluide figure ( IV-5. ).

Les expressions de  $H_k$ ,  $H_{-k}$ ,  $G_k$ , et  $G_{-k}$  sont données par :

$$\begin{bmatrix} H_k & G_k \\ G_{-k} & H_{-k} \end{bmatrix} = [G_{1,k}] + [G_{2,k}] [G_{2,k}^{n-1}] [F_{1,k}] \quad (\text{IV-67.})$$

Les matrices  $G_{1,k}$ ,  $G_{2,k}$ ,  $G_{2,k}^{n-1}$  et  $F_{1,k}$  sont définies dans le chapitre précédent dans le cas du problème mixte.

## IV-9. COUPLAGE STRUCTURE-FLUIDE

La figure (IV-6.) présente sous forme d'un organigramme l'algorithme de résolution du problème élasto-hydrodynamique (EHD) gouverné par l'équation (IV-54.) dans le cas de l'approche semi-analytique.

Pour une géométrie initiale (parfaitement cylindrique), on calcule le champ de pression par discrétisation de l'équation (IV-54.) puis le champ de déplacement élastique du revêtement. Ce dernier modifie la forme du contact qui n'est plus cylindrique. Une nouvelle répartition de pression est alors calculée, le processus se poursuit jusqu'à stabilisation de la déformation, ce qui se traduit numériquement par l'obtention de deux champs de déplacement ou de pression consécutifs suffisamment proches.

Pour assurer la convergence du processus itératif, les déplacements calculés sont pondérés avant d'être utilisés dans la partie hydrodynamique. L'algorithme de sous-relaxation s'écrit :

$$\begin{cases} U_r^{n+1} = \Omega U_r^{n+1} + (1 - \Omega) U_r^n \\ h^{n+1} = h_0 + U_r^{n+1} \end{cases} \quad (\text{IV-68.})$$

où :

$U_r^{n+1}$  et  $U_r^n$  sont respectivement les déplacements aux itérations  $(n+1)$  et  $n$ ,  $\Omega$  est le coefficient de sous-relaxation dont la valeur est comprise entre 0 et 1.

Le problème réside dans la détermination de la valeur optimale de  $\Omega$  optimum pour la quelle la convergence s'obtient plus rapidement.

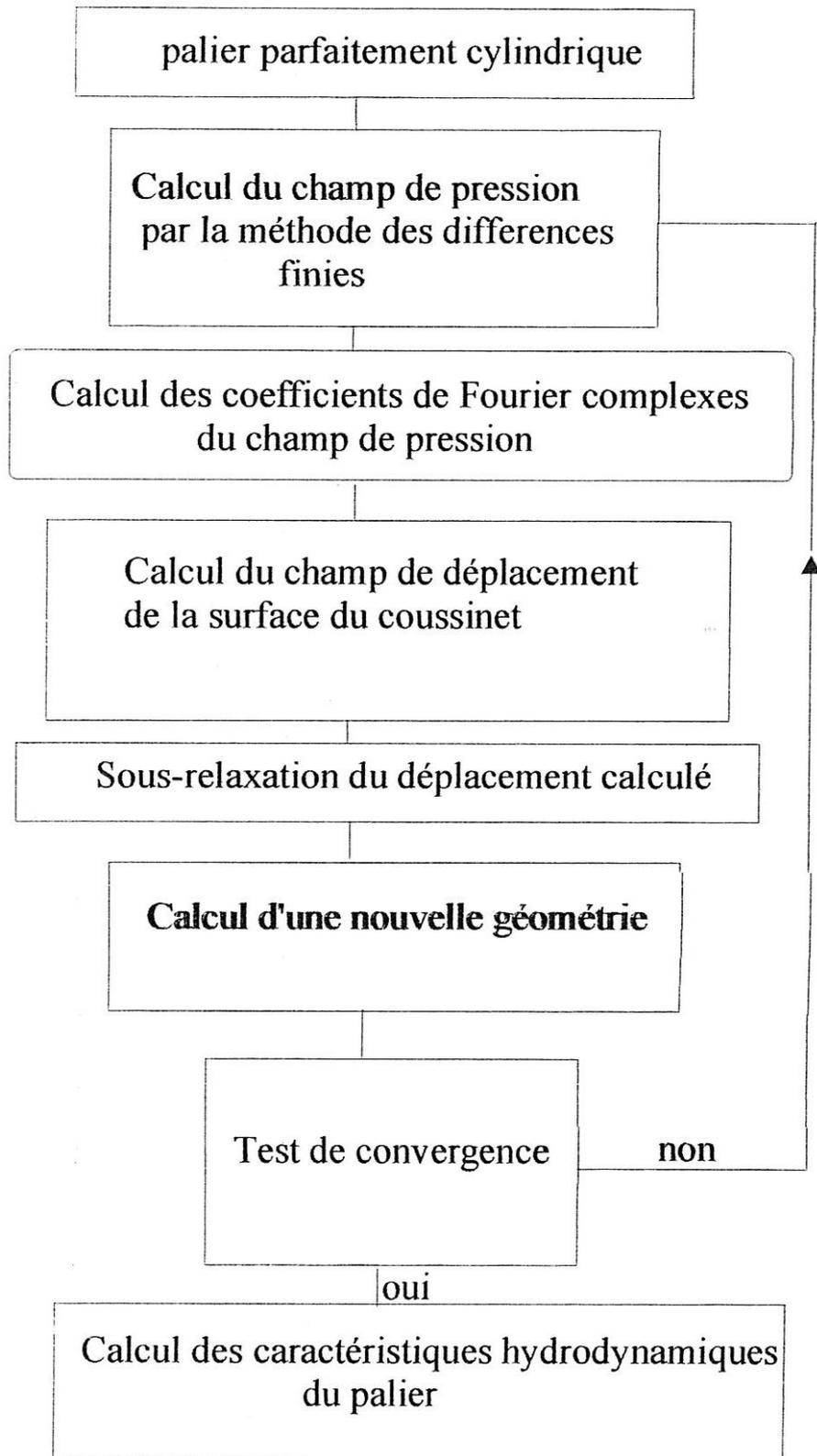
La nécessité d'appliquer un algorithme de sous-relaxation pour relier les deux parties du programme (EHD) provient du fait que le problème est fortement non linéaire; les déplacements engendrés par le champ de pression dans le film sont parfois supérieurs à l'épaisseur supposée du film, qui intervient à une puissance cubique dans l'équation de **Reynolds** (IV-54.). Une faible variation de l'épaisseur du film peut donc induire une modification considérable de la pression hydrodynamique.

Le test d'arrêt du processus itératif est défini par :

$$\frac{1}{N_p} \left| \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{P_i^{k+1}} \right| \leq 10^{-5} \quad (\text{IV-69.})$$

où :

$N_p$  est le nombre total de points pour les quels la valeur de pression est positive.



**Fig IV.6.** : Couplage structure-fluide

## 10 COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES PALIERS LISSES : MODELISATION LINEAIRE

Le rotor d'une machine tournante est un élément très important dont le rôle est de transmettre ou de transformer de la puissance. Il est de réalisation fort complexe et comporte divers éléments tels que des engrenages ou des roues de turbines par exemple. Dans un grand nombre d'applications, il est supporté par des paliers qui ne doivent pas être considérés comme des éléments passifs mais comme des éléments qui interviennent sur le comportement dynamique de la ligne d'arbre, c'est-à-dire sur ses vitesses critiques et sa stabilité.

### IV-10.1. MODÉLISATION DU FILM LUBRIFIANT

Dans l'analyse dynamique d'une ligne d'arbre de machine tournante, le comportement du palier est gouverné par les forces hydrodynamiques engendrées par le film lubrifiant et qui s'opposent au mouvement de l'arbre. Dans le cas générale, celles-ci sont obtenues par intégration du champ de pression calculé à partir de l'équation de **Reynolds** écrite en régime dynamique. Ces forces étant des fonctions non linéaires de la position et de la vitesse du centre de l'arbre. L'analyse exacte d'un système rotor-paliers est donc très complexe puisqu'elle nécessite la résolution simultanée des équations relatives au mouvement du rotor et l'équation relative au comportement hydrodynamique de chaque palier.

Cette étude peut néanmoins être largement simplifiée si on suppose le rotor parfaitement rigide et si on se limite aux petits déplacements  $x, y$  et des petites vitesses de déplacements  $\dot{x}, \dot{y}$  au voisinage d'une position d'équilibre statique  $O_{as}$  (figure IV-7. ).

Les composantes de la portance hydrodynamique  $\vec{F}$  peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{cases} F_x = F_{x0} + a_{xx}x + a_{xy}y + b_{xx}\dot{x} + b_{xy}\dot{y} \\ F_y = F_{y0} + a_{yx}x + a_{yy}y + b_{yx}\dot{x} + b_{yy}\dot{y} \end{cases} \quad (\text{IV-70.})$$

où

$F_x$  et  $F_y$  représentent les composantes vertical et horizontal de l'action du fluide sur le rotor.

$F_{x0}$  et  $F_{y0}$  représentent les composantes de l'action du fluide sur l'arbre au voisinage de la position d'équilibre statique  $x_0, y_0$ .

$a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont respectivement les coefficients de raideur et d'amortissement du film, ils s'expriment par :

$$a_{ij} = -\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{O_{as}} \quad ; \quad b_{ij} = -\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j}\right)_{O_{as}} \quad (i, j) = (x, y) \quad (\text{IV-71.})$$

Notons que l'existence de termes croisés traduit le fait que dans un palier fluide, la résultante hydrodynamique n'est pas colinéaire au déplacement.

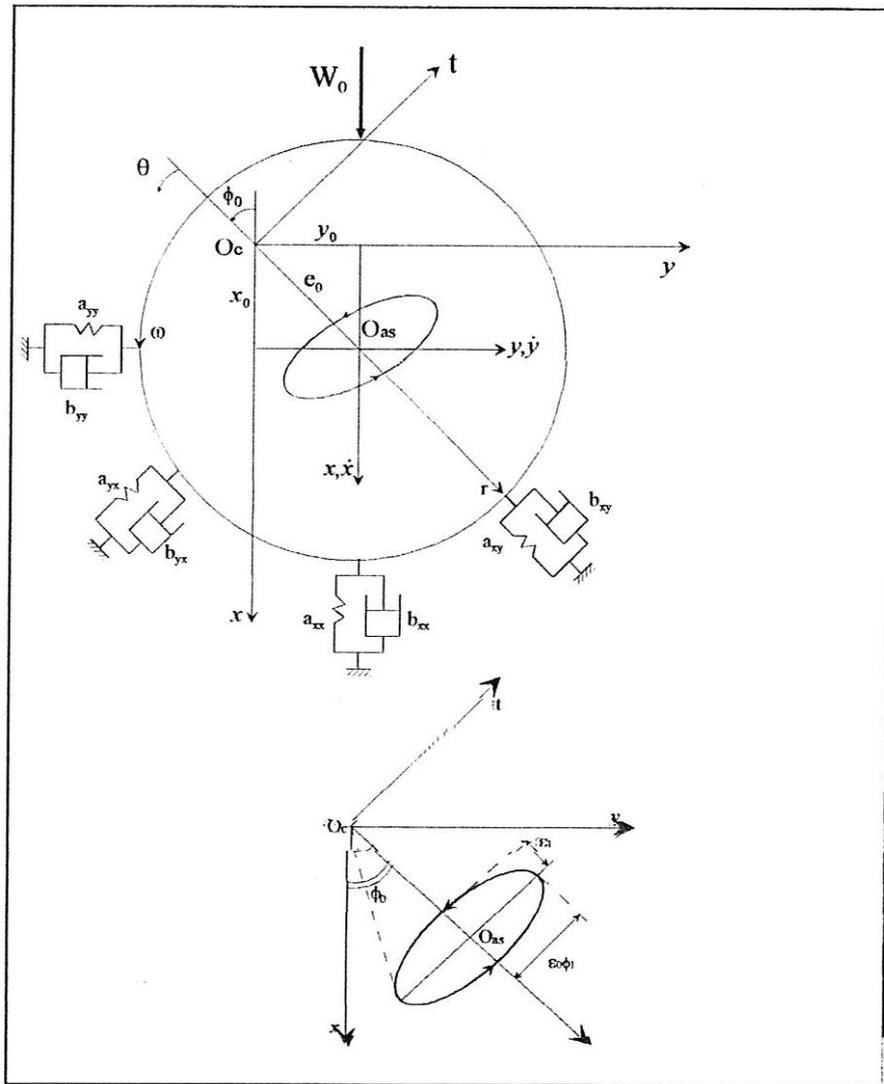


Fig.IV.7. :Modélisation linéaire du film

#### IV-10.2. CALCUL DES COEFFICIENTS DYNAMIQUES‡: METHODE DE PERTUBATION

Les coefficients dynamiques peuvent être calculés dans n'importe quel repère. Si pour l'analyse vibratoire d'un rotor, on travaille habituellement dans le repère fixe  $(O_c, x, y, z)$ , le calcul des coefficients dynamiques d'un palier est plus simple dans le repère intermédiaire  $(O_c, r, \phi, z)$  figure (IV-7).

Dans le repère intermédiaire, la position du centre de l'arbre est donnée par :

$$\overline{OO_a} = e\vec{r}$$

et sa vitesse par :

$$\vec{V}(O_a) = \dot{e}\vec{r} + e\dot{\phi}\vec{\phi}$$

Pour calculer les coefficients dynamiques, la prise en compte dans le second membre de l'équation de **Reynolds** du terme transitoire  $\frac{\partial H}{\partial \tau}$  est nécessaire :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ H^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] = 6 \frac{\partial H}{\partial \theta} + 12 \frac{\partial H}{\partial \tau} \quad (\text{IV-72.})$$

avec :

$$H = \frac{h}{C}, \quad P = \frac{P}{\mu \omega \left( \frac{R}{C} \right)^2} \text{ et } \tau = \omega t \text{ qui est le temps sans dimension.}$$

Lorsque l'arbre est soumis à des vibrations harmoniques de faibles amplitudes au voisinage de la position d'équilibre statique  $O_{as}$  caractérisée par les paramètres  $\varepsilon_0$  et  $\phi_0$ . L'excentricité relative et l'angle de calage instantanés peuvent être exprimés par :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 e^{i\gamma\tau} \\ \phi &= \phi_0 + \phi_1 e^{i\gamma\tau} \end{aligned} \right\}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (\text{IV 73.})$$

où :

$\gamma$  est la fréquence d'excitation adimensionnée  $\left( \gamma = \frac{\nu}{\omega} \right)$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\phi_1$  sont respectivement les amplitudes de perturbations de l'excentricité relative et de l'angle de calage.

Dans ces conditions, l'épaisseur du film s'écrit :

$$H = H_0 + H_1$$

avec : (IV-74.)

$$\left\{ \begin{aligned} H_0 &= 1 + \varepsilon_0 \cos \theta + \bar{U}_r \\ H_1 &= (\varepsilon_1 \cos \theta + \varepsilon_0 \phi_1 \sin \theta) e^{i\gamma\tau} \end{aligned} \right.$$

$H_0$  est l'épaisseur du film correspondant à la position d'équilibre statique incluant la déformation élastique statique du revêtement  $\bar{U}_r$ ,  $H_1$  est le déplacement du centre de l'arbre dû à la vibration.

Le mouvement du centre de l'arbre engendre une perturbation du champ de pression. Ce mouvement étant de faible amplitude, on peut écrire :

$$P = P_0 + (\varepsilon_1 P_\varepsilon + \varepsilon_0 \phi_1 P_\phi) e^{i\gamma\tau} \quad (\text{IV-75.})$$

$P_0$  représente le champ de pression sans dimension en régime statique,  $P_\varepsilon$  et  $P_\phi$  sont des pressions dynamiques complexes.

Le report des équations (IV-74.) et (IV-75.) dans l'équation de **Reynolds** (IV-72.) et la prise en compte des termes en  $\varepsilon_1$  et  $\phi_1$  du premier ordre conduit à un système de trois équations aux dérivées partielles :

Ordre zéro :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ H_0^3 \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right] = 6 \frac{\partial H_0}{\partial \theta} \quad (\text{IV-76.})$$

Ordre un :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ H_0^3 \frac{\partial P_\varepsilon}{\partial \theta} \right] = -6 \sin(\theta) + 12i\gamma \cos(\theta) - 18 \frac{\cos \theta}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial \theta} + 3H_0 \left[ H_0 \sin \theta + \frac{\partial H_0}{\partial \theta} \cos \theta \right] \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \quad (\text{IV-77.})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ H_0^3 \frac{\partial P_\phi}{\partial \theta} \right] = -6 \cos(\theta) + 12i\gamma \sin(\theta) - 18 \frac{\cos \theta}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial \theta} - 3H_0 \left[ H_0 \cos \theta + \frac{\partial H_0}{\partial \theta} \sin \theta \right] \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \quad (\text{IV-78.})$$

La méthode de perturbation permet de transformer l'équation de **Reynolds** en régime transitoire en un système de trois équations aux dérivées partielles couplées dont les inconnues sont la pression stationnaire  $P_0$  et les deux pressions dynamiques complexes  $P_\varepsilon$  et  $P_\phi$ .

Comme dans la résolution de l'équation de **Reynolds** en régime stationnaire, La méthode des différences finies est également utilisée pour l'intégration des équations d'ordre un (IV-77.) et (IV-78.).

Les coefficients dynamiques adimensionnés sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_{rr} + i\gamma B_{rr} &= - \int_0^{2\pi} P_\varepsilon \cos \theta \, d\theta \\ A_{tr} + i\gamma B_{tr} &= - \int_0^{2\pi} P_\varepsilon \sin \theta \, d\theta \\ A_{rt} + i\gamma B_{rt} &= - \int_0^{2\pi} P_\phi \cos \theta \, d\theta \\ A_{tt} + i\gamma B_{tt} &= - \int_0^{2\pi} P_\phi \sin \theta \, d\theta \end{aligned} \quad (\text{IV-79.})$$

où :

$$\begin{cases} A_{ij} = \frac{a_{ij}}{\mu \omega L \left( \frac{R}{C} \right)^3} \\ B_{ij} = \frac{b_{ij}}{\mu L \left( \frac{R}{C} \right)^3} \end{cases} \quad (i,j) = (r,t)$$

Les différentes intégrales sont évaluées à l'aide de la méthode des trapèzes.

Pour exprimer les coefficients dynamiques dans le repère fixe, il suffit d'utiliser les relations de transformation des composantes d'un tenseur du second ordre dans un changement de base, il vient :

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{rt} \\ A_{tr} & A_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & \sin \phi_0 \\ -\sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-80.})$$

et des relations similaires pour les coefficients d'amortissement.

Pour les coefficients dynamiques exprimés dans le repère fixe, nous avons adopté l'adimensionnement suivant :

$$\begin{cases} A_{ij} = a_{ij} \frac{C}{W_0} \\ B_{ij} = b_{ij} \frac{C\omega}{W_0} \end{cases} \quad (i, j) = (x, y) \quad (\text{IV-81.})$$

### 10.3. ETUDE DE LA STABILITÉ DYNAMIQUE DUN POINT DE FONCTIONNEMENT : CRITÈRE DE LUND [42]

L'étude de la stabilité d'une position d'équilibre est effectuée dans le cas d'un rotor infiniment rigide symétrique de masse  $2M$  supporté par deux paliers identiques dont la charge est  $2W_0$  figure (IV-8.).

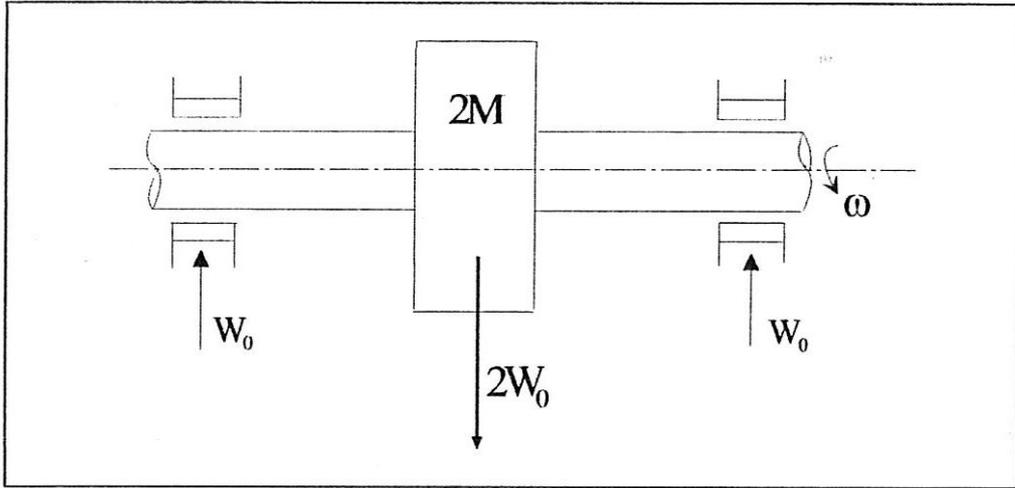
En vibrations libres, le système linéaire associé s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-82.})$$

où

$x$  et  $y$  sont les composantes, dans le repère fixe, du déplacement du centre de l'arbre à partir de la position d'équilibre statique  $O_{as}$ .

$$\bar{M} = \frac{MC\omega^2}{W_0} \quad ; \quad (X, Y) = \frac{(x, y)}{C} \quad ; \quad (X', Y') = \frac{(\dot{x}, \dot{y})}{C\omega} \quad ; \quad (X'', Y'') = \frac{(\ddot{x}, \ddot{y})}{C\omega^2}$$



**Fig IV.8.** Schématisation du rotor rigide pour l'analyse de stabilité

La solution de l'équation (IV-82.) est de la forme :

$$\begin{aligned} X &= \bar{X}e^{\lambda t} \\ Y &= \bar{Y}e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{IV-84.}$$

où

$\lambda = \eta + i\gamma$  est la valeur propre complexe.

Le signe du coefficient  $\eta$  permet de définir la stabilité du régime de fonctionnement du système rotor-palier.

lorsque  $\eta < 0$ , le régime est stable

lorsque  $\eta > 0$ , le régime est instable

Au seuil de stabilité ( amortissement structural  $\eta = 0$  ), le système (IV-82.) peut s'écrire sous la forme complexe suivante :

$$\begin{bmatrix} Z_{xx} - \bar{M}\gamma^2 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} - \bar{M}\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = 0 \tag{IV-84.}$$

Les  $Z_{ij}$  représentent les impédances complexes du palier :  $Z_{ij} = A_{ij} + i\gamma B_{ij}$  avec  $(i, j) = (x, y)$

Le système (IV-84.) admet une solution non-trivial lorsque le déterminant est nul. L'annulation des parties réelles et imaginaires permet de déterminer la fréquence d'instabilité adimensionnée  $\gamma_s = \frac{v_s}{\omega}$  et la masse critique sans dimension  $\bar{M}_c$  au delà de laquelle la position d'équilibre est instable.

Dans ces conditions  $\bar{M}_c$  et  $\gamma_s$  peuvent être exprimées en fonction des coefficients dynamiques du palier :

$$\gamma_s^2 = \frac{(A_{xx} - A_s)(A_{yy} - A_s) - A_{xy}A_{yx}}{B_{xx}B_{yy} - B_{xy}B_{yx}} \quad (\text{IV-85.})$$

$$\bar{M}_C = \frac{A_s}{\gamma_s^2} \quad (\text{IV-86.})$$

avec

$$A_s = \frac{A_{xx}B_{yy} + A_{yyx}B_{xx} - A_{xy}B_{yx} - A_{yx}B_{xy}}{B_{xx} + B_{yy}} \text{ qui est la raideur équivalente du palier.}$$

Notons qu'une valeur négative de  $\gamma_s^2$  signifie que le palier est stable.

D'autre part, si  $\gamma_s^2$  est positif, alors nous pouvons calculer la masse critique du système.

Pour une masse  $\bar{M}$  de l'arbre inférieure à la masse critique, le palier est stable. A l'inverse, pour une masse de l'arbre supérieure à la masse critique, le palier est instable.

La recherche de la frontière de stabilité se fait de façon itérative puisqu'il faut exciter le système à la fréquence de fouettement  $\gamma_s$ , qui est, à priori, inconnue.

#### IV-10.4. CALCUL DE LA TRAJECTOIRE DU CENTRE DE L'ARBRE

Dans le cas d'un balourd, la trajectoire du centre de l'arbre peut être obtenue analytiquement par intégration des équations linéaires du mouvement :

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \bar{M}\epsilon_b \begin{bmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-87.})$$

où :  $\epsilon_b = \frac{e_b}{C}$  est l'excentricité relative du balourd et  $\bar{M}$  la masse du rotor affectée au palier.

les composantes du déplacement du centre de l'arbre, solutions du système (IV-87.), sont données sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X = X_1 \cos(\tau) + X_2 \sin(\tau) \\ Y = Y_1 \cos(\tau) + Y_2 \sin(\tau) \end{cases} \quad (\text{IV-88.})$$

où les amplitudes adimensionnées  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$  et  $Y_2$  sont définies par la résolution du système suivant :

$$\begin{bmatrix} (A_{xx} - \bar{M}) & B_{xx} & A_{xy} & B_{xy} \\ -B_{xx} & (A_{xx} - \bar{M}) & -B_{xy} & A_{xy} \\ A_{yx} & B_{yx} & (A_{yy} - \bar{M}) & B_{yy} \\ -B_{yx} & A_{yx} & -B_{yy} & (A_{yy} - \bar{M}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}\epsilon_b \\ 0 \\ 0 \\ \bar{M}\epsilon_b \end{bmatrix} \quad (\text{IV-89.})$$

---

Dans le cas d'un balourd, l'orbite décrite par le centre de l'arbre est toujours de forme elliptique Figure (IV-7.).

Notons que dans le cadre de la théorie linéaire, la valeur de  $\epsilon_b$  ne doit pas excéder la valeur de 0.20. A partir de cette valeur limite, le comportement dynamique du système rotor-palier deviendra non-linéaire.

## V-11. CONCLUSION

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les différentes formes que peut prendre l'équation de la mécanique des films minces visqueux et l'équation géométrique du film pour un palier lisse rigide et déformable.

L'intégration de l'équation de la mécanique des films minces visqueux pour une position donnée de l'arbre dans le palier permet de calculer la répartition de pression qui existe en tout point du fluide en tenant compte du phénomène de cavitation ( rupture du film ). Un certain nombre de caractéristiques statiques et dynamiques tels que la portance hydrodynamique, la force de frottement s'en déduisent aisément. L'étude dynamique linéaire est effectuée en modélisant le film lubrifiant par huit coefficients dynamiques à savoir quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement. Le critère de stabilité de **Lund** est utilisé pour le calcul de la frontière de stabilité du système rotor-paliers.

La prise en considération les déformations élastiques du coussinet nécessite l'utilisation d'un processus de calcul itératif au cours duquel l'équation hydrodynamique et les équations de l'élasticité sont résolues successivement. Pour assurer la convergence du processus de calcul, un algorithme de sous-relaxation doit être utilisé.

## Chapitre V

### ETUDE DU COMPORTEMENT ELASTO-HYDRODYNAMIQUE DES PALIERS MONOCOUCHE ET MULTICOUCHE

#### V-1. INTRODUCTION

L'étude de l'influence des déformations élastiques sur les caractéristiques statiques des paliers lisses, soumis à une charge statique, a fait l'objet de plusieurs travaux tant théoriques qu'expérimentaux. Les premières constatations expérimentales ont été faites en 1964 par **Carl** [43] et se résument par :

- une augmentation de l'excentricité relative et de la longueur de la zone de pression ainsi que la pression aux bords du palier;
- une diminution de la pression maximale dans le plan médian du palier;
- un déplacement du point d'épaisseur minimale vers le point de pression maximale.

Depuis, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude théorique des effets des déformations élastiques sur le comportement des paliers en se basant sur les résultats expérimentaux de **Carl**.

En 1966, **Higginson** [44] étudie théoriquement l'influence des déformations élastiques sur les performances statiques d'un palier infiniment long  $\left(\frac{L}{D} \rightarrow \infty\right)$ . Le coussinet est constitué d'un tube élastique encastré dans un support rigide. Le fluide lubrifiant utilisé est isovisqueux et les déformations sont supposées proportionnelles à la pression dans le film.

Le même problème a été étudié par **O'Donoghue**, **Brighton** et **Hooke** [45], ces auteurs aboutissent à des constatations identiques à celles de **Carl**.

En 1967, les mêmes auteurs [46] ont publié dans le cas d'un palier de longueur finie des résultats théoriques et expérimentaux et montrent qu'il existe une bonne corrélation entre ces derniers. Les équations de l'élasticité sont résolues à l'aide d'un développement en double séries de **Fourier** de la pression hydrodynamique.

**Conway** et **Lee** [47] ont étudié le même problème proposé par **Higginson**. Ils se sont intéressés à l'effet de la variation de la viscosité avec la pression sur les caractéristiques statiques du palier tels que la portance hydrodynamique, le coefficient de frottement, l'angle de calage et l'abscisse de rupture du film. Ces auteurs utilisent une loi exponentielle pour exprimer la variation de la viscosité avec la pression.

---

**Jain, Sinhasan et Singh** [48] ont étudié par la méthode des éléments finis le problème élastohydrodynamique (EHD) d'un palier de longueur finie. Ils ont montré que dans le cas d'un revêtement mince  $\left(\frac{t_h}{R} \ll 1\right)$ , le champ de déplacement radial de la surface du coussinet, c'est-à-dire à l'interface fluide-revêtement, peut être calculé rapidement et avec une précision suffisante en utilisant le modèle élastique proposé par **Higginson** et repris par **Conway et Lee**.

Récemment plusieurs chercheurs [49, 50, 51] se sont intéressés à l'étude de l'influence des déformations élastiques sur les caractéristiques dynamiques et la stabilité d'un palier statiquement chargé. La modélisation linéaire est souvent utilisée.

A travers cette étude bibliographique, il est à remarquer que la plupart des études élastohydrodynamiques ont été effectuées dans le cas de paliers monocouches. Ces paliers sont généralement constitués d'un coussinet en bronze massif fixé dans un support rigide. En réalité, les paliers radiaux utilisés dans les machines modernes (turbines, moteurs, etc...) pour le guidage des arbres sont composés de matériaux de frottement multicouches où la première couche représente le revêtement et la seconde représente la bague en bronze ou en acier. L'ensemble revêtement-bague est fixé rigidement dans un support. Les revêtements utilisés dans les paliers peuvent être métalliques comme les métaux blancs à base de plomb et d'étain (régules ou babbitt) ou en polymères (Elastomères, caoutchoucs, P.T.F.E, etc...). Actuellement, les matériaux de frottement multicouches sont produits en bandes à partir desquelles on forme des demi-coussinets ou des bagues qui présentent une fente selon une génératrice (Fig. V-1.)

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'influence des déformations élastiques sur le comportement statique et dynamique des paliers monocouches et multicouches. La prise en considération des déformations élastiques nécessitent la résolution de deux problèmes l'un fluide et l'autre solide. La partie élastique est traitée à l'aide de l'approche analytique présentée dans les chapitres II et III tandis que la partie hydrodynamique, régie par l'équation de **Reynolds**, est traitée numériquement par la méthode des différences finies centrées. Le couplage entre ces deux parties est assurée à l'aide d'un processus itératif.

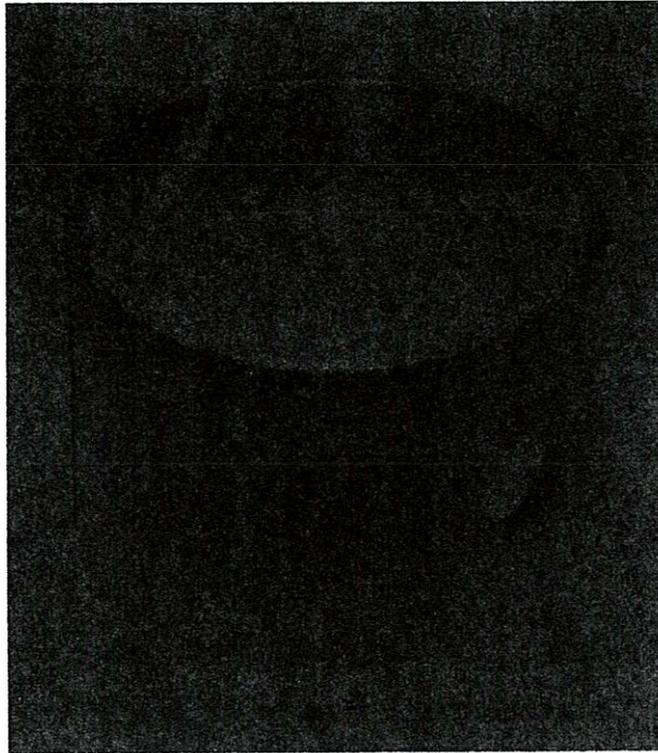


Fig. V.1 (a): Photographie du palier multicouches  
(Document de la Société Industrielle des Coussinets)

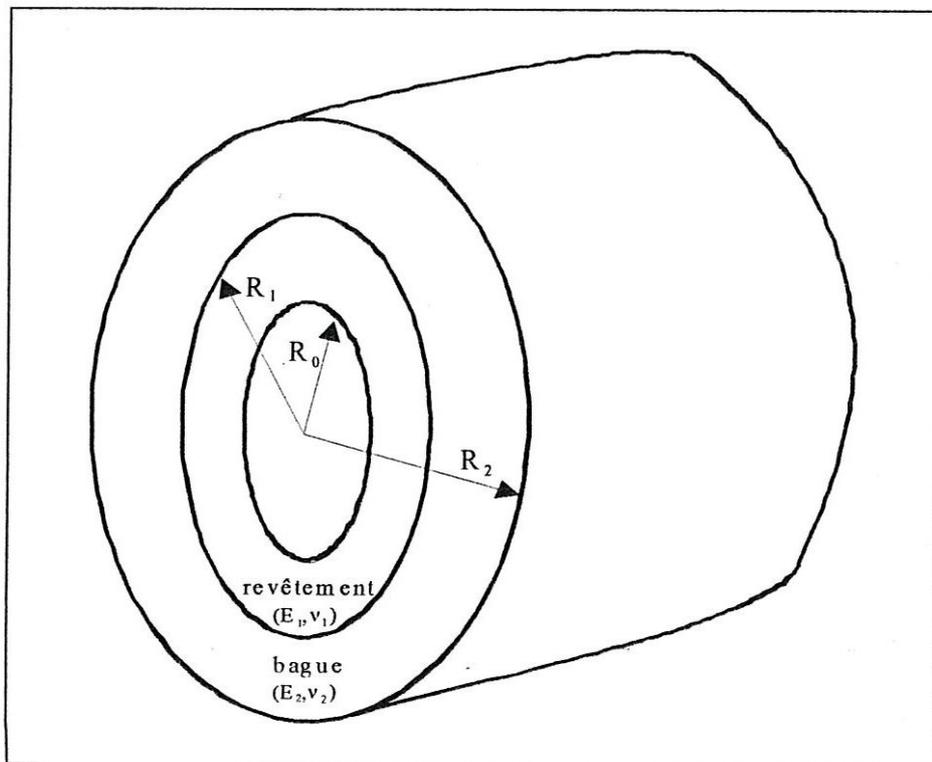


Fig. V.1 (b): Schématisation du palier multicouches

## V-2. VALIDATION DES APPROCHES ELASTOHYDRODYNAMIQUES

Dans ce paragraphe, nous allons vérifier les méthodes et les hypothèses (déformations planes) utilisées pour la résolution du problème élastohydrodynamique en régime isotherme. Les résultats obtenus sont comparés à ceux issus de la littérature dans le cas d'un palier infiniment long lubrifié avec un fluide piézovisqueux.

Les valeurs des caractéristiques hydrodynamiques, obtenues par la méthode semi-analytique et le modèle **couche mince** sont comparées à celles publiées par **Conway et Lee** [48]. Les caractéristiques du palier sont reportées dans le tableau V-1.

**Tableau V-1.** Caractéristiques du palier infiniment long

|   |                 |                        |
|---|-----------------|------------------------|
| - Rayon du palier                             | $R$             | 0.025 m                |
| - Jeu radial du palier                        | $C$             | $5.10^{-5}$ m          |
| - Epaisseur de la couche élastique            | $t_h$           | 0.010 m                |
| - Excentricité relative de l'arbre            | $\varepsilon_0$ | 0.75, sans dimension   |
| - Viscosité dynamique du lubrifiant           | $\mu_0$         | 0.030 Pa.s             |
| - coefficient de piézoviscosité du lubrifiant | $\alpha$        | 0.94 GPa <sup>-1</sup> |
| - vitesse de rotation de l'arbre              | $N$             | 3000 tr / min          |
| - Coefficient de Poisson des matériaux        | $\nu$           | 0.30, sans dimension   |
| - Modules d'Young des matériaux               | $E$             | 21, 210 GPa            |

Les tableaux V-2. et V-3. donnent respectivement les caractéristiques statiques dans le cas de fluide isovisqueux et piézovisqueux. L'accord entre les résultats est satisfaisant et confirme bien la validité du programme mis au point. Nous remarquons également une très bonne coïncidence entre les résultats obtenus par la méthode semi-analytique et le modèle de la couche mince.

**Tableau V-2.** Comparaison des caractéristiques statiques dans le cas d'un fluide isovisqueux

$$\varepsilon_0 = 0.75, \frac{L}{D} = \infty, \frac{t_h}{R} = 0.40, \nu = 0.30$$

a) Méthode semi-analytique

b) Modèle « couche mince »

c) Réf. [47]

| E (GPa)    | $\bar{C}d$ | $\theta_s$ (deg.) |     |       | $\phi_0$ (deg.) |       |       | $\bar{F}_u = F_u C^2 / \mu_0 \omega R^3$ |       |       |
|------------|------------|-------------------|-----|-------|-----------------|-------|-------|--|-------|-------|
|            |            | a                 | b   | c     | a               | b     | c     | a  | b     | c     |
| 21         | 0.05       | 219.7             | 219 | 219   | 41.02           | 41.32 | 41.08 | 10.32                                    | 10.47 | 10.35 |
| Cas rigide | 0.         | 203.4             | 204 | 203.4 | 45.93           | 45.90 | 45.93 | 12.46                                    | 12.47 | 12.46 |

**Tableau V-3.** Comparaison des caractéristiques statiques dans le cas d'un fluide piézovisqueux

$$\varepsilon_0 = 0.75, \frac{L}{D} = \infty, \frac{t_h}{R} = 0.40, E = 210 \text{ GPa } (\overline{C}_d = 0.005), \nu = 0.30$$

- a) Méthode semi-analytique
- b) Modèle « couche mince »
- c) Réf. [47]

| $\alpha(\text{GPa}^{-1})$ | $\theta_s$ (deg.) |     |     | $\phi_0$ (deg.) |       |       | $\overline{F} = F_u C^2 / \mu_0 \omega R^3$ |       |       |
|---------------------------|-------------------|-----|-----|-----------------|-------|-------|---|-------|-------|
| 0.                        | 205.8             | 207 | 207 | 45.06           | 45.01 | 44.90 | 12.25                                       | 12.31 | 12.31 |
| 9.4                       | 206.0             | 207 | 207 | 43.86           | 43.83 | 43.70 | 13.51                                       | 13.57 | 13.57 |
|                           | a                 | b   | c   | a               | b     | c     | a   | b     | c     |

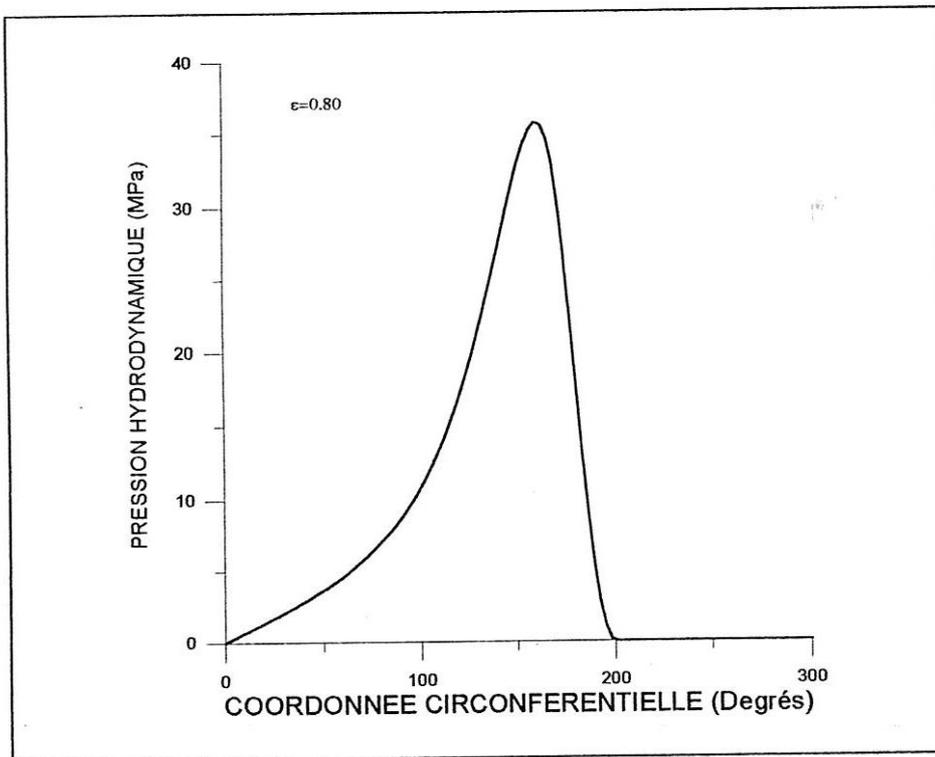
### V-3. VALIDATION DU MODELE COUCHE-MINCE

#### V-3.1. CALCUL DU DEPLACEMENT RADIAL $U_r$

Dans la relation (IV-65.), le déplacement radial d'un point appartenant à la surface du coussinet est supposé être proportionnel à la pression qui s'exerce en ce point et indépendant des actions exercées dans son voisinage. Nous avons comparé les solutions obtenues par la méthode semi-analytique et le modèle couche mince dans le cas d'une couronne circulaire déformable encastré dans un alésage rigide. Nous avons, pour cela, envisagé deux types de matériaux; l'un compressible (en bronze), l'autre incompressible (élastomère). Les caractéristiques géométriques et élastiques de la couronne sont données dans le tableau (V-4.) pour les deux types de matériaux. A la surface interne de la couronne s'exerce le champ de pression correspondant au cas du palier infiniment long pour une excentricité relative  $\varepsilon_0 = 0.80$  (Fig. V-2.)

**Tableau V-4. Caractéristiques géométriques et élastiques**

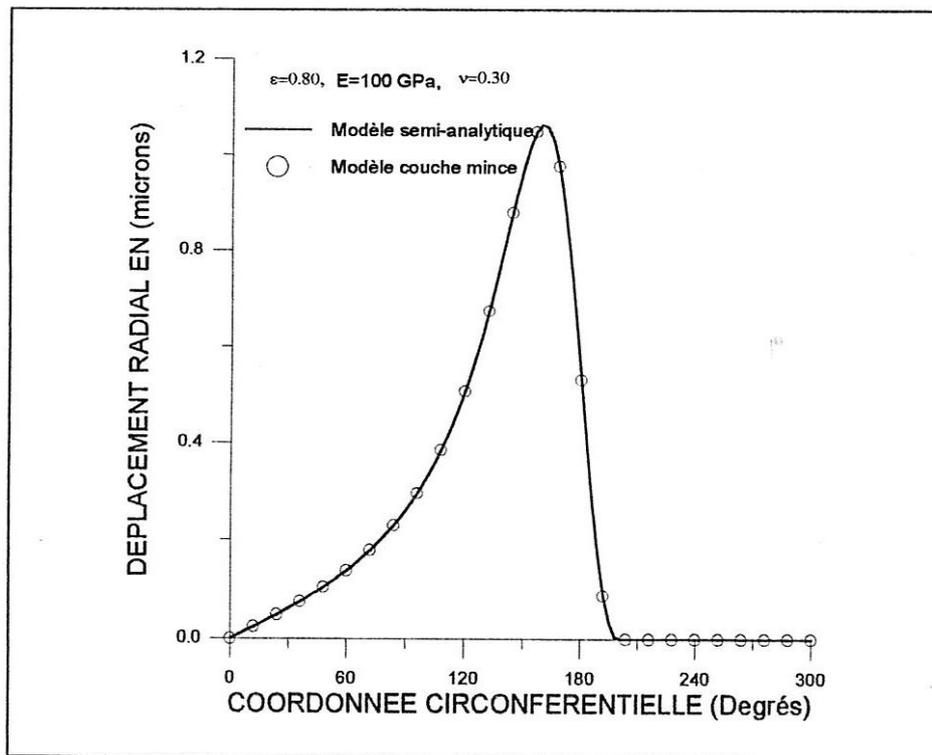
|   | couronne<br>en bronze | couronne<br>en élastomère |
|---|-----------------------|---------------------------|
| <b><u>Caractéristiques géométriques:</u></b>                      |                       |                           |
| - Rayon intérieur $R_1$   | 0.025 m               | 0.025 m                   |
| - Rayon extérieur $R_0$   | 0.029 m               | 0.029 m                   |
| - Epaisseur de la couronne, $t_h = R_0 - R_1$                     | $4.10^{-3} m$         | $4.10^{-3} m$             |
| <b><u>Caractéristiques élastiques:</u></b>                        |                       |                           |
| - Module d'Young, $E$   | 100 GPa               | 0.10 GPa                  |
| - Coefficient de Poisson, $\nu$                                   | 0.300                 | 0.490                     |
| - Module de Coulomb, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$                   | 38.5 GPa              | 0.0335 GPa                |
| - Facteur d'élasticité, $\chi = (3 - 4\nu)$ (déformations planes) | 1.8                   | 1.04                      |



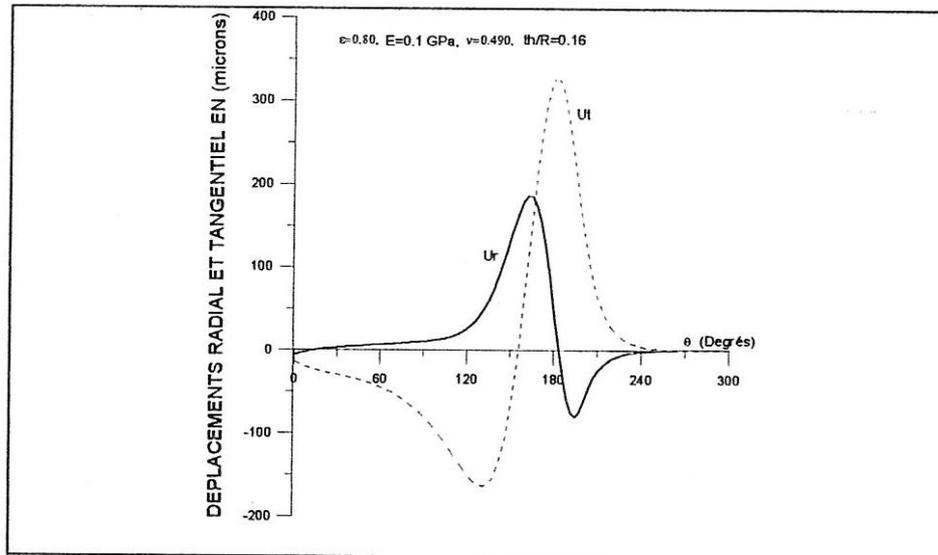
**Fig. V.2. Variation circonférentielle de la pression hydrodynamique avec prise en considération de la rupture du film (solution de Reynolds)**

Nous remarquons une très bonne coïncidence entre les valeurs du déplacement radial calculées par la méthode semi-analytique et le modèle « couche mince » pour la couronne élastique en bronze (matériau compressible,  $\nu = 0.30$ ) d'épaisseur relative  $\frac{t_h}{R} = 0.16$  (Fig. V-3.).

Cette remarque peut être étendue au cas de couronnes élastiques constituées de matériaux ayant de faibles valeurs du module d'élasticité tels que les métaux blancs, etc... Par contre, lorsque le matériau est quasi-incompressible (élastomère,  $\nu = 0.490$ ) les valeurs du déplacement radial calculées par les deux modèles élastiques sont différentes. Le modèle « couche mince » perd de son efficacité car il ne tient pas en considération l'effet de l'incompressibilité du matériau qui se caractérise par la formulation d'un bourrelet à la sortie du film (Fig. V-4.).



**Fig. V.3.** Comparaison du déplacement radial à l'interface fluide-solide calculé par le modèle semi-analytique et le modèle « couche mince » dans le cas d'un matériau compressible (bronze)



**Fig V.6.** Variations ciconférentielles des déplacements radial et tangentiel à l'interface fluide-solide pour un matériau quasi-incompressible

#### **V-4. ETUDE DE CAS CONCRETS**

Après avoir présenté les domaines de validité des différentes approches élastohydrodynamiques, nous allons appliquer ces approches à l'étude de cas concrets. Dans un premier temps, nous comparerons les résultats obtenus dans les cas d'un palier rigide ( $\overline{C}_a = 0$ ) et d'un palier déformable ( $\overline{C}_a \neq 0$ ) pour une excentricité imposée et nous étudierons l'influence du module d'Young et l'épaisseur relative du revêtement  $\frac{l_h}{R}$  sur les caractéristiques hydrodynamiques du palier.

##### **4.1. EFFETS DES DEFORMATIONS ELASTIQUES SUR LE CHAMP DE PRESSION ET LA GEOMETRIE DU FILM**

Dans ce paragraphe, nous allons comparer les caractéristiques hydrodynamiques d'un palier rigide à celles d'un palier déformable et montrer l'influence des déformations élastiques sur le champ de pression et la géométrie du film. Pour cela, nous avons choisi une excentricité relative de fonctionnement  $\varepsilon_0 = 0.80$  et des matériaux à faible module d'Young afin de bien mettre en évidence les effets des déformations sur le comportement du palier.

Les données de cette étude sont supposées indépendantes de la température de fonctionnement du palier et sont présentées dans le tableau V-5.

**Tableau V-5. Caractéristiques du palier long**

**Caractéristiques géométriques**

- Rayon de l'arbre 0.025 m
- Jeu radial  $5.10^{-5}$  m

**Conditions de fonctionnement**

- Vitesse de rotation de l'arbre 3000 tr / min
- Excentricité relative 0.80

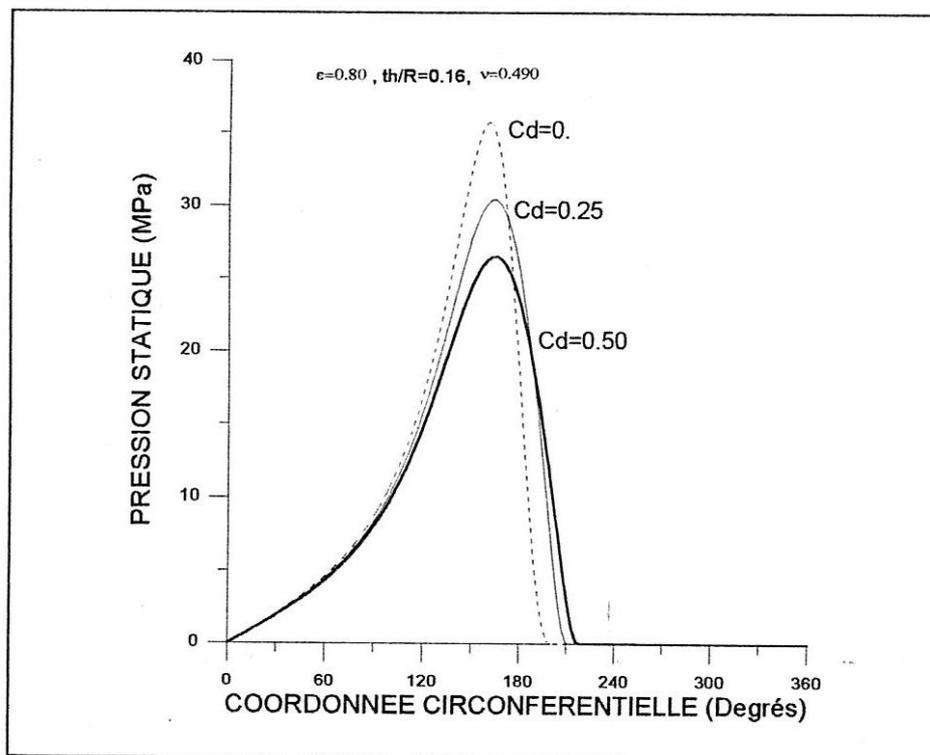
**Propriétés du lubrifiant**

- Viscosité dynamique 0.030 Pa..s
- Coefficient de piézoviscosité 0

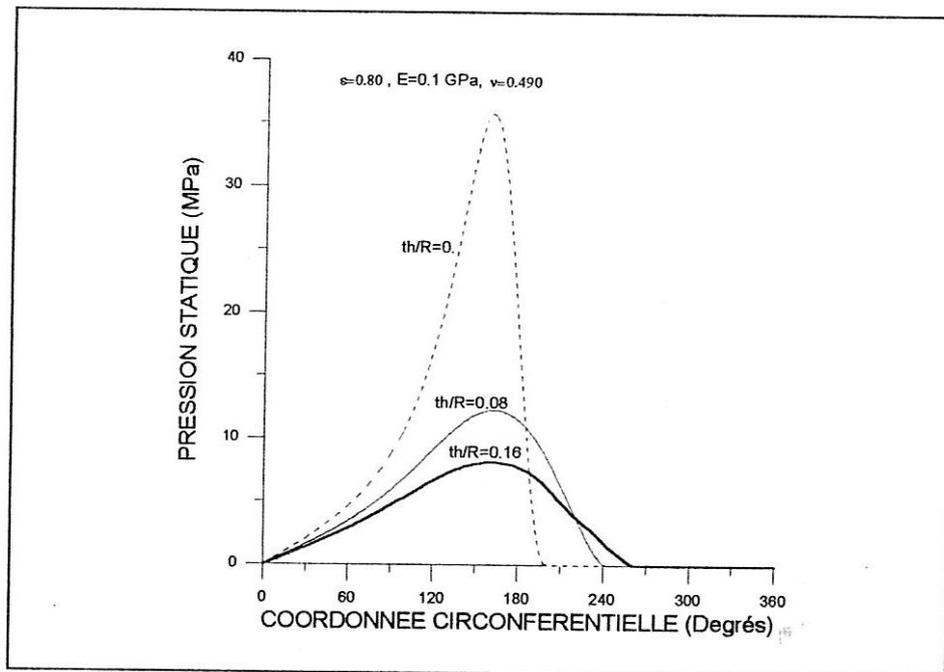
**V-4.1.1 INFLUENCE DU MODULE D'ELASTICITE ET DE L'EPAISSEUR DU REVETEMENT SUR LE CHAMP DE PRESSION**

Les figures V-7. représentent les courbes de pression dans une section du palier pour une excentricité  $\epsilon_0 = 0.80$ . La figure V-7(a) montre les variations circonférentielles de la pression pour trois valeurs du coefficient de déformation adimensionné ( $\bar{C}_d = 0., 0.25, 0.50$ ) correspondant respectivement à ( $E = \infty, 4.71, 2.355$  GPa). Le coefficient de Poisson a pour valeur  $\nu = 0.490$ .

La figure V-7(b) représente les variations circonférentielles de la pression pour trois valeurs de l'épaisseur relative du revêtement ( $\frac{t_h}{R} = 0., 2, 4mm$ ). Les valeurs nulles de  $\bar{C}_d$  et  $\frac{t_h}{R}$  correspondent au cas du palier rigide.



**Fig.V.7 (a) Variations circonférentielles du champ de pression pour différentes valeurs du coefficient de déformation  $\bar{C}_d$**

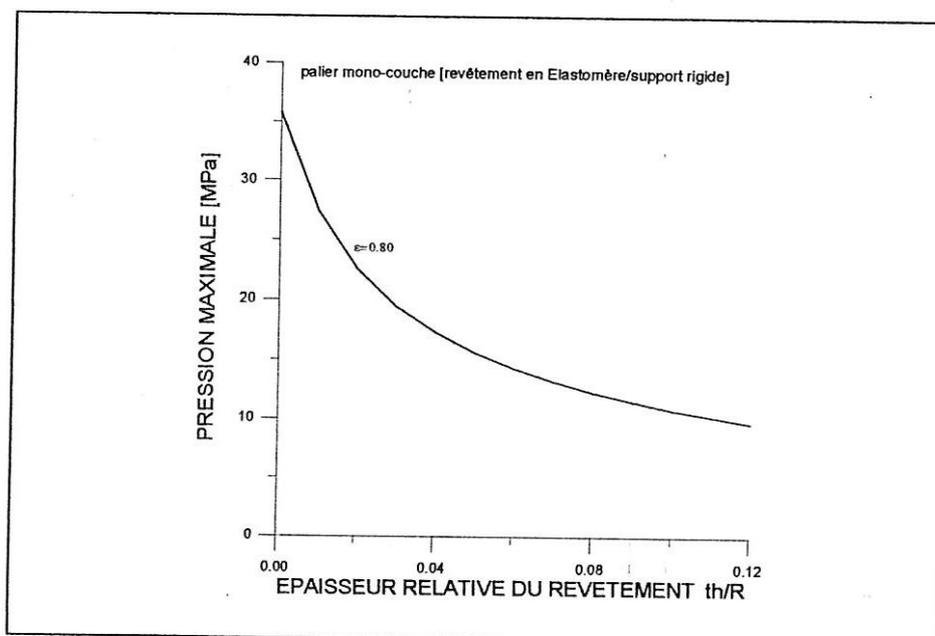


**Fig.V.7 (b)** Variations circonférentielles du champ de pression pour différentes valeurs de l'épaisseur relative du revêtement  $\frac{t_h}{R}$

D'après les figures V-7(a) et V-7(b), nous constatons un étalement de la courbe de pression (déplacement de l'angle de cavitation  $\theta_s$ ) selon la direction circonférentielle et une diminution très importante de la pression maximale surtout pour le cas:

- de revêtements élastiques dont l'épaisseur est importante;
- des matériaux de faibles valeurs du module d'élasticité.

Ces constatations sont mises en évidence par les figures V-8(a) et V-8(b) et le tableau V-6.



**Fig.V-8.(a)** Variation de la pression maximale en fonction de l'épaisseur relative du revêtement  $\frac{t_h}{R}$

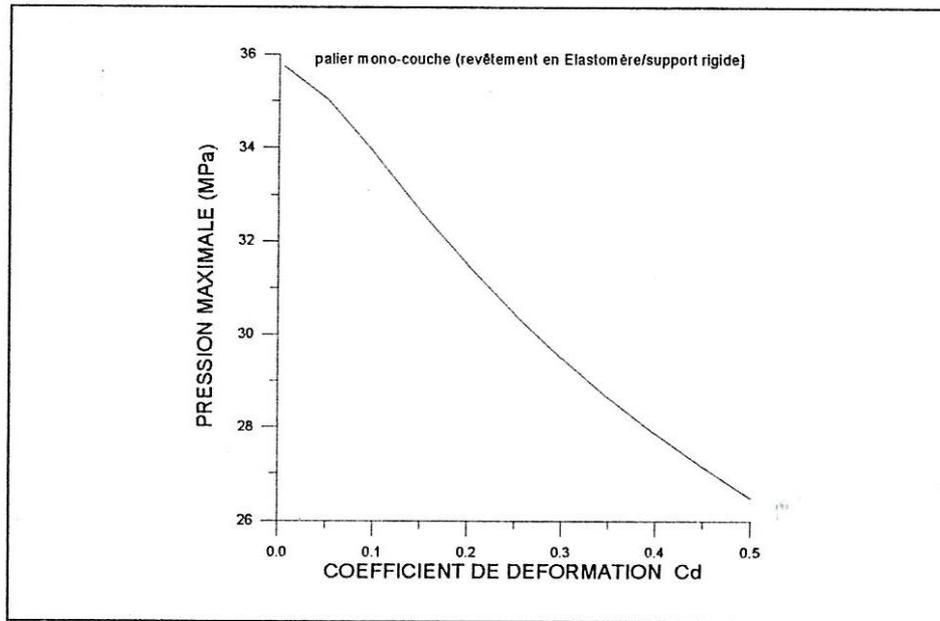


Fig.V-8.(b) Variation de la pression maximale en fonction du coefficient de déformation  $\overline{C_d}$

Tableau V-6 Valeurs de l'angle de cavitation  $\theta_s$  pour différentes valeurs de  $t_h/R$  et  $\overline{C_d}$

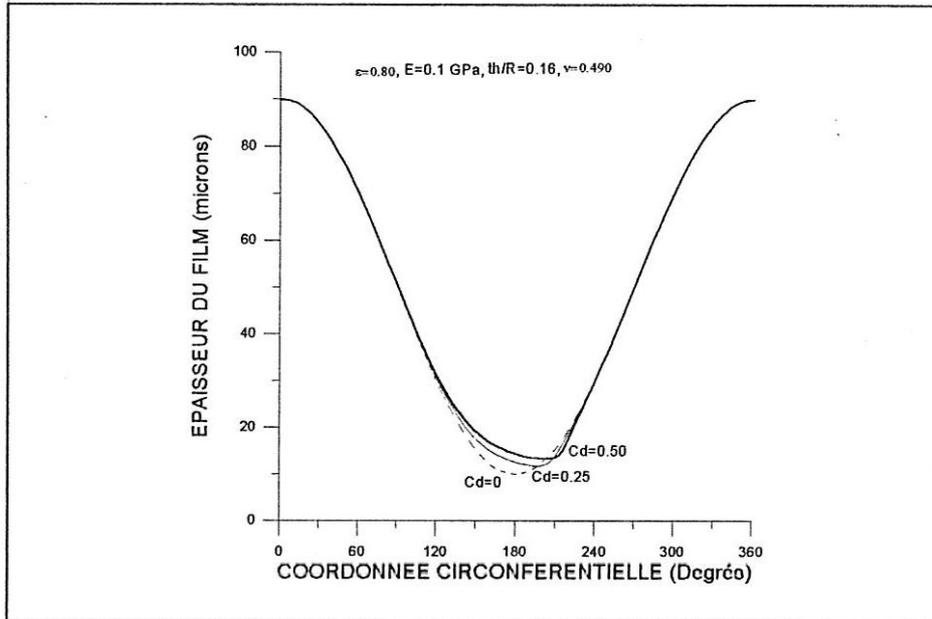
| $t_h/R$ | $\theta_s(deg.)$ | $\overline{C_d}$ | $\theta_s(deg.)$ |
|---------|------------------|------------------|------------------|
| 0       | 201              | 0                | 201              |
| 0.04    | 228              | 0.05             | 204              |
| 0.08    | 243              | 0.25             | 213              |
| 0.12    | 252              | 0.40             | 216              |
| 0.16    | 261              | 0.50             | 219              |

#### 4.1.2. INFLUENCE DU MODULE D'ELASTICITE ET DE L'ÉPAISSEUR DU REVÊTEMENT SUR LA GEOMETRIE DU FILM

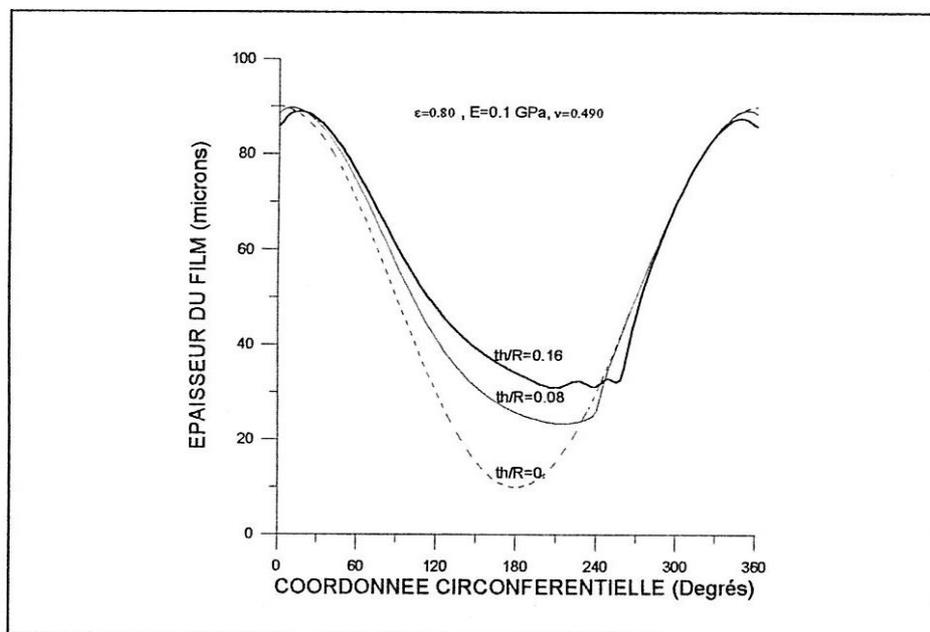
La variation circonférentielle de l'épaisseur du film dans une section du palier sont présentées sur les figures V-9 pour différentes valeurs du coefficient de déformation  $\overline{C_d}$  et de l'épaisseur relative du revêtement  $\frac{t_h}{R}$ . Dans le cas où les déformations élastiques sont ignorées, la géométrie du film, selon la direction circonférentielle, est de forme sinusoïdale dont la valeur minimale est située à  $\theta = 180^\circ$  (courbes en traits discontinus). Lorsque les déformations élastiques sont prises en considération, l'épaisseur du film change de géométrie.

D'après les figures V-9(a) et V-9(b), on constate une augmentation de l'épaisseur minimale du film et un déplacement de son abscisse. Ceci explique bien la chute de la pression maximale et l'étalement du champ de pression par rapport au cas rigide. Par rapport au cas du palier rigide, cette diminution peut atteindre 77 pour un revêtement élastique d'épaisseur

relative  $\frac{t_h}{R} = 0.16$  et 26 pour un revêtement en élastomère de module d'élasticité  $E = 2.355 \text{ GPa}$  ( $\bar{C}_d = 0.50$ ).



**Fig.V.9.(a)** Variations circonférentielles de l'épaisseur du film pour différentes valeurs du coefficient de déformation  $\bar{C}_d$



**Fig.V.9.(b)** Variations circonférentielles de l'épaisseur du film pour différentes valeurs de l'épaisseur relative du revêtement  $\frac{t_h}{R}$

## 4.2. INFLUENCE DU MODULE D'ELASTICITE ET DE L'EPAISSEUR DU REVETEMENT SUR LES CARACTERISTIQUES STATIQUES DU PALIER

### V-4.2.1 CAS DES PALIERS MONOCOUCHE

Les variations de la portance hydrodynamique unitaire adimensionnée  $\overline{F}_u$  et la force de frottement unitaire sans dimension  $\overline{T}_u$  en fonction du coefficient de déformation  $\overline{C}_d$  sont respectivement présentées sur les figures V-10 et V-11. Le coussinet est composé d'un revêtement en élastomère fixé dans un support infiniment rigide (palier monocouche). Les résultats sont présentés pour deux valeurs de l'épaisseur du revêtement  $t_h = 2 \text{ mm}$  (courbe en traits discontinus) et  $t_h = 4 \text{ mm}$  (courbe en traits continus).

Pour mettre en évidence les effets de l'élasticité des revêtements sur le comportement du palier, nous avons choisi une valeur de l'excentricité relative,  $\varepsilon_0$ , égale à 0.80 correspondant à une excentration,  $e_0$ , du centre de l'arbre par rapport au centre du coussinet égale à  $40 \mu\text{m}$ . Les valeurs de la force de frottement ont été obtenues en supposant que tout le palier est rempli de lubrifiant.

Les résultats obtenues montrent la capacité de charge du palier et la force de frottement due à l'action du fluide sur la surface de l'arbre diminuent sensiblement avec la flexibilité du matériau constituant les revêtements de surface. On note que pour un coefficient de déformation  $\overline{C}_d = 0.50$ , la diminution de la force de frottement varie de 6 pour une épaisseur de revêtement  $t_h = 2 \text{ mm}$  à 12 pour un revêtement d'épaisseur  $t_h = 4 \text{ mm}$ . Par conséquent, l'énergie dissipée dans le palier diminue avec l'épaisseur du revêtement.

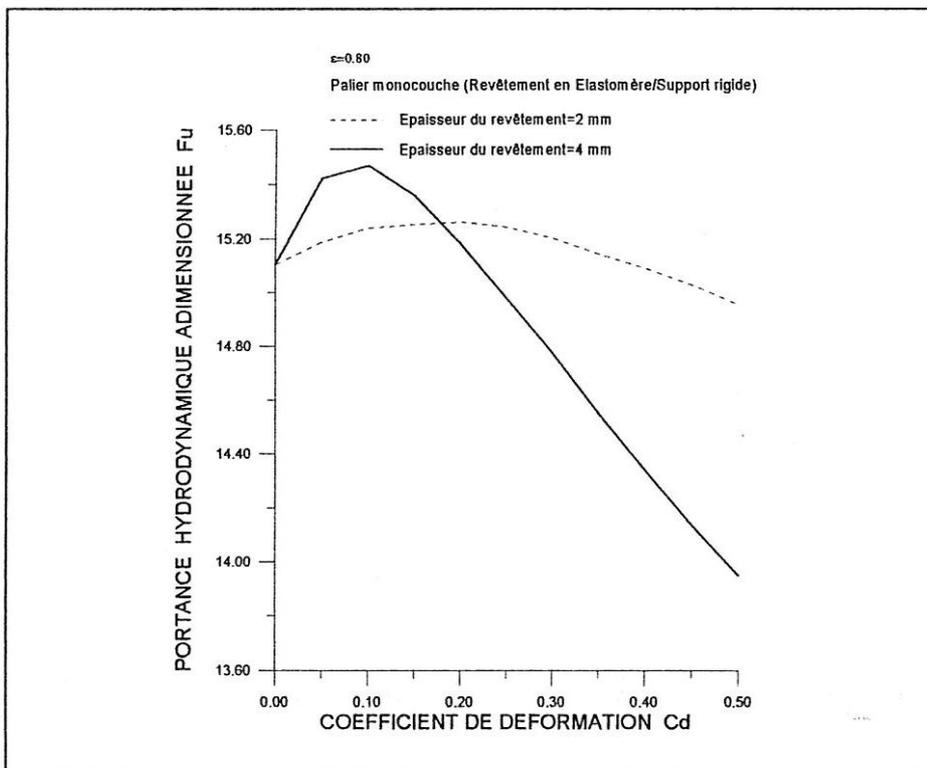


Fig. V-10. Variations de la portance hydrodynamique adimensionnée  $\overline{F}_u$  en fonction de coefficient de déformation  $\overline{C}_d$

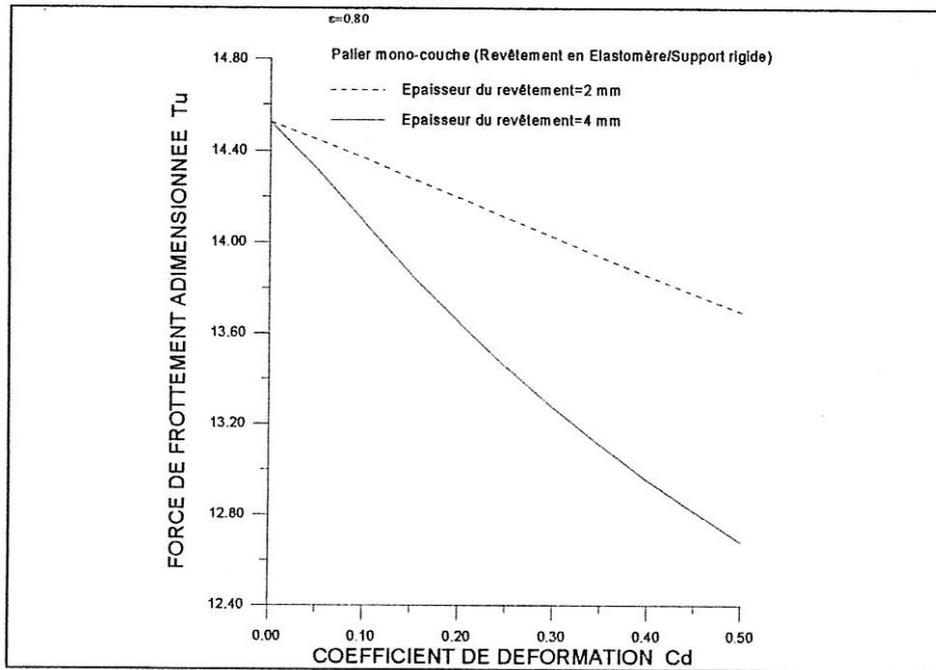


Fig. V-11. Variations de la force de frottement adimensionnée  $\bar{T}_u$  en fonction du coefficient de déformation  $\bar{C}_d$

#### V-4.2.2 CAS DES PALIERS MULTICOUCHES

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié les effets des déformations élastiques sur le comportement statique des paliers dont le coussinet est supposé être constitué d'une seule couche élastique (revêtement) encastrée dans un support rigide. Dans ce paragraphe, nous allons étudier le comportement des paliers réels utilisés dans l'industrie en considérant le coussinet comme étant composé d'un revêtement en élastomère fixé dans une bague déformable en acier ou en bronze figures V-1. Les caractéristiques géométriques et élastiques du revêtement et de la bague sont données dans le tableau V-7.

Tableau V-7. caractéristiques géométriques et élastiques du coussinet multicouches

|                 | Epaisseur (mm)   | Module d'élasticité<br>(GPa) | Coefficient de Poisson |
|-----------------|------------------|------------------------------|------------------------|
| revêtement      | $t_h = 2$ et $4$ | $E_1 = 0.1$                  | $\nu_1 = 0.49$         |
| Bague en bronze | 10               | $E_2 = 100$                  | $\nu_2 = 0.30$         |
| Bague en acier  | 10               | $E_2 = 210$                  | $\nu_2 = 0.30$         |

Sur les figures V-12 et V-13, nous comparons les variations de la capacité de charge du palier et la force de frottement en fonction de la flexibilité du revêtement dans le cas des paliers monocouche (revêtement élastique/bague indéformable) et multicouches (revêtement élastique/bague déformable) pour deux valeurs de l'épaisseur du revêtement  $t_h = 2$  et  $4 \text{ mm}$ . Les courbes en traits discontinus représentent les résultats obtenus pour le palier monocouche pour une excentricité relative imposée  $\varepsilon_0 = 0.80$ . La prise en considération de l'élasticité de la bague entraîne des écarts très importants entre les résultats obtenus dans le cas de l'utilisation des modèles de paliers monocouche et multicouches (Cf. tableaux V-8 et V-9). On remarque d'autre part que ces écarts sont importants même pour les faibles valeurs du coefficient de déformation  $\overline{C}_d$  du revêtement. D'après les résultats obtenus, on doit conclure que la prise en considération de l'élasticité du revêtement et de la bague est nécessaire pour le dimensionnement et la conception des paliers lisses revêtus.

**Tableau V-8.** Comparaison des valeurs de  $\overline{F}_u$  des paliers monocouche pour  $\overline{C}_d=0.5$  et  $t_h = 2 \text{ mm}$

|                  | palier monocouche | palier multicouches |            |                 |            |
|------------------|-------------------|---------------------|------------|-----------------|------------|
|                  |                   | bague en acier      | écart en % | bague en bronze | écart en % |
| $\overline{F}_u$ | 14.953            | 14.358              | 4          | 13.788          | 8          |
| $\overline{T}_u$ | 13.691            | 13.216              | 4          | 12.913          | 6          |

**Tableau V-9.** Comparaison des valeurs de  $\overline{F}_u$  des paliers monocouche pour  $\overline{C}_d=0.5$  et  $t_h = 4 \text{ mm}$

|                  | palier monocouche | palier multicouches |            |                 |            |
|------------------|-------------------|---------------------|------------|-----------------|------------|
|                  |                   | bague en acier      | écart en % | bague en bronze | écart en % |
| $\overline{F}_u$ | 13.947            | 13.416              | 4          | 12.908          | 8          |
| $\overline{T}_u$ | 12.682            | 12.392              | 3          | 12.111          | 5          |

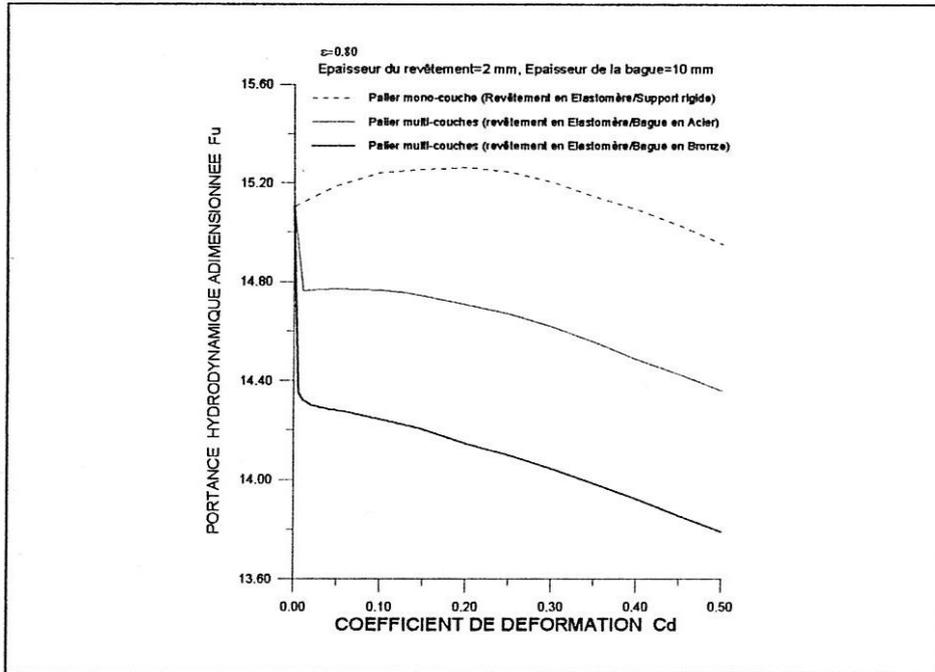


Fig. 12.(a). Variations de la portance hydrodynamique adimensionnée  $\overline{F}_u$  en fonction du coefficient de déformation  $\overline{C}_d$  pour un épaisseur du revêtement  $t_h = 2 \text{ mm}$

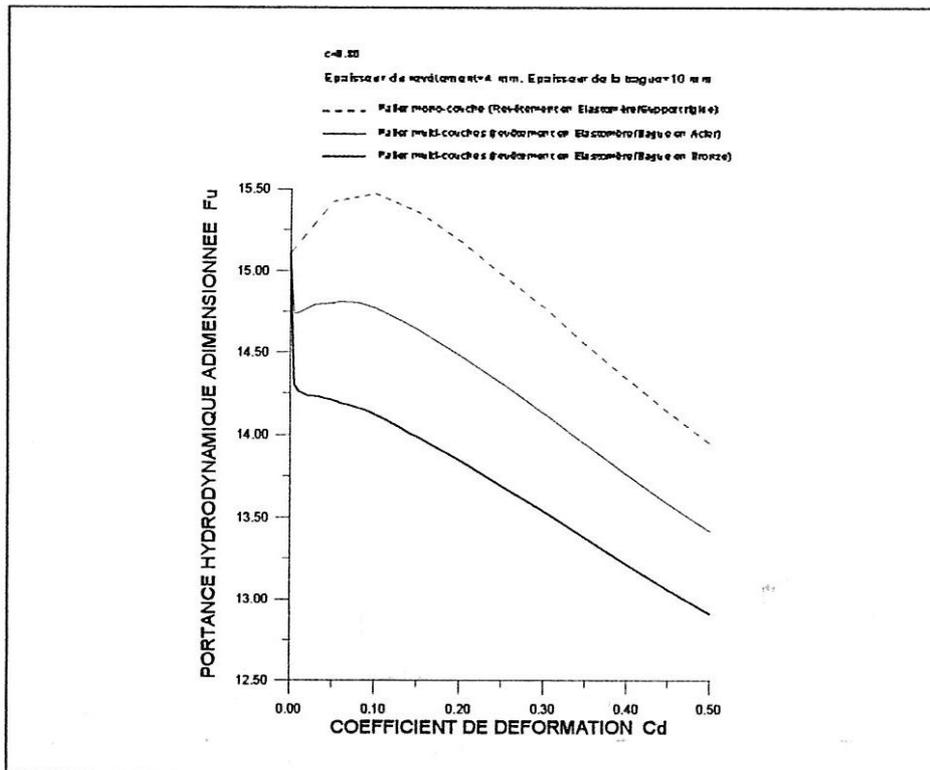
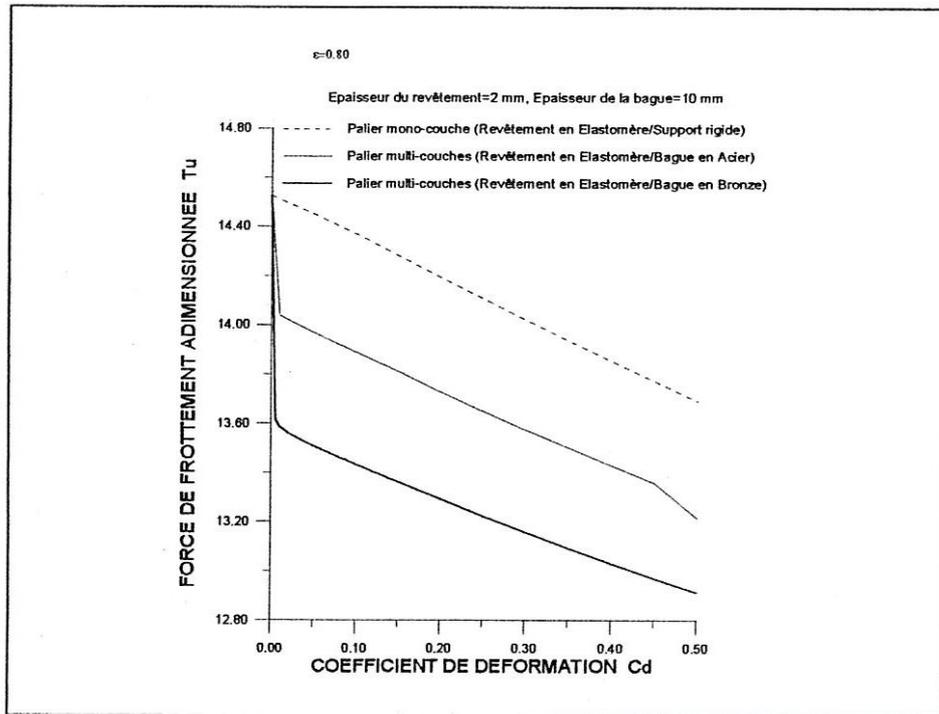
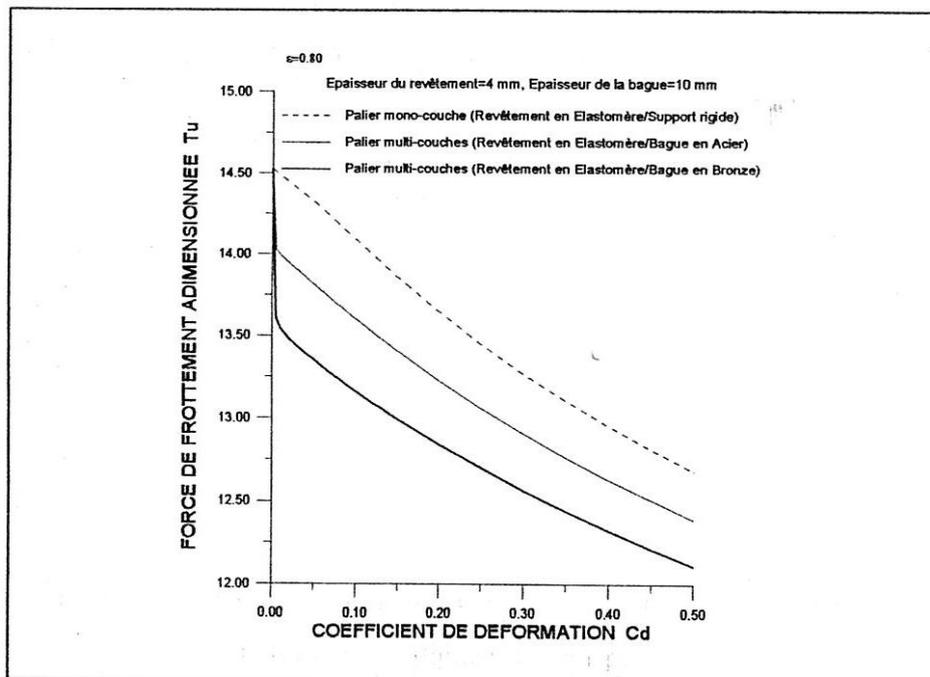


Fig. 12.(b). Variations de la portance hydrodynamique adimensionnée  $\overline{F}_u$  en fonction du coefficient de déformation  $\overline{C}_d$  pour un épaisseur du revêtement  $t_h = 4 \text{ mm}$



**Fig. 13.(a).** Variations de la force de frottement adimensionnée  $T_u$  en fonction du coefficient de déformation  $C_d$  pour un épaisseur du revêtement  $t_h = 2 \text{ mm}$



**Fig. 13.(b).** Variations de la force de frottement adimensionnée  $T_u$  en fonction du coefficient de déformation  $C_d$  pour un épaisseur du revêtement  $t_h = 4 \text{ mm}$

### 4.3. EFFETS DES DEFORMATIONS ELASTIQUES SUR LES CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES

La figure V-14 donne l'évolution de la portance hydrodynamique sans dimension en fonction de l'excentricité relative  $\varepsilon_0$  pour un palier indéformable (courbe en trait continu) et un palier déformable dont le coussinet est composé d'un revêtement en élastomère d'épaisseur  $t_h = 2 \text{ mm}$  fixé dans un support rigide (courbe en trait discontinu). On constate que pour une charge imposée (par exemple,  $\overline{F}_u = 6.86$ ) correspondent deux valeurs de l'excentricité relative:

$\varepsilon_0 \approx 0.5$  pour le palier indéformable et  $\varepsilon_0 = 0.7$  pour le palier déformable. Les valeurs de l'angle de calage correspondant à ces deux excentricités sont respectivement  $\phi_0 = 57^\circ$  et  $39^\circ$ .

La figure V-15 montre la réponse du palier à une excitation synchrone (balourd) pour une charge statique imposée  $\overline{F}_u = 6.86$ . Les orbites présentées sont obtenues par une intégration du système d'équations différentielles associé au mouvement du rotor (IV-87) pour une excentricité relative du balourd  $\varepsilon_b = 0.20$  et une masse sans dimension  $\overline{M} = 0.50$ . Les valeurs des coefficients dynamiques sans dimension correspondant à  $\varepsilon_0 = 0.5$  (palier indéformable) et  $\varepsilon_0 = 0.7$  (palier déformable) sont reportées dans le tableau V-10. Ces valeurs ont été calculées en négligeant les déformations élastiques dues aux pressions dynamiques.

**Tableau V-10.** Valeurs des coefficients dynamiques dans le cas d'une charge imposée ( $\overline{F}_u = 6.86$ )

|                   | $\varepsilon_0$ | $\phi_0(^{\circ})$ | $A_{xx}$ | $A_{xy}$ | $A_{yx}$ | $A_{yy}$ | $B_{xx}$ | $B_{xy}=B_{yx}$ | $B_{yy}$ |
|-------------------|-----------------|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------------|----------|
| palier rigide     | 0.5             | 57                 | 0.71     | 2.3      | -0.86    | 1.33     | 5.54     | 1.59            | 2.48     |
| palier déformable | 0.7             | 39                 | 0.25     | 2.61     | -1.06    | 1.68     | 5.74     | 1.78            | 2.93     |

On remarque que dans le cas d'une charge imposée, l'excentricité de fonctionnement croit tandis que l'angle de calage diminue. L'augmentation de l'excentricité peut dépasser la valeur du jeu radial dans le cas des paliers fortement chargés.

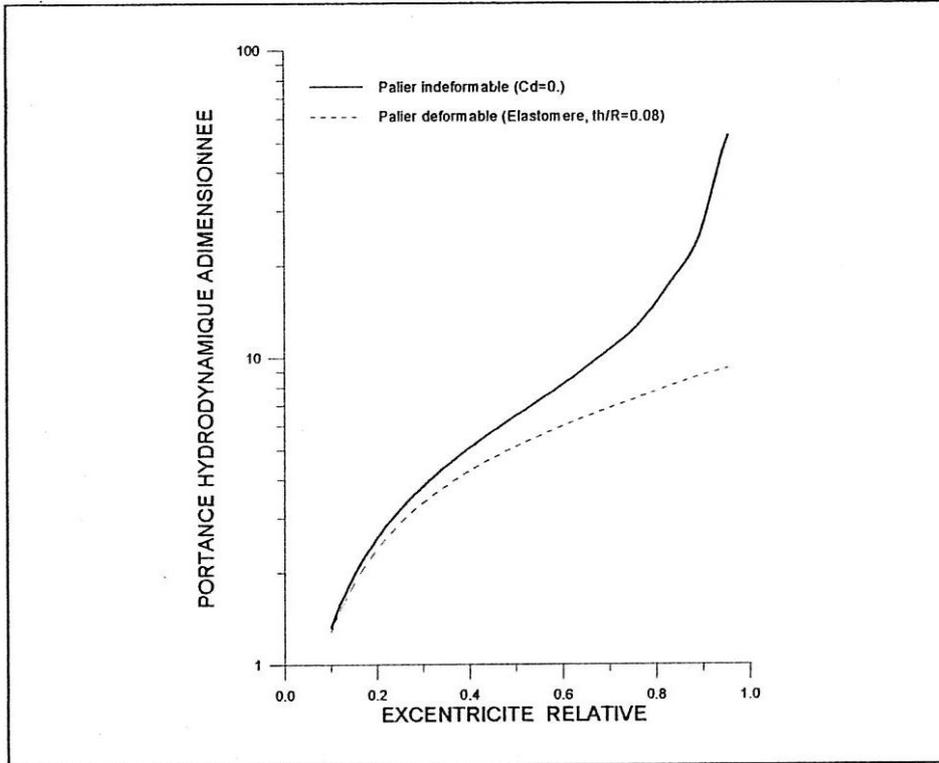


Fig. V.14. Variations de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative  $\epsilon_0$

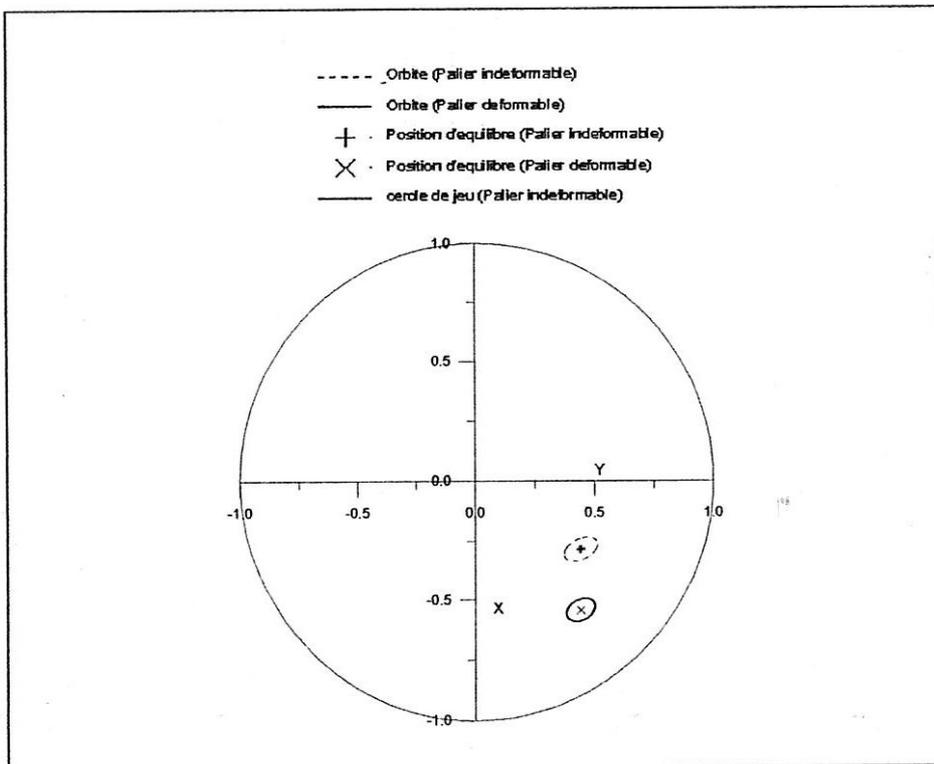


Fig. V.15. Trajectoires du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet

Les courbes des figures V-16 et V-17 représentent l'évolution de la masse critique et de la fréquence de fouettement adimensionnées en fonction de l'épaisseur relative du revêtement pour deux valeurs de l'excentricité relative  $\epsilon_0 = 0.50$  et  $0.80$ . La recherche de la frontière de stabilité se fait de façon itérative puisqu'il faut exciter le système à la fréquence de fouettement  $\nu_s$  qui est une inconnue du problème. On note que la déformation élastique du revêtement a un effet négatif sur la stabilité.

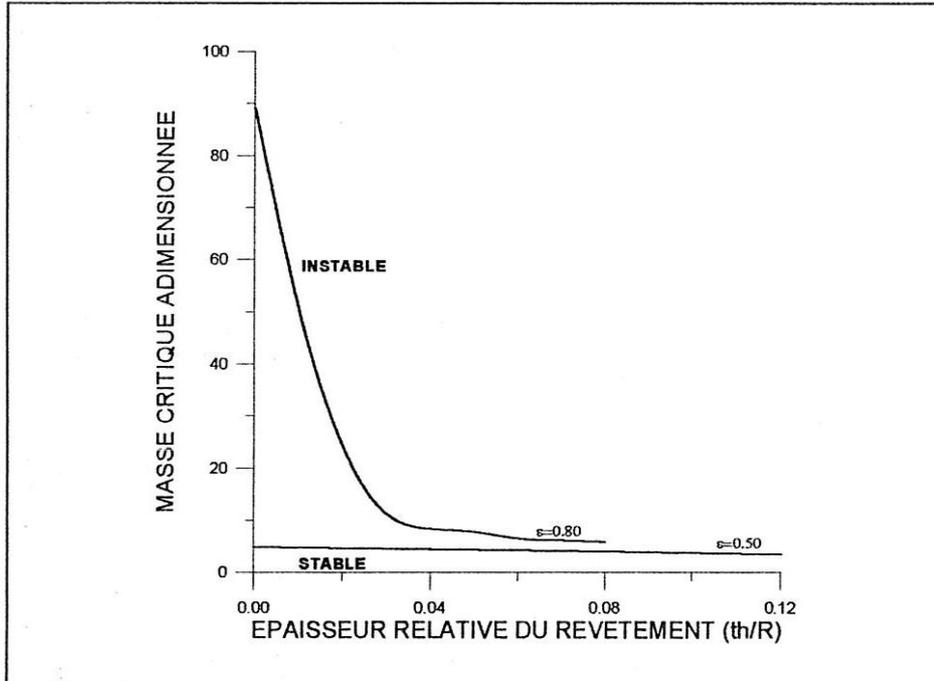


Fig. 16. Variations de la masse critique en fonction de l'épaisseur relative du revêtement

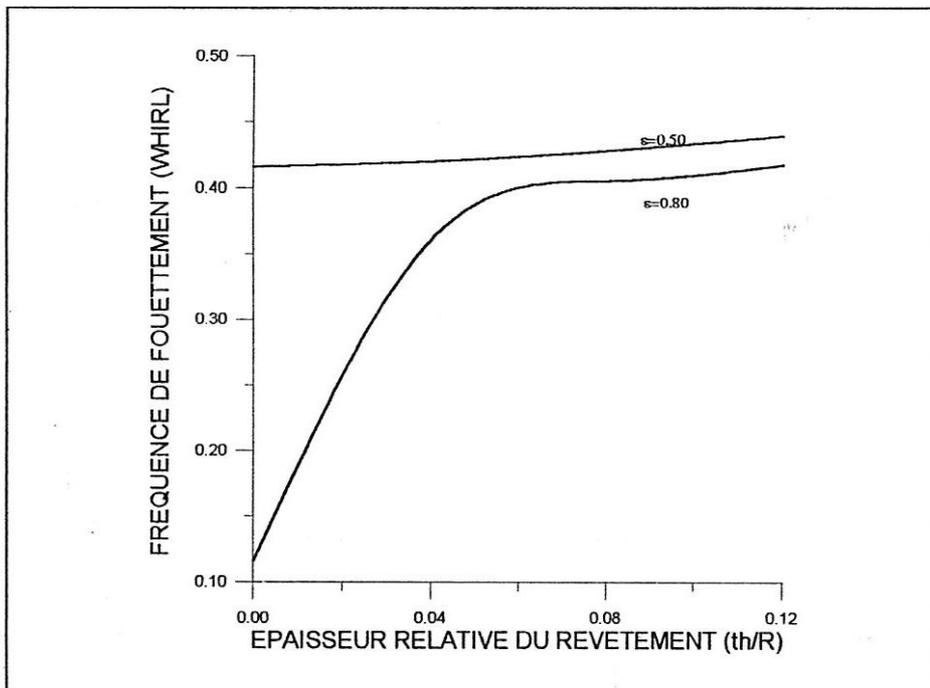


Fig. 17. Variations de la fréquence de fouettement en fonction de l'épaisseur relative du revêtement

#### V-4. CONCLUSION

Lors de cette étude, nous avons testé le domaine de validité des différentes approches élastiques (méthode semi-analytique et modèle « couche mince ») utilisées dans le calcul élastohydrodynamique en se référant aux résultats publiés dans la littérature. Nous avons remarqué que dans le cas de paliers infiniment longs où le champ de pression varie uniquement dans la direction circonférentielle du palier, la méthode semi-analytique constitue une excellente approche à la fois pour des revêtements de surface compressibles et quasi-incompressibles. D'autre part, dans le cas de revêtements monocouches minces  $\left(\frac{t_h}{R} \ll 1\right)$  et pour des matériaux compressibles ( $\nu = 0.30$ ), le modèle « couche mince » permet de calculer le champ de déplacement radial, à l'interface fluide-solide, avec une précision suffisante.

D'après l'ensemble des résultats obtenus, on note que les effets des déformations élastiques du coussinet sur les performances statiques et dynamiques du palier sont importants surtout pour des revêtements constitués de matériaux à faibles modules d'élasticité. Ainsi, pour une excentricité de fonctionnement imposée, la flexibilité du matériau constituant le revêtement:

- réduit la valeur de la pression maximale, la portance hydrodynamique, la force de frottement et la frontière de stabilité de fonctionnement du palier car les déformations dynamiques sont ignorées,
- augmente la zone de pression, l'épaisseur minimale du film et la fréquence de fouettement.

Pour une charge imposée, la prise en considération des déformations élastiques entraînent une augmentation de l'excentricité de fonctionnement et une diminution de l'angle de calage.

Notons que dans le cas des paliers multicouches, les effets des déformations élastiques du revêtement et de la bague sur le comportement de ces paliers sont plus significatifs que dans le cas des paliers monocouches.

## CONCLUSION GENERALE

Notre travail est consacré à la mise au point d'un modèle semi-analytique permettant de calculer les champs de contraintes et les champs de déplacements dans des milieux élastiques. Le modèle mis au point est adapté à des solides de formes géométriques simples, tels que les couronnes cylindriques. Ces couronnes peuvent schématiser convenablement les revêtements de surfaces utilisés dans les paliers lisses. L'intérêt principal de ce modèle est l'évaluation de l'état élastique des revêtements de surfaces mono et multi-matériaux. Comparativement à la méthode des éléments finis, le modèle élastique proposé est très précis et ne nécessite pas de discrétisation spatiale du milieu élastique étudié.

Ce travail comporte deux parties. La première partie concerne la résolution des problèmes élastiques dans le plan complexe à l'aide des potentiels complexes de **Kolosov** et **Muskhelishvili** pour des domaines formés par une couronne ou un assemblage de deux couronnes de caractéristiques élastiques différentes. La connaissance de ces deux fonctions permet de présenter les solutions en déplacements et en contraintes du problème élastique sous forme de séries de **Fourier**.

La deuxième partie de cette étude est relative à l'analyse du comportement élastohydrodynamique en régime isotherme (EHDI) des paliers monocouche et multicouches.

La prise en considération de l'élasticité des revêtements impose de résoudre:

- l'équation de la lubrification hydrodynamique qui permet de déterminer le champ de contrainte dans le film lubrifiant,
- les équations de l'élasticité qui permettent de calculer le champ de déplacement à l'interface fluide-solide. Ce dernier est déterminé en utilisant soit la méthode semi-analytique ou le modèle simplifié appelé « couche mince ».

Les parties hydrodynamique et élastique sont reliées par un processus itératif au cours duquel on résout successivement l'équation hydrodynamique et les équations de l'élasticité. L'équation hydrodynamique ou l'équation de **Reynolds** écrite dans le cas d'un coussinet déformable est résolue par une méthode des différences finies centrées. Le système d'équations linéaires est résolu par la méthode des sur-relaxations successives (S.O.R).

Nous avons comparé, en régime élastohydrodynamique stationnaire, les résultats obtenus par les deux approches élastiques (semi-analytique et couche mince) avec ceux issus de la littérature. Nous avons été amenés aux conclusions suivantes:

- la méthode semi-analytique représente une excellente approche à la fois pour les matériaux élastiques compressibles et quasi-incompressibles;
- le modèle « couche mince » constitue une approche efficace pour des revêtements de surfaces monocouches minces  $\left( \frac{t_h}{R} \ll 1 \right)$ .

---

L'étude de l'influence de la flexibilité des revêtements de surface sur le comportement statique et dynamique d'un palier a permis de constater que, dans le cas d'une excentration imposée, la pression maximale, la portance hydrodynamique, la force de frottement et la masse critique diminuent tandis que la zone de pression, l'épaisseur minimale du film et la fréquence de fouettement (whirl) augmentent.

D'autre part, pour un palier fonctionnant à une charge imposée, l'excentricité de fonctionnement croît tandis que l'angle de calage décroît. Il faut souligner que dans le cas des paliers multicouches, les effets des déformations élastiques du revêtement et de la bague sur le comportement de ces paliers sont plus significatifs que dans le cas des paliers monocouches.

Les conclusions auxquelles nous avons abouti sont d'un intérêt pratique certain puisque les revêtements de surfaces utilisés dans le but de réduire l'usure en régime de fonctionnement limite ont, en régime hydrodynamique établi, un effet positif sur la force de frottement et la puissance dissipée dans le contact et un effet négatif sur la stabilité de fonctionnement du système rotor-paliers.

Les prolongements de cette étude pouvant être envisagés sont:

- extension de l'approche semi-analytique à l'étude des problèmes élastiques et viscoélastiques dans le cas des paliers de longueur finie (écoulement bidimensionnel);
- prise en compte des conditions réelles de fonctionnement des paliers fortement chargés, tels que les effets des déformations thermo-élastiques des revêtements dues aux variations des champs de température aussi bien dans les solides que dans le fluide lubrifiant.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kolosov, G. V., Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions, C.R. Ac. Sci., 146, 1908.
- [2] Muskhelishvili, N. I., Some Basic problems of the mathematical theory of elasticity, P.Noordhoff Ltd, 4<sup>eme</sup> édition, 1963.
- [3] Neuber, H., Ein neuer ansatz zur lsung römlicher probleme der elastizitätstheorie. Der Hohlkegel Unter Einzellast als Beispiel. Z.A.M.M., 14, 4/1934.
- [4] Papkovitch, P. F., Solution générale des équations différentielles fondamentales de l'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques, C.R. Ac. Sci, 195, 1932.
- [5] Grodski, G. D., L'intégration des équations générales de l'équilibre du corps élastique isotrope par l'intermédiaire des potentiels newtoniens et des fonctions harmoniques, (en russe). Izv. AN SSSR, 4/1935.
- [6] Hertz, H., über die Berührung fester elastischer Körper, Journal f.d. reine.und. angew. Math, 92, 1882, pp. 156-171.
- [7] Boussinesq, J. V., Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, avec des notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse, Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [8] Lur'e, A. I., Three-dimensional problems of the theory of elasticity, interscience publishers 1964.
- [9] Sneddon, Ian N., The use of integral transforms., McGraw Hill Tmh Edition. 1974.
- [10] Solomon, L., Elasticité linéaire, Masson et Cie. 1968.
- [11] Kelvin, Lord (W. Thomson), Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid, Cambridge a. Dublin Math. Journ., 1848.
- [12] Clebsch, A., über die reflexion an einer kugelfläche, Journ. reine u. angew. Math., 61, 1863.
- [13] Trefftz, E., Mathematische elastizitätstheorie, Handbuch d. physik, (1), 6, Springer, Berlin, 1928.
- [14] Gatina, J. C., Contact de corps élastiques formulation et résolution des problèmes Inverses et Directs, Thèse d'Etat és-sciences I.N.S.A., Université Claude-Bernard Lyon I, 1987.
- [15] Love, A. E. H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, Cambridge, 1927.
- [16] Naghdi, P. M., Foundations of elastic shell theory, progress in solid mechanics, vol. 4, North Holland, Amsterdam, 1963.
- [17] Rabotnov, Yu. N., Plaques et voiles minces (en russe). Mekhanika SSSR za 30 let, Gostekhizdat, Moscou, 1950.

- 
- [18] Villechaise, B., Etude bidimensionnelle des contacts larges entre domaines élastiques finis, Thèse de docteur ingénieur I.N.S.A, Université Claude-Bernard Lyon, E.C.L 1981.
- [19] Lahmar, M., Modélisation du comportement élastohydrodynamique des revêtements de surface dans les paliers hydrodynamiques, Thèse de docteur, Université de Poitiers, 1991.
- [20] Bettayeb, A., Contribution à l'étude du comportement de secteurs circulaires revêtus, élastiques et viscoélastiques, Développement d'un modèle analytique 2D et 3D, Thèse de docteur, Université de Poitiers 1994.
- [21] Sokolnikoff, I. S., Mathematical theory of elasticity, McGraw-Hill Book Company, 2<sup>ème</sup> édition 1956.
- [22] Gladwell, G. M. L., Contact problems in the classical theory of elasticity, Sijthoff & Noordhoff 1980.
- [23] Zienkiewicz, O. C., The finite element method, Mc Graw-Hill Book Co., London, 3<sup>ème</sup> édition 1977.
- [24] Fredholm, I., Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité, Arkiv für Mathematikk astronomie und Fysik, 2, 1-8 (1905).
- [25] Kupradze., Dynamical problems in elasticity, progress in solid mechanics, Vol. III, Sneddon et R. Hill éditeur, J. Wiley (1963).
- [26] Jawsan, M. A. & Ponter, A. R., An integral equation solution of the torsion problem, Proc.Roy.Soc.,Ser.A,273,1963.
- [27] Rizzo., An integral equation approach to boundary value of problems of classical elastostatics, J. Appl. Math., Vol. 25, 83 (1967).
- [28] Rizzo F. & Cruse T. A., A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I, J. Math. Anal. Appl. , 22, avril 1968.
- [29] Cruse,T. A. & Vanburen, W., Three dimensionnal elastic Stress analysis of a fracture specimen with an edge crack, Int. J. Fract. Mech. 7.1.15 (1971).
- [30] Cruse,T. A. & Swedlow, J. L., Formulation of boundary integral equations for three dimensionnal elasto-plastic flow, Int. Journal Solids Structures, Vol. 7, 1971.
- [31] Mendelson, A., Boundary integral methods in elasticity and plasticity.NASA TN D-7418, Nov. 1973.
- [32] Lachat, J. C. & Watson, J. O., Application de la méthode des équations intégrales au calcul des structures, Les Mémoires Techniques du CETIM n° 25 mars 1976.
- [33] Betti, E., Teoria della elasticità. Il nuovo Cimento, (2), 7-10, 1872-3.
- [33] Bonnet, M., Equations intégrales et éléments de frontière, CNRS Editions Eyrolles
- [34] Cours de D.E.A sur les équations intégrales de frontières, Université de Poitiers (France).

- 
- [35] Reynolds, O., on the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, phil. Trans. Roy. Soc. London, Series A177, pt.1, 1886, pp.135-217
- [36] Beauchamp T., 1883, First report on friction experiments, Imeche , Vol.34, pp. 632-666.
- [37] Beauchamp T., 1885, second report on friction experiments, Imeche , Vol.36, pp.58-70.
- [38] Swift, H.W., The stability of lubrication film in journal bearings, Proc. Inst. Civil Eng., 233, pt 1, pp. 267-322, 1931.
- [39] Stieber, W., Das schwimmlager, VDI, 1933, Berlin
- [40] Dubois, G. B. & Ocvirk, F. W., The short bearing approximation for plain journal bearings, Transaction of the ASME, November 1955, p. 1173.
- [41] Sommerfeld, A., Zur hydrodynamische theorie der schmiermittelreibung, Z. Math. phys., Vol. 50, pp. 97-155, 1904.
- [42] Lund, J. W., Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings, Trans. of the ASME, 86-Trib-48.
- [43] Carl, T. E. , An experimental investigation of a cylindrical journal bearing under constant and sinusoidal loading, 2nd Convention Lubrication and Wear, Proc. Inst. Mech. Engrs, 1963-64, Vol. 178, Pt 3N
- [44] Higginson, G. R., The theoretical effects of elastic deformation of the bearing liner on journal bearing performance, Proc. of the Symposium on elastohydrodynamic Lubrication, Inst. Mech. Engrs, 1965-66, Vol. 180.
- [45] O'Donoghue, J. , Brighton, D. K. , Hooke, C. J. K. , The effect of elastic distortions on journal bearing performance, journal of lubrication Technology, Oct. 1967, Series F, pp. 409-417.
- [46] Brighton, D. K., Hooke C. J., O'Donoghue, J., A theoretical and experimental investigation of the effect of elastic distortions on the performance of journal bearings, Proc. Inst. Mech. Engrs, 1967-68, Vol. 182, Pt 3N, pp. 192-200.
- [47] Conway, H. D., Lee, H. C., The analysis of the lubrication of a flexible journal bearing, Journal of Lubrication Technology, Oct. 1975, pp. 599-604.
- [[48] Jain, S. C., Sinhasan, R., Singh, D. V., A study of elastohydrodynamic lubrication in a journal bearing with piezoviscous lubricants, ASLE transactions, Vol. 27, 1984, pp. 168-176.
- [49] Jain, S. C., Sinhasan, R., Singh, D. V., The performance characteristics of thin compliant shell journal bearings, Wear, 81 (1982), pp. 251-261.
- [50] Zhang, Z. , Mao, Q. , Xu, H. , The effect of dynamic deformation on dynamic properties and stability of cylindrical journal bearings, Proceedings of 13th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, 1986, paper XI(iv), pp. 363-366.
- [51] Majumdar, B. C. , Brewster, D. E. , Khonsari, M. M. , Stability of a rigid rotor supported on flexible oil journal bearings, Journal of Tribology, January 1988, Vol. 110, pp. 181-187.

## NOTATIONS

### Chapitre I

|                               |  |
|-------------------------------|--|
| $A$                           | Opérateur d'assemblage   |
| $[B]$                         | Matrice des gradients des fonctions d'interpolation                  |
| $B_\alpha$                    | Fonctions de Grodski, ( $\alpha = 0,1,2,3$ )                         |
| $[C]$                         | Matrice constitutive du matériau                                     |
| $(D)$                         | Domaine globale de la structure, $\bigcup_{e \geq 1} D^e$            |
| $(D^e)$                       | Sous-domaine   |
| $E$                           | Module d'Young, ( $N/m^2$ )  |
| $F_i$                         | Forces volumiques, ( $N$ )   |
| $\{F_e\}$                     | Vecteur sollicitation élémentaire                                    |
| $[K]$                         | Matrice de rigidité globale  |
| $[k_e]$                       | Matrice de rigidité élémentaire                                      |
| $L$                           | Opérateur de Lamé  |
| $[N]$                         | Matrice des fonctions d'interpolation                                |
| $p, q, P, Q$                  | Potentiels scalaires de déplacement                                  |
| $\{Q\}$                       | Vecteur des degrés de liberté de la structure                        |
| $\{\delta Q\}$                | Vecteur des variations des déplacements global                       |
| $\{q_e\}$                     | Vecteur des déplacements nodaux de l'élément                         |
| $\{\delta q_e\}$              | Vecteur des variations de déplacement de l'élément                   |
| $S(M), S_0(M)$                | Fonctions contraintes définies au point $M(z)$ dans le plan complexe |
| $t$                           | Temps, ( $s$ )   |
| $T_i$                         | $i^{i\text{ème}}$ composante du vecteur contrainte                   |
| $T_i^k(x, y)$                 | Vecteur contraintes associé à la solution élémentaire au point $y$   |
| $U$                           | Energie de déformation de la structure                               |
| $\underline{u}$               | Vecteur déplacement, ( $m$ )   |
| $u_i$                         | Composantes du vecteur déplacement, ( $m$ )                          |
| $u_r, u_t$                    | Composantes polaires du déplacement, ( $m$ )                         |
| $W$                           | Travail des forces extérieures                                       |
| $x_i$                         | Variables d'espaces, ( $m$ )   |
| $z$                           | Nombre complexe : $z = x + iy = re^{i\theta}$                        |
| $\pi$                         | Energie potentielle totale de la structure, $\pi = U - W$            |
| $\lambda, \mu$                | Constantes de Navier   |
| $\nu^* = \frac{\nu}{\nu + 1}$ | Coefficient de Poisson en état de Contraintes moyennes planes        |
| $\rho$                        | Masse volumique, ( $kg/m^3$ )  |
| $\sigma_{ij}$                 | Tenseur de contraintes, ( $N/m^2$ )                                  |
| $\delta_{ij}$                 | Symbole de Kronecker   |

|                    |  |
|--------------------|--|
| $\varepsilon_{ij}$ | Tenseur des taux de déformation                  |
| $\varepsilon_{kk}$ | Dilatation cubique                               |
| $( )$              | Désination d'un vecteur                          |
| $\underline{( )}$  | désination d'un tenseur                          |
| $( )_{,i}$         | Dérivée de $( )$ par rapport à la variable $x_i$ |
| $( )_{kij}$        | Tenseur du troisième ordre                       |
| $[ ]$              | Matrice  |
| $\{ \}$            | Matrice unicolonne                               |
| $\langle \rangle$  | Matrice uniligne, $\langle \rangle \equiv \{ \}$ |

## Chapitre II

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $E$                          | Module d'Young, $(N/m^2)$   |
| $h = \frac{R_0}{R_1}$        | Rapport des rayons de deux cercles limites d'une couronne circulaire  |
| $\ell = \frac{r}{R_1}$       | Coordonnée radiale adimensionnée d'un point de la couronne  |
| $N$                          | Ensemble des entiers naturelles   |
| $r$                          | Coordonnée radiale d'un point appartenant à la couronne, $(m)$  |
| $R_0, R_1$                   | Rayons extérieur et intérieur de la couronne, $(m)$   |
| $S_0(M), S(M)$               | Fonctions contraintes définies au point $M(z)$ dans le plan complexe  |
| $U(z, \bar{z})$              | Déplacement complexe d'un point courant $M(z)$ , $(m)$  |
| $U_x, U_y$                   | Composantes cartésiennes du déplacement, $(m)$  |
| $U_r, U_t$                   | Déplacement radial et tangentiel d'un point appartenant à la couronne, $(m)$  |
| $U_k$                        | Coefficient de Fourier complexes du déplacement   |
| $U_{j,r}, U_{j,t}$           | Déplacements sur le cercle limite de rayon $R_j : j = 0,1$ , $(m)$  |
| $z$                          | Nombre complexe $z = x + iy = re^{i\theta}$   |
| $Z$                          | Ensemble des entiers relatifs   |
| $\lambda, \mu$               | Constantes de Lamé  |
| $\nu$                        | Coefficient de Poisson, sans dimension  |
| $\chi$                       | Facteur d'élasticité, sans dimension $\chi = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en état de déformation plane} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{en état de contraintes moyennes planes} \end{cases}$ |
| $\theta$                     | Coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur l'axe $Or$ , $(rad)$   |
| $\phi, \psi$                 | Fonctions analytiques de Kolosov et Muskhélidze   |
| $\sigma_k$                   | Coefficients de Fourier complexes de la contrainte  |
| $\sigma_{xy}$                | Contrainte de cisaillement, $(N/m^2)$   |
| $\sigma_{ij}$                | Tenseur de contraintes, $(N/m^2)$   |
| $\sigma_{j,r}, \sigma_{j,t}$ | Contraintes sur le cercle limite de rayon $R_j : j = 0,1$ , $(N/m^2)$   |
| $\varepsilon_{ij}$           | Tenseur des taux de déformation   |

|                    |  |
|--------------------|--|
| $\varepsilon_{kk}$ | Dilatation cubique   |
| $\overline{(\ )}$  | Conjugué du nombre complexe ( )                              |
| $(\ )_{,i}$        | Dérivée de la fonction ( ) par rapport à la coordonnée $x_i$ |
| $(\ )_{,r}$        | Dérivée de la fonction ( ) par rapport à la variable $r$     |

### Chapitre III

|                              |  |
|------------------------------|--|
| $h_1 = \frac{R_1}{R_0}$      | Raport des rayons des deux cercles limites de la couronne interne                            |
| $h_2 = \frac{R_2}{R_1}$      | Raport des rayons de deux cercles limites de la couronne externe                             |
| $R_1, R_0$                   | Rayons extérieur et intérieur de la couronne interne, (m)                                    |
| $R_2, R_1$                   | Rayons extérieur et intérieur de la couronne externe, (m)                                    |
| $U_r, U_t$                   | Composantes polaires du déplacement complexe, (m)  |
| $U_{j,k}$                    | Coefficients de Fourier complexes du déplacement lié à la couronne de rayon $R_j: j = 0,1$   |
| Z                            | Ensemble des entiers relatifs  |
| $\mu_1, \chi_1$              | Constantes de Lamé de la couronne interne  |
| $\mu_2, \chi_2$              | Constantes de Lamé de la couronne externe  |
| $\rho = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ | Raport des modules de Coulomb des deux couronnes interne et externe                          |
| $\sigma_{j,k}$               | Coefficients de Fourier complexes de la contrainte lié à la couronne de rayon $R_j: j = 0,1$ |

### Chapitre IV

|                  |  |
|------------------|--|
| $A_{ij}$         | Coefficients de raideur sans dimension : $A_{ij} = \frac{a_{ij}C}{W_0}$ , $(i, j) = (x, y)$            |
| $a_{ij}$         | Coefficients de raideur du film lubrifiant, (N/m)  |
| $B_{ij}$         | Coefficients d'amortissement sans dimension : $B_{ij} = \frac{b_{ij}C\omega}{W_0}$ , $(i, j) = (x, y)$ |
| $b_{ij}$         | Coefficients d'amortissement du film lubrifiant, (N.s/m)   |
| C                | jeu radial, (m)  |
| $C_a, C_c$       | Couples de frottement sur l'arbre et le coussinet, (N.m)   |
| $C_p$            | Chaleur massique à pression constante, (J/Kg.°K)   |
| $\overline{C_d}$ | Coefficient de déformation, $\overline{C_d} = \frac{\mu_0 \omega (R/C)^3}{E}$                          |
| $D = 2R$         | Diamètre du palier, (m)  |
| E                | Module d'Young du matériau, (N/m <sup>2</sup> )  |
| $e_0$            | Excentricité de l'arbre correspondant à la position d'équilibre statique, (m)                          |
| $e_b$            | excentricité de balourd, (m)   |
| $f_a$            | Nombre de frottement sur l'arbre; sans dimension   |

|                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| $F_i$                                | Forces massiques extérieures, ( $N$ )  |
| $F_u$                                | Portance hydrodynamique par unité de longueur du palier, ( $N$ )   |
| $\overline{F_u}$                     | Portance hydrodynamique par unité de longueur du palier sans dimension,<br>$\overline{F_u} = \frac{F_u C^2}{\mu_0 \omega R^3}$ |
| $h$                                  | Épaisseur du film lubrifiant, ( $m$ )  |
| $H$                                  | Épaisseur sans dimension du film lubrifiant, $H = h / C$   |
| $H_0$                                | Épaisseur du film correspondant à la position d'équilibre statique, sans dimension   |
| $K$                                  | Coefficient de conductibilité thermique du fluide, $W / m^{\circ}K$  |
| $L$                                  | Longueur du palier, ( $m$ )  |
| $M_c$                                | Masse critique du palier, ( $Kg$ )   |
| $\overline{M_c}$                     | Masse critique sans dimension : $\overline{M_c} = \frac{M_c C \omega^2}{W_0}$  |
| $M$                                  | Masse de l'arbre, ( $Kg$ )   |
| $\overline{M}$                       | Masse de l'arbre sans dimension, $\overline{M} = \frac{M C \omega^2}{W_0}$   |
| $O_c$                                | Centre du coussinet  |
| $O_a$                                | Centre de l'arbre  |
| $O_c xy$                             | Repère absolu lié au coussinet   |
| $p$                                  | Pression dans le fluide, ( $N / m^2$ )   |
| $P = \frac{p C^2}{\mu_0 \omega R^2}$ | Pression sans dimension  |
| $P_0$                                | Pression stationnaire sans dimension   |
| $P_e, P_\phi$                        | Pressions dynamiques complexes sans dimension  |
| $q$                                  | Pression modifiée  |
| $Q_x, Q_z$                           | Débit volumique par unité de longueur dans les directions $Ox$ et $Oy$ du contact  |
| $R$                                  | Rayon du palier  |
| $\Re$                                | Nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur de l'écoulement   |
| $R_a$                                | Rayon de l'arbre, ( $m$ )  |
| $R_c$                                | Rayon du coussinet, ( $m$ )  |
| $r_i$                                | Source de chaleur interne au système par unité de masse, $W / kg$  |
| $S$                                  | Nombre de Sommerfeld   |
| $t$                                  | Temps, ( $s$ )   |
| $t_h$                                | Épaisseur du revêtement élastique, ( $m$ )   |
| $T$                                  | Temperature du fluide, $^{\circ}K$   |
| $T_u$                                | Force de frottement unitaire, ( $N$ )  |
| $\overline{T_u}$                     | Force de frottement sans dimension, $\overline{T_u} = \frac{C}{\mu \omega R^2}$  |
| $u_i$                                | Composantes de la vitesse, ( $m / s$ )   |
| $U_k$                                | Coefficient de Fourier complexe du déplacement   |

|   |  |
|---|--|
| $U_r, U_t$                              | Composantes du déplacement complexe respectivement par rapport aux axes $O_c r$ et $O_c t$     |
| $\overline{U_r}, \overline{U_t}$        | Composantes du déplacement complexe, $\left( \frac{\overline{U_r}, \overline{U_t}}{C} \right)$ |
| $W_0$                                   | Charge statique appliquée au palier, $N$   |
| $x_i$                                   | Variables d'espace, $(m)$  |
| $\alpha$                                | Coefficient de piézoviscosité du lubrifiant, $(Pa^{-1})$                                       |
| $\omega$                                | Vitesse de rotation angulaire de l'arbre, $(rad/s)$  |
| $\Omega$                                | Coefficient de sur-relaxation  |
| $\gamma$                                | Fréquence d'excitation adimensionnée : $\gamma = v/\omega$                                     |
| $\gamma_s$                              | Fréquence de fouettement adimensionnée : $\gamma_s = v_s/\omega$                               |
| $v$                                     | Fréquence d'excitation, $(rad/s)$  |
| $\lambda, \mu$                          | Coefficients de Navier   |
| $\mu_p$                                 | Viscosité dynamique du lubrifiant, $(Pa.s)$  |
| $\tau$                                  | Temps adimensionné : $\tau = \omega t$   |
| $\varepsilon_0 = \frac{e_0}{C}$         | Excentricité relative de l'arbre, sans dimension   |
| $\varepsilon_b = \frac{e_b}{C}$         | Excentricité relative du balourd, sans dimension   |
| $\theta$                                | Coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur l'axe $O_c r$ , $(rad.)$            |
| $\theta_s$                              | Abcisse de rupture du film lubrifiant, $(rad.)$  |
| $\phi$                                  | Fonction de dissipation visqueux   |
| $\phi_0$                                | Angle de calage correspondant à la position d'équilibre statique, $(rad.)$                     |
| $\rho$                                  | Masse volumique du fluide, $(Kg/m^3)$  |
| $\overline{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$ | Masse volumique sans dimension du fluide   |
| $\sigma_{ij}$                           | Tenseur des contraintes, $(N/m^2)$   |
| $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}$              | Contraintes de cisaillement dans le fluide   |
| $\varepsilon_{ij}$                      | Tenseur des taux de déformation  |
| $\varepsilon_{kk}$                      | Taux de dilatation cubique   |
| $\delta_{ij}$                           | Symbole de Kronecker   |
| $\Im(\ )$                               | Partie imaginaire du nombre complexe ( )   |
| $\Re(\ )$                               | Partie réelle du nombre complexe ( )   |

---

## Résumé

L'étude du comportement élasto-hydrodynamique en régime isotherme ( EHD ) , paliers multicouches nécessite une résolution simultanée des équations de la lubrification hydrodynamique et de l'élasticité linéaire à travers un processus de calcul itératif.

L'utilisation des revêtements de surfaces dans les paliers fluides conduit à des déformations élastiques importantes de la surface du coussinet qui peuvent être de l'ordre de grandeur l'épaisseur du film lubrifiant. Ces revêtements qui peuvent être métalliques (métaux blancs) ou non métalliques (Elastomères) se caractérisent par de faibles valeurs du module d'élasticité.

L'écoulement du lubrifiant dans le palier est décrit par l'équation de Reynolds et l'élasticité des revêtements multicouches est déterminé à partir d'une approche semi-analytique basée sur un développement, en séries de Fourier complexes, de la pression hydrodynamique.

Comparativement aux méthodes numériques classiques (méthode des éléments finis et méthodes des éléments de frontière), le modèle élastique proposé est précis aussi bien pour le calcul des contraintes que pour les déplacements et ne nécessite pas une discrétisation spatiale du milieu élastique traité.

L'analyse montre que les déformations élastiques ont une influence non négligeable sur le comportement statique et dynamique des paliers hydrodynamiques notamment dans le cas de revêtements constitués de matériaux quasi-incompressibles comme les élastomères. D'autre part les résultats obtenus montrent que la pression maximale, la portance hydrodynamique, la force de frottement et la masse critique diminuent avec l'épaisseur du revêtement et la flexibilité du matériau tandis que l'épaisseur minimale du film et la fréquence de fouettement augmentent.

## Mots clés

Lubrification élasto-hydrodynamique

Paliers multicouches

Revêtement de surface

Approche semi-analytique

Séries de Fourier

Couroannes élastiques circulaires