

*Republique Algérienne Démocratique et Populaire*  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 08 Mai 45 Guelma  
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département de : Génie Mécanique

## Mémoire de Magister

Spécialité : Construction, Energétique et Productique

Présenté par

**NOUAR Ahcene**

043



---

# **ANALYSE DES CONTRAINTES ET DES DEFORMATIONS DES TUBES ET SECTEURS CYLINDRIQUES : APPLICATION A LA RESOLUTION DES PROBLEMES D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE DANS LES PALIERS HYDRODYNAMIQUES**

---

Sous la Direction de **Dr Mustapha LAHMAR**

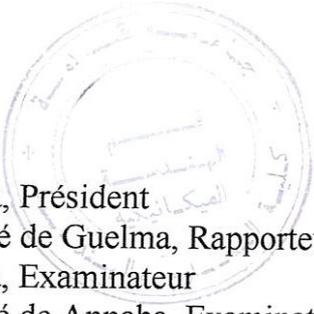
Soutenu le :

devant la Commission d'Examen

## § JURY §

**MM.**

OUELAA Nouredine  
LAHMAR Mustapha  
GUENFOUD Mohamed  
HAIHAEM Amar  
BELBAH Ahmed



Professeur, Université de Guelma, Président  
Maître de Conférences, Université de Guelma, Rapporteur  
Professeur, Université de Guelma, Examineur  
Maître de Conférences, Université de Annaba, Examineur  
Maître de Conférences, Université de Guelma, Examineur

---

2005

---

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 08 Mai 45 Guelma  
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département de : **Génie Mécanique**

## **Mémoire de Magister**

Spécialité : **Construction, Energétique et Productique**

Présenté par

**NOUAR Ahcene**

---

---

### **ANALYSE DES CONTRAINTES ET DES DEFORMATIONS DES TUBES ET SECTEURS CYLINDRIQUES : APPLICATION A LA RESOLUTION DES PROBLEMES D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE DANS LES PALIERS HYDRODYNAMIQUES**

---

---

Sous la Direction de **Dr Mustapha LAHMAR**

Soutenu le :

devant la Commission d'Examen

### **§ JURY §**

**MM.**

BOUELAA Nouredine  
LAHMAR Mustapha  
BOUENFOUD Mohamed  
MAIAHEM Amar  
BELBAH Ahmed

Professeur, Université de Guelma, Président  
Maître de Conférences, Université de Guelma, Rapporteur  
Professeur, Université de Guelma, Examineur  
Maître de Conférences, Université de Annaba, Examineur  
Maître de Conférences, Université de Guelma, Examineur

---

2005

---

## *AVANT PROPOS*

*Cette étude a été effectuée au Laboratoire de Mécanique et des structures (LMS) du département de Génie Mécanique, faculté des sciences et de l'ingénierie, Université 08 Mai 45 de Guelma.*

*Je tiens à exprimer à mon rapporteur le Docteur Mustapha LAHMAR mes vifs remerciements et ma profonde gratitude pour son aide précieuse, sa patience et ses conseils judicieux qu'il n'a pas cessé de me fournir tout le long de l'élaboration de ce travail.*

*Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait le Professeur Nouredine OUEL AA, d'avoir accepté de juger mon travail et de présider le jury.*

*Il m'est très agréable de remercier le Professeur Mohamed GUENFOUD, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et d'accepter de faire partie du jury.*

*Il m'est particulièrement agréable de remercier le Docteur Amar HAIHAHEM, Maître de Conférences à l'Université de Annaba d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury de ce mémoire.*

*Je remercie vivement le Docteur Ahmed BELBAH, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et d'accepter de faire partie du jury.*

*Je suis également très reconnaissant envers tous mes enseignants de graduation et de post-graduation.*

*Mes remerciements vont également à tout le personnel du département de Génie Mécanique pour la contribution que chacun d'eux a pu m'apporter.*

*Enfin, je ne saurais oublier tous ceux qui, par leur amitié, m'ont aidé et encouragé au cours de la réalisation de ce modeste travail.*

## *SOMMAIRE*

AVANT PROPOS

RESUMES

INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE I 3

EQUATIONS GENERALES DE LA MECANIQUE DES SOLIDES DEFORMABLES

CHAPITRE II 32

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES METHODES DE RESOLUTION DES  
PROBLEMES ELASTIQUES PLANS ET TRIDIMENSIONNELS

CHAPITRE III 47

SOLUTIONS ANALYTIQUES DES PROBLEMES MIXTES POUR LES TUBES  
CYLINDRIQUES LONGS

CHAPITRE IV 68

FORMULATION DES PROBLEMES ELASTO-STATIQUES LINEAIRES PAR LA  
METHODE DES ELEMENTS FINIS (2D) ET (3D) POUR LES TUBES ET  
SECTEURS CYLINDRIQUES

CHAPITRE V 86

RESOLUTION DES PROBLEMES D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE DANS  
LES PALIERS HYDRODYNAMIQUES PAR LA METHODE ITERATIVE DE  
*NEWTON-RAPHSON* AMORTIE

CONCLUSION GENERALE 130

ANNEXE A 132

ANNEXE B 135

ANNEXE C 138

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 142

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES 146

LISTE DES ILLUSTRATIONS 150

TABLE DES MATIERES 152

## Résumé

Les tubes et les secteurs cylindriques offrent des possibilités réelles de schématisation des revêtements de surface utilisés dans certains paliers hydrodynamiques tels que les paliers circulaires (lisses), les paliers à arc partiel et les paliers à patins oscillants. Les solutions en contraintes et déplacements obtenues pour ce type de structures peuvent donc être utilisées pour la détermination de l'état élastique de ces revêtements.

Le but de ce travail est de proposer des modèles analytiques et numériques bidimensionnels (2D) et tridimensionnels (3D) pour le calcul des champs de contraintes et de déplacements dans les tubes et les secteurs cylindriques dont la surface interne est soumise à un champ de pression non uniforme. Ces modèles ont pour objectif principal d'être utilisés pour la résolution des problèmes de couplage ou d'interaction fluide-structure dans les paliers fluides compliants. Le modèle analytique, qui ne nécessite pas de discrétisation spatiale du domaine, est basé sur le traitement des équations de l'élastostatique linéaire dans le plan complexe défini par des couronnes circulaires. Dans la présente étude, ce modèle sert comme un outil de validation des différentes approches numériques développées tels que la méthode des éléments finis (MEF) et le modèle couche mince (MCM) (2D).

La résolution du problème d'interaction fluide-structure dans les paliers compliants fonctionnant en conditions sévères par la méthode itérative de *Newton-Raphson* amortie a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de la rhéologie du fluide lubrifiant et de l'élasticité du revêtement de surface sur le comportement statique de ces paliers. Ces effets sont d'autant plus importants que le module d'élasticité du matériau constituant le revêtement est faible.

## Mots clés

Elasto-statique linéaire

Tubes cylindriques

Secteurs cylindriques

Interaction fluide-structure

Revêtement de surface

Modèle analytique

Méthode des éléments finis

Modèle couche mince

Méthode de *Newton-Raphson*

## Title

**Stress and strain analysis of cylindrical tubes and sectors : Application to the resolution of fluid-structure interaction problems in hydrodynamic journal bearings**

## Abstract

The cylindrical tubes as well as sectors offer good schematizations of the surface coatings used in circular, partial arc and tilting journal bearings. So, the solutions in stresses and displacements obtained for this type of structures may be used for the determination of the coatings' elastic state.

The goal of this work is to propose two and three-dimensional elasto-statics models for the calculation of the displacement and stress fields in the cylindrical tubes and sectors whose the internal surface is subjected to non-uniforme pressure fields. These models are essentially used for the resolution of the coupling or fluid-structure interaction problems in the compliant journal bearings. The analytical model, which does not require space discretization of the structure, is based on the treatment of the linear elastostatic equations in the complex plane defined by circular rings. This model is developed in order to validate the two-dimensional finite element method and the thin liner model.

The results obtained from the resolution of the fluid-structure interaction problem in the compliant (one-layered) journal bearings operating in severe conditions using the improved iterative *Newton-Raphson* method show the non-negligible effects of the fluid rheology (density and viscosity-pressure variations) and the elastic deformations of the surface coatings on the journal bearings behaviour especially for low elasticity modulus coatings.

## Keywords

Linear elasto-statics

Cylindrical tubes

Cylindrical sectors

Fluid-structure interaction

Surface coating

Analytical model

Finite element method

Thin liner model

*Newton-Raphson* method

## العنوان

تحليل الاجهادات والتشوهات في الانابيب والقطع الاسطوانية:  
تطبيق لحل مسائل التزاوج سائل- صلب في المحامل الهيدروديناميكية

### ملخص

ان الانابيب والقطع الاسطوانية تقدم لنا امكانية حقيقية لرسم كساءات السطح المستعملة في بعض المحامل الهيدروديناميكية مثل: المحامل الدائرية ( الملساء)، المحامل ذات قوس جزئي والمحامل بمزاليح متحركة. ان الحلول للاجهادات والتشوهات المحصل عليها بهذا النوع من الهياكل يمكن ان تستعمل للكشف عن الحالة المرنة لهذه الكساءات.

ان الهدف من هذا العمل هو اقتراح نماذج تحليلية وعددية ذات بعدين وثلاث ابعاد من اجل حساب حقول الاجهادات والتشوهات في الانابيب والقطع الاسطوانية مع العلم ان المساحة الداخلية تتعرض لحقل ضغط غير منظم. اقترحت هذه النماذج من اجل استعمالها في حل مسائل التزاوج أو التفاعل سائل-صلب في المحامل المرنة. النموذج التحليلي لا يتطلب تمثيل فضائي للمجال، حيث يركز على معالجة معادلات المرونة السكونية الخطية في المستوي المركب المعرف بالسطح الواقع بين دائرتين لديهما مركز واحد. هذا النموذج يمثل أداة لإثبات صحة النماذج العددية المبسطة مثل: نموذج العناصر المنتهية ونموذج الطبقة الرقيقة ( ذات بعدين).

ان حل مسائل التزاوج سائل-صلب في المحامل المرنة المستعملة تحت شروط صعبة بالطريقة التكرارية لنيوتن رافسون المخففة تمكنا من وضع في الحسبان التأثيرات الغير ممكن اهمالها لطبيعة السائل المستعمل للتشحيم وفي نفس الوقت للطبيعة المرورية لكساءات السطح على التصرفات الساكنة للمحامل، هذه التأثيرات تكون جد معتبرة عند استعمال معامل المرونة صغير للمادة المستعملة في هذه الكساءات.

### الكلمات المفتاحية:

- المرونة الساكنة الخطية
- الانابيب الاسطوانية
- القطع الاسطوانية
- التفاعل سائل-صلب
- كساءات السطح
- النموذج التحليلي
- طريقة العناصر المنتهية
- نموذج الطبقة الرقيقة
- طريقة نيوتن رافسون

## Introduction Générale

Généralement, les pièces constitutives des ensembles mécaniques sont sollicitées dans le domaine élastique. Dans de nombreux cas, les méthodes élémentaires de la résistance des matériaux sont incapables de donner des indications précises sur la répartition des tensions dans les pièces constituant les systèmes mécaniques. Pour cela, le recours aux méthodes plus puissantes de la théorie de l'élasticité s'avère nécessaire. La modélisation par la méthode des éléments finis traite des situations complexes et variées, avec une bonne précision, au prix de moyens et de temps de calculs conséquents. Il n'existe que peu d'approches intermédiaires proposant des solutions analytiques ou numériques simples.

Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire consiste à proposer des modèles de calcul pour les champs de contraintes et de déplacements, adaptés à des formes géométriques simples, d'utilisation fréquente que sont le tube et le secteur cylindrique très longs dans l'approche (2D) et le tube cylindrique de longueur finie dans l'approche (3D). Ces modèles ont pour objectif principal d'être intégrés dans des processus de calculs élasto-hydrodynamiques de paliers circulaires, à arc partiel et à patins oscillants.

Dans le premier chapitre du mémoire, nous présentons les équations générales de la mécanique des solides déformables. Nous avons indiqué les définitions permettant de caractériser le modèle du corps élastique ainsi que les caractéristiques de description géométrique d'une configuration d'un solide à l'instant  $t$ . Les relations de base de la théorie de l'élasticité linéaire, adoptées à partir des hypothèses de petits déplacements et de linéarité entre contraintes et déformations, permettra la description de l'état de contraintes et de déformations et à l'écriture des équations d'équilibre. Dans le cadre de la théorie de l'élastostatique linéaire, les contraintes et les déformations sont reliées par l'équation constitutive de *Hooke* pour des milieux élastiques isotropes ou anisotropes (solides hookéens). L'application du principe des travaux virtuels (PTV) permettra de construire la forme variationnelle du problème de l'élasticité linéaire. Celle-ci constitue la base de la méthode des éléments finis.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des différentes méthodes de résolution des équations de l'élastostatique linéaire. Nous avons plus particulièrement étudié les solutions proposées pour la forme différentielle de ces équations. Les choix des méthodes pour chacune des applications (2D) et (3D) sont ensuite expliqués. Pour le cas bidimensionnel, la formulation se fait dans le plan complexe à l'aide des potentiels de *Kolosov* et *Muskhelishvili*. Puis les solutions sont recherchées sous forme de séries de *Fourier* dans le cas de domaines définis par des couronnes circulaires. Pour la résolution du problème tridimensionnel, nous présentons la formulation en potentiels proposée par *Grodski*. La résolution se fait ensuite grâce à une transformation intégrale de *Fourier*.

Au chapitre III, nous développons une approche semi-analytique pour la résolution du premier et deuxième problème mixte dans le cas de domaines élastiques formés par des tubes cylindriques très longs. Cette méthode utilise la formulation dans le plan complexe des équations de l'élasticité et permet de présenter l'état élastique, en un point du milieu étudié, à l'aide de deux potentiels complexes appelés fonctions de *Kolosov* et *Muskhelishvili*. La résolution en contraintes et en déplacements est exprimée sous forme de séries de *Fourier*. L'utilisation du principe de superposition de l'élasticité linéaire et l'exploitation de la symétrie géométrique du domaine traité nous permet d'améliorer cette approche à travers un

calcul des coefficients d'influence de la structure. Nous montrons, dans ce chapitre, que lorsque la couche élastique devient mince, le déplacement radial d'un point de la surface interne du tube est proportionnel à la pression appliquée en ce point. Ce modèle permettant de calculer rapidement le champ de déplacement radial de la couche élastique mince est appelé "modèle couche mince".

La modélisation par la méthode des éléments finis du problème bidimensionnel et tridimensionnel est présentée dans le quatrième chapitre. L'application de la méthode des éléments finis permet de résoudre les problèmes de la couronne circulaire, du tube et du secteur cylindriques en coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.

Dans la cinquième chapitre, nous testons les différentes approches élastiques développées dans le chapitre précédent pour la résolution du problème d'interaction fluide-structure dans le cas des paliers hydrodynamiques compliants (monocouches). Pour cela, nous écrivons les équations de base de la lubrification hydrodynamique à savoir les équations de la mécanique des films minces visqueux et l'équation géométrique du film pour des paliers cylindriques rigide et compliant. Dans le cas du palier compliant lubrifié par un fluide compressible (barotrope) et piézo-visqueux, l'équation de *Reynolds* est résolue par une méthode des différences finies centrées. Le système d'équations algébriques non linéaires obtenu est résolu par la méthode itérative de *Newton-Raphson* amortie.

Enfin, nous terminons ce chapitre par une étude des effets de l'élasticité des revêtements de surface constitués de matériaux compressibles et quasi-incompressibles sur les performances statiques d'un palier lisse lubrifié avec un fluide compressible (barotrope) et piézo-visqueux. Les lois de variation viscosité-pression et densité-pression utilisées sont celles proposées par *Barus* et *Dowson-Higginson*.

# CHAPITRE I

## Equations générales de la mécanique des solides déformables

### 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les équations générales permettant de décrire le comportement d'un solide déformable.

Dans la première partie de ce chapitre, nous indiquons les définitions permettant de caractériser le modèle du corps élastique ainsi que les caractéristiques de description géométrique d'une configuration d'un solide à l'instant  $t$  en utilisant les coordonnées cartésiennes, cylindriques et polaires.

La deuxième partie est consacrée à la description de l'état des contraintes et des déformations et à l'écriture des équations d'équilibre et les relations de base de la théorie de l'élasticité linéaire, basée sur les hypothèses de petits déplacements (linéarité géométrique) et de linéarité entre contraintes et déformations (linéarité physique). Dans le cadre de la théorie de l'élasto-statique linéaire, les contraintes et les déformations sont reliées par l'équation constitutive de *Hooke* pour des milieux élastiques isotropes ou anisotropes.

Dans la troisième partie, nous appliquons le principe des travaux virtuels (PTV) en vue de construire la forme variationnelle du problème de l'élasticité linéaire. La discrétisation de celle-ci par éléments finis (M.E.F) permettra de trouver une solution approchée des problèmes de valeur aux limites de l'élasticité (*Dirichlet*, *Neumann* et mixte).

### 2. Eléments de la théorie géométrique du milieu continu (continuum)

#### 2.1. Notations

Nous allons considérer des corps occupant dans l'espace euclidien des domaines  $V$  de frontière  $S$ . Tout domaine sera rapporté à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales  $(o, x_1, x_2, x_3)$  ou  $(o, x, y, z)$  fixes. Les vecteurs unitaires des axes seront notés  $(e_1, e_2, e_3)$  ou  $(i, j, k)$ . Chaque fonction du point  $x$  sera désignée par  $f(x)$  ou bien  $f(x_1, x_2, x_3)$  ou encore  $f(x, y, z)$ . Afin d'abrégier les formules, les dérivées partielles seront notées.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x}, \text{ etc.}$$

En coordonnées polaires et cylindriques, on fera usage des notations  $f_r; f_\theta; f_z$ . Le signe de sommation par rapport à des indices littéraux répétés (indices muets) sera omis. Si un

indice qui se répète n'est toutefois pas un indice de sommation, cela ne peut entraîner aucune confusion, puisqu'il apparaît aussi dans l'autre membre de l'égalité.

Les crochets  $[ ]$  seront utilisés pour indiquer la dimension d'une grandeur physique ainsi que les matrices, et les symboles  $\{ \}$  et  $\langle \rangle$  pour indiquer les vecteurs colonnes et les vecteurs lignes tel que  $\langle \rangle \equiv \{ \}^T$ . Enfin les quantités scalaires et vectorielles sont respectivement indiquées en caractères maigre et gras.

## 2.2. Continuité des fonctions

Considérons une fonction  $f$  définie en certains points de  $V$  si le point  $x$  appartient à  $V$ , si  $f(x)$  a un sens, en fin, si pour tout ensemble de points  $x_n$  qui tendent vers  $x$  et pour lesquels  $f(x)$  a un sens, la fonction  $f$  est dite continue en  $x$ . Si  $f$  n'est pas définie en  $x$ , mais si la limite existe, et est unique pour tout ensemble de points  $x_n$ , on dit que  $f$  peut être prolongée par continuité dans  $x$ .

## 2.3. Milieux continus (continuum)

Nous supposons que la matière constituant le continuum est distribuée de façon continue dans  $V$ , ce qui revient à dire que tout point géométrique dans  $V$  est un point matériel.

Si la masse volumique (appelée aussi densité)  $\rho$  en tout point  $x$  du domaine  $V$  est constante, alors  $V$  est homogène du point de vue de la masse volumique.

## 2.4. Déplacements et déformations

Supposons que le corps  $V$  ne soit soumis à aucune action extérieure. Cet état pratiquement irréalisable et conçu seulement comme un état idéal est appelé état naturel.

Supposons maintenant que le corps soit sollicité par un système de forces et de liaisons géométriques, la matière contenue dans  $V$  vient occuper une autre position, désignée par  $V^*$ , de frontière  $S^*$ . Afin que le corps se trouve en équilibre comme corps déformable, il faut d'abord que le système des forces appliquées y compris les forces de réaction exercées par les liaisons géométriques soit statiquement équivalent avec zéro.

Nous allons nous limiter au cas du passage du corps  $V$  d'une position d'équilibre à une autre. La position de chaque point  $V$ , rapportée aux coordonnées fixes, subit donc une modification : ce processus sera appelé déplacement. Les distances réciproques entre les points et angles entre les éléments linéaires vont aussi être modifiés : ce processus sera appelé déformation.

## 3. Modèle du corps élastique

Dans son ouvrage [1], *L. Solomon* décrit certaines hypothèses liées au modèle du corps élastique et classe ces hypothèses en deux catégories :

- hypothèses fondamentales ;
- hypothèses simplificatrices.

### 3.1. Hypothèses fondamentales

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques hypothèses fondamentales qui doivent caractériser le modèle du corps élastique.

**a) hypothèse de l'espace-temps newtonien**

L'espace est euclidien (à trois dimensions), le temps est indépendant des coordonnées spatiales, les lois de *Newton* sont valables.

**b) hypothèse du milieu continu**

Chaque domaine élémentaire contient de la matière. Ce point de vue trouve sa justification dans la petitesse des particules élémentaires par rapport aux dimensions des corps usuels.

**c) hypothèse de la rigidisation des parties (ou de la solidification)**

Un corps se trouve en équilibre si et seulement si les forces agissant sur chacune de ses parties forment un système de torseur nul. Cette hypothèse permet de séparer une partie arbitraire du corps, de remplacer l'action du reste par certaines forces et de déterminer ces dernières par la condition que l'équilibre du corps entier reste intact. Comme cette partie peut être arbitrairement petite, ceci conduit à formuler les relations d'équilibre sous forme différentielle, valables en chaque point du corps.

**d) hypothèse de la dépendance locale**

Les forces intérieures (tensions) sont des fonctions du point, de la déformation, de la température, etc. mais ne dépendent pas explicitement des gradients ; c'est à dire des dérivées spatiales de ces grandeurs. Ceci établit une dépendance ponctuelle, locale entre les paramètres statiques et géométriques, en excluant (l'action à distance) et en interprétant les forces de cohésion intermoléculaires.

Pour définir le corps élastique, on leur ajoute :

**e) hypothèse de l'élasticité idéale**

Il existe une correspondance biunivoque entre les déformations et les tensions. Ceci caractérise donc un certain état de la matière, état dans lequel la connaissance des tensions et celle des déformations fournissent des informations équivalentes. Cette hypothèse implique le caractère réversible de la déformation, et se trouve en concordance avec la manière courante de définir un corps élastique, un corps qui revient à son état initial, une fois la charge est supprimée.

### 3.2. Hypothèses simplificatrices

Le modèle considéré conduit généralement à des problèmes mathématiques complexes. Souvent, on peut aux cinq hypothèses déjà considérées, en ajouter cinq autres. Ces hypothèses sont :

**a) l'hypothèse d'hyperélasticité**

Le travail mécanique nécessaire pour déformer le corps dépend seulement de son état initial et de son état final.

**b) l'hypothèse de linéarité géométrique**

Les déformations sont des fonctions linéaires des dérivées des déplacements.

c) l'hypothèse de linéarité physique  
 les tensions sont des fonctions linéaires des déformations.

d) l'hypothèse d'isotropie  
 Les propriétés mécaniques du matériau ne changent pas avec la direction autour du point.

e) l'hypothèse d'homogénéité  
 Les propriétés mécaniques du matériau ne changent pas avec le point dans le corps.

L'ensemble de ces hypothèses conduit à la théorie de l'élasticité linéaire des corps isotropes et homogènes. Le problème de mécanique se réduit alors à l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaire et à coefficients constants.

#### 4. Description d'une configuration

Ce paragraphe a pour objectif de définir les caractéristiques géométriques de description d'une configuration d'un corps solide à l'instant  $t$ . Les variables de cette configuration  $C(t)$  sont souvent représentées dans un repère cartésien  $i, j, k$  avec les coordonnées  $x, y, z$ . Ce corps est soumis à différentes sollicitations statiques et/ou dynamiques figure (I-1). Les quantités géométriques, cinématiques et mécaniques permettant de décrire les caractéristiques de la configuration  $C(t)$  sont :

- les positions géométriques dans l'espace euclidien  $\mathbf{x}(t)$  des points matériels du corps déformable de volume  $V(t)$  et de frontière  $S(t)$  ;
- les vitesses et l'accélération des points matériels

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \text{ et } \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} ;$$

- la masse volumique  $\rho(\mathbf{x}, t)$  ;
- les contraintes internes  $[\sigma(\mathbf{x}, t)]$  des points matériels ;

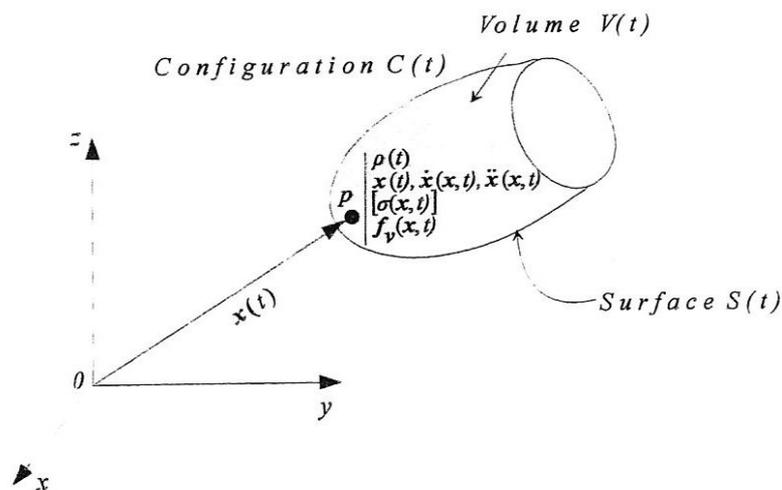


Fig. I. 1: Solide dans la configuration  $C(t)$ .

- les forces par unité de volume  $f_v(\mathbf{x}, t)$ , les forces par unité de surface  $f_s(\mathbf{x}, t)$  agissant sur la partie  $S_t$  de la surface  $S$ .

Les caractéristiques de la configuration  $C(t)$  sont généralement décrites dans un repère matérialisant un référentiel absolu ou galiléen, lié à l'observateur et dont on postule l'existence des différentes configurations  $C^t \equiv C(t')$  définissant le solide au cours du temps. La description des variables définies ci-dessus en fonction des positions  $x^r$  des particules dans une configuration  $C^r \equiv C(t')$  (dite configuration de référence) est appelée description matérielle ou description lagrangienne. Les variables  $x(t)$  sont alors définies par :

$x(t) = x(x^r, t)$ .  $x^r$  sont les coordonnées matérielles (ou lagrangiennes) et  $x$  les coordonnées spatiales (ou eulériennes). La description lagrangienne totale (DLT) en analyse non linéaire des structures utilise la configuration initiale du corps, notée  $C^0$  pour décrire toutes les configurations successives  $C^t$  :  $x(t) = x(x^0, t)$

## 5. Contraintes et équations d'équilibre

Nous décrivons dans ce paragraphe une représentation des efforts intérieurs que subit chaque point matériel (particule) du continuum  $V$ . L'application des théorèmes généraux de la mécanique conduit à généraliser la notion élémentaire de pression dans un fluide en postulant que les actions exercées sur une facette en un point du continuum sont caractérisées par un vecteur de contraintes ne dépendant que de l'orientation de la facette (postulat de *Cauchy*). L'existence et la symétrie du tenseur des contraintes, dans le cas de solides non polaires, sont ensuite établies à partir des théorèmes généraux, c'est-à-dire du théorème de la quantité de mouvement et du théorème du moment cinétique.

Dans ce qui suit, on supposera que les seules actions à distance qui interviennent sont les forces massiques. Les actions de contact, c'est-à-dire les actions exercées sur une partie de la frontière  $\partial V$  du domaine  $V$  occupé par le continuum à l'instant  $t$ , sont décrites à l'aide du postulat de *Cauchy* (1821).

### 5.1. Contraintes de Cauchy

La notion de contrainte est le concept de la mécanique des milieux continus le plus difficile à introduire. Ayant un caractère eulérien, elle doit en tout cas être définie dans la configuration courante  $C(t)$  (actuelle). C'est-à-dire qu'on étudie au cours du temps ce qui se passe dans une région du corps  $V$  du point de vue tension. Considérons la force  $\Delta f$  qui s'exerce sur un élément de surface  $\Delta S$  de normale  $\mathbf{n}$  au point  $p$  dans la configuration  $C(t)$  figure (I-2). Le vecteur contraintes (forces de cohésion par unité de surface) au point  $p$  est défini par le postulat de *Cauchy* :

$$\sigma(p, \mathbf{n}) = \sigma(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta S} \quad (I-1)$$

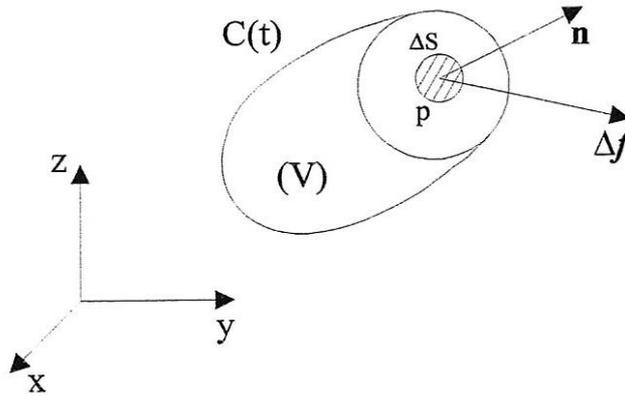


Fig. I. 2: Facette de normale  $\mathbf{n}$ .

Il existe ainsi une infinité de vecteurs contraintes au point  $p$  dépendant de l'orientation du vecteur  $\mathbf{n}$ . Lorsque l'élément de surface  $\Delta S$  tourne autour de  $p$ , l'extrémité du vecteur contraint se déplace sur un ellipsoïde (appelé ellipsoïde de Lamé) dont les trois axes sont inégaux. Ces axes représentent les trois directions principales. Soient  $\sigma(i)$ ,  $\sigma(j)$ ,  $\sigma(k)$  les vecteurs contraintes agissant sur les facettes de normales  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  du repère  $x, y, z$  figure (I-3).

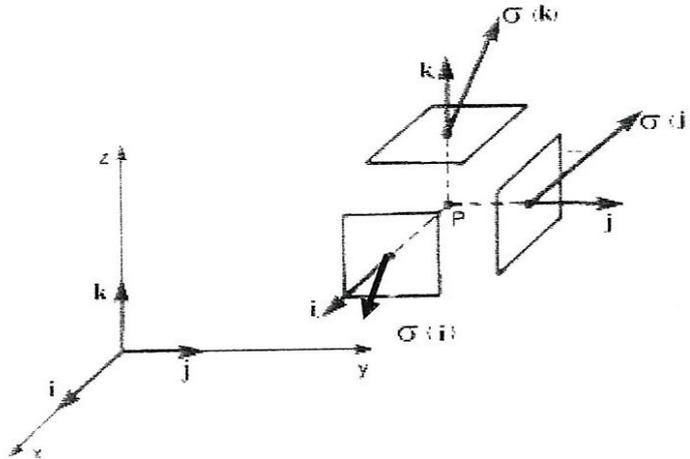


Fig. I. 3: Vecteurs contraintes en  $p$  (les trois plans sont définis au point  $p$ ).

Les composantes des vecteurs contraintes sont définies en coordonnées cartésiennes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sigma(i) &= \sigma_{xx} \mathbf{i} + \sigma_{yx} \mathbf{j} + \sigma_{zx} \mathbf{k} \\ \sigma(j) &= \sigma_{xy} \mathbf{i} + \sigma_{yy} \mathbf{j} + \sigma_{zy} \mathbf{k} \\ \sigma(k) &= \sigma_{xz} \mathbf{i} + \sigma_{yz} \mathbf{j} + \sigma_{zz} \mathbf{k}\end{aligned}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy au point  $p$  est représenté par la matrice (3×3) suivante :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = [\sigma(i) : \sigma(j) : \sigma(k)] \quad (I-2)$$

Les composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  sont appelées contraintes normales ;  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{zy}$ ,  $\sigma_{yz}$  sont les contraintes de cisaillement.

Les composantes cartésiennes sont représentées positivement sur la figure (I-4). Elles décrivent l'état de contraintes au point  $p$ .

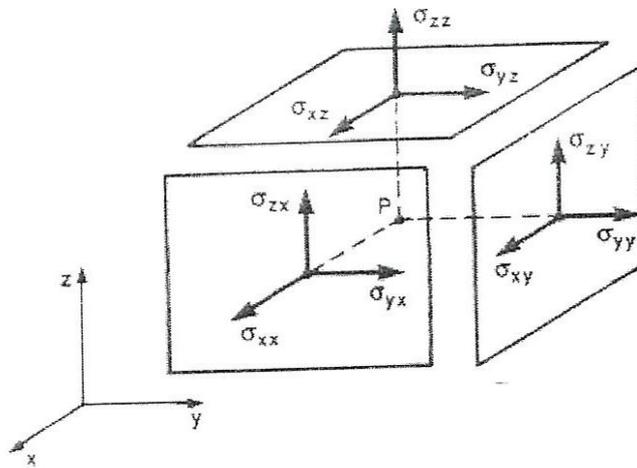


Fig. I. 4: Composantes du tenseur des contraintes de Cauchy  $[\sigma]$ .

### 5.1.1. Equilibre sur un tétraèdre

Le principe des actions mutuelles (action et réaction) se traduit sous la forme générale :

$$\sigma(-\mathbf{n}) + \sigma(\mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (I-3)$$

Considérons une facette  $dS$  de normale  $\mathbf{n}$  de cosinus directeurs  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  :

$$\langle \mathbf{n} \rangle = \langle n_x : n_y : n_z \rangle$$

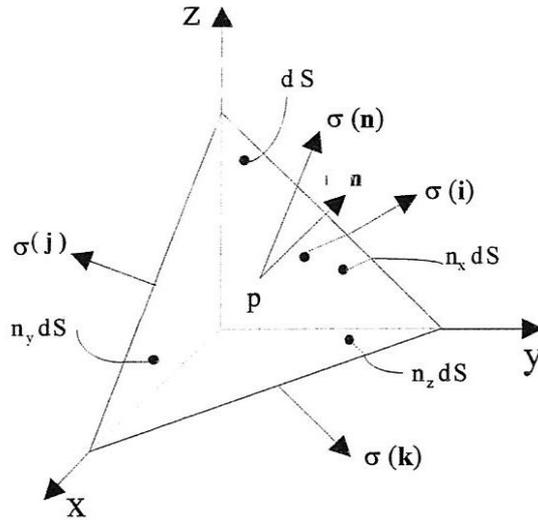


Fig. I. 5: Equilibre sur un tétraèdre.

Nous avons ainsi figure (I-5) :

$$n dS = n_x dS \mathbf{i} + n_y dS \mathbf{j} + n_z dS \mathbf{k}$$

L'équilibre au point  $p$  conduit à :

$$\sigma(\mathbf{n}) + n_x \sigma(-\mathbf{i}) + n_y \sigma(-\mathbf{j}) + n_z \sigma(-\mathbf{k}) = 0$$

d'où :

$$\sigma(\mathbf{n}) = n_x \sigma(\mathbf{i}) + n_y \sigma(\mathbf{j}) + n_z \sigma(\mathbf{k}) \quad (\text{I-4})$$

Soit, sous forme matricielle (formule de *Cauchy*) :

$$\{\sigma(\mathbf{n})\} = [\sigma] \{\mathbf{n}\} \quad ; \quad \langle \sigma(\mathbf{n}) \rangle = \langle \sigma_{xn} \quad \sigma_{yn} \quad \sigma_{zn} \rangle$$

où :

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z$$

$$\sigma_{yn} = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z \quad (\text{I-5a})$$

$$\sigma_{zn} = \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z$$

$$\sigma_n = \sigma(\mathbf{n}) \mathbf{n} \text{ est la contrainte normale sur } dS.$$

Si le milieu extérieur (du côté de la normale) exerce une traction sur  $dS$  alors  $\sigma_n$  est positive ; si le milieu extérieur exerce une compression (ou une pression) alors  $\sigma_n$  est négative.

Le vecteur contrainte tangentiel est défini par :  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n}) - \sigma \boldsymbol{n}$ .

En adoptant la notation indicielle, les équations (I-5a) s'écrivent :

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{I-5b})$$

### 5.1.2. Contraintes en coordonnées cylindriques

La matrice représentant le tenseur des contraintes en coordonnées cylindriques  $[\boldsymbol{\sigma}(r, \theta, z)]$  figure (I-6) s'écrit :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{I-6})$$

Le vecteur  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  est :  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \sigma_{rr} \ ; \ \sigma_{\theta\theta} \ ; \ \sigma_{zz} \ ; \ \sigma_{r\theta} \ ; \ \sigma_{rz} \ ; \ \sigma_{\theta z} \rangle$

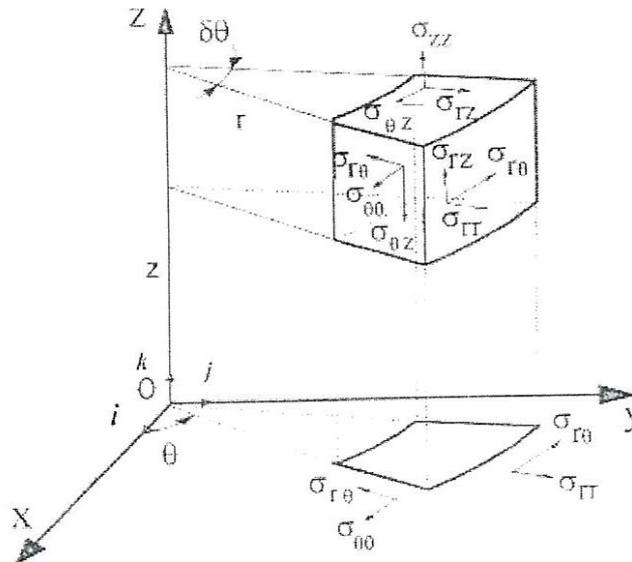


Fig. I. 6: Contraintes en coordonnées cylindriques.

### 5.2. Equations d'équilibre

Le solide dans la configuration  $C(t)$  est soumis à l'action de forces de volume  $f_v(\mathbf{x}, t)$  et de forces d'accélération  $\rho \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$  (par rapport au repère galiléen) et définies par unité de volume ; c'est à dire  $[f_v] = [\rho \ddot{\mathbf{x}}] = F L^{-3}$ . En considérant l'équilibre d'un élément de volume  $dV$  au voisinage du point  $p$ , on obtient en coordonnées cartésiennes figure (I-7) :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_v^x &= \rho \ddot{x} \\
 \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + f_v^y &= \rho \ddot{y} \\
 \sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} + f_v^z &= \rho \ddot{z}
 \end{aligned}
 \tag{I-7}$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\{div[\sigma]^T\} + \{f_v\} = \rho \{\ddot{x}\} \quad ; \quad \langle f_v \rangle = \left\langle f_v^x \quad ; \quad f_v^y \quad ; \quad f_v^z \right\rangle
 \tag{I-8a}$$

En notation indicielle :

$$\sigma_{ij,j} + f_v^i = \rho \ddot{x}_i, \quad i, j = 1, 2, 3
 \tag{I-8b}$$

ou sous forme vectorielle :

$$div \sigma + f_v = \rho \frac{d^2 x}{dt^2}
 \tag{I-8c}$$

avec  $\{\ddot{x}\} = \left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} \right\}$  ;  $\rho$  étant la masse volumique

$$\{div[\sigma]^T\} = (\langle div \rangle [\sigma]^T)^T$$

La figure (I-7) illustre l'équilibre local d'un élément bidimensionnel. L'équilibre des moments autour des axes passant par  $p_c$  en l'absence de couples répartis à l'intérieur et à la surface du solide (cas non polaire) conduit à :  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  ;  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$  ;  $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ . Soit :

$$[\sigma] = [\sigma]^T$$

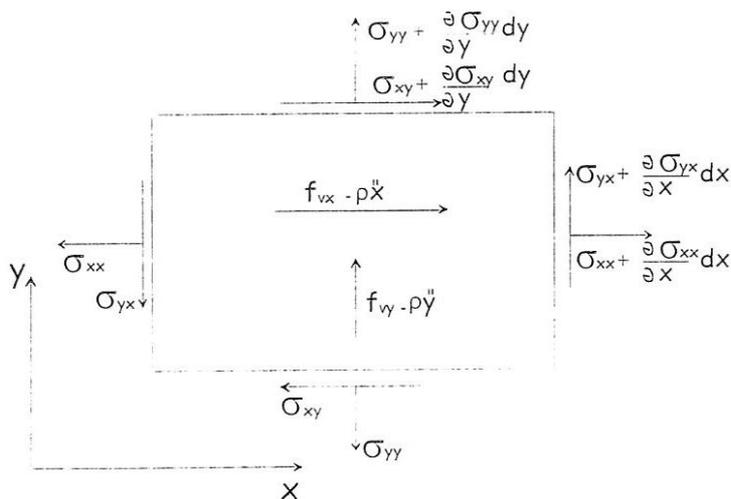


Fig. I. 7: Equilibre d'un élément  $dx \, dy$ .

Nous définissons ainsi le vecteur  $\langle \sigma \rangle$  à six composantes :

$$\langle \sigma \rangle = \left\langle \sigma_{xx} \quad ; \quad \sigma_{yy} \quad ; \quad \sigma_{zz} \quad ; \quad \sigma_{xy} \quad ; \quad \sigma_{xz} \quad ; \quad \sigma_{yz} \right\rangle
 \tag{I-9}$$

En chaque point de la frontière  $S$  du volume figure (I-8), le vecteur contrainte  $\sigma(\mathbf{n})$  représente soit les forces imposées  $\mathbf{f}_s(\mathbf{n})$ , soit les réactions associées aux liaisons où les déplacements sont imposés.  $S_t$  est la partie du contour où les forces sont imposées et  $S_u$  celle où les déplacements sont imposés tel que :

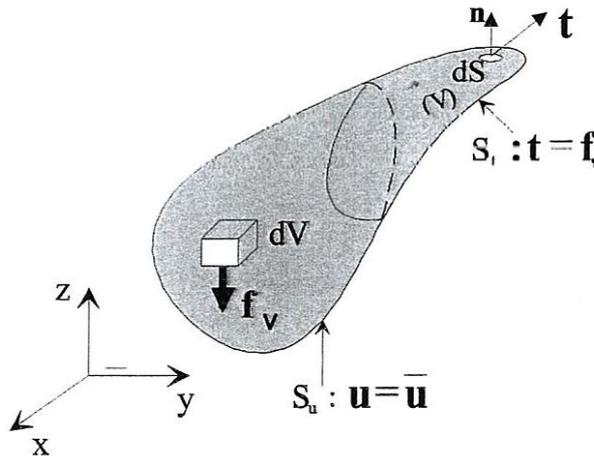
$$\partial V = S = S_u \cup S_t \quad \text{et} \quad S_u \cap S_t = \{\emptyset\} \quad (\text{I-10})$$

ainsi sur  $S_t$  :

$$[\sigma][\mathbf{n}] = \{f_s\} \quad ; \quad \langle f_s \rangle = \langle f_{s_x} \quad f_{s_y} \quad f_{s_z} \rangle$$

où  $(\mathbf{n})$  représente la normale orientée vers l'extérieur.

$f_{s_x}, f_{s_y}, f_{s_z}$  sont les sollicitations surfaciques suivant  $x, y$  et  $z$  figure (I-8).



**Fig. I. 8:** Définition des conditions aux limites sur les deux parties de la frontière ( $S$ ).

### 5.2.1. Equations d'équilibre en coordonnées polaires

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , les composantes du tenseur  $[\sigma]$  sont :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I-11})$$

L'équilibre des forces suivant la direction radiale  $r$  (d'un élément différentiel au voisinage du point  $p$ ) se traduit par :

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r} \sigma_{rr} + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta,\theta} - \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta} + f_{v,r} = 0 \quad (\text{I-12})$$

L'équilibre des forces suivant la direction circonférentielle  $\theta$  s'écrit :

$$\sigma_{r\theta,r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta,\theta} + f_{v_\theta} = 0 \quad (I-13)$$

### 5.2.2. Equations d'équilibre en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , les équations d'équilibre s'écrivent en tenant compte des forces d'accélération :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,r} + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rz,z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + f_{v_r} &= \rho \ddot{x}_r \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta,\theta} + \sigma_{\theta z,z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + f_{v_\theta} &= \rho \ddot{x}_\theta \\ \sigma_{rz,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta z,\theta} + \sigma_{zz,z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + f_{v_z} &= \rho \ddot{z} \end{aligned} \quad (I-14)$$

où  $\ddot{x}_r$ ,  $\ddot{x}_\theta$  et  $\ddot{z}$  sont les composantes de l'accélération suivant  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  et  $f_{v_r}(r, \theta, z)$ ,

$f_{v_\theta}(r, \theta, z)$ ,  $f_{v_z}(r, \theta, z)$  les forces volumiques suivant  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ .

## 6. Déformations et relations de compatibilité

La présentation des relations caractérisant ce que l'on appelle habituellement la «théorie de l'élasticité linéaire», se base sur les hypothèses de petits déplacements ou de petites perturbations et de linéarité entre contraintes et déformations. —

### 6.1. Déformations

Soit  $C^\circ$  la configuration du solide à l'instant  $t = 0$ . Sous l'action de forces de volume  $f_v$  et de surface  $f_s$  le solide se déplace et se déforme. La configuration à l'instant  $t$  est notée  $C(t)$  figure (I-9).

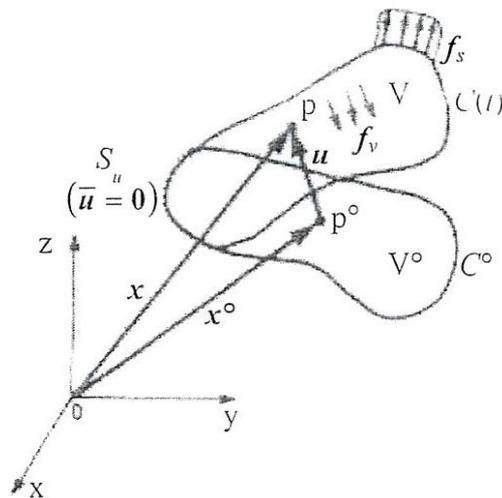


Fig. I. 9: Configurations  $C^\circ$  et  $C(t)$ .

Un point  $p^\circ$  de coordonnées initiales  $x^\circ, y^\circ, z^\circ$  vient en  $p$  de coordonnées  $x, y, z$  tel que:

$$\mathbf{x}(x^\circ, t) = \mathbf{x}^\circ + \mathbf{u}(x^\circ, t) \quad (\text{I-15})$$

$\mathbf{u}(x^\circ, t)$  est le vecteur déplacement de composantes  $u, v, w$  suivant  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

Sur une partie du contour du solide définie par  $S_u$ , les positions en  $C(t)$  peuvent être déterminées à priori indépendamment des sollicitations imposées :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^\circ + \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } S_u$$

où  $\bar{\mathbf{u}}$  est le vecteur des déplacements imposés tel que  $\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle = \langle \bar{u} : \bar{v} : \bar{w} \rangle$ .

Le vecteur  $d\mathbf{x}^\circ$  en  $p^\circ$  se transforme en  $d\mathbf{x}$  au point  $p$  figure (I-10) :

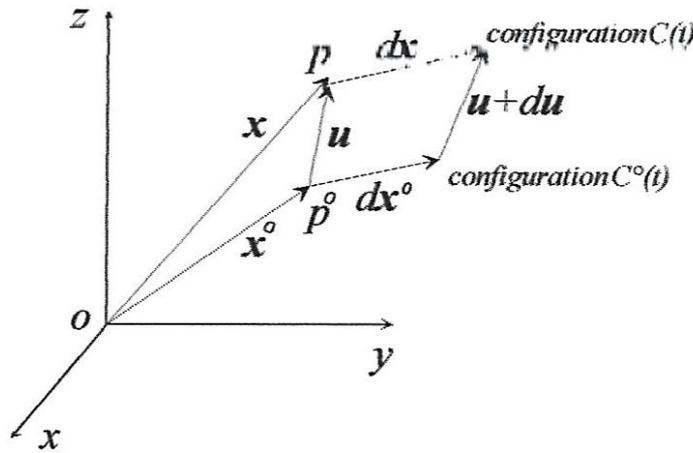
$$d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^\circ + d\mathbf{u}$$


Fig. I. 10: Vecteurs  $d\mathbf{x}^\circ$  et  $d\mathbf{x}$  dans les configurations  $C^\circ$  et  $C(t)$ .

En composantes cartésiennes :

$$\begin{aligned} \{d\mathbf{x}\} &= [F]\{d\mathbf{x}^\circ\} \\ [F] &= [I] + [L^\circ] \end{aligned} \quad (\text{I-16})$$

$$[L^\circ] = [D^\circ] + [W^\circ] \quad (\text{I-17})$$

$$[D^\circ] = \frac{1}{2} \left( [L^\circ] + [L^\circ]^T \right) \quad (\text{I-18})$$

$$[W^\circ] = \frac{1}{2} \left( [L^\circ] - [L^\circ]^T \right) \quad (\text{I-19})$$

avec

$$\begin{aligned}
 [F] &= \begin{bmatrix} I + u_{,x^0} & u_{,y^0} & u_{,z^0} \\ v_{,x^0} & I + v_{,y^0} & v_{,z^0} \\ w_{,x^0} & w_{,y^0} & I + w_{,z^0} \end{bmatrix} ; \quad [L^0] = \begin{bmatrix} u_{,x^0} & u_{,y^0} & u_{,z^0} \\ v_{,x^0} & v_{,y^0} & v_{,z^0} \\ w_{,x^0} & w_{,y^0} & w_{,z^0} \end{bmatrix} \\
 [D^0] &= \begin{bmatrix} u_{,x^0} & \frac{I}{2}(u_{,y^0} + v_{,x^0}) & \frac{I}{2}(u_{,z^0} + w_{,x^0}) \\ & v_{,y^0} & \frac{I}{2}(v_{,z^0} + w_{,y^0}) \\ sym & & w_{,z^0} \end{bmatrix} ; \quad [W^0] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{I-20}$$

$$\text{où : } \theta_x = \frac{I}{2}(w_{,y^0} - v_{,z^0}) ; \theta_y = \frac{I}{2}(u_{,z^0} - w_{,x^0}) ; \theta_z = \frac{I}{2}(v_{,x^0} - u_{,y^0})$$

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$  représentent des rotations infinitésimales autour des axes  $x, y, z$  ne produisant aucune déformation.  $[F]$  est le tenseur gradient de déplacement.  $[L^0]$  est le tenseur des déformations linéaires.

La longueur du vecteur  $dx$  est  $ds$  telle que figure (I-10).

$$(ds)^2 = \langle dx \rangle \{ dx \} = \langle dx^0 \rangle [F]^T [F] \{ dx^0 \}$$

Le changement de longueur de l'élément  $dx^0$  est :

$$(ds)^2 - (ds^0)^2 = \langle dx^0 \rangle ([F]^T [F] - [I]) \{ dx^0 \} \tag{I-21}$$

Cette quantité fournit une mesure de la déformation du corps au point  $p$ :

- si  $(ds)^2 - (ds^0)^2 = 0$  les déformations au point  $p$  sont nulles, la fibre  $dx^0$  a subi un mouvement de corps rigide (translation et rotation) caractérisé par :

$$\{ dx \} = [Q] \{ dx^0 \} \tag{I-22}$$

où  $[Q]$  est une matrice de rotation.

- si  $(ds)^2 - (ds^0)^2 \neq 0$ , la fibre  $dx$  a subi une rotation et une élongation qui caractérise l'état de déformation au point  $p$ .

La quantité  $(ds)^2 - (ds^0)^2 \neq 0$  définit ainsi une mesure de déformation au point  $p$ , dite déformation de *Green - Lagrange* :

$$(ds)^2 - (ds^0)^2 = 2 \langle dx^0 \rangle [E] \{ dx^0 \} \tag{I-23}$$

avec

$$[E] = \frac{I}{2} ([F]^T [F] - [I]) \tag{I-24}$$

$[E]$  est une fonction linéaire et quadratique des gradients de déplacements :

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ & E_{yy} & E_{yz} \\ \text{sym.} & & E_{zz} \end{bmatrix} \quad (I-25)$$

$$\begin{aligned} E_{xx} &= u_{,x^0} + \frac{1}{2} \left( (u_{,x^0})^2 + (v_{,x^0})^2 + (w_{,x^0})^2 \right) \\ E_{yy} &= v_{,y^0} + \frac{1}{2} \left( (u_{,y^0})^2 + (v_{,y^0})^2 + (w_{,y^0})^2 \right) \\ E_{zz} &= w_{,z^0} + \frac{1}{2} \left( (u_{,z^0})^2 + (v_{,z^0})^2 + (w_{,z^0})^2 \right) \\ E_{xy} &= \frac{1}{2} (u_{,y^0} + v_{,x^0}) + \frac{1}{2} (u_{,x^0} u_{,y^0} + v_{,x^0} v_{,y^0} + w_{,x^0} w_{,y^0}) \\ E_{xz} &= \frac{1}{2} (u_{,z^0} + w_{,x^0}) + \frac{1}{2} (u_{,x^0} u_{,z^0} + v_{,x^0} v_{,z^0} + w_{,x^0} w_{,z^0}) \\ E_{yz} &= \frac{1}{2} (v_{,z^0} + w_{,y^0}) + \frac{1}{2} (u_{,y^0} u_{,z^0} + v_{,y^0} v_{,z^0} + w_{,y^0} w_{,z^0}) \end{aligned} \quad (I-26)$$

La théorie linéaire classique de l'élasticité est basée sur les hypothèses suivantes :

- les gradients des déplacements sont supposés petits, les produits et les carrés des premières dérivées sont alors négligeables :

$$[E] \approx [D^0] = \frac{1}{2} ([L^0] + [L^0]^T) \quad (I-27)$$

- les déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont petits par rapport aux dimensions du solide :

$$\max(|u|, |v|, |w|) \ll L \quad (I-28)$$

où  $L$  est une longueur caractéristique du solide.

Ces hypothèses permettent de confondre les configurations  $C(t)$  et  $C^0$  pour écrire les équations d'équilibre et effectuer les intégrations :

$$dV = \det [F] dV^0 \approx (1 + e_v) dV^0 \approx dV^0$$

avec  $e_v = u_{,x^0} + v_{,y^0} + w_{,z^0} = \text{tr}[D^0]$

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial x^0}, \text{ etc.} \quad (I-29)$$

Dans la théorie linéaire de l'élasticité, nous confondrons  $x$ ,  $y$ ,  $z$  avec  $x^0$ ,  $y^0$ ,  $z^0$  pour décrire les différentes quantités (déformations, équilibre des contraintes, éléments de volume et de surface).

Nous utiliserons désormais les notations et définition suivantes pour les déformations linéaires :

$$[D^0] = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ sym. & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \approx [D] = \frac{1}{2} ([L] + [L]^T) \quad (I-30a)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) \\ & v_{,y} & \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) \\ sym. & & w_{,z} \end{bmatrix} ; [L] = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ w_{,x} & w_{,y} & w_{,z} \end{bmatrix} \quad (I-30b)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ v_{,z} + w_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (I-31a)$$

ou encore  $\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}$

$$\text{avec } [\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (I-31b)$$

Les déformations  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  (parfois notées simplement  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ) sont les déformations dites normales,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  ou  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  sont les déformations de cisaillement.

Le tenseur de déformation linéaire  $\varepsilon$  s'écrit sous la forme indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (I-31c)$$

Le tenseur des déformations en coordonnées cylindriques est :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{I-32})$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{r,r} \\ \frac{1}{r} u_{\theta,\theta} + \frac{u_r}{r} \\ u_{zz} \\ u_{\theta,r} + \frac{1}{r} u_{r,\theta} - \frac{1}{r} u_{\theta} \\ u_{r,z} + u_{z,r} \\ \frac{1}{r} u_{z,\theta} + u_{\theta,z} \end{Bmatrix} \quad (\text{I-33a})$$

ou encore  $\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}$

$$\text{avec } [\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \left( -\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (\text{I-33b})$$

## 6.2. Equations de compatibilité

Quand les trois composantes du champ des déplacements sont connues, les six composantes du champ des déformations le sont aussi grâce aux relations qui les lient. Mais le problème inverse est plus délicat, manifestement il n'a pas de solution unique puisque le nombre des variables passe de six déformations à trois déplacements. Par conséquent, si l'on souhaite passer des déformations aux déplacements, il est nécessaire de contraindre le problème par des relations supplémentaires qui sont appelées relations de compatibilité. Le principe est que dans l'intégration du champ des déformations, obligatoire pour générer des déplacements, le résultat ne doit pas dépendre du chemin suivi.

En utilisant la notation indicielle, les équations de compatibilité s'écrivent sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{i,jj} + \varepsilon_{jj,ii} - 2\varepsilon_{ij,ij} = 0; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{I-34})$$

Les six équations précédentes sont les conditions nécessaires que doivent satisfaire les dérivées partielles d'ordre 2 des composantes  $\varepsilon_{ij}$  d'un tenseur symétrique. Pour que ces composantes puissent être considérées comme celles de la partie symétrique du tenseur gradient d'un champ de vecteur  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ .

## 7. Relations contraintes-déformations

Dans les paragraphes précédents, les notions de contraintes et de déformations ont été revues sans liens entre elles. En réalité, la résolution de la plupart des problèmes de structures nécessite l'utilisation des lois de comportement rhéologique du matériau.

### 7.1. Loi de Hooke généralisée

Pour les matériaux dits élastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Ces relations se traduisent sous la forme générale :

$$\sigma_{ij} = H_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{I-35})$$

Soit sous forme matricielle.

$$\{\sigma\} = [H] \{\varepsilon\} \quad (\text{I-36})$$

où les composantes  $H_{ijkl}$  font intervenir les caractéristiques physiques du matériau.

Les tenseurs  $[\sigma]$  et  $[\varepsilon]$  étant symétriques, nous avons :

$$H_{ijkl} = H_{jikl} \text{ et } H_{ijkl} = H_{ijlk}$$

où  $[H]$  est une matrice  $(6 \times 6)$ . En admettant l'existence d'une fonction scalaire dite énergie interne de déformation  $U$  telle que :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \text{tr}([\sigma][\varepsilon]) dV = \frac{1}{2} \int_V \langle \sigma \rangle \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon \rangle [H] \{\varepsilon\} dV \quad (\text{I-37})$$

Il en découle la symétrie de la matrice d'élasticité  $[H]$  qui n'a donc que vingt et une composantes dans le cas le plus général d'anisotropie.

### 7.2. Matériau élastique orthotrope

Un matériau orthotrope possède deux plans orthogonaux de symétrie élastique. La matrice  $[H]$  est alors définie en fonction de neuf caractéristiques mécaniques indépendantes.

Dans les axes d'orthotropie, on a :

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & H_{22} & H_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & H_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & H_{44} & 0 & 0 \\ & & & & H_{55} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & H_{66} \end{bmatrix} \quad (I-38)$$

### 7.3. Matériau élastique homogène et isotrope

Un matériau est isotrope si  $[H]$  reste invariant dans tout changement de repère.  $[H]$  n'est alors fonction que de deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  appelés coefficients de *Lamé*. Le coefficient  $\mu$  noté aussi  $G$  est souvent appelé module de *Coulomb* ou module de cisaillement.

$$[H] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ \text{sym.} & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (I-39)$$

Les relations contraintes-déformations (I-35) s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_V + 2\mu \varepsilon_{ij} = (\lambda + 2\mu) \delta_{ij} \varepsilon_V + 2\mu (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_V) \quad : i, j = 1, 3 \quad (I-40)$$

avec  $\delta_{ij}$  symbole de *Kronecker* et  $\varepsilon_V$  déformation volumétrique :  $\varepsilon_V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ .

L'équation (I-40) est la loi de *Hooke* écrite sous forme tensorielle.

La loi de *Hooke* peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_h = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad i, j = 1, 3 \quad (I-41)$$

est la contrainte moyenne ou hydrostatique qui s'exprime par :

$$\sigma_h = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \text{ ou bien } \sigma_h = K \varepsilon_V$$

avec  $K = \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu)$  qui est le module de compression hydrostatique.

Les coefficients  $\lambda$  et  $K$  s'expriment ainsi en fonction de  $E$  et  $\nu$  par :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'élasticité (ou module d'Young) et le coefficient de Poisson.

En thermo-élasticité linéaire, l'équation constitutive prend la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta(T - T_0) \delta_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, 3 \quad (\text{I-42})$$

avec

$$\beta = \frac{E\alpha}{1 - 2\nu}$$

$\alpha$  étant le coefficient de dilatation thermique et  $(T - T_0)$  la variation de la température.

L'équation (I-42) s'appelle loi de *Duhamel-Neumann* valable pour un milieu élastique, homogène et isotrope.

### 8. Equations de compatibilité de *Beltrami-Michell*

La formulation en contraintes dite de *Beltrami-Michell* consiste à prendre pour inconnues les composantes de contraintes. Mais les composantes de contraintes ne peuvent pas être arbitraires, elles doivent vérifier les six conditions de compatibilité aux dérivées partielles secondes (I-43). Les conditions générales de l'équilibre de *Beltrami-Michell* s'écrivent donc en notation indicielle :

$$f_{v_{i,j}} + f_{v_{j,i}} + \frac{\nu}{1 - \nu} \delta_{ij} f_{v_{k,k}} + \sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1 + \nu} \sigma_{kk,ij} = 0 \quad i, j = 1, 3 \quad (\text{I-43})$$

Ce sont les équations de compatibilité écrites en termes de contraintes pour des corps homogènes et isotropes, appelées d'habitude les équations de *Beltrami-Michell*. Elles ont été établies par *E. Beltrami* pour  $f_v = 0$ , et ultérieurement par *J.H. Michell* pour  $f_v \neq 0$ .

### 9. Equations de *Lamé* pour des corps homogènes et isotropes

Les équations de l'élasticité linéaire pour un corps solide homogène et isotrope sont établies dans les paragraphes précédents (I-8b), (I-31c) et (I-40). Ces trois équations sont appelées système d'équations de *Lamé*. Le report des relations (I-40) (loi physique) et (I-31c) (équations géométriques) dans les équations (I-8b) (équations d'équilibre) permet d'écrire celles-ci en termes de déplacements (équations de *Navier*) :

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} + f_{v_i} = \rho \ddot{u}_i \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{I-44a})$$

Cette expression peut se mettre sous la forme vectorielle :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mu}{1 - 2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f}_v = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{I-44b})$$

Ce sont les équations de *Lamé* établies par *G. Lamé* et *B. Clapeyron* et publiées en 1828. En partant de certaines considérations sur les forces intermoléculaires, *L. Navier* les avait déjà obtenues en 1821.

Dans le cas de l'élasto-statique et en supposant que les forces volumiques sont nulles, en dérivant chaque équation de (I-44a) respectivement par rapport à  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  et en faisant l'addition des trois équations, on obtient  $\nabla^2 e = 0$  tel que  $e = u_{i,i}$  qui est la dilatation cubique.

L'application de l'opérateur  $\nabla^2$  sur les équations (I-44b) conduit à écrire  $\nabla^2(\nabla^2 \mathbf{u}) = 0$ . Cette égalité traduit la biharmonicité des composantes de l'état élastique.

## 10. Principe des travaux virtuels ou des déplacements virtuels (PTV)

Dans ce paragraphe, nous allons traduire l'équilibre du solide dans la configuration  $C(t)$  sous une forme intégrale, lorsque le solide est soumis à l'action de sollicitations surfaciques et volumiques.

### 10.1. Mouvement et déformation virtuelles

Considérons un mouvement virtuel de la configuration réelle  $C(t)$  défini par un champ de déplacements virtuels noté  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ . La configuration virtuelle est notée  $C^*(t)$  figure (I-11).

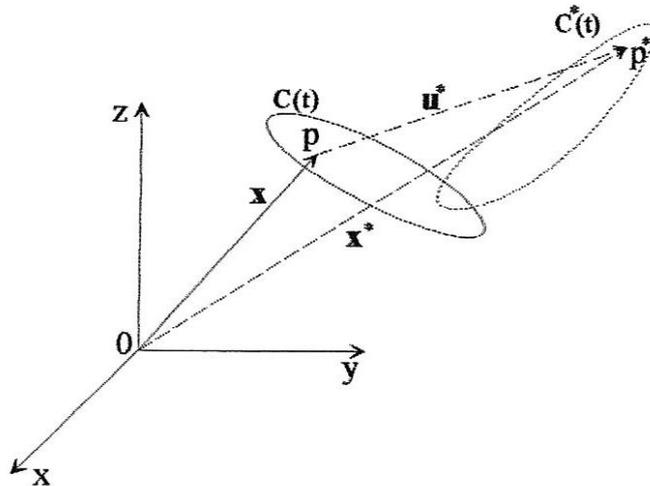


Fig. I. 11: *Mouvement virtuel.*

Le vecteur position d'un point  $p^*$  de  $C^*(t)$  est :

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{u}^* \quad (\text{I-45a})$$

En composantes cartésiennes :

$$\{x^*\} = \begin{Bmatrix} x^*(\mathbf{x}) \\ y^*(\mathbf{x}) \\ z^*(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^*(x, y, z) \\ v^*(x, y, z) \\ w^*(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (\text{I-45b})$$

Un champ  $u^*$  est dit cinématiquement admissible si les fonctions  $u^*(x)$  sont dérivables et si, sur les points du contour où les liaisons sont imposées (frontière  $S_u$ ), les déplacements virtuels  $u^*$  sont nuls. Un vecteur  $dx^*$  en  $p^*$  est donné par figure (I-12):

$$dx^* = dx + du^* \tag{I-46a}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \{dx^*\} = [I]\{dx\} + [L^*]\{du^*\} \\ \{dx^*\} = [F^*]\{dx\} \end{cases} \tag{I-46b}$$

avec

$$[F^*] = [I + u^*_{,x}] = [I] + [L^*] \tag{I-47}$$

$$[L^*] = [u^*_{,x}]$$

$[F^*]$  est appelé tenseur gradient de déplacements virtuels.

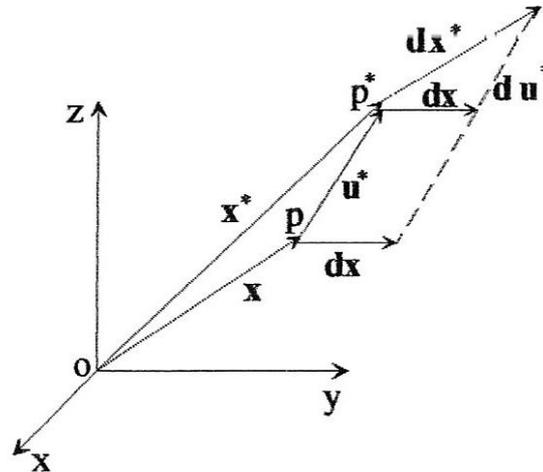


Fig. I. 12: Vecteurs  $dx^*$  et  $du^*$ .

En fonction des composantes cartésiennes  $u^*, v^*, w^*$  on obtient :

$$[F^*] = \begin{bmatrix} I + u^*_{,x} & u^*_{,y} & u^*_{,z} \\ v^*_{,x} & I + v^*_{,y} & v^*_{,z} \\ w^*_{,x} & w^*_{,y} & I + w^*_{,z} \end{bmatrix} ; \quad [L^*] = \begin{bmatrix} u^*_{,x} & u^*_{,y} & u^*_{,z} \\ v^*_{,x} & v^*_{,y} & v^*_{,z} \\ w^*_{,x} & w^*_{,y} & w^*_{,z} \end{bmatrix} \tag{I-48}$$

$$\{du^*\} = [L^*]\{dx\} \tag{I-49}$$

Nous admettons que l'application (I-46b) est biunivoque :

$$\{dx\} = [F^*]^{-1}\{dx^*\} ; \quad \det[F^*] > 0 \tag{I-50}$$

$[L^*]$  qui est non symétrique peut être décomposée en une matrice symétrique  $[D^*]$  et une matrice antisymétrique  $[W^*]$  :

$$[L^*] = \frac{1}{2}([L^*] + [L^*]^T) + \frac{1}{2}([L^*] - [L^*]^T) = [D^*] + [W^*] \quad (I-51)$$

avec

$$[D^*] = \begin{bmatrix} u^*_{,x} & \frac{1}{2}(u^*_{,y} + v^*_{,x}) & \frac{1}{2}(u^*_{,z} + w^*_{,x}) \\ & v^*_{,y} & \frac{1}{2}(v^*_{,z} + w^*_{,y}) \\ \text{sym.} & & w^*_{,z} \end{bmatrix}$$

$$[W^*] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta^*_{,z} & -\theta^*_{,y} \\ \theta^*_{,z} & 0 & -\theta^*_{,x} \\ \theta^*_{,y} & \theta^*_{,x} & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\theta^*_{,x} = \frac{1}{2}(w^*_{,y} - v^*_{,z})$ ;  $\theta^*_{,y} = \frac{1}{2}(-u^*_{,z} + w^*_{,x})$ ;  $\theta^*_{,z} = \frac{1}{2}(v^*_{,x} - u^*_{,y})$

$[D^*]$  et  $[W^*]$  sont les matrices représentant les tenseurs de déplacements et des rotations virtuels.

$$\{dx^*\} = [I]\{dx\} + [D^*]\{dx\} + [W^*]\{dx\} \quad (I-52)$$

$[W^*]\{dx\}$  est orthogonal à  $\{dx\}$  car  $\langle dx \rangle [W^*] \{dx\} = 0$

### 10.2. Expression du P.T.V

Le principe des travaux virtuels et celui du principe du minimum de l'énergie potentielle totale sont des modèles variationnels couramment utilisés en mécanique des solides et structures.

Les conditions d'équilibre du solide dans la configuration  $C(t)$  sont représentées par les équations aux dérivées partielles (I-8a) ou (I-8b) définies dans le volume  $V$  avec  $[\sigma] = [\sigma]^T$  et par les relations du type  $[\sigma]\{n\} = \{f_s\}$  sur la frontière  $\partial V$  (solicitation  $f_s$  sur  $S_f$  et réactions sur  $S_u$ ).

La forme variationnelle associée aux relations d'équilibre (I-8a) est obtenue par la méthode des résidus pondérés.

$$W = \int_V \langle u^* \rangle \left( \text{div} [\sigma] + \{f_v\} - \rho \{\ddot{x}\} \right) dV = 0 \quad (I-53)$$

En intégrant par parties, nous obtenons la forme faible  $W$  :

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \forall \{u^*(x, y, z)\} \quad (I-54)$$

avec

$$W_{int} = \int_V \left( u^*_{,x} \sigma_{xx} + v^*_{,y} \sigma_{yy} + w^*_{,z} \sigma_{zz} + (u^*_{,y} + v^*_{,x}) \sigma_{xy} + (u^*_{,z} + w^*_{,x}) \sigma_{xz} + (v^*_{,z} + w^*_{,y}) \sigma_{yz} \right) dV$$

et

$$W_{ext} = \int_V \langle u^* \rangle \{ f_v \} - \rho \{ \ddot{x} \} dV + \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{ f_s \} dS + \int_{S_u} \langle u^* \rangle \{ \sigma(n) \} dS$$

Sur la frontière  $S_u$  (où les déplacements sont imposés), les composantes de  $\{ \sigma(n) \}$  représentent les réactions dues aux liaisons. Si nous considérons un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible, c'est-à-dire :

$$u^*(x, y, z) = 0 \quad \text{sur } S_u \quad (I-55)$$

alors :

$$W_{ext} = \int_V \langle u^* \rangle \{ f_v \} dV + \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{ f_s \} dS - \int_V \langle u^* \rangle \rho \{ \ddot{x} \} dV \quad (I-56)$$

En adoptant la notation indicielle, l'équation (I-54) prend la forme suivante :

$$W = \int_V u^*_{i,j} \sigma_{ij} dV - \int_V u^*_i f_{v_i} dV + \int_V u^*_i \ddot{x}_i dV - \int_{S_f} u^*_i f_{s_i} dS = 0 \quad (I-57)$$

La symétrie du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  (solide non polaire pour lequel les couples de contraintes sont négligés) permet d'écrire :

$$W = \int_V \varepsilon^*_{ij} \sigma_{ij} dV - \int_V u^*_i (f_{v_i} - \rho \ddot{x}_i) dV - \int_{S_f} u^*_i f_{s_i} dS = 0 \quad (I-58)$$

avec  $f_{s_i} = \sigma_{ij} n_j$  et  $\sigma_{ij} = H_{ijkl} \varepsilon_{kl}$  ;  $i, j = 1, 2, 3$

$$\varepsilon^*_{ij} = \frac{1}{2} (u^*_{i,j} + u^*_{j,i}) \text{ étant le tenseur des déformations virtuelles.}$$

Cette forme variationnelle sert de base pour construire les modèles déplacements en éléments finis (Cf. chapitre 4).

Dans la formulation de type *Galerkin*, les déplacements virtuels  $u^*$  sont définis comme les variations des déplacements réels  $u$  :

$$u^* \equiv \delta u \quad (I-59)$$

où  $\delta u$  représente la variation de la fonction  $u$ .

L'opérateur  $\delta$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\delta(\delta u) = \delta^2 u = 0 ; \quad \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial \delta u}{\partial x} ; \quad \int_V \delta u dx = \delta \int_V u dx \text{ et } \delta(u^2) = 2u \delta u.$$

En utilisant la relation matricielle, l'expression de  $W$  de type *Galerkine* est alors :

$$W = \int_V \langle \delta \varepsilon \rangle [H] \langle \varepsilon \rangle dV - \int_V \langle \delta u \rangle \langle f_v \rangle dV - \int_{S_i} \langle \delta u \rangle \langle f_s \rangle dS + \int_V \langle \delta u \rangle \rho \langle \ddot{u} \rangle dV = 0$$

$$\forall \langle \delta u \rangle \text{ avec } \langle \delta u \rangle = \{0\} \text{ et } \langle u \rangle = \langle \bar{u} \rangle \text{ sur } S_u$$
(I-60)

On peut définir une fonctionnelle  $\Pi$ , appelée énergie potentielle totale telle que :

$$W = \delta \Pi = 0$$
(I-61)

avec  $\Pi = \Pi_{int} - \Pi_{ext}$  où  $\Pi_{int}$  est l'énergie interne de déformation :

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon \rangle [H] \langle \varepsilon \rangle dV$$
(I-62)

et  $\Pi_{ext}$  représente le travail des forces de volume et de surface :

$$\Pi_{ext} = \int_V \langle u \rangle \langle f_v \rangle dV + \int_{S_i} \langle u \rangle \langle f_s \rangle dS$$
(I-63)

La relation (I-61) montre que le PTV (I-60) correspond aux conditions de stationnarité de la fonctionnelle  $\Pi$ .

La seconde variation de  $\Pi$  est donnée par :

$$\delta^2 \Pi = \int_V \langle \delta \varepsilon \rangle [H] \langle \delta \varepsilon \rangle dV > 0 \quad \forall \langle \delta u \rangle \neq \{0\}$$
(I-64)

puisque  $[H]$  est une matrice définie positive.

La solution  $\langle u \rangle$  du problème d'élasticité vérifiant l'équation (I-60) rend ainsi l'énergie potentielle totale  $\Pi$  minimale.

En coordonnées cylindriques, la forme variationnelle de type *Galerkine* (I-60) prend la forme suivante :

$$W = \int_V \langle \delta \varepsilon \rangle [H] \langle \varepsilon \rangle r dr d\theta dz - \int_V \langle \delta u \rangle \langle f_v \rangle r dr d\theta dz - \int_{S_i} \langle \delta u \rangle \langle f_s \rangle r d\theta dz + \int_V \langle \delta u \rangle \rho \langle \ddot{u} \rangle r dr d\theta dz = 0 \quad (I-65)$$

où :

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_{rr} : \varepsilon_{\theta\theta} : \varepsilon_{zz} : \gamma_{r\theta} : \gamma_{rz} : \gamma_{\theta z} \rangle \\ \langle \delta \varepsilon \rangle &= \langle \delta \varepsilon_{rr} : \delta \varepsilon_{\theta\theta} : \delta \varepsilon_{zz} : \delta \gamma_{r\theta} : \delta \gamma_{rz} : \delta \gamma_{\theta z} \rangle \\ \langle u \rangle &= \langle u_r : u_\theta : u_z \rangle \quad ; \quad \langle \delta u \rangle = \langle \delta u_r : \delta u_\theta : \delta u_z \rangle \\ \langle D^* \rangle &= \left\langle u_{r,r}^* : \frac{u_r^*}{r} + \frac{1}{r} u_{\theta,\theta}^* : u_{z,z}^* : u_{\theta,r}^* + \frac{1}{r} u_{r,\theta}^* - \frac{1}{r} u_{\theta}^* : \right. \\ &\quad \left. u_{r,z}^* + u_{z,r}^* : u_{\theta,z}^* + \frac{1}{r} u_{z,\theta}^* \right\rangle \\ \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_{rr} : \sigma_{\theta\theta} : \sigma_{zz} : \sigma_{r\theta} : \sigma_{rz} : \sigma_{\theta z} \rangle \\ \langle \ddot{u} \rangle &= \langle \ddot{u}_r : \ddot{u}_\theta : \ddot{u}_z \rangle \\ \langle f_v \rangle &= \langle f_{v_r} : f_{v_\theta} : f_{v_z} \rangle \quad ; \quad \langle f_s \rangle = \langle f_{s_r} : f_{s_\theta} : f_{s_z} \rangle \end{aligned}$$

Les déformation et contraintes en coordonnées polaires sont :

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon(r, \theta) \rangle = \langle \varepsilon_{rr} : \varepsilon_{\theta\theta} : \gamma_{r\theta} \rangle = \left\langle u_{r,r} : \frac{1}{r} (u_{\theta\theta} + u_r) : \frac{1}{r} (ru_{\theta,r} + u_{r,\theta} - u_\theta) \right\rangle \\ \langle u \rangle &= \langle u_r(r, \theta) : u_\theta(r, \theta) \rangle \\ \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_{rr} : \sigma_{\theta\theta} : \sigma_{r\theta} \rangle \end{aligned}$$

Les relations déformations-déplacements s'écrivent :

$$\langle \varepsilon \rangle = [\partial] \langle u \rangle \quad \text{avec} \quad [\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \end{bmatrix}$$

## 11. Equations de l'élasto-statique plane en coordonnées cartésiennes

### 11.1. Etat de déformations planes : Cylindre élastique long

En coordonnées cartésiennes, l'hypothèse des déformations planes se traduit par :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0 \quad (\text{I-66})$$

Ceci conduit à :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I-67})$$

Cette hypothèse ne peut être admise que lorsque la géométrie, les sollicitations, les conditions aux limites, les propriétés du matériau sont indépendants de  $z$ . Le cylindre très long sous pression interne sans possibilité d'expansion axiale en est un exemple figure (I-13).

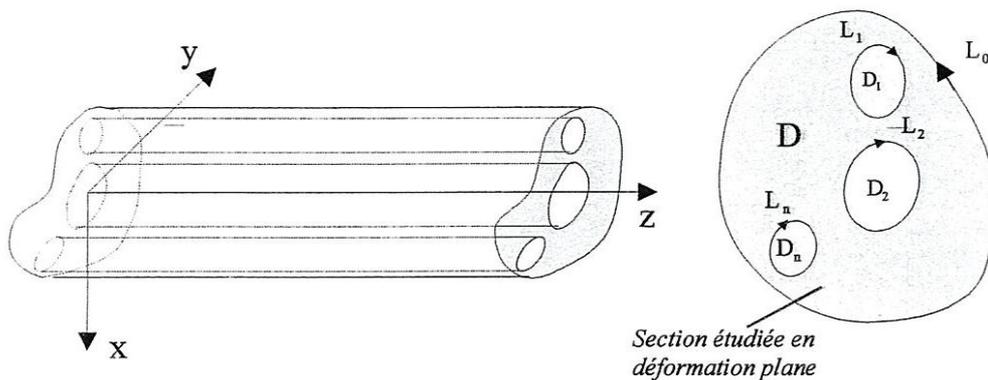


Fig. I. 13: Cylindre élastique très long.

Les relations contraintes déformations s'écrivent :

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad (\text{I-68})$$

avec  $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \ : \ \sigma_{yy} \ : \ \sigma_{xy} \rangle$  ,  $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{xx} \ : \ \varepsilon_{yy} \ : \ \gamma_{xy} \rangle$

Les autres contraintes sont :

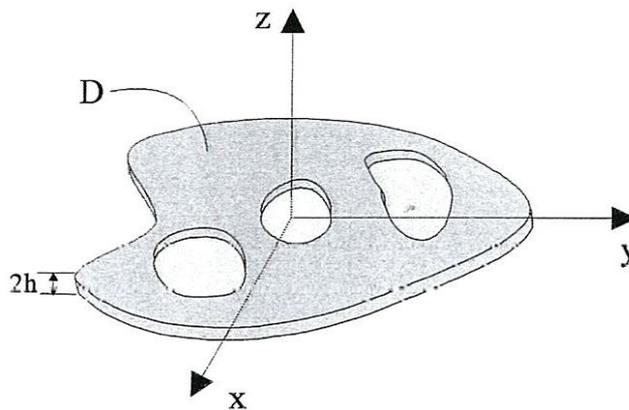
$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{aligned} \quad (\text{I-69})$$

## 11.2. Etat de contraintes moyennes planes

L'hypothèse des contraintes planes se traduit par :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y); \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y); \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y) \end{aligned} \quad (I-70)$$

Cette hypothèse est généralement admise dans les structures minces dont une des dimensions (l'épaisseur mesurée suivant la direction  $z$ ) est petite par rapport aux autres. Les poutres, les plaques et coques en sont quelques exemples figure (I-14).



**Fig. I. 14:** *Plaque cylindrique.*

Pour les deux problèmes plans, les expressions de la matrice constitutive  $[H]$ , sont :

- Etat de déformations planes

$$[H] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (I-71)$$

- Etat de contraintes planes

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (I-72)$$

ou encore sous forme plus compacte :

$$[H] = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & 0 \\ H_2 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{bmatrix} \quad (\text{I-73})$$

avec  $H_1 = \frac{E(1-\alpha\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)}$  ,  $H_2 = \frac{\nu H_1}{1-\alpha\nu}$  et  $H_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} \equiv \mu$

$\alpha = 1$  pour un problème de contraintes planes

$\alpha = 0$  pour un problème de déformations planes

## 12. Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les équations générales de la mécanique des solides déformables utilisées dans l'étude des problèmes de l'élasticité linéaire bidimensionnels et tridimensionnels en coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons une revue bibliographique sur les différentes méthodes utilisées pour la résolution des problèmes de l'élastostatique linéaire.

# CHAPITRE II

## Revue bibliographique sur les méthodes de résolution des problèmes élastiques plans et tridimensionnels

### 1. Introduction

Ce chapitre présente une revue bibliographique sur les différentes méthodes de résolution des problèmes de l'élastostatique linéaire. En général, la résolution de tout problème d'élasticité se ramène à celle d'un système d'équations aux dérivées partielles ou à une minimisation d'une fonctionnelle représentant une certaine quantité physique (énergie potentielle totale) moyennant certaines conditions aux limites.

Les méthodes de résolution qu'elles soient analytiques, numériques ou semi-analytiques sont souvent jugées par leur simplicité et leur efficacité. Parmi ces méthodes, on cite celles qui représentent un intérêt fondamental dans le domaine de l'élasticité linéaire.

### 2. Système d'équations de Lamé

En élasto-statique, les équations de Lamé (I-44b) se réduisent à :

$$\nabla^2 \mathbf{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu^{-1} \mathbf{f}_v = 0 \quad (\text{II-1})$$

où :  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{f}_v = (f_{v1}, f_{v2}, f_{v3})$

### 3. Méthodes de résolution

Les principales méthodes de résolution des équations de l'élasto-statique proposées dans la littérature peuvent être groupées en deux catégories :

- les méthodes analytiques groupant la théorie des potentiels, la théorie des fonctions à variable complexe, les développements en séries, la théorie des équations intégrales ;
- les méthodes numériques se résument principalement en différences finies, éléments finis et éléments finis de frontière.

### 3.1. Méthodes des potentiels

La théorie des potentiels harmoniques de déplacement permettent la résolution des problèmes tridimensionnels (3D) et en particulier les problèmes de contact de solides. Parmi les auteurs qui ont contribué d'une façon ou d'une autre, et cela bien sûr d'après la littérature on cite *Neuber* [2], *Papkovitch* [3], *Grodski* [4], *Hertz* [5], *Boussinesq* [6]. Notons que *Neuber*, *Papkovitch* et enfin *Grodski* furent les premiers à développer ce type de solution qui est la base de la théorie de *Hertz* dont se servent les mécaniciens pour approcher et décrire certains contacts entre solides élastiques rencontrés dans les engrenages, les roulements, etc.

Cette méthode est basée sur le caractère biharmonique des composantes de l'état élastique. On recherche les solutions des équations de l'élasto-statique, sous forme de fonctions harmoniques (appelées généralement potentiels de déplacement), d'après le théorème d'*Almansi*. Par contre, la résolution du système complet se ramène à celle de l'équation de *Poisson*. Elle présente généralement des difficultés car elle conduit à des équations intégrales ou à une minimisation d'une fonctionnelle. *L. Solomon* [1], explicite clairement ce point de vue en faisant référence aux différents ouvrages traitant ces questions.

Néanmoins, on trouve dans la littérature plusieurs solutions proposées par différents auteurs tels que *Papkovitch* [3], *Grodski* [4], *Boussinesq* [6], *Kelvin* [7], *Clebsch* [8], *Trefftz* [9], *Gatina* [10]. Parmi ces solutions, on cite :

#### 3.1.1. Solution de Kelvin

Il s'agit de chercher la solution de l'équation vectorielle de *Lamé* (II-1), en utilisant la décomposition de *Stokes* pour les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{f}_v$  tels que :

$$\mathbf{u} = \nabla p + \nabla \times \mathbf{q} \quad (\text{II-2a})$$

$$\mathbf{f}_v = \nabla P + \nabla \times \mathbf{Q} \quad (\text{II-2b})$$

Ce qui donne :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 p$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla^2 p) + \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{q})$$

L'équation de *Lamé* devient alors :

$$\nabla \left[ \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \nabla^2 p + \frac{P}{\mu} \right] + \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{q} + \frac{\mathbf{Q}}{\mu}) = 0 \quad (\text{II-3})$$

Cette équation est visiblement satisfaite si l'on choisit:

$$\nabla^2 p = \frac{-(1-2\nu)}{2(1-\nu)\mu} P \quad (\text{II-4})$$

$$\nabla^2 \mathbf{q} = -\frac{\mathbf{Q}}{\mu}$$

Ainsi, tout vecteur qui admet la décomposition (II-2a) et vérifie (II-4) est une solution des équations de *Lamé*, représentée par quatre potentiels scalaires de déplacement. Ces potentiels sont eux mêmes solutions de certaines équations de *Poisson* (ou de *Laplace* si  $f_v=0$ ).

### 3.1.2. Solution de Clebsch

Cette solution se présente comme une généralisation de la solution de *Kelvin* [7], car elle traite même le cas dynamique. En présence de forces volumiques, la solution globale est obtenue par superposition de deux solutions :

- la première correspond à celle de *Kelvin* (cas statique);
- la deuxième correspond au cas dynamique proprement dit, c'est-à-dire qu'on remplace dans l'équation de *Lamé*,  $f_v$  par  $-\rho \ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\rho$  étant la masse volumique du matériau.

Puis, on fera la même résolution que précédemment. On obtient pour la deuxième solution :

$$\nabla^2 p = \left[ \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \right] \ddot{p} \tag{II-5}$$

$$\nabla^2 \mathbf{q} = \left[ \frac{\rho}{\mu} \right] \ddot{\mathbf{q}}$$

En élastodynamique, on constate que l'équation scalaire de *Poisson* ou de *Laplace* prend la forme de l'équation de la propagation des ondes qui est une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique.

### 3.1.3. Solution de Trefftz

On cherche le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  de l'équation de *Lamé* (II-1), sous forme d'une somme de deux vecteurs  $\mathbf{B}$  et  $x_j \nabla h$  tel que :  $\mathbf{u} = \mathbf{B} + x_j \nabla h$ .

$x_j \nabla h$  dépend d'une seule fonction scalaire et s'annule sur l'un des plans coordonnées  $x_j = 0$  et le vecteur  $\mathbf{B}$  est la solution de l'équation :

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{\mathbf{f}_v}{\mu} = 0 \tag{II-6}$$

suite à cette décomposition, on obtient les relations suivantes :

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\mathbf{f}_v \frac{1}{\mu} + 2[\nabla h]_{,j} + x_j \nabla(\nabla^2 h) \tag{II-7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{B} + h_{,j} + x_j \nabla^2 h$$

et  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \nabla h_{,j} + x_j \nabla(\nabla^2 h) + \mathbf{i}_j \Delta h$

on note que :  $\nabla x_j = \mathbf{i}_j$

L'équation de *Lamé* devient :

$$(3 - 4\nu)(\nabla h)_{,j} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) + 2(1 - \nu)\epsilon_j \nabla(\nabla^2 h) + i_j \nabla^2 h = 0$$

Cette équation a pour solution :

$$\nabla^2 h = 0$$

$$h_{,j} = \frac{-1}{(3 - 4\nu)} \nabla \cdot \mathbf{B}$$

On constate que la fonction  $h$  doit vérifier à la fois les deux équations, ce qui revient à résoudre un problème de *Dirichlet* pour l'équation de *Poisson*.

### 3.1.4. Solution de Grodski

On cherche la solution des équations de *Lamé* sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + \mathbf{u}_0 \quad (\text{II-8})$$

où le potentiel  $\mathbf{B}$  est solution de l'équation de *Poisson* vectorielle :

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \mu^{-1} \mathbf{f}_\nu = 0 \quad (\text{II-9})$$

et  $\mathbf{u}_0 = \nabla f$  est un vecteur de correction.

Pour trouver l'équation à laquelle satisfait  $f$ , portons  $\mathbf{u} = \mathbf{B} + \nabla f$  en (II-1), en tenant compte de ce que  $\mathbf{B}$  est la solution de (II-9). Compte tenu de :

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\mu^{-1} \mathbf{f}_\nu + \nabla(\nabla^2 f), \quad \nabla \cdot (\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{B}) + \nabla^2 f$$

et compte tenu de  $0 < \nu < 1/2$ , l'équation (II-1) devient :

$$\nabla \left[ \nabla^2 f + \frac{1}{2} (1 - \nu)^{-1} \nabla \cdot (\mathbf{B}) \right] = 0 \quad (\text{II-10})$$

Puisqu'on ne cherche point la solution générale de (II-10), il suffit qu'on ait :

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{2} (1 - \nu)^{-1} \nabla \cdot (\mathbf{B}) \quad (\text{II-11})$$

Commençons par évaluer  $\nabla^2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})$ . On a d'abord :

$$\nabla^2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) = 2 \nabla \cdot (\mathbf{B}) + \mathbf{x} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\text{II-12})$$

d'où, en tenant compte aussi de (II-9) :

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \nabla^2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\mu^{-1}}{2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_\nu) \quad (\text{II-13})$$

En portant maintenant (II-13) en (II-11), on obtient :

$$\nabla^2 \left[ f + \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) \right] = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} \mu^{-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_\nu) \quad (\text{II-14})$$

d'où, en notant  $f + \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} B_0$ , on obtient en fin de compte :

$$\nabla^2 B_0 = \mu^{-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_\nu) \quad (\text{II-15})$$

où  $B_0$  est la solution générale de l'équation (II-15), et l'on a :

$$f = -\frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} + B_0) \quad (\text{II-16})$$

Le terme correctif est ainsi trouvé, et la solution  $\mathbf{u}$  admet la représentation :

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} \nabla (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} + B_0) \quad (\text{II-17})$$

$$\text{avec } \nabla^2 \mathbf{B} = \mu^{-1} \mathbf{f}_\nu, \nabla^2 B_0 = \mu^{-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}_\nu) \quad (\text{II-18})$$

Sous une forme plus développée, les relations (II-17) s'écrivent :

$$u_i = B_i - \frac{1}{4} (1 - \nu)^{-1} (x B_1 + y B_2 + z B_3 + B_0)_i \quad (\text{II-19})$$

on vérifie aisément que tout vecteur  $\mathbf{u}$  de la forme donnée par (II-17) et (II-18) est une solution des équations de *Lamé*.

En effet, un calcul élémentaire permet d'obtenir en tenant compte des relations (II-9) et (II-12) :

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{u} = -\mu^{-1} \mathbf{f}_\nu - \frac{1}{2} (1 - \nu)^{-1} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) \\ \nabla (\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (1 - 2\nu) (1 - \nu)^{-1} \nabla (\mathbf{B}) \end{cases} \quad (\text{II-20})$$

Ce qui explique que les relations (II-17) et (II-18) forment une condition suffisante mais non nécessaire pour que  $\mathbf{u}$  soit une solution des équations de *Lamé* non homogènes ( $\mathbf{f}_\nu \neq 0$ ).

La solution donnée par les relations (II-17) et (II-18) est appelée représentation de *Grodski* [4] et les potentiels  $B_0, B_1, B_2, B_3$  sont appelés aussi fonctions de *Grodski* [4].

Dans le cas où  $\mathbf{f}_\nu = 0$ , (forces volumiques nulles), les quatre potentiels des déplacements sont harmoniques.

$$\nabla^2 B_j = 0 ; j = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{II-21})$$

### 3.2. Méthode de Kolosov et Muskhelishvili

Kolosov [11] et Muskhelishvili [12] furent les premiers à établir cette technique de résolution qui a trouvé par la suite une large application. Cette méthode se base sur la formulation dans le plan complexe des équations de l'élasticité (2D). La méthode proposée par L. Solomon [1] permet de transformer les équations de l'élasticité plane, décrites dans le chapitre précédent, en un système permettant l'obtention, à partir d'une formulation complexe, des solutions générales en contraintes et en déplacements des problèmes plans. Ces solutions s'expriment au moyen de 2 fonctions  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  appelées potentiels de Kolosov et Muskhelishvili.

#### 3.2.1. Equations du problème élasto-statique plan en coordonnées cartésiennes

L'hypothèse de l'élasticité plane et celle des forces volumiques nulles permettent d'aboutir à un système simplifié d'équations.

Les deux équations d'équilibre s'écrivent :

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = 0 \quad (\text{II-22})$$

$$\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0 \quad (\text{II-23})$$

Les trois équations de compatibilité sont :

$$\nabla^2 \sigma_{xx} + S_{0,xx} = 0 \quad (\text{II-24})$$

$$\nabla^2 \sigma_{yy} + S_{0,yy} = 0 \quad (\text{II-25})$$

$$\nabla^2 \sigma_{xy} + S_{0,xy} = 0 \quad (\text{II-26})$$

avec  $S_0 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$  qui est la pression hydrostatique moyenne en un point.

Si à des déformations nulles, correspondent des tensions nulles, c'est à dire s'ils n'existent pas de tensions initiales, la loi de Hooke s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu\gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

avec  $\Theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$  et  $\lambda, \mu$  sont les constantes de Lamé.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ en déformations planes}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ en contraintes moyennes planes}$$

Les relations déformations-déplacements avec l'hypothèse des petites déformations sont :

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x}, \varepsilon_{yy} = v_{,y}, \text{ et } \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (\text{II-28})$$

### 3.2.2. Equations en variables complexes

Nous rappellerons la méthode de transcription des équations précédentes (II-22) à (II-27) d'après *L. Solomon* [1]. Les équations s'expriment uniquement à l'aide de deux fonctions de la variable complexe. Les fonctions de points initialement fonction des variables  $x$  et  $y$  deviennent des fonctions des complexes  $z$  et  $\bar{z}$  considérés comme indépendants tels que :

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy = \text{conjugué}(z). \quad (\text{II-29})$$

Soit donc le déplacement complexe défini par :

$$U(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (\text{II-30})$$

Les opérateurs différentiels utilisés seront  $\frac{\partial}{\partial z}$  et  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  tels que :

Dérivations en chaîne .

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \end{cases}$$

D'après (II-29), on a :  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  et  $y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ , il vient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (\text{II-31})$$

De ces relations, on tire :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{cases} \quad (\text{II-32})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right)$$

et 
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = i \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right).$$

Les équations de compatibilité deviennent :

$$S_{0,zz} = 0 \quad (\text{II-33})$$

$$S_{,zz} - S_{0,zz} = 0 \quad (\text{II-34})$$

avec  $S(z, \bar{z}) = \sigma_{yy}(x, y) - \sigma_{xx}(x, y) + 2i\sigma_{xy}(x, y)$

Le module de la fonction  $S$  est égale au diamètre du cercle de *Mohr* des contraintes.

De la même façon, le système formé des équations d'équilibre (II-22) et (II-23) devient :

$$S_{,z} - S_{0,z} = 0 \quad (\text{II-35})$$

Le système formé par l'ensemble des équations d'équilibre (II-22) à (II-23) et les équations de compatibilité (II-24) et (II-26) est équivalent au système suivant exprimé au moyen des deux fonctions de contraintes  $S_0$  et  $S$  qu'il convient de déterminer pour connaître l'état élastique en tout point du solide.

$$S_{,z} - S_{0,z} = 0 \quad (\text{II-36})$$

$$S_{0,zz} = 0 \quad (\text{II-37})$$

$$S_{,zz} - S_{0,zz} = 0 \quad (\text{II-38})$$

on remarque que l'équation (II-38) se déduit de l'équation (II-36) par une dérivation par rapport à la variable  $z$ .

Afin de déterminer les déplacements, les relations déformations-déplacements (II-28) et l'expression des contraintes en fonction de  $S_0$  et  $S$ .

$$\begin{aligned} u_{,x} + v_{,y} &= \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{E} S_0 \\ u_{,x} - v_{,y} &= \frac{(1+\nu)}{E} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = -\frac{(1+\nu)}{E} \text{Réel}(S) \\ u_{,y} + v_{,x} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} = \frac{(1+\nu)}{E} \text{Imaginaire}(S) \end{aligned} \quad (\text{II-39})$$

Soit :

$$\begin{aligned} U_{,z} &= \frac{\partial}{\partial z} (u + iv) = \frac{1}{2} \left[ (u_{,x} + v_{,y}) + i(v_{,x} - u_{,y}) \right] \\ U_{,\bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u + iv) = \frac{1}{2} \left[ (u_{,x} - v_{,y}) + i(v_{,x} + u_{,y}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II-40})$$

De (II-39), on a :

$$U_{,z} = -\frac{1}{4\mu} \bar{S} \quad (\text{II-41})$$

$$U_{,z} + \bar{U}_{,\bar{z}} = \left( \frac{1-2\nu}{2\mu} \right) S_0 \quad (\text{II-42})$$

Les équations (II-36) et (II-37) sont les équations en tensions du problème plan.

L'équation (II-36) est l'équation d'équilibre.

L'équation (II-37) est l'équation de compatibilité.

Les équations (II-41) et (II-42) sont les équations physico-géométriques du problème.

### 3.2.3. Solutions générales des équations du problème plan : Introduction des fonctions de Kolosov et Muskhelishvili

L'intégration des équations (II-36) et (II-37) permet de résoudre le problème élastique plan en contraintes.

Compte tenu de cette solution, l'intégration des équations (II-41) et (II-42) donnera la solution en déplacement du problème.

#### 3.2.3.1. Solution en contraintes

Soit le système homogène :

$$\begin{aligned} S_{0,\bar{z}} &= 0 \\ S_{,\bar{z}} - S_{0,z} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-43})$$

En intégrant la première de ces équations d'abord par rapport à  $\bar{z}$ , puis par rapport à  $z$ , on obtient :

$$S_0 = \int S_1(z) dz + \overline{S_2(z)} \quad (\text{II-44})$$

où  $S_1$  et  $S_2$  sont des fonctions arbitraires.  $S_0$  étant une quantité réelle, on écrira :

$$2\Phi(z) = \int S_1(z) dz$$

et (II-44) deviendra :

$$S_0 = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}\right] \quad (\text{II-45})$$

En portant maintenant (II-45) dans la seconde équation (II-43), on trouve :

$$S_{,\bar{z}} = 2\Phi'(z) \quad (\text{II-46})$$

d'où, après intégration par rapport à  $\bar{z}$  :

$$S = 2\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right] \quad (\text{II-47})$$

où  $\Psi$  est une nouvelle fonction arbitraire.  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  sont différentiables et à dérivées partielles continues dans  $D$ , donc ce sont des fonctions analytiques de  $z$  dans  $D$ .

En considérant encore les fonctions analytiques  $\phi(z)$ ,  $\psi(z)$  définies dans  $D$  par les relations :

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= \Phi(z) \\ \psi'(z) &= \Psi(z)\end{aligned}\tag{II-48}$$

on pourra écrire (II-45), (II-47) sous la forme définitive :

$$\begin{aligned}S_0 &= 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \\ S &= 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]\end{aligned}\tag{II-49}$$

La solution des équations (II-43) prend donc la forme (II-49). Réciproquement, pour toutes fonctions analytiques  $\phi(z)$ ,  $\psi(z)$ , les fonctions définies par (II-49) vérifient (II-43).

### 3.2.3.2. Solution en déplacements

En passant aux équations physico-géométriques, on porte (II-49) en (II-41) et (II-42), ce qui conduit au système :

$$\begin{aligned}U_{,z} &= -\frac{l}{2\mu} [z\phi''(z) + \psi'(z)] \\ U_{,z} + \bar{U}_{,z} &= \frac{(l-2\nu)}{\mu} [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}]\end{aligned}\tag{II-50}$$

En intégrant la première équation par rapport à  $\bar{z}$ , on obtient :

$$U = -\frac{1}{2\mu} [z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}] + U_1(z)\tag{II-51}$$

où  $U_1(z)$  est une fonction pour l'instant inconnue.

En portant (II-51) dans la seconde équation (II-50), on trouve aisément :

$$U_1(z) = \frac{3-4\nu}{2\mu} \phi(z)$$

Par conséquent, (II-51) devient :

$$2\mu U(z, \bar{z}) = \chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}\tag{II-52}$$

où :

$$\begin{aligned}\chi &= 3 - 4\nu && \text{dans l'état de déformation plane, } l < \chi < 3 \\ \chi &= \frac{3-\nu}{1+\nu} && \text{dans l'état de contrainte moyenne plane, } \frac{5}{3} < \chi < 3\end{aligned}$$

Les formules (II-49) et (II-52) fournissent, en l'absence de forces volumiques la solution par l'intermédiaire des deux potentiels  $\phi(z)$ ,  $\psi(z)$ . Ceux-ci ont été introduits par *G. Kolosov* [11] et largement utilisés par *N. Muskhelishvili* [12] dans l'étude du problème plan. Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  seront appelées les fonctions de *Kolosov* et *Muskhelishvili*.

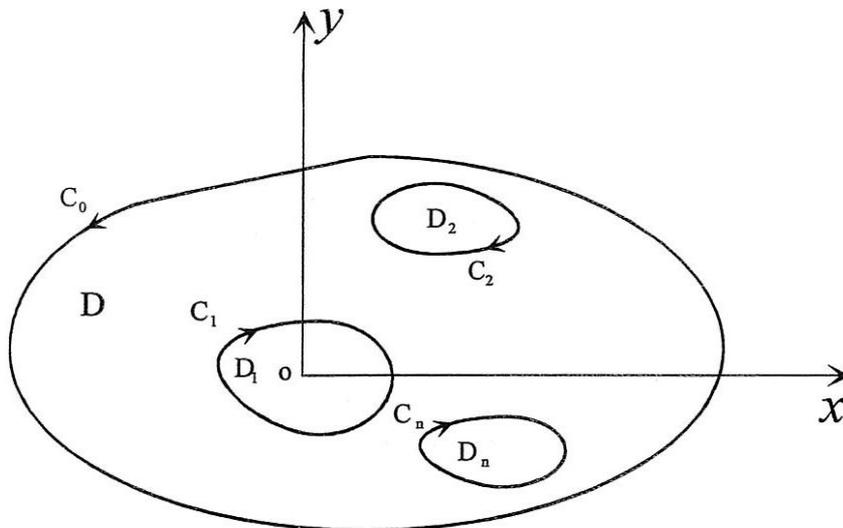
Pour un domaine multiplement connexes et en l'absence des forces de volume figure (II-1), les solutions générales du problème élastique plan se regroupent ainsi:

- représentation cartésienne :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[z\phi''(z) + \psi'(z)] \\ 2\mu(u_x + iu_y) &= \chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \end{aligned} \quad (\text{II-53})$$

- représentation polaire :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} &= 2[z\phi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta} \\ 2\mu(u_r + iu_\theta) &= [\chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}]e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (\text{II-54})$$



**Fig. II. 1:** *Domaine borné multiplement connexes.*

Les deux potentiels complexes s'expriment par :

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \sum_{j=1}^m \gamma_j \log_e(z - z_j) + \phi_0(z) \\ \psi(z) &= -\chi \sum_{j=1}^m \bar{\gamma}_j \log_e(z - z_j) + \psi_0(z)\end{aligned}\tag{II-55}$$

Les constantes complexes  $\gamma_j$  représentent la résultante des forces extérieures  $R_j$  appliquées sur les composantes  $C_j$  de chacun des domaines  $D_j$  tel que:

$$\gamma_j = \frac{R_j}{2\pi(1 + \chi)}\tag{II-56}$$

$\phi_0$  et  $\psi_0$  sont deux fonctions holomorphes arbitraires.

Cette méthode de résolution est fort intéressante pour les domaines circulaires et en particulier pour les couronnes concentriques; à titre d'exemple, on cite le problème de la couronne circulaire, qui a été traité par *L. Solomon* [1] puis repris par *B. Villechaise* [13], *M. Lahmar* [14] et *A. Bettayeb* [15] en exprimant les deux potentiels de *Kolosov* et *Muskhelishvili* par des séries de *Laurent*. Cette méthode est largement appliquée pour la résolution de nombreux problèmes relatifs aux singularités, contacts et fissures.

Les solutions (II-54) seront utilisées ultérieurement pour l'étude des problèmes plans pour des domaines doublement connexes, formés par des couronnes circulaires. La deuxième équation sera remplacée par deux relations obtenues par la somme et la différence entre les deux premières équations qui portent respectivement sur les quantités  $\sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta}$  et  $\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta}$ .

### 3.3. Méthode des éléments finis (M.E.F)

Les méthodes numériques dont la plus employée est celle des éléments finis permettent de résoudre d'une façon numérique les différents problèmes et quelle que soit la géométrie du solide étudié en se basant sur une minimisation d'une fonctionnelle représentant l'énergie potentielle totale de la structure (Cf. chapitre 1).

La méthode des éléments finis est une méthode approchée permettant de déterminer l'équilibre élastique des structures, solides élastique, plaques, membranes et coques. Cette méthode est largement utilisée aujourd'hui. Les ouvrages qui la présentent sont très nombreux, on cite par exemple *Zienkiewicz* [16], *Batoz* [17], etc.

Le principe de cette méthode consiste à minimiser une fonctionnelle représentant une énergie de déformation pour un domaine donné. Cette minimisation conduit à discrétiser le domaine étudié en un nombre fini  $n$  de domaines élémentaires appelés "éléments finis" reliés entre eux par des points appelés nœuds situés sur leurs frontières et enfin à la résolution d'un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues. Cette méthode est particulièrement intéressante pour deux points, géométrie et conditions aux limites quelconques.

Lorsque la géométrie du domaine d'étude n'est pas régulière, la discrétisation se fait de façon à permettre d'épouser les frontières en modifiant la forme et la dimension de l'élément si nécessaire. Lorsque les conditions aux limites ne sont pas régulières et sont données par morceaux, leur prise en compte se fait d'une façon classique.

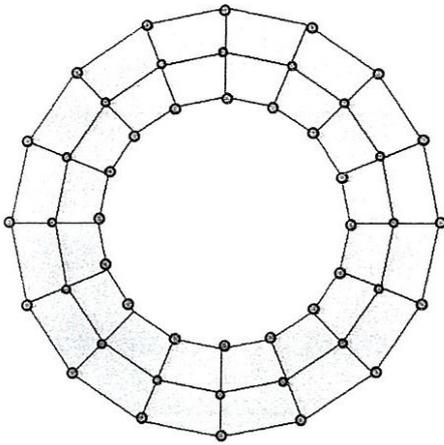
Néanmoins, elle peut présenter certains inconvénients et en particulier la mise en œuvre qui n'est pas toujours facile par rapport aux autres méthodes. Le calcul est lié à la discrétisation et la résolution se fait d'une façon globale. Enfin, la transformation des conditions aux limites données sous forme de contraintes, en forces nodales n'est pas toujours facile à effectuer. Notons que ces forces nodales sont en réalité des coefficients de pondération ayant la dimension d'une force.

### 3.4. Méthode des équations intégrales de frontière

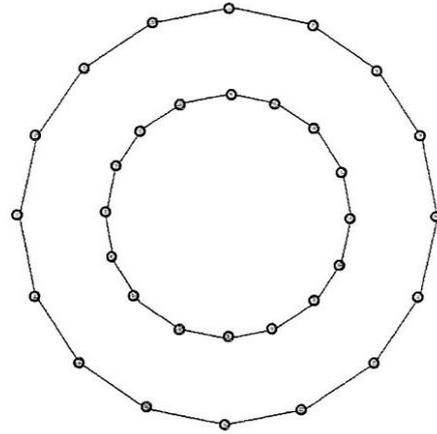
La méthode des équations intégrales est un développement des travaux de *Fredholm* sur l'utilisation des théories du potentiel et des équations intégrales linéaires. *Fredholm* fut le premier à l'appliquer à l'élasticité [18]. En 1963, *Kupradze* [19] reconsidère les problèmes aux limites, dans le cas général des milieux élastiques soumis à des oscillations périodiques, et établit des théorèmes d'existence et d'unicité pour des corps homogènes. La même année *Jawson* et *Ponter* [20] publient leurs premiers travaux sur l'utilisation d'une équation intégrale de surface pour traiter le problème de la torsion élastique d'une barre de section quelconque.

En 1967, *Rizzo* [21] analyse numériquement quelques problèmes simples d'élasticité. *Rizzo* et *Cruse* [22] étendent la formulation élastique au domaine dynamique en utilisant une transformation de *Laplace* pour la variable temporelle. *Cruse* et *Vanburen* [23] analysent par équations intégrales, en situation tridimensionnelle, une éprouvette de mécanique de la rupture. En 1971, *Swedlow* et *Cruse* [24] proposent une formulation équation intégrale pour traiter le cas d'un comportement élasto-plastique d'un matériau présentant un écrouissage. Cette formulation est reprise par *Mendelson* [25] qui publie un article présentant des résultats numériques.

La méthode des éléments de frontières repose sur la discrétisation d'équations intégrales de frontière. Le développement de cette méthode en tant qu'outil de résolution numérique est toutefois postérieur à celui des méthodes d'éléments finis et de différences finis. La méthode des éléments de frontière repose fortement sur l'adaptation de notations initialement créées et développées dans le contexte de la méthode des éléments finis : maillage, interpolation par fonctions à support borné. L'avantage conceptuel de la méthode des éléments de frontière sur d'autres techniques comme les éléments finis est le gain d'une dimension d'espace pour la discrétisation : le support des inconnues est la frontière, et non le domaine qu'elle limite figure (II-2). De plus, les méthodes intégrales présentent une supériorité pour le traitement de certaines situations (propagation des ondes, présence de milieux infinis, etc.). Pour établir l'équation intégrale, nous utilisons le théorème de réciprocité de *Betti* [26], qui est l'analogue de la deuxième formule de *Green* pour l'opérateur de *Laplace*.



a) MEF (Discrétisation du domaine)



b) MEIF (Discrétisation des contours)

**Fig. II. 2:** Comparaison des méthodes d'éléments finis (MEF) et d'équations intégrales de frontière (MEIF).

### 3.5 Méthodes basées sur les transformées intégrales

En analyse mathématique, il existe plusieurs transformations intégrales : transformations de *Fourier*, transformation de *Laplace*, *Hankel*, *Mellin* [27]. Le choix d'une transformation dépend du domaine d'étude et des conditions limites. L'application de ces méthodes permet de transformer une équation aux dérivées partielles ou un système d'équations aux dérivées partielles en une équation différentielle ou en un système d'équations différentielles ne dépendant que d'une seule variable. Les conditions limites sont elles mêmes transformées. Elles ne portent désormais que sur la variable d'intégration et permettent de déterminer les constantes d'intégration. Ces transformées et en particulier celle de *Fourier* sont largement utilisées dont la géométrie et les conditions aux limites sont régulières. Le calcul numérique de cette transformation peut être amélioré du point de vue rapidité en faisant usage d'un algorithme de calcul numérique F.F.T. (Fast *Fourier* Transform) développé en 1965 par *Cooley* et *Tukey*. Il convient de souligner que *B. Villechaise* [28] fut le premier à se servir de ces transformations, habituellement réservées au traitement de signaux temporels pour la résolution des problèmes de contact.

#### 4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une revue bibliographique succincte sur les différentes méthodes de résolution des équations de l'élasticité linéaire qui peuvent être classées en deux catégories :

1- les méthodes analytiques groupant la théorie des potentiels (solutions de *Kelvin*, *Clebsch*, *Trefftz*, *Grodski*), la théorie des fonctions à variables complexes et les méthodes basées sur les développements en séries et les transformées intégrales (*Fourier*, etc.) ;

2- les méthodes numériques utilisant les méthodes des éléments finis et des éléments finis de frontière.

Il ressort à travers cette étude que l'application de la M.E.F convient pour l'analyse de contraintes et des déformations élastiques des tubes et des secteurs cylindriques longs ou de longueur finie soumis à un champ de pression non axisymétrique. Ces derniers offrent une schématisation réelle des revêtements de surface utilisés dans les paliers hydrodynamiques tels que les paliers lisses et les paliers à arcs partiels. La méthode analytique de *Kolosov* et *Muskhelishvili*, développé dans le chapitre suivant, a été retenue pour la validation du modèle éléments finis (2D) appliqué pour l'analyse des contraintes et des déformations des tubes cylindriques longs (problème de déformations plans). Il convient de noter que dans le cas des secteurs circulaires, les solutions obtenues par la méthode de *Kolosov* et *Muskhelishvili* ne présentent pas la même simplicité du point de vue expression analytique que celles trouvées dans le cas des couronnes circulaires.

# CHAPITRE III

## Solutions analytiques des problèmes mixtes pour les tubes cylindriques longs

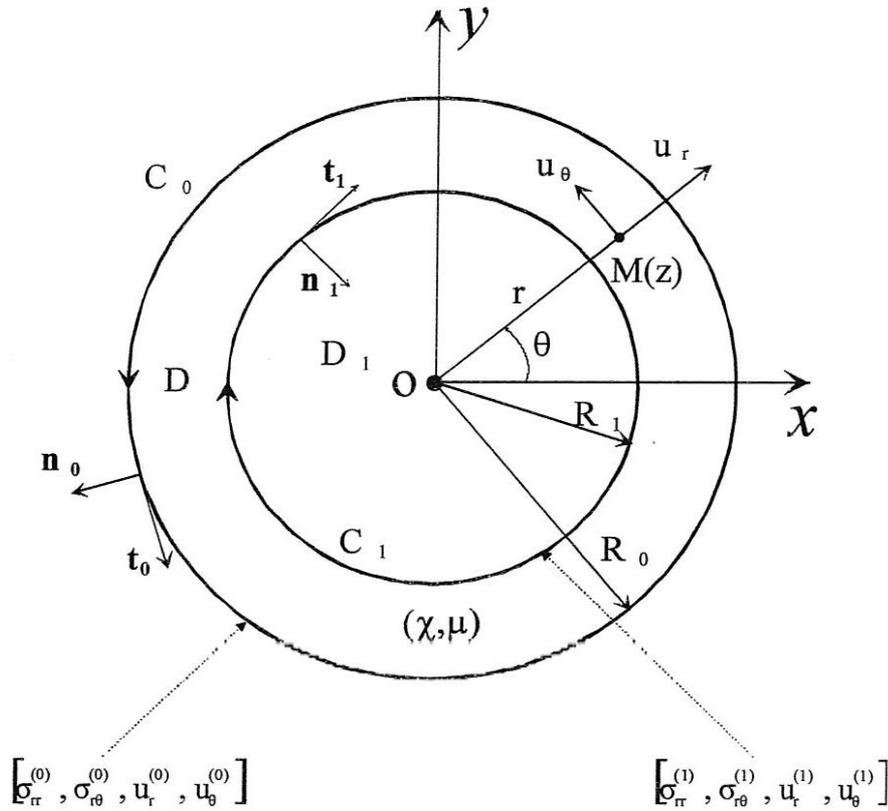
### 1. Introduction

Les revêtements de surface utilisés dans les paliers lisses peuvent être convenablement schématisés par des tubes cylindrique dont les sections droites transversales sont des couronnes circulaires.

Les couronnes circulaires sont des domaines bidimensionnels doublement connexes auxquels on peut appliquer les solutions générales des problèmes plans données par les relations (II-54). Dans ce chapitre, nous allons donner, à partir des relations (II-54), les solutions générales des problèmes mixtes pour la couronne circulaire. Nous représenterons les fonctions holomorphes  $\phi_0(z)$  et  $\psi_0(z)$  par des séries de *Laurent* et établirons les solutions en contraintes et déplacements sur les frontières de la couronne permettant ainsi l'utilisation directe des conditions aux limites exprimées sous forme de séries de *Fourier*.

Les solutions analytiques obtenues serviront d'une part comme outils de validation de l'approche numérique développée dans le chapitre 5 et d'autre part pour la dérivation d'un modèle plus simple pour le calcul du champ de déplacement radial en se basant sur l'hypothèse d'une couche élastique mince ; c'est à dire lorsque l'épaisseur de la couronne est très faible devant son rayon intérieur. La validation de ce modèle sera effectuée dans le chapitre 5.

## 2. Géométrie et notations



**Fig. III. 1:** Géométrie et notation.

Le domaine  $D$  constituant la couronne circulaire est le domaine du plan complexe, représenté figure (III-1), tel que :

$|z| \in [R_1, R_0]$  où  $R_1$  et  $R_0$  sont respectivement les rayons des cercles intérieur et extérieur de la couronne.

Nous noterons  $H$  le rapport  $\frac{R_0}{R_1}$  des rayons des cercles limites de la couronne.

Un point  $M$  du domaine  $D$  est défini par son affixe  $z = re^{i\theta}$ . Nous noterons la coordonnées radiale adimensionnée par :  $\ell = \frac{r}{R_1}$

Nous aurons :  $M \in (D) \Leftrightarrow \ell \in [1, H]$ .

Les normales à la couronne sont orientées vers l'extérieur de  $D$ . Ainsi, la tension  $\sigma_n(M)$  pour  $M$  appartenant à un des cercles limites représentera l'action du milieu extérieur sur la couronne. Les tangentes définies sur les cercles limites, se déduisent des normales par rotation de  $+\frac{\pi}{2}$ . Nous utiliserons, comme la forme du domaine  $D$  le suggère, la représentation polaire pour les contraintes et les déplacements.

Les quantités se référant aux points de la surface seront notées :

$$\begin{aligned} - \text{ pour } r = R_0 (\ell = H) & : \sigma_{rr}^{(0)}, \sigma_{r\theta}^{(0)}, u_r^{(0)}, u_\theta^{(0)} \\ - \text{ pour } r = R_1 (\ell = 1) & : \sigma_{rr}^{(1)}, \sigma_{r\theta}^{(1)}, u_r^{(1)}, u_\theta^{(1)} \end{aligned}$$

Enfin, les constantes élastiques du matériau, supposé homogène et isotrope, seront notées  $\mu$  et  $\chi$ .  $\mu$  étant le module de *Coulomb*.

### 3. Expressions des contraintes et des déplacements : méthode des séries

Le domaine  $D$  étant doublement connexe ; c'est à dire  $m=1$ , les potentiels donnés par les relation (II-55) se réduisent à :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \gamma_1 \log_e(z - z_1) + \phi_0(z) \\ \psi(z) &= -\bar{\chi}\gamma_1 \log_e(z - z_1) + \psi_0(z) \end{aligned} \tag{III-1}$$

$$\text{où } \begin{cases} z \in D \\ z_1 \in D_1 \\ \gamma_1 \in C \end{cases}$$

Le choix de  $z_1 = 0$ , comme origine des axes, n'affecte nullement la solution du problème. Si on pose  $\gamma = \gamma_1$ , on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \gamma \log_e(z) + \phi_0(z) \\ \psi(z) &= -\bar{\chi}\gamma \log_e(z) + \psi_0(z) \end{aligned} \tag{III-2}$$

$$\text{où } z = re^{i\theta} \text{ et } \gamma \in C$$

Les deux fonctions holomorphes  $\phi_0(z)$  et  $\psi_0(z)$  sont exprimées sous forme de deux séries de *Laurent* au voisinage de  $z = 0$  [14]. Les solutions du problème élastique s'expriment alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\ell) e^{ik\theta} \\ \sigma_{rr}(r, \theta) - i\sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k(\ell) e^{ik\theta} \\ \frac{2\mu}{r} (u_r(r, \theta) + iu_\theta(r, \theta)) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k(\ell) e^{ik\theta} \end{aligned} \tag{III-3}$$

avec

$$\begin{aligned}
V_k(\ell) &= 2(a_k \ell^k + \bar{a}_{-k} \ell^{-k}) \quad , \forall k \in Z \\
\sigma_k(\ell) &= (1-k)a_k \ell^k + \bar{a}_{-k} \ell^{-k} - a'_{k-2} \ell^{k-2} \quad , \forall k \in \{Z - \{1\}\} \\
\sigma_1(\ell) &= (1-\chi)\ell^{-1} \bar{a}_{-1} \\
U_k(\ell) &= \frac{\chi}{1+k} a_k \ell^k - \bar{a}_{-k} \ell^{-k} + \frac{\bar{a}'_{-2-k}}{1+k} \ell^{-2-k} \quad , \forall k \in \{Z - \{-1\}\} \\
U_{-1}(\ell) &= 2a_{-1} \chi \ell^{-1} \log_e r + \frac{\alpha\chi - \bar{\beta}}{r} - \bar{a}_1 \ell
\end{aligned} \tag{III-4}$$

Les relations (III-3) présentent les contraintes et les déplacements, sous forme de séries qui, pour une valeur donnée du  $r$ , sont des séries de *Fourier* complexes.

Sur les cercles limites, ces relations s'écrivent :

- pour  $r = R_0$  ( $\ell = H$ ), cercle extérieur ( $C_0$ )

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(0)}(\theta) + \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) &= \sum_{k \in Z} V_k^{(0)}(\ell) e^{ik\theta} \\
\sigma_{rr}^{(0)}(\theta) - i\sigma_{r\theta}^{(0)}(\theta) &= \sum_{k \in Z} \sigma_k^{(0)}(\ell) e^{ik\theta} \\
\frac{2\mu}{R_0} (u_r^{(0)}(\theta) + iu_\theta^{(0)}(\theta)) &= \sum_{k \in Z} U_k^{(0)}(\ell) e^{ik\theta}
\end{aligned} \tag{III-5}$$

avec

$$\begin{aligned}
V_k^{(0)} &= 2(a_k H^k + \bar{a}_{-k} H^{-k}) \quad , \forall k \in Z \\
\sigma_1^{(0)} &= (1+\chi)H^{-1} \bar{a}_{-1} \quad , \text{pour } k=1 \\
\sigma_k^{(0)} &= (1-k)a_k H^k + \bar{a}_{-k} H^{-k} - a'_{k-2} H^{k-2} \quad , \forall k \in \{Z - \{1\}\} \\
U_{-1}^{(0)} &= 2\chi a_{-1} H^{-1} \log_e(R_0) + \frac{(\alpha\chi - \bar{\beta})}{R_0} - \bar{a}_1 H \quad , \text{pour } k=-1 \\
U_k^{(0)} &= \frac{\chi a_k}{k+1} H^k - \bar{a}_{-k} H^{-k} + \frac{\bar{a}'_{-2-k}}{1+k} H^{-2-k} \quad , \forall k \in \{Z - \{-1\}\}
\end{aligned} \tag{III-6}$$

- pour  $r = R_1$  ( $\ell = 1$ ), cercle intérieur ( $C_1$ )

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(1)}(\theta) + \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) &= \sum_{k \in Z} V_k^{(1)}(\ell) e^{ik\theta} \\
\sigma_{rr}^{(1)}(\theta) - i\sigma_{r\theta}^{(1)}(\theta) &= \sum_{k \in Z} \sigma_k^{(1)}(\ell) e^{ik\theta} \\
\frac{2\mu}{R_0} (u_r^{(1)}(\theta) + iu_\theta^{(1)}(\theta)) &= \sum_{k \in Z} U_k^{(1)}(\ell) e^{ik\theta}
\end{aligned} \tag{III-7}$$

avec

$$\begin{aligned}
 V_k^{(1)} &= 2(a_k + \overline{a_{-k}}) \quad , \forall k \in Z \\
 \sigma_1^{(1)} &= (1 + \chi)\overline{a_{-1}} \quad , \text{pour } k=1 \\
 \sigma_k^{(1)} &= (1 - k)a_k + \overline{a_{-k}} - a'_{k-2} \quad , \forall k \in \{Z - \{1\}\} \\
 U_{-1}^{(1)} &= 2\chi a_{-1} \log_e(R_1) + \frac{(\alpha\chi - \overline{\beta})}{R_1} - \overline{a_1} \quad , \text{pour } k=-1 \\
 U_k^{(1)} &= \frac{\chi a_k}{k+1} - \overline{a_{-k}} + \frac{\overline{a'_{-2-k}}}{1+k} \quad , \forall k \in \{Z - \{-1\}\}
 \end{aligned} \tag{III-8}$$

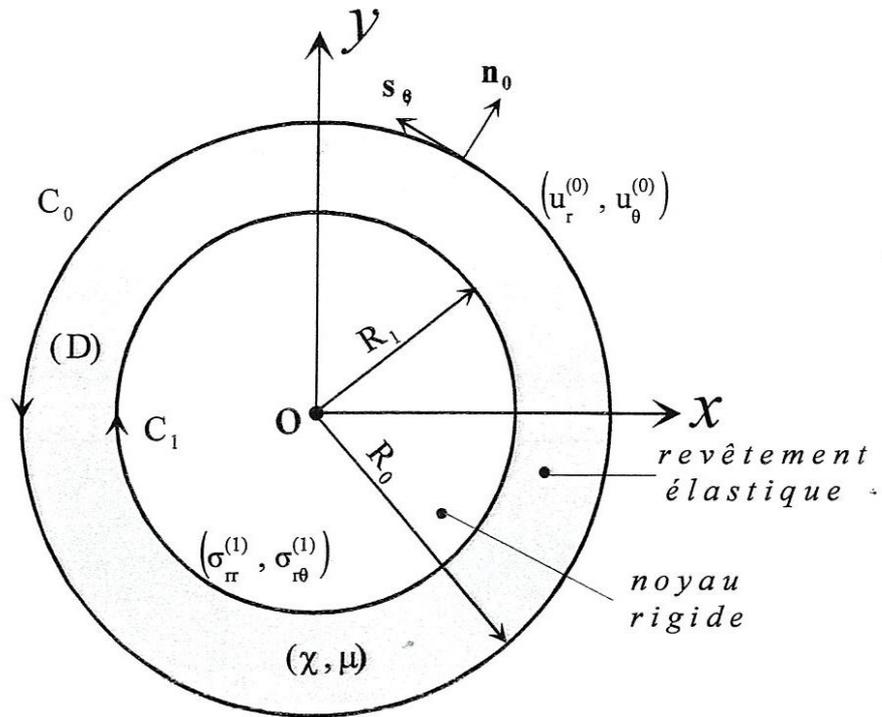
#### 4. Solutions en contraintes et en déplacements des problèmes mixtes pour la couronne

Une solution générale du problème plan relative à la couronne a été obtenue au paragraphe précédent. Les problèmes aux limites de l'élasticité plane (*Dirichlet, Neumann, mixte*) sont des problèmes qui, par nature de leurs conditions aux limites, assurent l'existence et l'unicité de la solution en contraintes et en déplacements. Nous allons maintenant étudier deux types de problème mixte afin de trouver des solutions particulières à ce problème :

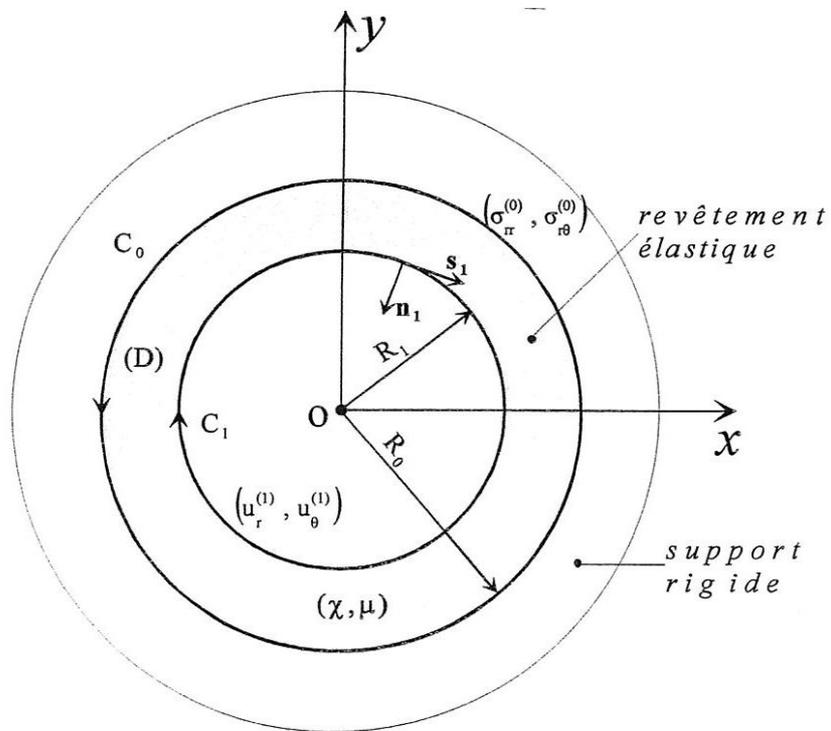
- le premier problème mixte pour lequel les contraintes sont connues sur le cercle limite extérieur ( $r = R_0$ ), les déplacements sont donnés sur l'autre ( $r = R_1$ ). —
- le deuxième problème mixte pour lequel les contraintes sont connues sur le cercle limite intérieur ( $r = R_1$ ), les déplacements sont donnés sur l'autre ( $r = R_0$ ).

Les conditions suffisantes d'existence des solutions seront précisées. La notation matricielle sera adaptée pour la présentation des solutions de chacun des problèmes.

Le problème mixte considéré dans notre étude peut correspondre à deux situations qui se déduisent éventuellement l'une de l'autre en changeant  $H$  en  $H'$ . Nous allons résoudre le cas de déplacements nuls sur le cercle intérieur ( $r = R_1$  ou  $\ell = I$ ) et de tensions imposées sur le cercle extérieur ( $r = R_0$  ou  $\ell = H$ ) figure(III-2). Ces conditions aux limites sont celles du premier problème mixte.



**Fig. III. 2:** Conditions aux limites du premier problème mixte schématisant un arbre revêtu.



**Fig. III. 3:** Conditions aux limites du deuxième problème mixte schématisant un alésage revêtu.

Notons que dans le cas du deuxième problème mixte, les conditions aux limites sont figure (III-3) :

- déplacements nuls sur ( $C_0$ )
- contraintes radiales et tangentielles imposées sur ( $C_1$ ).

### 5. Contraintes et déplacements sur les frontières de la couronne pour le premier problème mixte

Les solutions obtenues au paragraphe précédent portent sur les déplacements et contraintes dans la couronne circulaire pour les deux problèmes mixtes.

Nous avons supposé de plus que les conditions aux limites, étaient suffisamment régulières pour permettre de prolonger ces solutions par continuité sur la frontière du domaine  $D$ .

L'utilisation de la notation matricielle suivante:

$$\mathbf{S}_k^{(j)} = \begin{Bmatrix} \sigma_k^{(j)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(j)} \end{Bmatrix} \text{ et } \mathbf{D}_k^{(j)} = \begin{Bmatrix} U_k^{(j)} \\ \bar{U}_{-k}^{(j)} \end{Bmatrix}, \quad k \in Z \quad \text{et } j = 0, 1$$

nous permet d'écrire les solutions du premier problème mixte sur les cercles limites  $C_0$  et  $C_1$  de la couronne [voir Annexe A pour les détails]:

(a) pour  $k=1$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{S}_1^{(1)} \\ \mathbf{D}_1^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,1} & \mathbf{F}_{2,1} \\ \mathbf{G}_{1,1} & \mathbf{G}_{2,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_1^{(0)} \\ \mathbf{D}_1^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \text{(III-9)}$$

(b) pour  $k \in \{Z - \{1\}\}$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{S}_k^{(1)} \\ \mathbf{D}_k^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1,k} & \mathbf{F}_{2,k} \\ \mathbf{G}_{1,k} & \mathbf{G}_{2,k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_k^{(0)} \\ \mathbf{D}_k^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \text{(III-10)}$$

Puis-que le cercle intérieur ( $C_1$ ) est rigide, on a :  $\mathbf{D}_k^{(1)} = 0 \quad \forall k \in N$

tel que :

$$\mathbf{F}_{1,1} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ \frac{2H(1-H^2)}{\chi + H^4} & \frac{H^3(1+\chi)}{\chi + H^4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2(1-H^4)}{\chi+H^4} & 0 \end{bmatrix} \\
G_{1,1} &= \begin{bmatrix} \frac{H^2(1-H^2)}{\chi+H^4} & \frac{\chi(H^4-1)}{2(\chi+H^4)} \\ \frac{2}{(1+\chi)} \left[ \chi \log_e(H) + \frac{(1-H^2)^2}{\chi+H^4} \right] & \frac{H^2(1-H^2)}{\chi+H^4} \end{bmatrix} \\
G_{2,1} &= \begin{bmatrix} \frac{H(1+\chi)}{\chi+H^4} & 0 \\ \frac{2(1-H^2)}{(\chi+H^4)H} & \frac{1}{H} \end{bmatrix} \\
F_{1,k} &= \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} -(1+\chi)(\chi+H^{2+2k})H^{2-k} & (1-k)(H^2-1)(1+\chi)H^{2+k} \\ (1+k)(H^2-1)(1+\chi)H^{2-k} & -(1+\chi)(\chi+H^{2-2k})H^{2+k} \end{bmatrix} \\
F_{2,k} &= \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} (1+\chi)(1-k^2)(H^2-1) & (1-k) \left[ \frac{H^{2-2k}-1}{(1-k^2)(H^2-1)^2} (\chi+H^{2+2k}) - \right] \\ (1+k) \left[ \frac{H^{2+2k}-1}{(1-k^2)(H^2-1)} (\chi+H^{2-2k}) - \right] & (1+\chi)(1-k^2)(H^2-1) \end{bmatrix} \\
G_{1,k} &= \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} (1+\chi)(H^2-1)H^2 & -\frac{1}{1+k} \left[ \frac{\chi(H^{2+2k}-1)(\chi+H^{2-2k})}{(1-k^2)(H^2-1)^2} + \right] \\ -\frac{1}{1-k} \left[ \frac{\chi(H^{2-2k}-1)(\chi+H^{2+2k})}{(1-k^2)(H^2-1)^2} + \right] & (1+\chi)(H^2-1)H^2 \end{bmatrix} \\
G_{2,k} &= \frac{1}{\Delta M_k} \begin{bmatrix} -(1+\chi)(\chi+H^{2-2k})H^k & (1-k)(H^2-1)(1+\chi)H^k \\ (1+k)(H^2-1)(1+\chi)H^{-k} & -(1+\chi)(\chi+H^{2+2k})H^{-k} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

où  $\Delta M_k$  est défini dans l'annexe A.

## 6. Contraintes et déplacements sur les frontières de la couronne pour le deuxième problème mixte

Dans l'annexe B, nous montrons que les solutions du deuxième problème mixte sur les cercles limites  $C_0$  et  $C_1$  de la couronne sont de la forme:

(a) pour  $k=1$

$$\begin{Bmatrix} S_1^{(0)} \\ D_1^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{2,1} \\ G_{1,1} & G_{2,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1^{(1)} \\ D_1^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-11})$$

(b) pour  $k \in \{Z - \{1\}\}$

$$\begin{Bmatrix} S_k^{(0)} \\ D_k^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,k} & F_{2,k} \\ G_{1,k} & G_{2,k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_k^{(1)} \\ D_k^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-12})$$

Puisque le cercle extérieur ( $C_0$ ) est rigide, on a :  $D_k^{(0)} = 0 \quad \forall k \in N$   
tel que :

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= \begin{bmatrix} H^{-1} & 0 \\ \frac{2H(H^2-1)}{1+\chi H^4} & \frac{H(1+\chi)}{1+\chi H^4} \end{bmatrix} \\ F_{2,1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2(H^4-1)}{1+\chi H^4} & 0 \end{bmatrix} \\ G_{1,1} &= \begin{bmatrix} \frac{(H^2-1)}{1+\chi H^4} & -\frac{\chi(1-H^4)}{2(1+\chi H^4)} \\ \frac{2}{(1+\chi)} \left[ \frac{(1-H^2)^2}{1+\chi H^4} - \chi \log_e(H) \right] & \frac{(H^2-1)}{1+\chi H^4} \end{bmatrix} \\ G_{2,1} &= \begin{bmatrix} \frac{H^3(1+\chi)}{1+\chi H^4} & 0 \\ \frac{2H^3(H^2-1)}{(1+\chi H^4)} & H \end{bmatrix} \\ F_{1,k} &= \frac{1}{\Delta M'_k} \begin{bmatrix} -(1+\chi)(1+\chi H^{2+2k})H^{-k} & (1-k)(1-H^2)(1+\chi)H^{-k} \\ (1+k)(1-H^2)(1+\chi)H^k & -(1+\chi)(1+\chi H^{2-2k})H^k \end{bmatrix} \\ F_{2,k} &= \frac{1}{\Delta M'_k} \begin{bmatrix} (1+\chi)(1-k^2)(1-H^2)H^2 & (1-k) \left[ \frac{(1+\chi H^{2+2k})(1-H^{2-2k})}{(1-k^2)(1-H^2)^2} \right] \\ (1+k) \left[ \frac{(1+\chi H^{2-2k})(1-H^{2+2k})}{(1-k^2)(1-H^2)^2} \right] & (1+\chi)(1-k^2)(1-H^2)H^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$G_{1,k} = \frac{1}{\Delta M'_k} \left[ \begin{array}{cc} (1 + \chi)(1 - H^2) & -\frac{1}{1+k} \left[ \chi(1 - H^{2-2k})(1 + \chi H^{2-2k}) + \right. \\ \left. -\frac{1}{1-k} \left[ \chi(1 - H^{2-2k})(1 + \chi H^{2+2k}) + \right. \right. & \left. \left. (1 + \chi)(1 - H^2) \right] \right] \end{array} \right]$$

$$G_{2,k} = \frac{1}{\Delta M'_k} \left[ \begin{array}{cc} -(1 + \chi)(1 + \chi H^{2-2k})H^{2+k} & (1 - k)(1 - H^2)(1 + \chi)H^{2-k} \\ (1 + k)(1 - H^2)(1 + \chi)H^{2+k} & -(1 + \chi)(1 + \chi H^{2+2k})H^{2-k} \end{array} \right]$$

où  $\Delta M'_k$  est défini dans l'annexe B.

## 7. Expressions des déplacements et des contraintes sur les frontières

La solution obtenue au paragraphe précédent porte sur les déplacements et contraintes dans la couronne circulaire pour les deux problèmes mixtes. Les développements en séries de *Fourier* complexes peuvent s'écrire :

- pour le premier problème mixte:

$$u_r^{(0)}(\theta) + iu_\theta^{(0)}(\theta) = \frac{R_0}{2\mu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k^{(0)} e^{ik\theta} = \frac{R_0}{2\mu} \left[ U_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} (U_k^{(0)} e^{ik\theta} + U_{-k}^{(0)} e^{-ik\theta}) \right] \quad (\text{III-13})$$

$$u_r^{(1)}(\theta) + iu_\theta^{(1)}(\theta) = 0 \quad (\text{III-14})$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}(\theta) - i\sigma_{r\theta}^{(1)}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} = \sigma_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} + \sigma_{-k}^{(1)} e^{-ik\theta}) \quad (\text{III-15})$$

$$\sigma_{rr}^{(0)} - i\sigma_{r\theta}^{(0)} = -p + i\tau = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^{(0)} e^{ik\theta} = \sigma_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(0)} e^{ik\theta} + \sigma_{-k}^{(0)} e^{-ik\theta}) \quad (\text{III-16})$$

où  $p$  et  $\tau$  sont respectivement la pression et la contrainte de cisaillement visqueuse qu'exerce le fluide sur la surface externe du revêtement (interface fluide-revêtement). Dans la relation (III-16), les coefficients de *Fourier* complexes se calculent par :

$$\sigma_k^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sigma_{rr}^{(0)} - i\sigma_{r\theta}^{(0)}] e^{-ik\theta} d\theta \quad (\text{III-17a})$$

$$\bar{\sigma}_{-k}^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sigma_{rr}^{(0)} + i\sigma_{r\theta}^{(0)}] e^{-ik\theta} d\theta \quad (\text{III-17b})$$

si  $\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0$ ,  $\sigma_k^{(0)} = \bar{\sigma}_{-k}^{(0)}$ .

- pour le deuxième problème mixte:

$$u_r^{(1)}(\theta) + iu_\theta^{(1)}(\theta) = \frac{R_1}{2\mu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k^{(1)} e^{ik\theta} = \frac{R_1}{2\mu} \left[ U_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} (U_k^{(1)} e^{ik\theta} + U_{-k}^{(1)} e^{-ik\theta}) \right] \quad (\text{III-18})$$

$$u_r^{(1)}(\theta) + iu_\theta^{(1)}(\theta) = 0 \quad (\text{III-19})$$

$$\sigma_{rr}^{(0)}(\theta) - i\sigma_{r\theta}^{(0)}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} = \sigma_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} + \sigma_{-k}^{(1)} e^{-ik\theta}) \quad (\text{III-20})$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} - i\sigma_{r\theta}^{(1)} = -p + i\tau = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} = \sigma_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(1)} e^{ik\theta} + \sigma_{-k}^{(1)} e^{-ik\theta}) \quad (\text{III-21})$$

où  $p$  et  $\tau$  sont respectivement la pression et la contrainte de cisaillement visqueuse qu'exerce le fluide sur la surface interne du revêtement (interface fluide-revêtement).

Dans la relation (III-21), les coefficients de *Fourier* complexes se calculent par :

$$\sigma_k^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sigma_{rr}^{(1)} - i\sigma_{r\theta}^{(1)}] e^{-ik\theta} d\theta \quad (\text{III-22a})$$

$$\bar{\sigma}_{-k}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sigma_{rr}^{(1)} + i\sigma_{r\theta}^{(1)}] e^{-ik\theta} d\theta \quad (\text{III-22b})$$

si  $\sigma_{r\theta}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_k^{(1)} = \bar{\sigma}_{-k}^{(1)}$ .

Le développement en série de *Fourier* réelles des contraintes radiale et tangentielle sur les cercles limites permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(j)}(\theta) &= \frac{\alpha'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha'_k \cos k\theta + \beta'_k \sin k\theta) \\ \sigma_{r\theta}^{(j)}(\theta) &= \frac{\alpha''_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha''_k \cos k\theta + \beta''_k \sin k\theta) \end{aligned} \quad (\text{III-23})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha'_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}^{(j)}(\theta) \cos(k\theta) d\theta & ; & & \alpha''_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{r\theta}^{(j)}(\theta) \cos(k\theta) d\theta \\ \beta'_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}^{(j)}(\theta) \sin(k\theta) d\theta & ; & & \beta''_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{r\theta}^{(j)}(\theta) \sin(k\theta) d\theta \end{aligned}$$

Les relations (III-16) et (III-21) peuvent également s'écrire :

$$\sigma_{rr}^{(j)}(\theta) - i\sigma_{r\theta}^{(j)}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k^{(j)} e^{ik\theta} = \sigma_0^{(j)} + \sum_{k \geq 1} (\sigma_k^{(j)} e^{ik\theta} + \sigma_{-k}^{(j)} e^{-ik\theta})$$

avec  $j = 0$ , premier problème mixte

$j = 1$ , premier problème mixte

$$\sigma_k^{(j)} = \frac{1}{2} [(\alpha'_k - \beta''_k) - i(\beta'_k + \alpha''_k)] \quad , \quad \bar{\sigma}_{-k}^{(j)} = \frac{1}{2} [(\alpha'_k + \beta''_k) - i(\beta'_k - \alpha''_k)] \quad (\text{III-24})$$

où :  $\sigma_k^{(j)} = R_k^{(j)} + iI_k^{(j)}$  ,  $\bar{\sigma}_{-k}^{(j)} = R_{-k}^{(j)} - iI_{-k}^{(j)}$

### 7.1. Calcul des champs de déplacement et de contrainte sur les frontières de la couronne

Les coefficients de *Fourier* complexes  $U_k^{(j)}$ ,  $\bar{U}_{-k}^{(j)}$ ,  $\sigma_k^{(j)}$  et  $\bar{\sigma}_{-k}^{(j)}$  sont déterminés à partir des équations matricielles (III-9), (III-10), (III-11) et (III-12) pour les deux problèmes mixtes :

- Cas du premier problème mixte :

$$\begin{Bmatrix} U_k^{(0)} \\ \bar{U}_{-k}^{(0)} \end{Bmatrix} = [G_{1,k}] \begin{Bmatrix} \sigma_k^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_k & G_k \\ G_{-k} & H_{-k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_k^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \end{Bmatrix}, \quad k \in N \quad (\text{III-25})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_k^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \end{Bmatrix} = [F_{1,k}] \begin{Bmatrix} \sigma_k^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_k & G'_k \\ G'_{-k} & H'_{-k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_k^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \end{Bmatrix}, \quad k \in N \quad (\text{III-26})$$

avec

- pour  $k = 1$

$$H_1 = H_{-1} = \frac{(1 - H^2)H^2}{\chi + H^4}$$

$$G_1 = \frac{\chi(H^4 - 1)}{2(\chi + H^4)}$$

$$G_{-1} = \frac{-2}{(1 + \chi)} \left[ \chi \log_e(H) + \frac{(1 - H^2)^2}{\chi + H^4} \right]$$

$$H'_1 = H$$

$$H'_{-1} = \frac{(1 + \chi)H^3}{\chi + H^4}$$

$$G'_1 = 0$$

$$G'_{-1} = \frac{2H(1 - H^2)}{\chi + H^4}$$

- pour  $k \neq 1$

$$H_k = H_{-k} = \frac{1}{\Delta M_k} (1 + \chi)(H^2 - 1)H^2$$

$$G_k = -\frac{1}{(1 + k)} \frac{\left[ (1 - k^2)(H^2 - 1)^2 + \chi(H^{2+2k} - 1)(\chi + H^{2-2k}) \right]}{\Delta M_k}$$

$$G_{-k} = -\frac{1}{(1 - k)} \frac{\left[ (1 - k^2)(H^2 - 1)^2 + \chi(H^{2-2k} - 1)(\chi + H^{2+2k}) \right]}{\Delta M_k}$$

$$\begin{aligned}
H'_k &= -\frac{(1+\chi)(\chi+H^{2+2k})H^{2-k}}{\Delta M'_k} \\
H'_{-k} &= -\frac{(1+\chi)(\chi+H^{2-2k})H^{2+k}}{\Delta M'_k} \\
G'_k &= \frac{(1-k)(H^2-1)(1+\chi)H^{2+k}}{\Delta M'_k} \\
G'_{-k} &= \frac{(1+k)(H^2-1)(1+\chi)H^{2-k}}{\Delta M'_k}
\end{aligned}$$

- Cas du deuxième problème mixte :

$$\begin{cases} U_k^{(1)} \\ \bar{U}_{-k}^{(1)} \end{cases} = [G_{1,k}] \begin{cases} \sigma_k^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \end{cases} = \begin{bmatrix} H_k & G_k \\ G_{-k} & H_{-k} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_k^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \end{cases}, \quad k \in N \quad (\text{III-27})$$

$$\begin{cases} \sigma_k^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} \end{cases} - [F_{1,k}] \begin{cases} \sigma_k^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \end{cases} = \begin{bmatrix} H'_k & G'_k \\ G'_{-k} & H'_{-k} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_k^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} \end{cases}, \quad k \in N \quad (\text{III-28})$$

• pour  $k = 1$

$$-H_1 = H_{-1} = \frac{H^2 - 1}{1 + \chi H^4}$$

$$G_1 = \frac{\chi(1 - H^4)}{2(1 + \chi H^4)}$$

$$G_{-1} = \frac{2}{(1 + \chi)} \left[ \frac{(1 - H^2)^2}{(1 + \chi H^4)} - \chi \log_e(H) \right]$$

$$H'_1 = H^{-1}$$

$$H'_{-1} = \frac{(1 + \chi)H}{(1 + \chi H^4)}$$

$$G'_1 = 0$$

$$G'_{-1} = \frac{2H(H^2 - 1)}{1 + \chi H^4}$$

• pour  $k \neq 1$

$$H_k = H_{-k} = \frac{(1 - H^2)(1 + \chi)}{\Delta M'_k}$$

$$G_k = -\frac{1}{(1 + k)} \frac{[(1 - k^2)(H^2 - 1)^2 + \chi(1 - H^{2+2k})(1 + \chi H^{2-2k})]}{\Delta M'_k}$$

$$G_{-k} = -\frac{1}{1 - k} \frac{[(1 - k^2)(H^2 - 1)^2 + \chi(1 - H^{2-2k})(1 + \chi H^{2+2k})]}{\Delta M'_k}$$

$$H'_k = -\frac{(1+\chi)(1+\chi H^{2+2k})H^{-k}}{\Delta M'_k}$$

$$H'_{-k} = -\frac{(1+\chi)(1+\chi H^{2-2k})H^k}{\Delta M'_k}$$

$$G'_k = \frac{(1-k)(1+\chi)(1-H^2)H^{-k}}{\Delta M'_k}$$

$$G'_{-k} = \frac{(1+k)(1+\chi)(1-H^2)H^k}{\Delta M'_k}$$

En fin, les expressions permettant de calculer les déplacements et les contraintes sur les cercles limites s'écrivent :

- Cas du premier problème mixte :

- déplacements complexes à l'interface fluide-revêtement

$$\frac{2\mu}{R_0} (u_r^{(0)} + iu_\theta^{(0)}) = H_0 \sigma_0^{(0)} + G_0 \bar{\sigma}_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} \left[ (H_k \sigma_k^{(0)} + G_k \bar{\sigma}_{-k}^{(0)}) e^{ik\theta} + (G_{-k} \bar{\sigma}_k^{(0)} + H_{-k} \sigma_{-k}^{(0)}) e^{-ik\theta} \right] \quad (\text{III-29})$$

- contraintes complexes à l'interface revêtement-noyau

$$\sigma_{rr}^{(1)} - i\sigma_{r\theta}^{(1)} = H'_0 \sigma_0^{(0)} + G'_0 \bar{\sigma}_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} \left[ (H'_k \sigma_k^{(0)} + G'_k \bar{\sigma}_{-k}^{(0)}) e^{ik\theta} + (G'_{-k} \bar{\sigma}_k^{(0)} + H'_{-k} \sigma_{-k}^{(0)}) e^{-ik\theta} \right] \quad (\text{III-30})$$

- Cas du deuxième problème mixte :

- déplacements complexes à l'interface fluide-revêtement

$$\frac{2\mu}{R_1} (u_r^{(1)} + iu_\theta^{(1)}) = H_0 \sigma_0^{(1)} + G_0 \bar{\sigma}_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} \left[ (H_k \sigma_k^{(1)} + G_k \bar{\sigma}_{-k}^{(1)}) e^{ik\theta} + (G_{-k} \bar{\sigma}_k^{(1)} + H_{-k} \sigma_{-k}^{(1)}) e^{-ik\theta} \right] \quad (\text{III-31})$$

- contraintes complexes à l'interface revêtement-support

$$\sigma_{rr}^{(0)} - i\sigma_{r\theta}^{(0)} = H'_0 \sigma_0^{(1)} + G'_0 \bar{\sigma}_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} \left[ (H'_k \sigma_k^{(1)} + G'_k \bar{\sigma}_{-k}^{(1)}) e^{ik\theta} + (G'_{-k} \bar{\sigma}_k^{(1)} + H'_{-k} \sigma_{-k}^{(1)}) e^{-ik\theta} \right] \quad (\text{III-32})$$

## 7.2. Cas particuliers

Dans le cas où la contrainte tangentielle  $\sigma_{r\theta}$  sur un cercle limite de la couronne est nulle ou négligeable devant la contrainte radiale  $\sigma_{rr}$ ,  $\alpha_k'' = \beta_k'' = 0$  pour  $k \in N$  et l'expression de coefficients de *Fourier* (III-24) se réduisent à :

$$\sigma_k = \bar{\sigma}_{-k} = \frac{1}{2} (\alpha_k' - i\beta_k') \text{ et } \bar{\sigma}_k = \sigma_{-k} \quad (\text{III-33})$$

Dans ces conditions, les expressions (III-29) et (III-31) deviennent :

- Cas du premier problème mixte:

$$u_r^{(0)}(\theta) = \frac{R_0}{2\mu} \text{ Réel} \left\{ (H_0 + G_0) \mathcal{P}_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} \left[ (H_k + G_k) \mathcal{P}_k^{(0)} e^{ik\theta} + (G_{-k} + H_{-k}) \bar{\mathcal{P}}_k^{(0)} e^{-ik\theta} \right] \right\} \quad (\text{III-34a})$$

$$u_\theta^{(0)}(\theta) = \frac{R_0}{2\mu} \text{ Imaginaire} \left\{ (H_0 + G_0) \mathcal{P}_0^{(0)} + \sum_{k \geq 1} \left[ (H_k + G_k) \mathcal{P}_k^{(0)} e^{ik\theta} + (G_{-k} + H_{-k}) \bar{\mathcal{P}}_k^{(0)} e^{-ik\theta} \right] \right\} \quad (\text{III-34b})$$

- Cas du deuxième problème mixte:

$$u_r^{(1)}(\theta) = \frac{R_1}{2\mu} \text{ Réel} \left\{ (H_0 + G_0) \mathcal{P}_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} \left[ (H_k + G_k) \mathcal{P}_k^{(1)} e^{ik\theta} + (G_{-k} + H_{-k}) \bar{\mathcal{P}}_k^{(1)} e^{-ik\theta} \right] \right\} \quad (\text{III-35a})$$

$$u_\theta^{(1)}(\theta) = \frac{R_1}{2\mu} \text{ Imaginaire} \left\{ (H_0 + G_0) \mathcal{P}_0^{(1)} + \sum_{k \geq 1} \left[ (H_k + G_k) \mathcal{P}_k^{(1)} e^{ik\theta} + (G_{-k} + H_{-k}) \bar{\mathcal{P}}_k^{(1)} e^{-ik\theta} \right] \right\} \quad (\text{III-35b})$$

- si la charge radiale est symétrique (fonction paire), on trouve :

$$\alpha_k'' = \beta_k'' = \beta_k' = 0$$

$$\sigma_k^{(j)} = \sigma_{-k}^{(j)} = \bar{\sigma}_{-k}^{(j)} = \frac{\alpha_k'}{2} \in R, \forall k \in N \quad (\text{III-36})$$

Pour les deux problème mixtes, les relations (III-34) et (III-35) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{R_j} u_r^{(j)}(\theta) &= (H_0 + G_0) \frac{\alpha'_0}{2} + \sum_{k \geq 1} (2H_k + G_k + G_{-k}) \frac{\alpha'_k}{2} \cos(k\theta) \\ \frac{2\mu}{R_j} u_\theta^{(j)}(\theta) &= \sum_{k \geq 1} (G_k - G_{-k}) \frac{\alpha'_k}{2} \sin(k\theta) \end{aligned} \quad (\text{III-37})$$

$j = 0$  dans le cas du premier problème mixte  
 $j = 1$  dans le cas du deuxième problème mixte

Pour les deux problèmes mixtes, les expressions des déplacements radial et tangentiel sont identiques.

### 8. Application du principe de superposition

La géométrie de la couronne étant axisymétrique, le calcul des déplacements peut être fait en appliquant le principe de superposition de l'élasticité linéaire à partir de la connaissance du champ de déplacement à la surface de la couronne dû à une pression unitaire appliquée en un point donné. Le principe de la méthode de calcul est le suivant :

Soient  $L_{ij}$  et  $L'_{ij}$  les déplacements du nœud  $i$  dus à une pression unitaire appliquée à un autre nœud  $j$  figure (III-4). Si on applique en un point  $j$  une pression quelconque  $p_j$ , les composantes radiale et tangentielle du déplacement au point  $i$  s'écrivent :

$$\begin{cases} u_r(i) = L_{ij} p_j \\ u_\theta(i) = L'_{ij} p_j \end{cases} \quad (\text{III-38})$$

Cette relation peut être généralisée :

$$\begin{cases} u_r(i) = \sum_{j=0}^{M-1} L_{ij} p_j \\ u_\theta(i) = \sum_{j=0}^{M-1} L'_{ij} p_j \end{cases} \quad (\text{III-39})$$

$i = 0, 1, 2, \dots, M$  où  $M$  est le nombre d'intervalles (paire).

Les coefficients d'influence  $L_{ij}$  et  $L'_{ij}$  ou les coefficients des matrices de compliance  $[L]$  et  $[L']$  sont déterminés pour une charge unitaire représentée par la distribution suivante :

$$\begin{cases} p(\theta) = \cos^2\left(\frac{\pi\theta}{2\Delta\theta}\right) & \text{pour } \theta \in (-\Delta\theta, \Delta\theta) \\ p(\theta) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III-40})$$

où :  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{M}$

La distribution (III-40) permet d'assurer une continuité de la fonction et de sa dérivée figure (III-5).  $p$  est une fonction paire ( $\beta'_k = 0$  pour  $k \in N$ ), son développement en série de Fourier s'écrit alors :

$$p(\theta) = \frac{\alpha'_0}{2} + \sum_{k \geq 1} \alpha'_k \cos \theta \quad (\text{III-41})$$

avec 
$$\alpha'_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\theta) \cos k\theta d\theta$$

Après intégration, on trouve :

$$\alpha'_k = \left( 1 - \frac{k^2}{k^2 - \left(\frac{M}{2}\right)^2} \right) \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{M}\right)}{k\pi} \text{ pour } k \neq 0 \text{ et } \frac{M}{2} \quad (\text{III-42a})$$

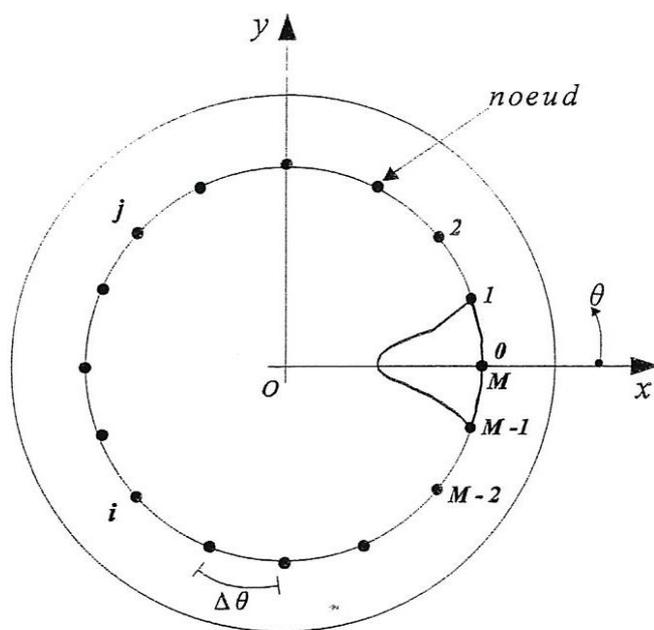
pour  $k = 0$  et  $\frac{M}{2}$ , on a :

$$\alpha'_0 = \frac{2}{M} \text{ et } \alpha'_{\frac{M}{2}} = -\frac{\alpha'_0}{2} \quad (\text{III-42b})$$

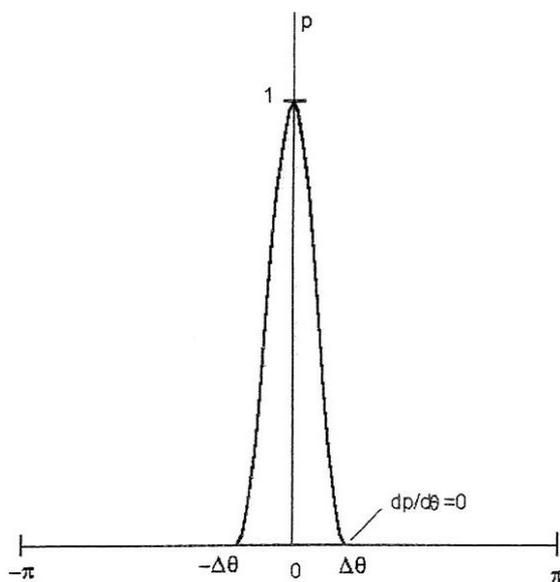
En remplaçant les relations (III-42) dans (III-41), il vient :

$$p(\theta) = \frac{2}{M} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \neq \frac{M}{2}}} \left( 1 - \frac{k^2}{k^2 - \left(\frac{M}{2}\right)^2} \right) \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{M}\right)}{k} \cos(k\theta) \quad (\text{III-43})$$

L'introduction de la méthode de superposition nous permet de calculer analytiquement et avec une bonne précision les déplacements radial et tangentiel. Cependant, l'efficacité de la méthode dépend directement du choix de la fonction de répartition.



**Fig. III. 4:** Représentation de la circonférence intérieure de la couronne par  $(M+1)$  points équidistants.



**Fig. III. 5:** Représentation de la répartition de la charge unitaire sur la circonférence intérieure développée.

où  $\{\delta\}$  et  $\{\delta'\}$  sont les champs de déplacement radial et tangentiel calculés pour une charge unitaire appliquée au nœud  $0$  figure (III-5) par :

$$\begin{aligned} \delta_i &= \frac{R_1}{2\mu} \left[ (H_0 + G_0) \frac{\alpha'_0}{2} + \sum_{k=1}^{M/2} (2H_k + G_k + G_{-k}) \frac{\alpha'_k}{2} \cos(k\theta) \right] \\ \delta'_i &= \frac{R_1}{2\mu} \sum_{k=1}^{M/2} (G_k - G_{-k}) \frac{\alpha'_k}{2} \sin(k\theta) \end{aligned} \quad (\text{III-46})$$

### 9. Modèle de la couche élastique mince

Ce modèle est utilisé pour le calcul du champ de déplacement radial dans le cas où l'épaisseur de la couche élastique est très faible devant le rayon de l'arbre, c'est-à-dire :

$$H = \frac{R_0}{R_1} = \frac{R_1 + t_h}{R_1} = 1 + \varepsilon \quad (\text{III-47})$$

avec  $\varepsilon = \frac{t_h}{R_1} \ll 1$  au  $t_h$  est l'épaisseur de la couche élastique.

Nous allons étudier le comportement des coefficients  $H_k$  et  $G_k$  lorsque le rapport des rayons  $H$  tend vers 1, c'est à dire  $R_0 \approx R_1$  avec  $R_0 > R_1$ .

#### 9.1. premier problème mixte

Lorsque  $H \rightarrow 1 + \varepsilon$ , les nouvelles expressions de  $H_k$  et  $G_k$  s'écrivent :

- pour  $k = 1$

$$H_1 = H_{-1} \approx \frac{-2\varepsilon}{\chi + 1} \quad ; \quad G_1 \approx \frac{4\chi\varepsilon}{\chi + 1} \quad ; \quad G_{-1} \approx \frac{2\chi\varepsilon}{1 + \chi}$$

- pour  $k \in \{Z - \{1\}\}$

En utilisant la formule de développement suivante :

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned} H_k &= H_{-k} \approx \frac{2\varepsilon}{1 + \chi} \\ G_k &= G_{-k} \approx \frac{2\varepsilon\chi}{1 + \chi} \end{aligned}$$

Les déplacements radial et tangentiel sur le cercle limite de rayon  $R_n$  s'écrivent :

- Déplacement radial

$$\frac{2\mu}{R_0} u_r^{(0)}(\theta) = 2\varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \sigma_0^{(0)} + \frac{2\chi - 1}{1 + \chi} \left( \sigma_1^{(0)} e^{i\theta} + \bar{\sigma}_1^{(0)} e^{-i\theta} \right) + \sum_{k>1} \left( \sigma_k^{(0)} e^{ik\theta} + \bar{\sigma}_k^{(0)} e^{-ik\theta} \right) \right\} \quad (\text{III-48})$$

- Déplacement tangentiel

$$\frac{2\mu}{R_0} u_\theta^{(i)}(\theta) = 2\varepsilon \operatorname{Im} \operatorname{aginaire} \left\{ \sigma_0^{(0)} + \frac{2\chi - 1}{1 + \chi} \left( \sigma_1^{(0)} e^{i\theta} + \bar{\sigma}_1^{(0)} e^{-i\theta} \right) + \sum_{k>1} \left( \sigma_k^{(0)} e^{ik\theta} + \bar{\sigma}_k^{(0)} e^{-ik\theta} \right) \right\} \quad (\text{III-79})$$

## 9.2. Deuxième problème mixte

Comme nous avons fait précédemment, les nouvelles expressions de  $H_k$  et  $G_k$  s'écrivent :

- pour  $k \in Z$

$$H_k = H_{-k} \approx \frac{2\varepsilon}{\chi + 1} \quad ; \quad G_k = G_{-k} \approx \frac{-2\chi\varepsilon}{1 + \chi}$$

Les déplacements radial et tangentiel sur le cercle limite de rayon  $R_l$ , s'écrivent :

- Déplacement radial

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{R_l} u_r^{(i)}(\theta) &= \frac{2(1-\chi)}{1+\chi} \varepsilon \left[ \frac{\alpha'_0}{2} + \sum_{k>1} \left( \alpha'_k \cos(k\theta) + \beta'_k \sin(k\theta) \right) \right] \\ &= \frac{2(1-\chi)}{1+\chi} \varepsilon \sigma_{rr}^{(i)}(\theta) \end{aligned}$$

où encore

$$u_r^{(i)}(\theta) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{t_h}{E} p(\theta) \quad \text{en déformations planes} \quad (\text{III-50})$$

$$u_r^{(i)}(\theta) = \frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} t_h p(\theta) \quad \text{en contraintes planes} \quad (\text{III-51})$$

- Déplacement tangentiel

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{R_l} u_\theta^{(i)} &= 2\varepsilon \left[ \frac{\alpha''_0}{2} + \sum_{k>1} \left( \alpha''_k \cos(k\theta) + \beta''_k \sin(k\theta) \right) \right] \\ &= 2\varepsilon \sigma_{r\theta}^{(i)}(\theta) \end{aligned}$$

$$u_\theta^{(i)}(\theta) = -\frac{t_h}{\mu} \tau(\theta) = \frac{2(1+\nu)}{E} t_h \tau(\theta) \quad (\text{III-52})$$

Dans les relations (III-50) à (III-52), les champs de déplacement radiale et circonférentiel d'un point appartenant à l'interface fluide-revêtement sont supposés être proportionnels aux contraintes radiales  $\sigma_{rr}$  et tangentiel  $\sigma_{r\theta}$  qui s'exercent en ce point.

## 10. Conclusion

Les solutions en contraintes et déplacements pour la couronne circulaire ont été développées à partir de la formulation complexe pour deux problèmes mixtes. La forme particulière du domaine représentant la couronne nous a permis de représenter les solutions sous forme de séries de *Fourier* complexes. Dans ce chapitre, nous avons montré que la solution en déplacements peut être obtenue en appliquant le principe de superposition de l'élasticité linéaire à partir d'un calcul des coefficients d'influence de la structure.

L'utilisation de l'hypothèse d'une couche élastique mince a permis de déduire un modèle de calcul rapide des champs de déplacement radial et tangentiel. Dans ce modèle, appelé modèle couche mince, les déplacements radial et tangentiel sont supposés proportionnels à la pression (contrainte normale) et à la contrainte de cisaillement visqueuse (contrainte tangentielle) dues aux actions du fluide.

# CHAPITRE IV

## Formulation des problèmes élasto-statiques linéaires par la méthode des éléments finis (2D) et (3D) pour les tubes et secteurs cylindriques

### 1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter la méthode des éléments finis pour obtenir les solutions approchées des problèmes d'élasticité linéaire (2D) et (3D) décrits dans le premier chapitre en coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques dans le cas de tubes cylindriques longs et de longueur finie soumis à un champ de pression uniforme ou non uniforme.

### 2. Présentation générale de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis de type déplacement utilisée pour la résolution des problèmes d'élasticité linéaire est une technique d'approximation nodale par sous-domaines des déplacements. Les inconnues notées  $\{U_n\}$  sont des valeurs de ces déplacements en certains points ou nœuds appelées degrés de liberté. La forme variationnelle  $W$  définie sur le milieu continu est ainsi représentée par une forme variationnelle dite discrétisée  $\tilde{W}$  qui fait intervenir les inconnues nodales  $\{U_n\}$ . Cette technique transforme la forme variationnelle en un système d'équations algébriques que l'on peut résoudre par les méthodes directes ou itératives.

### 3. Formulation variationnelle

La forme variationnelle du problème élasto-statique linéaire est construite à partir de l'application du principe des travaux virtuels (Cf. Chapitre I). En l'absence des forces de volume, elle s'écrit :

- Cas d'un problème tridimensionnel

$$W = \int_V \delta \varepsilon \{H\} \{\varepsilon\} dV - \int_{S_f} \delta u \{f_s\} dS = 0 \quad (IV-1)$$
$$\forall \{\delta u\} \text{ avec } \{\delta u\} = \{0\} \text{ et } \{u\} = \{\bar{u}\} \text{ sur } S_u$$

- Cas d'un problème bidimensionnel

$$W = \int_A \langle \delta \varepsilon \rangle [H] \langle \varepsilon \rangle dA - \int_{s_i} \langle \delta u \rangle \langle f_s \rangle ds = 0$$

$$\forall \langle \delta u \rangle \text{ avec } \langle \delta u \rangle = \langle 0 \rangle \text{ et } \langle u \rangle = \langle \bar{u} \rangle \text{ sur } s_u$$
(IV-2)

#### 4. Approximations par éléments finis

Selon le principe de la méthode des éléments finis, le domaine V ou A est découpé en  $N_e$  éléments volumiques  $V^e$  ou surfaciques  $A^e$  figures (IV-1) à (IV-4) tels que :

$$V = \bigcup_{e=1}^{N_e} V^e ; A = \bigcup_{e=1}^{N_e} A^e ; W = \sum_{e=1}^{N_e} W^e = 0$$
(IV-3)

où :  $W^e$  est la forme variationnelle élémentaire

Chaque élément comprend  $n_e$  nœuds et le domaine discret, obtenu après maillage, contient  $n$  nœuds au total.

La géométrie de chaque élément  $V^e$  est représentée par :

- En coordonnées cartésiennes

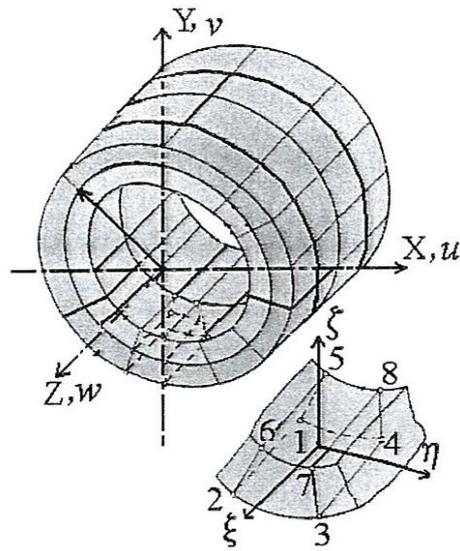
$$\begin{Bmatrix} x(\xi) \\ y(\xi) \\ z(\xi) \end{Bmatrix} = [\bar{N}(\xi)] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ x_{n_e} \\ y_{n_e} \\ z_{n_e} \end{Bmatrix}$$
(IV-4a)

- En coordonnées cylindriques

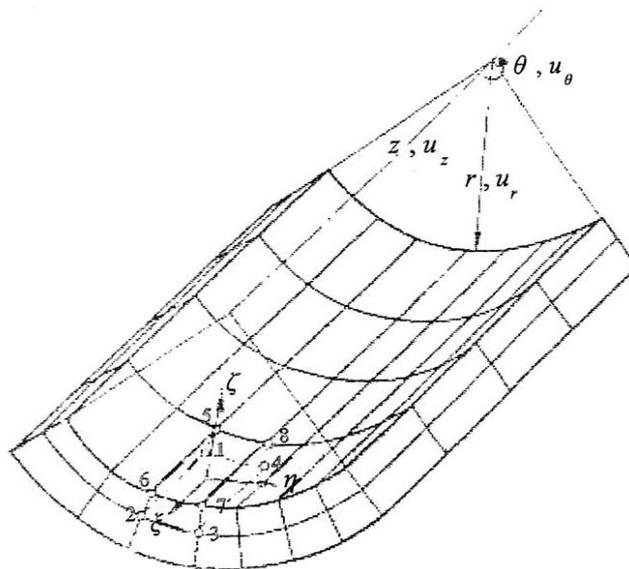
$$\begin{Bmatrix} r(\xi) \\ \theta(\xi) \\ z(\xi) \end{Bmatrix} = [\bar{N}(\xi)] \begin{Bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ r_{n_e} \\ \theta_{n_e} \\ z_{n_e} \end{Bmatrix}$$
(IV-4b)

où  $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$  ou  $\begin{Bmatrix} r \\ \theta \\ z \end{Bmatrix}$  définit la position d'un point appartenant à l'élément,  $x_i, y_i, z_i$  ou  $r_i, \theta_i, z_i$  ( $i = 1, n_e$ ) les coordonnées cartésiennes ou cylindriques des nœuds définissant  $V^e$ ,  $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$  les coordonnées paramétriques ou locales de l'élément parent ou de référence

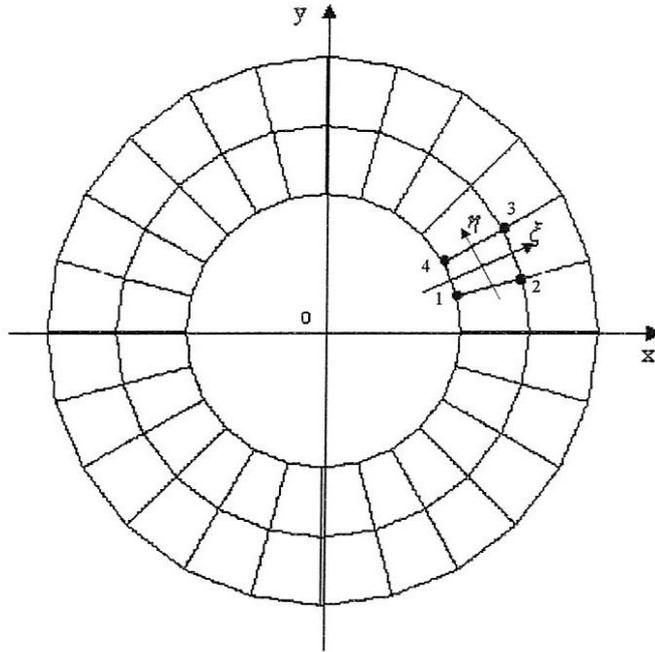
$V^r$  et  $[\bar{N}]$  les fonctions de transformation géométrique ou fonctions de forme exprimées en variables paramétriques.



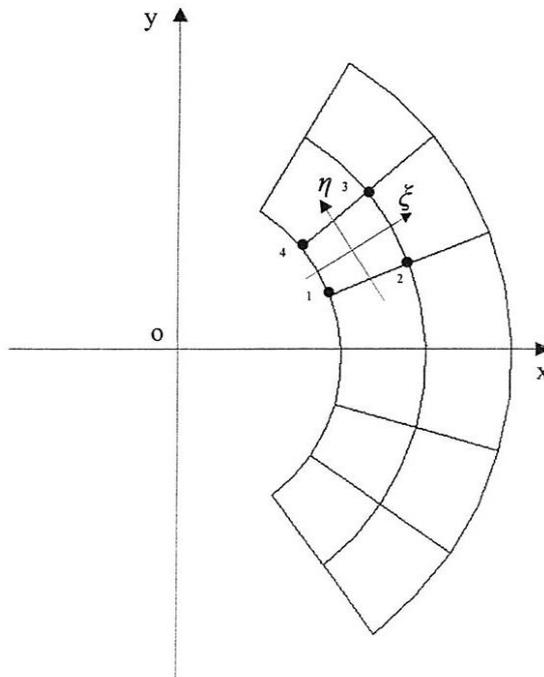
**Fig. IV. 1:** Découpage d'un tube cylindrique par éléments hexaédriques à huit nœuds.



**Fig. IV. 2:** Découpage d'un secteur cylindrique par éléments hexaédriques à huit nœuds.



**Fig. IV. 3:** *Maillage d'une couronne circulaire par éléments quadrilatéraux à quatre nœuds.*



**Fig. IV. 4:** *Maillage d'un secteur circulaire par éléments quadrilatéraux à quatre nœuds.*

Sur chaque élément, les déplacements réels  $\{u^e\}$  et les variations des déplacements  $\{\delta u^e\}$  sont représentés par :

$$\{u^e(\xi)\} \approx \{\tilde{u}^e(\xi)\} = [N(\xi)]\{u_n\}; \{\delta u^e(\xi)\} \approx \{\delta \tilde{u}^e(\xi)\} = [N(\xi)]\{\delta u_n\} \quad (IV-5)$$

où :  $\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$  et  $\{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix}$  en coordonnées cartésiennes

$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix}$  et  $\{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u_r \\ \delta u_\theta \\ \delta u_z \end{Bmatrix}$  en coordonnées cylindriques.

$[N]$  est la matrice regroupant les fonctions d'interpolation exprimées en variables paramétriques.

$\{u_n\}$  et  $\{\delta u_n\}$  sont des vecteurs regroupant les degrés de liberté et les variations des degrés de liberté de l'élément.

Dans le cas où les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolation de l'élément sont confondus (élément isoparamétrique), nous avons :

$$[\bar{N}] \equiv [N] \quad (IV-6)$$

L'approximation des déplacements  $\{u^e\}$  et des variations des déplacements  $\{\delta u^e\}$  conduit à la discrétisation de la forme variationnelle élémentaire  $W^e$  :

$$W^e \approx \tilde{W}^e = \langle \delta u_n \rangle \left( [k_e] \{u_n\} - \{f_e\} \right) \quad (IV-7)$$

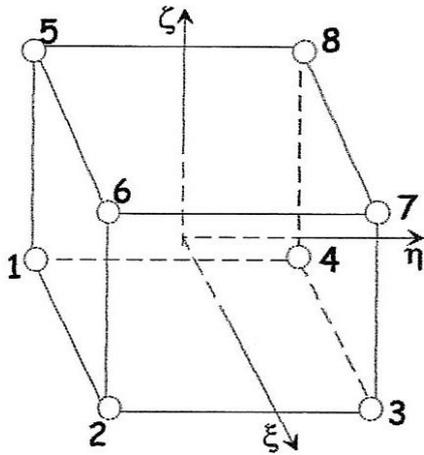
où  $[k_e]$  et  $\{f_e\}$  sont respectivement la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur sollicitation élémentaire définis par :

#### 4.1. Cas d'un problème tridimensionnel en coordonnées cartésiennes

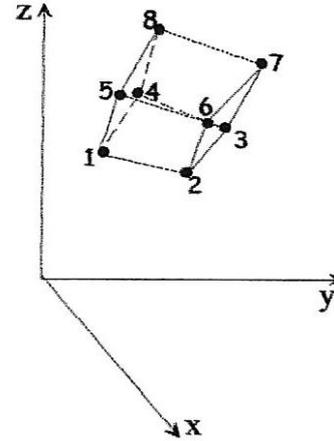
Pour ce type de problème, l'élément utilisé est l'élément hexaédrique tri-linéaire isoparamétrique à huit nœuds de classe  $C^0$  figure (IV-5).

La base polynômiale de cet élément est :  $\langle P(\xi, \eta, \zeta) \rangle = \langle 1; \xi; \eta; \zeta; \xi\eta; \eta\zeta; \xi\zeta; \xi\eta\zeta \rangle$

Les expressions des fonctions d'interpolation et de leurs gradients sont données dans le tableau 1.



Elément de référence



Elément réel

Fig. IV. 5: Elément hexaédrique à huit nœuds.

Tableau 1: Expressions des fonctions d'interpolation et de leurs gradients de l'élément hexaédrique à huit nœuds.

Nœud	$\frac{1}{c} \{N\}$	$\frac{1}{c} \{N_{\xi}\}$	$\frac{1}{c} \{N_{\eta}\}$	$\frac{1}{c} \{N_{\zeta}\}$
1	$a_2 b_2 c_2$	$-b_2 c_2$	$-a_2 c_2$	$-a_2 b_2$
2	$a b_2 c_2$	$b_2 c_2$	$-a c_2$	$-a b_2$
3	$a b c_2$	$b c_2$	$a c_2$	$-a b$
4	$a_2 b c_2$	$-b c_2$	$a_2 c_2$	$-a_2 b$
5	$a_2 b_2 c_1$	$-b_2 c_1$	$-a_2 c_1$	$a_2 b_2$
6	$a b_2 c_1$	$b_2 c_1$	$-a c_1$	$a b_2$
7	$a b c_1$	$b c_1$	$a c_1$	$a b$
8	$a_2 b c_1$	$-b c_1$	$a_2 c_1$	$a_2 b$

avec

$$c = \frac{1}{8}; a_1 = 1 + \xi, a_2 = 1 - \xi, b_1 = 1 + \eta, b_2 = 1 - \eta, c_1 = 1 + \zeta, c_2 = 1 - \zeta$$

Les matrices élémentaires s'expriment comme suit :

$$[k_e] = \iiint_{V_e} [B(x, y, z)]^T [H [B(x, y, z)]] dx dy dz \quad (IV-8)$$

$$\{f_e\} = \iint_{S_e} [N]^T \begin{Bmatrix} f_{s_x} \\ f_{s_y} \\ f_{s_z} \end{Bmatrix} dS$$

avec

$$[B(x, y, z)] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & N_{3,x} & 0 & 0 & N_{4,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & 0 & N_{3,y} & 0 & 0 & N_{4,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & 0 & 0 & N_{3,z} & 0 & 0 & N_{4,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & N_{2,y} & N_{2,x} & 0 & N_{3,y} & N_{3,x} & 0 & N_{4,y} & N_{4,x} & 0 \\ N_{1,x} & 0 & N_{1,z} & N_{2,x} & 0 & N_{2,z} & N_{3,x} & 0 & N_{3,z} & N_{4,x} & 0 & N_{4,z} \\ 0 & N_{1,y} & N_{1,z} & 0 & N_{2,y} & N_{2,z} & 0 & N_{3,y} & N_{3,z} & 0 & N_{4,y} & N_{4,z} \\ \\ N_{5,x} & 0 & 0 & N_{6,x} & 0 & 0 & N_{7,x} & 0 & 0 & N_{8,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{5,y} & 0 & 0 & N_{6,y} & 0 & 0 & N_{7,y} & 0 & 0 & N_{8,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{5,z} & 0 & 0 & N_{6,z} & 0 & 0 & N_{7,z} & 0 & 0 & N_{8,z} \\ N_{5,y} & N_{5,x} & 0 & N_{6,y} & N_{6,x} & 0 & N_{7,y} & N_{7,x} & 0 & N_{8,y} & N_{8,x} & 0 \\ N_{5,x} & 0 & N_{5,z} & N_{6,x} & 0 & N_{6,z} & N_{7,x} & 0 & N_{7,z} & N_{8,x} & 0 & N_{8,z} \\ 0 & N_{5,y} & N_{5,z} & 0 & N_{6,y} & N_{6,z} & 0 & N_{7,y} & N_{7,z} & 0 & N_{8,y} & N_{8,z} \end{bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \bar{N}_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ \\ N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{Bmatrix} f_{s_x} \\ f_{s_y} \\ f_{s_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p^e(\theta, z) \cos \theta^e \\ p^e(\theta, z) \sin \theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}$$

p étant la pression exercée par le fluide sur la paroi interne du tube et  $\theta^e$  la coordonnée angulaire d'un point appartenant à la face de l'élément soumise à la pression ( $S_i^e$ ).

Sur l'élément de référence  $V^r$ , les relations (IV-8) prennent la forme suivante :

$$[k_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi)]^T [H [B(\xi)]] \det J(\xi) d\xi d\eta d\zeta \quad (IV-9)$$

$$\{f_e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta, \zeta = 1)]^T \begin{Bmatrix} p^e(\xi, \eta) \cos \theta^e(\xi, \eta) \\ p^e(\xi, \eta) \sin \theta^e(\xi, \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} \left\{ J_S(\xi, \eta) \right\} d\xi d\eta$$

où  $\det J$  est le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation géométrique.

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{N}_{,\xi} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\eta} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\zeta} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_n\} \\ \{y_n\} \\ \{z_n\} \end{bmatrix}$$

la valeur du déterminant de la matrice jacobienne correspond au volume de l'élément réel ( $V^c$ ) divisé par huit.

et  $J_S = \left[ (y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta})^2 + (z_{,\xi} x_{,\eta} - x_{,\xi} z_{,\eta})^2 + (x_{,\xi} y_{,\eta} - y_{,\xi} x_{,\eta})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$   
avec

$$\langle x_{,\xi} : y_{,\xi} : z_{,\xi} \rangle = \langle \bar{N}_{,\xi} \rangle [\{x_n\} : \{y_n\} : \{z_n\}]$$

$$\langle x_{,\eta} : y_{,\eta} : z_{,\eta} \rangle = \langle \bar{N}_{,\eta} \rangle [\{x_n\} : \{y_n\} : \{z_n\}]$$

$$\langle \bar{N}_{,\xi}(\xi, \eta, \zeta = 1) \rangle = \frac{1}{4} \langle 0 : 0 : 0 : 0 : -(1-\eta) : (1-\eta) : (1+\eta) : -(1+\eta) \rangle$$

$$\langle \bar{N}_{,\eta}(\xi, \eta, \zeta = 1) \rangle = \frac{1}{4} \langle 0 : 0 : 0 : 0 : -(1-\xi) : -(1+\xi) : (1+\xi) : (1-\xi) \rangle$$

La valeur de  $J_S$  correspond au quart de l'aire de la face de l'élément réel  $S_i^e$ .

Pour transformer les opérateurs de dérivation, nous utilisons la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

où  $j_{\alpha\beta}$  sont les coefficients de la matrice jacobienne inverse  $[j] = [J]^{-1}$ .

Le vecteur sollicitation élémentaire peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\{f_e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_2(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_3(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_3(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_3(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_4(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_4(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_4(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_5(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_5(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_5(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_6(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_6(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_6(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_7(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_7(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_7(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_8(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_8(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_8(\xi, \eta, \zeta = 1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^e(\xi, \eta) \cos \theta^e(\xi, \eta) \\ p^e(\xi, \eta) \sin \theta^e(\xi, \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} J_s(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

avec

$$\langle N(\xi, \eta, \zeta = 1) \rangle = \frac{1}{4} \langle 0:0:0:0:(1-\xi)(1-\eta):(1+\xi)(1-\eta):(1+\xi)(1+\eta):(1-\xi)(1+\eta) \rangle$$

$$p^e \approx \tilde{p}^e = \sum_{i=1}^{n_c} N_i(\xi, \eta, \zeta = 1) p_i = \langle N(\xi, \eta, \zeta = 1) \rangle \{p_n\}$$

$$\theta^e \approx \tilde{\theta}^e = \sum_{i=1}^{n_c} \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta = 1) \theta_i = \langle \bar{N}(\xi, \eta, \zeta = 1) \rangle \{\theta_n\}$$

#### 4.2. Cas d'un problème tridimensionnel en coordonnées cylindriques

$$[k_e] = \iiint_{\mathcal{S}_e^c} [B(r, \theta, z)]^T [H [B(r, \theta, z)]] r dr d\theta dz \quad (\text{IV-10})$$

$$\{f_e\} = \iint_{\mathcal{S}_e^c} [N(\theta, z)]^T \begin{Bmatrix} f_{s_r} \\ f_{s_\theta} \\ f_{s_z} \end{Bmatrix} r d\theta dz = \iint_{\mathcal{S}_e^c} [N(\theta, z)]^T \begin{Bmatrix} p^e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} r d\theta dz$$

avec

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,r} & 0 & 0 & N_{2,r} & 0 & 0 & N_{3,r} & 0 \\ \frac{1}{r}N_{1,\theta} & \frac{1}{r}N_{1,\theta} & 0 & \frac{1}{r}N_{2,\theta} & \frac{1}{r}N_{2,\theta} & 0 & \frac{1}{r}N_{3,\theta} & \frac{1}{r}N_{3,\theta} \\ 0 & 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r}N_{1,\theta} & -\frac{1}{r}N_{1,\theta} + N_{1,r} & 0 & \frac{1}{r}N_{2,\theta} & -\frac{1}{r}N_{2,\theta} + N_{2,r} & 0 & \frac{1}{r}N_{3,\theta} & -\frac{1}{r}N_{3,\theta} + N_{3,r} \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,r} & N_{2,z} & 0 & N_{2,r} & N_{3,z} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & \frac{1}{r}N_{1,\theta} & 0 & N_{2,z} & \frac{1}{r}N_{2,\theta} & 0 & N_{3,z} \\ 0 & N_{4,r} & 0 & 0 & N_{5,r} & 0 & 0 & N_{6,r} \\ 0 & \frac{1}{r}N_{4,\theta} & \frac{1}{r}N_{4,\theta} & 0 & \frac{1}{r}N_{5,\theta} & \frac{1}{r}N_{5,\theta} & 0 & \frac{1}{r}N_{6,\theta} \\ N_{3,z} & 0 & 0 & N_{4,z} & 0 & 0 & N_{5,z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}N_{4,\theta} & -\frac{1}{r}N_{4,\theta} + N_{4,r} & 0 & \frac{1}{r}N_{5,\theta} & -\frac{1}{r}N_{5,\theta} + N_{5,r} & 0 & \frac{1}{r}N_{6,\theta} \\ N_{3,r} & N_{4,z} & 0 & N_{4,r} & N_{5,z} & 0 & N_{5,r} & N_{6,z} \\ \frac{1}{r}N_{3,\theta} & 0 & N_{4,z} & \frac{1}{r}N_{4,\theta} & 0 & N_{5,z} & \frac{1}{r}N_{5,\theta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{7,r} & 0 & 0 & N_{8,r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r}N_{6,\theta} & 0 & \frac{1}{r}N_{7,\theta} & \frac{1}{r}N_{7,\theta} & 0 & \frac{1}{r}N_{8,\theta} & \frac{1}{r}N_{8,\theta} & 0 \\ 0 & N_{6,z} & 0 & 0 & N_{7,z} & 0 & 0 & N_{8,z} \\ -\frac{1}{r}N_{6,\theta} + N_{6,r} & 0 & \frac{1}{r}N_{7,\theta} & -\frac{1}{r}N_{7,\theta} + N_{7,r} & 0 & \frac{1}{r}N_{8,\theta} & -\frac{1}{r}N_{8,\theta} + N_{8,r} & 0 \\ 0 & N_{6,r} & N_{7,z} & 0 & N_{7,r} & N_{8,z} & 0 & N_{8,r} \\ N_{6,z} & \frac{1}{r}N_{6,\theta} & 0 & N_{7,z} & \frac{1}{r}N_{7,\theta} & 0 & N_{8,z} & \frac{1}{r}N_{8,\theta} \end{bmatrix}$$

Sur l'élément de référence  $V^r$ , les relations (IV-10) prennent la forme suivante :

$$[k_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi)]^T [H [B(\xi)] r(\xi) \det J(\xi) d\xi d\eta d\zeta \quad (IV-11)$$

$$\{f_e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta, \zeta = 1)]^T \begin{Bmatrix} f_{s,r} \\ f_{s,\theta} \\ f_{s,z} \end{Bmatrix} r(\xi, \eta, \zeta = 1) J_s(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

où :  $\det J$  est le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation géométrique définie par :

$$[J] = \begin{bmatrix} r_{,\xi} & \theta_{,\xi} & z_{,\xi} \\ r_{,\eta} & \theta_{,\eta} & z_{,\eta} \\ r_{,\zeta} & \theta_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^8 \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) r_i = \langle \bar{N}(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{r_n\} \\ \theta(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^8 \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \theta_i = \langle \bar{N}(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{\theta_n\} \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^8 \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) z_i = \langle \bar{N}(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{z_n\} \end{aligned}$$

Les opérateurs de dérivation se transforment comme suit (dérivation en chaîne):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\dots)}{\partial r} &= \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \\ \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta} &= \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(\dots)}{\partial z} &= \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{aligned}$$

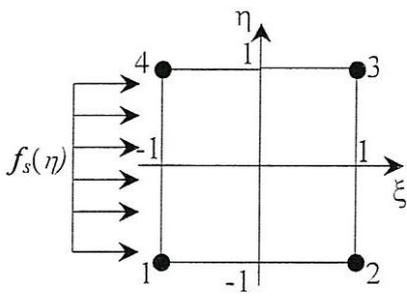
ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\dots)}{\partial r} &= j_{11} \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} + j_{12} \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} + j_{13} \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta} &= j_{21} \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} + j_{22} \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} + j_{23} \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial(\dots)}{\partial z} &= j_{31} \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} + j_{32} \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} + j_{33} \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

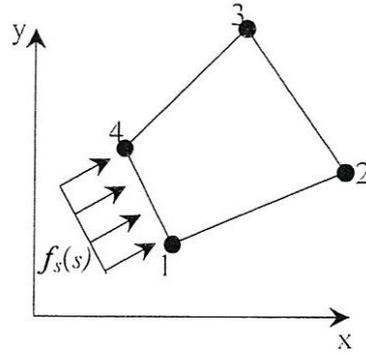
$$J_s = \left[ (\theta_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} \theta_{,\eta})^2 + (z_{,\xi} r_{,\eta} - r_{,\xi} z_{,\eta})^2 + (r_{,\xi} \theta_{,\eta} - \theta_{,\xi} r_{,\eta})^2 \right]^{1/2}$$

### 4.3. Cas d'un problème bidimensionnel en coordonnées cartésiennes

Pour ce type de problème, nous avons choisi l'élément quadrilatéral bilinéaire isoparamétrique à 4 nœuds de la famille de Lagrange (classe  $C^0$ ) pour l'approximation des déplacements  $u$  et  $v$ .



Elément de référence



Elément réel

Fig. II. 6: Elément bilinéaire à 4 noeuds (Q4).

Les caractéristiques de cet élément sont:

- nombre de nœuds géométriques : 4 ;
- nombre de nœuds d'interpolation : 4 ;
- nombre de degrés de liberté : 8 ;
- base polynômiale :  $\langle p(\xi, \eta) \rangle = \langle 1; \xi; \eta; \xi\eta \rangle$ .

Les expressions des fonctions d'interpolation et de leurs gradients exprimés en coordonnées paramétriques sont indiquées dans le tableau 1.

Tableau 2: Expressions des fonctions d'interpolation et de leurs gradients de l'élément Q4.

Nœud $i$	$N_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(\eta - 1)$	$\frac{1}{4}(\xi - 1)$
2	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \eta)$	$-\frac{1}{4}(1 + \xi)$
3	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)$
4	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$	$-\frac{1}{4}(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)$

$$[k_e] = \iint_{A^e} [B(x, y)]^T [H [B(x, y)]] dx dy$$

(IV-12)

$$\{f_e\} = \oint_{s^e} [N(s)]^T \begin{Bmatrix} f_{s,x} \\ f_{s,y} \end{Bmatrix} ds = \oint_{s^e} [N(s)]^T \begin{Bmatrix} p^e \cos \theta^e \\ p^e \sin \theta^e \end{Bmatrix} ds$$

avec

$$[B(x, y)] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Sur l'élément de référence, les expressions de la matrice de rigidité et du vecteur sollicitation prennent la forme suivante :

$$[k_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [H [B(\xi, \eta)]] \det J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{IV-13})$$

$$\{f_e\} = \int_{-1}^1 [N(\xi = -1, \eta)]^T \begin{Bmatrix} p^e(\eta) \cos \theta^e(\eta) \\ p^e(\eta) \sin \theta^e(\eta) \end{Bmatrix} |J_s| d\eta$$

avec  $\det(J)$  est le déterminant de la matrice jacobienne résultant de la transformation géométrique dont l'expression est :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{N}_{,\xi} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_{,,}\} & \{y_{,,}\} \end{bmatrix}$$

$$J_s = \left[ (x_{,\eta})^2 + (y_{,\eta})^2 \right]^{1/2} \text{ ou encore } J_s = \frac{\sqrt{x_{41}^2 + y_{41}^2}}{2} = \frac{\bar{L}_{1-4}}{2}$$

avec  $x_{41} = x_4 - x_1$  et  $y_{41} = y_4 - y_1$

$$[N(\xi = -1, \eta)]^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix}; \langle N(\xi = -1, \eta) \rangle = \frac{1}{2} \langle (1-\eta) : 0 : 0 : (1+\eta) \rangle$$

#### 4.4. Cas d'un problème bidimensionnel en coordonnées polaires

$$[k_e] = \iint_{A^e} [B(r, \theta)]^T [H [B(r, \theta)]] r d\theta dz \quad (\text{IV-14})$$

$$\{f_e\} = \oint_{S^e} [N]^T \begin{Bmatrix} f_{s_r} \\ f_{s_\theta} \end{Bmatrix} r d\theta = \oint_{S^e} [N]^T \begin{Bmatrix} p^e(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} r d\theta$$

avec

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,r} & 0 & N_{2,r} & 0 & N_{3,r} & 0 & N_{4,r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} N_{1,r} & 0 & \frac{1}{r} N_{2,r} & 0 & \frac{1}{r} N_{3,r} & 0 & \frac{1}{r} N_{4,r} \\ \frac{1}{r} N_{1,\theta} & N_{1,r} - \frac{N_1}{r} & \frac{1}{r} N_{2,\theta} & N_{2,r} - \frac{N_2}{r} & \frac{1}{r} N_{3,\theta} & N_{3,r} - \frac{N_3}{r} & \frac{1}{r} N_{4,\theta} & N_{4,r} - \frac{N_4}{r} \end{bmatrix}$$

Sur l'élément de référence, les expressions de la matrice de rigidité et du vecteur sollicitation prennent la forme suivante :

$$[k_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [H [B(\xi, \eta)]] (\xi, \eta) \det J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{IV-15})$$

$$\{f_e\} = \int_{-1}^1 [N(\xi = -1, \eta)]^T \begin{Bmatrix} p^e(\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} r(\xi = -1, \eta) J_s |d\eta$$

avec  $\det(J)$  est le déterminant de la matrice jacobienne résultant de la transformation géométrique dont l'expression est :

$$[J] = \begin{bmatrix} r_{,\xi} & \theta_{,\xi} \\ r_{,\eta} & \theta_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{N}_{,\xi} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{r_n\} \\ \{\theta_n\} \end{bmatrix}$$

$$J_s = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\theta_4 - \theta_1}{2} = \frac{\Delta \theta}{2} \text{ où } \Delta \theta \text{ est le pas angulaire du maillage.}$$

## 5. Evaluation des matrices élémentaires : Quadrature de Gauss-Legendre

Les coefficients des matrices élémentaires sont calculés par intégration sur la géométrie d'un élément. Lorsque les expressions à intégrer se présentent sous forme polynomiale, l'intégration peut alors être effectuée analytiquement. Dans le cas où la géométrie de l'élément réel et complexe (la matrice jacobienne est fonction de  $\xi, \eta, \zeta$ ) où lorsque les termes à intégrer ne se présentent plus sous forme polynomiale simple, on utilise des techniques d'intégration numérique telle que la quadrature de *Gauss-Legendre*.

Sur l'élément de référence, les matrices élémentaires se présentent sous la forme générale :

$$[k_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi)]^T [H [B(\xi)]] \det J(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [k_\xi] d\xi \quad (\text{IV-16})$$

$$\{f_e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta)]^T \{f_s(\xi, \eta)\} J_s(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{f_\xi\} d\xi d\eta$$

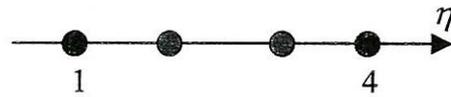
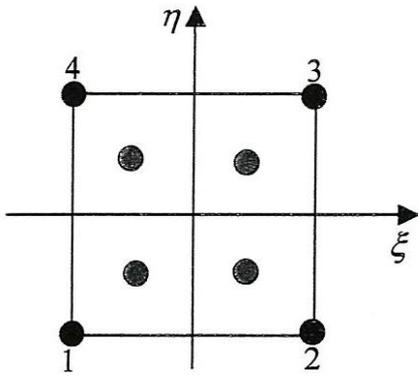
La formule d'intégration numérique de *Gauss* permet d'évaluer les matrices  $[k_e]$  et  $\{f_e\}$  sous la forme générale suivante :

$$[k_e] = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3} W_i W_j W_k [k_\xi(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] \quad (\text{IV-17})$$

$$\{f_e\} = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j \{f_\xi(\xi_i, \eta_j)\}$$

où :  $r_1, r_2, r_3$  sont respectivement les nombres de points d'intégration dans les directions  $\xi, \eta, \zeta$ . Le nombre total des points d'intégration est égale à  $r_1 \times r_2 \times r_3$ .

Les points d'intégration choisis pour l'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire et du vecteur sollicitation élémentaire sont indiqués sur les figures (IV-7) et (IV-8) dans le cas de problèmes bidimensionnel et tridimensionnel.



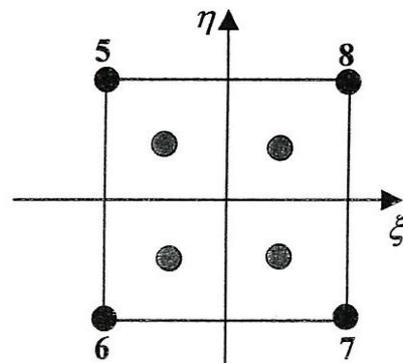
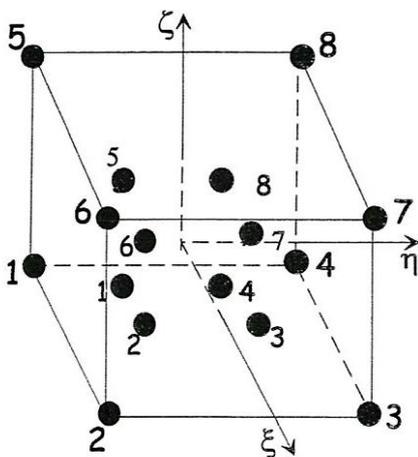
a) schéma à  $(2 \times 2)$  points pour le calcul de  $[k_e]$

b) schéma à 2 points pour le calcul de  $\{f_e\}$

● nœud géométrique

● point d'intégration de Gauss

**Fig. IV. 7:** Choix des points d'intégration de Gauss pour un problème à deux dimensions.



a) schéma à  $(2 \times 2 \times 2)$  points pour le calcul de  $[k_e]$

b) schéma à  $(2 \times 2)$  points pour le calcul de  $\{f_e\}$

● nœud géométrique

● point d'intégration de Gauss

**Fig. IV. 8:** Choix des points d'intégration de Gauss pour un problème à trois dimensions.

Les coordonnées des points d'intégration et leurs poids dans le cas d'une intégrale simple sont données dans le tableau 3:

**Tableau 3:** Valeurs des paramètres de la quadrature de Gauss à une dimension.

Nombre de points d'intégration de Gauss $r$	Abscisses $\xi_i$	Poids $W_i$	Degré max. des polynômes $(2r-1)$
1	0	2	1
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	3
3	$0, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}, \frac{5}{9}$	5

## 6. Formulation globale

La technique d'assemblage permet de construire la forme intégrale globale du problème élasto-statique:

$$\tilde{W} = \sum_{e \geq 1} \tilde{W}^e = 0 \quad (\text{IV-18})$$

Soit :

$$\tilde{W} = \langle \delta U_n \rangle ([K] \{U_n\} - \{F\}) = 0 \quad \forall \{ \delta U_n \} \quad (\text{IV-19})$$

avec

$$[K] = \underset{e=1}{\overset{N_e}{A}} \{k^e\}; \quad \{F\} = \underset{e=1}{\overset{N_e}{A}} \{f^e\}$$

$A$  est l'opérateur d'assemblage ;

$[K]$  est la matrice de rigidité globale ayant une structure de bande (singulière):

$\{F\}$  est le vecteur sollicitation globale ;

$\{U_n\}$  est le vecteur regroupant tous les D.D.L. de la structure.

Après introduction des conditions aux limites sur les déplacements, le vecteur solution  $\{U_n\}$  est obtenu en inversant le système d'équations algébriques linéaires suivant :

$$[K]\{U_n\} = \{F\} \quad \forall \langle \delta U_n \rangle \quad (IV-20)$$

La connaissance du vecteur déplacement global permet de calculer les déformations et les contraintes au centre de chaque élément en appliquant les relations déformations-déplacements et contraintes-déformations établies dans le premier chapitre. La procédure de calcul est la suivante :

pour chaque élément du maillage :

- extraire  $\{u_n\}$  de  $\{U_n\}$
- calculer les déformations et les contraintes au centre de l'élément.

## 7. Conclusion

Ce chapitre est consacré à la formulation du problème élasto-statique linéaire (2D) et (3D) des différentes géométries utilisées (le tube et le secteur cylindriques ainsi que la couronne et le secteur circulaires) par la méthode des éléments finis en utilisant les coordonnées cartésiennes, cylindriques et polaires.

Les éléments finis choisis dans l'analyse statique des structure sont :

- l'élément quadrilatéral bilinéaire à quatre nœuds pour la résolution du problème élastostatique plan dans les couronnes et secteurs circulaires.
- l'élément hexaédrique trilineaire à huit nœuds pour l'analyse (3D) des contraintes et des déformations dans les tubes et secteurs cylindriques.

# CHAPITRE V

## Résolution des problèmes d'interaction fluide-structure dans les paliers hydrodynamiques par la méthode itérative de *Newton-Raphson* amortie

### 1. Introduction

[Les problèmes d'interaction fluide-structure dans les paliers hydrodynamiques (HD) ont fait l'objet de nombreuses études tant théoriques qu'expérimentales. Ces problèmes, qui sont fortement non linéaires, interviennent dès que les déformations des solides principalement de l'alésage deviennent importantes de l'ordre de grandeur des épaisseurs du film lubrifiant.] C'est le cas des paliers de tête de bielle des moteurs à combustion interne pour lesquels le changement de géométrie de l'alésage résulte de la déformation globale de toute la structure du palier.] C'est également le cas des paliers de turbomachines (turbines, pompes centrifuges, etc.) dont les alésages sont revêtus d'une couche constituée de matériaux de faibles modules d'élasticité (métaux blancs, babbits, élastomères, etc.). L'importance des problèmes élastiques dans les paliers HD a été soulignée pour la première fois par *T. E. Carl* en 1964 [29] à travers d'essais menés sur un palier cylindrique dont le rapport de la longueur au diamètre est  $L/D = 0,5$ . Le dispositif expérimental conçu permettait d'effectuer des essais sous charges statique et dynamique pour des vitesses de rotation de l'arbre comprises entre 30 et 6000 rpm. Le coussinet est une bague d'épaisseur  $l_h = 6,5 \text{ mm}$  montée dans un support. Il montra que :

- les déformations élastiques des éléments constituant le palier (arbre et coussinet) ne sont pas négligeables même aux basses pressions ;
- les calculs théoriques qui ne prennent pas en considération la variation de la viscosité avec la pression et la déformation des éléments du palier conduisent à des valeurs très élevées de la pression maximale dans le film lubrifiant.

Depuis, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude théorique des effets des déformations élastiques sur le comportement statique et dynamique des paliers HD en se basant sur les résultats expérimentaux de *Carl*. Parmi ces auteurs, on cite *Higginson* [30] qui, en 1966, est le premier chercheur qui a proposé une solution du problème d'interaction fluide-structure dans un palier infiniment long ( $L/D \rightarrow \infty$ ) dont le coussinet est constitué d'une couche élastique encastrée dans un support rigide. Le lubrifiant utilisé est isovisqueux et les déformations élastiques de l'interface fluide-couche élastique sont supposées proportionnelles à la pression engendrée dans le film. Le même problème a été étudié par *O'Donoghue* et *al*

[31], ces auteurs aboutissent à des constatations identiques à celles de *Carl*. En 1967, les mêmes auteurs ont publié dans le cas d'un palier de longueur finie des résultats théoriques et expérimentaux et montrent qu'il existe une bonne corrélation entre ces derniers. Les équations de l'élasticité sont résolues analytiquement à l'aide d'un développement en double séries de *Fourier* de la pression HD [32]. *Conway* et *Lee* [33] ont étudié le même problème proposé par *Higginson*. Ils se sont intéressés à l'effet de la variation de la viscosité avec la pression sur les performances statiques du palier tels que la portance HD, le coefficient de frottement, l'angle de calage et l'angle de cavitation qui définit l'étendue de la zone active du palier. Ces auteurs utilisent une loi exponentielle pour exprimer la variation de la viscosité avec la pression.

Récemment, plusieurs auteurs [34-38] se sont intéressés à la résolution des problèmes d'interaction fluide-structure pour l'étude de l'influence des déformations élastiques sur la stabilité et la réponse dynamique d'un palier statiquement chargé. La modélisation linéaire schématisant l'action du fluide sur l'arbre par quatre coefficient de raideur et quatre coefficient d'amortissement est souvent utilisée.

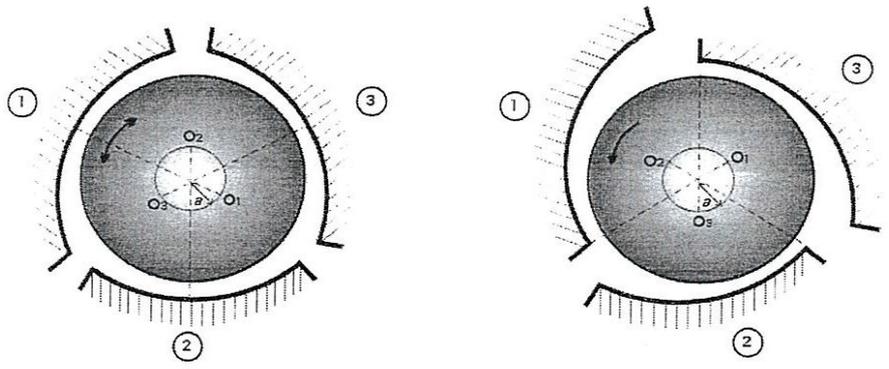
[ Le problème d'interaction fluide-structure dans un palier HD fonctionnant en régime isotherme est gouverné par les équations de la lubrification HD (équation de *Reynolds* [39]) et de l'élasticité linéaire. Ces équations permettent de calculer le champ de pression dans le fluide lubrifiant et les déformations élastiques de la structure du palier. Le schéma de résolution le plus souvent utilisé pour la résolution numérique de ce type de problèmes est présenté dans le paragraphe 5. ]

Après validation des différents modèles élastiques développés dans cette étude, nous présentons, dans ce chapitre, une technique de résolution rapide et précise des problèmes d'interaction fluide-structure dans les paliers compliant utilisant des fluides piézo-visqueux et compressibles (barotropes) comme lubrifiants. Une étude paramétrique est aussi envisagée afin de mettre en évidence les effets de l'élasticité des revêtements de surface et de la rhéologie du lubrifiant sur les performances statiques des paliers HD. Dans cette étude, une attention particulière est portée aux distributions de pression calculées dans le film lubrifiant, à la géométrie du film, à la portance hydrodynamique et à la force de frottement pour différentes valeurs de l'excentricité relative de fonctionnement et deux types de revêtements de surface dont l'un est constitué d'un matériau compressible tels que les métaux et l'autre en matériau quasi-incompressible (Elastomère).

## 2. Paliers hydrodynamiques

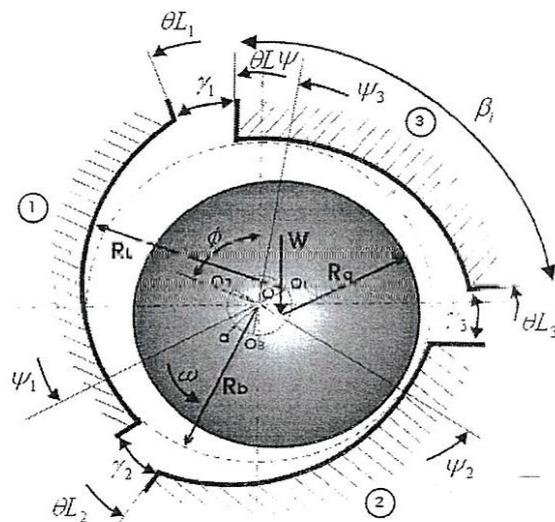
Les paliers HD sont des éléments fluides utilisés pour le guidage des lignes d'arbre de machines tournantes et alternatives. Ces paliers se rangent en deux catégories : les paliers radiaux et les paliers axiaux appelés aussi paliers de butée. Parmi les paliers radiaux, on cite :

- les palier à géométrie fixe tels que les paliers circulaires, les paliers à arc partiel et les paliers à lobes figure (V-1) et (V- 2) ;
- les paliers à géométrie variable qui sont les paliers à patins oscillants figure (V-3) ;



a) Lobes symétriques (palier centré)

b) Lobes asymétriques (palier centré)



c) Cas général : Palier excentré

Fig. V. 1: Schéma d'un palier à lobes.

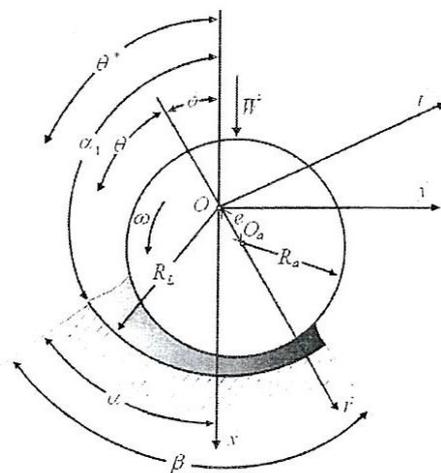
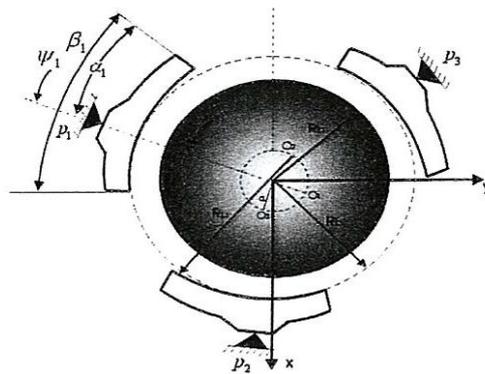


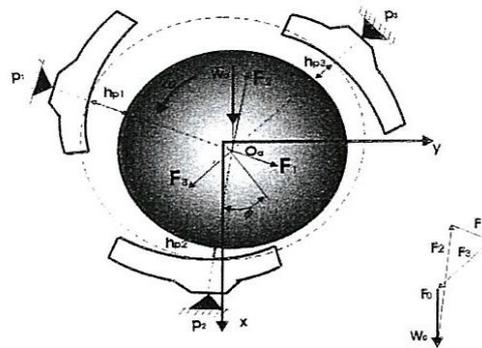
Fig. V. 2: Schéma d'un palier à arc partiel.



a) Photographie d'un palier à 5 patins.



a) palier non chargé



b) palier chargé

b) Schéma d'un palier à 3 patins.

Fig. V. 3: Paliers à patins oscillants.

Un palier HD est constitué généralement d'un arbre en acier traité tournant dans un alésage en bronze ou en acier régulé appelé coussinet ou patin.

### 2.1 Description d'un palier circulaire

Un palier circulaire ou palier lisse est constitué schématiquement d'un arbre de rayon  $R_a$  et d'un coussinet de rayon intérieur  $R_c$  et de longueur  $L$  figure (V-4). Ainsi, un palier lisse peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins et caractérisé par trois grandeurs :

- le jeu radial  $C = R_c - R_a$  ;
- le jeu relatif  $C/R$  de l'ordre de  $10^{-3}$  ;
- le rapport de la longueur au diamètre du palier  $L/D$ .

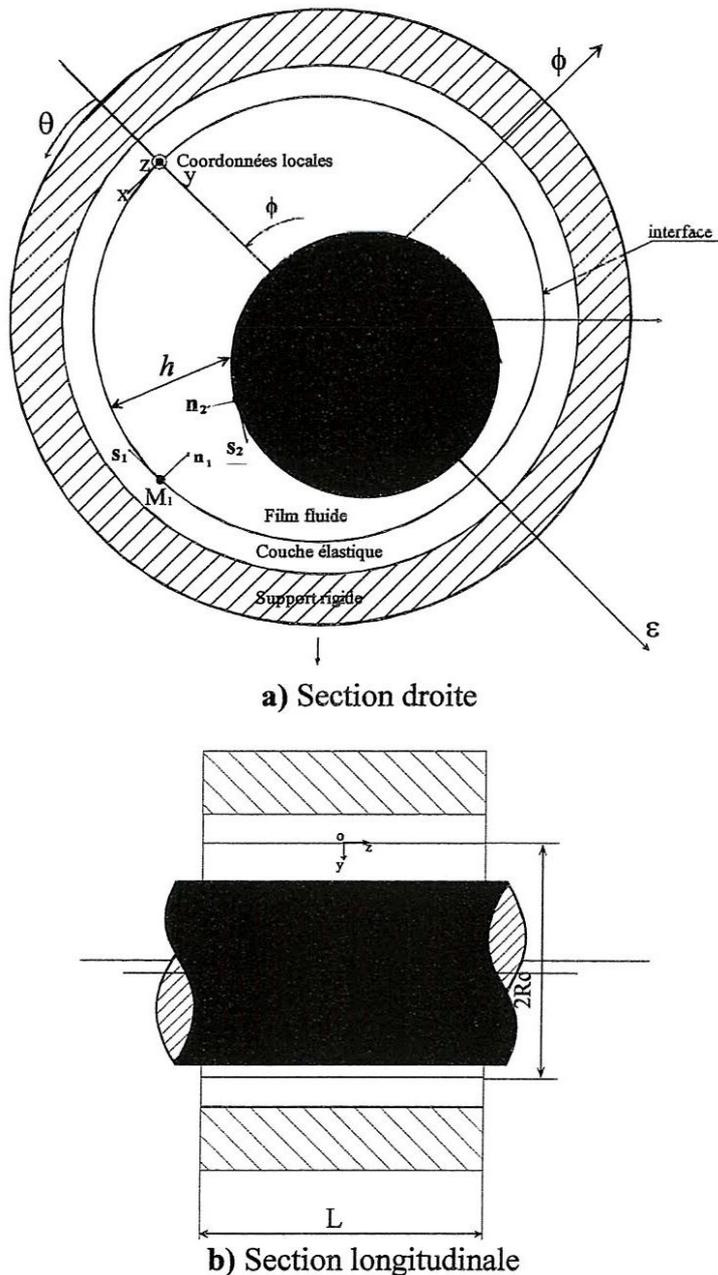


Fig. V. 4: Géométrie d'un palier cylindrique mono couche.

Selon la valeur de  $L/D$ , le palier peut être court ( $L/D \rightarrow 0$ ), long ( $L/D \rightarrow \infty$ ) ou de longueur finie. On rencontre ce type de palier dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs, etc.

Pour  $L/D \rightarrow \infty$ , l'écoulement du fluide lubrifiant s'effectue seulement suivant la direction circonférentielle du palier.

La figure (V-5) présente les trois phases que l'on peut observer lors de la mise en route sous charge d'un palier. Les points  $O_a$  et  $O_c$  représentent respectivement les centres géométriques de l'arbre et du coussinet, tandis que  $W$  désigne la charge extérieure appliquée à l'arbre.

A l'arrêt figure (V-5a), l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance  $O_c O_a$  est égale au jeu radial  $C$ .

Au démarrage figure (V-5b), l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet, le régime de lubrification est dit limite ou mixte. Le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent formé par les surfaces de l'arbre et du coussinet. Dès que la vitesse de rotation devient suffisante, il ya création d'un champ de pression hydrodynamique. L'intégration de celui-ci sur la surface de l'arbre ou du coussinet donne la portance HD du palier qui s'oppose à la charge figure (V-5c).

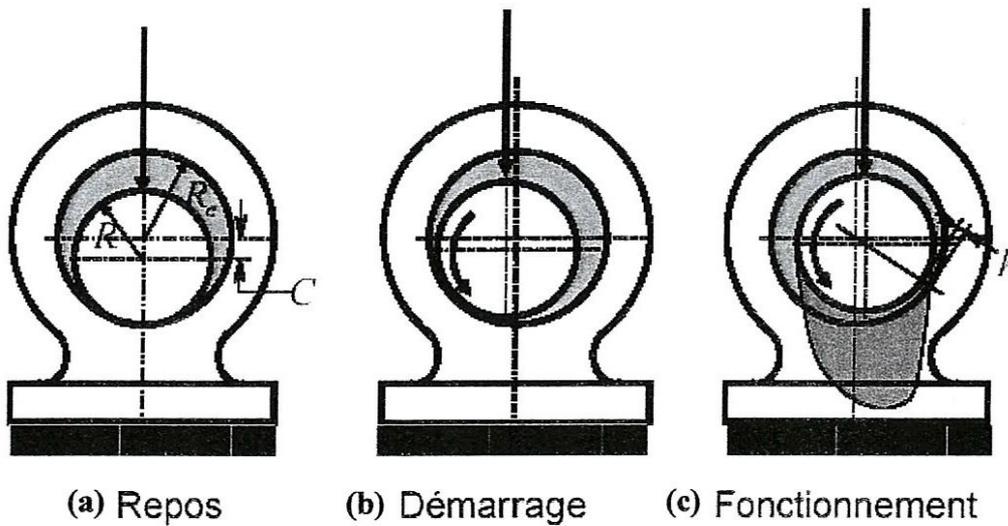


Fig. V. 5: Positions d'un arbre dans un palier lisse.

Pour une vitesse de rotation stable et une charge  $W$  constante le centre de l'arbre  $O_a$  occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet définie par l'excentricité  $e = |O_c O_a|$  et l'angle de calage  $\phi$  que fait la direction de la charge  $W$  avec la ligne des centres  $O_c O_a$ .

## 2.2. Description d'un palier à arc partiel

Les paliers à arc partiel sont aussi largement utilisés dans des applications diverses surtout lorsque :

- les conditions de chargement ne sont pas sévères ;
- les vitesses de rotation sont faibles ou modérées ;
- la direction de la charge est constante ou presque constante.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au régime hydrodynamique pur et nous supposons que l'écoulement du fluide lubrifiant dans le palier est isotherme, laminaire et permanent. Le processus de calcul des performances statiques d'un palier comprend quatre étapes :

- écriture de l'équation de *Reynolds* correspondant au palier étudié ;
- écriture de l'équation géométrique du film lubrifiant ;
- définition des conditions aux limites sur la pression ;
- résolution des équations et calcul des performances statiques (portance HD, nombre de frottement, débits, angle de calage).

### 3. Equations de base de la lubrification HD

Ce paragraphe introduit les équations générales qui régissent les problèmes de la lubrification HD ainsi que les hypothèses qui leurs sont généralement associées.

#### 3.1. Equations générales de la dynamique des fluides visqueux

Les équations qui décrivent le comportement d'un fluide compressible sont établies à partir :

- des principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus (lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie) ;
- de lois spécifiques du milieu fluide comme les lois de comportement rhéologique, les équations d'état  $f(p, \rho, T) = 0$  fournies par la thermodynamique, les lois de variation  $\rho = \rho(p, T)$  et  $\mu = \mu(p, T)$ , etc.

Quand la température est supposée constante en tout point du milieu fluide (régime d'écoulement isotherme), l'équation de l'énergie n'est plus à prendre en compte.

Dans le cas d'un fluide compressible, les équations générales sont les suivantes :

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (V-1)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (V-2)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

- Loi de comportement rhéologique pour un fluide homogène, isotrope et newtonien :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \Theta) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (V-3)$$

Dans ces équations :

- $x_i, t$  : variables d'espace et de temps;  
 $u_i$  : composantes de la vitesse d'écoulement;  
 $f_i$  : forces massiques extérieures (gravité, etc.);  
 $\rho$  : masse volumique du fluide;  
 $\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes (symétrique);  
 $p$  : pression dans le fluide;  
 $D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ : tenseur des taux de déformation;  
 $\lambda, \mu$  : constantes de *Navier* qui sont respectivement les coefficients de viscosité de dilatation et de cisaillement.  $\mu$  est aussi appelée viscosité dynamique ou absolue du fluide.  
 $\delta_{ij}$  : symbole de *Kronecker*  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$   
 $\Theta = D_{kk}$  : taux de dilatation cubique ( $\Theta = 0$  pour un fluide isovolume ou incompressible).

En reportant l'équation (V-3) dans l'équation (V-2), on obtient les équations de *Navier-Stokes* :

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \\
 \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}
 \end{aligned} \tag{V-4}$$

$i, j = 1, 2, 3$  avec  $\frac{D(\quad)}{Dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + u_j \frac{\partial(\quad)}{\partial x_j}$  (dérivée totale ou particulaire)

Les équations de *Navier-Stokes* (V-4) et de conservation de la masse ou de continuité (V-1) permettent, après application des conditions limites de déterminer le champ des vitesses et la répartition de pression dans le fluide visqueux étudié. Dans le cadre de la lubrification des paliers hydrodynamiques, certaines hypothèses simplificatrices sont adoptées.

### 3.2. Hypothèses simplificatrices

Ces hypothèses peuvent se répartir en trois groupes :

- hypothèses liées à la géométrie du palier ;
- hypothèses liées au fluide ;
- hypothèses générales indépendantes du milieu fluide.

#### 3.2.1. Hypothèses liées à la géométrie du palier

Dans un palier HD figure (V-4), l'épaisseur du film lubrifiant  $h$  est très petite par rapport aux autres dimensions du palier (longueur et diamètre) : on est en régime de lubrification par films minces visqueux. Cette hypothèse permet de simplifier sensiblement les équations de mouvement (V-4) qui se réduisent à (forces d'inertie et de volume négligées) [40] :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{cases} \quad (\text{V-5a})$$

ou encore en changeant de notation :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{V-5b})$$

avec  $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$  et  $(u, v, w) \equiv (u_1, u_2, u_3)$

La deuxième équation montre que la pression  $p$  dans le fluide est constante suivant l'épaisseur du film lubrifiant ( $p = p(x, z)$ ).

### 3.2.2. Hypothèses liées au fluide lubrifiant

- le fluide est supposé homogène, isotrope et non polaire (absence des couples de contraintes et des couples de volume) ;
- la viscosité dynamique  $\mu$  et la masse volumique  $\rho$  sont uniquement fonction de la pression  $p$  ;
- la température est supposée constante en tout point du film lubrifiant.

Il convient de noter que la pression joue un rôle très important dans les problèmes de lubrification par son influence sur la viscosité du lubrifiant. D'après [40], la plupart des huiles lubrifiantes ont une viscosité qui croît avec la pression. Ce phénomène présente une importance pratique car dans certains mécanismes lourdement ou sévèrement chargés (roulements, engrenages, etc.) le lubrifiant subit des pressions qui peuvent atteindre 3 GPa ( $3 \times 10^9$  Pa). Le tableau (V-1) donne la variation de viscosité avec la pression d'une huile à caractère paraffinique.

**Tableau V-1 :** Variation de la viscosité avec la pression d'une huile minérale à caractère paraffinique.

Pression (MPa)	0.1	10	20	30	40	50	100
Viscosité (Pa.s)	0.05	0.06	0.075	0.11	0.15	0.23	0.70

Il est à remarquer que la viscosité augmente d'autant plus vite que la pression est plus importante. Cette augmentation dépend de la nature du lubrifiant, elle est plus importante pour les huiles à caractère naphénique que pour les huiles à caractère paraffinique figure (V-6).

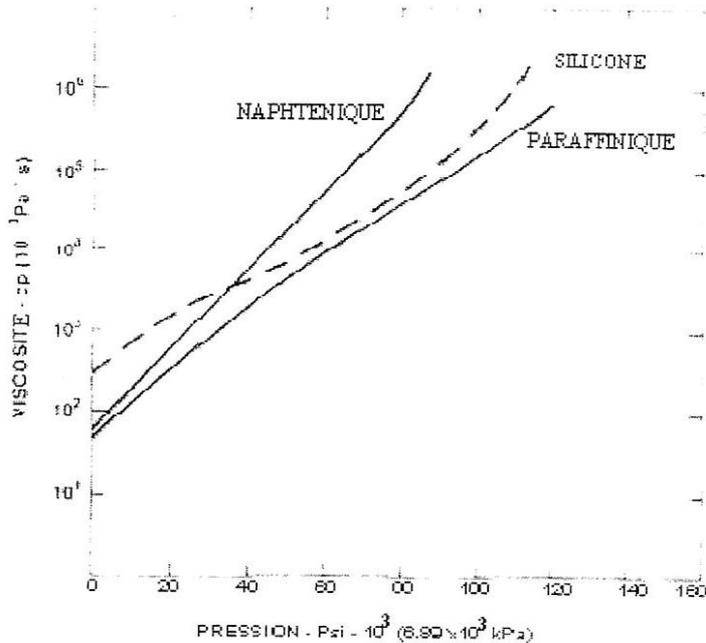


Fig. V. 6: Variation de la viscosité de différentes huiles lubrifiantes avec la pression à 100°C.

Le tableau (V-2) donne à titre d'exemple les variations de viscosité avec la pression d'une huile paraffinique, d'une huile naphthénique et de l'eau.

Tableau V-2 : Variation de la viscosité avec la pression d'une huile paraffinique, naphthénique et de l'eau.

Pression en (MPa)	Viscosité en Pascal-seconde (Pa.s)		
	Huile paraffinique	Huile naphthénique	Eau
1	0.052	0.055	0.00100
140	0.810	2.2	0.00111
280	8.700	91	0.00123

Il est à noter aussi que la viscosité des fluides peu visqueux est moins affectée par une augmentation de pression que les fluides de grande viscosité.

### 3.2.3. Hypothèses générales

- les forces massiques et les couples de volume sont négligés ;
- l'écoulement est laminaire et les forces d'inertie ne sont pas prises en considération;
- il n'y a pas de glissement au niveau du contact fluide-parois (arbre et coussinet). Cette hypothèse permet d'écrire les conditions de non glissement des particules de fluide au niveau des parois qui servent comme conditions aux limites sur les vitesses lors de l'intégration des équations (V-5) ;
- les surfaces de l'arbre et du coussinet sont supposées lisses (non rugueuses).

### 3.3. Dérivation de l'équation de Reynolds pour un écoulement plan (2D)

Pour un écoulement permanent ( $\partial/\partial t = 0$ ) plan figure (V-7), l'équation de continuité et les équations de mouvement du fluide se réduisent à :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (V-6)$$

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{d}{dy} \left( \mu \frac{du}{dy} \right) \quad (V-7)$$

Les conditions limites sur la vitesse sont :

$$y = 0 \text{ (surface du coussinet)} : u = u_1, v = v_1 = 0 \quad (V-8)$$

$$y = h \text{ (surface de l'arbre)} : u = u_2, v = v_2 = \frac{Dh(x,t)}{Dt} = u_2 \frac{dh}{dx}$$

Après deux intégrations par rapport à  $y$  de l'équation (V-7), on obtient l'expression de la composante de la vitesse suivant la direction  $x$  :

$$u = \frac{dp}{dx} \int \frac{y}{\mu} dy + A \int \frac{dy}{\mu} + B$$

Si par hypothèse, la viscosité est indépendante de  $y$  ( $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ), l'expression de la composante de la vitesse devient :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h) + \frac{y}{h} u_2 + u_1 \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \quad (V-9)$$

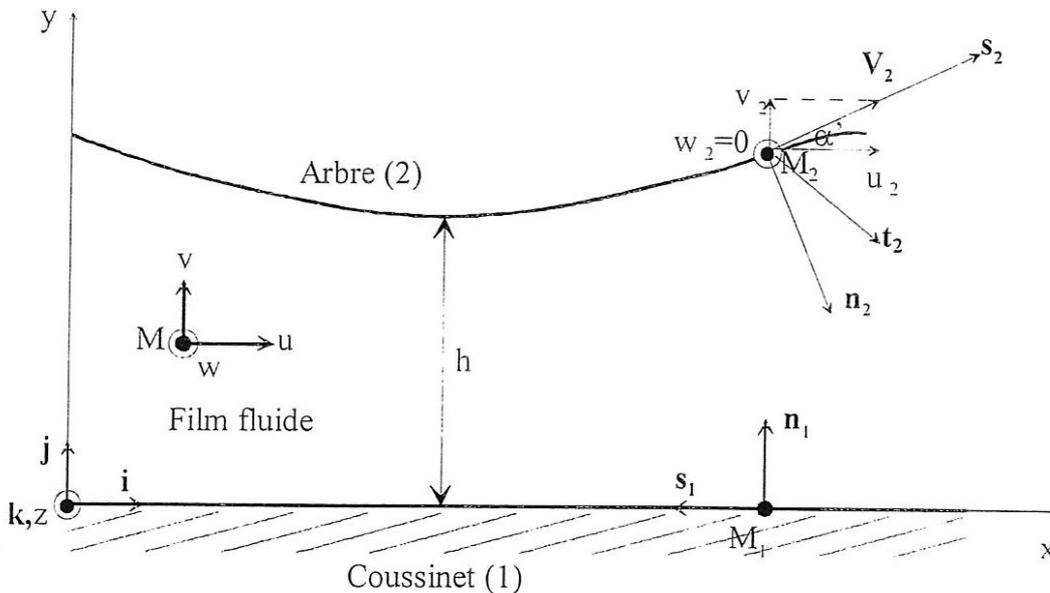


Fig. V. 7: Palier développé.

L'équation de *Reynolds* est obtenue en introduisant l'équation (V-9) dans l'équation de continuité (V-6) et en intégrant à travers l'épaisseur du film :

$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy + [\rho v]_0^h = 0$$

Cette équation peut être développée selon la formule générale de *Leibnitz* :

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} f(x, y, z) dy - f(x, h_2, z) \frac{\partial h_2}{\partial x} + f(x, h_1, z) \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

Soit :

$$\frac{d}{dx} \int_0^h (\rho u) dy - (\rho u)_2 \frac{dh}{dx} + (\rho v)_2 - (\rho v)_1 = 0 \quad (V-10)$$

Si la variation de la masse volumique à travers l'épaisseur du film n'est pas importante, l'équation (V-10) prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dx} \left( \rho \int_0^h u dy \right) - \rho u_2 \frac{dh}{dx} + \rho v_2 = 0 \quad (V-11)$$

compte tenu de l'équation (V-9), on trouve :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\rho h (u_1 + u_2)) - \rho u_2 \frac{dh}{dx} + \rho v_2 \quad (V-12)$$

ou encore, compte tenu de l'expression de  $v_2$  :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\rho h (u_1 + u_2)) \quad (V-13)$$

si  $u_1 = 0$  (coussinet fixe) et  $u_2 = \omega R_a$  (vitesse linéaire de la surface de l'arbre constante), l'équation (V-13) devient :

$$\frac{1}{R_a^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{dp}{d\theta} \right) = 6\omega \frac{d}{d\theta} (\rho h) \quad (V-14)$$

où  $\theta = \frac{x}{R_a}$ ,  $\rho = \rho(p)$ ,  $\mu = \mu(p)$ .

Pour un fluide incompressible ( $\rho = \text{constante}$ ) et isovisqueux ( $\mu = \text{constante}$ ), l'équation (V-14) devient :

$$\frac{d}{d\theta} \left( h^3 \frac{dp}{d\theta} \right) = 6\mu\omega R_a^2 \frac{dh}{d\theta} \quad (\text{V-15})$$

Sous la forme (V-15), l'équation de *Reynolds* est linéaire et peut admettre une solution analytique (Cf. Annexe C).

### 3.4. Conditions limites sur la pression

Le champ de pression dans le film lubrifiant doit satisfaire à :

- l'équation de *Reynolds* (V-14) ou (V-15) ;
- certaines conditions limites liées à l'alimentation du palier en lubrifiant ainsi qu'à l'écoulement du lubrifiant dans le palier.

#### 3.4.1. Conditions liées à l'alimentation

$$p = p_a \text{ dans les rainures d'alimentation} \quad (\text{V-16})$$

#### 3.4.2. Conditions liées à l'écoulement du lubrifiant

Si nous considérons une section droite du palier circulaire, plusieurs types de conditions limites peuvent être envisagées d'après la littérature [41].

a) Conditions de *Sommerfeld*

$$p(0) = p(2\pi) = 0 \quad (\text{V-17})$$

Ces conditions conduisent à une répartition de pression anti-symétrique par rapport à  $\theta = \pi$ , donc à l'apparition de pressions fortement négatives entre  $\theta = \pi$  et  $\theta = 2\pi$  ce qui n'est pas possible dans la réalité.

Ces conditions ne sont pratiquement pas utilisées sauf dans le cas de pressions d'alimentation très élevées.

b) Conditions de *Gümbel* ou de demi-*Sommerfeld*

$$\begin{aligned} p(0) &= 0 \\ p(\theta) &= 0 \quad \text{pour } \theta \in [\pi, 2\pi] \end{aligned} \quad (\text{V-18})$$

Ces conditions reprennent en fait les conditions de *Sommerfeld* mais imposent entre  $\theta = \pi$  et  $\theta = 2\pi$  l'annulation de la pression  $p$ . Ces conditions ne respectent pas la continuité du débit. En pratique, elles sont parfois utilisées car elles sont de mise en œuvre simple et les résultats théoriques obtenus sont souvent proches des résultats expérimentaux.

c) Conditions de *Reynolds* ou de *Swift-Stieber*

$$\begin{aligned} p(\theta = 0) &= 0 \\ p = \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0 \quad \text{pour } \theta = \theta_c \end{aligned} \quad (\text{V-19})$$

où  $\theta_c$  est l'angle de cavitation ou l'angle de rupture du film lubrifiant ( $\pi < \theta_c < 2\pi$ ).

Ces conditions sont fréquemment utilisées et donnent des résultats comparables aux résultats expérimentaux sauf en ce qui concerne la valeur des débits.

### 3.5. Equations géométriques du film

Dans ce paragraphe, nous donnons les expressions de l'épaisseur du film lubrifiant dans le cas de paliers rigide et compliant.

#### 3.5.1. Palier rigide

D'après la figure (V-4), l'épaisseur du film d'huile est :

$$h = O_c M_1 - O_c M_2 = R_c - O_c M_2 = R_a + C - O_c M_2$$

En appliquant la règle des sinus au triangle  $O_a M_2 O_c$  il vient :

$$\frac{R_a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{e}{\sin \alpha'} = \frac{O_c M_2}{\sin(\theta - \alpha')}$$

$$\text{d'où: } \sin \alpha' = \frac{e}{R_a} \sin \theta \quad \text{et} \quad O_c M_2 = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(\theta - \alpha')$$

$$\text{or, } \sin(\theta - \alpha') = \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha'} - \frac{e}{R_a} \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{donc } O_c M_2 = R_a \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{e}{R_a} \right)^2 \sin^2 \theta} - \frac{e}{R_a} \cos \theta \right]$$

En développant le terme  $\sqrt{1 - \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2}$ , nous obtenons:

$$\sqrt{1 - \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^4 + \dots$$

la quantité  $\left(\frac{e}{R_a}\right)$  est très petite devant l'unité (de l'ordre de  $10^{-3}$ ), on peut donc négliger le

terme  $\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2, \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^4, \text{etc.}$  devant 1, il vient alors :

$$h(\theta) = C + e \cos \theta \quad (\text{V-20a})$$

on encore

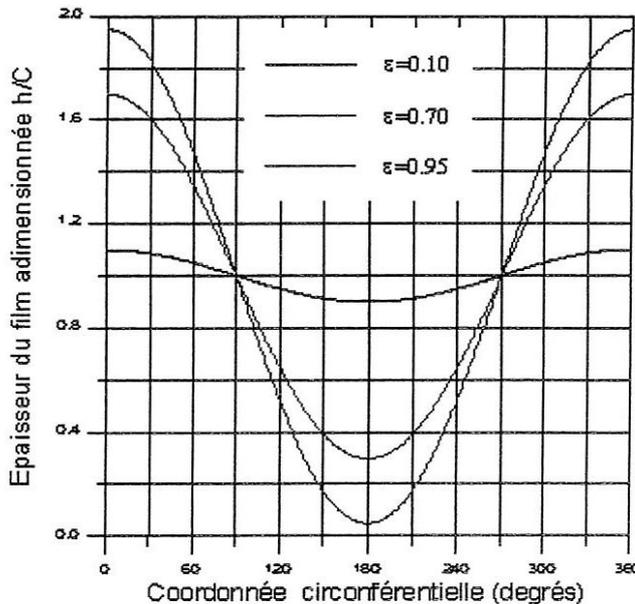
$$h(\theta) = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (\text{V-20b})$$

où  $\varepsilon = \frac{e}{C}$  est l'excentricité relative de fonctionnement dont la valeur est comprise entre 0 et 1 ( $0 < \varepsilon < 1$ ).

- si  $\varepsilon = 0$ , l'arbre et le coussinet sont coaxiaux ;
- si  $\varepsilon = 1$ , il y a présence d'un contact entre les surfaces de l'arbre et du coussinet.

Il faut noter que l'origine de la coordonnée circonférentielle  $\theta$  est située sur la ligne des centres figure (V-4).

La figure (V-8) représente la variation circonférentielle de l'épaisseur du film adimensionnée  $\tilde{h} = \frac{h}{C}$  pour différentes valeurs de l'excentricité relative  $\varepsilon$ . L'épaisseur minimale  $h_{\min} = C - e$  ou  $\tilde{h}_{\min} = 1 - \varepsilon$  se situe à  $\theta = \pi$ .



**Fig. V. 8:** Variation circonférentielle de l'épaisseur du film en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs de l'excentricité relative.

### 3.7. Lois de variation viscosité-pressure et densité-pressure

Lorsque le palier est sévèrement chargé, les hautes pressions engendrées dans le film lubrifiant ont une influence significative sur le lubrifiant et les surfaces des éléments constituant le palier (arbre, coussinet, patin). Les deux propriétés importantes du lubrifiant qui sont affectées par les pressions élevées sont la densité (masse volumique) et la viscosité. Plusieurs lois de variation viscosité-pressure et densité-pressure ont été proposées dans la littérature [42], [43]. Parmi ces lois, on cite celles qui conviennent pour l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure en régime isotherme.

#### 3.7.1 Lois de variation viscosité-pressure [43]

Pour caractériser l'effet piézo-visqueux, on peut utiliser les lois suivantes :

- lois de *Barus* établie en 1893 [44]

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha p} \quad (V-27)$$

où  $p$  est la pression,  $\mu_0$  la viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique et  $\alpha$  le coefficient de piézo-viscosité qui dépend de l'huile et qui est généralement compris entre 5 et 40  $\text{GPa}^{-1}$ . Les valeurs de ce coefficient pour différents fluides lubrifiants sont reportées dans le tableau (V-3) [45].

Tableau V-3 : Valeurs du coefficient de piézo-viscosité pour différents fluides lubrifiants

Lubrifiant	Coefficient de piézo-viscosité, $\alpha$ ( $\text{GPa}^{-1}$ )			
	20° C	40° C	60° C	80° C
Huile minérale naphthénique	26.5	23.4	20.0	16.4
Huile minérale paraffinique	19.8	18.2	16.2	15.0
Polyglycol	18.7	16.0	13.2	10.5
TMP-ester	15.5	14.4	13.1	12.2
Diester	14.6	13.6	12.8	11.6
Polyalphaolefine	15.5	13.8	12.2	10.5

Les viscosimètres à haute pression permettant de déterminer l'influence de la pression sur la viscosité sont :

- le viscosimètre à chute de bille qui peut être utilisé à des pressions allant jusqu'à 30 MPa ;
- le viscosimètre de *Couette* ou à cylindres concentriques développé pour mesurer les propriétés rhéologiques des fluides pour des pressions qui peuvent atteindre 500 MPa et des taux de cisaillement qui s'échelonnent de 0.5 à  $2 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ .

Ce coefficient est sensiblement constant pour des pressions inférieures à 70 MPa. Il peut être calculé par la relation suivante [39] :

$$\alpha = 1,216 + 4,143(\log_{10} \nu)^{3,0627} + 2,848 \times 10^{-4} m^{5,1903} (\log_{10} \nu)^{5,5976} - 3,999(\log_{10} \nu)^{3,0975} \rho^{0,1162} \quad (V-28)$$

Dans la relation (V-28),  $\alpha$  est le coefficient de piézoviscosité en  $10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$ ,  $\nu$  est la viscosité cinématique à la température considérée en  $\text{cSt}$  ou  $\text{mm}^2/\text{s}$ ,  $\rho$  la masse volumique du lubrifiant en  $\text{g/cm}^3$ .  $m$  est le coefficient viscosité-température défini par la relation suivante:

$$\log_{10}(\log_{10}(\nu + a)) = -m \log_{10} T + n \quad (\text{V-29})$$

La relation (V-29) est due à *Mac Coull* et *Walther* [39]. Dans cette relation,  $\nu$  est la viscosité cinématique,  $a$ ,  $m$  et  $n$  des constantes qui dépendent du lubrifiant et  $T$  la température absolue en degrés *Kelvin* (K). La valeur de  $a$  dépend de l'unité de viscosité, si  $\nu$  est en centi-Stokes (cSt), la valeur de  $a$  est comprise entre 0,6 et 0,75.

Autre relation [43], relation de *Wooster* :

$$\alpha = (0,6 + 0,965 \log_{10} \mu_0) \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \quad (\text{V-30})$$

où  $\alpha$  en ( $\text{Pa}^{-1}$ ) et  $\mu_0$  la viscosité à la pression atmosphérique en (cPo) ou (mPa.s).

Le changement de variables  $p(\theta, z) = -\frac{1}{\alpha} \log_e(1 - \alpha q(\theta, z))$  permet de conserver la forme et le caractère linéaire de l'équation de *Reynolds* (V-15) ainsi que les conditions aux limites et les bornes d'intégration à condition de remplacer  $p(\theta, z)$  par  $q(\theta, z)$ .

- loi de *Roelands* établie en 1966

les effets de la pression sur la viscosité du lubrifiant sont mieux décrits par la relation de *Roelands* [46]:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \right)^{1 - \left(1 + \frac{p}{c}\right)^Z} \quad (\text{V-31})$$

$\mu_0$  : viscosité à la pression atmosphérique ( $p = 0$ )

$Z$  : indice pression-viscosité

$\mu_\infty = 6,31 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$  et  $c = 1,96 \times 10^8 \text{ Pa}$

Autre écriture de la loi de *Roelands* [47] :

$$\mu = \mu_0 \exp \left[ \frac{p_0 \alpha}{Z} \left( \left( 1 + \frac{p}{p_0} \right)^Z - 1 \right) \right] \quad (\text{V-32})$$

où le paramètre  $Z$  est relié au coefficient de piézoviscosité  $\alpha$  et à la viscosité dynamique du lubrifiant à la pression atmosphérique  $\mu_0$  dans le système normalisé S.I par :

$$Z = \frac{\alpha p_0}{\log_e \mu_0 + 9,67} \quad (\text{V-33})$$

$p_0$  est la constante viscosité-pressure de *Roelands*,  $p_0 = 1,96 \times 10^8$  Pa.

- loi de *Sargent* [48]

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\frac{Ap}{B+p}} \quad (\text{V-34})$$

où :  $\mu$  et  $\mu_0$  sont les viscosités dynamiques en (mPa.s) mesurées respectivement à la pression  $p$  en (GPa) et à la pression atmosphérique.  $A$  et  $B$  sont des constantes dont les valeurs dépendent du fluide lubrifiant tableau (V-4).  $A$  est sans dimension tandis que l'unité de  $B$  est celle de la pression.

Il est à noter que le terme  $\frac{A}{B+p}$  peut être considéré comme l'expression du coefficient de piézo-viscosité  $\alpha$  intervenant dans la loi de *Barus* (V-27). Lorsque  $p$  tend vers 0, le terme  $\frac{A}{B+p} \rightarrow \frac{A}{B}$ . Donc, la loi de *Barus* est seulement un cas particulier de la loi de *Sargent* (V-34) lorsque  $p \rightarrow 0$  et le rapport  $\frac{A}{B}$  devient égale à  $\alpha$ .

**Tableau V-4** : Valeurs des coefficients viscosité-pressure [48]

Lubrifiant	A	B (GPa)	A/B (GPa <sup>-1</sup> )	$\alpha$ (GPa <sup>-1</sup> )	Coefficient de <i>Roelands</i> Z
Huile paraffinique	34	1.54	22.1	22.2	0.663
Huile naphthénique	49	1.62	30.2	32.4	0.867
Silicone	-14	-0.78	17.9	17.1	0.627

### 3.7.2. Loi de variation densité-pressure

Pour une huile minérale, la compressibilité du lubrifiant est modélisée par *Dowson et Higginson*, 1966 [42] :

- si  $p$  est exprimée en (GPa) :

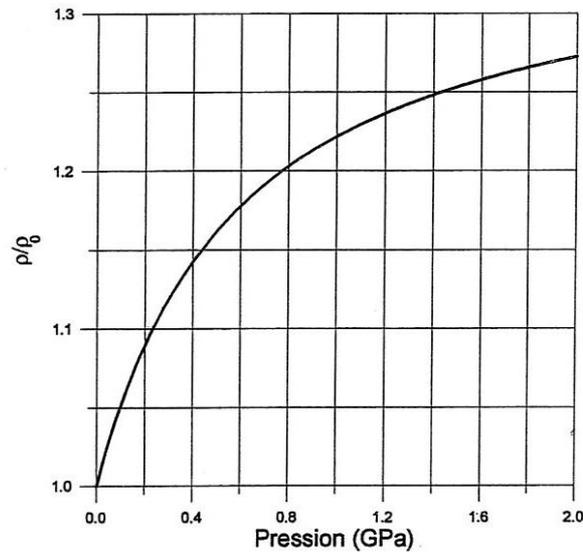
$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{0,6p}{1 + 1,7p} \quad (\text{V-35a})$$

- si  $p$  est exprimée en (Pa) :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{0,6 \times 10^{-9} p}{1 + 1,7 \times 10^{-9} p} \quad (\text{V-35b})$$

où  $\rho_0$  est la densité ou la masse volumique du lubrifiant à la pression atmosphérique.

La variation de la densité relative d'une huile minérale en fonction de la pression est représentée sur la figure (V-9).



**Fig. V. 9:** Variation de la densité relative d'une huile minérale en fonction de la pression selon la loi de Dowson et Higginson [42].

#### 4. Solution du problème d'interaction fluide-structure en régime isotherme

##### 4.1. Equation de Reynolds non linéaire en variables sans dimension

Si on pose :

$$\theta = \frac{x}{R_a}, \tilde{p} = \frac{p}{\mu_0 \omega \left(\frac{R}{C}\right)^2}, \tilde{h} = \frac{h}{C}, \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \text{ et } \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (\text{V-36})$$

l'équation de Reynolds normalisée s'écrit :

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \tilde{h}^3 \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \right) = 6 \frac{d}{d\theta} (\tilde{\rho} \tilde{h}) \quad (\text{V-37})$$

où :

$$\tilde{\mu} = e^{\tilde{\alpha} p} \quad \text{avec} \quad \tilde{\alpha} = \mu_0 \omega \left( \frac{R}{C} \right)^2 \alpha \quad (\text{V-38})$$

$$\tilde{\rho} = 1 + \frac{0,58 \times 10^{-9} p}{1 + 1,68 \times 10^{-9} p} \quad (\text{V-39})$$

## 4.2. Equation géométrique adimensionnée

Dans l'équation (V-37), l'expression de l'épaisseur du film adimensionnée est :

$$\tilde{h} = 1 + \varepsilon \cos \theta + \tilde{L} \tilde{p} \quad (\text{V-40})$$

Dans le cas où le modèle couche mince est appliqué, l'expression de l'opérateur de compliance adimensionné est :

$$\tilde{L} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \tilde{C}_d \tilde{t}_h$$

où :  $\tilde{C}_d = \frac{\mu_0 \omega (R_a / C)^3}{E}$  est le coefficient de déformation et  $\tilde{t}_h = \frac{t_h}{R_a}$  est l'épaisseur relative de la couche élastique.

D'après l'expression de  $\tilde{C}_d$ , nous remarquons que le coefficient de déformation est nul lorsque le module d'élasticité du matériau tend vers l'infini (couche rigide).

## 4.3. Performances statiques du palier

### 4.3.1. Composantes de la portance HD

Dans le repère local  $(x, y, z)$  dont les vecteurs de base sont  $(i, j, k)$  figure (V-7), les composantes du vecteur contrainte  $t(M_2, n_2)$  sont :

$$t(M_2, n_2) = [\sigma] \begin{Bmatrix} \sin \alpha' \\ -\cos \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -p \sin \alpha' - \sigma_{xy}|_{y=h} \cos \alpha' \\ p \cos \alpha' + \sigma_{xy}|_{y=h} \sin \alpha' \end{pmatrix} + \quad (\text{V-41})$$

$$\text{avec} \quad \begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha' & \cos \alpha' \\ -\cos \alpha' & \sin \alpha' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_2 \\ s_2 \end{Bmatrix}$$

D'après la figure (V-4a), la relation qui relie le vecteur  $\begin{Bmatrix} n_2 \\ s_2 \end{Bmatrix}$  au vecteur  $\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{Bmatrix}$  s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha' & \cos \alpha' \\ -\cos \alpha' & \sin \alpha' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (\text{V-42})$$

Compte tenu de la relation (V-42), les composantes du vecteur contrainte  $\mathbf{t}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(M_2, \mathbf{n}_2) = \varepsilon & \left[ \left( -p \sin \alpha' - \sigma_{xy}|_{y=h} \cos \alpha' \right) \sin(\theta - \alpha') + \right. \\ & \left. \left( \sigma_{xy}|_{y=h} \sin \alpha' + p \cos \alpha' \right) \cos(\theta - \alpha') \right] + \\ \phi & \left[ - \left( -p \sin \alpha' - \sigma_{xy}|_{y=h} \cos \alpha' \right) \cos(\theta - \alpha') + \right. \\ & \left. \left( \sigma_{xy}|_{y=h} \sin \alpha' + p \cos \alpha' \right) \sin(\theta - \alpha') \right] \end{aligned} \quad (\text{V-43})$$

Après développement de la relation (V-43) et compte tenu de  $\alpha' = \theta + I$ , on obtient :

$$\mathbf{t}(M_2, \mathbf{n}_2) \approx \begin{Bmatrix} p \cos \theta \\ p \sin \theta \end{Bmatrix}_{(c, \phi)} \quad (\text{V-44})$$

Les composantes de la portance hydrodynamique dans le repère  $(\varepsilon, \phi)$  sont obtenues par l'intégration de la relation (V-44) sur la surface de l'arbre :

$$\begin{aligned} F_\varepsilon &= R_a \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta dz \\ F_\phi &= R_a \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta dz \end{aligned} \quad (\text{V-45})$$

#### 4.3.2. Couple de frottement sur l'arbre

Le vecteur moment au centre de l'arbre s'obtient par la relation suivante :

$$\mathbf{M}(\mathbf{O}_a) = \int_{(S)} \mathbf{O}_a \mathbf{M}_2 \wedge \mathbf{t}(M_2, \mathbf{n}_2) dS \quad (\text{V-46})$$

avec  $\mathbf{O}_a \mathbf{M}_2 = R_a \mathbf{n}_2 = R_a (-\cos \theta \varepsilon - \sin \theta \phi)$

Compte tenu de la relation (V-43), les composantes du vecteur moment sont :

$$M(O_a) = R_a \int_{(S)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy}|_{y=h} \end{pmatrix} dS$$

ou encore

$$M(O_a)k = -R_a^2 \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \sigma_{xy}|_{y=h} d\theta dz = C_a \quad (V-47)$$

où  $C_a$  est le couple de frottement sur l'arbre .

Le fluide étant newtonien, on peut écrire :

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\omega R_a}{h} + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{R_a \partial \theta} (2y - h) \quad (V-48)$$

Soit :

$$\sigma_{xy}|_{y=h} = \sigma_h = \mu \frac{\omega R_a}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (V-49)$$

### 4.3.3. Angle de calage

L'angle de calage du palier est calculé par la relation suivante :

$$\phi = \arctg\left(-\frac{F_\phi}{F_\epsilon}\right) \quad (V-50)$$

Les composantes de la portance HD et le couple de frottement adimensionnés s'expriment par :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\epsilon &= \frac{C^2 F_\epsilon}{\mu \omega R_a^3 L} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta d\tilde{z} \\ \tilde{F}_\phi &= \frac{C^2 F_\phi}{\mu \omega R_a^3 L} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta d\tilde{z} \\ \tilde{C}_a &= \frac{C_a}{\mu \omega R_a^2 L \left(\frac{R_a}{C}\right)^2} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\tilde{h}} + \frac{\tilde{h}}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) d\theta d\tilde{z} \end{aligned} \quad (V-51)$$

#### 4.4. Discrétisation de l'équation de Reynolds non linéaire par différences finies centrées

L'équation (V-37) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(\tilde{p}) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \tilde{h}^3 \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \right) - 6 \frac{d}{d\theta} (\tilde{\rho} \tilde{h}) = 0 \quad (\text{V-52})$$

Le développement de l'équation (V-40) donne :

$$f(\tilde{p}) = \tilde{h}^3 \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \right) + 3 \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \tilde{h}^2 \frac{d\tilde{h}}{d\theta} \frac{d\tilde{p}}{d\theta} + \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \tilde{h}^3 \frac{d^2 \tilde{p}}{d\theta^2} - 6 \tilde{h} \frac{d\tilde{\rho}}{d\theta} - 6 \tilde{\rho} \frac{d\tilde{h}}{d\theta} = 0 \quad (\text{V-53})$$

La discrétisation de l'équation (V-53) par la méthode des différences finies centrées donne :

$$f_i = \tilde{h}_i^3 \frac{\left( \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \right)_{i+1} - \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \right)_{i-1} \right)}{2\Delta\theta} \frac{(\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1})}{2\Delta\theta} + 3 \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \right)_i \tilde{h}_i^2 \frac{(\tilde{h}_{i+1} - \tilde{h}_{i-1})}{2\Delta\theta} \frac{(\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1})}{2\Delta\theta} + \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} \right)_i \tilde{h}_i^3 \frac{(\tilde{p}_{i+1} - 2\tilde{p}_i + \tilde{p}_{i-1})}{(\Delta\theta)^2} - 6 \tilde{h}_i \frac{(\tilde{\rho}_{i+1} - \tilde{\rho}_{i-1})}{2\Delta\theta} - 6 \tilde{\rho}_i \frac{(\tilde{h}_{i+1} - \tilde{h}_{i-1})}{2\Delta\theta} = 0 \quad (\text{V-54})$$

$i = 0, M-1$

avec  $\tilde{h}_i = l + \varepsilon \cos \theta_i + \sum_{j=0}^{M-1} L_{ij} \tilde{p}_j$

$L_{ij}$  sont les coefficients de la matrice de compliance.

Lorsque le modèle couche mince est appliqué, ces coefficients s'expriment par :  $L_{ij} = \tilde{L} \delta_{ij}$  où  $\delta_{ij}$  est le symbole de *Kronecker* et  $\tilde{L} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \tilde{C}_d \tilde{t}_h$ .

L'équation (V-54) est de la forme :

$$f_i(\tilde{p}_{i-1}, \tilde{p}_i, \tilde{p}_{i+1}) = 0 \quad (\text{V-55})$$

#### 4.5. Résolution du système d'équations non linéaires par la méthode itérative de *Newton-Raphson* amortie

Les méthodes de résolution des systèmes non linéaires sont nombreuses [49]. Nous ne présentons que la méthode de *Newton-Raphson* qui est la plus importante et la plus utilisée en pratique.

#### 4.5.1. Principe de la méthode

Dans cette section, nous examinons les systèmes non linéaires et nous montrons comment les résoudre à l'aide d'une suite de problèmes linéaires, auxquels on peut appliquer diverses techniques de résolution comme la décomposition LU.

Le problème consiste à trouver le ou les vecteurs  $\mathbf{P} = \langle \tilde{p}_1 : \tilde{p}_2 : \tilde{p}_3 : \dots : \tilde{p}_n \rangle$  vérifiant les  $n$  équations non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \\ f_2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \\ f_3(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n) = 0 \end{cases} \quad (\text{V-56})$$

où les  $f_i$  sont des fonctions de  $n$  variables  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_n$  que nous supposons différentiables. Le problème (V-56) apparaît comme une généralisation au cas  $n$ -dimensionnel du problème  $f(\tilde{p}) - 0$ . De même qu'une équation non linéaire  $f(\tilde{p}) - 0$  peut posséder plusieurs racines, le système (V-56) peut posséder plusieurs solutions.

L'application de cette méthode à un système de deux équations non linéaires est suffisante pour illustrer le cas général. Considérons donc le système :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = 0 \\ f_2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{V-57})$$

Soit  $(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})$ , une approximation initiale ou un estimé initial de la solution. Le but de ce qui suit est de déterminer une correction  $(\delta\tilde{p}_1^{(0)}, \delta\tilde{p}_2^{(0)})$  à  $(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})$  de telle sorte que :

$$\begin{cases} f_1(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = f_1(\tilde{p}_1^{(0)} + \delta\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)} + \delta\tilde{p}_2^{(0)}) = 0 \\ f_2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = f_2(\tilde{p}_1^{(0)} + \delta\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)} + \delta\tilde{p}_2^{(0)}) = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer  $(\delta\tilde{p}_1^{(0)}, \delta\tilde{p}_2^{(0)})$ , il suffit maintenant de faire un développement en séries de *Taylor* de  $f_1$  et  $f_2$  au point  $(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})$  :

$$\begin{aligned}
0 &= f_1(\tilde{p}_1^{(0)} + \delta\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)} + \delta\tilde{p}_2^{(0)}) = f_1(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)}) + \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1}(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})\delta\tilde{p}_1^{(0)} + \\
&\quad \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2}(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})\delta\tilde{p}_2^{(0)} + \text{termes d'ordre} \geq 2 \\
0 &= f_2(\tilde{p}_1^{(0)} + \delta\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)} + \delta\tilde{p}_2^{(0)}) = f_2(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)}) + \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1}(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})\delta\tilde{p}_1^{(0)} + \\
&\quad \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2}(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})\delta\tilde{p}_2^{(0)} + \text{termes d'ordre} \geq 2
\end{aligned}$$

Pour déterminer  $(\delta\tilde{p}_1^{(0)}, \delta\tilde{p}_2^{(0)})$ , il suffit de négliger les termes d'ordre supérieur et d'écrire :

$$-\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} \end{bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(0)}, \tilde{p}_2^{(0)})} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{p}_1^{(0)} \\ \delta\tilde{p}_2^{(0)} \end{Bmatrix}$$

Il convient de remarquer que lorsqu'on néglige les termes d'ordre supérieur, la solution  $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$  devient une approximation qui sera prise comme nouveau point de départ  $(\tilde{p}_1^{(1)}, \tilde{p}_2^{(1)})$  de la prochaine approximation tel que :

$$\begin{cases} \tilde{p}_1^{(1)} = \tilde{p}_1^{(0)} + \delta\tilde{p}_1^{(0)} \\ \tilde{p}_2^{(1)} = \tilde{p}_2^{(0)} + \delta\tilde{p}_2^{(0)} \end{cases}$$

Ainsi, on trouve la formule de récurrence de *Newton-Raphson* pour deux inconnues :

$$-\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} \end{bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})} \begin{Bmatrix} \delta\tilde{p}_1^{(k)} \\ \delta\tilde{p}_2^{(k)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k+1)} \\ \tilde{p}_2^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k)} \\ \tilde{p}_2^{(k)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta\tilde{p}_1^{(k)} \\ \delta\tilde{p}_2^{(k)} \end{Bmatrix} ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\max}$$

ou encore

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k+1)} \\ \tilde{p}_2^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k)} \\ \tilde{p}_2^{(k)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k+1)} \\ \tilde{p}_2^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{p}_1^{(k)} \\ \tilde{p}_2^{(k)} \end{Bmatrix} - \frac{1}{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} - \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} \end{pmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2} & -\frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1} \end{bmatrix}_{(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)})} \begin{Bmatrix} f_1(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)}) \\ f_2(\tilde{p}_1^{(k)}, \tilde{p}_2^{(k)}) \end{Bmatrix}$$

De manière plus générale (système de n équations), on pose :

$$\sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \delta \tilde{p}_j^{(k)} = -f_i^{(k)} \quad (\text{V-58})$$

où  $E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{p}_j} \Big|_{\mathbf{P}^{(k)}}$  sont les composantes de la matrice jacobienne tel que :

$$E(\mathbf{P}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_1}(\mathbf{P}^{(k)}) & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_2}(\mathbf{P}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{p}_n}(\mathbf{P}^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_1}(\mathbf{P}^{(k)}) & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_2}(\mathbf{P}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{p}_n}(\mathbf{P}^{(k)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{p}_1}(\mathbf{P}^{(k)}) & \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{p}_2}(\mathbf{P}^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \tilde{p}_n}(\mathbf{P}^{(k)}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(k)} = \langle \tilde{p}_1^{(k)} : \tilde{p}_2^{(k)} : \dots : \tilde{p}_n^{(k)} \rangle$$

et

$$f(\mathbf{P}^{(k)}) = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{P}^{(k)}) \\ f_2(\mathbf{P}^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{P}^{(k)}) \end{Bmatrix} ; \quad \delta \mathbf{P}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \delta \tilde{p}_1 \\ \delta \tilde{p}_2 \\ \vdots \\ \delta \tilde{p}_n \end{Bmatrix}$$

Il est important de souligner que si l'estimé initial n'est pas très proche de la solution la méthode ne converge pas.

#### 4.5.2. Méthode de Newton-Raphson amortie

L'algorithme de *Newton-Raphson* amorti s'écrit :

$$\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)} + \lambda^{(k)} \delta \tilde{p}_i^{(k)} \quad (\text{V-59})$$

- où  $\lambda^{(k)}$  est le coefficient de relaxation  
 $\lambda^{(k)} = 1$  : méthode classique de *Newton*  
 $\lambda^{(k)} < 1$  : méthode de *Newton* dite amortie

Notons que cet algorithme converge plus vite que l'algorithme précédent.

#### 4.5.3. Algorithme de Newton amorti

1. Etant donné  $\varepsilon_i$ , un critère d'arrêt
2. Etant donné  $k_{\max}$ , le nombre maximal d'itérations
3. Etant donné  $\mathbf{P}^{(0)} = \langle \tilde{p}_1^{(0)} : \tilde{p}_2^{(0)} : \dots : \tilde{p}_n^{(0)} \rangle$ , une approximation initiale de la solution du système
4. Calculer la matrice jacobienne  $F_{ij}$
5. Résoudre le système linéaire par la méthode d'élimination de *Gauss* avec pivotation partielle
 
$$\sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \delta \tilde{p}_j^{(k)} = -f_i^{(k)}$$
6. Calculer  $\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)} + \lambda^{(k)} \delta \tilde{p}_i^{(k)}$
7. Si  $\frac{|\tilde{p}_i^{(k+1)} - \tilde{p}_i^{(k)}|}{|\tilde{p}_i^{(k+1)}|} < \varepsilon_i$  et  $|f_i^{(k+1)}| < \varepsilon$ 
  - convergence atteinte
  - arrêt
8. Si le nombre maximal d'itérations  $k_{\max}$  est atteint :
  - convergence non atteinte en  $K_{\max}$  itérations
  - arrêt
9. Sinon, poser  $k \leftarrow k + 1$
10. Retour à l'étape 4 pour une autre itération

#### 4.5.4. Calcul de la matrice jacobienne

Il existe deux méthodes permettant de construire la matrice jacobienne  $E_{ij}$  : la méthode des différences centrées et décentrées et la méthode analytique.

#### 4.5.4.1. Méthode des différences centrées et décentrées

Il existe une variante de la méthode de *Newton* qui évite le calcul des  $n^2$  dérivées et qui ne nécessite que les  $n$  fonctions  $f_i(\mathbf{P})$ . La méthode de *Newton* modifiée consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences centrées ou décentrées. Soit :

- Approximation du second ordre par différences centrées  $o(\delta^2)$  :

$$E_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{p}_j}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n) \approx \frac{f_i(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j + \delta, \dots, \tilde{p}_n) - f_i(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j - \delta, \dots, \tilde{p}_n)}{2\delta} \quad (\text{V-60a})$$

- Approximation du premier ordre par différences décentrées  $o(\delta)$  :

$$\frac{\partial f_i}{\partial \tilde{p}_j} \approx \frac{f_i(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j + \delta, \dots, \tilde{p}_n) - f_i(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{j-1}, \tilde{p}_j, \dots, \tilde{p}_n)}{\delta} \quad (\text{V-60b})$$

Cette approximation introduit une petite erreur dans le calcul de la matrice jacobienne, mais généralement la convergence est quand même très rapide.

Dans ces deux approximations, la valeur de  $\delta$  est  $10^{-4}$ .

#### 4.5.4.2. Méthode analytique

Les coefficients de la matrice jacobienne  $(E_{ij})$  peuvent aussi être calculés analytiquement par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} E_{ij} = & \left( -\frac{\tilde{\alpha} \tilde{h}_i^3 \beta \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i (1 + \tilde{\gamma}_i)^2} + \frac{3L \tilde{h}_i^2 \beta \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i (1 + \tilde{\gamma}_i)^2} - \frac{2\tilde{\gamma}_i \tilde{h}_i^3 \beta \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i (1 + \tilde{\gamma}_i)^3} - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{h}_i^3 \beta \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i (1 + \tilde{\gamma}_i)^2} - \frac{3\tilde{\alpha} L \tilde{h}_i^2 \tilde{\rho}_i \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i} + \frac{\tilde{\alpha}^2 \tilde{h}_i^3 \tilde{\rho}_i \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i} \right. \\ & \left. \frac{\tilde{h}_i^3 \tilde{\alpha} \tilde{\rho}_i (\delta_{i+1,j} - \delta_{i-1,j})}{\Delta \theta \tilde{\mu}_i} \right) \left( \left( \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \right)_i \right)^2 + \left( \frac{\beta \tilde{h}_i^3 (\delta_{i+1,j} - \delta_{i-1,j})}{\Delta \theta \tilde{\mu}_i (1 + \tilde{\gamma}_i)^2} + \frac{3\tilde{\rho}_i \tilde{h}_i^2 L (\delta_{i+1,j} - \delta_{i-1,j})}{2\Delta \theta \tilde{\mu}_i} \right. \\ & \left. \frac{6L\beta \delta_{ij}}{(1 + \tilde{\gamma}_i)^2} + \frac{12\tilde{\gamma}_i \beta \delta_{ij}}{(1 + \tilde{\gamma}_i)^3} \right) \left( \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \right)_i + \left( \frac{3\tilde{h}_i^2 \beta \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i (1 + \tilde{\gamma}_i)^2} - \frac{3\tilde{\alpha} \tilde{h}_i^2 \tilde{\rho}_i \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i} + \frac{6L\tilde{h}_i \tilde{\rho}_i \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i} \right) \left( \frac{d\tilde{h}}{d\theta} \right)_i \left( \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \right)_i + \\ & \left( \frac{\tilde{h}_i^3 \beta \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i (1 + \tilde{\gamma}_i)^2} - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{h}_i^3 \tilde{\rho}_i \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i} + \frac{3L\tilde{h}_i^2 \tilde{\rho}_i \delta_{ij}}{\tilde{\mu}_i} \right) \left( \frac{d^2 \tilde{p}}{d\theta^2} \right)_i + \left( \frac{3\tilde{h}_i^2 \tilde{\rho}_i (\delta_{i+1,j} - \delta_{i-1,j})}{2\Delta \theta \tilde{\mu}_i} - \frac{6\beta \delta_{ij}}{(1 + \tilde{\gamma}_i)^2} \right) \left( \frac{d\tilde{h}}{d\theta} \right)_i + \\ & \frac{\tilde{\rho}_i \tilde{h}_i^3 (\delta_{i+1,j} - 2\delta_{ij} + \delta_{i-1,j})}{(\Delta \theta)^2 \tilde{\mu}_i} - \frac{3\tilde{h}_i \beta (\delta_{i+1,j} - \delta_{i-1,j})}{\Delta \theta (1 + \tilde{\gamma}_i)^2} - \frac{3L\tilde{\rho}_i (\delta_{i+1,j} - \delta_{i-1,j})}{\Delta \theta} \end{aligned} \quad (\text{V-61})$$

avec

$$\beta = 0,6 \times 10^{-9} \times \mu_0 \omega \left( \frac{R_a}{C} \right)^2$$

$$\gamma = 1,7 \times 10^{-9} \times \mu_0 \omega \left( \frac{R_a}{C} \right)^2$$

$$\left( \frac{d\tilde{p}}{d\theta} \right)_i \approx \frac{1}{2\Delta\theta} (\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1})$$

$$\left( \frac{d\tilde{h}}{d\theta} \right)_i \approx \frac{1}{2\Delta\theta} (\tilde{h}_{i+1} - \tilde{h}_{i-1})$$

$$\left( \frac{d^2\tilde{p}}{d\theta^2} \right)_i \approx \frac{1}{(\Delta\theta)^2} (\tilde{p}_{i+1} - 2\tilde{p}_i + \tilde{p}_{i-1})$$

et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

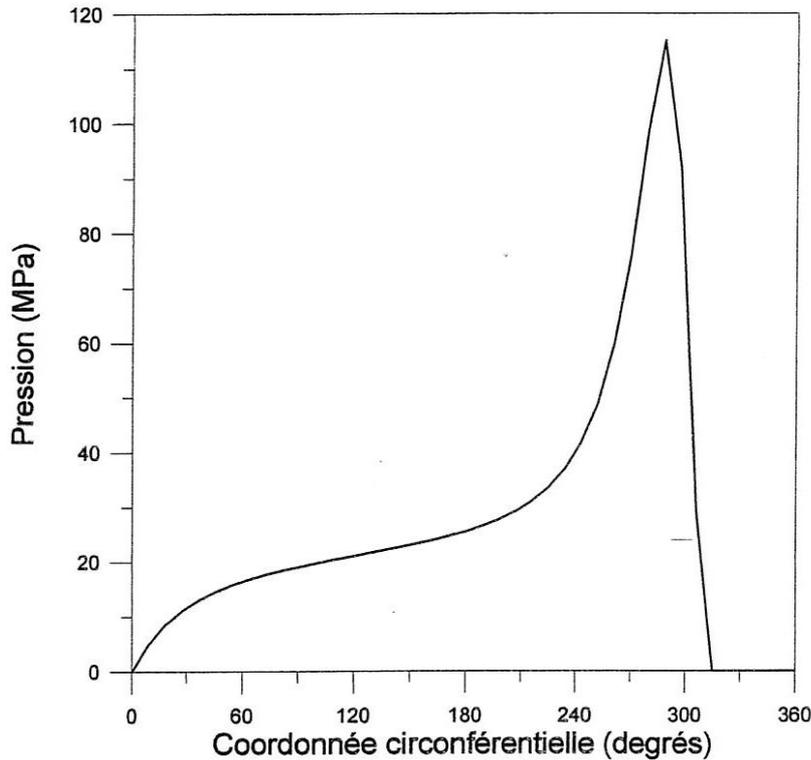
### 5. Schéma général de résolution du problème d'interaction fluide-structure

1. Lecture des données :  $\tilde{t}_h, \tilde{\alpha}, \tilde{c}_d, \varepsilon, \nu, \lambda$
2. Calcul du champ de pression initial  $\tilde{p}_i^{(0)}$  en utilisant la solution de Gümbel (C.5b),  $i = 0, M$  où  $M$  est le nombre d'intervalles.
3. Calcul de l'épaisseur du film adimensionnée  $\tilde{h}_i$ , de la viscosité dynamique adimensionnée  $\tilde{\mu}_i$  et de la densité relative  $\tilde{\rho}_i (i = 0, M)$  à partir des équations (V-38), (V39) et (V-40).
4. Calcul du résidu  $f_i$  aux nœuds intérieurs ( $i = 1, M-1$ ), équation (V-54).
5. Construction de la matrice jacobienne  $E_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{p}_j}$  par la méthode analytique (V-60) ou numérique (V-61).
6. Résolution du système linéaire  $\sum_{j=1}^{M-1} E_{ij} \delta \tilde{p}_j = -f_i$  par la méthode de décomposition LU
7. Calcul de la nouvelle répartition de la pression :  $\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)} + \lambda \delta \tilde{p}_i^{(k)}$ .
8. Si  $\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} \left| \frac{\tilde{p}_i^{(k+1)} - \tilde{p}_i^{(k)}}{\tilde{p}_i^{(k+1)}} \right| \leq 10^{-5}$ 
  - convergence atteinte
  - calcul des performances hydrodynamiques du palier compliant
  - arrêt
9. Sinon poser  $k \leftarrow k + 1$  et retourner à l'étape 3 pour une autre itération.

## 6. Validation des modèles couche mince et éléments finis (2D)

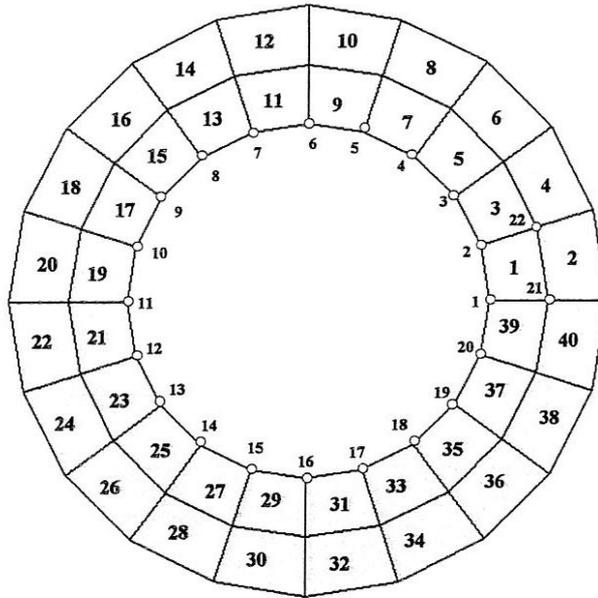
Nous avons comparé les champs de déplacement radial calculés par la méthode analytique, le modèle couche mince et la méthode des éléments finis dans le cas d'un tube élastique très long encastré à l'intérieur d'un cylindre rigide.

A la surface interne du tube s'exerce le champ de pression obtenu à partir de la résolution de l'équation de *Reynolds* (V-15) dans le cas d'un palier infiniment long fonctionnant à une excentricité relative  $\varepsilon = 0.90$  figure (V-10).



**Fig. V. 10:** *Champ de pression calculé sans couplage fluide-structure*  
 $L/D = \infty$ ,  $\varepsilon = 0.90$ ,  $\phi = 32^\circ$ .

Les calculs ont été effectués pour une épaisseur relative ( $\tilde{t}_h = t_h / R = 0.04$ ) correspondant à  $t_h = 1$  mm et deux types de matériaux dont l'un est compressible (acier :  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0.30$ ) et l'autre quasi-incompressible (élastomère :  $E = 2.1$  GPa,  $\nu = 0.49$ ). Pour les calculs par élément finis, la section droite du tube (couronne circulaire) a été maillée suivant une grille de pas angulaire et radial réguliers. Le maillage comporte 20 éléments quadrilatéraux à 4 nœuds suivant la direction circonférentielle  $\theta$  et 2 éléments suivant la direction radiale  $r$  figure (V-11).

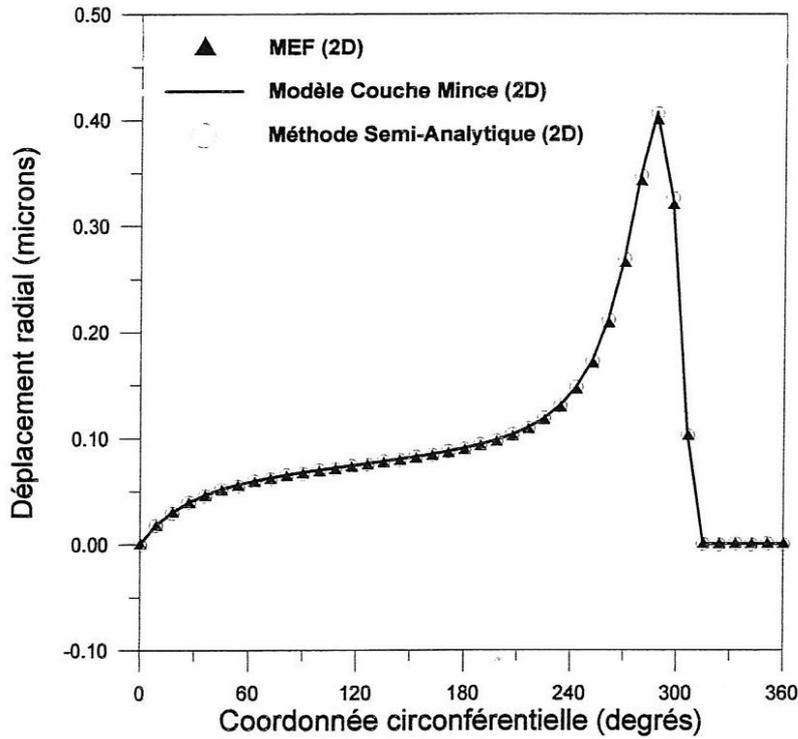


**Fig. V. 11:** *Maillage de la section droite du tube cylindrique (couronne circulaire) par éléments quadrilatéraux à 4 nœuds.*

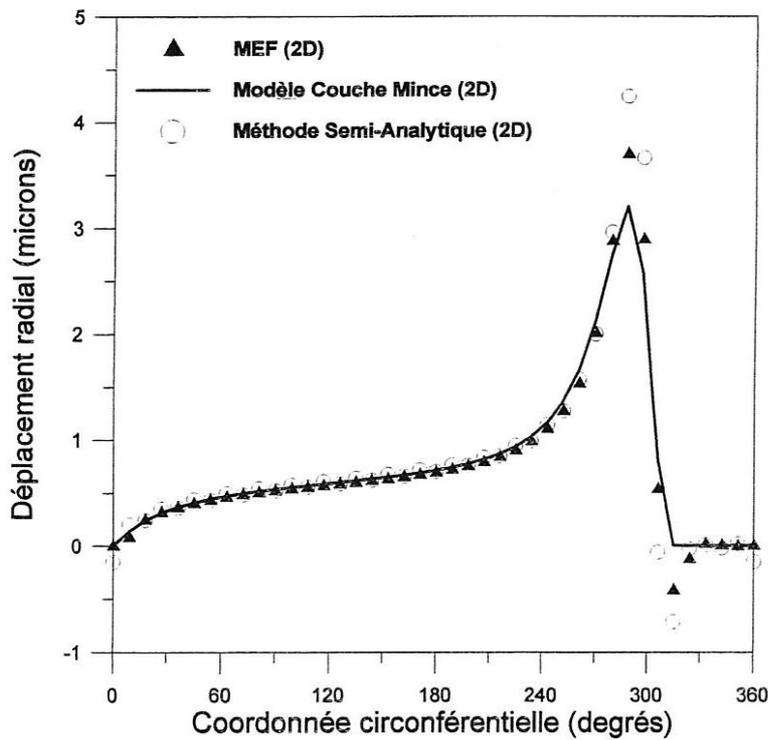
Les résultats obtenus par le modèle couche mince (2D) nous ont permis de constater que :

- pour un matériau compressible pour lequel le coefficient de *Poisson* est très proche de 0.30, les valeurs du déplacement calculées sont en bonne coïncidence avec celles déterminées par les deux autres approches à savoir l'approche semi-analytique basée sur le développement du champ de pression en série de *Fourier* et la MEF (2D) figure (V-12a).

- pour un matériau quasi-incompressible ( $\nu \approx 0.5$ ), les valeurs du déplacement, dans la région où la pression est maximale, sont sous-estimées du fait que le modèle couche mince ne tient pas compte de l'effet de l'incompressibilité du matériau figure (V-12b) qui se caractérise par l'apparition d'un bourrelet (valeurs de déplacement négatives).



a) Matériau compressible ( $E=210 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.30$ )



b) Matériau quasi-incompressible ( $E=2.1 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.49$ )

**Fig. V. 12:** Variations circonférentielles du déplacement radial calculé à la surface interne du tube sans couplage fluide-structure,  $t_h=1 \text{ mm}$  ( $\tilde{t}_h = 0.04$ ).

## 7. Validation du modèle couche mince (3D)

Pour valider le modèle couche mince (3D) dans le cas d'un tube cylindrique de longueur finie, nous avons développé un programme de calcul de structure par éléments finis tridimensionnels. L'élément fini choisi est l'élément hexaédrique tri-linéaire à huit nœuds. Le champ de pression appliquée sur la surface interne du tube est calculé à partir de la résolution de l'équation de *Reynolds* par la méthode des différences finies dans le cas d'un palier hydrodynamique de longueur finie fonctionnant à une excentricité  $\varepsilon = 0.90$ , figure (V-13).

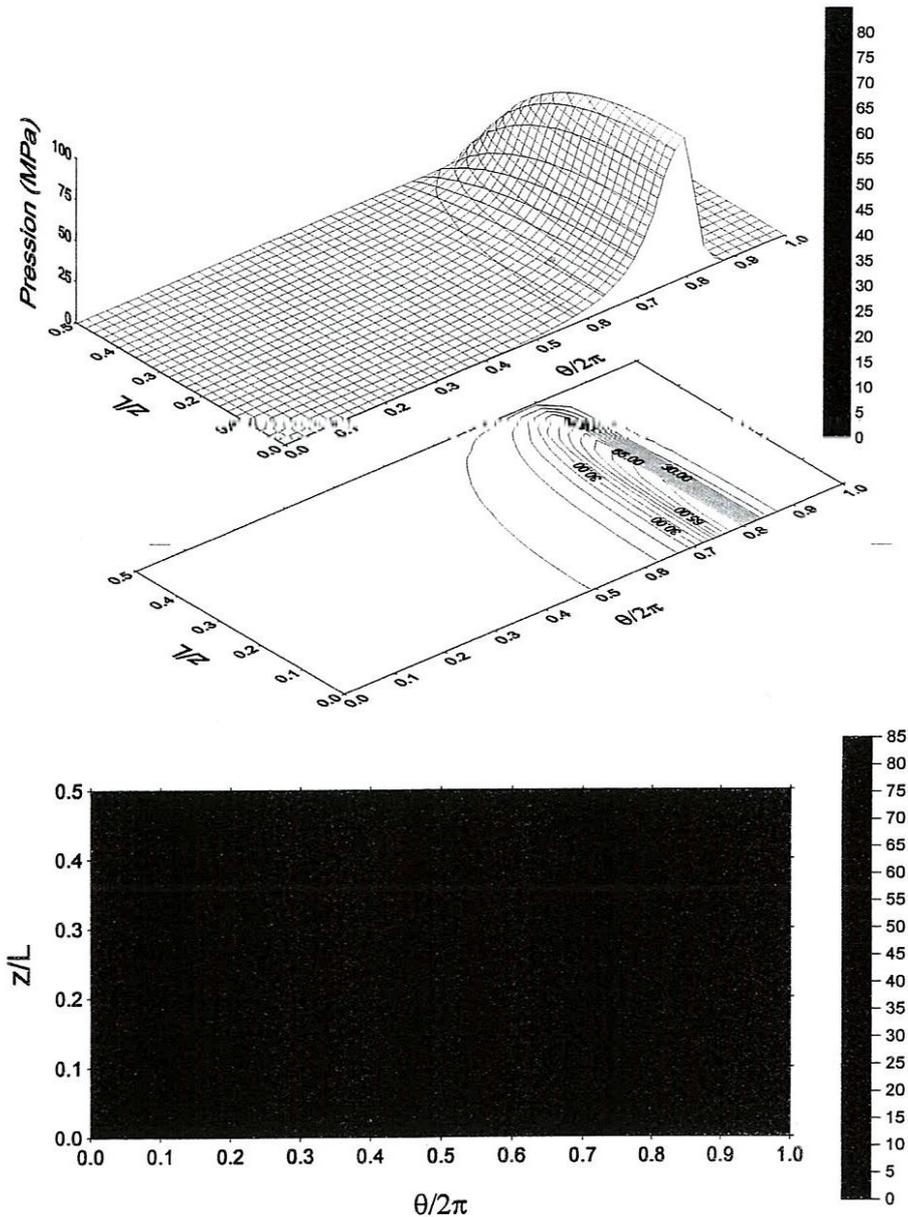


Fig. V. 13: Champ de pression hydrodynamique calculé dans le demi-palier  
 $L/D=1$ ,  $\varepsilon = 0.90$ ,  $\phi = 26^\circ$ .

Le tube cylindrique est maillé suivant les trois directions de l'espace ( $r, \theta, z$ ) avec des pas réguliers. Le maillage comporte 600 éléments hexaédriques à huit nœuds, 2 suivant la direction radiale, 30 suivant la direction circonférentielle et 10 suivant la direction axiale  $z$  figure (V-14).

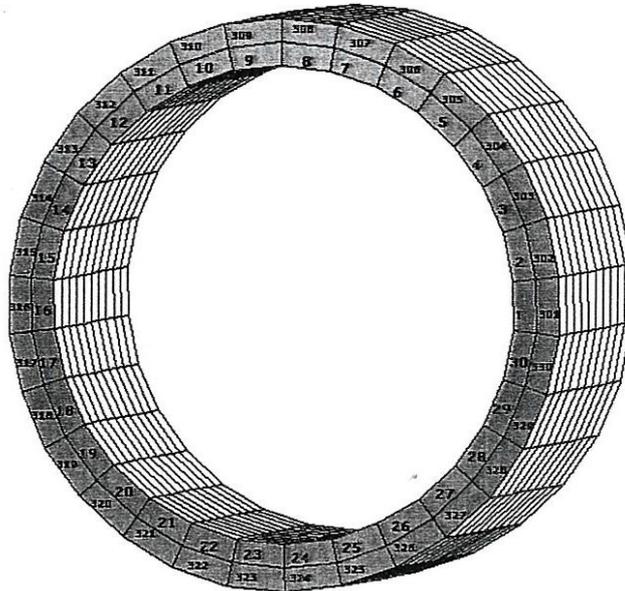


Fig. V. 14: Maillage du demi-tube cylindrique par éléments hexaédriques à 8 nœuds ( $N_\theta = 30, N_r = 2$  et  $N_z = 10$ ).

La figure (V-15) représente un exemple de maillage (3D) du palier développé dans le cas où  $N_\theta = 6, N_r = 2$  et  $N_z = 4$ .

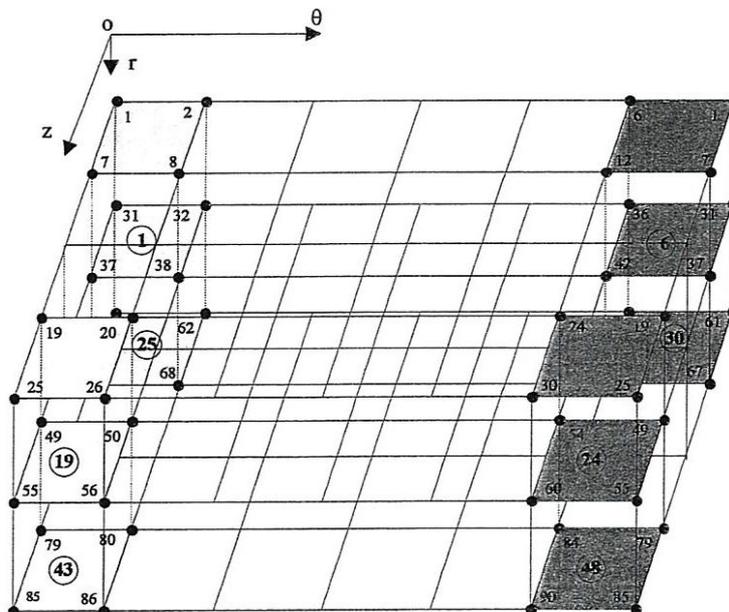
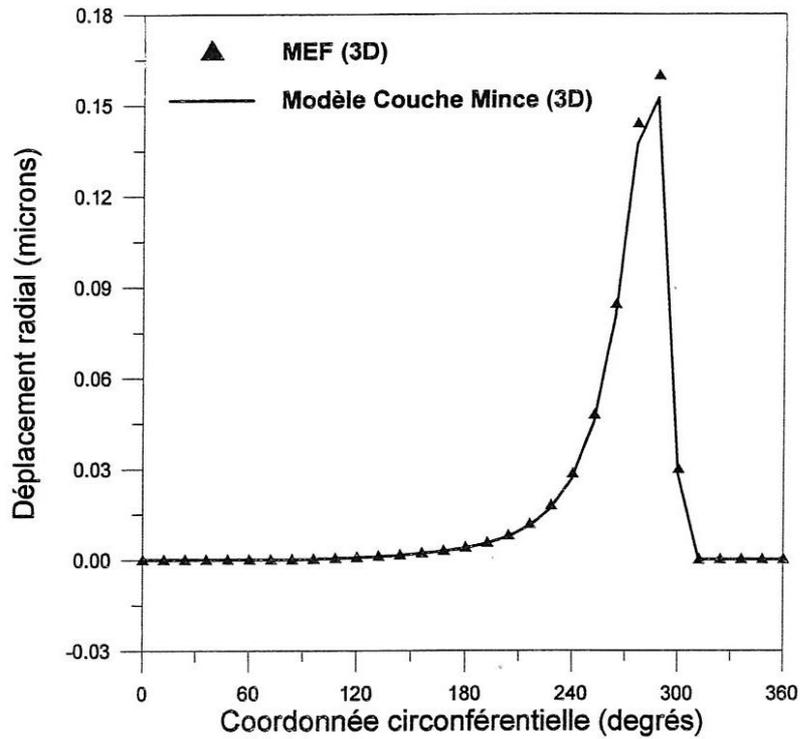


Fig. V. 15: Exemple de maillage tridimensionnel du demi-tube développé par éléments hexaédriques à 8 nœuds ( $N_\theta = 6, N_r = 2$  et  $N_z = 4$ ), les nœuds de l'élément 1 sont numérotés dans l'ordre suivant : 31, 37, 38, 32, 1, 7, 8, 2.

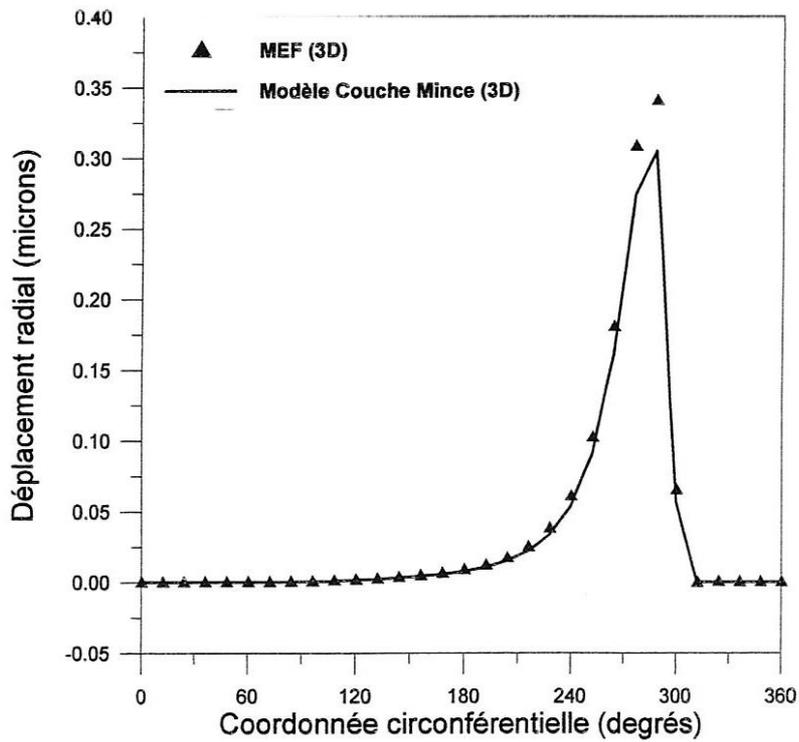
Dans les figures (V-16) et (V-17), nous comparons le champ de déplacement radial calculé dans la section médian du tube cylindrique pour deux valeurs de l'épaisseur  $t_h=0.5$  mm et  $1$  mm et deux types de matériaux l'un compressible ( $E=210$  GPa,  $\nu=0.30$ ) et l'autre quasi-incompressible ( $E=2.1$  GPa,  $\nu=0.49$ ) correspondant respectivement aux caractéristiques élastiques de l'acier et de l'élastomère.

Les résultats obtenus montrent une bonne coïncidence entre les valeurs du déplacement calculées par le modèle couche mince (3D) et la méthode d'éléments finis (3D) dans le cas du tube de faible épaisseur ( $t_h=0.5$  mm) constituée de matériau compressible figure (V-16a). Nous remarquons que lorsque l'épaisseur du tube augmente, l'écart maximal entre les déplacements calculés par les deux modèles devient important figure (V-16b).

D'après les figures (V-17a) et (V-17b), nous remarquons que le modèle couche mince perd de son efficacité dans le cas des matériaux quasi-incompressibles même pour des tubes de faible épaisseur. Nous pouvons conclure que le modèle couche mince (3D) ne peut être appliqué que dans le cas de tubes élastiques constitués de matériaux compressibles tels que les alliages métalliques et dont l'épaisseur relative  $\tilde{t}_h = t_h / R$  est très petite devant 1.

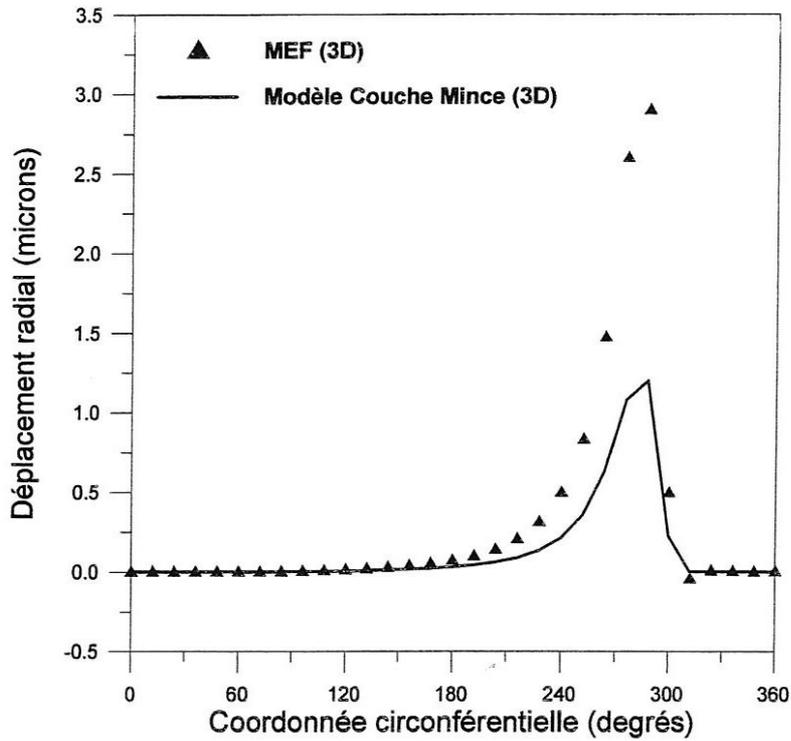


a)  $t_h = 0.5 \text{ mm}$

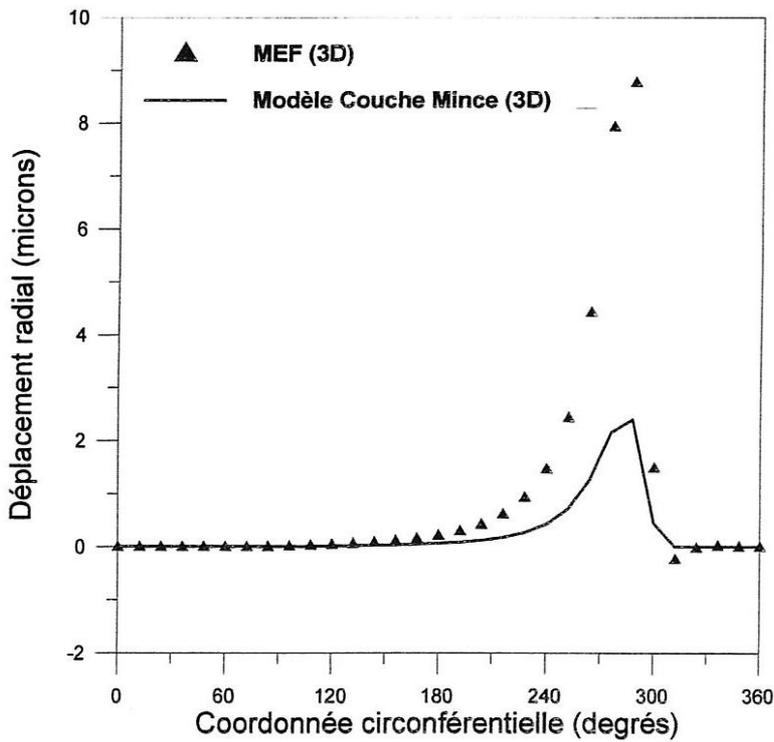


b)  $t_h = 1 \text{ mm}$

**Fig. V. 16:** Variations circonférentielles du champ de déplacement radial dans le plan médian du tube constitué d'un matériau compressible ( $E=210 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.30$ ).



a)  $t_h = 0.5 \text{ mm}$



b)  $t_h = 1 \text{ mm}$

**Fig. V. 17:** Variations circonférentielles du champ de déplacement radial dans le plan médian du tube constitué d'un matériau quasi-incompressible ( $E=2.1 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.49$ ).

## 8. Etude paramétrique

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence des déformations élastiques, la compressibilité et la piézo-viscosité du lubrifiant sur le champ de pression, la géométrie du film, la force de frottement, l'angle de calage et la portance hydrodynamique d'un palier lisse dont les caractéristiques géométriques, les conditions de fonctionnement, les propriétés physiques du lubrifiant et les caractéristiques élastiques et géométriques du revêtement de surface sont données dans le tableau (V-5).

Tableau V-5: Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement.

<b>Caractéristiques géométriques</b>	
- Rayon de l'arbre, $R_a$	0.025 m
- Jeu radial, $C$	$5 \times 10^{-5}$ m
<b>Conditions de fonctionnement</b>	
- Vitesse angulaire de l'arbre, $\omega$	$100 \times \pi$ rd/s
<b>Propriétés du lubrifiant</b>	
- Viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique, $\mu_0$	0.030 Pa.s
- Masse volumique, $\rho_0$	870 kg/m <sup>3</sup>
- Coefficient de piézo-viscosité, $\alpha$	0 et $10 \times 10^{-9}$ Pa <sup>-1</sup>
<b>Caractéristiques élastiques et géométriques du revêtement</b>	
- Module d'Young du matériau, $E$	210 et 2.1 GPa
- Coefficient de Poisson, $\nu$	0.30 et 0.49
- Epaisseur du revêtement, $t_h$	$10^{-2}$ m

Les calculs ont été effectués pour deux types de revêtement l'un est en acier ( $E = 210$  GPa,  $\nu = 0.30$ ) et l'autre en élastomère ( $E = 2.1$  GPa,  $\nu = 0.49$ ). Pour bien mettre en évidence l'effet des déformations élastiques sur le comportement du palier, nous avons pris une épaisseur du revêtement  $t_h = 10$  mm correspondant à  $\tilde{t}_h = t_h / R = 0.4$ .

Dans ce qui suit, les résultats graphiques présentés sont obtenus en exécutant le programme de résolution du problème d'interaction fluide-structure dans lequel les déformations élastiques du revêtement sont calculées à partir de la construction de la matrice de compliance Eq. (V-54).

### 8. 1. Influence de l'élasticité du revêtement de surface et de la rhéologie du fluide lubrifiant sur le champ de pression et la géométrie du film

Nous avons étudié les effets combinés de l'élasticité de revêtement de surface et de la rhéologie du lubrifiant sur la répartition de la pression dans le palier ainsi que la géométrie du film. Les calculs ont été effectués pour trois types de fluides :

- fluide isovolume et isovisqueux pour lequel ( $\tilde{\rho} = 1, \tilde{\mu} = 1$ )
- fluide isovolume et piézo-visqueux ( $\tilde{\rho} = 1, \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\tilde{p}) = \exp(\alpha \tilde{p})$ )
- fluide compressible et piézo-visqueux ( $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{p}), \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\tilde{p}) = \exp(\alpha \tilde{p})$ )

Les figures (V-18) représentent l'évolution circumférentielle de la pression hydrodynamique et l'épaisseur du film pour les deux types de revêtements (acier et élastomère) et les trois types de fluide lubrifiant.

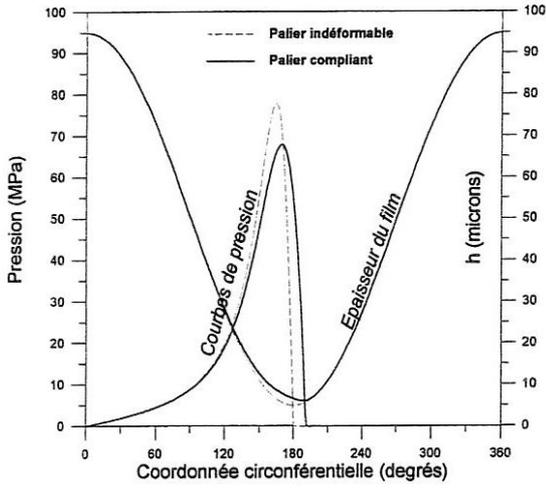
Les résultats obtenus dans le cas du revêtement en acier montrent que les effets des déformations élastiques sont significatifs dans le cas du fluide piézo-visqueux. Nous remarquons que la prise en considération de la piézo-viscosité du fluide entraîne figure (V-18c) :

- une diminution plus importante de la pression maximale ; ?
- une augmentation de l'étendue de la zone active du palier ;
- un léger déplacement du pic de pression vers la sortie du contact ;
- une légère modification de la géométrie du film.

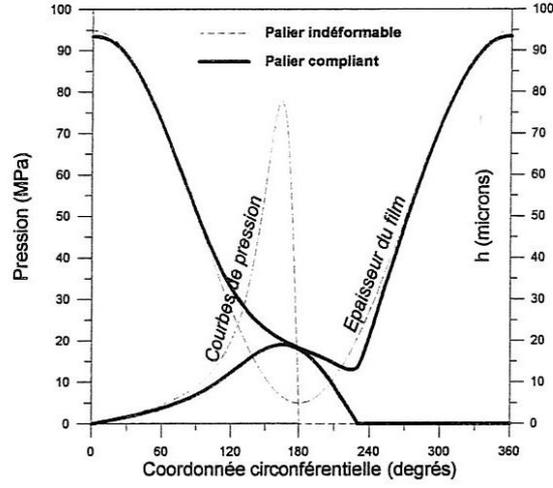
Il convient de noter que la compressibilité du fluide lubrifiant n'a pas d'effet sur la pression et la géométrie du film.

Par contre lorsque le revêtement de surface est constitué par un matériau quasi-incompressible de faible module d'élasticité, les effets des déformations élastiques est cette fois ci importants même dans le cas d'un fluide isovisqueux. Cet effet devient plus significatif lorsque la piézo-viscosité du fluide est prise en considération.

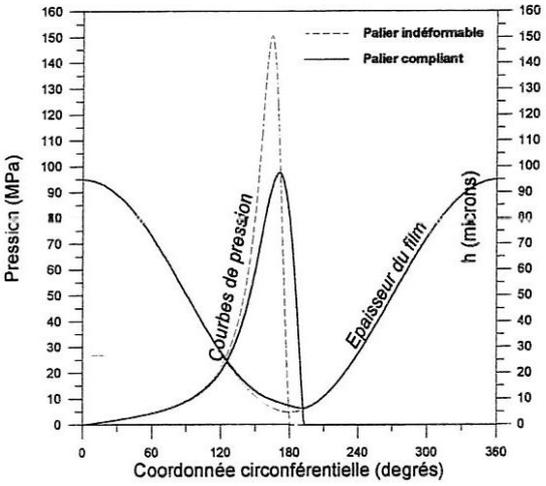
Les figures (V-18d) et (V-18f) montrent clairement que l'effet de la compressibilité du fluide sur la pression et l'épaisseur du film est négligeable car les pressions développées dans le film lubrifiant ne sont pas aussi importantes que celles calculées dans certains contacts hertiens lubrifiés.



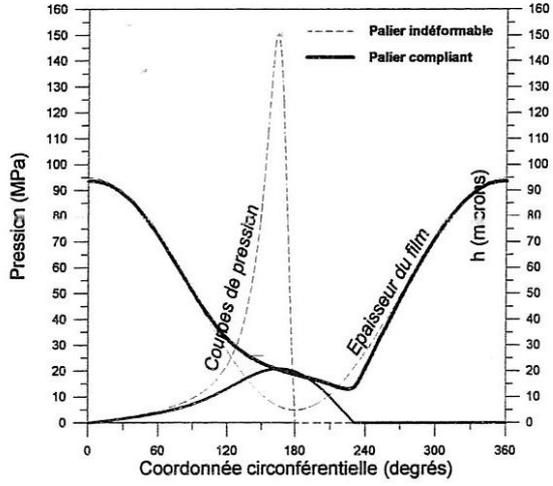
a)  $\tilde{\rho} = 1, \tilde{\mu} = 1, E=210 \text{ GPa}, \nu=0.30$



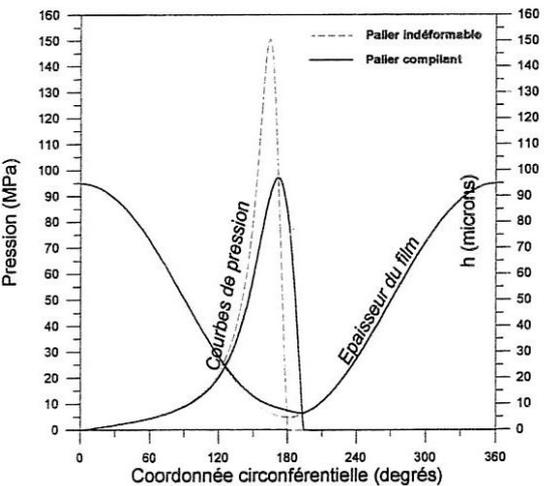
b)  $\tilde{\rho} = 1, \tilde{\mu} = 1, E=2.1 \text{ GPa}, \nu=0.49$



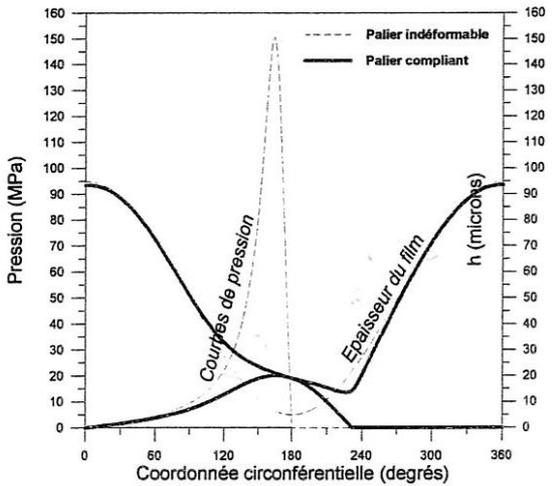
c)  $\tilde{\rho} = 1, \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\tilde{p}), E=210 \text{ GPa}, \nu=0.30$



d)  $\tilde{\rho} = 1, \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\tilde{p}), E=2.1 \text{ GPa}, \nu=0.49$



e)  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{p}), \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\tilde{p}), E=210 \text{ GPa}, \nu=0.30$



f)  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{p}), \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\tilde{p}), E=2.1 \text{ GPa}, \nu=0.49$

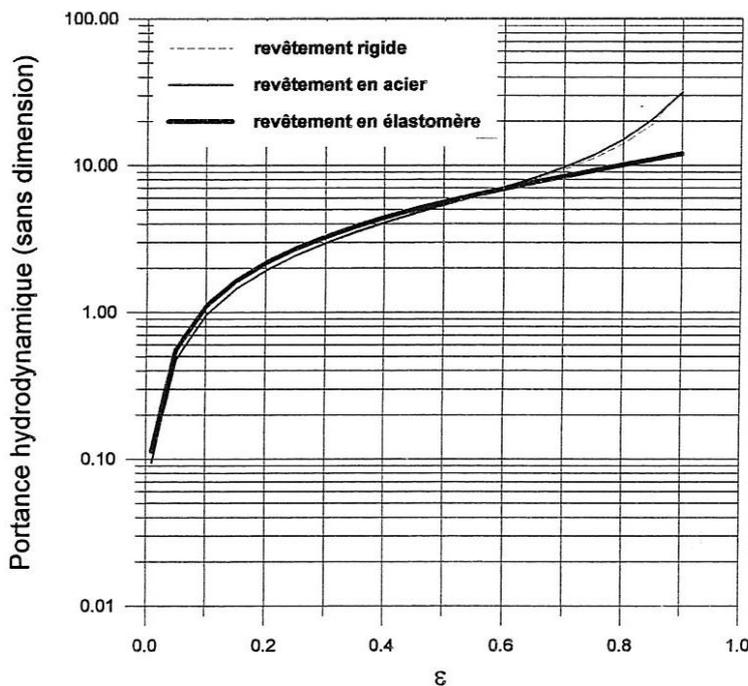
**Fig. V. 18:** Courbes de pression et d'épaisseur du film dans le cas de paliers indéformable et compliant obtenues après couplage fluide-structure.

## 8. 2. Influence de l'élasticité du revêtement de surface et de la rhéologie du fluide lubrifiant sur les performances statiques du palier

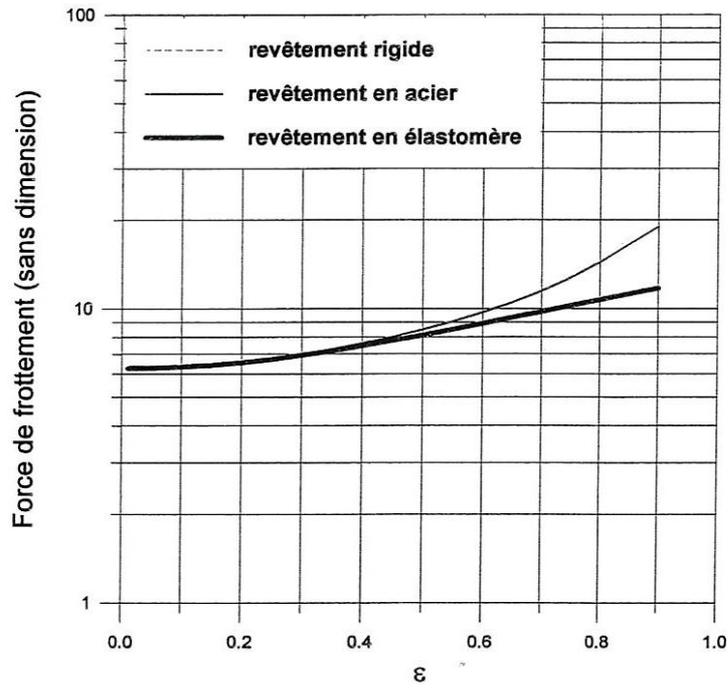
Nous avons aussi étudié les effets des déformations élastiques des revêtements de surface compressible (acier) et quasi-incompressible (élastomère) d'un palier lubrifié par un fluide supposée compressible (barotrope) et piézo-visqueux ( $\alpha=10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$  correspondant à  $\tilde{\alpha}=2.356 \times 10^{-2}$ ).

Les figures (V-19) à (V-21) représentent les variations de la portance adimensionnée, la force de frottement sans dimension et de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative pour les deux types de revêtements. Les calculs ont été effectués pour des valeurs de l'excentricité relative variant de 0.01 à 0.90. Les résultats obtenus après couplage fluide-structure, sont comparés à ceux du palier indéformable (théorie hydrodynamique).

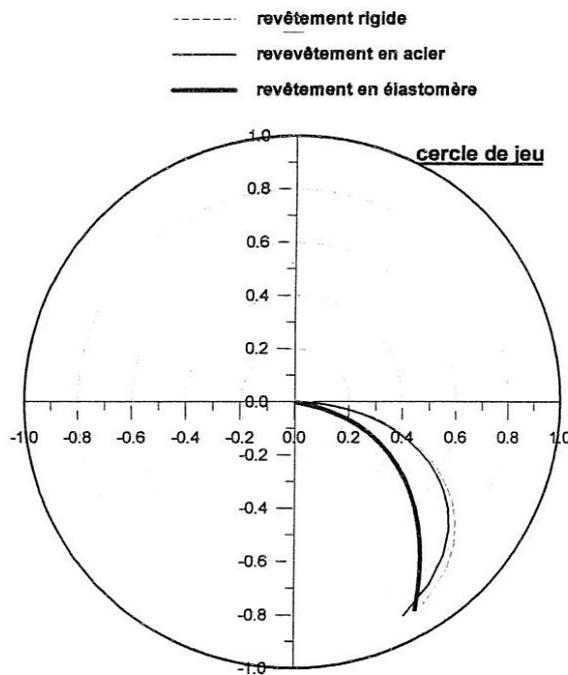
Par comparaison au palier rigide, la prise en considération des déformations élastiques des revêtements de surface dues aux pressions hydrodynamiques et de la piézo-viscosité du lubrifiant entraîne une diminution de la portance hydrodynamique et de l'angle de calage surtout dans le cas du palier dont l'alésage est revêtu d'une couche d'élastomère et fonctionnant aux grandes excentricités (palier modérément et lourdement chargé).



**Fig. V. 19:** Evolution de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative pour des paliers indéformable et compliants lubrifiés par un fluide compressible et piézo-visqueux.



**Fig. V. 20:** *Variation de la force de frottement adimensionnée en fonction de l'excentricité relative pour des paliers indéformable et compliants lubrifiés par un fluide compressible et piézo-visqueux.*



**Fig. V. 21:** *Variation de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative pour des paliers indéformable et compliants lubrifiés par un fluide compressible et piézo-visqueux.*

## 9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons testé le domaine de validité des différentes approches élastiques développées à savoir le modèle élément finis (2D), modèles couche mince (2D) et (3D). La comparaison de champs des déplacement radial calculés par les différents modèles avec ceux obtenus par l'approche analytique et la méthode des éléments finis (3D) a permis de conclure que les modèles couche mince (2D) et (3D) permettent de calculer le champ de déplacement radial avec une précision suffisante dans le cas de tubes élastiques minces ( $t/R \ll 1$ ) constituée de matériaux compressibles tels que les alliages métalliques pour lesquelles le coefficient de *Poisson* est proche de 0,30. Toutefois, les modèles couche mince (2D) et (3D) donnent des valeurs sous-estimées du déplacement dans le cas des matériaux quasi-incompressibles tels que les élastomères et le caoutchouc pour lesquels le coefficient de *Poisson* est proche de 0,50. Pour ce type de matériau, il convient d'appliquer la méthode des éléments finis pour un calcul plus précis du champ de déplacement élastique.

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à l'étude de l'influence des déformations élastiques des revêtements de surface dues aux pressions hydrodynamiques ainsi que de la rhéologie du fluide lubrifiant sur le champ de pression et la géométrie du film. Cette étude a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de l'élasticité du revêtement de surface et de la piézo-viscosité du lubrifiant sur la pression hydrodynamique et l'épaisseur du film. Il a été montré que la pression maximale calculée après couplage fluide-structure est plus faible que celle obtenue dans le cas du palier rigide en utilisant la théorie de la lubrification hydrodynamique classique. Il a été montré aussi que la compressibilité du fluide n'affecte pas le champ de pression et la géométrie du film.

Dans la troisième partie, nous avons comparé le comportement d'un palier compliant lubrifié par un fluide piézo-visqueux et compressible (barotrope) à celui d'un palier indéformable utilisant un fluide isovolume et isovisqueux comme lubrifiant. Les résultats obtenus ont montré que la prise en considération de l'élasticité des revêtements de surface et de la rhéologie du lubrifiant entraîne une diminution de la portance hydrodynamique, de la force de frottement et de l'angle de calage surtout pour les grandes excentricités de fonctionnement. Cette diminution est d'autant plus importante que le module d'élasticité du matériau constituant le revêtement est faible.

## Conclusion Générale

Notre travail est essentiellement consacré au développement de modèles élastiques pour le calcul des champs de contraintes et des champs de déplacements dans des milieux élastiques. Les modèles mis au point concernent des solides de formes géométriques simples et d'utilisation fréquente tels que les tubes et les secteurs cylindriques. Ce travail comporte deux parties. Dans la première partie, nous nous sommes intéressés au développement de modèles analytiques et numériques bidimensionnel et tridimensionnel permettant de déterminer l'état élastique des revêtements de surface monocouches utilisés dans certains paliers hydrodynamiques tels que les paliers lisses, les paliers à arc partiel et les paliers à patins oscillants. La deuxième partie concerne l'intégration de ces modèles dans les processus de calcul élastohydrodynamiques des paliers compliant fonctionnant en conditions sévères.

Le modèle semi-analytique bidimensionnel (2D) mis en oeuvre dans le cas de tubes cylindriques très longs (hypothèse de déformations planes) ou très courts (hypothèse de contraintes moyennes planes) est basé sur la formulation du problème élastostatique linéaire dans le plan complexe défini par les couronnes circulaires qui sont des domaines doublement connexes. Les solutions générales en contraintes et en déplacements du problème sont exprimées en coordonnées polaires à l'aide de deux fonctions analytiques appelées potentiels complexes de *Kolosov* et *Muskhelishvili*. Ces potentiels sont en effet des potentiels de déplacement dépendants du domaine à traiter. Cette technique a été appliquée pour la résolution de deux problèmes mixtes où les données sont des déplacements et des contraintes : les déplacements sont connus sur un cercle limite et les contraintes sur l'autre. Sur les frontières de la couronne, les contraintes et les déplacements sont présentés sous forme de séries de *Fourier* complexes. Les solutions obtenues pour les deux problèmes mixtes permettent de déterminer l'état élastique des revêtements de surface utilisés dans les paliers hydrodynamiques. Ce modèle, qui ne nécessite pas de discrétisation spatiale du milieu à traiter, a été développé afin de permettre d'une part de tester le domaine de validité des autres approches développées (méthode des éléments finis et modèle couche mince (2D)) et d'autre part de calculer les coefficients d'influence qui sont nécessaires pour la résolution du problème d'interaction fluide-structure dans les paliers hydrodynamiques compliant.

Dans le cas de tubes et de secteurs cylindriques de longueur finie, il est difficile d'envisager des solutions analytiques surtout pour des chargements quelconques. Dans la présente étude, le problème élastostatique tridimensionnel (3D) a été abordé numériquement par la méthode des éléments finis en faisant usage des éléments hexaédriques à huit nœuds. Notre objectif principal est de pouvoir construire avec ce modèle une matrice de compliance qui sert comme donnée pour l'exécution du programme de calcul élastohydrodynamique des paliers compliant de longueur finie.

L'hypothèse d'un tube ou secteur élastique mince très long encastré dans un alésage rigide soumis à un champ de contraintes normale et tangentielle a permis de déduire un nouveau modèle élastique simplifié appelé modèle couche mince bidimensionnel. Ce modèle suppose que les déplacements radial et tangentiel en un point de la couche sont proportionnels aux contraintes radiale et tangentielle appliquées en ce point. La couche élastique mince peut donc être modélisée par des ressorts disposés radialement indépendants les uns des autres.

La comparaison des champs de déplacement radial de la face active du tube calculés par les modèles couche mince (2D) et (3D) avec ceux obtenus par l'approche semi-analytique (2D) et la méthode des éléments finis (3D) a montré que les modèles couche mince (2D) et (3D)

permettent de calculer le champ de déplacement radial avec une précision suffisante dans le cas de tubes et secteurs minces constitués de matériaux compressibles tels que les alliages métalliques (métaux blancs, babbitts) pour lesquels le coefficient de Poisson est proche de 0.30. Cependant, ces modèles simplifiés perdent de leur efficacité dans le cas des matériaux quasi-incompressibles tels que les élastomères et les caoutchoucs pour lesquels le coefficient de Poisson est proche de 0.50. Pour ce type de matériaux, il convient d'appliquer la méthode des éléments finis pour un calcul plus précis du champ de déplacement élastique.

La détermination de la solution du problème d'interaction fluide-structure dans les paliers compliant fonctionnant en régime de lubrification hydrodynamique impose la résolution simultanée de deux équations :

- une équation hydrodynamique qui définit le comportement du fluide appelée équation de *Reynolds* dont l'inconnue principale est la pression dans le fluide lubrifiant;
- une équation géométrique qui définit l'épaisseur du film dépendant de la pression. Si le champ de pression hydrodynamique reste suffisamment faible pour que les déformations élastiques des surfaces de l'arbre et principalement de l'alésage soient négligeables devant l'épaisseur du film, l'équation géométrique est uniquement fonction des coordonnées de l'espace et du temps.

Il convient de noter que le problème d'interaction fluide-structure dans les paliers fluides est non linéaire car les déformations élastiques des revêtements de surface dues aux pressions hydrodynamiques sont importantes et peuvent être de l'ordre de grandeur des épaisseurs du film. Ces dernières interviennent à une puissance cubique dans l'équation de *Reynolds* ce qui explique la forte non linéarité du problème. Cette non linéarité provient aussi du fait que les lois de variation viscosité-pression et densité-pression adoptées dans la présente étude sont non linéaires.

La résolution numérique du problème d'interaction fluide-structure en régime isotherme par la méthode itérative de *Newton-Raphson* amortie a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de l'élasticité des revêtements de surface et de la rhéologie du fluide lubrifiant sur le comportement hydrodynamique d'un palier long. Il a été montré que :

- le champ de pression et la géométrie du contact sont sensiblement affectées surtout dans le cas des revêtements constitués de matériaux à faible valeur du module d'Young et des fluides piézovisqueux;
- les valeurs de la portance hydrodynamique, de la force de frottement et de l'angle de calage calculés après couplage fluide-structure sont plus faibles que celles obtenues dans le cas du palier rigide lorsque les effets déformations élastiques sont ignorés ;
- la compressibilité du fluide n'a pas d'effets significatifs sur le comportement du palier.

Ces effets sont d'autant plus importants que la valeur de l'excentricité de fonctionnement est grande ; c'est le cas des paliers sévèrement chargés.

Il nous semble que les objectifs fixés ont été atteints. En particulier pour la mise au point des modèles tridimensionnels qui sont la méthode des éléments finis en coordonnées cylindriques et le modèle couche mince (3D). Les tests d'exactitude et de précision du modèle éléments finis (2D) et des modèles couche mince simplifiés (2D) et (3D) nous semblent tout à fait probants. Les prolongements possibles de cette étude sont :

- développer le modèle tridimensionnel pour la résolution des problèmes thermoélastique et viscoélastique;
- résoudre le problème d'interaction fluide-structure dans les paliers hydrodynamiques de longueur finie dont l'alésage est revêtu d'une couche viscoélastique.

## Annexe A

### Solutions en contraintes et en déplacements du premier problème mixte

#### A1. Systèmes d'équations : Calcul de $a_k$ et $a'_{-k}$

Les relations permettant d'utiliser les conditions aux limites du premier problème mixte sont les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> relations du système (III-6) et les 4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> relations du système (III-8), soit :

$$\sigma_1^{(0)} = (1 + \chi)H^{-1}\overline{a_{-1}} \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_k^{(0)} = (1 - k)a_k H^k + \overline{a_{-k}} H^{-k} - a'_{k-2} H^{k-2}, \quad \forall k \in \{Z - \{1\}\} \quad (\text{A.2})$$

$$U_{-1}^{(1)} = 2\chi a_{-1} \log_e(R_1) + (\alpha\chi - \overline{\beta})R_1^{-1} - \overline{a_1} \quad (\text{A.3})$$

$$U_k^{(1)} = \frac{\chi}{k+1} a_k - \overline{a_{-k}} + \frac{a'_{-k-2}}{1+k}, \quad \forall k \in \{Z - \{-1\}\} \quad (\text{A.4})$$

La relation (A.1) donne directement :

$$a_{-1} = \frac{H\sigma_1^{(0)}}{1 + \chi} \quad (\text{A.5})$$

La relation (A.3), la relation (A.2) pour  $k = -1$  et la relation (A.4) pour  $k = 1$  donnent ensuite :

$$\begin{cases} U_{-1}^{(1)} = 2\chi a_{-1} \log_e(R_1) + \frac{\alpha\chi - \overline{\beta}}{R_1} - \overline{a_1} \\ \sigma_{-1}^{(0)} = 2a_{-1} H^{-1} + \overline{a_1} H - a'_{-3} H^{-3} \\ U_1^{(1)} = \frac{\chi a_1}{2} - \overline{a_{-1}} + \frac{a'_{-3}}{2} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Compte tenu de (A5), la solution de ce système est :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2H(1 - H^2)}{(1 + \chi)(\chi + H^4)} \sigma_1^{(0)} + \frac{2U_{-1}^{(1)}}{(\chi + H^4)} + \frac{H^3 \overline{\sigma_{-1}^{(0)}}}{(\chi + H^4)} \\ a'_{-3} = -\chi \overline{a_1} + \frac{2H}{(1 + \chi)} \overline{\sigma_1^{(0)}} + 2\overline{U_{-1}^{(1)}} \\ (\alpha\chi - \overline{\beta})R_1^{-1} = \overline{a_1} + U_{-1}^{(1)} - 2\chi a_{-1} \log_e(R_1) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Puis pour  $k \neq \pm 1$ , les relations (A.2) et (A.4) prises pour  $k$  et leurs conjuguées prises pour  $(-k)$  permettent d'obtenir:

$$\begin{cases} \sigma_k^{(0)} = (1-k)\alpha_k H^k + \overline{a_{-k}} H^{-k} - a'_{k-2} H^{k-2} \\ U_k^{(1)} = \frac{\chi a_k}{1+k} - \overline{a_{-k}} + \frac{a'_{-2-k}}{1+k} \\ \sigma_{-k}^{(0)} = (1+k)\overline{\alpha_{-k}} H^{-k} + a_k H^k - \overline{a'_{-k-2}} H^{-k-2} \\ \overline{U_{-k}^{(1)}} = \frac{\chi a_{-k}}{1-k} - a_k + \frac{a'_{k-2}}{1-k} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Il vient :

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\Delta M_k} \left\{ (1+k)(H^2-1)H^{2-k}\sigma_k^{(0)} - (1+k)(\chi + H^{-2-2k})U_k^{(1)} - \right. \\ \left. (1+\chi H^{2k+2})H^{-k}\overline{\sigma_{-k}^{(0)}} + (1-k^2)(H^2-1)\overline{U_{-k}^{(1)}} \right\} \\ a'_{k-2} = (1-k)\alpha_k - \chi\overline{\alpha_{-k}} + (1-k)\overline{U_{-k}^{(1)}} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

avec  $\Delta M_k = (1-k^2)(1-H^2)^2 - (\chi + H^{2+2k})(\chi + H^{2-2k})$

on démontre également que  $\Delta M_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

## A2. Contraintes et déplacements en tout point de la couronne

En reportant les résultats (A.5), (A.7) et (A.9) dans les relations du système (III-3), compte tenu des relations (III-4), nous obtenons la solution en contraintes et déplacements du premier problème mixte:

Pour  $k \in \mathbb{Z}$

$$V_k(\ell) = \frac{M_k}{\Delta M_k} \bullet \left\{ \begin{array}{l} 2H^{2-k}[(1+k)(H^2-1)\ell^k - (\chi + H^{2k-2})\ell^{-k}] \\ 2H^{2+k}[(1-k)(H^2-1)\ell^{-k} - (\chi + H^{-2-2k})\ell^k] \\ -2(1+k)[(\chi + H^{-2-2k})\ell^k - (1-k)(H^2-1)\ell^{-k}] \\ -2(1-k)[(\chi + H^{2k-2})\ell^{-k} - (1+k)(H^2-1)\ell^k] \end{array} \right\} \quad (\text{A.10})$$

Pour  $k \in \{Z - \{1\}\}$

$$\sigma_k(\ell) = \frac{\mathbf{M}_k}{\Delta \mathbf{M}_k} \bullet \left. \begin{array}{l} \left( \frac{H}{\ell} \right)^{2-k} \left[ (1-k^2) (H^2-1) (\ell^2-1) - (\chi + H^{2+2k}) (\chi + \ell^{2-2k}) \right] \\ (1-k) H^{2+2k} \ell^{k-2} \left[ (\chi + H^{2-2k}) (1-\ell^2) + (H^2-1) (\ell^{2-2k} + \chi) \right] \\ (1-k^2) \ell^{k-2} \left[ (\chi + H^{2-2k}) (1-\ell^2) + (H^2-1) (\ell^{2-2k} + \chi) \right] \\ (1-k) \ell^{k-2} \left[ (1-k^2) (H^2-1) (\ell^2 - H^2) + (\chi + H^{2+2k}) (H^{2-2k} - \ell^{2-2k}) \right] \end{array} \right\} \quad (\text{A.11})$$

Pour  $k \in \{Z - \{-1\}\}$

$$U_k(\ell) = \frac{\mathbf{M}_k}{\Delta \mathbf{M}_k} \bullet \left. \begin{array}{l} H^{2-k} \ell^{-2-k} \left[ \chi (\ell^{2+2k} - 1) (H^2 - 1) + (\ell^2 - 1) (\chi + H^{2+2k}) \right] \\ - H^{2+k} \ell^{-2-k} \left[ \chi (\chi + H^{2-2k}) (\ell^{2+2k} - 1) + (1-k^2) (H^2 - 1) (\ell^2 - 1) \right] \\ (1-k^2) \ell^{-2-k} \left[ (H^2 - \ell^2) (H^2 - 1) - (H^{2+2k} + \chi \ell^{2+2k}) (\chi + \ell^{2-2k}) \right] \\ (1-k) \ell^{-2-k} \left[ \chi (\ell^{2+2k} - 1) (H^2 - 1) + (\ell^2 - 1) (\chi + H^{2+2k}) \right] \end{array} \right\} \quad (\text{A.12})$$

pour  $k=-1$  :

$$U_{-1}(\ell) = \mathbf{M}_{-1} \left. \begin{array}{l} \frac{(1-\ell^2)H^3}{(\chi + H^4)\ell} \\ \frac{2H\ell^{-1}}{(\chi + 1)} \left( \chi \log_\ell(\ell) + \frac{(1-H^2)(1-\ell^2)}{(\chi + H^4)} \right) \\ \ell^{-1} \\ \frac{2(1-\ell^2)}{\ell(\chi + H^4)} \end{array} \right\} \quad (\text{A.13})$$

avec  $\mathbf{M}_k = \langle \sigma_k^{(0)} : \bar{\sigma}_{-k}^{(0)} : U_k^{(1)} : \bar{U}_{-k}^{(1)} \rangle$ ,  $\forall k \in Z$

## Annexe B

### Solutions en contraintes et en déplacements du deuxième problème mixte

#### B1. Systèmes d'équations : Calcul de $a_k$ et $a'_{-k}$

Les relations permettant d'utiliser les conditions aux limites du deuxième problème mixte sont les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> relations du système (III-8) et les 4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> relations du système (III-6). Soit :

$$\sigma_1^{(1)} = (1 + \chi) \overline{a_{-1}} \quad (B.1)$$

$$\sigma_k^{(1)} = (1 - k) \overline{a_k} + \overline{a_{-k}} - \overline{a'_{k-2}}, \quad \forall k \in \{Z - \{1\}\} \quad (B.2)$$

$$U_{-1}^{(0)} = 2\chi \overline{a_{-1}} H^{-1} \log_e(R_0) + (\alpha\chi - \overline{\beta}) R_0^{-1} - \overline{a_1} H, \quad \text{pour } k = -1 \quad (B.3)$$

$$U_k^{(0)} = \frac{\chi}{k+1} H^k \overline{a_k} - \overline{a_{-k}} H^{-k} + \frac{\overline{a'_{-k-2}}}{1+k} H^{-2-k}, \quad \forall k \in \{Z - \{-1\}\} \quad (B.4)$$

La relation (B.1) donne directement :

$$\overline{a_{-1}} = \frac{\sigma_1^{(1)}}{1 + \chi} \quad (B.5)$$

La relation (B.3), la relation (B.2) pour  $k = -1$  et la relation (B.4) pour  $k = 1$  donnent ensuite :

$$\begin{cases} \overline{a_1} = \frac{2(H^2 - 1)}{(1 + \chi)(1 + \chi H^4)} \sigma_1^{(1)} + \frac{2H^3 U_1^{(0)}}{(1 + \chi H^4)} + \frac{\overline{\sigma_{-1}^{(1)}}}{(1 + \chi H^4)} \\ \overline{a'_{-3}} = \overline{a_1} + 2\overline{a_{-1}} - \sigma_{-1}^{(1)} \\ (\alpha\chi - \overline{\beta}) R_0^{-1} = H\overline{a_1} + U_{-1}^{(0)} - 2\chi \overline{a_{-1}} H^{-1} \log_e(R_0) \end{cases} \quad (B.6)$$

Puis pour  $k \neq \pm 1$ , les relations (B.2) et (B.4) prises pour  $k$  et leurs conjuguées prises pour  $(-k)$  donnent:

$$\begin{cases} \sigma_k^{(1)} = (1-k)a_k + \overline{a_{-k}} - a'_{k-2} \\ U_k^{(0)} = \frac{\chi a_k H^k}{1+k} - \overline{a_{-k}} H^{-k} + \frac{a'_{-2-k}}{1+k} H^{-2-k} \\ \sigma_{-k}^{(1)} = (1+k)\overline{a_{-k}} + a_k - a'_{-k-2} \\ U_{-k}^{(0)} = \frac{\chi \overline{a_{-k}} H^{-k}}{1-k} - a_k H^k + \frac{a'_{k-2}}{1-k} H^{k-2} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Il vient :

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\Delta M'_k} \left\{ (1+k)(1-H^2)\overline{\sigma_k^{(1)}} - (1+k)(1+\chi H^{2-2k})H^{2+k}U_k^{(0)} - (1+\chi H^{-2k+2})\overline{\sigma_{-k}^{(1)}} + \right. \\ \left. (1-k^2)(1-H^2)H^{2-k}\overline{U_{-k}^{(0)}} \right\} \\ a'_{k-2} = (1-k)a_k + \overline{a_{-k}} - \sigma_k^{(1)} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

avec  $\Delta M'_k = (1-k^2)(1-H^2)^2 - (1+\chi H^{2+2k})(1+\chi H^{2-2k})$

on démontre également que  $\Delta M'_k \neq 0, \forall k \in Z$

## B2. Contraintes et déplacements en tout point de la couronne

En reportant les résultats (B.5), (B.6) et (B.8) dans les relations (III-3). Nous obtenons la solution en contraintes et déplacements du problème mixte. Soit :

Pour  $k \in Z$

$$V_k(\ell) = \frac{M'_k}{\Delta M'_k} \bullet \left\{ \begin{array}{l} 2[(1+k)(1-H^2)\ell^k - (1+\chi H^{2+2k})\ell^{-k}] \\ -2[(1+\chi H^{2-2k})\ell^k - (1-k)(1-H^2)\ell^{-k}] \\ -2(1+k)H^{2+k}[(1+\chi H^{2-2k})\ell^k - (1-k)(1-H^2)\ell^{-k}] \\ 2(1-k)H^{2-k}[(1+k)(1-H^2)\ell^k - (1+\chi H^{2+2k})\ell^{-k}] \end{array} \right\} \quad (\text{B.9})$$

Pour  $k \in \{Z - \{1\}\}$

$$\sigma_k(\ell) = \frac{M'_k}{\Delta M'_k} \cdot \left. \begin{array}{l} \left[ \left( (1-k^2)(1-H^2)(\ell^2-H^2) - (1+\chi H^{2+2k})(\ell^{2-2k} + \chi H^{2-2k}) \right) \ell^{k-2} \right. \\ \left. (1-k) \left[ (1+\chi H^{2-2k})(1-\ell^2) + (1-H^2)(\ell^{2-2k}-1) \right] \ell^{-2+k} \right. \\ \left. (1-k^2) \ell^{2+k} \left[ (1+\chi H^{2-2k})(1-\ell^2) + (1-H^2)(\ell^{2-2k}-1) \right] \ell^{-2+k} \right. \\ \left. (1-k) H^{2-k} \left[ (1-k^2)(1-H^2)(\ell^2-1) + (1+\chi H^{2+2k})(1-\ell^{2-2k}) \right] \ell^{-2+k} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{B.10})$$

Pour  $k \in \{Z - \{-1\}\}$

$$U_k(\ell) = \frac{M'_k}{\Delta M'_k} \cdot \left. \begin{array}{l} \left[ \left( (\chi \ell^{2+2k} + 1)(1-H^2) + (\ell^2 - 1)(1 + \chi H^{2+2k}) \right) \ell^{-2-k} \right. \\ \left. \left[ \chi (H^{2+2k} - \ell^{2+2k})(1 + \chi H^{2-2k}) + (H^2 - \ell^2)(1-k^2)(1-H^2) \right] \left( \frac{\ell^{-2-k}}{1+k} \right) \right. \\ \left. - \left[ (1 + \chi H^{2-2k})(1 + \chi \ell^{2+2k}) + (1-k^2)(1-H^2)(\ell^2-1) \right] \left( \frac{H}{\ell} \right)^{2+k} \right. \\ \left. (1-k) H^{2-k} \left[ (\chi \ell^{2+2k} + 1)(1-H^2) + (\ell^2 - 1)(1 + \chi H^{2+2k}) \right] \ell^{-2-k} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{B.11})$$

Pour  $k = -1$  :

$$U_{-1}(\ell) = M'_{-1} \cdot \left. \begin{array}{l} \left( \frac{H^2 - \ell^2}{1 + \chi H^4} \right) \ell \\ \frac{2}{(\chi + 1)} \left( -\chi \ell^{-1} \log_e \left( \frac{H}{\ell} \right) + \frac{(1-H^2)(\ell - H^2 \ell^{-1})}{(1 + \chi H^4)} \right) \\ \frac{H}{\ell} \\ \frac{2H^3(H^2 - \ell^2)}{\ell(1 + \chi H^4)} \end{array} \right\} \quad (\text{B.12})$$

avec  $M'_k = \langle \sigma_k^{(1)} : \bar{\sigma}_{-k}^{(1)} : U_k^{(0)} : \bar{U}_{-k}^{(0)} \rangle \quad \forall k \in Z$

## Annexe C

### Solutions analytiques de l'équation de *Reynolds* pour un palier long lubrifié par un fluide incompressible et isovisqueux

Dans cette annexe, nous présentons les solutions analytiques de l'équation de *Reynolds* (V-15) correspondant aux conditions limites de *Sommerfeld* (film complet), de demi-*Sommerfeld* et de *Swift-Stieber* (film rompu).

#### *C1. Solutions de Sommerfeld et de Gumbel* [50,51]

Nous supposons que le palier est alimenté à la pression  $p = 0$  par l'intermédiaire d'une rainure axiale infiniment mince située à l'abscisse  $\theta = 0$ , soit :

$$p(\theta = 0) = p(\theta = 2\pi) = 0 \quad (\text{C.1})$$

Une première intégration de l'équation de *Reynolds* donne :

$\frac{dp}{d\theta} = 6\mu R_a^2 \omega \frac{h - h^*}{h^3}$  où  $h^*$  est l'épaisseur du film lubrifiant au point où le gradient de pression est nul.

En intégrant encore une fois, on obtient :

$$p(\theta) = 6\mu\omega \left(\frac{R_a}{C}\right)^2 \left[ \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{h^*}{C} \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right] + K$$

où  $K$  est une constante d'intégration.

Pour calculer ces intégrales, on utilise le changement de variable de *Sommerfeld* [42] :

$$1 + \varepsilon \cos \theta = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \psi} \quad (\text{C.2})$$

tel que  $\theta = 0, 2\pi$  correspond à  $\psi = 0, 2\pi$

Soit :

$$p(\psi) = \frac{6\mu\omega \left(\frac{R_a}{C}\right)^2}{(1 - \varepsilon^2)^3} \left\{ \psi - \varepsilon \sin \psi - \frac{h^* [2\psi - 4\varepsilon \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi]}{2C(1 - \varepsilon^2)} \right\} + K \quad (\text{C.3})$$

Les deux constantes  $h^*$  et  $K$  sont déterminées à partir des conditions aux limites (C.1) :

Soit :

$$p(\psi) = \frac{6\mu\omega\left(\frac{R}{C}\right)^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \psi - \varepsilon \sin \psi - \frac{2\psi - 4\varepsilon \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi}{(2-\varepsilon^2)} \right\} \quad (C.4)$$

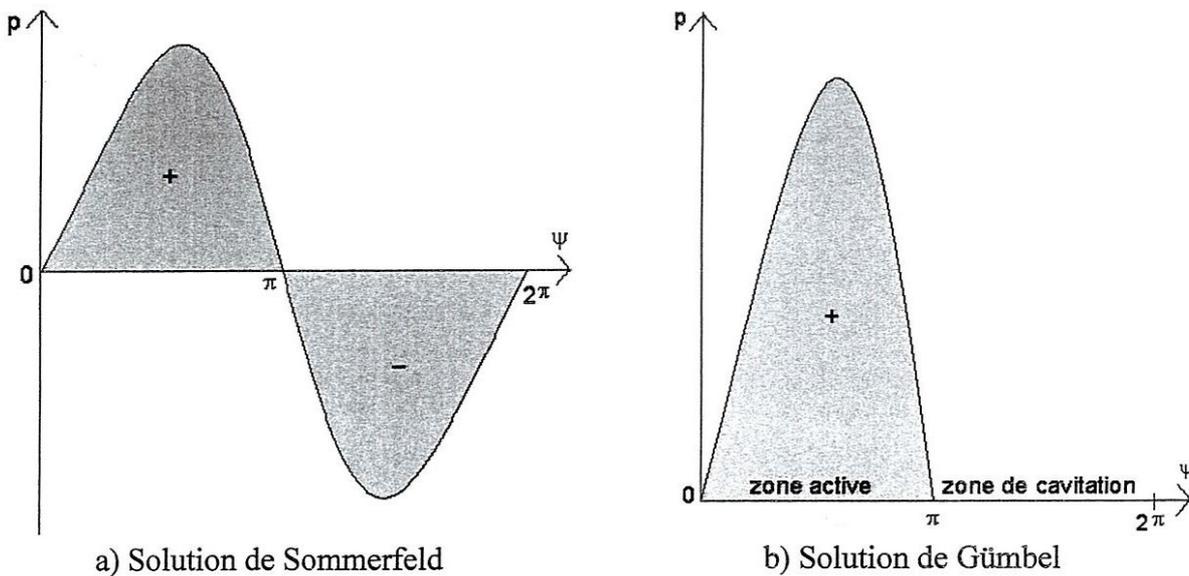
qui s'écrit aussi :

$$\tilde{p} = \frac{p}{\mu\omega\left(\frac{R}{C}\right)^2} = \frac{6\varepsilon \sin \psi}{(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} [2-\varepsilon^2 - \varepsilon \cos \psi] \quad (C.5a)$$

si on change  $\psi$  en  $\theta$  tel que :  $\cos \psi = \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  ;  $\sin \psi = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ , il vient :

$$\tilde{p}(\theta) = \frac{6\varepsilon \sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)} \quad (C.5b)$$

La répartition circonférentielle de la pression dans le palier est représentée figure (C-1).



**Fig. C. 1:** Solutions de Sommerfeld (film complet) et de Gümbel (film rompu).

**C2. Solution de Swift-Stieber [52,53]**

$$p = p_{\text{alim}} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta \text{ ou } \psi = 0$$

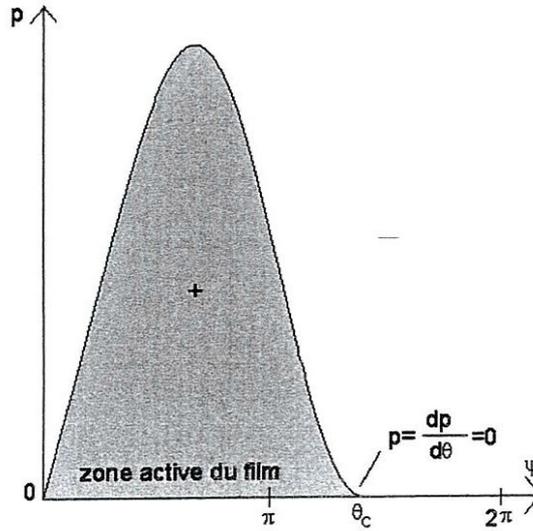
$$p(\theta = \theta_c) = \left( \frac{dp}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_c} = 0 \quad (\text{C.6})$$

où  $\theta_c$  est l'abscisse du début de la région inactive qui est une inconnue supplémentaire du problème.

Compte tenu des C.L. (C.6), le champ de pression s'écrit :

$$p(\psi) = \frac{6\mu\omega R_a^2}{C^2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \psi - \varepsilon \sin \psi - \frac{2\psi - 4\varepsilon \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi}{2(1-\varepsilon \cos \psi_c)} \right\} \quad (\text{C.7})$$

La répartition circonférentielle de la pression dans le palier est représentée figure (C-2).



**Fig. C. 2: Solution de Swift-Stieber.**

Cette solution a été obtenue à partir de la solution générale (C.3) pour laquelle:

$K = 0$  puisque pour  $\psi = 0, p = 0$  et  $h^*$  est déterminé à partir de  $\left. \frac{dp}{d\psi} \right|_{\psi=\psi_c} = 0$ , soit :

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{6\mu\omega R_a^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 - \varepsilon \cos \psi - \frac{h^* [2 - 4\varepsilon \cos \psi + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \cos^2 \psi]}{2C(1-\varepsilon^2)} \right\} \quad (\text{C.8})$$

$$h^* = \frac{C(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon \cos \psi_c} \quad (\text{C.9})$$

on calcule  $\psi_c$  en exprimant que pour  $\psi = \psi_c$ , nous avons  $p = 0$ , on a alors:

$$2(\psi_c - \varepsilon \sin \psi_c)(1 - \varepsilon \cos \psi_c) = 2\psi_c - 4\varepsilon \sin \psi_c + \varepsilon^2 \psi_c + \varepsilon^2 \sin \psi_c \cos \psi_c$$

soit :

$$\varepsilon(\sin \psi_c \cos \psi_c - \psi_c) + 2(\sin \psi_c - \psi_c \cos \psi_c) = 0$$

qui est une équation non linéaire de la forme  $f_\varepsilon(\psi_c) = 0$ . L'angle de cavitation  $\psi_c$  est déterminé numériquement par les méthodes numériques classiques de résolution des équations non linéaires (méthode de *Newton-Raphson*, méthodes d'interpolation, etc.).

on remarque que  $\psi_c$  ou  $\theta_c$  ne dépendent que de l'excentricité  $\varepsilon$ .

Les valeurs de  $\psi_c$  et  $\theta_c$  en fonction de  $\varepsilon$  sont données par le tableau (C.1):

**Tableau C. 1:** Valeurs de l'angle de cavitation  $\psi_c$  ou  $\theta_c$  pour différentes valeurs de l'excentricité relative  $\varepsilon$ .

$\varepsilon$	$\psi_c$ (rad.)	$\theta_c = \arctg\left(\frac{\sin \psi_c \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\cos \psi_c - \varepsilon}\right) + \pi$ (rad.)
0.1	4.44510	4.34974
0.2	4.39765	4.21195
0.3	4.35099	4.08021
0.4	4.30484	3.95451
0.5	4.25905	3.83438
0.6	4.21346	3.71892
0.7	4.16785	3.60645
0.8	4.12203	3.49369
0.9	4.07574	3.37195

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] *L. Solomon*. Elasticité Linéaire. Masson et Cie. 1968.
- [2] *N. Neuber. H.*. Ein neuer ansatz zur Lösung räumlicher probleme der elastizitätstheorie. Der Hohlkegel Unter Einzellast als Beispiel, Z.A.M.M., 14, 4, 1934
- [3] *P.F. Papkovitch*, Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques, comptes rendus de l'Académie des Sciences, vol. 195, 1932, p. 513.
- [4] *Grodski, G. D.*, L'intégration des équations générales de l'équilibre du corps élastique isotrope par l'intermédiaire des potentiels newtoniens et des fonctions harmoniques.(en russe), Izv., AN SSSR., 4, 1935.
- [5] *H. Hertz*, Ueber die berührung fester elastischer körper, journal f.d. reine und angewandte, Mathematik, 92, 1882, pp. 156-171.
- [6] *Boussinesq, J. V.*, Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, avec des notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse, Gauthier-Villars, Paris., 1885.
- [7] *Kelvin, Lord (W.Thanson)*, Note on the integration of the equations of équilibre of an elastic solid, Cambridge a. Dublin Math. Journ., 1848.
- [8] *Clebsch, A.*, uber die reflexion an einer kugelfoche, Journ. reine u., angew. Math. 61. 1863.
- [9] *Treffitz, E.*, Mathematische elastizitätstheorie, Handbuch d. Physik, (1), 6, Springer., Berlin, 1928.
- [10] *J. C. Gatina*, Contact de Corps Elastiques, Formulation et Résolution des Problèmes Inverses et Directs, Thèse d'Etat ès-sciences I.N.S.A., Université Claude-Bernard Lyon I, 1987.
- [11] *G. V. Kolosov*, On the Application of Complex Function Theory to a Plane Problem of the Mathematical Theory of Elasticity, Dorpat (Yuriev) University, 1909.
- [12] *N. I. Muskhelishvili*, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. P. Noordhoff Ltd, 4ème édition, 1963.
- [13] *B. Villechaise*, Etude Bidimensionnelle des Contacts Grandes entre Domaines Elastiques Finis, Thèse de docteur ingénieur I.N.S.A., Université Claude-Bernard Lyon, E.C.L 1981.
- [14] *M. Lahmar*, Modélisation du comportement élastohydrodynamique des Revêtements de Surface dans les Paliers Hydrodynamiques, Thèse de docteur de l'Université de Poitiers. 1991.

- [15] *A. Bettayeb*, Contribution à l'étude du comportement de secteurs circulaires revêtus, élastiques et viscoélastiques. Développement d'un modèle analytique 2D et 3D. Thèse de docteur, Université de Poitiers 1994.
- [16] *O. C. Zienkiewicz*, The finite element method., Mc Graw-Hill Book Co, Londres, 3ème édition, 1977.
- [17] *Jean-Louis Batoz, Gouri Dhatt*, Modélisation des structures par éléments finis., volume 1., Solide élastique., éditions Hermès, Paris, 1990.
- [18] *I. Fredholm*. Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité. Arkiv für Mathematik astronomie und Fysik. 2. 1-8 (1905).
- [19] *Kupradze*. Dynamical problems in elasticity, progress in solid mechanics, Vol. III, Sneddon & R. Hill éditeur, J. Wiley (1963).
- [20] *M. A. Jawson & A. R. Ponter*, An integral equation solution of the torsion problem, Proc. Roy. Soc., Series A, 273. 1963.
- [21] *Rizzo*, An integral equation approach to boundary value of problems of classical elastostatics, J. Appl. Math., Vol. 25, 83 (1967).
- [22] *F. Rizzo & T. A. Cruse*, A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I, J. Math. Anal. Appl., 22, avril 1968.
- [23] *T. A. Cruse & W. Vanburen*, Three dimensionnal elastic Stress analysis of a fracture specimen with an edge crack, Int. J. Fract. Mech. 7.1.15 (1971).
- [24] *T. A. Cruse & J. L. Swedlow*. Formulation of boundary integral equations for three dimensionnal elasto-plastic flow, Int. Journal Solids Structures, Vol. 7, 1971.
- [25] *A. Mendelson*, Boundary integral methods in elasticity and plasticity. NASA TN D-7418, Nov. 1973.
- [26] *E. Betti*, Teoria della elasticità, il nuovo Cimento, (2), 7-10, 1872-3
- [27] *I. N. Sneddon*, The use of integral transforms, Mc Graw-Hill, Edition, 1974.
- [28] *B. Villechaise*, Mécanique des contacts : Elasticité et rupture, Thèse d'Etat ès-sciences, Université Claude-Bernard, Lyon I, 1985.
- [29] *T. E. Carl*, An experimental investigation of a cylindrical journal bearing under constant and sinusoidal loading, 2<sup>nd</sup> Convention Lubrication and Wear. Proc Inst Mech Engrs.. 1963-64, Vol. 178, Pt 3N.
- [30] *G. R. Higginson*, The theoretical effects of elastic deformation of the bearing liner on journal bearing performance, Proc. of the Symposium on Elastohydrodynamic Lubrication, Inst Mech Engrs., 1965-66, Vol. 180

- [31] *J. O'Donoghue, D. K. Brighton, C. J. K. Hook*, The effect of elastic distortions on journal bearing performance, *Journal of Lubrication Technology*, Oct 1967, Series F, pp. 409-417.
- [32] *D. K. Brighton, C. J. K. Hooke, J. O'Donoghue*, A theoretical and experimental investigation of the effect of elastic distortions on the performance of journal bearings, *Proc. Instn Mech Engrs.*, 1967-68, Vol. 182, Pt 3n, 192-200.
- [33] *H. D. Conway, H. C. Lee*. The analysis of the lubrication of a flexible journal bearing. *Journal of Lubrication Technology*, Oct. 1975, pp. 599-604.
- [34] *S. C. Jain, R. Sinhasan, D. V. Singh*, A study of elastohydrodynamic lubrication in a journal bearing with piezoviscous lubricants, *ASLE transactions*, Vol 27, 1984, 168-176.
- [35] *S. C. Jain, R. Sinhasan, D. V. Singh*, The performance characteristics of thin compliant shell journal bearings, *Wear*, 81, 1982, 251-56.
- [36] *H. N. Chandrawat, R. Sinhasan*, A study of steady-state and transient performance characteristics of a flexible shell journal bearing, *Tribology International*, 1988, 137-148.
- [37] *B. C. Majumdar, D. E. Brewster, M. M. Khonsari.*, Stability of a rigid rotor supported on flexible oil journal bearings, *Journal of Tribology*, Jan 1988, Vol. 110.
- [38] *M. Lahmar, A. Haddad, D. Nicolas*, Elastohydrodynamic analysis of one-layered journal bearings, *Journal of Engineering Tribology*, Part J, Proc of the IMechE, 1998, 212, 193-205.
- [39] *O. Reynolds*, on the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, *Phil. Trans. Roy. Soc London, Series A177*, Pt 1, 1886, pp.135-217.
- [40] *J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe, M. Godet*, *Lubrification hydrodynamique: Paliers et Butées*, Collection des Etudes et Recherches d'Electricité de France (EdF), Eyrolles, 1990.
- [41] *A. Z. Szeri*, *Tribology: friction, lubrication and wear*, Mc Graw-Hill book company, 1980.
- [42] *D. Dowson, G. R. Hoggins*, *Elasto-hydrodynamic lubrication*, SI Edition, Pergamon Int. Library, 1997.
- [43] *A. Cameron, C. M. Mc Ettels*, *Basic lubrication theory*, 3<sup>rd</sup> edition, John Wiley & sons, 1981.
- [44] *C. Barus*, Isotherms, isopiestic and isometrics relative to viscosity, *Am. J. Sci.* 45 (1893), 87-96.
- [45] *Erik Höglund*, Influence of lubricant properties on elastohydrodynamic lubrication, *wear*, 232, 1999, 178-184.

- [46] *C. J. A. Roelands*, Correlation aspects of the viscosity-pressure relationship of lubricating oils, Druk V. R. B., Groningen, Netherlands.
- [47] *L. Chang, T. F. Conry, C. Cusano*, An efficient, robust, multi-level computational algorithm for elastohydrodynamic lubrication, Transactions of the ASME, Journal of tribology, 1988, 1-7.
- [48] *Lowrie B. Sargent, JR*, Pressure-viscosity coefficients of liquid lubricants, ASLE Transactions, volume 26, 1, 1-10, 1981.
- [49] *A. Gourdin, M. Boumahrat*, Méthodes numériques appliquées, Office des Publications Universitaires, Seconde édition, 1990.
- [50] *A. Sommerfeld*, Zur hydrodynamische theorie der schmiermittelreibung, Z. Math. Phys., Vol. 50, pp. 97-155, 1904.
- [51] *L. Gümbel*, Vergleich der ergebnisse der rechnerischen behandlung des lagerstabilitätsproblem mit neuen versuchsresultaten. Monatsblätter d. Berlin, Bezirk V.D.I., 125-8, Septembre 1921.
- [52] *H. W. Swift*, The stability of lubrication film in journal bearings, Proc. Inst. Civil Eng., 233, pt 1, pp. 267-322, 1931.
- [53] *W. Stieber*, Das schwimmlager, VDI, 1933, Berlin.

## PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

### CHAPITRE I

$C^\circ$	configuration réelle
$C^*$	configuration virtuelle
$[D^*]$	tenseur des déformations virtuelles
$[D^\circ]$	tenseur des déformations linéaires, $= [\varepsilon]$
$E$	module d'Young, (Pa)
$[E]$	tenseur des déformations non linéaires de <i>Green-Lagrange</i>
$f_{,x}$	dérivée-partielle de $f$ par rapport à $x$ , $= \frac{\partial f}{\partial x}$
$f_v, f_s$	vecteurs forces de volume et de surface
$i, j, k$	vecteurs de la base orthonormée en coordonnées cartésiennes
$G$	module de cisaillement, (Pa)
$[H]$	matrice constitutive du matériau
$K$	module de compression hydrostatique, (Pa)
$[L^*]$	tenseur des gradients de déplacements virtuels
$\mathbf{n}$	vecteur unitaire normal à une surface ou à un contour
$[Q]$	matrice de transformation orthogonale
$r, \theta, z$	coordonnées cylindriques
$S_f$	partie de la frontière $S$ où sont appliquées les sollicitations
$S_u$	partie de la frontière $S$ où les déplacements sont connus
$t$	paramètre temps
$tr[A]$	trace de $[A] = \sum_i A_{ii}$
$\bar{\mathbf{u}}$	vecteur déplacements imposé
$u, v, w$	composantes du vecteur déplacement réel en coord. Cartésiennes
$u^*, v^*, w^*$	déplacements virtuels
$u_r, u_\theta, u_z$	composantes du vecteur déplacement réel en coord. Cylindriques
$U$	énergie interne de déformation
$V$	volume
$[W^*]$	tenseur des rotations virtuelles
$W$	forme intégrale
$x, y, z$	coordonnées cartésiennes
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$	vecteurs position, vitesse, accélération
$\varepsilon_v$	déformation volumétrique
$\varepsilon, \gamma$	déformations normales ; déformations de cisaillement
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots, \varepsilon_{yz}$	déformations en coordonnées cartésiennes
$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \dots, \varepsilon_{\theta z}$	déformations en coordonnées cylindriques
$\lambda, G$	coefficients de <i>Lamé</i>
$\Pi$	fonctionnelle d'énergie potentielle totale
$\nu$	coefficient de <i>Poisson</i>
$\rho$	masse volumique, ( $kg/m^3$ )
$\sigma(\mathbf{n})$	vecteur contrainte sur une facette de normale $\mathbf{n}$
$\sigma_{ij}$	tenseur de contraintes
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \sigma_{yz}$	composantes cartésiennes du tenseur de contraintes
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \dots, \sigma_{\theta z}$	composantes cylindriques du tenseur de contraintes
$[\sigma]$	tenseur des contraintes

$\{\varepsilon\}$	vecteur des déformations linéaires
*	utilisé pour définir une quantité virtuelle
$\{ \}$	matrice uni-colonne
$\Delta, \text{div}$	opérateur <i>Laplacien</i> , opérateur divergence
$[ ]$	matrice
$[ ]^T$	transposé de la matrice $[ ]$
$\langle \rangle = \{ \}^T$	matrice uni-ligne

## CHAPITRE II

$B_\alpha$	fonction de <i>Grodski</i> , ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ )
$D$	domaine globale de la structure
$p, q, P, Q$	potentiels scalaires de déplacement
$S(M), S_\theta(M)$	fonctions contraintes définies au point $M(z)$ dans le plan complexe
$u_r, u_\theta$	composantes polaires du déplacement
$z = x + iy$	nombre complexe

## CHAPITRE III

$H = \frac{R_2}{R_1}$	rapport des rayons des deux cercles limites d'une couronne circulaire
$L_{ij}, L'_{ij}$	coefficients d'influence
$\ell = \frac{r}{R_1}$	coordonnée radiale relative d'un point de la couronne
$N$	ensemble des entiers naturels
$r$	coordonnée radiale d'un point appartenant à la couronne, ( $m$ )
$R_0, R_1$	rayons extérieur et intérieur de la couronne, ( $m$ )
$t_h$	épaisseur de la couche élastique, ( $m$ )
$\tilde{t}_h$	épaisseur relative, $= \frac{t_h}{R_1}$
$U(z, \bar{z})$	déplacement complexe d'un point courant $M(z)$
$U_k$	coefficients de <i>Fourier</i> complexes du déplacement
$Z$	ensemble des entiers relatifs
$\lambda, \mu$	constantes de <i>Lamé</i>
$\theta$	coordonnée circonférentielle, ( <i>rad</i> )
$\phi, \psi$	potentiels complexes de <i>Kolosov</i> et <i>Muskhelishvili</i>
$\sigma_k$	coefficients de <i>Fourier</i> complexes de la contrainte
<i>Imaginaire</i> ( )	partie imaginaire d'un complexe
<i>Réel</i> ( )	partie réelle d'un complexe
$(\bar{\quad})$	conjugué du nombre complexe ( )

## CHAPITRE IV

$A^e$	surface élémentaire
$[B]$	matrice contenant les gradients des fonctions de forme
$\det J(\xi)$	déterminant de la matrice jacobienne
$\{f_e\}$	vecteur des sollicitations élémentaire
$J_s$	le jacobien de la transformation d'un élément de contour
$J_s$	le jacobien de la transformation d'un élément de surface
$[J(\xi)]$	matrice jacobienne de la transformation géométrique
$[N]$	matrice des fonctions de forme
$[k_e]$	matrice de rigidité élémentaire
$\{u_n\}$	vecteur des degrés de liberté d'un élément
$\{x_n\}$	coordonnées globales des nœuds d'un élément
$\xi, \eta, \zeta$	coordonnées paramétriques
$V^e$	volume élémentaire
$W^e$	forme intégrale élémentaire
$\tilde{W}^e$	forme intégrale élémentaire discrétisée

## CHAPITRE V

$C$	jeu radial du palier, $= R_c - R_a$ ( $m$ )
$C_a$	couple de frottement sur l'arbre, ( $N.m$ )
$\tilde{C}_a$	couple de frottement adimensionné, $\tilde{C}_a = \frac{C_a}{\mu \omega R_a^2 L \left( \frac{R_a}{C} \right)^2}$
$E_{ij}$	matrice jacobienne ou matrice d'itérations
$F_c, F_\phi$	composantes de la portance hydrodynamique, ( $N$ )
$h$	épaisseur du film lubrifiant, ( $m$ )
$\tilde{h}$	épaisseur sans dimension, $\tilde{h} = h / C$
$L/D$	rapport de la longueur au diamètre du palier
$M(O_a)$	vecteur moment au centre de l'arbre, ( $N.m$ )
$O_a$	centre de l'arbre
$O_c$	centre du coussinet
$R_a$	rayon de l'arbre, ( $m$ )
$R_c$	rayon du coussinet, ( $m$ )
$p$	pression hydrodynamique, ( $Pa$ )
$\tilde{p} = \frac{pC^2}{\mu \omega R_a^2}$	pression sans dimension
$t(M_2, n_2)$	composantes du vecteur contrainte (action du fluide sur l'arbre)
$\theta_C$	abscisse de rupture du film lubrifiant, ( $rad.$ )
$\alpha$	coefficient de piézoviscosité du lubrifiant, ( $Pa^{-1}$ )
$\omega$	vitesse de rotation angulaire de l'arbre, ( $rad/s.$ )

$\rho$	masse volumique du fluide, ( $kg/m^3$ )
$\rho_0$	masse volumique du fluide mesurée à la pression atmosphérique, ( $kg/m^3$ )
$\tilde{\rho}$	masse volumique sans dimension, $= \frac{\rho}{\rho_0}$
$\mu$	viscosité dynamique du lubrifiant, ( $Pa.s$ )
$\mu_0$	viscosité dynamique du lubrifiant mesurée à la pression atmosphérique
$\tilde{\mu}$	viscosité sans dimension, $= \frac{\mu}{\mu_0}$
$\lambda$	coefficient de relaxation
$\phi$	angle de calage, ( $rad$ )

## LISTE DES ILLUSTRATIONS

### CHAPITRE I

Fig. I. 1: Solide dans la configuration $C(t)$	6
Fig. I. 2: Facette de normale $\mathbf{n}$	8
Fig. I. 3: Vecteurs contraintes en $p$ (les trois plans sont définis au point $p$ )	8
Fig. I. 4: Composantes du tenseur des contraintes de <i>Cauchy</i> $[\sigma]$	9
Fig. I. 5: Equilibre sur un tétraèdre	10
Fig. I. 6: Contraintes en coordonnées cylindriques	11
Fig. I. 7: Equilibre d'un élément $dx dy$	12
Fig. I. 8: Définition des conditions aux limites sur les deux parties de la frontière ( $S$ )	*13
Fig. I. 9: Configurations $C^\circ$ et $C(t)$	14
Fig. I. 10: Vecteurs $dx^\circ$ et $dx$ dans les configurations $C^\circ$ et $C(t)$	15
Fig. I. 11: Mouvement virtuel	23
Fig. I. 12: Vecteurs $dx^*$ et $du^*$	24
Fig. I. 13: Cylindre élastique très long	29
Fig. I. 14: Plaque cylindrique	30

### CHAPITRE II

Fig. II. 1: Domaine borné multiplement connexes	42
Fig. II. 2: Comparaison des méthodes d'éléments finis (MEF) et d'équations intégrales de frontière (MEIF)	45

### CHAPITRE III

Fig. III. 1: Géométrie et notation	48
Fig. III. 2: Conditions aux limites du premier problème mixte schématisant un arbre revêtu	52
Fig. III. 3: Conditions aux limites du deuxième problème mixte schématisant un alésage revêtu	52
Fig. III. 4: Représentation de la circonférence intérieure de la couronne par $(M+1)$ points équidistants	64
Fig. III. 5: Représentation de la répartition de la charge unitaire sur la circonférence intérieure développée	64

### CHAPITRE IV

Fig. IV. 1: Découpage d'un tube cylindrique par éléments hexaédriques à huit nœuds	70
Fig. IV. 2: Découpage d'un secteur cylindrique par éléments hexaédriques à huit nœuds	70
Fig. IV. 3: Maillage d'une couronne circulaire par éléments quadrilatéraux à quatre nœuds	71
Fig. IV. 4: Maillage d'un secteur circulaire par éléments quadrilatéraux à quatre nœuds	71
Fig. IV. 5: Élément hexaédrique à huit nœuds	73
Fig. IV. 6: Élément bilinéaire à 4 nœuds (Q4)	79

Fig. IV. 7: Choix des points d'intégration de <i>Gauss</i> pour un problème à deux dimensions	83
Fig. IV. 8: Choix des points d'intégration de <i>Gauss</i> pour un problème à trois dimensions	83

## Table des illustrations

Fig. V. 1: Schéma d'un palier à lobes	88
Fig. V. 2: Schéma d'un palier à arc partiel	88
Fig. V. 3: Paliers à patins oscillants	89
Fig. V. 4: Géométrie d'un palier cylindrique monocouche	90
Fig. V. 5: Positions d'un arbre dans un palier lisse	91
Fig. V. 6: Variation de la viscosité de différentes huiles lubrifiantes avec la pression à 100°C	95
Fig. V. 7: Palier développé	96
Fig. V. 8: Variation circonférentielle de l'épaisseur du film en fonction de $\theta$ pour différentes valeurs de l'excentricité relative	100
Fig. V. 9: Variation de la densité relative d'une huile minérale en fonction de la pression selon la loi de <i>Dowson et Higginson</i>	105
Fig. V. 10: Champ de pression calculé sans couplage fluide-structure $L/D=\infty$ , $\varepsilon=0.90$ , $\phi=32^\circ$	116
Fig. V. 11: Maillage de la section droite du tube cylindrique (couronne circulaire) par éléments quadrilatéraux à 4 nœuds	117
Fig. V. 12: Variations circonférentielles du déplacement radial calculé à la surface interne du tube sans couplage fluide-structure, $t_h=1$ mm ( $\tilde{t}_h=0.04$ )	118
Fig. V. 13: Champ de pression hydrodynamique calculé dans le demi-palier $L/D=1$ , $\varepsilon=0.90$ , $\phi=26^\circ$	119
Fig. V. 14: Maillage du demi-tube cylindrique par éléments hexaédriques à 8 nœuds ( $N_\theta=30$ , $N_r=2$ et $N_z=10$ )	120
Fig. V. 15: Exemple de maillage tridimensionnel du demi-tube développé par éléments hexaédriques à 8 nœuds ( $N_\theta=6$ , $N_r=2$ et $N_z=4$ ), les nœuds de l'élément 1 sont numérotés dans l'ordre suivant : 31,37,38,32,1,7,8,2	120
Fig. V. 16: Variations circonférentielles du champ de déplacement radial dans le plan médian du tube constitué d'un matériau compressible ( $E=210$ GPa, $\nu=0.30$ )	122
Fig. V. 17: Variations circonférentielles du champ de déplacement radial dans le plan médian du tube constitué d'un matériau quasi-incompressible ( $E=2.1$ GPa, $\nu=0.49$ )	123
Fig. V. 18: Courbes de pression et d'épaisseur du film dans le cas de paliers indéformable et compliant obtenues après couplage fluide-structure	126
Fig. V. 19: Evolution de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative pour des paliers indéformable et compliant lubrifiés par un fluide compressible et piézo-visqueux	127
Fig. V. 20: Variation de la force de frottement adimensionnée en fonction de l'excentricité relative pour des paliers indéformable et compliant lubrifiés par un fluide compressible et piézo-visqueux	128
Fig. V. 21: Variation de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative pour des paliers indéformable et compliant lubrifiés par un fluide compressible et piézo-visqueux	128

## TABLE DES MATIERES

AVANT PROPOS

RESUMES

INTRODUCTION GENERALE 1

### CHAPITRE I

#### EQUATIONS GENERALES DE LA MECANIQUE DES SOLIDES DEFORMABLES

1. Introduction	3
2. Eléments de la théorie géométrique du milieu continu (continuum)	3
2.1. Notations	3
2.2. Continuité des fonctions	4
2.3. Milieux continus (continuum)	4
2.4. Déplacements et déformations	4
3. Modèle du corps élastique	4
3.1. Hypothèses fondamentales	5
3.2. Hypothèses simplificatrices	5
4. Description d'une configuration	6
5. Contraintes et équations d'équilibre	7
5.1. Contraintes de <i>Cauchy</i>	7
5.1.1. Equilibre sur un tétraèdre	9
5.1.2. Contraintes en coordonnées cylindriques	11
5.2. Equations d'équilibre	11
5.2.1. Equations d'équilibre en coordonnées polaires	13
5.2.2. Equations d'équilibre en coordonnées cylindriques	14
6. Déformations et relations de compatibilité	14
6.1 Déformations	14
6.2. Equations de compatibilité	19
7. Relations contraintes- déformations	20
7.1. Loi de <i>Hooke</i> généralisée	20
7.2. Matériau élastique orthotrope	20
7.3. Matériau élastique homogène et isotrope	21
8. Equations de compatibilité de <i>Beltrami-Michell</i>	22
9. Equations de <i>Lamé</i> pour des corps homogènes et isotropes	22
10. Principe des travaux virtuels ou des déplacements virtuels (PTV)	23
10.1. Mouvement et déformation virtuelles	23
10.2. Expression du P.T.V	25
11. Equations de l'élasto-statique plane en coordonnées cartésiennes	29
11.1. Etat de déformations planes : Cylindre élastique long	29
11.2. Etat de contraintes moyennes planes	30
12. Conclusion	31

## CHAPITRE II

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES ELASTIQUES PLANS ET TRIDIMENSIONNELS

1. Introduction	32
2. Système d'équations de <i>Lamé</i>	32
3. Méthodes de résolution	32
3.1. Méthodes des potentiels	33
3.1.1. Solution de <i>Kelvin</i>	33
3.1.2. Solution de <i>Clebsh</i>	34
3.1.3. Solution de <i>Trefftz</i>	34
3.1.4. Solution de <i>Grodski</i>	35
3.2. Méthode de <i>Kolosov</i> et <i>Muskhelishvili</i>	37
3.2.1. Equation du problème élasto-statique plan en coordonnées cartésien	37
3.2.2 Equations en variables complexes	38
3.2.3 Solutions générales des équations du problème plan : Introduction des fonctions de <i>Kolosov</i> et <i>Muskhelishvili</i>	40
3.2.3.1. Solution en contraintes	40
3.2.3.2. Solution en déplacements	41
3.3. Méthode des éléments finis (M.E.F)	43
3.4. Méthode des équations intégrales de frontière	44
3.5 Méthodes basées sur les transformées intégrales	45
4. Conclusion	46

## CHAPITRE III

### SOLUTIONS ANALYTIQUES DES PROBLEMES MIXTES POUR LES TUBES CYLINDRIQUES LONGS

1. Introduction	47
2. Géométrie et notations	48
3. Expressions des contraintes et des déplacements : méthode des séries	49
4. Solutions en contraintes et en déplacements du problème mixte pour la couronne	51
5. Contraintes et déplacements sur les frontières de la couronne pour le premier problème mixte	53
6. Contraintes et déplacements sur les frontières de la couronne pour le deuxième problème mixte	54
7. Expressions des déplacements et des contraintes sur les frontières	56
7.1. Calcul des champs de déplacement et de contrainte sur les frontières de la couronne	57
7.2. Cas particuliers	60
8. Application du principe de superposition	62
9. Modèle de la couche élastique mince	65
9.1. premier problème mixte	65
9.2. Deuxième problème mixte	66
10. Conclusion	67

## CHAPITRE IV

### FORMULATION DES PROBLEMES ELASTO-STATIQUES LINEAIRES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS (2D) ET (3D) POUR LES TUBES ET SECTEURS CYLINDRIQUES

1. Introduction	68
2. Présentation générale de la méthode des éléments finis	69
3. Formulation variationnelle	68
4. Approximations par éléments finis	69
4.1. Cas d'un problème tridimensionnel en coordonnées cartésiennes	72
4.2. Cas d'un problème tridimensionnel en coordonnées cylindriques	76
4.3. Cas d'un problème bidimensionnel en coordonnées cartésiennes	78
4.4. Cas d'un problème bidimensionnel en coordonnées polaires	81
5. Evaluation des matrices élémentaires : Quadrature de <i>Gauss-Legendre</i>	82
6. Formulation globale	84
7. Conclusion	85

## CHAPITRE V

### RESOLUTION DES PROBLEMES D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE DANS LES PALIERS HYDRODYNAMIQUES PAR LA METHODE ITERATIVE DE *NEWTON-RAPHSON* AMORTIE

1. Introduction	86
2. Paliers hydrodynamiques	87
2.1. Description d'un palier circulaire	90
2.2. Description d'un palier à arc partiel	91
3. Equations de base de la lubrification HD	92
3.1. Equations générales de la dynamique des fluides visqueux	92
3.2. Hypothèses simplificatrices	93
3.2.1. Hypothèses liées à la géométrie du palier	93
3.2.2. Hypothèses liées au fluide lubrifiant	94
3.2.3. Hypothèses générales	95
3.3. Dérivation de l'équation de <i>Reynolds</i> pour un écoulement plan (2D)	96
3.4. Conditions limites sur la pression	98
3.4.1. Conditions liées à l'alimentation	98
3.4.2. Conditions liées à l'écoulement du lubrifiant	98
3.5. Equation géométrique du film	99
3.5.1. Palier rigide	99
3.5.2. Palier compliant	101
3.6. Performances statiques du palier	101
3.6.1. Champ de pression dans le film	101
3.6.2. Action du fluide sur les surfaces de l'arbre et du coussinet	101
3.7. Lois de variation viscosité-pression et densité-pression	102
3.7.1. Lois de variation viscosité-pression	102
3.7.2. Loi de variation densité-pression	104
4. Solution du problème d'interaction fluide-structure en régime isotherme	105

4.1. Equation de <i>Reynolds</i> non linéaire en variables sans dimension	105
4.2. Equation géométrique adimensionnée	106
4.3. Performances statiques du palier	106
4.3.1. Composantes de la portance HD	106
4.3.2. Couple de frottement sur l'arbre	107
4.3.3. Angle de calage	108
4.4. Discrétisation de l'équation de <i>Reynolds</i> non linéaire par différences finis centrées	109
4.5. Résolution du système d'équations non linéaires par la méthode de <i>Newton Raphson</i>	109
4.5.1. Principe de la méthode	110
4.5.2. Méthode de <i>Newton-Raphson</i> amortie	113
4.5.3. Algorithme de <i>Newton</i> amorti	113
4.5.4. Calcul de la matrice jacobienne	113
4.5.4.1. Méthode des différences centrées	114
4.5.4.2. Méthode analytique	114
5. Schéma général de résolution du problème d'interaction fluide-structure	115
6. Validation des modèles couche mince et éléments finis (2D)	116
7. Validation du modèle couche mince (3D)	118
8. Etude paramétrique	124
8. 1. Influence de l'élasticité du revêtement de surface et de la rhéologie du fluide lubrifiant sur le champ de pression et la géométrie du film	125
8. 2. Influence de l'élasticité du revêtement de surface et de la rhéologie du fluide lubrifiant sur les performances statiques du palier	127
9. Conclusion	129
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	130
<b>ANNEXE A</b>	132
<b>ANNEXE B</b>	135
<b>ANNEXE C</b>	138
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	142
<b>PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES</b>	146
<b>LISTE DES ILLUSTRATIONS</b>	150
<b>TABLE DES MATIERES</b>	152

## Résumé

Les tubes et les secteurs cylindriques offrent des possibilités réelles de schématisation des revêtements de surface utilisés dans certains paliers hydrodynamiques tels que les paliers circulaires (lisses), les paliers à arc partiel et les paliers à patins oscillants. Les solutions en contraintes et déplacements obtenues pour ce type de structures peuvent donc être utilisées pour la détermination de l'état élastique de ces revêtements.

Le but de ce travail est de proposer des modèles analytiques et numériques bidimensionnels (2D) et tridimensionnels (3D) pour le calcul des champs de contraintes et de déplacements dans les tubes et les secteurs cylindriques dont la surface interne est soumise à un champ de pression non uniforme. Ces modèles ont pour objectif principal d'être utilisés pour la résolution des problèmes de couplage ou d'interaction fluide-structure dans les paliers fluides compliants. Le modèle analytique, qui ne nécessite pas de discrétisation spatiale du domaine, est basé sur le traitement des équations de l'élastostatique linéaire dans le plan complexe défini par des couronnes circulaires. Dans la présente étude, ce modèle sert comme un outil de validation des différentes approches numériques développées tels que la méthode des éléments finis (MEF) et le modèle couche mince (MCM) (2D).

La résolution du problème d'interaction fluide-structure dans les paliers compliants fonctionnant en conditions sévères par la méthode itérative de *Newton-Raphson* amortie a permis de mettre en évidence les effets non négligeables de la rhéologie du fluide lubrifiant et de l'élasticité du revêtement de surface sur le comportement statique de ces paliers. Ces effets sont d'autant plus importants que le module d'élasticité du matériau constituant le revêtement est faible.

## Mots clés

Elasto-statique linéaire  
Tubes cylindriques  
Secteurs cylindriques  
Interaction fluide-structure  
Revêtement de surface  
Modèle analytique  
Modèle numérique  
Modèle couche mince  
Méthode de *Newton-Raphson*