



046

Mémoire de Magister

Présenté à l'Université de Guelma
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Département de : Génie Mécanique
Spécialité : Conception/Productique

par

Boukhatem Mourad

Analyse théorique et numérique des écoulements à rhéologie complexe dans les butées hydrostatiques et hydrodynamiques

Sous la Direction de : Dr Mustapha Lahmar

Soutenu le :devant la Commission d'Examen :

∞ JURY ∞

MM.

OUELAA	Noureddine	Prof, Université de Guelma, Président
LAHMAR	Mustapha.	M. C., Université de Guelma, Rapporteur
HAIHEM	Amar	M. C., Université de Annaba, Examineur
BENHAMZA	Elhocine	M. C., Université de Guelma, Examineur
BELBAH	Ahmed	M. C., Université de Guelma, Examineur

D é d i c a c e

A mon feu grand père Belgacem

Qui est le courage même,

A

Ma Mère Camila

Qui est le sacrifice même.

A Ma grand-mère Djemaa

Qui est la tendresse même

A Ma Sœur Robila

Qui est la patience même.

AVANT- PROPOS

Ce mémoire a été réalisé au Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS) du département de Génie Mécanique, Faculté des Sciences et de l'Ingénierie, Université du 08 Mai 1945, Guelma.

Je tiens à exprimer à mon rapporteur le Docteur M. Lalimar mes vifs remerciements et ma profonde gratitude pour son aide précieuse, sa patience et ses conseils judicieux, qu'il n'a pas cessé de me fournir tout le long de l'élaboration de ce travail.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait le Professeur N. Ouelaa d'avoir accepté de juger mon travail et de présider le Jury.

Il m'est très agréable de remercier le Docteur A. Haiahem Maître de Conférences à l'université de Annaba pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et d'accepter de faire partie du Jury.

Il m'est particulièrement agréable de remercier le Docteur E. Benhamza, Maître de Conférence, au Département de Chimie Industrielle, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du Jury.

Je remercie vivement le Docteur A. Belbali, Maître de Conférence, au Département de Génie Mécanique, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail et pour avoir accepté de faire partie du Jury.

Je remercie également monsieur A. Boukerchia, Chargé de Cours au sein du département de Génie Mécanique, pour ses précieux conseils.

Je suis également reconnaissant envers tous mes enseignants de graduation et de post-graduation.

Mes remerciements vont également à tout le personnel du Département de Génie Mécanique et du laboratoire LMS pour la contribution que chacun a pu m'apporter.

Enfin, je ne saurais oublier tous ceux qui, par leur amitié, m'ont aidé et encouragé au cours de la réalisation de ce modeste travail.

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES BUTEES HYDRODYNAMIQUES ET HYDROSTATIQUES	3
CHAPITRE II COMPOSITION CHIMIQUE ET COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DES HUILES LUBRIFIANTES	27
CHAPITRE III EQUATIONS GENERALES DE LA LUBRIFICATION PAR FLUIDE À RHEOLOGIE COMPLEXE	47
CHAPITRE IV FORMULATION DU PROBLEME DE LUBRIFICATION DANS LES BUTEES FLUIDES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	69
CHAPITRE V EFFETS DU PARAMETRE DES COUPLES DE CONTRAINTES SUR LE COMPORTEMENT DES BUTEES HYDROSTATIQUES ET HYDRODYNAMIQUES	87
CONCLUSION GENERALE	108
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	111
ANNEXE A	114
ANNEXE B	117
ANNEXE C	119
ANNEXE D	121
ANNEXE E	125
PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES	127
LISTE DES ILLUSTRATIONS ET DES TABLEAUX	129
TABLES DES MATIERES	132

Résumé

L'étude théorique développée dans le cadre de ce mémoire porte principalement sur la modélisation des problèmes de lubrification dans les butées hydrostatiques et hydrodynamiques lubrifiées par des huiles additivées dont le comportement rhéologique est non newtonien. Le modèle de fluide adopté dans la présente étude est celui de V. K. Stokes.

Le problème de lubrification est gouverné par l'équation de Reynolds modifiée obtenue à partir des équations de mouvement et de conservation de la masse dans les cas de fluides polaires incompressibles.

La méthode des éléments finis de Galerkin est utilisée pour la discrétisation spatiale de l'équation de Reynolds modifiée écrites en coordonnées cartésiennes et cylindriques afin de déterminer la répartition de pression dans le film d'huile. La connaissance du champ de pression permet de calculer les performances des butées fluides fonctionnant en régime de lubrification hydrostatique ou hydrodynamique.

L'analyse, basée sur la théorie des milieux continus de V. K. Stokes, montre que la prise en considération des couples de contraintes dûs à la présence des additifs dans le lubrifiant a des effets non négligeables sur le comportement statique des butées fluides surtout dans le cas des polymères caractérisés par de longues chaînes moléculaires. Par comparaison aux huiles newtoniennes, les huiles additivées permettent d'améliorer la capacité de charge des butées hydrodynamiques et de réduire la puissance dissipée des écoulements dans les butées hydrostatiques.

Mots clés :

Butées hydrostatiques

Butées hydrodynamiques

Fluides non newtoniens

Couple de contraintes

Rhéologie

Lubrification fluide

Théorie des milieux continus de V. K. Stokes.

Abstract

The theoretical study undertaken within this research work is mainly concerned with lubrication problems encountered in hydrostatic and hydrodynamic thrust bearings lubricated with polymerized lubricants whose rheological behaviour is non-Newtonian. The fluid model adopted in the present study is that of V. K. Stokes which takes into account the size of the macromolecules incorporated in the fluid.

The lubrication problem is governed by the modified Reynolds equation which is derived from the momentum and the mass conservation equations in the case of incompressible polar fluids.

The Galerkin finite element method is used for the spatial discretization of the modified Reynolds equation written in both cartesian and cylindrical coordinates in order to determine the pressure distribution in the oil-film.

The knowledge of pressure field allows the calculation of the performance characteristics of the fluid thrust bearings operating in hydrostatic or hydrodynamic lubrication regime.

Based on the V. K. Stokes micro-continuum theory, the analysis undertaken shows that the couple-stresses due to the presence of additives has significant effects on the steady-state performance characteristics of fluid thrust bearings specially for polymers characterized by long molecular chains. Compared to the Newtonian fluids, oils blended with polymer additives provide an enhancement in carrying capacity of hydrodynamic thrust bearings and a reduction of flows power dissipation in hydrostatic thrust bearings.

Key words:

Hydrostatic thrust bearings

hydrodynamic thrust bearings

Non-Newtonian fluids

Couple stresses

Rheology

Fluid lubrication

V. K. Stokes micro-continuum theory.

عنوان المذكرة: التحليل النظري و الرقمي لمجري السوائل ذات التصرف المركب في المنحرجات المحورية الهيدروستاتيكية و الهيدروديناميكية.

ملخص:

الدراسة النظرية المقدمة في إطار هذه المذكرة تتعلق أساسا على نمودجة مسائل تربيت المنحرجات الهيدروستاتيكية و الهيدروديناميكية المشحمة بزبوت القطبية أداها لآنيوتوني. نمودج السائل المتخذ في هذه الدراسة هو نمودج ف.ك. ستوكس (V. K. Stokes). مسألة التشحيم مقادة بمعادلة رينولدا المعدلة المتحصل عليها إيتدانا من معادلاتي الحركة و الاستمرارية للزبوت القطبية الغير قابلة للضغط.

إن طريقة العناصر المنتهية لقالركين (Galerkin) استعملت بغرض التقسيم الفضائي لمعادلة رينولدا المعدلة المكتوبة بالإحداثيات الديكارتية و الأسطوانية لأجل تعيين توزيع الضغط في شريط الزيت. معرفة توزيع الضغط تمكن من تقدير أداء المنحرجات الزيتية المشغلة على نظام التشحيم الهيدروستاتيكي أو الهيدروديناميكي.

التحليل، القائم على نظرية الأوساط المتصلة ل:ف.ك. ستوكس، يبين بأن أخذ بعين الاعتبار عزم المزدوج للعنوة الناتج عن وجود الإضافات في الزيت لديه فاعلية كبيرة على الأداء العتاتيكي للمنحرجات الزيتية خاصة في حالة البوليمير (polymères) المعروفة بالسلاسل الطويلة للجزيئات. بالمقارنة مع الزبوت النيوتونية، الزبوت القطبية تساعد على تحسين قوة الرفع للمنحرجات الهيدروديناميكية و تنقص القدرة المبذرة للجريان في المنحرجات الهيدروستاتيكية.

الكلمات المفتاحية :

المنحرجات الهيدروستاتيكية،

المنحرجات الهيدروديناميكية،

السوائل اللآنيوتونية،

العزم المزدوج للعنوة،

تصرف السوائل،

التشحيم السائل،

نظرية الأوساط المتصلة ل:ف.ك. ستوكس.

Introduction générale

Le rotor d'une machine tournante est un élément très important dont le rôle est de transmettre ou de transformer de la puissance. Dans un grand nombre d'applications, il est supporté par des paliers fluides qui ne doivent pas être considérés comme des éléments passifs, mais comme des éléments qui interviennent sur le comportement statique et dynamique de la ligne d'arbre, c'est-à-dire sur la capacité de charge, la vitesse critique et la stabilité. Ainsi, la connaissance des caractéristiques de ces paliers est indispensable pour la conception des machines tournantes telles que les turbomachines (pompes centrifuges, turbines, etc.).

La butée hydrostatique est constituée de deux surfaces fixes en regard, alors que la butée hydrodynamique est constituée de deux surfaces; l'une fixe appelée: grain fixe ou collet et l'autre mobile appelée : grain mobile. Ces deux surfaces sont séparées par un film d'huile. En régime hydrodynamique un champ de pression est engendré dans le film lubrifiant par le mouvement de rotation du grain mobile entraîné par l'arbre par rapport au collet. La force appliquée à l'arbre est la résultante des forces de pression. Cette résultante est modifiée par les caractéristiques du fluide lubrifiant. De nombreux additifs ou dopes sont rajoutés à la base du lubrifiant afin d'améliorer les performances de ce dernier tel que l'indice de viscosité. Ces additifs améliorants d'indice de viscosité (VI) sont des polymères (macromolécules) qui se caractérisent par de longues chaînes moléculaires et qui se classent en deux catégories: les copolymères hydrocarbonés et les polymères d'esters. Des études expérimentales ont montré que les huiles contenant des additifs de viscosité ont un comportement rhéologique non newtonien. Leur viscosité diminue quand le taux de cisaillement auquel elles sont soumises augmente. Ainsi, leur écoulement ne peut être décrit par la théorie des milieux continus classique qui néglige la taille des particules. Dans la littérature, il existe plusieurs théories permettant de décrire l'écoulement de ces fluides complexes appelés fluides avec couple de contraintes (couple-stresses fluids) pour lesquels des moments de contraintes s'ajoutent aux forces de surface. Parmi ces théories, la théorie de Vijay Kumar Stokes permet de tenir compte de la taille des particules en mouvement. L'application de cette théorie à l'étude de l'écoulement de films minces visqueux a permis de dériver une nouvelle forme de l'équation de Reynolds dite équation de Reynolds modifiée.

Cette étude a pour but d'étudier l'influence des propriétés rhéologiques des huiles lubrifiantes dopées sur les performances des butées fonctionnant en régimes de lubrification hydrostatique et hydrodynamique.

Le mémoire présentant ce travail comporte cinq chapitres, une introduction et une conclusion générale

Le premier chapitre fait l'objet d'un état de l'art sur les butées fluides. Les régimes de lubrification des faces sont tout d'abord passés en revue. La littérature traitant les différents types de butées est détaillée. Ce chapitre permet de dégager les principales caractéristiques géométriques et les conditions de fonctionnement nécessaires à la modélisation théorique du problème de lubrification dans les butées fluides

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude bibliographique sur les huiles lubrifiantes utilisées dans le graissage des machines industrielles et à la présentation et à la description des différents modèles rhéologiques proposés dans la littérature dans le but de choisir un modèle approprié pour décrire convenablement le comportement des huiles lubrifiantes contenant des additifs de viscosité. Parmi les modèles proposés, le modèle du fluide polaire a été retenu dans cette étude.

Le troisième chapitre est réservé à la présentation des équations générales de la lubrification hydrodynamique par fluides polaires non newtoniens, écrites en coordonnées cartésiennes et cylindriques et d'en déduire les performances statiques des butées fluides.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons la formulation des équations de la lubrification, établies dans le chapitre précédent, par la méthode des éléments finis. Dans un premier temps une formulation intégrale du problème de lubrification est construite par l'application du théorème des résidus pondérés de Galerkin. Ensuite, nous discrétisons l'équation intégrale associée à l'équation de Reynolds modifiée par la méthode des éléments finis.

Enfin, le cinquième chapitre est réservé à l'étude paramétrique permettant de mettre en évidence les effets de la rhéologie du fluide lubrifiant polaire sur le comportement statique des butées hydrostatiques et hydrodynamiques.

CHAPITRE I

Revue bibliographique sur les butées hydrodynamiques & hydrostatiques

1. Introduction :

La réalisation des grandes machines tournantes modernes, comme par exemple, les grandes turbines à axe vertical, n'a été rendue possible que grâce à la mise au point de butées à graissage hydrodynamique utilisées dans les centrales hydroélectriques (Figs I-1 et I-2) car les solutions classiques par rouleaux ou par billes ne pouvant convenir quand l'effort dépassait 10 MégaNewtons.

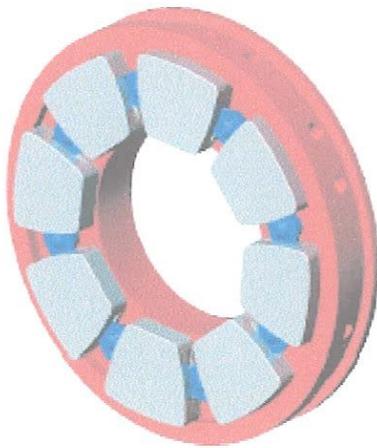


Fig. I-1: Butée hydrodynamique

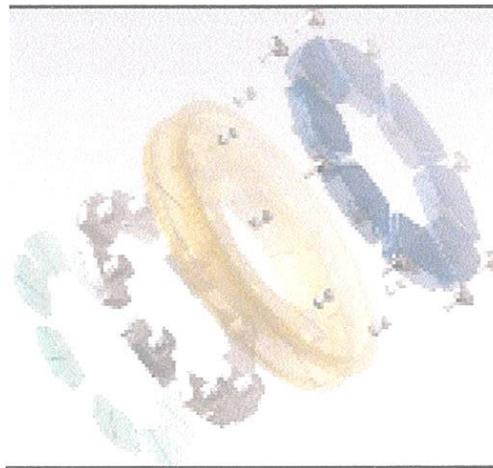


Fig. I-2: Vue éclatée d'une butée hydrodynamique.

On doit à Michell (Ingénieur Australien) de s'être souvenu de la théorie de Reynolds pour résoudre le problème du support des fortes charges au moyen de patins articulés [1]. Par la suite, des améliorations progressives sont apportées à ces butées pour répondre aux problèmes technologiques tels que l'augmentation de la température de fonctionnement, des charges appliquées et des vitesses de rotation dues à l'accroissement des puissances des machines tournantes modernes (thermiques, hydrauliques, électriques ou hydroélectriques). Les paliers habituellement utilisés dans l'industrie peuvent être réalisés :

- en conservant un contact entre les deux surfaces (paliers non lubrifiés);
- en introduisant des billes ou des rouleaux entre les deux surfaces (roulements);
- en interposant un film entre les deux surfaces (paliers lubrifiés ou fluides).

Le lubrifiant utilisé pour les roulements et les paliers lubrifiés peut être solide (graphite, bisulfure de molybdène MoS₂), semi-solide (ou plastique, ex : graisse) ou liquide (huiles minérales, synthétiques, etc.). Les modes d'application du lubrifiant sont divers : circulation, brouillard, bain, graissage à vie, imprégnation d'un coussinet poreux, etc.

Les paliers fluides peuvent être classés en considérant le type de fluide utilisé et le mode de formation du film :

- Hydrodynamique (palier à film liquide);
- Hydrostatique (palier à liquide pressurisé de l'extérieur);
- Aérodynamique (palier à gaz);
- Aérostatique (palier à gaz pressurisé de l'extérieur).

2. Différents régimes de lubrification

Si à l'œil nu les surfaces paraissent en parfaite rectitude, la réalité est tout autre. Des défauts de forme aux défauts de troisième ordre qui caractérisent la rugosité emplissent ces surfaces et seront la cause d'une usure prématurée ou un suréchauffement anormal dans tout mécanisme qui serait composé de pièces ayant une telle qualité de surface. La lubrification est concernée par ce genre de surface et autre contact de solides en mouvement relatif et entre lesquels s'intercale un film mince visqueux (Fig. I-3).

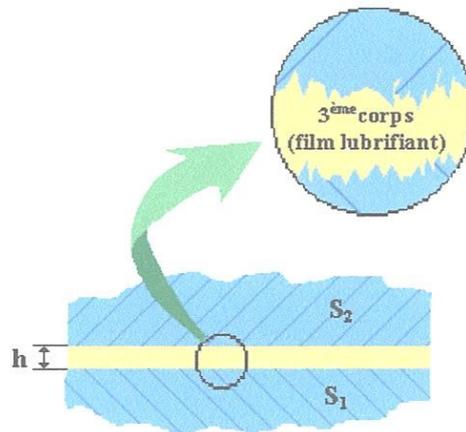


Fig. I-3: Schéma d'un contact lubrifié.

Il est commode de présenter les différents types de lubrification à partir de la courbe de variation du frottement en fonction de la vitesse. Quelque soit le contact lubrifié à basse pression ou à haute pression (contacts rencontrés dans les engrenages et les roulements), cette courbe dite courbe de Stribeck (1902) a toujours la même allure (Fig. I-4). On distingue trois zones qui correspondent

chacune à un type de lubrification dont la nature dépend aussi de la pression régnant dans le contact [2].

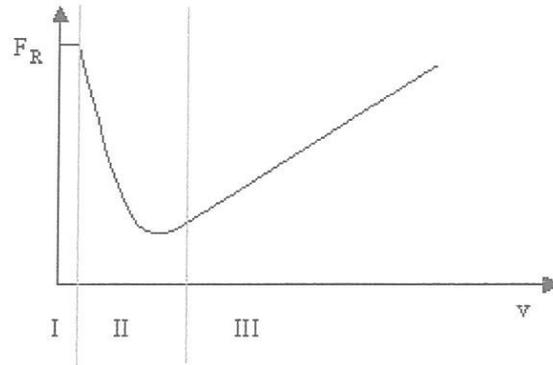


Fig. I-4: Diagramme de Stribeck

2.1. Contacts à basse pression ($0.1 < P < 50\text{MPa}$)

Lubrification limite : Zone (I)

Le graissage limite ou onctueux est le régime où le film lubrifiant est rompu et que seules des molécules de lubrifiant adsorbées aux surfaces métalliques réduisent le frottement (Fig. I-5), mais sans pouvoir empêcher les aspérités des surfaces de venir en contact, et de créer des microsoudures suivies d'arrachements de métal. L'épaisseur de la couche moléculaire (epilamen) est de l'ordre de 100 \AA à 500 \AA et la valeur du coefficient de frottement s'échelonne entre 0.05 et 0.15. Ce type de lubrification est rencontré lors du démarrage du moteur, c'est à ce moment qu'il se produit l'usure la plus importante car les surfaces ne sont pas complètement séparées. Dans ces conditions, l'onctuosité est la propriété prédominante du lubrifiant.

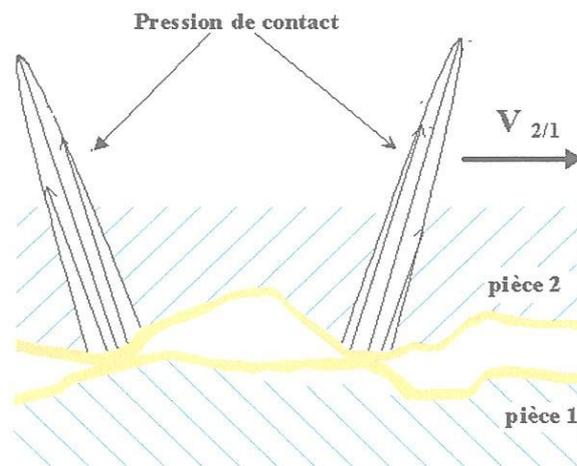


Fig. I-5: Schéma d'un contact lubrifié en régime limite.

Lubrification mixte : Zone (II)

Il s'agit d'un régime de transition dans lequel la lubrification hydrodynamique ou fluide prend progressivement de l'importance et tend à séparer les surfaces qui restent encore en contact sur une partie de leurs aspérités (fig. I-6).

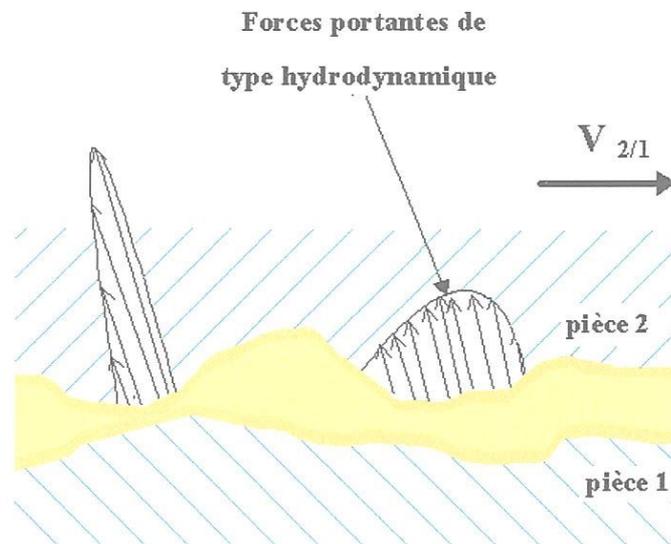


Fig. I-6: Régime mixte.

Lubrification hydrodynamique ou fluide : Zone (III)

La Lubrification hydrodynamique est le régime où un film lubrifiant sépare complètement les surfaces en mouvement et empêche par conséquent tout contact solide entre elles (Fig.I-7, 8).

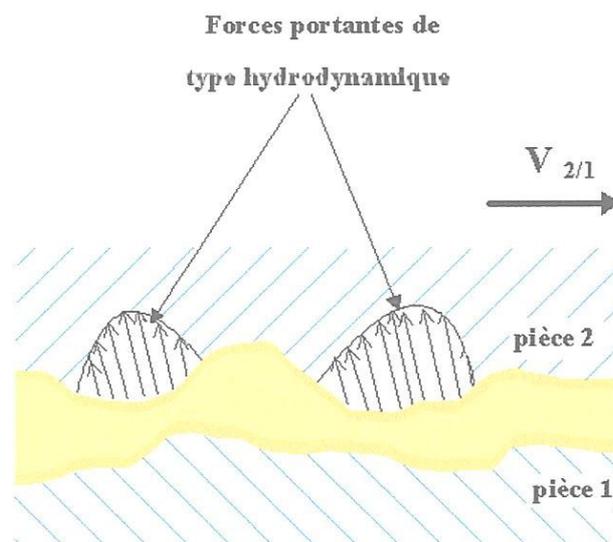
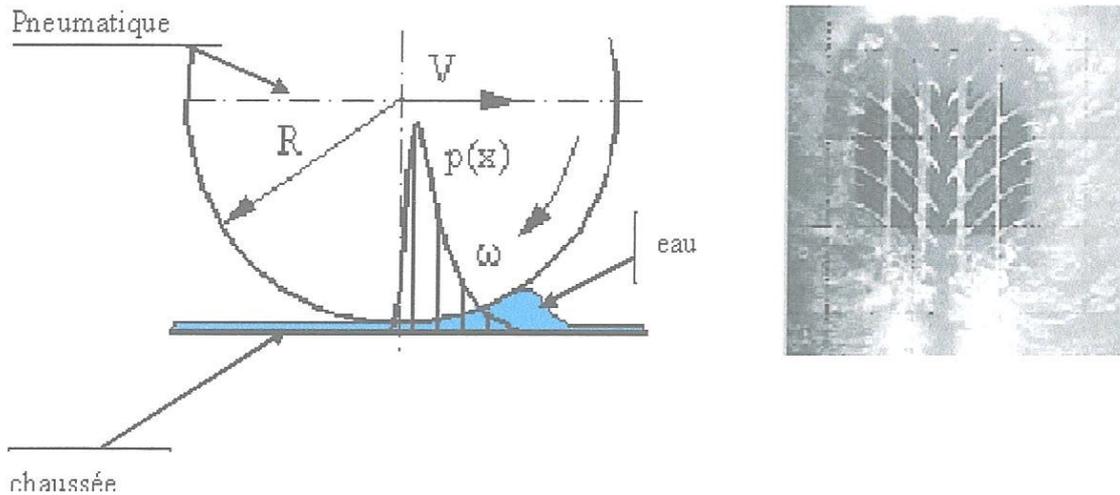


Fig. I-7: Schéma d'un contact lubrifié en régime hydrodynamique.



*Fig. I-8: Exemple de contact hydrodynamique : Pneumatique-Chaussée
(Aquaplaning des roues d'automobile sur chaussée humide)*

2.2. Contacts à haute pression (jusqu'à 3GPa)

Ce sont les contacts hertziens lubrifiés rencontrés dans certains éléments de machines tels que les roulements et les engrenages.

Zone (I)

Correspond à la lubrification extrême pression (EP), les surfaces sont protégées par des films formés par réaction chimique des additifs EP contenus dans l'huile et activés par les pressions, les contraintes de cisaillement et les températures existants dans le contact. Le coefficient de frottement est de 0.02 à 0.2.

Zone (II)

C'est la zone de transition entre la lubrification extrême pression et la lubrification élasto-hydrodynamique qui correspond à la zone (III) du diagramme de Stribeck.

Zone (III)

La lubrification EHD (elastohydrodynamique) concerne les contacts lourdement chargés pour lesquels la pression engendrée dans le film lubrifiant est suffisamment élevée pour déformer élastiquement les surfaces et modifier le comportement rhéologique du lubrifiant. Ce type de contact correspond au contact entre les bagues et les éléments roulants d'un palier de roulement à billes ou à rouleaux. Dans ce type de lubrification, on est en présence de deux effets (Fig. I-9) :

- Effet hydrodynamique;
- Effet des déformations élastiques des solides formant le contact.

Le coefficient de frottement est de 10^{-2} à 8×10^{-2} .

En régime isotherme, la lubrification élasto-hydrodynamique est gouvernée par les équations suivantes [2] :

- Equation de Reynolds pour déterminer la pression dans le film lubrifiant;
- Equation de l'élasticité linéaire pour calculer les déformations élastiques des surfaces;
- Lois de variation viscosité-pression pour déterminer la variation de la viscosité du fluide en fonction de la pression.

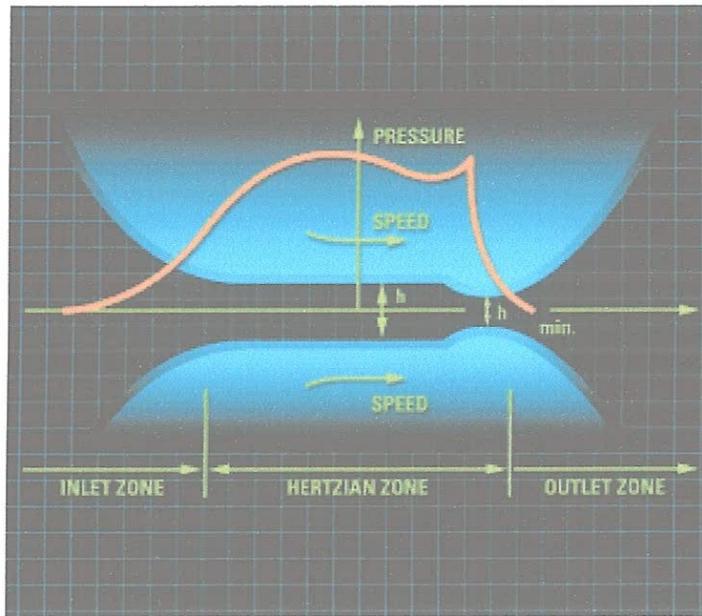


Fig. I-9: Profil de pression dans un contact hertzien

3. Différents types de butées fluides

Les butées ont pour rôle de transmettre les charges de l'arbre tournant aux fondations ou aux supports de la machine. Les butées hydrodynamiques transmettent la charge sur un film d'huile qui s'auto renouvelle. La machine et la butée peuvent être classées horizontales ou verticales en fonction de l'orientation de l'arbre. La butée axiale, ou palier axial (thrust bearing) est destinée à recevoir des charges axiales.

Les butées fluides se classent en trois catégories :

- butée hydrodynamique;
- butée hydrostatique;
- butée hybride.

3.1. Butées hydrodynamiques

Le mécanisme de lubrification hydrodynamique est relativement simple à atteindre dans les paliers radiaux seulement en fournissant un jeu radial, du moment que l'arbre est placé excentriquement sous charge, ceci donne la zone de convergence du film. Dans les butées axiales un film convergent est difficile à générer, parce qu'une géométrie entièrement plane n'est pas aussi efficace; donc, la butée doit être divisée en secteurs (patins) ayant une capacité de charge (portance). La figure I-10 donne la géométrie d'une butée à géométrie fixe. Les rainures radiales séparent les patins adjacents et assurent l'entrée et la sortie du fluide lubrifiant de chaque secteur.

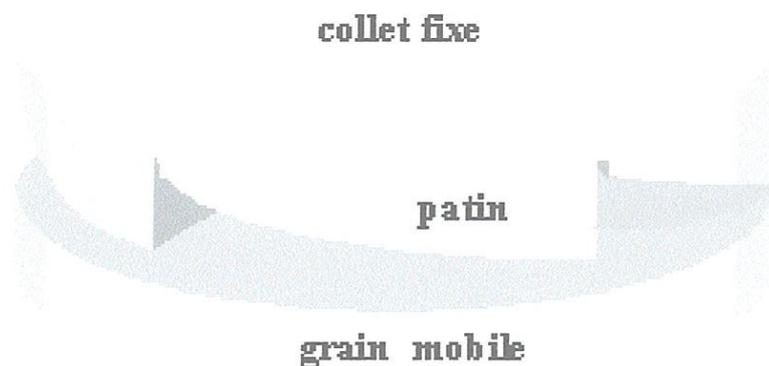


Fig. I-10: Schématisation d'une butée à patins fixes

3.1.1. Patins rectangulaires plans fixes

Une hypothèse idéale utile est que la charge d'une butée axiale est distribuée uniformément sur tous les patins. Donc, la charge d'un patin est obtenue en divisant la charge totale par le nombre de patins. Chaque patin a la forme d'un secteur circulaire, comme le montre la figure I-11 ou I-12. Une seconde hypothèse simplificatrice peut être formulée, à savoir le remplacement de l'actuel secteur circulaire par un secteur rectangulaire (figure I-12a) [3].

Les données de conception peuvent, donc, être présentées sous une forme générale et pour une utilisation générale. Evidemment, le remplacement du patin circulaire par le patin rectangulaire conduit à commettre des erreurs; cependant, elles sont petites et, donc, acceptables, à l'exception des géométries spéciales (butées ayant un grand rapport D_o/D_i et/ou incluant un petit nombre de patins).

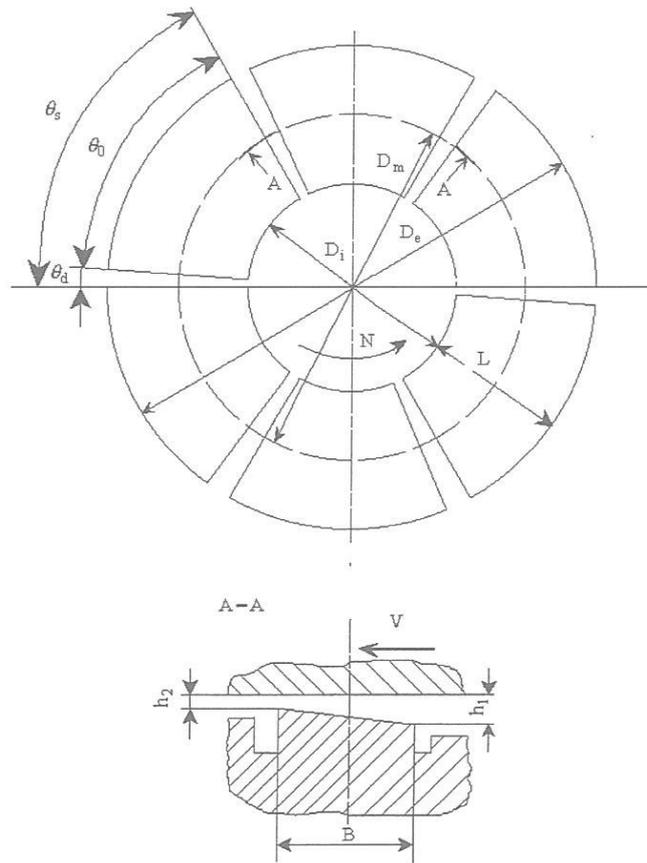


Fig.-I-11: Schéma d'une butée hydrodynamique à géométrie fixe et notations

• *Caractéristiques géométriques :*

Les données géométriques pour une butée axiale (fig. I-12 et I-13) sont :

- Diamètre extérieur : D_e ;
- Diamètre intérieur : D_i ;
- Rayon moyen du patin : $R_m = \frac{D_e + D_i}{4}$;
- Largeur du patin équivalent : $L = \frac{D_e - D_i}{2}$;
- Angle du patin (incluant la rainure radiale) : θ_s ;
- Angle effectif du patin (amplitude angulaire du patin) : θ_0 ;
- Angle de la rainure entre 2 patins adjacents : θ_d ;
- Longueur du patin équivalent (longueur de l'arc du secteur à la position de rayon moyen; R_m): $B = R_m \theta_0$;
- Nombre de patins : n_s .

Le film lubrifiant est défini par :

- Epaisseur d'entrée du film hydrodynamique : h_1 ;
- Epaisseur de sortie, qui est aussi l'épaisseur minimale du film : h_2 .

Les rapports géométriques caractéristiques sont :

- Le rapport de la forme du patin : $\frac{L}{B}$;
- Le rapport de l'épaisseur du film : $\frac{h_1}{h_2}$.

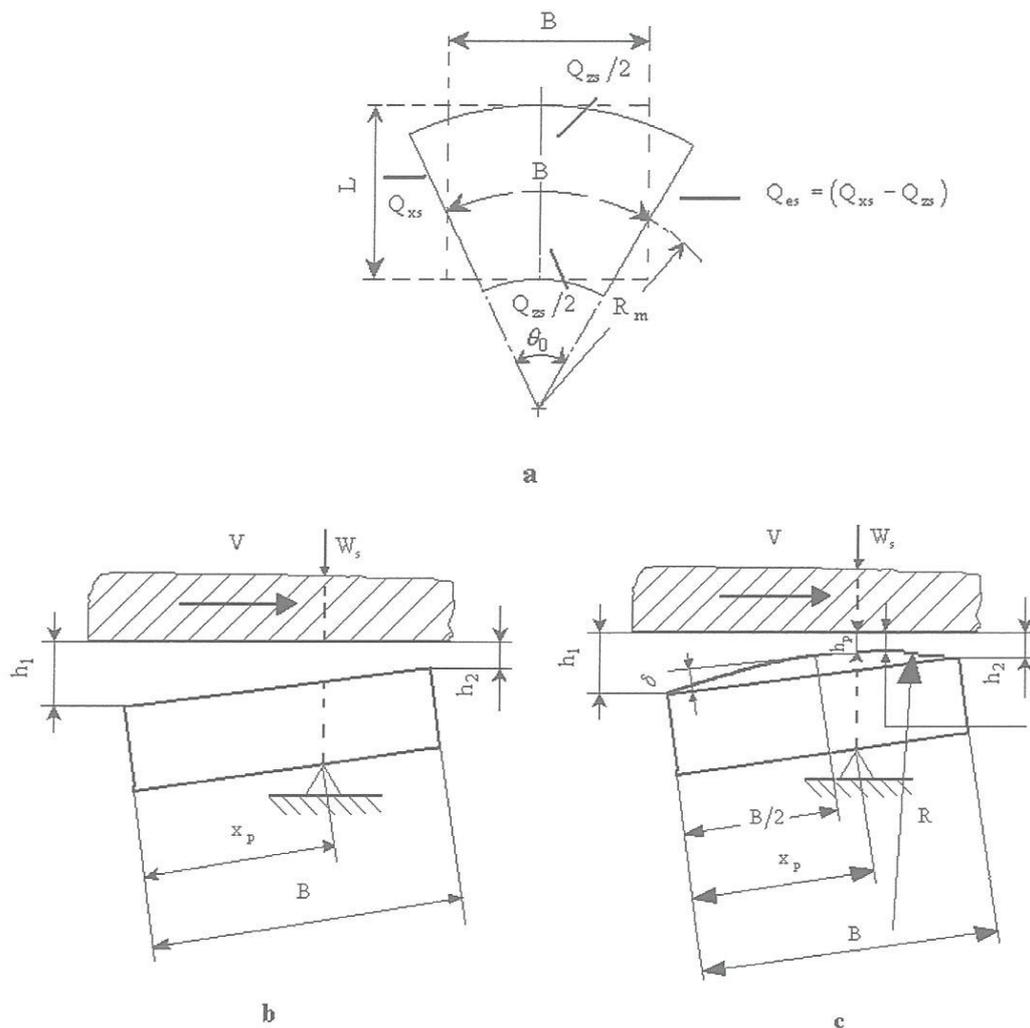


Fig. I-12: Paramètres géométriques pour un patin rectangulaire équivalent :

a) Patin rectangulaire équivalent; b) Patin rectangulaire plan; c) Patin rectangulaire courbe.

• *Caractéristiques cinématiques :*

- Vitesse angulaire du membre tournant : ω (rd/s);

- Nombre de tours par minute : $n = \frac{30\omega}{\pi}$ (rpm).
- Nombre de tours par seconde : $N = \frac{\omega}{2\pi}$ (tr/s);
- Vitesse tangentielle pour un patin équivalent (vitesse de rotation au rayon moyen).:
 $V = 2\pi NR_m = \pi ND_m$ (m/s).

• *Caractéristiques de fonctionnement :*

Dans le but d'obtenir les caractéristiques de fonctionnement pour la butée entière, les caractéristiques de fonctionnement d'un patin individuel doivent être multipliées par le nombre de patins n_s . Les caractéristiques de fonctionnement essentielles d'un patin sont :

- Charge d'un patin individuel : W_s ;
- Force de frottement : F_s ;
- Débit d'entrée : Q_{xs} ;
- Débit de fuite radiale : Q_{zs} ;
- Débit de sortie dans la direction circonférentielle (longitudinale) : $Q_{es} = (Q_{xs} - Q_{zs})$.

Les coefficients sans dimension essentiels d'un patin individuel sont définis comme suit :

$$- \text{ Nombre de Sommerfeld : } S_s = \frac{\mu V L B^2}{W_s h_2^2} . \quad (\text{I-1})$$

$$- \text{ Force de frottement sans dimension : } \tilde{F}_s = \frac{F_s h_2}{\mu V L B} . \quad (\text{I-2})$$

$$- \text{ Débit d'entrée sans dimension : } \tilde{Q}_{xs} = \frac{Q_{xs}}{V L h_2} . \quad (\text{I-3})$$

$$- \text{ Débit de fuite radiale sans dimension : } \tilde{Q}_{zs} = \frac{Q_{zs}}{V L h_2} . \quad (\text{I-4})$$

Les valeurs numériques des paramètres sans dimension susmentionnés pour différents rapports L/B et h_1/h_2 peuvent être consultées dans la référence [3]. On peut trouver, en examinant ces valeurs,

qu'une valeur optimale pour le rapport h_1/h_2 existe, conduisant à une capacité de charge maximale quand l'épaisseur minimale du film est laissée constante. Le rapport optimal est légèrement dépendant du rapport de forme du patin, l'ordre de grandeur de ce rapport d'épaisseur de film est proche de 2.

3.1.2. Glissière plane rectangulaire à pivot

Les patins oscillants autour d'un point ou d'un axe peuvent conduire à un meilleur fonctionnement du système, puisqu'ils peuvent s'adapter facilement au changement de conditions de fonctionnement (charge et vitesse) ainsi qu'aux défauts de mésalignement et des déformations élastiques et thermoélastiques. Les données géométriques additionnelles sont :

- Position du pivot : x_p (position du point oscillant par rapport au bord d'entrée) montrée en figure I-12b;
- Epaisseur du film à la position du pivot : h_p .

Les rapports sans dimension correspondants sont :

- Le rapport de position : $\frac{x_p}{B}$;
- Le rapport de l'épaisseur du film : $\frac{h_p}{h_2}$.

Notons que pour un fonctionnement satisfaisant, il est nécessaire de satisfaire la condition :

$$0.5 < \frac{x_p}{B} < 1. \quad (I-5)$$

En plus des caractéristiques sans dimension du patin définies précédemment (I 1) (I 4), un autre ensemble de paramètres peut être défini par rapport à l'épaisseur du film h_p calculée au pivot où la charge du patin est localisée; à savoir :

- Nombre de Sommerfeld : $S_{sp} = \frac{\mu V L B^2}{W_s h_p^2}$. (I-6)

- Force de frottement sans dimension : $\tilde{F}_{sp} = \frac{F_s h_p}{\mu V L B}$. (I-7)

- Débit d'entrée sans dimension : $\tilde{Q}_{xsp} = \frac{Q_{xs}}{V L h_p}$. (I-8)

- Débit de fuite radiale sans dimension : $\tilde{Q}_{zsp} = \frac{Q_{zs}}{V L h_p}$. (I-9)

Les valeurs numériques pour les paramètres sans dimension x_p/B et h_p/h_2 , ainsi que ceux définis par les équations (I.1) à (I.4) sont aussi données dans la même référence [3]. Notons que les caractéristiques de fonctionnement pour un patin rectangulaire oscillant et pour un patin plan rectangulaire à pente fixe sont identiques si la charge passe par la position du pivot

3.1.3. Patin rectangulaire courbe pivotant

Une glissière plane doit avoir une position non symétrique du pivot pour être en mesure de fonctionner; c'est à dire, $0.5 < (x_p/B) < 1$. Cette condition rend impossible le fonctionnement d'une butée axiale dans les deux sens de rotation. La possibilité de fonctionnement dans les deux sens de rotation (cas des arbres d'hélices de bateaux) peut être atteinte seulement quand $x_p/B = 0.5$. Pour une glissière plane non déformable: $W_s \rightarrow 0$ pour $x_p/B = 0.5$, alors aucun film ne peut être généré ni maintenu. En effet, beaucoup de butées axiales constituées de patins rectangulaires équivalents dont le rapport $x_p/B = 0.5$ peuvent générer un film fluide, car la géométrie idéale ne peut être maintenue durant le fonctionnement.

Les facteurs essentiels additionnels impliqués, permettant à l'effet hydrodynamique de s'établir, sont les déformations thermoélastiques du patin chargé. Il en résulte que le patin initialement plan devient courbe permettant à un film convergent divergent de se développer entre les deux surfaces lubrifiées. Un tel patin doit, évidemment, voir ses performances diminuer, par exemple; une capacité de charge égale à 40% de celle du patin déterminé pour la position optimale.

La deuxième amélioration pour assurer la réversibilité, mais avec de meilleures performances est d'utiliser un patin courbe, comme celui montré en figure I-12c, ce type de patin est parfois appelé: **lenticulaire**. Les caractéristiques des patins rectangulaires courbés cylindriquement sont très proches de celles des patins plans fonctionnant à la position x_p/B appropriée pour la même valeur d'épaisseur minimale du film. Les débits dans les deux sens sont plus grands pour le patin courbe.

Il est à noter que le patin courbé cylindriquement doit être placé en prenant en compte la direction de la vitesse tangentielle (figure I-12c). En effet, quand la convexité est placée dans la direction perpendiculaire à la vitesse (c'est à dire; suivant l'axe z), l'effet de courbure n'est pas favorable à la formation du film. Un effet négatif est produit par une courbure négative dans toute direction. Les patins courbés sphériquement (double courbure) ont des performances moindres comparées à ceux courbés cylindriquement.

- *Caractéristiques géométriques :*

En plus des données géométriques définies pour les glissières planes, les patins lenticulaires sont caractérisés par :

- Rayon de courbure : R (patin courbé cylindriquement);
- Déflexion à la demi- longueur B du patin : δ .

Le film lubrifiant assure une forme convergente-divergente; donc, l'épaisseur minimale du film h_{\min} ne coïncide plus avec l'épaisseur à la sortie h_2 . Les nouvelles données sans dimension sont : δ/h_{\min} , δ/h_2 , h_{\min}/h_2 .

- *Caractéristiques de fonctionnement :*

Les caractéristiques principales de fonctionnement du patin peuvent être définies d'une manière similaire à celles du patin plan, avec la seule différence que, naturellement, l'épaisseur h_2 est remplacée par h_{\min} . Les données géométriques et les caractéristiques principales de fonctionnement pour les patins courbés cylindriquement sont données dans la référence [3].

3.1.4. Butées axiales avec patins plans fixes

Une analyse plus précise requiert la considération de la forme réelle du secteur du patin; c'est-à-dire sans remplacer le patin réel par un patin rectangulaire équivalent.

- *Caractéristiques géométriques :*

Les paramètres géométriques sont ceux définis en § 3-1-1, à savoir : n_s nombre de patins; θ_s - angle du patin; D_e/D_i rapport du diamètre extérieur au diamètre intérieur (fig. I-9); $m = \frac{h_1 - h_2}{B}$ pente de la surface du patin.

- *Caractéristiques de fonctionnement :*

Les coefficients sans dimension pour la butée totale peuvent être définis de la même manière que pour les patins équivalents individuels, à savoir pour la charge totale W, perte de puissance par frottement H_f ; débit d'entrée Q_x , débit radial Q_z . Donc, les coefficients sans dimension suivants peuvent être utilisés :

- Nombre de Sommerfeld : $S_m = \frac{\mu D_i^2 V}{W_m^2}$ (I-10)

- Coefficient de dissipation sans dimension : $\tilde{H}_f = \frac{H_f}{mD_iNW}$ (I-11)

- Débit à l'entrée sans dimension : $\tilde{Q}_x = \frac{Q_x}{mD_i^3N}$ (I-12)

- Débit radial de fuite sans dimension : $\tilde{Q}_z = \frac{Q_z}{mD_i^3N}$ (I-13)

3.1.5. Butées axiales à poches

La figure I-13 donne la géométrie de ce type particulier de butée qui est différente de celle des butées à patins échelon. Les poches avec un angle au centre θ_b joue le rôle d'un réservoir accumulant la pression. La distribution de la pression est montrée sur la fig. I-13c. Par comparaison aux butées hydrodynamiques standards, cette butée conduit à de faibles pertes de puissance à des vitesses élevées.

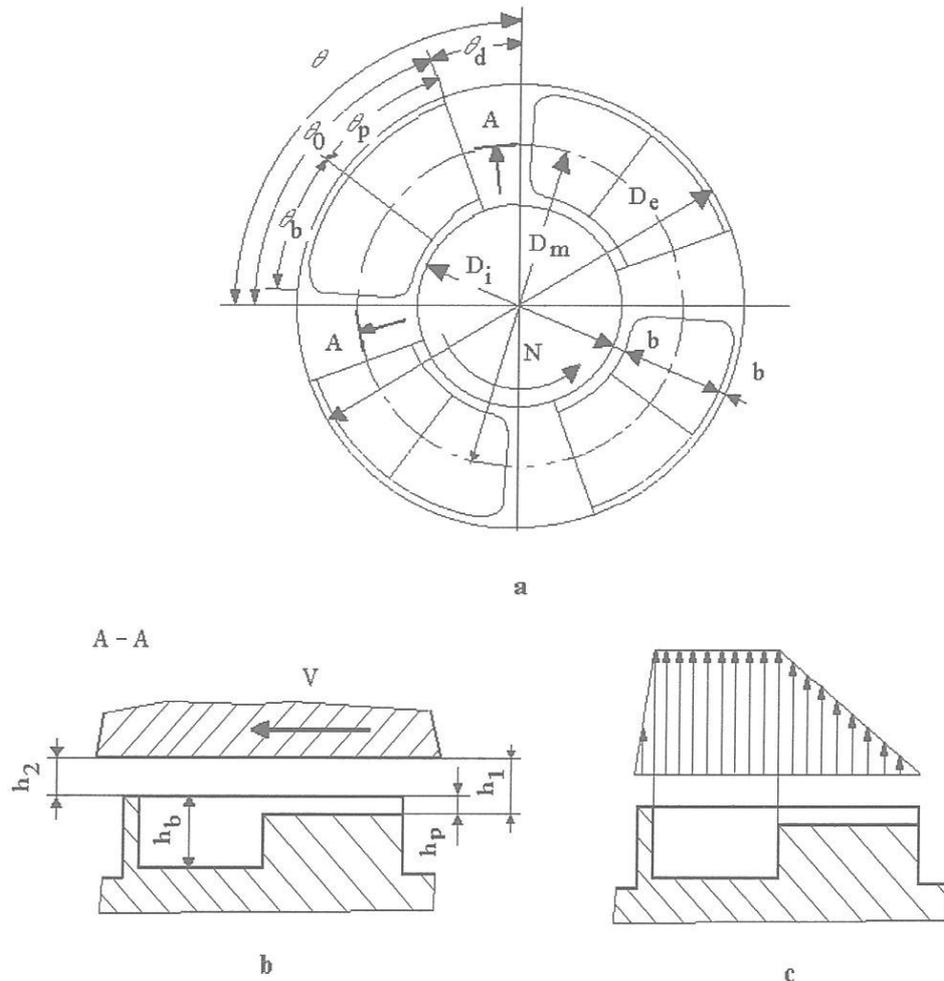


Fig. I-13: a) Butée axiale à poche; b) Paramètres géométriques; c) Distribution de la pression dans la direction circonférentielle.

- *Caractéristiques géométriques :*

Les diamètres D_e , D_i , D_m ont la même signification que précédemment ainsi que les angles θ , θ_0 et θ_d .

Les données géométriques additionnelles sont :

- La largeur de la portée b ; il est recommandé : $b \approx 0.05(D_e - D_i)$; (I-14)
- L'angle au centre de la poche, θ_b ;
- L'angle au centre de la portée, θ_p

Les épaisseurs de films h_1 et h_2 ont le même sens qu'avant, c'est-à-dire l'épaisseur maximale et minimale du film fluide.

- La profondeur de la portée, $h_p = h_1 - h_2$; (I-15)

- La profondeur de la poche, h_b qui est plus grande que h_p : $h_b \gg h_p$; (I-16)

- *Caractéristiques de fonctionnement :*

Les performances de fonctionnement sans dimension sont définies d'une manière similaire à celles des butées à géométrie fixe, c'est à dire les formules (I-1)- (I-4) restent valables.

3.1.6. Butées axiales à rainures spirales

Les rainures obliques d'une surface conduisent à un pompage transversal qui peut être utilisé pour produire l'effet hydrodynamique.

- *Caractéristiques géométriques :*

Dans ce genre de butées, les rainures spirales remplacent les rainures radiales entre deux patins adjacents et, donc, éliminent les chutes de pression et la perte de capacité de charge qui l'accompagne. En conséquence, l'aire annulaire totale (figure I-14), c'est-à-dire l'aire comprise entre les rayons r_e et r_i est active et contribue à porter la charge. Les données de conception suivantes se réfèrent à la géométrie de la figure I-14 :

- rayon externe : r_e ;
- rayon interne : r_i ;
- rayon limitant l'aire rainurée : r_c ;
- angle de la rainure spirale : β ;
- angle correspondant à la paire rainure- arête : $\Delta\theta$.

Les notations de l'épaisseur du film sont :

- épaisseur du film dans la spirale : h_g ;
- épaisseur du film dans l'arête : h_r .

Les paramètres additionnels sont :

- rapport du rayon intérieur au rayon extérieur : $\bar{r} = r_i/r_e$;
- rapport de la longueur de l'arête à la longueur de la paire rainure-arête : α (supposé égale à tout rayon r);

- rapport de la largeur rainurée à la largeur totale annulaire : $\bar{Y} = \frac{r_e - r_c}{r_e - r_i}$; (I-17)

- rapport épaisseur du film dans la rainure / épaisseur du film dans l'arête : $\bar{\Gamma} = \frac{h_g}{h_r}$. (I-18)

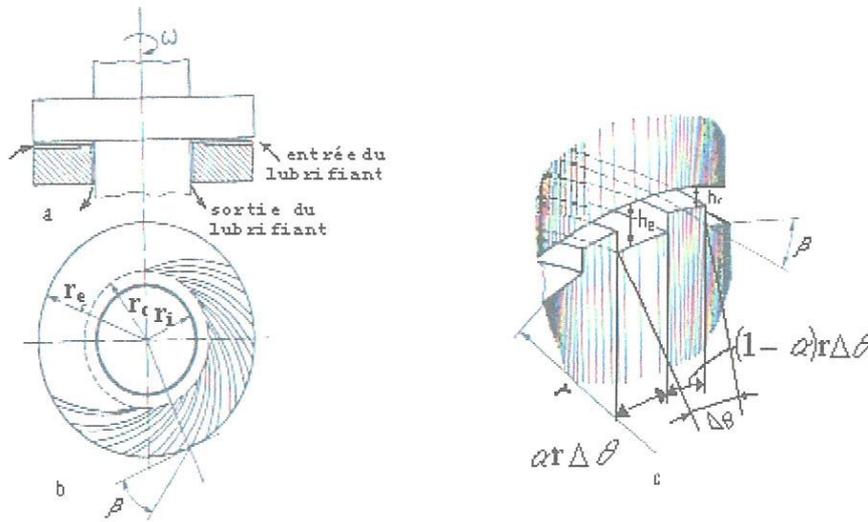


Fig. I-14: Butée axiale à rainure spirale.

• *Coefficients de fonctionnement :*

- Coefficient de charge sans dimension : $\bar{W} = \frac{Wh_r^2}{\mu\omega r_e^4}$ (I-19)

- Coefficient de rigidité : $\bar{K} = \frac{Kh_r^3}{\mu\omega r_e^4}$ (I-20)

- Coefficient d'amortissement : $\bar{B} = \frac{Bh_r^3}{\mu\omega r_e^4}$ (I-21)

- Couple de friction : $\bar{M}_f = \frac{M_f h_r}{\pi\mu\omega r_e^4}$ (I-22)

$$\text{- Débit radial : } \bar{Q}_r = \frac{Q_r}{h_r \omega_e^2}. \quad (\text{I-23})$$

3.1.7. Butées axiales à patins oscillants

Les butées axiales (Fig. I-15) à patins oscillants sont largement utilisées, beaucoup plus que les paliers radiaux à patins oscillants. La gamme des applications s'étend des dimensions modérées aux grandes. L'analyse, pour un grand nombre de patins n_s , peut être réalisée d'une façon satisfaisante en usant des données dans §§ 3.1.2 et 3.1.3. Quand le nombre de patins est relativement petit et/ou le rapport des diamètres est grand, dans ce cas une analyse numérique directe, en prenant en compte la géométrie réelle des patins, est plus appropriée. Comme pour d'autres exemples précédents il n'y a pas de méthode générale d'analyse qui peut être présentée dans ce dernier cas. Donc, une conception basée sur des diagrammes ou tableaux peut être réalisée seulement quand chaque patin est remplacé par un patin rectangulaire équivalent. Chaque patin peut être plan ou courbe (cylindriquement ou sphériquement).

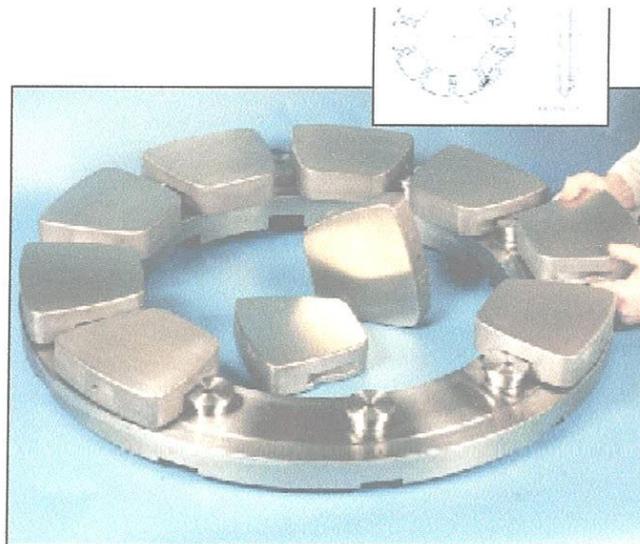


Fig. I-15: Photographie d'une butée à patins oscillants.

Un des points clés de la conception est la sélection rationnelle du rapport de forme du patin L/B et du nombre de patins n_s . Les recommandations précédentes (§ 3.1.3) pour les butées à géométrie fixe restent valables, en plus, il est recommandé d'augmenter le nombre de patins quand de grandes valeurs du rapport de forme du patin L/B sont choisies. Les valeurs généralement admises pour le rapport L/B sont très proches de 1. Pour de telles butées la relation entre la charge W , le diamètre de l'arbre D_a , le nombre de patins n_s et la largeur du patin L est illustrée en référence [3].

frottement saccadé est supprimé. La seule résistance au mouvement est due à la viscosité du lubrifiant;

- la pression est distribuée sur une grande surface, il n'y a pas de concentration de pression;
- comme la portance ne résulte pas du mouvement des surfaces, l'effet des imprécisions d'usinage est atténué surtout dans le cas des liquides.

Leur principal inconvénient est la nécessité de l'installation d'organes spécifiques tels que, pompes, capillaires, orifices et autres résistance hydraulique, etc. d'où leurs encombrement et leur cherté.

3.4. Différents types de butées hydrostatiques

Dans la plupart des butées hydrostatiques, la distribution de la pression peut être déterminée à l'aide du modèle simple suivant : la pression constante dans la surface de l'alvéole est connectée à la diminution linéaire de la pression (entre la pression de l'alvéole et la pression atmosphérique) sur la surface d'épaisseur de film h constante (Fig. I-17a et b), alors la charge (résultant de la pression) et le débit peuvent être facilement estimés. Les erreurs sont petites (inférieures à 10%) si les surfaces sont sous forme de bandes étroites [2]. Dans le cas des butées fonctionnant avec des patins indépendants, chaque patin peut être remplacé par un patin rectangulaire équivalent.

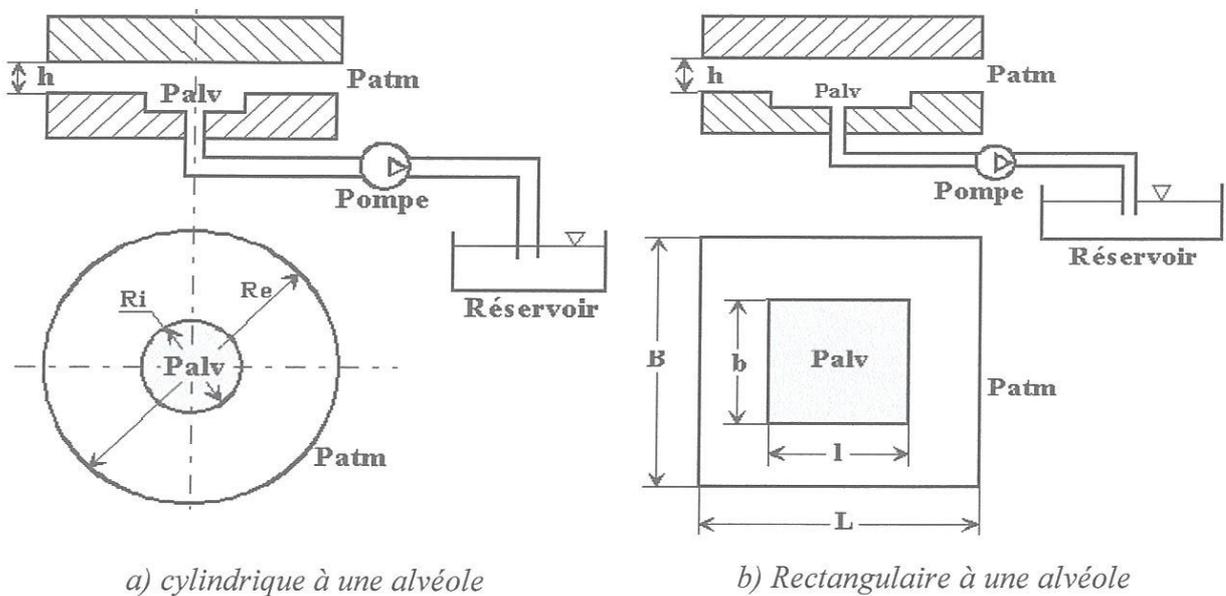


Fig. I- 17: Butées hydrostatiques.

Des erreurs plus grandes sont associées à de telles procédures quand l'écoulement sur la surface du patin est longitudinal et radial, exemple : butée axiales avec un grand rapport D_e/D_i , patins avec plus d'une alvéole et, finalement, quand l'épaisseur du film n'est pas constante (dans les butées non symétriquement chargées, ou dû aux déformations thermoélastiques, etc.). De telles situations

spéciales nécessitent un traitement plus précis, soit par l'utilisation des méthodes numériques ou à l'aide de l'analogie électrique. Malheureusement, le grand nombre de paramètres engagés, comme pour les très grandes variétés de conception fait qu'il est impossible d'élaborer des méthodes générales d'analyse. Pour cette raison, seulement des exemples typiques seront présentés.

La conception de butées hydrostatiques, en plus, implique le choix d'un système de compensation (restricteurs) et la conception d'un système d'approvisionnement approprié. Dans les butées hydrostatiques, l'écoulement du lubrifiant est plus important. En conséquence, l'entière chaleur dissipée est évacuée par le lubrifiant.

3.4.1. Butées axiales avec patins indépendants

L'utilisation d'un nombre de patins individuels avec fonctionnement indépendant mène à un meilleur comportement de la butée vis-à-vis des charges mésalignées. Chaque patin est muni d'une alvéole d'alimentation est d'un restricteur. Le chargement, la pression dans l'alvéole et l'épaisseur du film peuvent, donc, varier d'un patin à l'autre, ce qui équilibre la où les charges (couples) totales.

L'inconvénient principal de cette configuration est la réduction de la capacité de charge, puisque deux patins adjacents ne sont pas séparés par une rainure où la pression peut décroître jusqu'à la pression atmosphérique.

L'analyse est relativement simple et est réalisée pour chaque patin. Si le fonctionnement des patins est identique (patins identiques, charge uniforme), alors les caractéristiques globales sont obtenues en multipliant les caractéristiques du patin par le nombre de patins n_s [4]. Quand le chargement n'est pas uniforme, alors les caractéristiques globales résultent de la sommation des valeurs individuelles des patins.

3.4.2. Butées axiales avec poches multiples

Les butées axiales hydrostatiques peuvent être conçues sans patins indépendants, c'est-à-dire sans rainure entre les patins adjacents, comme montré schématiquement en fig. I-18. De telles conceptions mènent à une amélioration de la capacité de charge (comparée à une conception similaire, mais engageant des patins séparés).

L'analyse, dans ce cas, est plus difficile et ne peut être faite que numériquement ou avec l'aide de l'analogie numérique. Une simple analyse grossière peut, cependant, s'effectuer de la manière suivante : les alvéoles individuelles sont remplacées par une alvéole continue, tel un anneau comme en fig. I-18 (en trait discontinu), l'analyse peut se faire comme pour une coulisse équivalente.

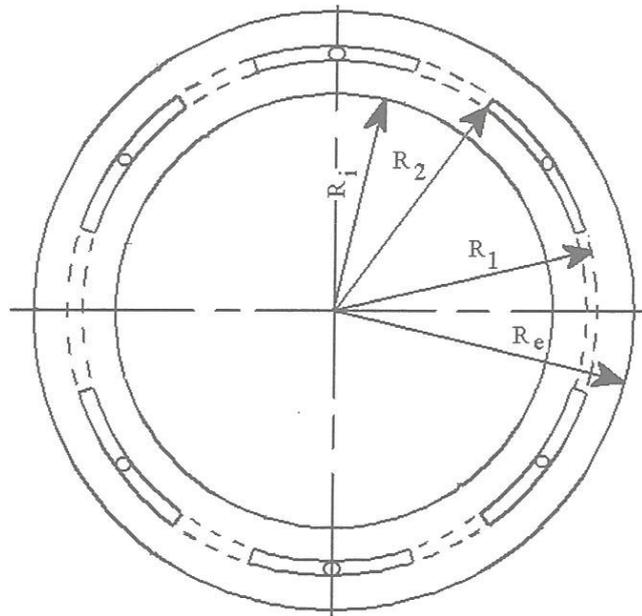


Fig. I-18: Butée axiale avec poches multiples

3.4.3. Butées axiales avec fonctionnement différentiel

Dans beaucoup d'applications, les déplacements axiaux doivent être limités dans les deux directions; donc, deux butées axiales opposées sont nécessaires (Fig. I-19), avec un jeu axial total de $2h_0$.

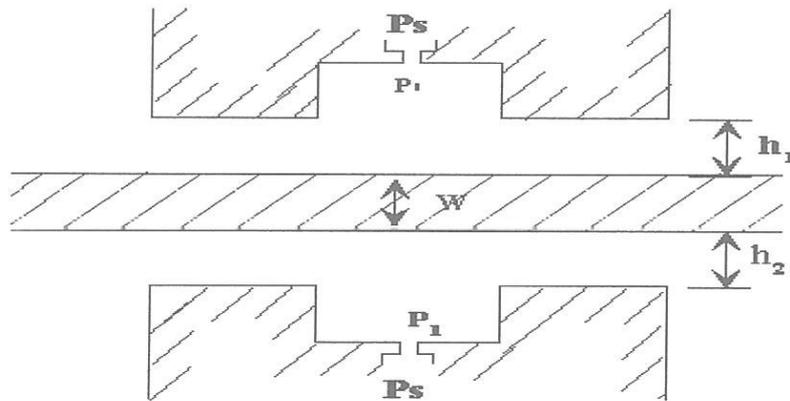


Fig. I-19: Schématisation d'une butée à double effet

La procédure d'analyse est la même que pour une seule butée axiale, mais réalisée deux fois (une fois pour chaque film) [4]. Les performances globales et conditions optimales sont, cependant, différentes. En effet, leur fonctionnement est couplé et différentiel. La capacité de charge résulte, maintenant, de la rigidité statique des deux films.

3.4.4. Butées coniques et sphériques

Les butées coniques (figure I-20) et sphériques (figure I-21) sont parfois utilisées pour simplifier les constructions, à savoir; éviter l'utilisation de butées spécialisées (axiales ou radiales). Les butées de petites dimensions des deux types sont moins utilisées. Leur utilisation peut être requise dans les applications spéciales exigeant simultanément trois degrés de rotation [3]. Les butées de grandes dimensions peuvent être munies de patins indépendants; chaque patin peut, donc, être remplacé par un patin rectangulaire équivalent et pourra être analysé comme une coulisse à patins indépendants.

Les butées sphériques assurent un guidage aussi précis que les butées coniques. Elles permettent de plus des rotations quelconques autour du centre de la sphère sans qu'il y est rupture du film fluide. Elles peuvent comporter une alvéole centrale ou plusieurs alvéoles indépendantes. Les rayons des deux sphères peuvent être égaux ou non. Les butées coniques sont utilisées afin d'accroître la capacité de charge radiale. On place le long d'une circonférence quatre alvéoles identiques. Chacune de ces alvéoles est alimentée à travers une résistance hydraulique. Les butées sphériques sont plus utilisées que les butées coniques.

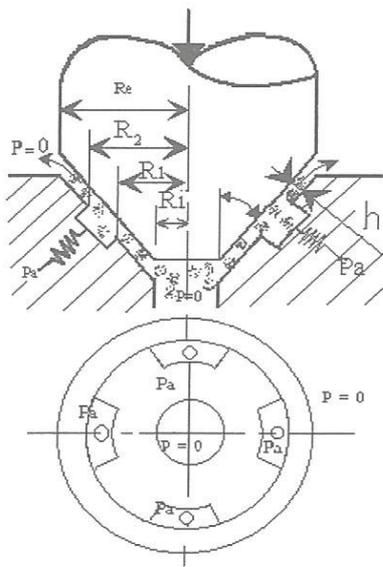


Fig. I-20: Butée conique à 4 alvéoles.

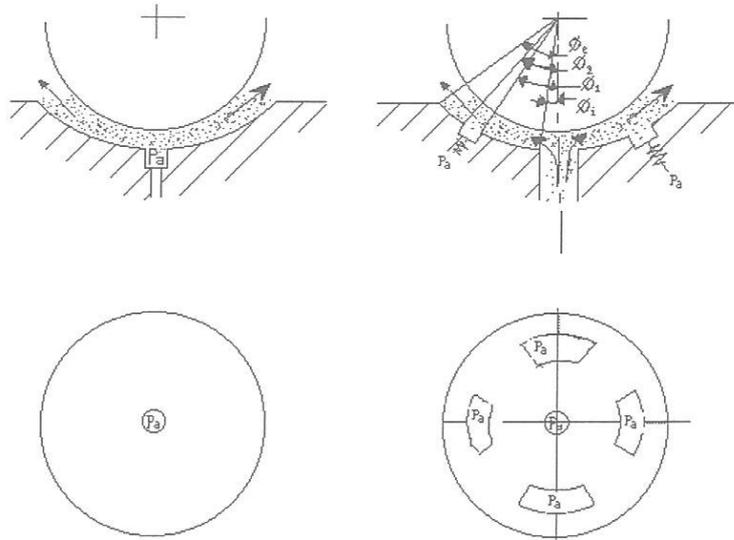


Fig. I-21: Configuration des butées sphériques

3.5. Butées hybrides

Les données présentées plus haut concernant les butées pressurisées extérieurement supposent qu'il n'y a pas de vitesse relative entre les surfaces. En d'autres termes, les données mentionnées restent utilisables tant que l'effet de la vitesse relative, sur l'écoulement et la distribution de la pression, est

petit et peut, donc, être négligé. En conséquence, une analyse satisfaisante peut être réalisée seulement en usant des méthodes numériques.

Tout de même, il y'a lieu de noter que le problème du fonctionnement hybride (Fig. I-22) est plus important dans les paliers radiaux que dans ceux des butées axiales [3]. En effet, il peut être montré que si l'épaisseur du film est constante (surfaces parallèles), aucun effet hydrodynamique ne se produit et la distribution de la pression hydrostatique reste effective (la seule exception survient quand le lubrifiant est compressible, ex : gaz). Pour cette raison, l'existence de la vitesse relative n'altère pas directement la distribution de la pression dans une butée axiale pendant le fonctionnement normal quand les deux surfaces sont parallèles. Les effets hydrodynamiques sont, cependant, rencontrés dans les butées, par exemple, quand la charge est excentrée et les deux surfaces deviennent non parallèles et une certaine pente existe entre elles. Mais, de telles configurations ne peuvent être traitées que numériquement.

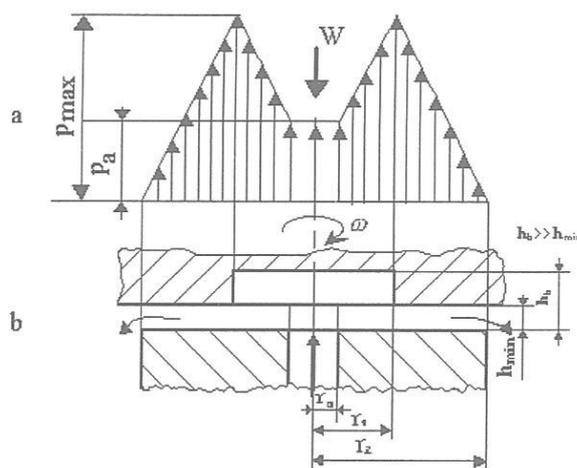


Fig. I-22: Fonctionnement hybride d'une butée hydrostatique.

Manifestement, le comportement hybride est différent de celui hydrostatique pure; la distribution de la pression est influencée par la vitesse relative, aussi l'écoulement et les caractéristiques globales de fonctionnement, aussi bien statiques que dynamiques.

D'autres effets additionnels peuvent survenir quand la vitesse relative est élevée ou très élevée. Ainsi, par exemple, les effets hybrides spéciaux apparaissent dans les butées axiales, quand le membre contenant l'alvéole est en mouvement de rotation. Ceci est dû à l'influence des forces centrifuges. De tels effets apparaissent quand les dimensions de l'alvéole sont grandes comparées au diamètre de la butée. Dans le cas contraire, c'est à dire, une petite alvéole, l'effet des forces d'inertie peut s'inverser, diminuant la portance et même de la cavitation peut localement apparaître dans les butées lubrifiées par liquides.

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les caractéristiques géométriques et les conditions de fonctionnement des différentes butées fluides. A travers cette revue bibliographique, il ressort que les butées fluides se classent en trois catégories : les butées hydrodynamiques, les butées hydrostatiques et les butées hybrides. L'étude avec précision des caractéristiques des butées fluides à formes complexes telles que la butée à rainures spirales nécessite l'emploi des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis. Dans la présente étude, les butées hydrostatiques de formes rectangulaires et cylindriques et les butées hydrodynamiques à patins fixes, qui se caractérisent par des formes géométriques simples, sont retenues pour l'analyse numérique des écoulements de fluides newtoniens (polaires) à l'aide de la méthode des éléments finis.

Composition chimique et comportement rhéologique des huiles lubrifiantes

1. Introduction

Aux premiers âges de la mécanisation, les graisses et les huiles utilisées proviennent d'organismes végétaux et animaux. Les inconvénients de ces produits sont, d'une part, que leur composition dépend du lieu et de l'année de production et de la variété végétale ou animale; d'autre part, ils se décomposent à des températures peu élevées et ne peuvent être distillées; de ce fait ils sont appelés produits fixes [5]. Les lubrifiants naturels sont utilisés depuis la plus haute antiquité, et de nos jours, malgré leurs inconvénients, ils entrent encore dans la composition de certaines préparations de lubrifiants en tant qu'additifs. En effet, ce sont d'excellents agents d'onctuosité et de bons lubrifiants limites, c'est-à-dire lorsque les contacts inévitables entre les surfaces frottantes ne sont pas trop importants.

Les lubrifiants d'origine pétrolière sont aujourd'hui de loin les plus utilisés. Ils sont du point de vue de leurs propriétés de frottement, de moins bons lubrifiants que les huiles animales ou végétales, mais leur stabilité thermique et leur résistance à l'oxydation sont bien meilleures et leur prix beaucoup plus faible.

A l'origine, les huiles synthétiques ont été développées pour pallier le manque temporaire d'huile minérale naturelle sur les marchés internationaux. Maintenant, elles sont employées dans les situations où les bases minérales ne présentent pas de performances suffisantes à cause de leurs limitations intrinsèques.

Dans la plupart des applications modernes, des produits chimiques de synthèse, appelés additifs (ou adjuvants), sont donc mélangés à l'huile pour en augmenter les performances et répondre à une demande d'efficacité accrue. Un lubrifiant complètement formulé comprend une base lubrifiante, un ensemble (ou paquet) d'additifs et, dans le cas d'une huile multigrade, un améliorant de viscosité. Le total de ces additifs peut représenter jusqu'à 30% de la composition du produit (graisses) [5].

2. Principales fonctions d'un lubrifiant

Un lubrifiant a pour fonction de :

- diminuer le frottement et par conséquent les pertes d'énergie ;
- réduire l'usure des pièces en contacts en les séparant totalement par un film lubrifiant (régime de lubrification hydrodynamique et hydrostatique) ;
- protéger les organes lubrifiés contre les corrosions humide et acide (turbine à vapeur) ;
- évacuer la chaleur produite lors du mouvement;
- transmettre l'énergie dans les systèmes hydrauliques ;
- absorber les chocs et réduire le bruit ;
- éliminer les impuretés lors des vidanges ou des opérations d'épuration (filtration-centrifugation) ;
- améliorer l'étanchéité vis-à-vis des poussières, des liquides ou des gaz indésirables ou nocifs.

3. Différents types de lubrifiants

Selon leur état physique, les lubrifiants peuvent se classer en produits gazeux, liquides, semi-solides ou plastiques et solides.

3.1. Lubrifiants gazeux

Ils sont utilisés dans les mécanismes peu chargés, tournant à très grande vitesse tels que les rectifieuses à grande vitesse, circulateurs de gaz pour réacteurs nucléaires ainsi que dans les mécanismes fonctionnant à hautes températures tels que les propulseurs à réaction, missiles, etc. avec les gaz, le coefficient de frottement est extrêmement faible, leur viscosité varie peu avec la température. Par exemple [3];

Air à 18°C : $\mu = 0,018$ cP ou mPa.s;

Air à 229°C : $\mu = 0,02638$ cP ou mPa.s.

3.2. Lubrifiants liquides

Les lubrifiants liquides sont très utilisés dans les mécanismes chargés tels que les paliers, les paliers de butées, les engrenages tournant à grande vitesse, etc. La séparation des surfaces métalliques est obtenue par effet de portance hydrodynamique et la caractéristique principale du lubrifiant est alors la viscosité.

Parmi les lubrifiants liquides, les huiles minérales d'origine pétrolière sont les plus utilisées, mais il faut citer aussi les huiles d'origine végétale et animale, l'eau, les huiles synthétiques comme les esters, les silicones et les polyglycols.

3.3. Lubrifiants semi-solides (graisses)

Les graisses sont essentiellement composées d'un mélange d'huile et d'un épaississant en général un savon métallique (Fig. II-1). L'huile est emprisonnée dans les poches entre les aspérités des surfaces, ceci crée une pression hydrostatique, qui soulage les aspérités d'une partie de la charge W . Pour la fabrication du savon, le principe de lubrification est celui d'une éponge où la graisse fournit le lubrifiant liquide lorsqu'elle est comprimée dans un contact. La température est diminuée, puisque le frottement est réduit, mais la chaleur n'est pas évacuée.

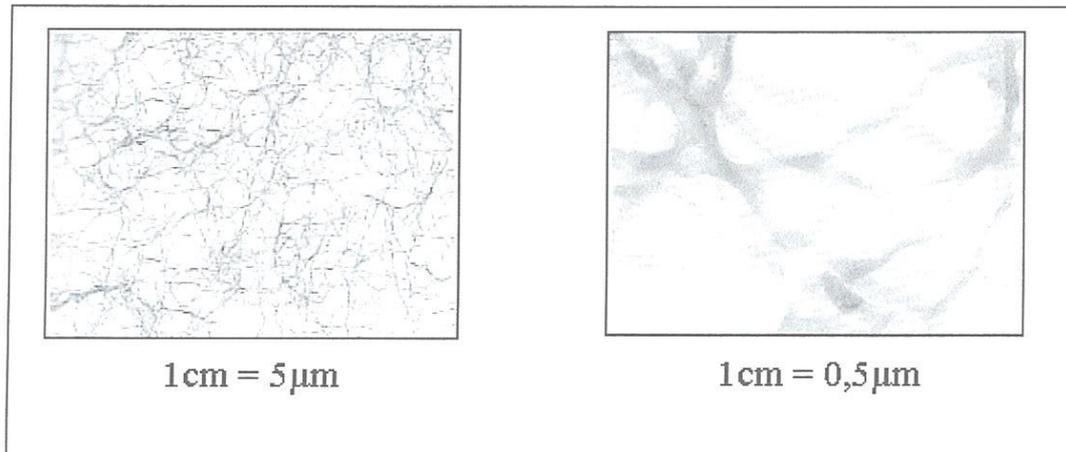


Fig. II-1 : Structures de graisses au lithium observées en microscopie à transmission (Clichés Total) [6].

Les principales propriétés des graisses sont, de réagir chimiquement avec les surfaces (chimisorbtion), et étant de nature organique de fondre (désorbttion) à des températures élevées de l'ordre de 100 à 200°C. Les graisses ont un comportement non newtonien et ont pour fonction de :

- adhérer aux surfaces ;
- garder l'huile entre les surfaces à lubrifier ;
- garder les contaminants à l'extérieur (rôle de joint étanche) ;
- demeurer stable (dans l'état pâteux) après avoir absorbé des contaminants (principalement de l'eau).

4. Composition chimique des huiles lubrifiantes

Les lubrifiants liquides sont composés d'un constituant principal appelé " base de lubrifiant", qui peut être soit d'origine : naturelle (végétale, animale), minérale (issue de la distillation et du raffinage du pétrole brut), ou d'origine synthétique (transformation de composants organiques provenant du pétrole) à laquelle des additifs sont ajoutés pour en ajuster les propriétés.

4.1. Huiles de base

a) Les huiles d'origine végétale

L'utilisation d'huiles végétales, notamment d'huile de Colza, connaît actuellement un accroissement d'intérêt pour la préparation de certains lubrifiants biodégradables destinés soit à des applications de graissage à l'huile perdue (lubrifiants de chaînes de tronçonneuses à bois, lubrifiants de chaînes de véhicules à deux roues, etc.), soit la lubrification de matériels hydrauliques travaillant en extérieur mais peu sollicités thermiquement, lorsqu'il y a risque de pollution du milieu naturel par des fuites de fluides, ce qui est le cas des matériels hydrauliques agricoles et forestiers et de certains matériels de travaux publics.

Il est à noter que pour des applications à température élevée les lubrifiants biodégradables, encore rares, sont formulés avec des esters synthétiques. En effet, la trop faible stabilité à l'oxydation des huiles végétales les rend, pour l'instant, impropres à la lubrification de ces mécanismes avec les additifs conventionnels [7]. Cependant, des huiles moteurs de grades 5W40 et 10W40 à base d'huile de tournesol à haute teneur en acide oléique viennent d'être mises sur le marché.

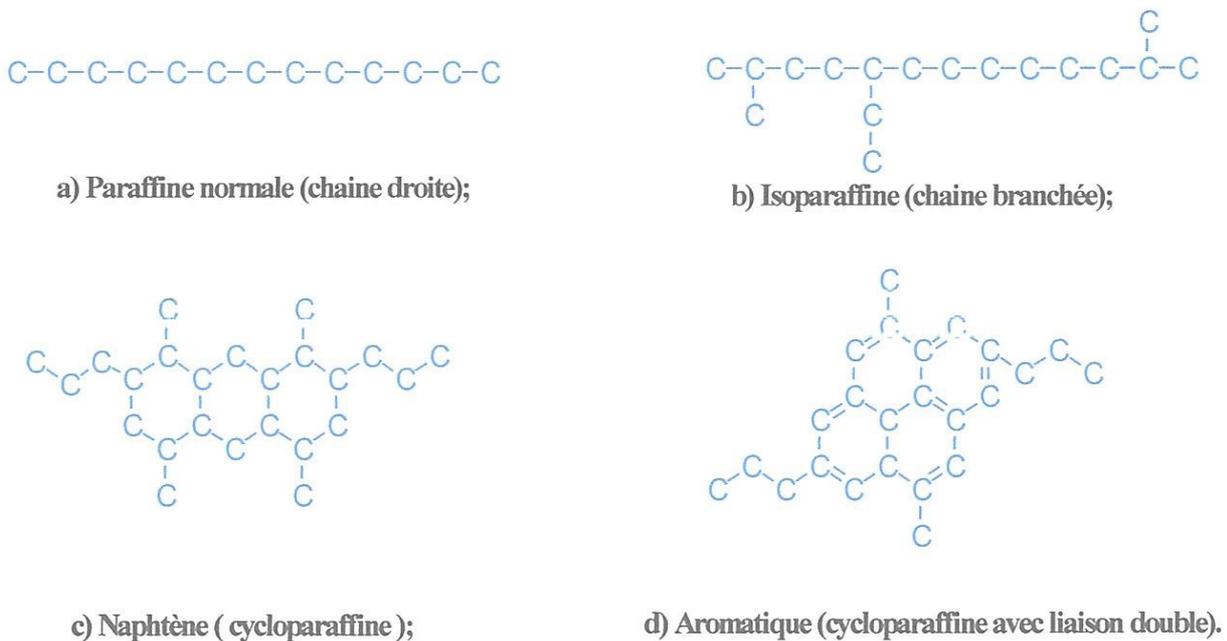


Fig. II-2: Structures des huiles de base.

b) Les huiles minérales

Les bases minérales sont issues d'une série de procédés de séparation et de raffinage de la fraction du pétrole brut dont la température d'ébullition est supérieure à 340°C [8]. Elles sont constituées de molécules hydrocarbonées contenant vingt à soixante-dix, voire plus, d'atomes de carbones.

Elles peuvent être caractérisées comme de type paraffinique, naphténiqne ou aromatique (fig. II-2).

1) Bases à structures aromatiques

Ce sont des bases à structure benzénique (figure II-2d) qui se caractérisent par une faible résistance à l'oxydation [9], leur tendance à former des boues noires aux températures de fonctionnement élevées, leur faible indice de viscosité et leur nature cancérogène.

2) Bases à structures paraffiniques

Elles sont distinguées par une structure moléculaire composée de longues chaînes hydrocarbonées (figure II-2a), les atomes d'hydrogène et de carbone sont liés d'une longue série linéaire semblable à une chaîne. Ces bases présentent une grande stabilité à l'oxydation et possèdent un indice de viscosité élevé (de l'ordre de 100). Cependant le haut poids moléculaire de certaines chaînes peut entraîner la cristallisation de l'huile dès la température ambiante [7]. Les isoparaffiniques (figure II-2b) qui possèdent un indice de viscosité moins élevé ne présentent pas cet inconvénient.

3) bases à structures naphténiqnes

Les huiles naphténiqnes (figure II-2c) sont distinguées par une structure moléculaire composée de chaînes cycliques (d'anneaux) d'hydrocarbures, les atomes d'hydrogène et de carbone sont liés dans un modèle circulaire [10]. Ces bases sont moins stables à l'oxydation, et présentent un indice de viscosité inférieur (de l'ordre de 50).

Les bases paraffiniques sont généralement préférées, à cause de leur indice de viscosité élevé. Cependant, suivant la qualité du branchement, elles peuvent contenir une quantité non négligeable de paraffine, leur point d'écoulement est alors élevé. Les bases naphténiqnes, qui possèdent un indice de viscosité moins élevé, sont uniquement préférées dans certaines applications, à cause de leur teneur moins grande en paraffine et de leur point d'écoulement plus bas.

En réalité, aucune base n'est composée d'un seul type de structure. Toutes les bases contiennent un mélange dans lequel un des trois types de structure prédomine. Par exemple, un solvant souvent employé : la base 175 Neutral Solvent (Esso Port Jérôme, France) de viscosités cinématiques 33,60 cSt à 40°C et 5,65 cSt à 100°C. Sa masse moléculaire est de 416 (g /mol). Elle est composée de 4,30% de carbones aromatiques, de 68,85% de carbones paraffiniques et de 26,85% de carbones naphténiqnes. Son taux de soufre est de 0,55% en masse. La taille relative de ses principaux constituants est représentée dans la figure II-3.

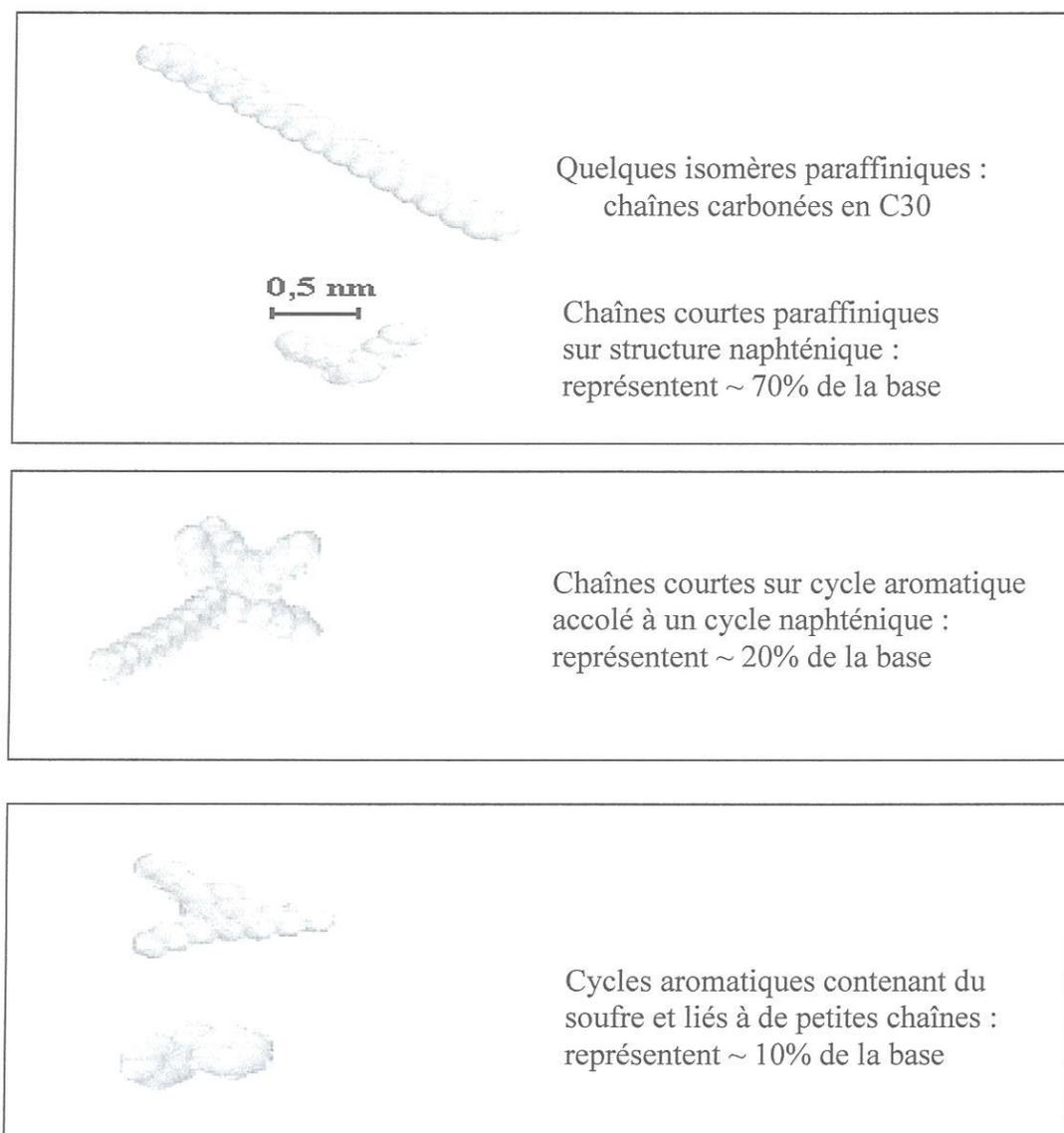


Fig.II-3: Base 175 Neutral Solvent (D. Faurc Elf) [6].

c) Les huiles synthétiques

De nombreux produits synthétiques ont été développés ces dernières années pour résoudre des problèmes de lubrification particulièrement difficiles. On peut citer comme exemple les fluides de haute stabilité thermique, les fluides ininflammables et les lubrifiants pour l'aviation. Parmi les principales familles de produits utilisés, on mentionnera [2]:

- les esters aliphatiques qui se caractérisent par un indice de viscosité élevé, une faible volatilité et des propriétés lubrifiantes excellentes ;
- les esters phosphoriques utilisés souvent comme additifs anti-usure, qui présentent un indice de viscosité élevé et sont ininflammables;
- les silicones et silicates qui ont un excellent indice de viscosité et un point d'écoulement très bas ; cependant leurs propriétés lubrifiantes ne sont pas très bonnes;

- les polyphényléthers qui présentent une remarquable stabilité à haute température (jusqu'à 450°C environ) et qui sont d'excellents lubrifiants. Ils ont cependant un indice de viscosité faible et sont très onéreux ;
- les polypropylènes glycols qui se caractérisent par un indice de viscosité élevé un point d'écoulement très bas et de bonnes propriétés anti-usure, cependant ils ont une stabilité thermique et une résistance à l'oxydation assez moyenne et ne sont pas miscibles aux bases minérales ;
- les polyoléfines qui présentent un indice de viscosité assez élevé et un point d'écoulement très bas.

Tous ces produits sont utilisés soit pur soit en mélange avec d'autres bases synthétiques ou minérales.

Il faut souligner que les huiles synthétiques ont des propriétés qui sont généralement supérieures à celles des huiles minérales, elles sont réservées aux applications extrêmes à basse ou à haute température. Sinon, une huile minérale est moins coûteuse et tout à fait acceptable.

4.2. Les additifs ou dopes

Dans la plupart des applications modernes, le pouvoir lubrifiant intrinsèque d'une huile minérale n'est pas suffisant. C'est pour obtenir les niveaux de performance les plus élevés et répondre à une demande d'efficacité accrue qu'intervient la formulation par les additifs. Ce sont des produits chimiques de synthèse mélangés à l'huile de base, le total de ces additifs peut représenter jusqu'à 30% de la composition du produit. On peut classer les additifs en trois grandes catégories :

- ceux qui améliorent la stabilité chimique de l'huile ou inhibent les effets des produits de dégradation;
- ceux qui améliorent les propriétés rhéologiques;
- ceux qui protègent les surfaces métalliques et ont un effet anti-usure.

4.2.1. Additifs améliorant la stabilité chimique de l'huile ou inhibant les effets des produits de dégradation

❖ *Les additifs anti-oxydants:* L'oxydation de l'huile provoque la formation de deux types de produits : les acides organiques de faibles poids moléculaires très corrosifs pour les métaux et des composés oxygénés de masses molaires comprises entre 500 et 3000 g/mole qui, dans une première

étape, augmentent la viscosité avant de polymériser, précipiter dans l'huile et enfin former des dépôts sur les parois.



Fig. II - 4: Additifs anti-oxydants

Le mécanisme d'oxydation des hydrocarbures par l'air est de nature radicalaire (figure II-4) et les additifs agissent soit en désactivant les métaux catalyseurs par complexation d'un degré d'oxydation, soit en décomposant les peroxydes formés par action de l'oxygène sur les radicaux hydrocarbonés, soit en transformant les radicaux de la chaîne d'oxydation en radicaux stables. On utilise les phénols, des arylamines substituées ou des composés soufrés qui forment des radicaux stables; les dialkyl-dithiophosphates de zinc sont très largement utilisés car ils ont un effet anti-usure en plus de l'effet antioxydant [9].

❖ *Les additifs détergents et dispersants:* Ces additifs sont destinés à limiter les effets produits par l'oxydation que les anti-oxydants ne peuvent totalement empêcher.

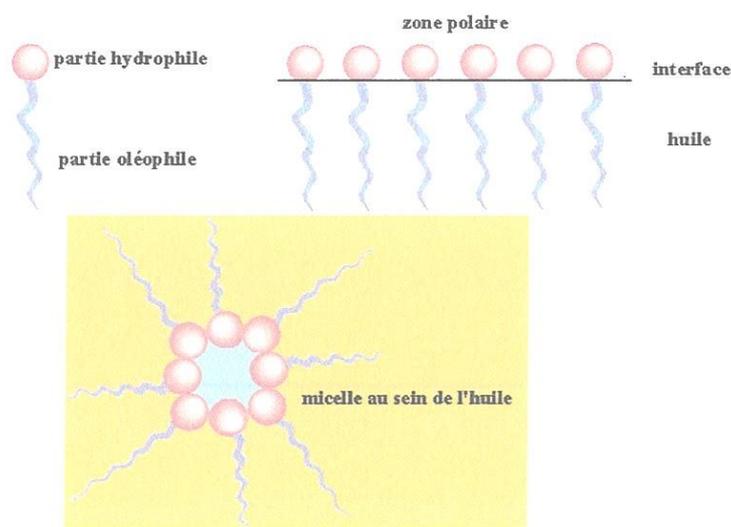


Fig. II-5: Organisation des additifs dispersants et détergents dans l'huile [10]

Il faut neutraliser les acides organiques pour limiter la corrosion et le lubrifiant doit contenir une réserve de base (carbonate de calcium). Il faut maintenir en suspension les particules de polymères organiques et éviter ainsi la formation de vernis sur les parois métalliques chaudes.

Les additifs dispersants et détergents possèdent une structure tensioactive constituée d'une partie organique soluble dans l'huile et d'une partie polaire. Ce caractère est responsable de deux comportements : l'adsorption sur les surfaces polaires et l'auto-association dans l'huile pour former les micelles (figure II-5).

- les **dispersants** sont des tensioactifs organiques. La partie hydrocarbonée est constituée de polyisobutylène dont la masse molaire est de l'ordre de 1000 à 2000 g/mole. La partie polaire est de nature succinimide (figure II-6) [11].

- les **détergents** sont des sels d'acides organiques ou de phénols et de métaux divalents (calcium et magnésium) (figure II-7). Le cœur de la micelle a la capacité de stocker une quantité de carbonate largement excédentaire à la stœchiométrie [11]. Cette réserve, définie par le <<Total Basic Number >> ou TBN selon la norme ASTM D664, sert à neutraliser les acides organiques qui se forment pendant le fonctionnement. Ces additifs ont deux autres fonctions par adsorption sur le métal : ils empêchent la formation de vernis qui proviennent de la polymérisation des dépôts organiques et ils ont un effet anti-corrosion.

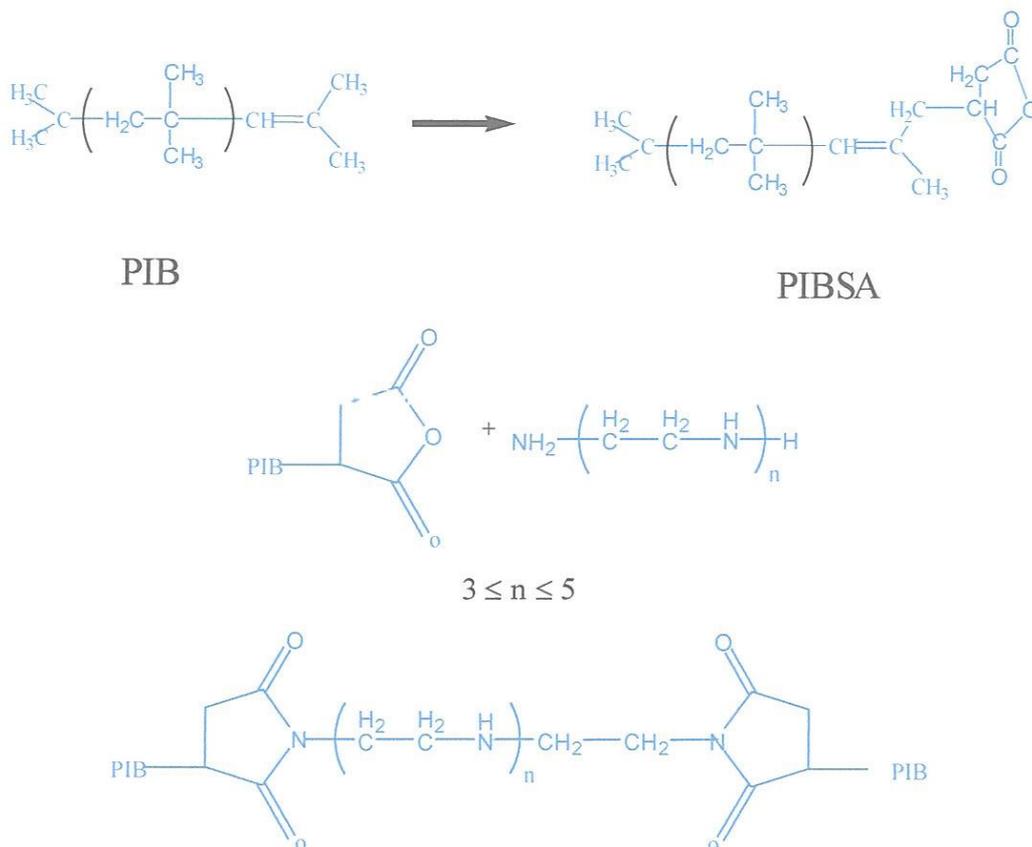


Fig. II- 6: Structures des additifs dispersants.

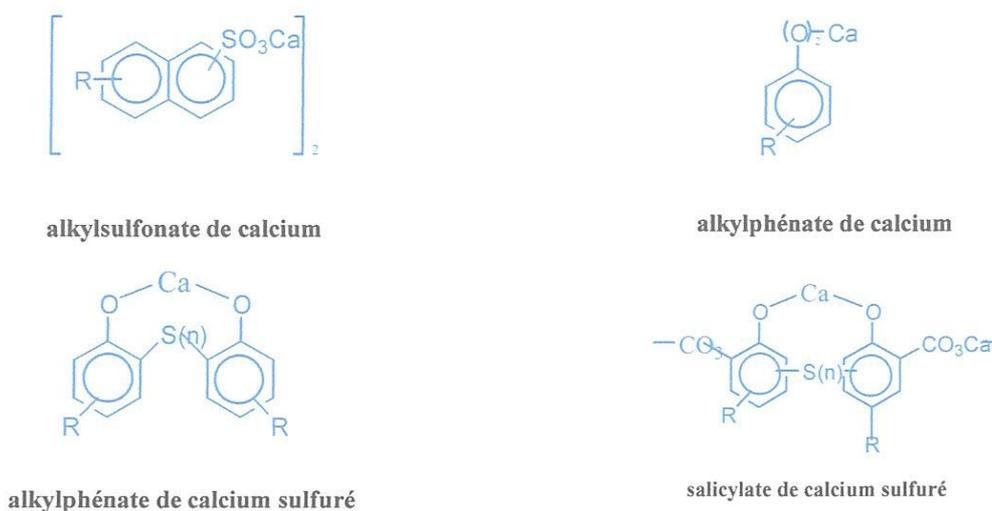


Fig. II-7: Structures des additifs détergents.

4.2.2. Les additifs améliorant les propriétés rhéologiques des lubrifiants

❖ le point d'écoulement des huiles et les additifs anticongelant

Le refroidissement d'un lubrifiant provoque la cristallisation des paraffines vers -10°C (c'est le point de trouble), mais l'huile s'écoule car les cristaux sont dispersés. Si la température continue à s'abaisser, on observe la croissance de ces cristaux et la formation d'une phase continue (réseau) qui emprisonne les autres constituants de l'huile, ce qui gêne l'écoulement. La température en dessous de laquelle le lubrifiant ne s'écoule plus est définie comme <<point d'écoulement>>. Ce phénomène se produit bien que ce réseau ne représente que 1 à 5 % de la masse de l'huile; on peut s'opposer à sa formation en modifiant la croissance des cristaux de paraffines. Pour cela, on introduit des oligomères possédant des chaînes alkyles qui s'adsorbent sur une surface du cristal en croissance, en modifiant la forme et perturbent ainsi l'organisation **du réseau [10]**.



Fig. II- 8: Structures des additifs anticongelants

Les produits dits <<anticongelants >> commercialisés sont des alkylnaphtènes, des polyacrylates d'alcools à longues chaînes (Fig. II-8) ou des polystyrènes alkylés.

❖ Les additifs améliorant l'indice de viscosité (VI)

Les bases lubrifiantes d'origine pétrolière ont un VI qui ne dépasse pas 100. Or, il est important que la viscosité de l'huile diminue le moins possible pendant le fonctionnement à chaud pour éviter la rupture du film d'huile. Les propriétés des polymères en solution permettent de résoudre ce problème.

La viscosité d'une solution de polymère dépend de la concentration certes, mais aussi du volume qu'occupe chaque macromolécule dans le solvant. Ce volume dépend lui même de l'importance des interactions entre le solvant et le polymère. L'huile de base (naphténique, paraffinique et faiblement aromatique) est un assez mauvais solvant des polymères et les forces de cohésion des motifs des polymères entre eux seront plus fortes que les interactions entre l'huile et le polymère [11]. La chaîne polymère peu gonflée occupera un faible volume dans l'huile et l'augmentation de la viscosité sera faible. Pendant le fonctionnement la température s'élève, le pouvoir solvant de l'huile augmente. Ces interactions avec le polymère se traduisent par une augmentation du volume de la macromolécule, donc de sa contribution à la viscosité de la solution, qui compense la perte de viscosité que l'augmentation de la température fait subir à l'huile.

L'utilisation des polymères n'est pas sans poser de problèmes. L'un des plus importants est le comportement des solutions soumises à un gradient de cisaillement qui provoque des coupures, donc diminue la masse molaire et par suite l'effet sur la viscosité. Néanmoins, ces additifs sont très largement utilisés et actuellement, deux grandes familles sont commercialisées :

- les polymères hydrocarbonés (figure II-9) : le polyisobutène est obtenu par amorçage cationique; les copolymères de l'éthylène et du propylène (<<olefin copolymers>>, OCP) sont préparés par catalyse de coordination. Leurs masses molaires sont de l'ordre de 50 000 à 100000 g/mole. Les copolymères diène-styrène sont obtenus par amorçage anionique et, ensuite, hydrogénés pour éliminer les insaturations. Leurs masses molaires sont de l'ordre de 120 000 g/mole [10].

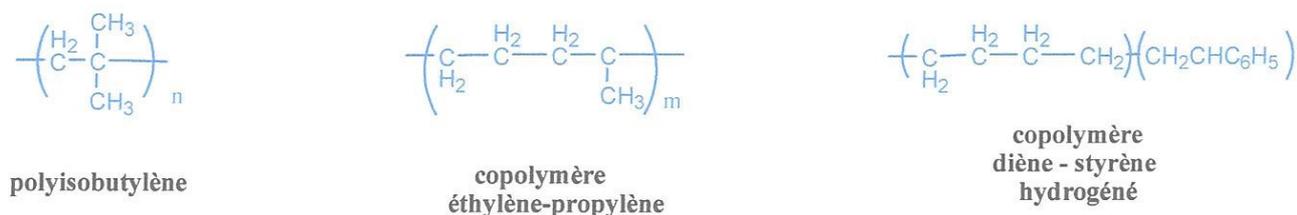
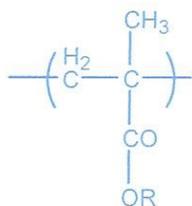
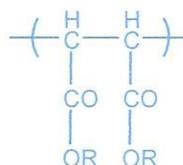


Fig. II- 9: Structures des polymères hydrocarbonés améliorant le VI.



co-polyméthacrylate

R reste alkyle de C1 à C20



polymaléate

les groupes R sont issus d'alcools de C1 à C20

Fig. II- 10: Structures des polymères à fonctions esters améliorant le VI.

- Les polymères à fonction ester (figure II-10) : ce sont des polyméthacrylates de masses molaires comprises entre 150 000 et 500 000 g/mole, obtenus par polymérisation de méthacrylates d'alcools de C₈ à C₁₄ par voie radicalaire [10].

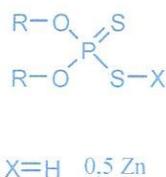
Dans les deux familles OCP et polyméthacrylates, on commercialise des additifs de VI possédant des propriétés dispersantes. Ils sont obtenus par introduction sur la macromolécule de fonctions polaires.

❖ *Les produits anti-moussants*

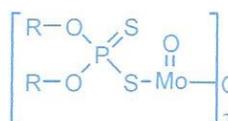
La présence d'agents tensioactifs dans les formules et la forte agitation en présence de gaz provoque la formation de mousse. L'ajout de quelques parties par million (PPM) de dérivés de silicones permet d'éviter ce phénomène.

4.2.3. Les additifs extrême pression (EP) et anti-usure

Lorsque le lubrifiant fonctionne en régime hydrodynamique, le film d'huile est stable et il n'y a pas réellement de problème d'usure. En conditions plus sévères, si les pièces se rapprochent, si le film se rompt, le frottement peut provoquer de l'arrachement de métal. En conditions extrêmes, l'échauffement peut conduire à la soudure des pièces (grippage).



dithiophosphate



dithiophosphomolybdate

Fig. II-11: Structures des additifs anti-usure et extrême pression.

Les additifs extrême pression et anti-usure ont pour rôle de créer un lubrifiant solide par réaction avec la surface. Les produits commerciaux sont des composés organiques contenant du chlore, du soufre ou du phosphore. Ces atomes réagissent avec le métal au moment de la décomposition thermique de l'additif en créant une interface plus ductile qui joue le rôle de lubrifiant solide [12]. On utilise par exemple des produits de réaction du soufre avec des oléfines, des dérivés dithiophosphoriques ou des phosphomolybdates (figure II-11).

5. Viscosité des lubrifiants

De toutes les propriétés physiques et chimiques à considérer en lubrification, la viscosité est l'une des plus importante. Dans les paliers, les engrenages et les systèmes hydrauliques où le régime de fonctionnement est hydrodynamique, c'est la viscosité qui détermine les pertes en frottement, le rendement mécanique, la capacité de charge et l'épaisseur du film d'huile.

La viscosité est véritablement une mesure de l'aptitude physique d'un fluide à assurer la lubrification par film complet sous des conditions définies de vitesse, de charge et de température.

5.1. Définition de la viscosité

Selon la norme N.F. T 60-100 de novembre 1959 : " la viscosité d'un liquide est la propriété de ce liquide, résultant de la résistance qu'opposent ses molécules à une force tendant à les déplacer par glissement dans son sein ". Ainsi la viscosité d'un fluide est la résistance opposée par ce fluide à sa mise en mouvement.

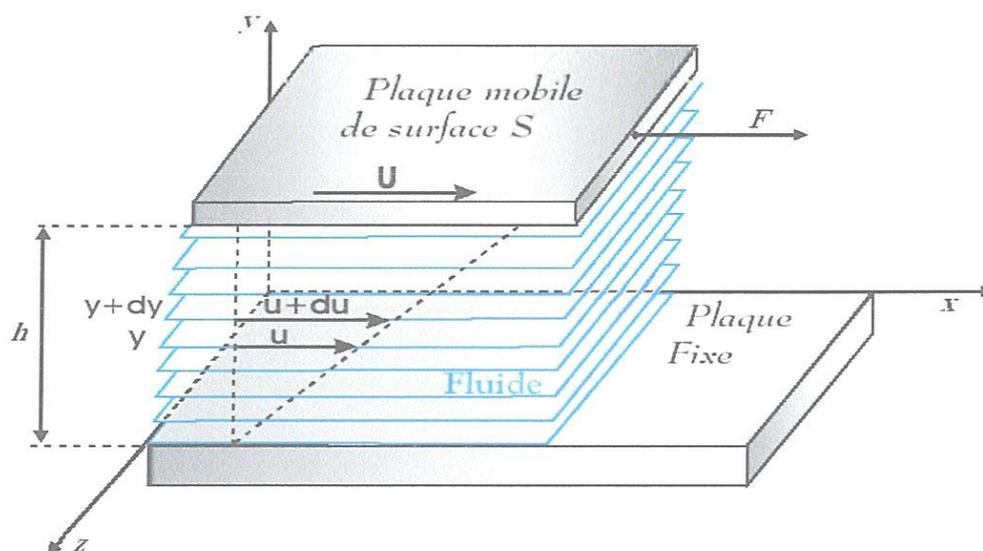


Fig. II-12: Écoulement laminaire entre deux plans parallèles (Écoulement de Couette).

La résistance peut être calculée par la formule de Newton relative à l'écoulement laminaire d'un fluide entre une surface mobile animée d'une vitesse U et une surface fixe (figure II-12). Pour visualiser le cisaillement qui s'effectue dans un film fluide, il faut imaginer que le film se compose de plusieurs couches (pellicules) semblables à une plate-forme de cartes [13].

La couche liquide en contact avec la plaque mobile s'accroche à sa surface et toutes les deux se déplacent à la même vitesse U . De même, la couche liquide en contact avec la deuxième surface fixe est stationnaire. Entre ces deux surfaces les différentes couches dans l'intervalle se déplacent à des vitesses directement proportionnelles à leur distance de la surface fixe. Par exemple, à une distance y de la surface fixe la vitesse de la couche de fluide est u , et devient $u+du$ à la distance $y+dy$. Alors la contrainte tangentielle T_{xy} , appelée fréquemment contrainte de cisaillement et notée τ , est donnée par :

$$\tau = T_{xy} = \mu (du / dy) \quad (II-1)$$

Où μ est un coefficient caractéristique du fluide appelé coefficient de viscosité dynamique et (du / dy) est le taux de cisaillement ou le gradient de vitesse ou le taux de déformation, dont la dimension est $[T^{-1}]$.

Plus le fluide est visqueux, plus il s'oppose à sa mise en mouvement. En étudiant le rapport entre F/S (homogène à la contrainte) et U/h (homogène au gradient de la vitesse) nous mettons en évidence plusieurs types de comportement.

6. Comportements rhéologiques des huiles lubrifiantes

Si le modèle de fluide newtonien décrit bien la très grande majorité des fluides composés de molécules simples, il existe un bon nombre de fluides dont certains sont utilisés en lubrification (huiles lourdes, graisses, etc.) qui ont un comportement plus complexe.

La définition d'un fluide newtonien est assez restrictive, les contraintes de cisaillement sont proportionnelles aux gradients de vitesse, ce qui implique :

- ◆ dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement ;
- ◆ la viscosité est indépendante du taux de cisaillement ;
- ◆ la viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté.

Toute déviation de ces règles est le signe d'un comportement non newtonien. La description de ces comportements et leurs interprétations en relation avec la structure microscopique du fluide constitue la discipline appelée rhéologie.

Le terme **rhéologie** fut inventé par Eugène Bingham en 1928. La rhéologie a pour objet l'étude de la déformation des corps, y compris leurs écoulements, sous l'influence de contraintes qui leurs sont appliquées.

L'utilisation des fluides (huiles, etc.) en lubrification, nécessite des études sur leurs lois de comportement rhéologique dans des conditions réelles de fonctionnement de plus en plus sévères.

6.1. Equations constitutives

Le terme de loi de comportement des fluides est couramment utilisé pour énoncer la relation descriptive du tenseur des contraintes en liaison avec celui des taux de déformation représenté dans le milieu du fluide en écoulement. Les caractères des fluides newtoniens et non newtoniens sont alors associés à des paramètres dont dépendent ces relations.

Par cette démarche, plusieurs lois de comportement ont pu être proposées, donnant une meilleure simulation de l'écoulement des fluides de différents types.

6.2. Fluide newtonien

Pour un fluide newtonien et compressible, la relation qui lie le tenseur des contraintes T_{ij} au tenseur des taux de déformation D_{ij} s'écrit [13]:

$$T_{ij} = (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \tag{II-2}$$

où p est la pression dans le fluide, θ le taux de dilatation cubique, δ_{ij} le symbole de Kronecker, μ et λ deux coefficients de viscosité appelés constantes de Navier.

Pour un fluide incompressible (iso-volume) $\theta = 0$, le second coefficient de viscosité λ n'intervient plus.

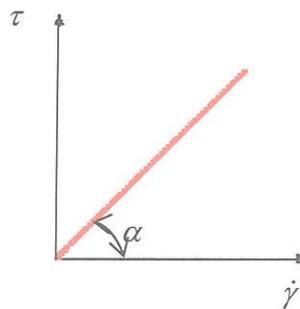


Fig. II-13. Rhéogramme d'un fluide newtonien ($\mu = tg\alpha$).

Ce fluide, composé d'une seule phase liquide, est aussi appelé fluide visqueux linéaire. Il est de plus incompressible, homogène et isotrope. La relation (II-2) généralise l'équation (II-1) dans le cas tridimensionnel où τ est la contrainte de cisaillement visqueuse et $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement. La majorité des fluides utilisés en lubrification suivent, en première approximation, cette loi de comportement qui est représentée graphiquement en figure II.13. Par rapport aux lois de comportement des fluides visqueux non linéaires, elle permet de simplifier considérablement les études théoriques sur les caractéristiques des mécanismes lubrifiés.

6.3. Fluides non newtoniens

Dans ce cas la viscosité n'est pas constante. A chaque valeur du couple taux de cisaillement-contrainte de cisaillement $(\dot{\gamma}, \tau)$ correspond une valeur de la viscosité μ . Dès lors, on parle de viscosité apparente.

Les lois de comportement des fluides non newtoniens sont caractérisées par la composition du milieu (fluides multiphasés et fluides composés de différentes substances liquides ou solides) [6]. Chacune des phases (substances) fait intervenir différents caractères liés à son état de mouvement tels que viscosité, élasticité, plasticité, ainsi que l'influence de la température, l'effet régressif, etc. La prise en compte de l'ensemble de ces facteurs conduit alors aux lois de comportement non linéaires des fluides non newtoniens.

6.3.1. Fluide polaire (couple-stresses fluid)

La quasi-totalité des huiles utilisées pour la lubrification des machines contiennent des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI). Ces additifs entraînent une modification du comportement rhéologique de ces huiles. D'après la théorie de V. K. Stokes [14], la loi de comportement rhéologique de ce type de fluide dit à rhéologie complexe ou encore fluide polaire s'écrit:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2}e_{ijk}M_{rk,r} \quad (\text{II-3})$$

$$\text{avec : } M_{rk} = \frac{1}{3}M_{nn}\delta_{rk} + 4\eta w_{k,r} + 4\eta'w_{r,k}$$

où T_{ij} est le tenseur des contraintes non symétrique ($T_{ij} \neq T_{ji}$), M_{rk} est le tenseur des couples de contraintes, e_{ijk} est le tenseur de permutation d'ordre trois, μ est le coefficient de viscosité, η et η' sont des constantes physiques dues à la présence des couples de contraintes, dont la dimension est MLT^{-1} .

6.3.2. Fluides visqueux non linéaires

Le caractère non newtonien le plus répandu est la variation de la viscosité avec le taux de cisaillement. De nombreux travaux expérimentaux, dont les plus anciens remontent à 1925, ont montré que même pour les fluides monophasiques, par exemple l'huile lourde ou l'huile contenant des additifs, le comportement rhéologique n'était pas linéaire. Plusieurs lois de comportement ont été proposées en lubrification à la suite de différentes expériences:

- ◆ loi d'Oswald en 1925 (loi en puissance) [15]

$$\tau = \mu \dot{\gamma}^n \quad (\text{II-4})$$

L'exposant n est très significatif du comportement de ce modèle. L'écoulement devient visqueux linéaire ou newtonien pour une valeur de n égale à un. Toute valeur de n autre que un signifie un comportement visqueux non linéaire ou non newtonien. Le fluide est dit rhéofluidifiant pour des valeurs de n inférieures à un et rhéoépaississant pour des valeurs de n supérieures à un.

– Ecoulement pseudoplastique ou rhéofluidifiant

Ces systèmes ne présentent pas de seuil d'écoulement, la déformation commence dès qu'une contrainte est exercée. La tension de cisaillement τ n'est pas proportionnelle au taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ car la viscosité diminue pour des taux de cisaillement croissants (fig. II-14).

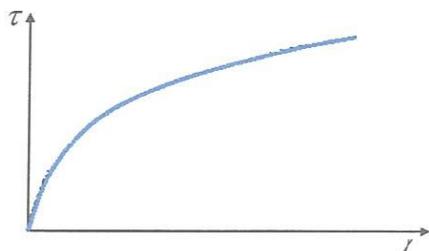


Fig. II.14. Rhéogramme d'un fluide rhéofluidifiant.

Ce type de comportement est moins fréquent. Il concerne les dispersions de particules asymétriques, les polymères à longues chaînes en solution ou à l'état fondu, les pâtes à papier, les colles, les ciments, etc.

Les molécules, sous l'effet du taux de cisaillement ont tendance à s'aligner progressivement le long des couches ce qui favorise leur glissement relatif. Une seconde interprétation consiste à envisager une modification de la structure du matériau sous l'effet du gradient de vitesse (destruction par rupture de liaison de type Van der Waals, défloculation des particules).

– *Écoulement dilatant ou rhéoépaississant*

Un écoulement dilatant se manifeste lorsqu'une augmentation de la tension de cisaillement entraîne une augmentation de la viscosité (fig. II-15)

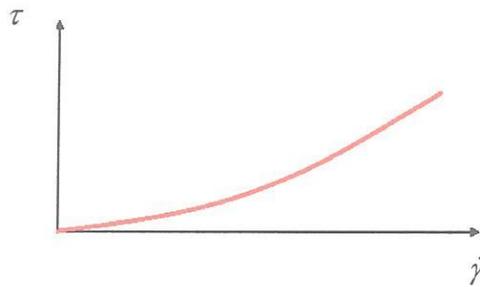


Fig. II-15 : Rhéogramme d'un fluide rhéoépaississant.

Ce comportement est beaucoup moins fréquent. Il concerne des dispersions très concentrées, les solutions d'amidon, sable mouillés et compactés et certaines huiles polymériques. Certains de ces produits augmentent de volume sous la contrainte. Les causes d'origine moléculaire sont diverses et pas toujours élucidées. On peut invoquer l'augmentation du volume libre entre les particules. Au repos, il est minimal, sous un gradient de vitesse en augmentation, il y a gonflement du liquide (les particules sont moins imbriquées). La phase continue n'est plus capable de combler les vides interparticulaires ni d'assurer une bonne lubrification.

6.1.2.3. *Fluide viscoélastique*

Un autre comportement non newtonien très important est le caractère viscoélastique, la réponse du fluide à une déformation présente à la fois un aspect visqueux (contrainte proportionnelle au taux de déformation) et un aspect élastique (contrainte proportionnelle à la déformation) [15].

Le modèle le plus simple de fluide viscoélastique consiste à additionner les contraintes d'origine visqueuse et d'origine élastique. La représentation graphique la plus simple de ce modèle est celle de Maxwell : association en série d'un ressort et d'un amortisseur (fig. II-16).

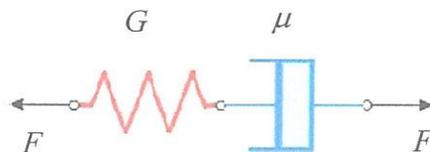


Fig. II-16 : Modèle de Maxwell.

Selon Maxwell tous les corps sont viscoélastiques. Un liquide réagit comme un solide quand l'impulsion qu'on lui applique est extrêmement brève. Sous l'effet d'une contrainte, le fluage et l'écoulement n'apparaissent qu'au bout d'un certain temps. Celui-ci correspond au temps de

relaxation qui sépare en gros le temps de passage du phénomène élastique au phénomène visqueux [15].

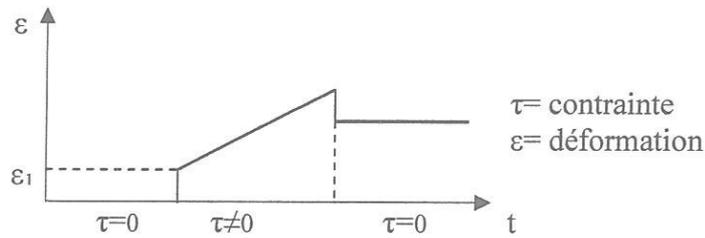


Fig. II-17.: Réponse d'un fluide à une contrainte de cisaillement.

La figure II-17 montre comment un fluide répond à l'application d'une contrainte de cisaillement. Il se produit immédiatement une déformation élastique suivie du fluage. La déformation élastique se fait durant un temps très court et est récupérée lorsque cesse la contrainte. Le modèle de Maxwell est représenté par une relation linéaire :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\mu} \tag{II-5}$$

Suivant cette équation, en écoulement permanent, le fluide viscoélastique se comporte comme un fluide newtonien de viscosité μ . Mais, dans les mouvements transitoires brefs il se comporte comme un fluide élastique de module de cisaillement G .

Par des expériences avec des contacts très chargés et à faible glissement relatif des surfaces, plusieurs auteurs ont montré que la viscosité apparente de quelques produits lubrifiants est une fonction de la vitesse d'entraînement. Ce phénomène sous-entend un comportement qui dépend d'un facteur de temps de passage du lubrifiant dans la zone de contact [13].

6.1.2.4. Fluide viscoplastique ou fluide de Bingham

Au repos le fluide possède une structure tridimensionnelle rigide (particules emboîtées) ou floculées. Le seuil d'écoulement correspond à l'énergie nécessaire pour les séparer. Au-delà, l'écoulement s'effectue sous l'effet de la contrainte effective $(\tau - \tau_0)$ [15].

Lorsque la tension de cisaillement est inférieure au seuil d'écoulement, le système se comporte comme un solide :

$$\tau = G\dot{\gamma} \tag{II-6}$$

Au-delà, le matériau a le comportement d'un fluide newtonien (figure II-18), avec :

$$\tau = \tau_0 + \alpha \dot{\gamma} \quad (\text{II-7})$$

où α est la viscosité plastique

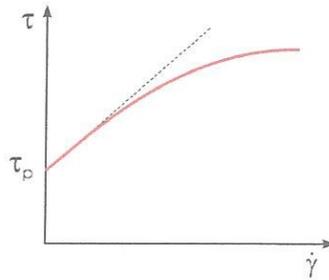


Fig. II-18 : Rhéogramme d'un fluide plastique de Bingham.

Bien que la loi de comportement dite de Bingham, soit établie théoriquement, de nombreuses expériences ont montré qu'elle est applicable pour une gamme très large de produits lubrifiants telles que les graisses.

7. Conclusion

Il ressort de cette étude bibliographique que les huiles lubrifiantes sont généralement constituées d'un fluide de base appelé « base de lubrifiant » qui peut être synthétique ou d'origine minérale, auquel sont ajoutés de nombreux additifs dont la nature varie avec la destination du produit et que les fluides peuvent être classés en deux grandes catégories:

- ◆ fluides newtoniens pour lesquels le taux de cisaillement est directement proportionnel à la contrainte (la viscosité dynamique μ est constante);
- ◆ fluides non newtoniens pour lesquels la relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement est non linéaire.

Cette étude a permis de mettre en évidence la diversité et le degré de complexité du comportement rhéologique des fluides non newtoniens. Ceci est confirmé par les nombreux modèles proposés dans la littérature. Ces modèles dépendent éventuellement de la composition chimique du fluide et des conditions de fonctionnement (taux de cisaillement élevés) du système lubrifié par ce fluide.

Le calcul correct des performances d'un contact lubrifié nécessite le choix d'un modèle qui décrit convenablement le comportement d'une huile lubrifiante.

En ce qui concerne notre étude, on a choisi le modèle du fluide polaire avec prise en considération des couples de contraintes en plus des forces de surfaces. Ce modèle permet de décrire convenablement le comportement rhéologique des huiles contenant des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) qui sont des polymères solubles.

Equations générales de la lubrification par fluides à rhéologie complexe

1. Introduction

L'objet de ce chapitre est la présentation des équations de base de la lubrification hydrostatique et hydrodynamique par fluides polaires, qui prennent en considération les couples de contraintes dus à la présence d'additifs dans les huiles. L'analyse théorique est basée sur la théorie des milieux continus de V. K. Stokes dans le cas d'écoulement de films minces visqueux entre parois fixes et mobiles et qui introduit la notion de couple de contrainte dû à l'effet de dimension apparaissant dans le comportement des fluides complexes (bases lubrifiantes + adjuvants). Comme nous venons de le voir au premier chapitre, une bonne partie des butées hydrostatiques ont une forme rectangulaire, alors que la totalité des butées hydrodynamiques sont de forme cylindrique. En conséquence, nous allons présenter les équations de base de la M.M.C. ainsi que la dérivation de l'équation de Reynolds en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

2. Notion de couple de contrainte [16]

Une distribution donnée de couples externes peut résulter de l'action de champ magnétique externe sur les particules magnétisées du matériau, ou de l'action de champ électrique sur de la matière polarisée. Toujours est-il qu'en l'absence de couples externes donnés, des couples de contraintes surgissent suite aux interactions entre les parties adjacentes du matériau, autres que les forces colinéaires d'interaction. Les couples de contrainte sont introduits en M.M.C. par Voigt et Cosserat, mais ces formulations ne sont pas beaucoup appliquées. Plus récemment, Truesdell et Toupin (1960) les ont discutés. Aero et Kuvshinskii (1960), Toupin (1962), Mindlin et Tiersten (1962) ont considéré les matériaux élastiques avec couples de contraintes, et plusieurs auteurs ont considéré les effets possibles par la concentration des contraintes. Nous admettrons que l'interaction en travers de toute surface intérieure, consiste en des forces colinéaires égales et opposées, plus des couples égaux et opposés.

Considérons un volume matériel B_0 délimité par la surface S_0 (fig. III-1). Imaginons une portion B_1 , qui est séparée du reste du volume B_0 par la surface S_1 . Donc, en accord avec la forme généralisée

du principe de contrainte d'Euler et Cauchy, l'action de $(B_0 - B_1)$ sur B_1 est équivalente à un vecteur de contrainte t_i et un couple de contrainte m_i opérant sur la surface S_1 délimitant B_1 .

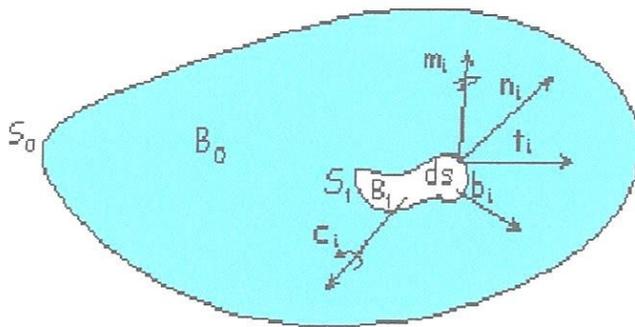


Fig. III-1: Bilan des efforts agissant sur un élément de volume.

La théorie non polaire des fluides est caractérisée par la condition $m_i = 0, c_i = 0$ [14], où c_i est le moment volumique par unité de masse. A priori, il n'y a pas de raison de prendre : $m_i = 0$. Essentiellement, si m_i est différent de zéro, alors l'action d'une partie du volume sur son voisinage ne peut être représentée par la considération de la seule force, mais par une force et un couple.

3. Cinématique de l'écoulement

Si les u_i sont les composantes du champ de vitesse, alors, le tenseur du taux de déformation D_{ij} qui est la partie symétrique du gradient de vitesse $u_{i,j}$, est donné par :

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (\text{III-1})$$

-Et le tenseur de vorticité W_{ij} , qui est la partie antisymétrique, est donné par :

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}) \quad (\text{III-2})$$

-Le vecteur tourbillon ou de vorticité w_i est défini comme la moitié du rotationnel du vecteur vitesse :

$$w_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} u_{k,j} \quad (\text{III-3})$$

-Le vecteur de vorticité est lié au tenseur de vorticité par les équations :

$$W_{ij} = e_{ijk} w_k \quad (\text{III-4})$$

$$w_i = \frac{1}{2} e_{ijk} W_{jk} \quad (\text{III-5})$$

- Le tenseur du taux de courbure et de torsion K_{ij} , est défini comme étant le gradient de vorticité, donc :

$$K_{ij} = w_{j,i} \quad (\text{III-6})$$

- Les composantes diagonales du champ de K_{ij} sont une mesure du taux de torsion du matériau par unité de longueur par rapport aux trois axes.

- Les composantes non diagonales du champ de K_{ij} sont une mesure des courbures produites par unité de temps dans les différents plans.

4. Equations du domaine

Par hypothèse, le lubrifiant formé par une base d'huile dopée par des additifs est pris comme étant un fluide polaire de Stokes. On admet, aussi, l'hypothèse que le film de fluide est mince. Sous ces hypothèses et en accord avec la théorie des milieux continus de Stokes [14], nous présentons les équations fondamentales de ces milieux continus:

4.1. Equation de continuité

Cette équation exprime la conservation de la masse dans l'écoulement

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{III-7})$$

où : ρ est la masse volumique du fluide, les x_i , u_i sont, respectivement, les composantes du vecteur position et du vecteur vitesse et $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulaire. Dans l'hypothèse d'un fluide incompressible ($\rho = \text{constante}$) l'équation de continuité se résume à:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{III-8})$$

et qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-9})$$

4.2. Equations de mouvement d'Euler

Ces équations expriment la conservation de la quantité de mouvement (de translation et de rotation) et qui sont [18]:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_S t_i dS + \int_V \rho b_i dV \quad (\text{III-10})$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho [e_{ijk} x_j \dot{x}_k + l_i] dV = \int_S [e_{ijk} x_j t_k + m_i] dS + \int_V \rho [e_{ijk} x_j b_k + c_i] dV \quad (\text{III-11})$$

où : t_i et b_i sont respectivement le vecteur de contrainte par unité de masse (associé à la surface de normale n_i) et le vecteur force de volume, l_i la $i^{\text{ème}}$ composante de la quantité de mouvement (par unité de masse) de rotation de la particule, m_i et c_i sont, respectivement, les composantes des vecteurs couple de contraintes et couple de volume.

Ces équations et le principe de contrainte d'Euler et de Cauchy prouvent l'existence du tenseur de contraintes T_{ij} et du tenseur des couples de contrainte M_{ij} qui sont donnés par les équations [16]:

$$t_i = n_j T_{ji}, \quad m_i = n_j M_{ji} \quad (\text{III-12})$$

où n_i est la normale unitaire à la surface où t_i et m_i agissent.

En substituant (III-12) dans les équations (III-10) et (III-11) avec quelques arrangements et simplifications, on aura les équations ponctuelles (le volume étant défini arbitrairement):

$$\rho \ddot{x}_i = T_{ji,j} + \rho b_i \quad (\text{III-13})$$

$$M_{ri,r} + \rho c_i + e_{ijk} T_{jk} = \rho \frac{dl_i}{dt} \quad (\text{III-14})$$

$$\text{avec : } \ddot{x}_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{D^2 x_i}{Dt^2}. \quad (\text{III-15})$$

Le système d'équations différentielles (III-14) exprime le principe de la variation de la quantité de mouvement de rotation l_i en présence de couple de contraintes M_n et couple de volume c_i par unité

de masse. Si la particule ne tourne pas autour de son centre d'inertie en plus du moment de la quantité de mouvement de translation, les équations (III-14) prennent, même dans le cas dynamique [9], la forme:

$$\frac{\partial M_{ri}}{\partial x_r} + \rho c_i + e_{ijk} T_{jk} = 0 \quad (\text{III-16})$$

La quantité $e_{ijk} T_{jk}$ ne s'annule plus et, par conséquent, le tenseur des contraintes n'est plus symétrique, mais peut être exprimé par la somme d'une partie symétrique notée $T_{(ij)}$ et une partie antisymétrique notée $T_{[ij]}$:

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = T_{ij}^S \quad (\text{III-17})$$

$$\text{et } T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = T_{ij}^A \quad (\text{III-18})$$

La quantité $e_{ijk} T_{jk}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} e_{1jk} T_{jk} &= 2T_{[23]} \\ e_{2jk} T_{jk} &= 2T_{[31]} \\ e_{3jk} T_{jk} &= 2T_{[12]} \end{aligned}$$

les équations (III-13), (III-14) et (III-16) constituent les lois de mouvement de Cauchy qui s'écrivent en coordonnées cylindriques :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \rho b_r \\ \rho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) &= \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \rho b_\theta \\ \rho \frac{Du_z}{Dt} &= \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} + \rho b_z \end{aligned} \right. \quad (\text{III-19})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{zr}}{\partial z} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r} + \rho c_r + T_{\theta z} - T_{z\theta} &= 0 \\ \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} + \frac{M_{r\theta} + M_{\theta r}}{r} + \rho c_\theta + T_{zr} - T_{rz} &= 0 \\ \frac{\partial M_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{zz}}{\partial z} + \frac{M_{rz}}{r} + \rho c_z + T_{r\theta} - T_{\theta r} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{III-20})$$

où: u_r , u_θ et u_z sont, respectivement, les composantes de la vitesse de l'écoulement suivant r , θ et z .

4.3. Equation de conservation de l'énergie

Cette équation est donnée par la première loi de la thermodynamique [16] qui relie le travail effectué dans le système et le transfert de chaleur à l'intérieur du système à la variation de l'énergie totale du système:

$$\frac{d(\text{Energie totale du système})}{dt} = \text{Puissance}_{\text{reçue}} + \text{Chaleur}_{\text{reçue}} \quad (\text{III-21})$$

Ce qui se traduit par:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left[\frac{1}{2} \rho u_i u_i + \rho e \right] dV = \int_S [t_i u_i + m_i w_i] dS + \int_V [\rho b_i u_i + \rho c_i w_i] dV - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho r^* dV \quad (\text{III-22})$$

où; e est la densité d'énergie interne par unité de masse; q_i est le flux d'énergie par unité d'aire; r^* source de chaleur interne par unité de masse. Après simplifications, en usant des lois de mouvement de Cauchy, nous aurons l'équation ponctuelle:

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{(ij)} D_{ij} + M_{ji} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \rho r^* - \frac{\partial q_m}{\partial x_m}, \quad \text{avec: } q_m = -k \frac{\partial T}{\partial x_m}, \quad i, j, m = 1, 2, 3 \quad (\text{III-23})$$

$$\text{et avec : } M_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \left(M_{ij}^D + \frac{1}{3} M_{mn} \delta_{ij} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = M_{ij}^D \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad (\text{III-24})$$

$$\text{parce que: } \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0$$

L'équation d'énergie devient:

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{(ij)} D_{ij} + M_{ij}^D \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \rho r^* - q_{j,j} \quad (\text{III-25})$$

Il est intéressant de noter que, dans l'équation de l'énergie, seulement la partie symétrique du tenseur des contraintes et la partie déviatorique du tenseur couple des contraintes apparaissent.

4.4. Equations constitutives

Dans le cas polaire, il y'a une similitude étroite entre les équations constitutives des matériaux élastiques et fluides, c'est-à-dire : quand nous substituons au champ des vitesses le champ des

déplacements dans les équations constitutives pour l'élasticité linéaire nous aurons (excepté pour un terme isotropique) l'équation constitutive pour les fluides. V. K. Stokes [14] a procédé de la même manière et a proposé les équations constitutives, pour fluides polaires, suivantes:

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} - \frac{1}{2} e_{ijk} M_{rk,r} \quad (\text{III-26})$$

$$M_{ij}^D = 4\eta \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + 4\eta' \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \quad (\text{III-27})$$

- Pour qu'il y ait un couple des contraintes, le gradient de vorticité doit être non nul.

Les dimensions des constantes du matériau λ et μ sont ceux de la viscosité (c.à.d, $ML^{-1}T^{-1}$), alors que ceux de η et η' sont ceux de la quantité de mouvement (c-à-d, MLT^{-1}). Les constantes λ et μ ne doivent pas être confondues avec celles des cas non polaires. Le rapport $\frac{\eta}{\mu}$ a la dimension d'un carré de longueur et nous notons cette constante du matériau par : $\ell = \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$.

5. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée pour fluides polaires (coordonnées cartésiennes)

En reportant l'équation de comportement rhéologique (II-3) ou (III-26) dans l'équation de la dynamique (III-13) et en négligeant les forces de volume, on obtient les équations de mouvement qui s'écrivent, en notation vectorielle :

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\bar{\nabla}p + \mu \Delta \bar{u} - \eta \Delta^2 \bar{u} \quad (\text{III-28})$$

et en notation indicielle :

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -p_{,i} + \mu u_{i,rr} - \eta u_{i,rrss} \quad (\text{III-29})$$

Dans ce qui suit, nous adoptons le changement de notation suivant : (x, y, z) au lieu de (x_1, x_2, x_3) et (u, v, w) au lieu de (u_1, u_2, u_3) .

En mécanique des films minces visqueux [19], la dimension suivant l'épaisseur du film $(0, \vec{y})$ est très faible par rapport aux deux autres (Fig. III-2), ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes du système d'équations (III-26) d'effectuer une analyse dimensionnelle. Pour ce faire, choisissons les variables adimensionnées suivantes:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{h}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{tV}{L}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}, \quad (III-30)$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad \tilde{v} = \frac{vL}{Vh}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{V}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

où; L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes $(0, \vec{x})$ et $(0, \vec{z})$, h et $\frac{Vh}{L}$ celles suivant $(0, \vec{y})$, $\frac{L}{V}$, μ_0 et η_0 définissent l'ordre de grandeur du temps et des constantes physiques du fluide, ρ_0 celui de la masse volumique. Ce changement de variables conduit

à poser : $\tilde{p} = p \frac{h^2}{VL\mu_0}$

Compte tenu de ce changement de variables et en posant $\Re = \frac{\rho_0 Vh}{\mu_0}$: nombre de Reynolds relatif à

l'épaisseur du film et $\varepsilon = \frac{h}{L}$ paramètre d'échelle. Et en négligeant les termes en $\varepsilon \Re$, ou termes d'inertie devant les termes de viscosité quand $\Re \ll 1$ (Voir Annexe D pour les détails).

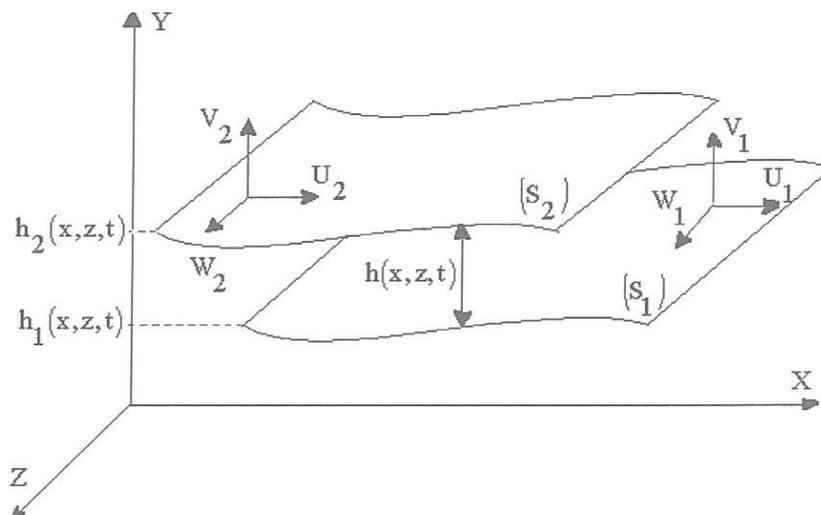


Fig. III-2: Schéma général d'un contact hydrodynamique

Donc le système d'équations (III-29) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \end{cases} \quad (\text{III-31})$$

Ces équations auxquelles s'ajoutent l'équation de conservation de la masse (III-8) et l'équation de conservation de l'énergie (III-25) permettent de connaître formellement, et après intégration, le champ de vitesse, la pression et les contraintes de cisaillement dans le film. La solution générale du système (III-31) s'écrit :

$$\begin{cases} u(y) = A_1 + A_2 y + B_1 \text{ch}\left(\frac{y}{\ell}\right) + B_2 \text{sh}\left(\frac{y}{\ell}\right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 \\ w(y) = C_1 + C_2 y + D_1 \text{ch}\left(\frac{y}{\ell}\right) + D_2 \text{sh}\left(\frac{y}{\ell}\right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 \end{cases} \quad (\text{III-32})$$

L'identification des constantes d'intégration nécessite l'utilisation des conditions aux limites sur la vitesse (ou condition de non glissement); en choisissant de fixer l'origine du système d'axes confondu avec la paroi 1 (Fig. III-3), ce qui impose à la vitesse de cette paroi, selon y , d'être nulle [21]. Dans ce cas de figure ces conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{Pour } y = 0 : \quad & u(0) = U_1, \quad v(0) = 0, \quad w(0) = W_1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \text{Pour } y = h : \quad & u(h) = U_2, \quad v(h) = V_2, \quad w(h) = W_2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-33})$$

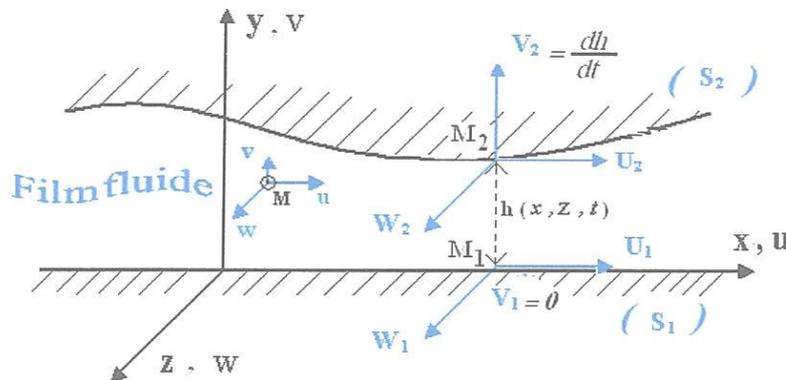


Fig. III-3: Schéma du contact hydrodynamique selon la théorie de Reynolds (paroi inférieure (S1) confondue avec le plan du référentiel $(0, x, z)$).

En intégrant les composantes de la vitesse, selon x et z, à travers l'épaisseur du film, on obtient l'équation de Reynolds pour les films minces visqueux en coordonnées cartésiennes :

$$\int_0^h \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dy = \frac{U_2 + U_1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^3 \left[1 - 12 \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \left[1 - 2 \frac{\ell}{h} \operatorname{th} \left(\frac{h}{2\ell} \right) \right] \right] \right) - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III-39})$$

$$+ \frac{W_2 + W_1}{2} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} h^3 \left[1 - 12 \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \left[1 - 2 \frac{\ell}{h} \operatorname{th} \left(\frac{h}{2\ell} \right) \right] \right] \right) - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + V_2 = 0$$

$$\int_0^h \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dy = \frac{U_1 - U_2}{2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{W_1 - W_2}{2} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + V_2 = 0$$

$$\text{avec : } V_2 = \frac{Dh(x, z, t)}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \quad (\text{III-40})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{(U_1 + U_2)}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{(W_1 + W_2)}{2} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III-41})$$

Et sous la forme vectorielle:

$$\vec{\nabla} \cdot (G(\ell, h) \vec{\nabla} p) = 6\mu \vec{\nabla} \cdot (h \vec{U}) + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III-42})$$

$$\text{où : } \vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 + U_2 \\ W_1 + W_2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\nabla} p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$\vec{\nabla} \cdot$ étant l'opérateur de divergence

Dans le cas de butées hydrodynamiques seul le grain mobile (paroi 1) est en mouvement $U_2 = 0$ et la géométrie du film, pour notre cas, varie avec x, et si on néglige le terme transitoire, l'équation de Reynolds se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U_1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III-43})$$

avec:

$$G(\ell, h) = h^3 \left[1 - 12 \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{\ell}{h} \operatorname{th} \left(\frac{h}{\ell} \right) \right) \right] = h^3 - 12\ell^2 h + 24\ell h \left(\frac{h}{2\ell} \right) \quad (\text{III-44})$$

et $U_1 = \omega r$

6. Equation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques

Pour l'écriture de l'équation de Reynolds modifiée, en coordonnées cylindriques, nous procéderons de la même manière que dans le cas cartésien. En coordonnées cylindriques, les équations de mouvement s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) - \eta \left(\Delta^2 u_r - \frac{2}{r^2} \Delta u_r - \frac{4}{r^2} \Delta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{4}{r^4} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{4}{r^3} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{u_r}{r^4} \right) \\ \rho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) - \eta \left(\Delta^2 u_\theta - \frac{2}{r^2} \Delta u_\theta + \frac{4}{r^2} \Delta \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right. \\ \left. - \frac{4}{r^4} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{u_\theta}{r^4} \right) \\ \rho \frac{Du_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta u_z - \eta \Delta^2 u_z \end{array} \right. \quad (\text{III-45})$$

Avec:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et :

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial \theta^2 \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} \right)$$

Après analyse dimensionnelle (Voir Annexe D pour les détails), on arrive au système :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u_r}{\partial z^4} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u_\theta}{\partial z^4}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \rightarrow p = p(r, \theta) \end{cases} \quad (\text{III-46})$$

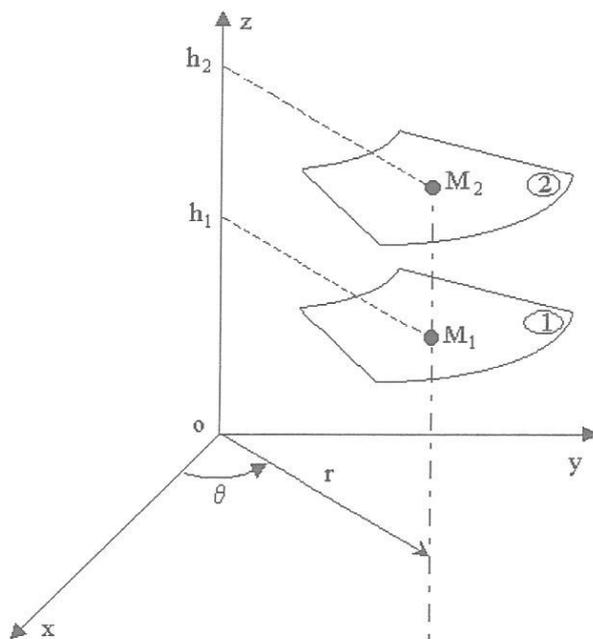


Fig. III- 4: Schématisation d'un patin dans le repère absolu

L'intégration des équations de ce système nous permet d'obtenir les expressions du champ des vitesses et des contraintes de cisaillement dans le fluide écrites en coordonnées cylindriques. En choisissant de fixer le système d'axes avec la surface du grain mobile (paroi 1 dans les figures III-4 et 5), les conditions aux limites sur les vitesses sont :

$$\begin{aligned} \text{Conditions de non glissement} & \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } z=0: u_r = U_{1r}, u_\theta = U_{1\theta}, u_z = U_{1z} \\ \text{pour } z=h: u_r = U_{2r}, u_\theta = U_{2\theta}, u_z = U_{2z} \end{array} \right\} \\ \text{Couples de contraintes nuls aux parois} & \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } z=0: \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = 0 \\ \text{pour } z=h: \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III-47})$$

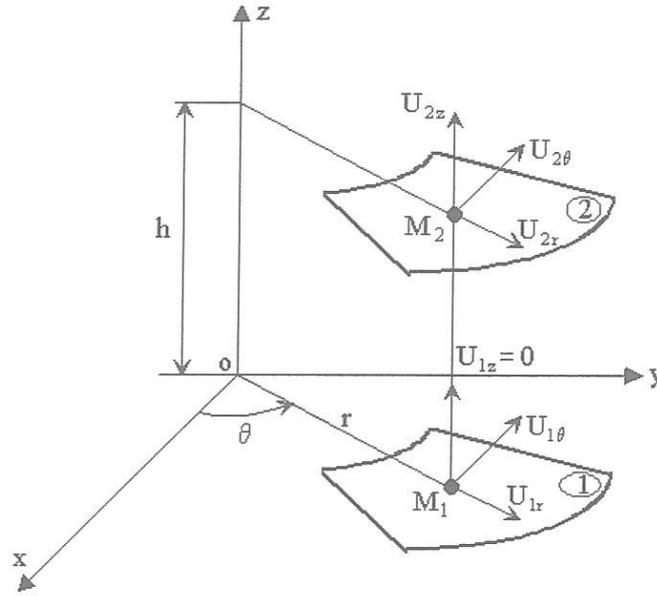


Fig. III-5: Origine du système confondu avec la paroi 1.

Après intégration et identifications des constantes d'intégration, le champ des vitesses s'écrit :

$$\begin{cases} u_r = U_{1r} + \frac{U_{2r} - U_{1r}}{h} z + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \left[z^2 - zh + 2\ell^2 \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{2z-h}{2\ell}\right)}{\text{ch}\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \right] \\ u_\theta = U_{1\theta} + \frac{U_{2\theta} - U_{1\theta}}{h} z + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \left[z^2 - zh + 2\ell^2 \left(1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{2z-h}{2\ell}\right)}{\text{ch}\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{III-48})$$

Pour obtenir l'équation de Reynolds modifiée, on doit intégrer l'équation de continuité à travers l'épaisseur du film:

$$\int_0^h \left(\frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dz = \int_0^h \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) dz + \int_0^h \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} dz + r \int_0^h \frac{\partial u_z}{\partial z} dz = 0. \quad (\text{III-49})$$

La formule de Leibnitz nous permet de permuter l'opérateur de dérivation avec celui de l'intégration.

Ce qui se traduit par:

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) dz = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h ru_r dz - r U_{2r} \frac{\partial h}{\partial r} \quad (\text{III-50})$$

$$\int_0^h \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} dz = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h u_\theta dz - U_{2\theta} \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (\text{III-51})$$

Le troisième terme s'écrit:

$$r \int_0^h \frac{\partial u_z}{\partial r} dz = r U_{2z} \quad (\text{III-52})$$

Après intégration et dérivation, on obtient l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rG(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{r\partial \theta} \right) = \frac{r}{2} (U_{1r} + U_{2r}) \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{U_{1\theta} + U_{2\theta}}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{U_{2r} + U_{1r}}{2} h + r \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III-53})$$

qui est l'équation de Reynolds modifiée pour le cas de fluides polaires, avec:

$$U_{2z} = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_{2r} \frac{\partial h}{\partial r} + U_{2\theta} \frac{\partial h}{r\partial \theta} \quad (\text{III-54})$$

$$\text{et } G(\ell, h) = h^3 \left\{ 1 - 12 \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \left[1 - 2 \frac{\ell}{h} \text{th} \left(\frac{h}{2\ell} \right) \right] \right\} = h^3 - 12\ell^2 h + 24\ell^3 \text{th} \left(\frac{h}{2\ell} \right) \quad (\text{III-55})$$

Dans le cas d'une butée hydrodynamique seul le grain mobile, entraîné par l'arbre, est animé d'un mouvement de rotation de vitesse linéaire ωr . Toutes les autres vitesses étant nulles, l'équation de Reynolds, écrite en coordonnées cylindriques pour un fluide polaire, se réduit à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rG(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \frac{\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (\text{III-56})$$

7. Calcul des performances statiques des butées

7.1. Champ de pression dans le film

Le champ de pression hydrostatique et hydrodynamique est obtenu à partir de l'intégration de l'équation de Reynolds modifiée (III-43) et (III-56) en satisfaisant les différentes conditions aux limites sur la pression liées à l'alimentation, à l'écoulement du fluide lubrifiant dans les butées et à l'environnement dans lequel fonctionne le système. La connaissance du champ de pression permettra de déduire aisément les différentes caractéristiques du contact tels que la portance, les débits de fuite, la puissance dissipée.

7.2. Action du fluide sur les surfaces des butées

L'action de contact \vec{t} , appelée habituellement le vecteur contrainte, exercée en un point M de la paroi, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal \mathbf{n} :

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = \sum_{i=1}^3 t_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^3 T_{ji} n_j \vec{x}_i \quad (\text{III-57})$$

si n_j représentent les composantes du vecteur normal en M orienté de la surface vers le fluide (normale extérieure).

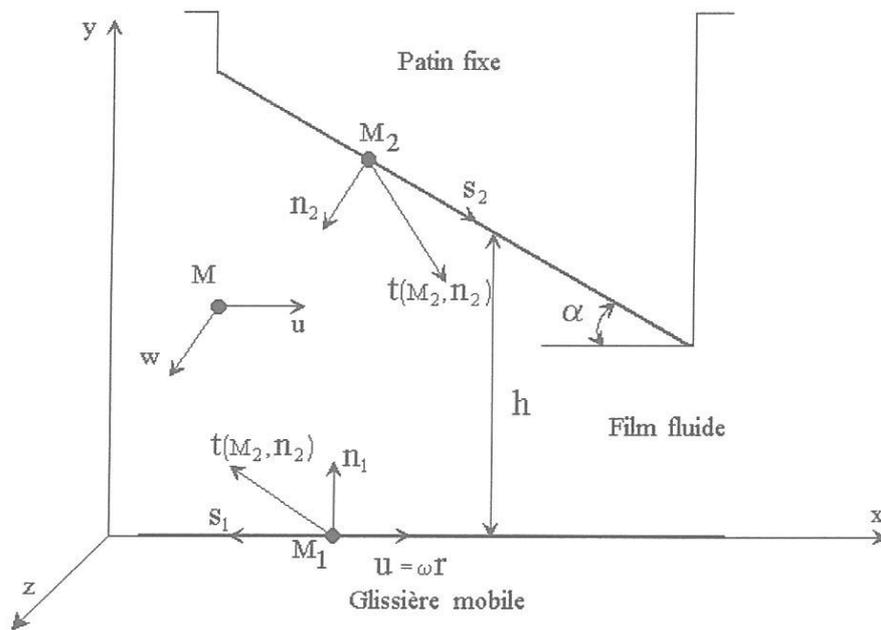


Fig. III-6: Action du fluide sur les parois d'une butée hydrodynamique

Aux parois du contact, le fluide lubrifiant se comporte comme un fluide newtonien, car les couples de contraintes sont nuls aux parois [23], la matrice représentative du tenseur des contraintes à la paroi s'écrit alors:

$$[\mathbf{T}_p] = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p & \mu \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 & \mu \frac{\partial w}{\partial y} & -p \end{bmatrix} \quad (\text{III-58})$$

Les éléments de réduction en un point C quelconque du torseur des actions de contact du fluide sur la surface S du contact seront donc:

$$\text{Résultante : } \mathbf{R} = \iint_S \mathbf{t} dS = \iint_S [\mathbf{T}_p] \mathbf{n} dS \quad (\text{III-59})$$

$$\text{Moment en C : } \mathbf{M}(C) = \iint_S \mathbf{CM} \times \mathbf{t} dS$$

Dans le repère (x, y, z) (figure III-6), les cosinus directeurs de la normale sont:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III-60})$$

$$\text{soit : } [\mathbf{T}_p] \mathbf{n} = \begin{pmatrix} p \sin \alpha - \cos \alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0,h} \\ -\mu \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0,h} + p \cos \alpha \\ -\cos \alpha \mu \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0,h} \end{pmatrix} \quad (\text{III-61})$$

l'angle d'incidence α , h étant petit, on peut écrire : $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \text{tg} \alpha \approx \alpha$ avec $\text{tg} \alpha = \frac{\partial h}{\partial x}$

par conséquent, les composantes de la résultante \mathbf{R} se réduisent à:

$$\mathbf{R} = \iint_S \begin{pmatrix} -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0,h} \\ p \\ -\mu \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0,h} \end{pmatrix} dS \quad (\text{III-62})$$

la première et la troisième composante du vecteur \mathbf{R} représentent respectivement les forces de frottement exercées par le fluide sur les parois selon x et z, tandis que la deuxième composante

$\iint_S p dS$ représente la portance hydrodynamique du système.

7.3. Vitesses moyennes de l'écoulement

Les vitesses moyennes de l'écoulement se calculent par :

- coordonnées cartésiennes

$$\left\{ \begin{aligned} u_m &= \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{1}{h} \int_0^h \left[\frac{h-y}{h} U_1 + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left[y^2 - yh + 2\ell^2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \right] \right] dy \\ w_m &= \frac{1}{h} \int_0^h w(y) dy = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left[y^2 - yh + 2\ell^2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \right] dy \end{aligned} \right. \quad (\text{III-63})$$

après intégration:

$$\left\{ \begin{aligned} u_m &= \frac{U_1}{2} - \frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left[1 - 12 \frac{\ell^2}{h^2} \left(1 - 2 \frac{\ell}{h} \operatorname{th}\left(\frac{h}{2\ell}\right) \right) \right] = \frac{U_1}{2} - \frac{G(\ell, h)}{12\mu h} \frac{\partial p}{\partial x} \\ w_m &= -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left[1 - 12 \frac{\ell^2}{h^2} \left(1 - 2 \frac{\ell}{h} \operatorname{th}\left(\frac{h}{2\ell}\right) \right) \right] = -\frac{G(\ell, h)}{12\mu h} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right. \quad (\text{III-64})$$

- coordonnées cylindriques

$$\left\{ \begin{aligned} u_{rm} &= \frac{1}{h} \int_0^h u_r(z) dz = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \left[z^2 - zh + 2\ell^2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2z-h}{2\ell}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \right] dz \\ u_{\theta m} &= \frac{1}{h} \int_0^h u_\theta(z) dz = \frac{1}{h} \int_0^h \left\{ \omega r \frac{h-z}{h} + \frac{1}{2\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left[z^2 - zh + 2\ell^2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2z-h}{2\ell}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right) \right] \right\} dz \end{aligned} \right. \quad (\text{III-65})$$

après intégration:

$$\left\{ \begin{aligned} u_{rm} &= -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \left[1 - 12 \frac{\ell^2}{h^2} \left(1 - 2 \frac{\ell}{h} \operatorname{th}\left(\frac{h}{2\ell}\right) \right) \right] = -\frac{G(\ell, h)}{12\mu h} \frac{\partial p}{\partial r} \\ u_{\theta m} &= \frac{\omega r}{2} - \frac{h^2}{12\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left[1 - 12 \frac{\ell^2}{h^2} \left(1 - 2 \frac{\ell}{h} \operatorname{th}\left(\frac{h}{2\ell}\right) \right) \right] = \frac{\omega r}{2} - \frac{G(\ell, h)}{12\mu r h} \frac{\partial p}{\partial \theta} \end{aligned} \right. \quad (\text{III-66})$$

7.4. Débits de fuite

Les débits suivant x et z se calculent par intégration du champ de vitesse de l'écoulement u et w (Fig.III-7) :

$$Q_x = \iint_{S \perp x} u dS \quad (\text{III-67})$$

$$Q_z = \iint_{S \perp z} w dS \quad (\text{III-68})$$

les expressions de u et de w sont données par les équations (III-34 et 48). Les débits selon \bar{x} et \bar{z} , dans le cas de butée de forme rectangulaire, peuvent aussi être calculés en utilisant les expressions des vitesses moyennes par :

$$Q_x = \int_0^B u_m h dz = h \int_0^B u_m dz = -\frac{G(\ell, h)B}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{III-69})$$

de même :

$$Q_z = h \int_0^L w_m dx = -\frac{G(\ell, h)L}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{III-70})$$

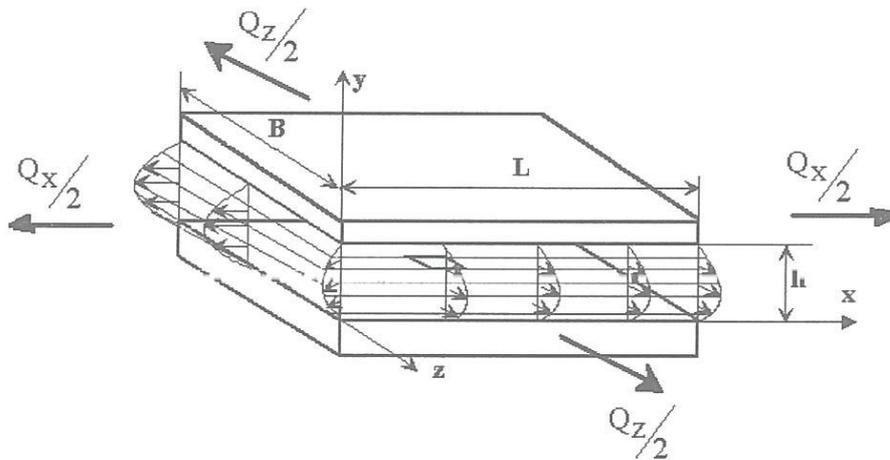


Fig. III-7 : Débits de fuite.

et dans le cas de butée de forme cylindrique, le débit selon la direction \bar{e}_r peut être calculé en utilisant les expressions des vitesses moyennes.

-Dans le cas de la butée hydrostatique: où la surface totale de la butée est active le débit radial se calcule par :

$$Q_r = -\frac{\pi R G}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R_e} \quad (\text{III-71})$$

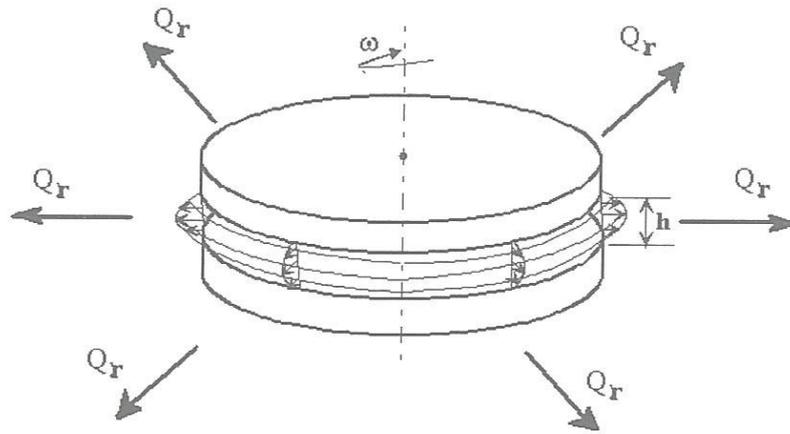


Fig. III-8 : Débit de fuite radial.

- cas de la butée hydrodynamique: où la surface active de la butée est subdivisée en secteurs angulaires (patins) dont le profil géométrique varie avec theta. La figure III-9 montre la disposition des quatre différents débits relatifs aux quatre sections du film dans le patin.

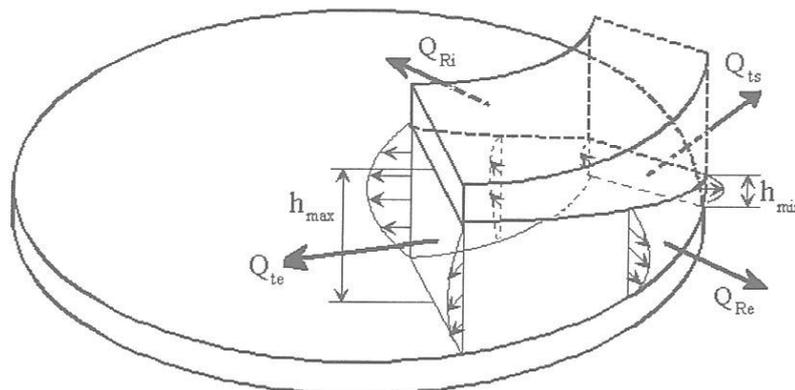


Fig. III-9 : Débits de fuite radial et circonférentiel.

Chaque débit est obtenu en intégrant la vitesse du fluide sur la surface considérée. Le débit radial s'écrit :

$$Q_r = \int_0^{\theta_0} u_{rm} h r d\theta \quad (III-72)$$

ce débit se subdivise en débit radial Q_{Ri} s'échappant par la surface $r = Ri$ et Q_{Re} s'échappant par la surface $r = Re$

$$Q_r = Q_{Re} + Q_{Ri} = \int_0^{\theta_0} h(R_e, \theta) u_{rm}(R_e, \theta) R_e d\theta + \int_0^{\theta_0} h(R_i, \theta) u_{rm}(R_i, \theta) R_i d\theta \quad (III-73)$$

la somme de ces deux débits est égale au débit radial total :

$$Q_r = -\frac{\theta_0}{12\mu} \left[R_e \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R_e} + R_i \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R_i} \right] \left\{ \frac{(h_2+h_1)^3 - 2h_1h_2(h_2+h_1)}{4} - 6\ell^2 \left((h_2+h_1) + 7 \frac{\ell^2}{C_w} \log \operatorname{ch} \left(\frac{h}{2\ell} \right) \right) \right\} \quad (\text{III-74})$$

dans le cas de la butée hydrodynamique à patins fixes, les débits tangentiels d'entrée Q_{ie} et de sortie Q_{is} étant dans la direction du mouvement et par conséquent compensés par l'arrivée continue du fluide.

6.5. Puissance dissipée

L'intégration de la fonction visqueuse Φ permet de calculer la puissance dissipée due au cisaillement du fluide :

$$\mathcal{P} = \iiint_V \Phi dV \quad (\text{III-75})$$

Avec :

$$\Phi = \mathbf{T} : \nabla \mathbf{u} = (\mathbf{T}_{(ij)} + \mathbf{T}_{[ij]}): (\mathbf{D}_{ij} + \mathbf{W}_{ij}) = \mathbf{T}_{(ij)} \mathbf{D}_{ij} + \mathbf{T}_{[ij]} \mathbf{W}_{ij} \quad (\text{III-76})$$

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \eta \left[\frac{\partial^2}{\partial x_r^2} \left(e_{kmn} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \right] \left(e_{kij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III-77})$$

Dans le cas d'un écoulement de films minces, les gradients de vitesse $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial z$, $\partial w / \partial x$ et $\partial w / \partial z$ sont négligeables devant $\partial u / \partial y$ et $\partial w / \partial y$. L'équation (III-77) se réduit à [24] :

$$\Phi = \mu \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \ell^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \right\} \quad (\text{III-78})$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\Phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \quad (\text{III-79})$$

Après intégration à travers l'épaisseur du film, la puissance dissipée s'écrit :

$$\mathcal{P} = \int_0^L \int_0^1 \left\{ \mu \frac{U_1^2}{h} + \frac{G(\ell, h)}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dx dz \quad (\text{III-80})$$

Pour un fluide newtonien ($\ell = 0$), l'équation (III-80) prend la forme :

$$\mathcal{P} = \int_0^L \int_0^1 \left\{ \mu \frac{U_1^2}{h} + \frac{h^3}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dx dz \quad (\text{III-81})$$

En coordonnées cylindriques, l'expression de la puissance dissipée prend la forme :

$$\mathcal{P} = \int_0^{\theta_0} \int_{R_i}^{R_e} \left\{ \frac{5}{3} \mu \omega^2 h - \frac{\omega G(\ell, h)}{6r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{H(\ell, h)}{12\mu r^2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{r \partial \theta} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\ell}{r} \right)^2 \right) \right] \right\} r dr d\theta \quad (\text{III-82})$$

avec :

$$H(\ell, h) = \frac{29}{5} h^5 + 6G(\ell, h)\ell^2 + 12\ell^4 h - 12h\ell^4 \text{th}^2 \left(\frac{h}{2\ell} \right) + 24\ell^5 \text{th} \left(\frac{h}{2\ell} \right) \quad (\text{III-83})$$

Pour un fluide newtonien, cette expression se réduit à :

$$\mathcal{P} = \int_0^{\theta_0} \int_{R_i}^{R_e} \left\{ \frac{5}{3} \mu \omega^2 h - \frac{\omega h^3}{6r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{h^5}{60\mu r^2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{r \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta \quad (\text{III-84})$$

7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé en détail la théorie des milieux continus de V. K. Stokes pour décrire l'écoulement des fluides polaires invoquant la notion de couples de contraintes. Sur la base de cette théorie, nous avons dérivé une équation aux dérivées partielles du second ordre en coordonnées cartésiennes et cylindriques appelée équation de Reynolds modifiée dont l'inconnue principale est la pression dans le fluide. Enfin, nous avons formulé les principales caractéristiques statiques des butées fluides, à savoir la portance, le débit de fuite et la puissance dissipée. Dans le chapitre suivant, nous allons développer les formes intégrales associées à l'équation de Reynolds modifiée en utilisant les coordonnées cartésiennes et polaires. La discrétisation de ces formes intégrales par éléments finis permettra de calculer le champ de pression en tout point du fluide.

Formulation du problème de lubrification dans les butées fluides par la méthode des éléments finis

1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le problème de la lubrification hydrostatique et hydrodynamique par fluides polaires non newtoniens est gouverné par l'équation de Reynolds modifiée qui est une équation, aux dérivées partielles, scalaire linéaire du second ordre de type elliptique qui n'admet pas de solution analytique sauf pour des configurations simples. Pour trouver une solution approchée, nous devons remplacer le problème continu, dont le nombre de degrés de liberté est infini par un système discret ayant un nombre fini de degrés de liberté et représenté par un système d'équations algébriques qui seront ensuite résolues par les méthodes numériques. Cette tâche de discrétisation peut être remplie par la méthode des éléments finis. Cependant, cette dernière utilise une formulation intégrale (ou variationnelle) plutôt que des équations aux dérivées partielles. Cette formulation intégrale sera effectuée par la méthode de Galerkin, qui est l'une des approches des résidus pondérés, et qui constitue la meilleure technique pour obtenir des solutions approchées des équations différentielles linéaires et non linéaires, parce qu'offrant la procédure la plus générale pour dériver les équations élémentaires directement des équations différentielles et peuvent être appliquées à la plupart des problèmes pratiques des sciences de l'ingénieur. Une fois la variable du domaine, qui est la distribution de la pression dans le fluide, connue nous pourrions calculer les performances statiques des butées hydrodynamiques et hydrostatiques, à savoir les forces de frottement, le débit de fuite par intégration du champ de vitesses moyennes aux bords des butées, la portance par intégration du champ de pression et la puissance dissipée par intégration de la fonction de dissipation visqueuse de l'écoulement.

2. Formulation variationnelle du problème de lubrification hydrostatique et hydrodynamique par fluide polaire incompressible

L'application du théorème des résidus pondérés de Galerkin [25] permet de construire une forme intégrale ou variationnelle du problème de lubrification hydrostatique, hydrodynamique ou hybride associée à l'équation de Reynolds modifiée. La formulation intégrale faible est obtenue à l'aide d'une

intégration par parties qui a pour but de réduire l'ordre de dérivabilité de la fonction inconnue (pression) et de pouvoir appliquer les conditions aux limites naturelles du problème.

2.1. Formulation en coordonnées cartésiennes

Nous avons montré au chapitre précédent que l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide polaire en coordonnées cartésiennes s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U_1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{dans (D)} \quad (\text{IV-1})$$

Le champ de pression p doit satisfaire à l'équation (IV-1) et à des conditions limites liées à l'alimentation, à l'écoulement du lubrifiant et à l'environnement dans lequel fonctionnent les butées fluides fonctionnant en régime de lubrification hydrostatique ou hydrodynamique. L'équation de Reynolds (IV-1) peut s'écrire sous la forme :

$$R(p) = L(p) - f \quad (\text{IV-2})$$

où: R est le résidu et L l'opérateur différentiel linéaire défini par :

$$L(\) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{G}{12\mu} \frac{\partial(\)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{G}{12\mu} \frac{\partial(\)}{\partial z} \right] \quad (\text{IV-3})$$

La forme intégrale de Galerkin associée à l'équation (IV-1) est :

$$W(p) = \int_D \delta p R(p) dD = \int_D \delta p \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{G}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{U_1}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] dD = 0 \quad (\text{IV-4})$$

En posant $F = \frac{G}{12\mu}$, l'équation (IV-4), après intégration par parties, s'écrit:

$$W(p) = - \int_D F \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial(\delta p)}{\partial z} \right) dD + \frac{U_1}{2} \int_D h \frac{\partial \delta p}{\partial x} dD + \int_{\Gamma} \delta p \left[F \frac{\partial p}{\partial x} n_x + F \frac{\partial p}{\partial z} n_z - h \frac{U_1}{2} \right] d\Gamma = 0 \quad (\text{IV-5})$$

Si la pression sur le contour ($\Gamma \equiv \partial D$) est imposée, le terme de frontière de l'équation (IV-5) s'annule. La formulation intégrale s'écrit alors:

$$W(p) = \int_D \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial(\delta p)}{\partial z} \right) dD - \frac{U_1}{2} \int_D h \frac{\partial \delta p}{\partial x} dD = 0 \quad (IV-6)$$

où $U_1 = \omega r$, ω étant la vitesse angulaire du grain mobile. Dans le cas d'une butée hydrostatique, l'équation (IV-6) se réduit à :

$$W(p) = \int_D \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial(\delta p)}{\partial z} \right) dD = 0 \quad (IV-7)$$

2.2. Formulation en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques r , θ et z , pour une épaisseur de film h mesurée dans la direction Oz l'équation de Reynolds (Chapitre III), en régime hydrodynamique, s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rG(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{G(\ell, h)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \frac{\omega r}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (IV-8)$$

En procédant de la même manière que précédemment, la forme intégrale associée à l'équation (IV-8) s'écrit :

$$W(p) = - \int_D \left(\frac{\partial \delta p}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \delta p}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) r dr d\theta + \frac{\omega}{2} \int_D r h \frac{\partial \delta p}{\partial \theta} r dr d\theta = 0 \quad (IV-9a)$$

ou encore :

$$W(p) = \int_D \left(\frac{\partial \delta p}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \delta p}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) dD - \frac{\omega}{2} \int_D r h \frac{\partial \delta p}{\partial \theta} dD = 0 \quad (IV-9b)$$

En régime hydrostatique, la forme intégrale (IV-10) s'écrit :

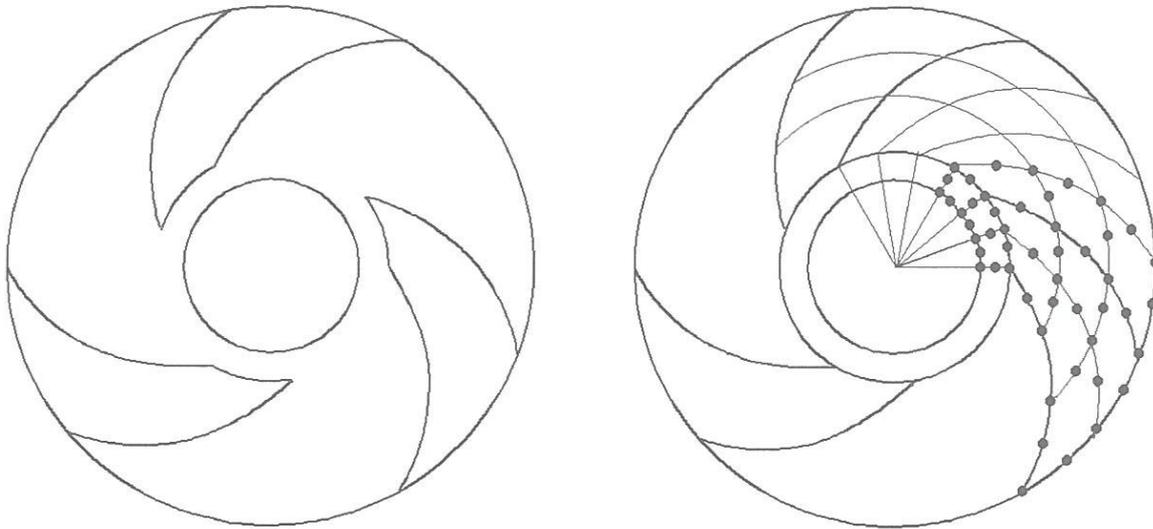
$$W(p) = \int_D \left(\frac{\partial \delta p}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \delta p}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) r dr d\theta = 0 \quad (IV-10)$$

3. Approximation des formes intégrales par éléments finis

3.1. Principe de la méthode

La méthode des éléments finis est une technique qui remplace un problème continu au nombre de degrés de liberté infini par un problème discret dont le nombre de degrés de liberté est fini. Les étapes de base dans l'analyse du problème par éléments finis sont :

- (i) discrétisation du domaine (milieu fluide);
- (ii) approximation de la pression sur un élément;
- (iii) formation des matrices et vecteurs caractéristiques élémentaires;
- (iv) assemblage des matrices et vecteurs élémentaires pour obtenir le système global;
- (v) introduction des conditions aux limites essentielles sur la pression;
- (vi) calcul du champ de la pression en tout point du fluide.



a) Problème continu

b) Problème discret (maillage de la butée)

Fig. IV- 1: Discretisation d'une butée à rainures spirales à l'aide d'éléments quadratiques à huit nœuds.

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation nodale par sous domaines. Elle consiste à découper le domaine (D) en sous domaines ou éléments $D^{(e)}$ tels que : $D = \bigcup_{e \geq 1} D^{(e)}$

(figures IV-1 et 2). Sur chaque élément, on effectue une approximation nodale qui ne fait intervenir que les nœuds de l'élément $D^{(e)}$. Ces éléments sont reliés entre eux par un certain nombre de points situés sur leur contour appelés points nodaux.

Les fonctions approchées $\tilde{p}^{(e)}(x, z)$ sur chaque élément de $D^{(e)}$ sont construites de manière à être continues sur $D^{(e)}$ et entre les différents éléments.

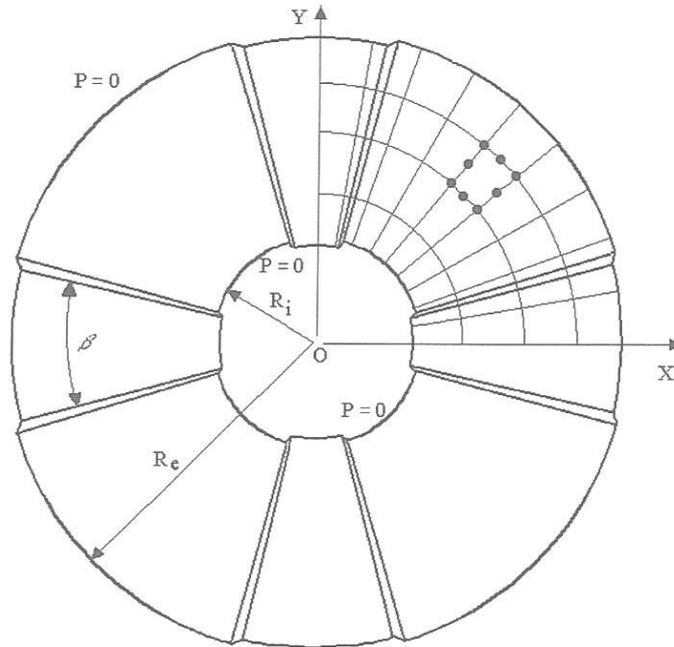


Fig. IV-2: Discrétisation d'une butée à rainure radiale.

3.2. Formulation du problème de lubrification hydrodynamique par éléments finis en coordonnées cartésiennes

3.2.1. Formulation élémentaire et discrétisation par éléments finis

Il est nécessaire pour opérer sur un élément de remplacer la forme intégrale W (éq. (IV-6)) par une somme de formes intégrales élémentaires w^e . Soit :

$$W(p) = \sum_{e=1}^{nelt} w^e(p^e) = 0 \quad (IV-11)$$

où :

$$w^e(p^e) = \int_{D^e} F^e \left(\frac{\partial \delta p^e}{\partial x} \frac{\partial p^e}{\partial x} + \frac{\partial \delta p^e}{\partial z} \frac{\partial p^e}{\partial z} \right) dD^e - \frac{U_1}{2} \int_D h \frac{\partial \delta p}{\partial x} dD^e \quad (IV-12)$$

et $dD^e = dx dz$.

La surface de la butée est découpée en $nelt$ éléments de npe nœuds (fig. IV-1 et 2). Dans chacun des éléments, les différentes fonctions sont reliées à leurs (npe) valeurs nodales par (npe) fonctions d'interpolation ou de forme N_i telles que :

- pour les fonctions connues :

$$\tilde{F}^e = \sum_{i=1}^{npe} N_i(x, z) F_i \quad \text{ou} \quad \tilde{F}^e = \langle N(x, z) \rangle \{F_n\} \quad (\text{IV-13})$$

$$\tilde{h}^e = \sum_{i=1}^{npe} N_i(x, z) h_i \quad \text{ou} \quad \tilde{h}^e = \langle N(x, z) \rangle \{h_n\} \quad (\text{IV-14})$$

-pour la fonction inconnue :

$$\tilde{p}^e = \sum_{i=1}^{npe} N_i(x, z) p_i, \quad \text{ou} \quad \tilde{p}^e = \langle N(x, z) \rangle \{p_n\} \quad (\text{IV-15})$$

-pour les gradients de la pression

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}^e}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{npe} \frac{\partial N_i}{\partial x} p_i & \text{ou} & \quad \frac{\partial \tilde{p}^e}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \{p_n\} \\ \frac{\partial \tilde{p}^e}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{npe} \frac{\partial N_i}{\partial z} p_i & \text{ou} & \quad \frac{\partial \tilde{p}^e}{\partial z} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle \{p_n\} \end{aligned} \quad (\text{IV-16})$$

de même pour la variation de la fonction inconnue:

$$\begin{cases} \delta \tilde{p}^e = \sum_{i=1}^{npe} N_i(x, z) \delta p_i & \text{ou} & \delta \tilde{p}^e = \langle N(x, z) \rangle \{ \delta p_n \} \\ \frac{\partial \delta \tilde{p}^e}{\partial x} = \sum_{i=1}^{npe} \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta p_i & \text{ou} & \frac{\partial \delta \tilde{p}^e}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x}(x, z) \right\rangle \{ \delta p_n \} \\ \frac{\partial \delta \tilde{p}^e}{\partial z} = \sum_{i=1}^{npe} \frac{\partial N_i}{\partial z} \delta p_i & \text{ou} & \frac{\partial \delta \tilde{p}^e}{\partial z} = \left\langle \frac{\partial N}{\partial z}(x, z) \right\rangle \{ \delta p_n \} \end{cases} \quad (\text{IV-17})$$

En introduisant les expressions (IV-13) à (IV-17) dans (IV-12), on obtient sous forme matricielle l'expression discrétisée de la forme intégrale élémentaire :

$$\tilde{W}^e(\tilde{p}^e) = \langle \delta p_n \rangle \left([k^e] \{p_n\} - \{f^e\} \right) \quad (\text{IV-18})$$

avec

$$[k^e] = \int_{D^e} F^e \left(\{N_{,x}\} \{N_{,x}\} + \{N_{,z}\} \{N_{,z}\} \right) dx dz \quad (\text{IV-19})$$

$$= \int_{D^e} [B(x, z)]^T [C][B(x, z)] dx dz \quad (IV-20)$$

où $[B]$ est la matrice contenant les gradients des fonctions d'interpolation, $[C] = \begin{bmatrix} F^e(x, z) & 0 \\ 0 & F^e(x, z) \end{bmatrix}$

et $[k^e]$ est une matrice carrée (npe x npe) symétrique appelée matrice fluidité volumique élémentaire dont les composantes sont

$$k_{ij}^e = \int_{D^e} F^e \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dz \quad (IV-21)$$

$$\{f^e\} = \frac{U_1}{2} \int_{D^e} \left(\sum_{i=1}^{npe} N_i(x, z) h_i \right) \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} dx dz \quad (IV-22)$$

est un vecteur de taille (npe x 1) qui rassemble les termes figurant dans le second membre de l'équation de Reynolds et dont les composantes sont :

$$f_i^e = \frac{U_1}{2} \int_{D^e} \left(\sum_{k=1}^{npe} N_k h_k \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dz \quad (IV-23)$$

3.2.2. Expressions des matrices $[k^e]$ et $\{f^e\}$ sur l'élément de référence

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, on introduit la notion d'élément de référence D^r de forme très simple repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel D^e par une transformation géométrique τ^e (Fig. IV-3) qui définit les coordonnées x^e de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées ξ du point correspondant de l'élément de référence :

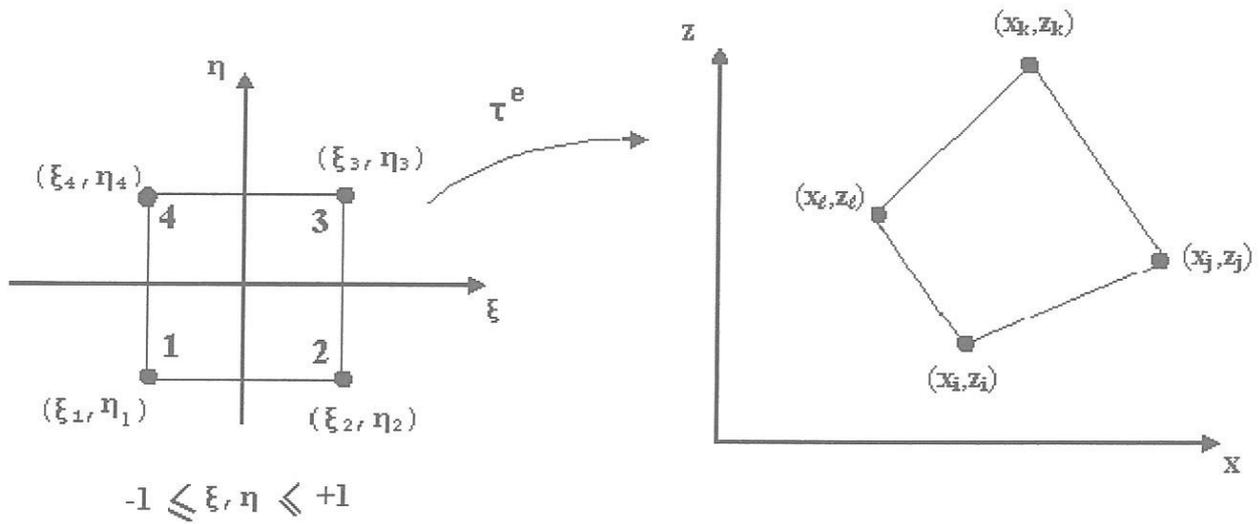
$$\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi) \quad (IV-24)$$

$$x = x(\xi, \eta)$$

$$z = z(\xi, \eta)$$

La dérivation en chaîne entraîne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{Bmatrix} \quad (IV-25)$$



a) Élément de référence (Espace de calcul)

b) Élément réel (Espace physique)

Fig. IV-3: Transformation géométrique dans le cas d'un élément à quatre noeuds.

Dans l'équation (IV-25), $[J]$ est la matrice Jacobienne de la transformation géométrique, elle s'exprime comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \langle \partial N / \partial \xi \rangle \\ \langle \partial N / \partial \eta \rangle \end{bmatrix} [\{x_n\} ; \{z_n\}] \quad (IV-26)$$

où : $\{x_n\}$ et $\{z_n\}$ sont les coordonnées des noeuds de l'élément réel. La transformation des intégrales s'écrit :

$$\int_{D^e} \dots dx dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \dots \det J d\xi d\eta \quad (IV-27)$$

Sur l'élément de référence, les matrices $[k^e]$ et $\{f^e\}$ s'expriment donc par :

$$[k^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B(\xi, \eta)]^T [j]^T [C] [B(\xi, \eta)] [j] \det J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (IV-28)$$

et :

$$\{f^e\} = \frac{U_1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\sum_{i=1}^{npe} N_i(\xi, \eta) h_i \right) \left(j_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} + j_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \{N\} \det(J(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (IV-29)$$

3.3. Formulation du problème de lubrification hydrodynamique par éléments finis en coordonnées cylindriques

3.3.1. Formulation élémentaire et discrétisation par éléments finis

De la même manière, nous pouvons écrire :

$$\tilde{W}(p) = \sum_{e \geq 1} \tilde{w}^e(p) = 0 \quad (\text{IV-30})$$

tel que:

$$W^e = \int_{D^e} F^e \left(\frac{\partial \delta p^e}{\partial r} \frac{\partial p^e}{\partial r} + \frac{\partial \delta p^e}{r \partial \theta} \frac{\partial p^e}{r \partial \theta} \right) r dr d\theta + \frac{\omega}{2} \int_{D^e} r^e h^e \frac{\partial \delta p^e}{\partial \theta} r dr d\theta \quad (\text{IV-31})$$

avec :

$$\begin{cases} \tilde{p}^e(r, \theta) = \sum_{i=1}^{npe} N_i(r, \theta) p_i = \langle N(r, \theta) \rangle \{p_n\} \\ \delta \tilde{p}^e(r, \theta) = \sum_{i=1}^{npe} N_i(r, \theta) \delta p_i = \langle N(r, \theta) \rangle \{\delta p_n\} \\ \tilde{h}^e(r, \theta) = \sum_{i=1}^{npe} N_i(r, \theta) h_i = \langle N(r, \theta) \rangle \{h_n\} \\ \tilde{F}^e(r, \theta) = \sum_{i=1}^{npe} N_i(r, \theta) F_i = \langle N(r, \theta) \rangle \{F_n\} \end{cases} \quad (\text{IV-32})$$

et pour les gradients :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}^e(r, \theta)}{\partial r} &= \sum_{i=1}^n N_{i,r}(r, \theta) p_i = \langle N_{,r}(r, \theta) \rangle \{p_n\} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}^e(r, \theta)}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r} N_{i,\theta}(r, \theta) p_i = \langle \frac{1}{r} N_{,\theta}(r, \theta) \rangle \{p_n\} \end{aligned} \quad (\text{IV-33})$$

et les gradients de la variation de la pression

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \tilde{p}^e(r, \theta)}{\partial r} &= \sum_{i=1}^n N_{i,r}(r, \theta) \delta p_i = \langle N_{,r}(r, \theta) \rangle \{\delta p_n\} \\ \frac{\partial \delta \tilde{p}^e(r, \theta)}{r \partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r} N_{i,\theta}(r, \theta) \delta p_i = \langle \frac{1}{r} N_{,\theta}(r, \theta) \rangle \{\delta p_n\} \\ \frac{\partial \delta \tilde{p}^e(r, \theta)}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n N_{i,\theta}(r, \theta) \delta p_i = \langle N_{,\theta}(r, \theta) \rangle \{\delta p_n\} \end{aligned} \quad (\text{IV-34})$$

En introduisant les expressions de (IV-32) à (IV-34) dans (IV-31), on obtient l'expression discrétisée de la forme intégrale élémentaire :

$$\tilde{w}^e = \int_{D^e} F^e \left[\langle \delta p_n \rangle \left\{ \frac{\partial N}{\partial r} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial r} \right\} \{ p_n \} + \langle \delta p_n \rangle \left\{ \frac{\partial N}{r \partial \theta} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{r \partial \theta} \right\} \{ p_n \} \right] r dr d\theta - \frac{\omega}{2} \int_{D^e} \left(\sum_{i=1}^{npe} N_i(r, \theta) h_i \right) \left\{ \frac{\partial N}{\partial \theta} \right\} r dr d\theta \quad (IV-35)$$

qui, après quelques arrangements, peut s'écrire sous forme matricielle:

$$\tilde{w}^e = \langle \delta p^e \rangle \left([k^e] \{ p_n \} - \{ f^e \} \right) \quad (IV-36)$$

avec :

$$[k^e] = \int_{D^e} F^e \left(\{ N_{,r} \} \{ N_{,r} \} + \left\{ \frac{1}{r} N_{,\theta} \right\} \left\{ \frac{1}{r} N_{,\theta} \right\} \right) r dr d\theta \quad (IV-37)$$

qui est la matrice fluidité élémentaire et a pour composantes :

$$k_{ij}^e = \int_{D^e} F^e(r, \theta) \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{r \partial \theta} \frac{\partial N_j}{r \partial \theta} \right) r dr d\theta \quad (IV-38)$$

$$\text{et : } \{ f^e \} = \frac{\omega}{2} \int_{D^e} \left(\sum_{i=1}^{npe} N_i(r, \theta) h_i \right) \{ N_{,\theta} \} r dr d\theta \quad (IV-39)$$

qui est un vecteur de dimension (npe x 1), et qui a pour composantes :

$$f_i^e = \frac{\omega}{2} \int_{D^e} \left(\sum_{k=1}^{npe} N_k h_k \right) N_{i,\theta} r dr d\theta \quad (IV-40)$$

3.3.2. Expressions des matrices $[k^e]$ et $\{ f^e \}$ sur l'élément de référence

Sur l'élément de référence, en faisant les transformations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial \theta \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{Bmatrix} \quad (IV-41)$$

où : $[J]$ est la matrice Jacobienne de la transformation géométrique qui s'exprime par :

$$[J] = \begin{Bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \{ r_n \} & \{ \theta_n \} \end{bmatrix} \quad (IV-42)$$

et où : $\{r_n\}$ et $\{\theta_n\}$ sont les coordonnées polaires des nœuds de l'élément réel.

$$drd\theta = \det(J)d\xi d\eta$$

$$\tilde{r}^e = \sum_{i=1}^{npe} N_i(\xi, \eta)r_i$$

nous obtenons les expressions de $[k^e]$ et $\{f^e\}$ sur l'élément de référence (D^r).

3.4. Choix des éléments de maillage

Les éléments choisis pour le maillage des butées hydrodynamique (Fig. IV-4) hydrostatique (Fig. IV-5) et sont :

- Élément quadrilatéral linéaire isoparamétrique à quatre nœuds (Q4) : (24x24);
- Élément quadrilatéral quadratique isoparamétrique à 8 nœuds à base polynomiale incomplète (Q8) : (12x12);
- Élément quadrilatéral quadratique à 9 nœuds à base polynomiale complète (Q9): (12x12).

Les expressions des fonctions d'interpolation et leurs dérivées pour les trois éléments sont données dans les tableaux IV-1 à IV-3.

Tableau IV-1: Expression des fonctions de forme $N(\xi, \eta)$ et leurs gradients pour l'élément Q4.

$\frac{1}{c}\{N\}$	$\frac{1}{c}\{\partial N/\partial \xi\}$	$\frac{1}{c}\{\partial N/\partial \eta\}$	c
$(1-\xi)(1-\eta)$	$-1+\eta$	$-1+\xi$	4
$(1+\xi)(1-\eta)$	$1-\eta$	$-1-\xi$	
$(1+\xi)(1+\eta)$	$1+\eta$	$1+\xi$	
$(1-\xi)(1+\eta)$	$-1-\eta$	$1-\xi$	

Tableau IV-2 : Expression des fonctions de forme $N(\xi, \eta)$ et leurs gradients pour l'élément Q8.

$\{N\}$	$\{\partial N/\partial \xi\}$	$\{\partial N/\partial \eta\}$
$\frac{-(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\xi)(2\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\xi)(\xi+2\eta)}{4}$
$\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2}$	$-(1-\eta)\xi$	$-\frac{(1-\xi^2)}{2}$
$\frac{-(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\xi)(2\xi-\eta)}{4}$	$-\frac{(1+\xi)(\xi-2\eta)}{4}$
$\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$\frac{(1-\eta^2)}{2}$	$-(1+\eta)\xi$
$\frac{-(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)(2\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\xi)(\xi+2\eta)}{4}$
$\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2}$	$-(1+\eta)\xi$	$\frac{(1-\xi^2)}{2}$
$\frac{-(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)(2\xi-\eta)}{4}$	$-\frac{(1-\xi)(\xi-2\eta)}{4}$
$\frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$-\frac{(1-\eta^2)}{2}$	$-(1-\xi)\eta$

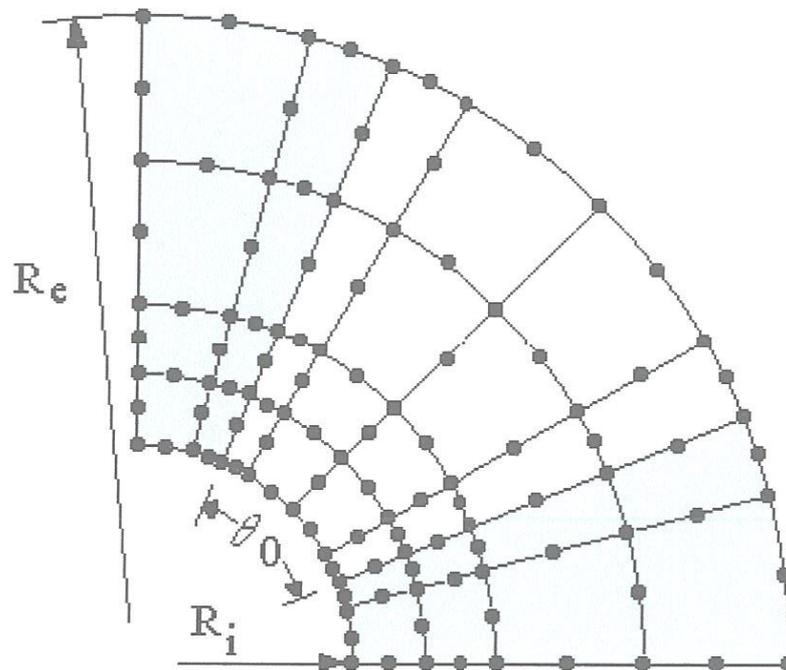


Fig. IV-4: Maillage d'un patin de la butée hydrodynamique avec des éléments Q8.

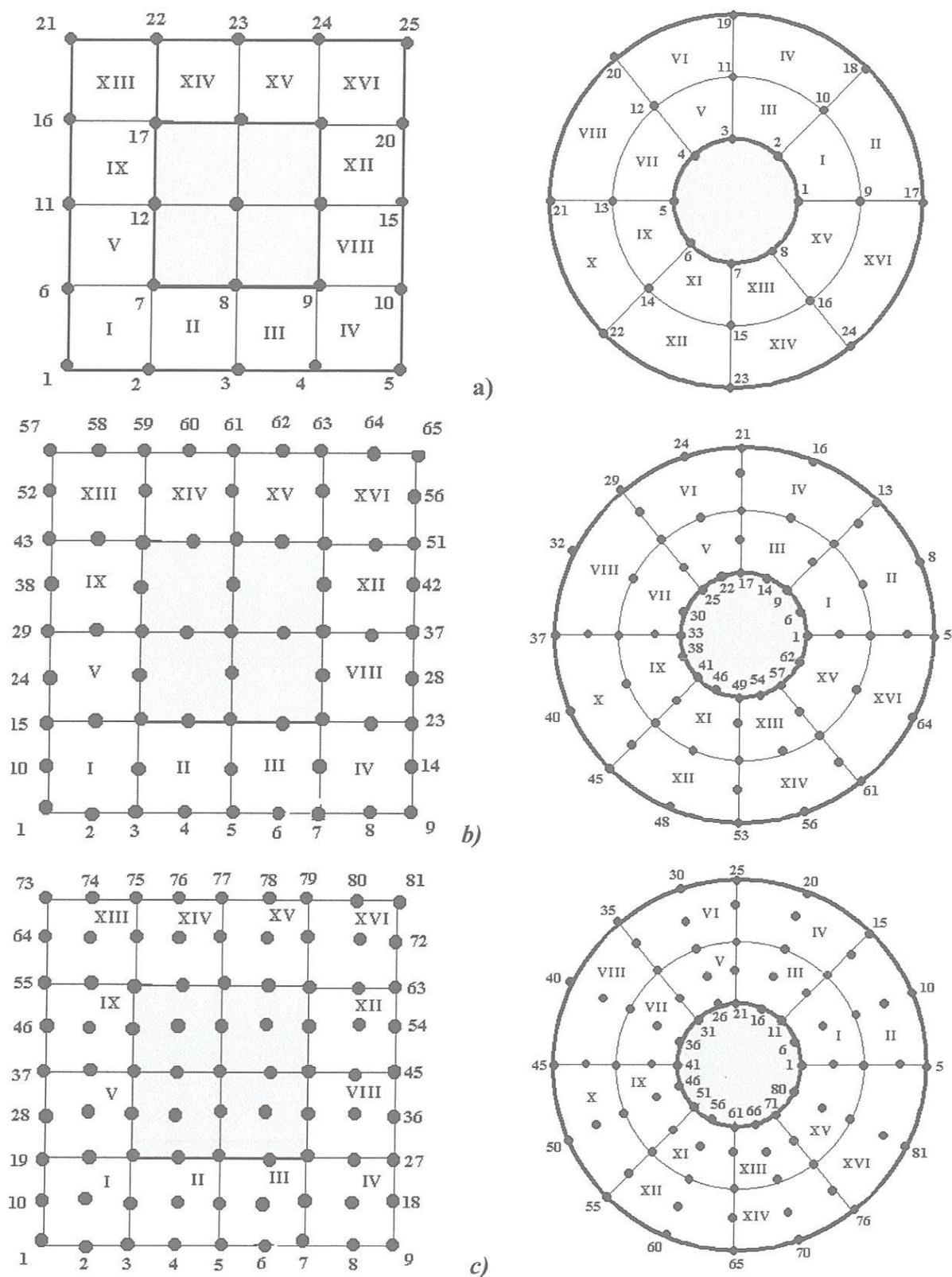


Fig. IV-5: Maillages des butées hydrostatiques rectangulaire et cylindrique.

a) Élément Q4; b) Élément Q8; c) Élément Q9.

Les figures IV-4a, b et c montrent les trois types d'éléments choisis dans notre étude, à savoir l'élément linéaire Q4, l'élément quadratique à base incomplète Q8 et l'élément quadratique à base complète Q9.

Tableau IV-3 : Expressions des fonctions de forme $N(\xi, \eta)$ et leurs gradients pour l'élément Q9.

$\{N\}$	$\{\partial N/\partial \xi\}$	$\{\partial N/\partial \eta\}$
$\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \xi \eta$	$\frac{(1-2\xi)(1-\eta)\eta}{4}$	$\frac{(1-\xi)(1-2\eta)\xi}{4}$
$\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)\eta}{2}$	$(1-\eta)\xi\eta$	$-\frac{(1-\xi^2)(1-2\eta)}{2}$
$-\frac{(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta}{4}$	$-\frac{(1+2\xi)(1-\eta)\eta}{4}$	$-\frac{(1+\xi)(1-2\eta)\xi}{4}$
$\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$	$\frac{(1+2\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$-(1+\xi)\xi\eta$
$\frac{(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta}{4}$	$\frac{(1+2\xi)(1+\eta)\eta}{4}$	$\frac{(1+\xi)(1+2\eta)\xi}{4}$
$\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)\eta}{2}$	$-(1+\eta)\xi\eta$	$\frac{(1-\xi^2)(1+2\eta)}{2}$
$-\frac{(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta}{4}$	$-\frac{(1-2\xi)(1+\eta)\eta}{4}$	$-\frac{(1-\xi)(1+2\eta)\xi}{4}$
$-\frac{(1-\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$	$-\frac{(1-2\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$(1-\xi)\xi\eta$
$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$	$-2(1-\eta^2)\xi$	$-2(1-\xi^2)\eta$

3.5. Assemblage des matrices et vecteurs élémentaires et construction du système global

La matrice globale $[K]$ et le vecteur global $\{F\}$ de la butée sont obtenus par simple superposition des matrices $[k^e]$ et des vecteurs $\{f^e\}$ et ceci après expansion des matrices élémentaires. La forme intégrale globale $\tilde{W}(\tilde{p})$ se construit par addition des formes intégrales élémentaires \tilde{W}^e :

$$\tilde{W}(\tilde{p}) = \sum_{e=1}^{neit} (\tilde{W}^e(\tilde{p}^e)) = \sum_{e=1}^{neit} (\langle \delta P_n \rangle ([k^e] \{P_n\} - \{f^e\})) = 0 \quad (IV-43)$$

cette somme est organisée sous la forme matricielle suivante:

$$\tilde{W}(\tilde{P}) = \langle \delta P_n \rangle ([K] \{\tilde{P}_n\} - \{F\}) = 0 \quad \forall \langle \delta P \rangle \quad (IV-44)$$

Ceci conduit à résoudre le système suivant :

$$[K]\{P_n\} = \{F\} \quad (IV-45)$$

avec :

$$[K] = \sum_{e=1}^{nelt} [k^e] \quad (IV-46)$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{nelt} \{f^e\} \quad (IV-47)$$

A étant l'opérateur d'assemblage.

[K] matrice de fluidité globale de la butée : c'est une matrice symétrique de taille $(n_t \times n_t)$ où n_t est le nombre total des nœuds du maillage.

{F} le vecteur global $(n_t \times 1)$ qui contient les termes d'entraînement.

3.6. Intégration numérique

L'évaluation des intégrales (IV-47) et (IV-48) est effectuée numériquement par la méthode de Gauss-Legendre [26]. Dans le cas bidimensionnel, la formule s'écrit :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (IV-48)$$

Les paramètres de la méthode de Gauss à n points qui sont les coordonnées des points d'intégration et les poids dont les valeurs sont reportées dans le tableau IV-4 pour le cas (1D) sont déterminés de telle sorte que l'on puisse intégrer exactement un polynôme simple de degré $(2n - 1)$.

Tableau. IV-4 : Paramètres de la quadrature de Gauss à une dimension (*).

Nombre de points d'intégration de Gauss n	Coordonnées des points d'intégration ξ_i	Poids w_i	Erreur e	Degré maximum des polynômes intégrés exactement $m = 2n-1$
1	0	2	$\frac{1}{6} \frac{d^2 f}{d\xi^2}$	1
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\approx 0.7 \times 10^{-2} \times \frac{d^4 f}{d\xi^4}$	3
3	0 $\pm \sqrt{3/5}$	8/9 5/9	$\approx 0.6 \times 10^{-4} \times \frac{d^6 f}{d\xi^6}$	5
4	$\pm \sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$ $\pm \sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$	$\approx 0.3 \times 10^{-6} \times \frac{d^8 f}{d\xi^8}$	7

(*) Les coordonnées ξ_i sont symétriques par rapport à $\xi = 0$ et les poids w_i correspondant à 2 points symétriques sont égaux.

3.7. Résolution du système d'équations

3.7.1. Introduction des conditions aux limites

Après assemblage des matrices élémentaires, le système global d'équations algébriques obtenu peut s'écrire comme :

$$\left[\underset{nt \times nt}{\mathbf{K}} \right] \left\{ \underset{nt \times 1}{\mathbf{P}} \right\} = \left\{ \underset{nt \times 1}{\mathbf{F}} \right\} \quad (IV-49)$$

où $[\mathbf{K}]$ est la matrice fluidité volumique globale singulière ($\det([\mathbf{K}]) = 0$).

L'introduction des conditions aux limites essentielles sur la pression permet d'éliminer la singularité de $[\mathbf{K}]$ et conduit au système réduit suivant :

$$[\mathbf{K}_r] \{ \mathbf{P}_{nr} \} = \{ \mathbf{F}_r \} \quad (IV-50)$$

3.7.2. Résolution du système algébrique réduit par la méthode de Gauss-Seidel

La résolution de l'équation de Reynolds est donc ramenée à la résolution d'un système d'équations linéaires. La méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation ou la méthode S.O.R. est recommandée pour satisfaire les conditions de Reynolds. Il s'agit de trouver la répartition de la pression et aussi le contour de cette zone active pour laquelle la pression s'annule. On peut obtenir cette condition à l'aide d'un processus itératif au cours duquel on impose à la pression d'être positive.

Un estimé initial $\{P_{mr}^{(0)}\}$ est nécessaire pour démarrer le processus itératif.

L'application de l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation permet d'écrire :

$$P_i^{(k+1)} = (1 - \Omega)P_i^{(k)} + \frac{\Omega}{K_{ii}} \left[F_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij}P_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n K_{ij}P_j^{(k)} \right] \quad (IV-51)$$

où : Ω est le coefficient de sur-relaxation dont la valeur s'échelonne entre 1 et 2, k le numéro de l'itération et n la taille du système réduit.

Le test d'arrêt du processus est défini par :

$$\text{Max} \left| \frac{P_i^{(k+1)} - P_i^{(k)}}{P_i^{(k+1)}} \right| \leq 10^{-5} \quad (IV-52)$$

4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation du problème de la lubrification hydrostatique et hydrodynamique par la méthode des éléments finis de Lagrange de classe C^0 en coordonnées cartésiennes et polaires. Nous avons adopté la MEF pour plusieurs raisons :

- ❖ la discrétisation des butées surtout dans le cas des rainures d'alimentation de formes compliquées (butées à rainures spirales par exemple);
- ❖ les conditions limites sur la pression et le débit sont faciles à appliquer;
- ❖ la matrice du système obtenue par la méthode des éléments finis est symétrique et à diagonale dominante, ce qui n'est pas le cas si on utilise la méthode des différences finies.

Nous avons montré que la résolution de l'équation de Reynolds modifiée se ramène à la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires.

Effets du paramètre des couples de contraintes sur le comportement des butées hydrostatiques et hydrodynamiques

1. Introduction

Le comportement des huiles minérales utilisés pour le graissage des machines tournante et alternative tels que les turbomachines et les moteurs à combustion interne est influencé par la présence d'additifs améliorant l'indice de viscosité etc. Ces additifs, qui sont des polymères ou des copolymères ajoutés à la base de lubrifiant, sont caractérisés par de longues chaînes moléculaires où la longueur de la chaîne de polymère peut être un million de fois le diamètre d'une molécule d'eau. Ces polymères sont classés en deux catégories : copolymères hydrocarbonés et polyméthacrylates. En général, les huiles additivées sont considérées comme fluides non newtoniens. Leur viscosité diminue quand le taux de cisaillement auquel elles sont soumises augmente. De plus, elles sont affectées par l'effet de Weissenberg, c'est à dire pendant l'écoulement des forces apparaissent perpendiculairement au plan de cisaillement. Ces propriétés ont été analysées avec le rhéogoniomètre de Weissenberg. Rosenberg [28,29] a montré expérimentalement que l'épaisseur minimale du film d'huile d'un palier radial lubrifié par une huile dopée est plus importante que celle mesurée avec des huiles minérales pures ayant la même viscosité. Dans le but de déterminer les effets des additifs améliorant l'indice de viscosité sur le comportement des paliers radiaux, Robin [30] a mis au point, à l'*Institut Français du Pétrole* (IFP), un banc d'essai de paliers. Il a trouvé que l'introduction d'une grande concentration de polyméthacrylates à l'huile minérale de base réduit le couple de trottement de 25 % sans grand changement dans l'épaisseur du film. Il a été conclu, aussi, qu'il était intéressant d'utiliser les huiles avec une grande concentration d'additifs améliorants de VI ayant un faible poids moléculaire comme les polyméthacrylates plutôt qu'une faible concentration d'additifs avec un poids moléculaire élevé. Dans le travail expérimental de Oliver [31], il a été trouvé que la présence de polymères dissouts dans le lubrifiant accroît la portance du film lubrifiant et diminue le coefficient de frottement. Dans une autre étude expérimentale, Spikes [32] a montré que des huiles de base dopés avec des additifs réduisent le frottement et l'endommagement dans les contacts élastohydrodynamiques (EHD) rencontrés dans les roulements et les engrenages.

Il est bien connu que la théorie classique des milieux continus des fluides néglige la taille des particules fluides pour décrire l'écoulement de ces fluides. Pour une meilleure description du comportement rhéologique de ce type de lubrifiant non newtonien appelé fluide polaire, différentes

théories de milieux continus ont été proposées [14,33,34]. La théorie des milieux continus de Vijay Kumar Stokes est la théorie la plus simple, qui prend en considération les effets polaires comme la présence de couples de contraintes par unité de surface et des couples de volume par unité de volume ou par unité de masse en plus des forces de volume et de surface par unité d'aire [33]. Il est intéressant de noter que le concept de couples de contraintes a été introduit par Voigt [35].

En mécanique des fluides, les fluides polaires sont caractérisés par deux constantes physiques μ et η alors que seulement une constante apparaît pour les fluides newtoniens, la viscosité absolue μ . La nouvelle constante du matériau η est responsable de la propriété des couples de contraintes.

Dans la littérature, les effets des couples de contraintes sur le comportement des paliers radiaux sont étudiés par la définition d'un paramètre des couples de contraintes sans dimension $\tilde{\ell}^* = \frac{\ell}{C}$ où

$\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$, ℓ a la dimension d'une longueur est peut être considéré comme une propriété du fluide dépendant de la taille du polymère.

Grâce a sa relative simplicité mathématique, le modèle de fluide polaire a été largement appliqué pour analyser des problèmes de lubrification hydrodynamique variés : butées axiales hydrostatiques [36,37], paliers lisses [38], paliers de roulement [39,40], paliers à film amortisseur [41,44] et paliers radiaux monocouches [45]. Lin [42,43] a étudié les effets du paramètre des couples de contraintes sur les caractéristiques d'un palier à arc partiel infiniment long en utilisant la théorie des milieux continus de Stokes. Les résultats théoriques montrent que la présence des couples de contraintes permettent d'augmenter la capacité de charge et prolonge le temps de réponse de l'action du système à film amortisseur comparativement au cas newtonien. Il a été aussi montré que les effets du couple des contraintes sont plus importants pour les grandes valeurs du paramètre des couples de contraintes. Dans un autre travail de recherche, Lin [38] a étudié les effets combinés des couples de contraintes, l'inertie du fluide et la propriété de compressibilité sur les performances statiques et dynamiques des butées axiales hydrostatiques. Selon les résultats obtenus, l'effet des couples de contraintes donne une amélioration des caractéristiques dynamiques à savoir la rigidité et l'amortissement et réduit la puissance de pompage à cause de la réduction du débit de fuite.

Mokhiamer et al [45] ont présenté une étude théorique des performances d'un palier monocouche lubrifié par des fluides polaires. La déformation élastique de la couche due à la pression

hydrodynamique est calculée à l'aide d'un modèle élastique simplifié dit modèle couche mince. Les résultats obtenus sont :

- la pression maximale et la portance augmentent avec le paramètre des couples des contraintes ;
- l'angle de calage et le facteur de frottement diminuent quand le paramètre de couple de contrainte augmente;
- le débit reste constant quand le paramètre ℓ augmente sauf pour un revêtement constitué de matériaux de faible module d'élasticité.

Les auteurs ont conclu que la déformation élastique du revêtement doit être considérée pour le calcul des caractéristiques des paliers hydrodynamiques.

Plus récemment, Naduvinamani et al [46] ont présenté une étude des effets de la rugosité de la surface sur les caractéristiques statiques d'un palier poreux court utilisant un fluide polaire comme lubrifiant. La théorie stochastique de Christensen de la lubrification hydrodynamique des surfaces rugueuses a été utilisée par les auteurs. Il a été observé que les effets de rugosité de surface sur les caractéristiques du palier sont plus importants pour les fluides polaires comparés aux fluides newtoniens.

Il est à noter que toutes les études précédentes ont été faites dans des conditions de lubrification isotherme ; c'est-à-dire le champ de température dans les milieux fluide et solide est supposé constant. Wang et al [47] ont étudié les performances thermohydrodynamiques (THD) d'un palier de longueur finie lubrifié par des huiles dopées par des polymères. Dans l'analyse THD, l'équation d'énergie modifiée dans le film est résolue simultanément avec l'équation de Reynolds modifiée et les équations de transfert de chaleur dans les solides car ces équations sont couplées par la température et la viscosité du lubrifiant (relation viscosité- température). Les résultats montrent que les lubrifiants avec couple de contraintes, comparés avec les lubrifiants newtoniens produisent un champ de température dans le film plus faible.

Dans [48], Lahmar a présenté une analyse élastohydrodynamique du comportement dynamique linéaire d'un palier bicouche lubrifié par des fluides polaires. Il a conclu :

- le pic de pression statique et la portance augmentent avec le paramètre des couples de contraintes et cette augmentation est beaucoup plus prononcée pour les paliers radiaux lourdement chargés ; c'est-à-dire pour les grandes valeurs d'excentricité de fonctionnement ;

- l'angle de calage statique et le facteur de frottement diminuent avec l'augmentation du paramètre des couples de contraintes ;
- pour les paliers rigides et compliants, les coefficients de raideur et d'amortissement augmentent avec le paramètre des couples de contraintes, notamment pour les grandes valeurs de l'excentricité de fonctionnement ;
- la plage de stabilité du système augmente avec le paramètre des couples de contraintes, même pour les faibles valeurs de l'excentricité; c'est-à-dire lorsque le palier est faiblement chargé. En conséquence, un palier lubrifié par des fluides polaires fonctionnant sous petite perturbation est plus stable que celui lubrifié par les fluides newtoniens.

Dans ce qui suit, on présente tout d'abord une description générale des programmes de calcul par éléments finis développés puis une étude de l'influence du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$ sur les performances des butées hydrostatiques à une alvéole et à quatre alvéoles ainsi que les butées hydrodynamiques à géométrie fixe.

2. Description des programmes de calcul par éléments finis

Pour l'analyse numérique du problème de lubrification dans les butées hydrostatiques et hydrodynamiques, nous avons développé des programmes de calcul par éléments finis écrits en langage MS-Fortran destinés à calculer les performances des butées hydrostatiques de forme rectangulaire et cylindrique ainsi que des butées hydrodynamiques utilisant un fluide polaire non newtonien comme lubrifiant.

La structure de ces programmes est représentée par la figure V-1.

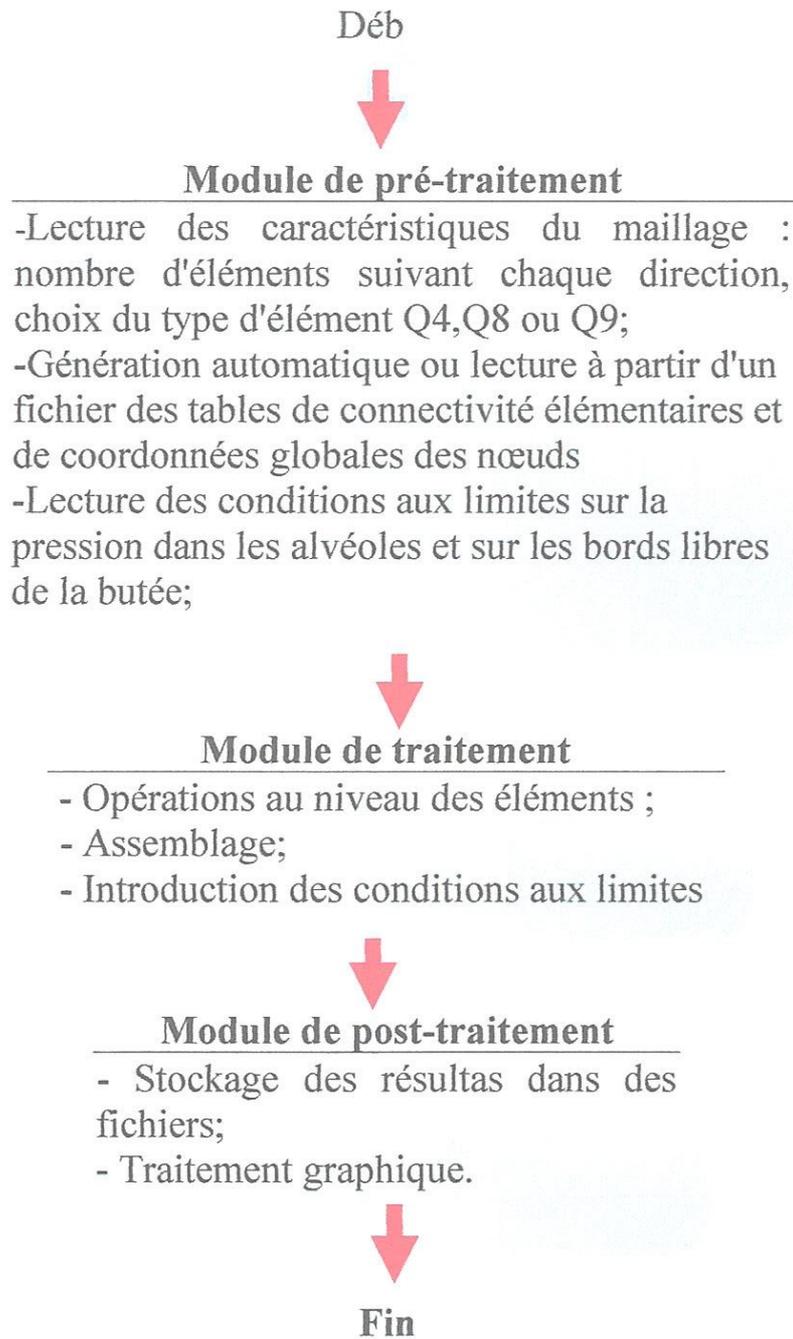


Fig. V-1: Structure générale d'un programme de calcul par éléments finis

Ces programmes comportent généralement trois modules :

- **Module de prétraitement**

Ce module consiste à générer des maillages réguliers automatiques (construction des tables de connectivité élémentaires et des coordonnées globales des nœuds) pour les différents types d'éléments (Q4, Q8 et Q9).

- **Module de traitement**

Ce module est consacré aux différents calculs effectués sur les éléments du maillage en utilisant le concept de l'élément de référence (intégration numérique par la méthode de Gauss-Legendre, assemblage, introduction des C. L, résolution du système d'équations algébriques).

- **Module de post- traitement**

Le module de post-traitement sert à stocker les résultats de calcul obtenus dans des fichiers en vue de faire les différents traitements graphiques à l'aide de logiciels spécialisés (GRAPHER (2D), SURFER (3D), TECPLOT et MATLAB).

2.1. Liste des sous programmes utilisés

- Sous-programme MESH

Ce sous-programme permet de générer des maillages réguliers pour des domaines rectangulaires continus dans le cas des éléments quadrilatéraux à 4, 8 et 9 nœuds.

- Variables d'entrées:

- code de l'élément ;
- nombre d'éléments suivant x ou r;
- nombre d'éléments suivant z ou θ ;
- nombre de nœuds de l'élément;
- caractéristiques géométriques de la butée (longueur et largeur ou rayons interne et externe).

- Variables de sorties:

- nombre total des nœuds du maillage;
- nombre total d'éléments du maillage;
- tables de connectivité élémentaires;
- tables de coordonnées globales des nœuds;

- Sous-programme MATRIX

Ce sous-programme permet de construire les matrices élémentaires $[k^{(e)}]$ et $\{f^{(e)}\}$.

- Entrées:

- code de l'élément;
- nombre de points d'interpolation de Gauss;
- nombre de nœuds de l'élément;
- numéro de l'élément;
- coordonnées des points d'intégration de Gauss (ξ_i, η_i) ;

- poids des points de Gauss w_i .

Ce sous-programme se sert de la subroutine *SHAPE* pour le calcul des fonctions de forme N_i , de la matrice jacobienne $[J]$ et son déterminant $\det(J)$ ainsi que les gradients des fonctions de forme $N_{i,\xi}$ et $N_{i,\eta}$ aux points de Gauss.

- Sorties:

- matrices élémentaires $[k^{(e)}]$ et $\{f^{(e)}\}$.

- *Sous-programme SHAPE*

Il consiste à évaluer les fonctions de forme N_i et leurs dérivées $N_{i,\xi}$ et $N_{i,\eta}$ ainsi que la matrice jacobienne et son déterminant aux points de Gauss pour les éléments Q4, Q8 et Q9.

- Entrées:

- table contenant les coordonnées globales des nœuds de l'élément extraite des tables de coordonnées construites par le sous programme MESH;
- nombre de nœuds de l'élément;

- Sorties:

- fonctions d'interpolation et leurs dérivées par rapport à x et z évaluées aux points de Gauss;
- matrice jacobienne et son déterminant ainsi que son inverse évalués aux points de Gauss.

- *Sous-programme ASSEMBL*

Ce sous-programme nous permettra d'assembler les matrices élémentaires $[k^{(e)}]$ et $\{f^{(e)}\}$ pour obtenir les matrices globales.

- Entrées:

- nombre de nœuds de l'élément;
- nombre de degrés de liberté par nœud;
- tables de connectivité élémentaires;
- composantes du vecteur élémentaire;
- matrice de rigidité élémentaire;

- Sorties:

- matrices globales $[K]$ et $\{F\}$

- Sous-programme REDUCER

Il permet de réduire la matrice de rigidité globale et le vecteur de sollicitation global par l'introduction des conditions aux limites essentielles sur la pression.

- Entrées:

- nombre de degrés de liberté total;
- nombre de degrés de liberté imposés;
- table contenant les numéros des nœuds pour lesquels la fonction $p(x, z)$ est imposée;
- table contenant les valeurs des conditions aux limites;
- matrice de rigidité globale obtenue après assemblage;
- vecteur de sollicitation globale obtenu après assemblage.

- Sortie:

- matrice de rigidité restructurée après introduction des C-L;
- vecteur des sollicitations restructuré après introduction des C-L;

La méthode d'élimination des équations a été utilisée pour l'introduction des C.L.

- Sous-programme RESOL

Ce sous-programme permet la résolution du système d'équations réduit.

- Entrées:

- nombre total d'équations;
- demi-largeur de bande de la matrice de rigidité globale;
- matrice de rigidité globale;
- composantes du vecteur global;
- matrice de rigidité réduite après introduction des C.L.;
- composantes du vecteur de sollicitation après introduction des C.L.

- Sorties:

- vecteur solution réduit.

- Sous-programme LOAD

Ce sous-programme permet de calculer les composantes de la portance hydrodynamique et hydrostatique à partir du vecteur solution global.

- Entrées:

- vecteur solution global;
- déterminant de la matrice Jacobienne;

- table de connectivité élémentaire;
- fonctions d'interpolation évaluées aux points de Gauss ;
- coordonnées locales des points de Gauss;
- nombre des points de Gauss;
- poids des points d'intégration de Gauss.

- Sortie:

- portance hydrodynamique ou hydrostatique

- Sous-programme VITMOY

Ce sous-programme permet de calculer les composantes de la vitesse moyenne au centre de l'élément.

- Entrées:

- numéro de l'élément;
- nombre de nœuds de l'élément;
- coordonnées globales des nœuds de l'élément;
- poids des points de Gauss;
- fonction d'interpolation;
- dérivées des fonctions d'interpolation.

- Sorties:

- composantes de la vitesse moyenne au centre de l'élément ;
- valeur de la pression au centre de l'élément.

- Sous-programme POWER

Ce sous-programme permet de calculer la puissance dissipée de l'écoulement

- Entrées:

- numéro de l'élément;
- nombre de nœuds de l'élément;
- coordonnées globales des nœuds de l'élément;
- poids des points de Gauss;
- fonction d'interpolation;
- dérivées des fonctions d'interpolation.

- Sorties:

- puissance dissipée dans l'écoulement.

Les différentes tâches des sous-programmes décrits ci-dessus sont indiquées dans la figure V-2.

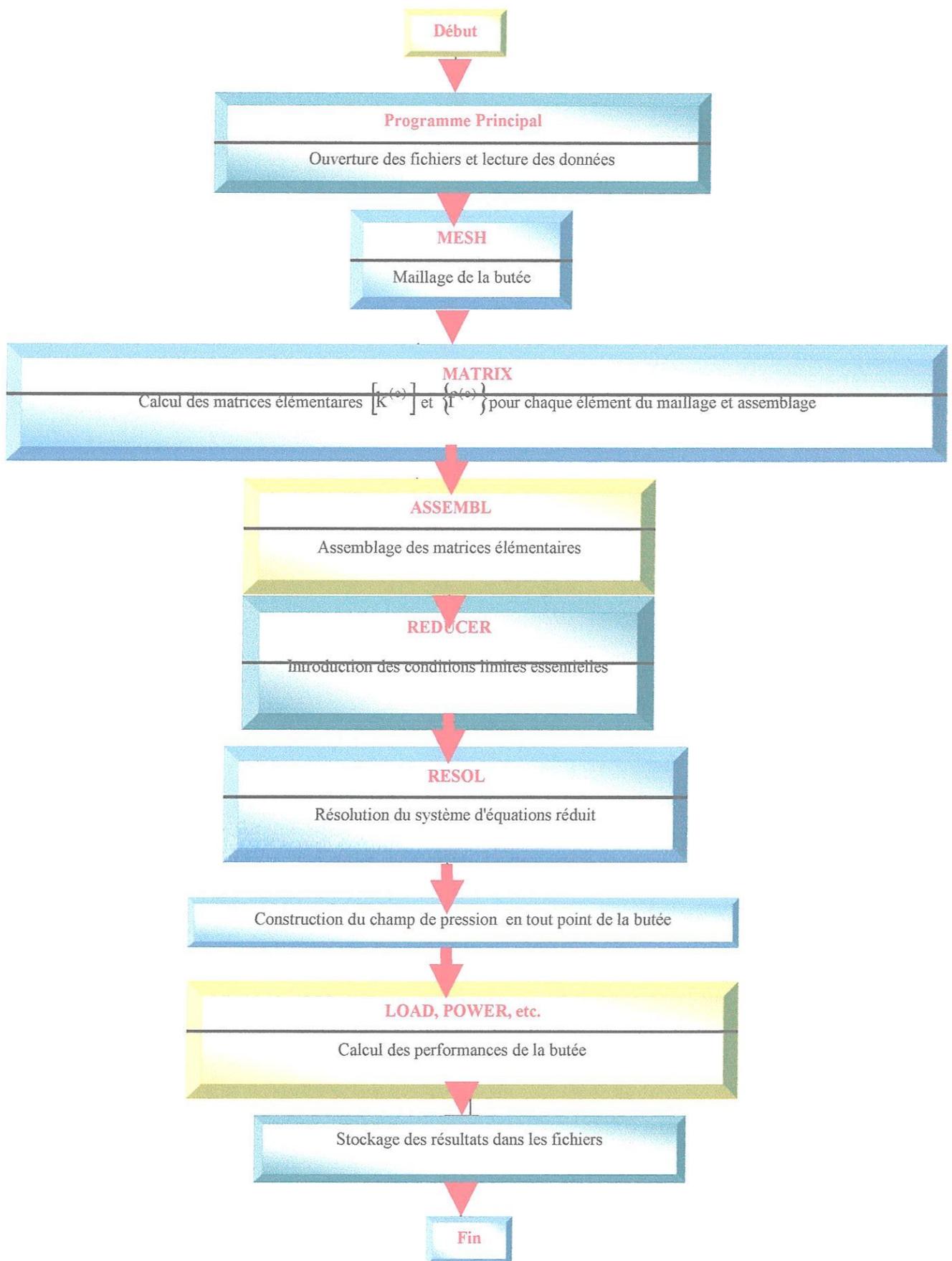


Fig. V-2: Organigramme succinct du programme de calcul.

3. Validation

Afin de valider le programme de calcul MS-FORTRAN développé pour l'étude de l'influence de la rhéologie des huiles lubrifiantes sur le comportement statique des butées hydrostatiques, nous avons comparé les résultats obtenus par le programme avec ceux publiés dans la référence [49] (voir tableau V-1) dans le cas d'une butée cylindrique à une alvéole centrale (fig. V-3).

Tableau V-1 : Comparaison des résultats numériques avec ceux de la réf. [49] obtenus dans le cas d'une butée hydrostatique cylindrique:

	Réf. [49]	M.E.F.		
		Caractéristiques du maillage : 3x16 éléments		
		Q4	Q8	Q9
Portance (N)	937360	948547	917539	917536
Ecart (%)		1.2	2.11	2.11

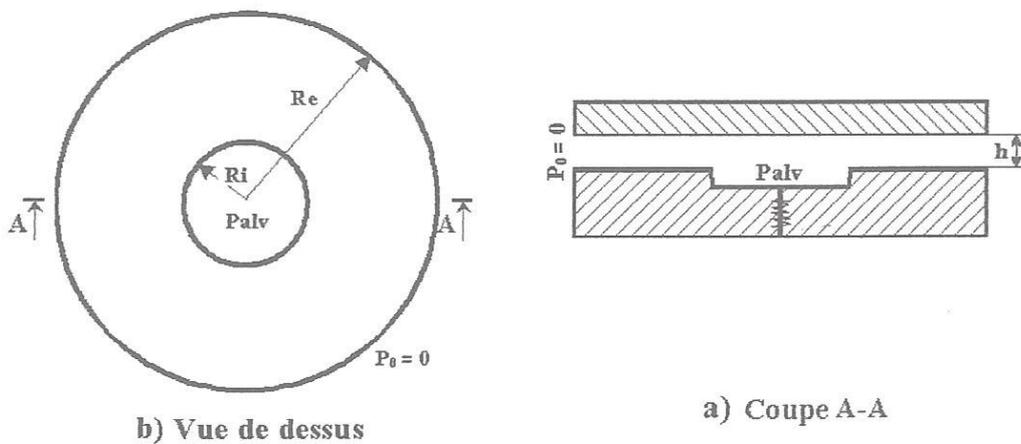


Fig. V-3 : Schématisation d'une butée cylindrique à une alvéole.

Le paramètre calculé est la portance hydrostatique du système obtenu par intégration du champ de pression hydrostatique représenté sur la figure V-4. Les calculs ont été effectués dans le cas d'un fluide newtonien en utilisant trois types d'éléments finis Q4, Q8 et Q9. Les caractéristiques géométriques et les conditions de fonctionnement de la butée sont reportées dans le tableau V-2. Nous remarquons une bonne concordance entre les valeurs de la portance obtenues par le programme de calcul et celle publiée dans la référence [49].

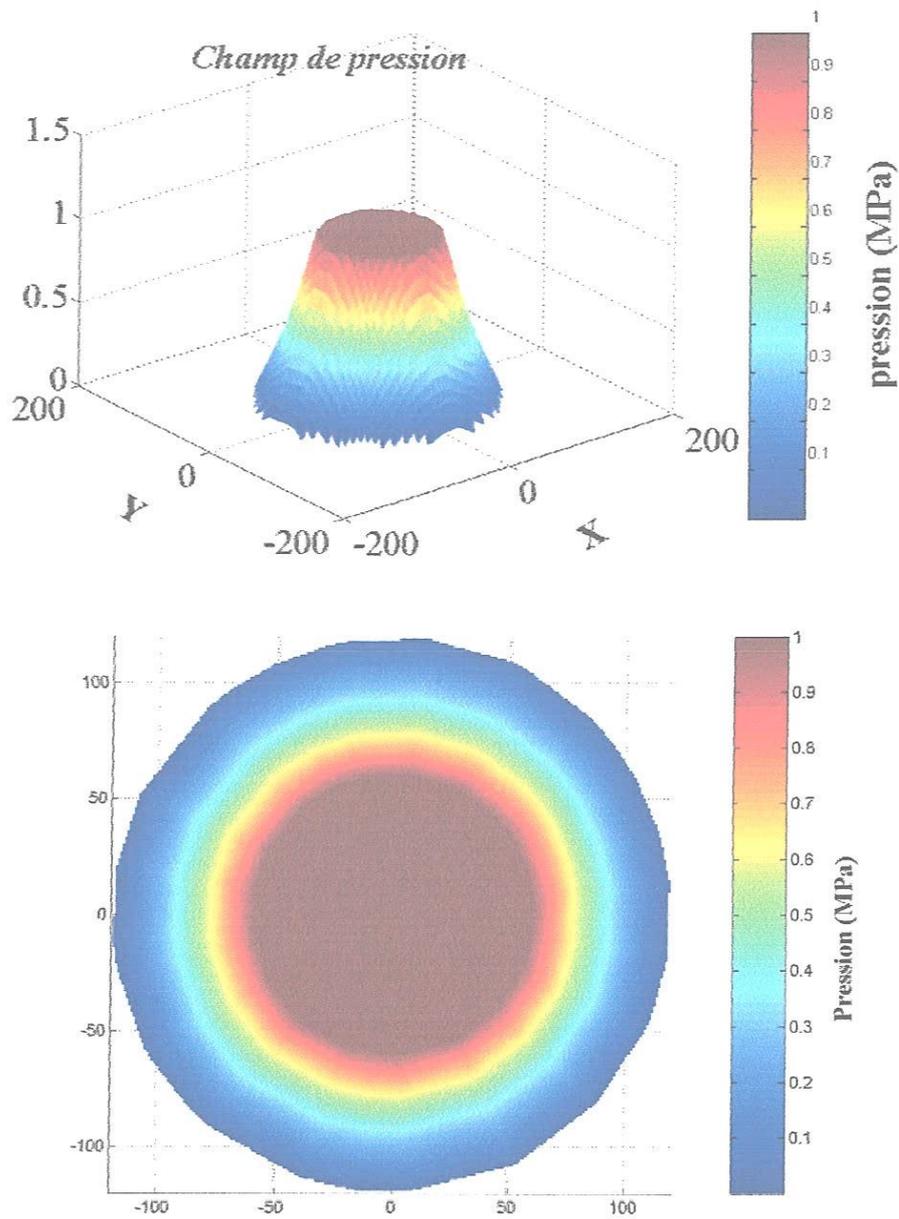


Fig. V-4 : Champ de pression dans une butée hydrostatique cylindrique à une alvéole centrale lubrifiée par un fluide newtonien.

Tableau V-2 : Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement de la butée cylindrique à une alvéole.

Caractéristiques	Symbole	Unité	Valeur
Rayon extérieur	R_e	m	1
Rayon intérieur	R_i	m	0.4
Epaisseur du film d'huile	h	m	0.381×10^{-4}
Pression de l'alvéole	P_{alv}	Pa	10^6
Pression de référence	P_0	Pa	0

4. Etudes paramétriques

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'influence du paramètre des couples de contraintes sur les performances des butées hydrostatiques et hydrodynamiques, telles que le champ de pression dans le film, la capacité de charge hydrostatatique et hydrodynamique (portance), le débit de fuite et la puissance dissipée.

4.1. Cas des butées hydrostatiques

Afin d'étudier les effets du paramètre des couples de contraintes sur les performances statiques des butées hydrostatiques, on a utilisé deux types de butées de forme rectangulaires; à savoir une butée rectangulaire à une alvéole centrée et une butée rectangulaire à quatre alvéoles (fig. V-5). Les caractéristiques géométriques de ces butées sont reportées dans le tableau V-3.

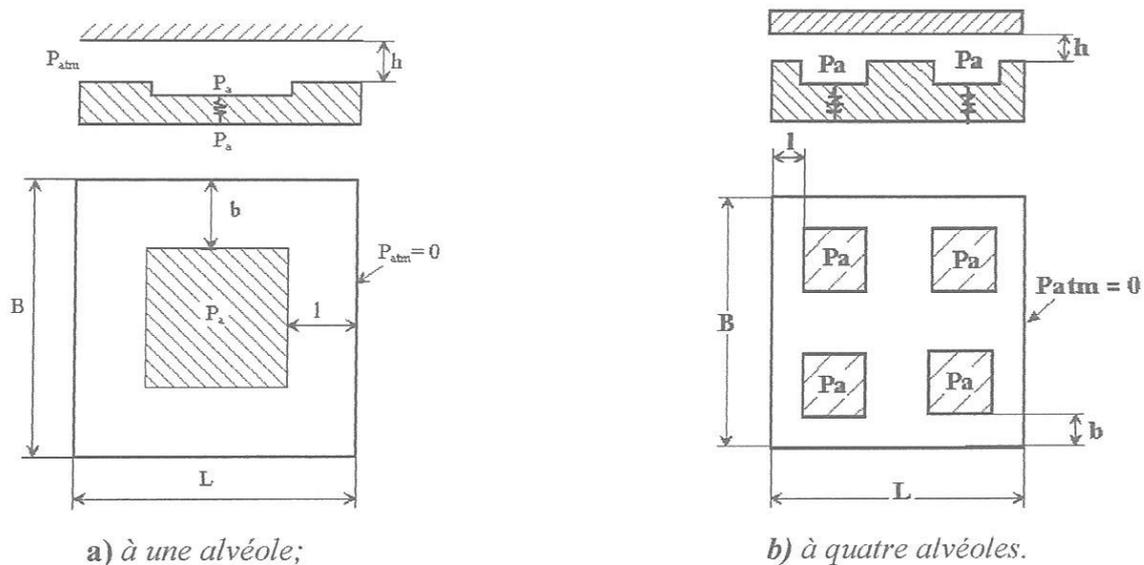


Fig. V-5 : Schématisation d'une butée hydrostatique.

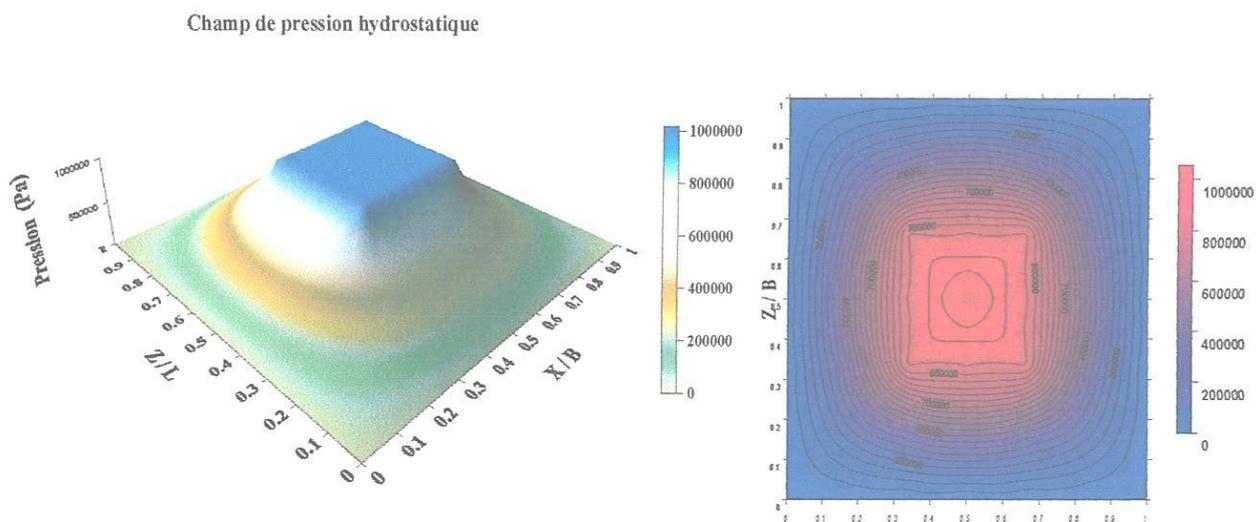
Tableau V-3 : Caractéristiques géométriques de la butée rectangulaire à une alvéole et quatre alvéoles.

Caractéristiques géométriques	Symbole	Unité	Valeur
Longueur de la butée	L	m	l
Largeur de la butée	B	m	l
Longueur de la portée de la butée	l	m	$1/3$
Largeur de la portée de la butée	b	m	$1/3$
Epaisseur du film	h	m	20×10^{-6}

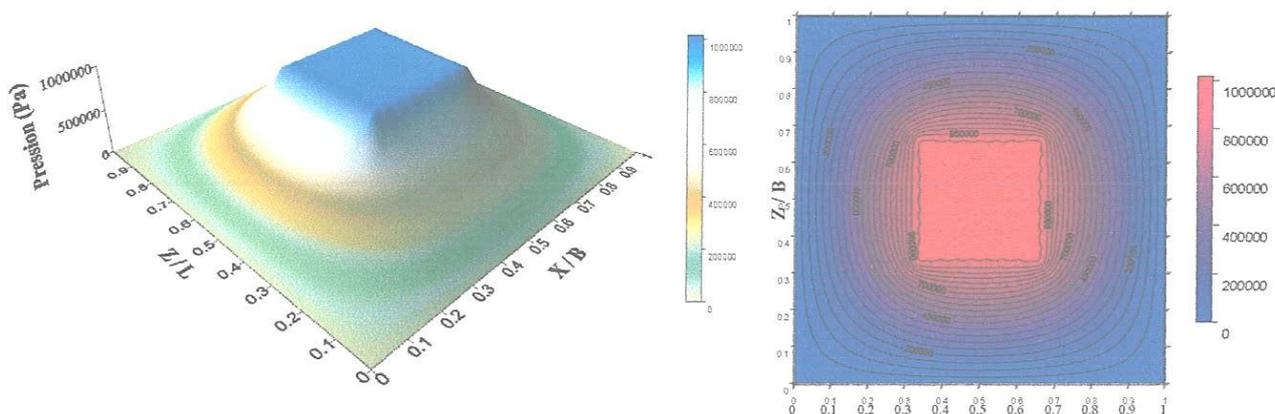
Les calculs ont été faits pour deux valeurs du paramètre de couples de contraintes $\tilde{\ell} = 0,0$ (*fluide newtonien*) et $0,6$ (*fluide polaire*).

-Champ de pression hydrostatique

Les représentations graphiques tridimensionnelles et bidimensionnelles du champ de pression hydrostatique (fig. V-6 à V-8) montrent qu'il n'y a aucune influence du paramètre des couples de contraintes sur la pression hydrostatique, ceci est dû à la présence des alvéoles qui, dans le cas hydrostatique, sont pressurisées de l'extérieur à l'aide d'une pompe ou d'un compresseur.

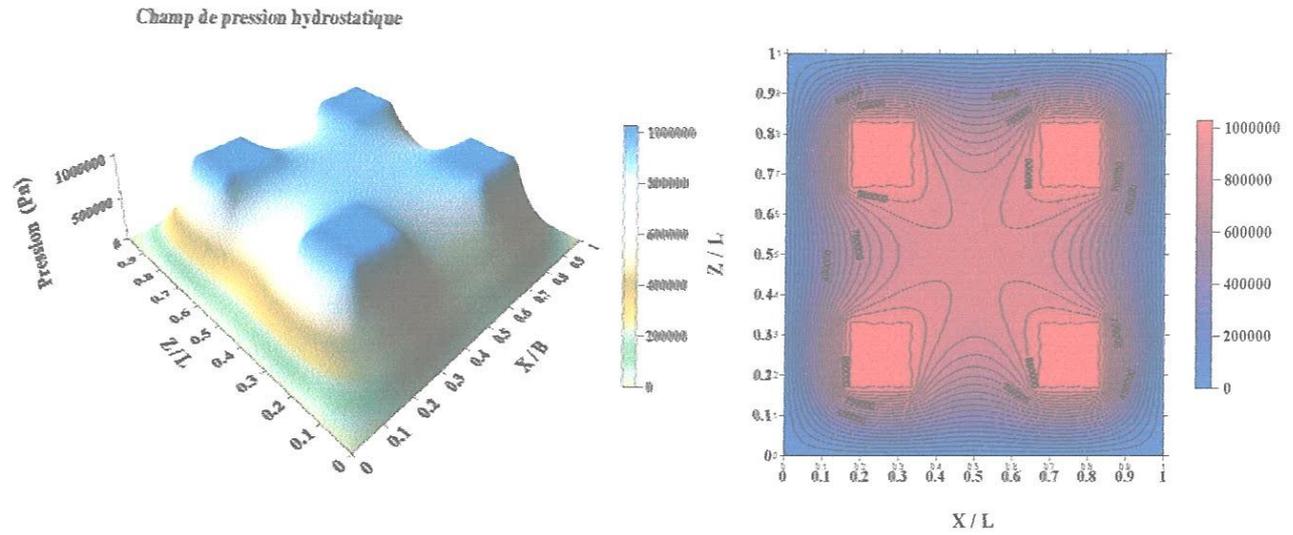


a) *fluide newtonien* ($\tilde{\ell} = 0,0$);

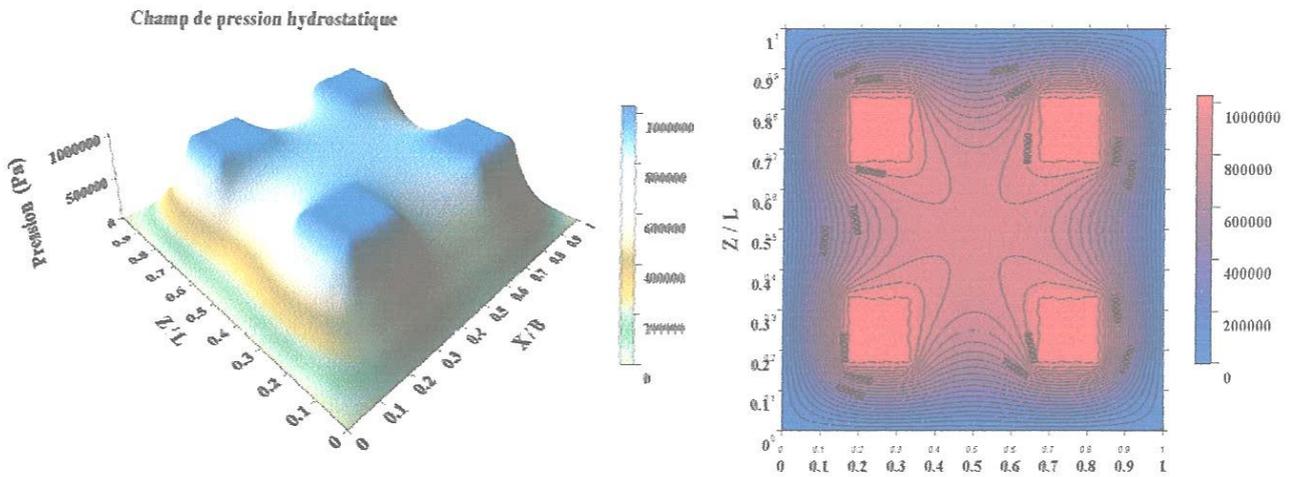


b) *fluide polaire* ($\tilde{\ell} = 0,6$)

Fig. V-6 : *Champ de pression dans une butée hydrostatique à une alvéole.*



a) fluide newtonien ($\tilde{\ell} = 0,0$);



b) fluide polaire ($\tilde{\ell} = 0,6$).

Fig. V-7 : Champ de pression dans une butée hydrostatique à quatre alvéoles.

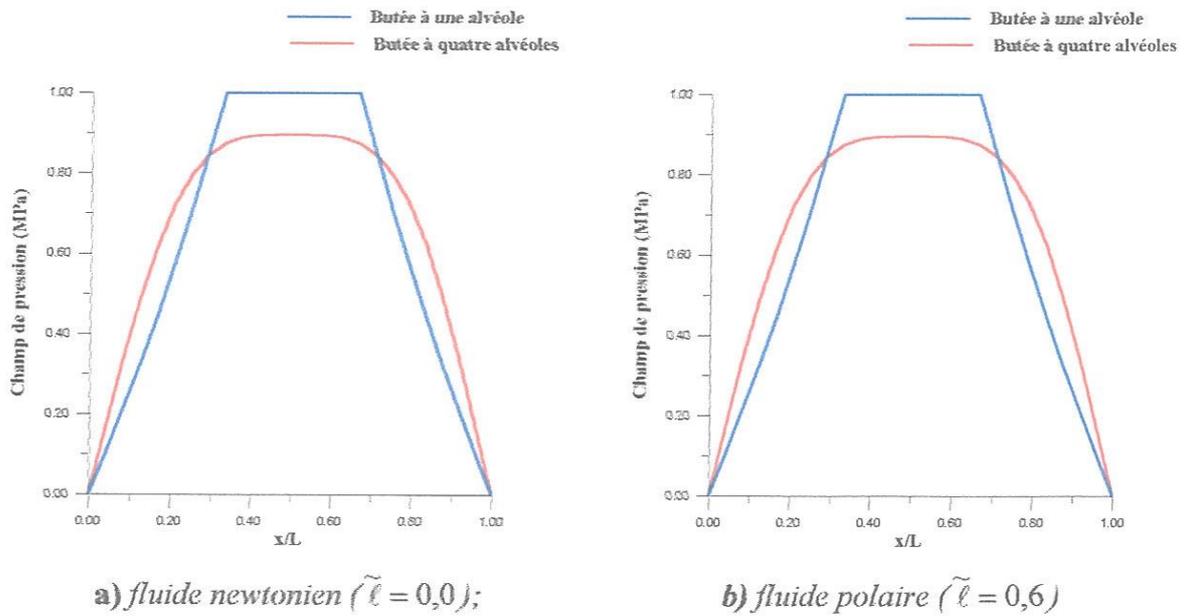


Fig.V- 8 : Champ de pression dans la section médiane de la butée rectangulaire.

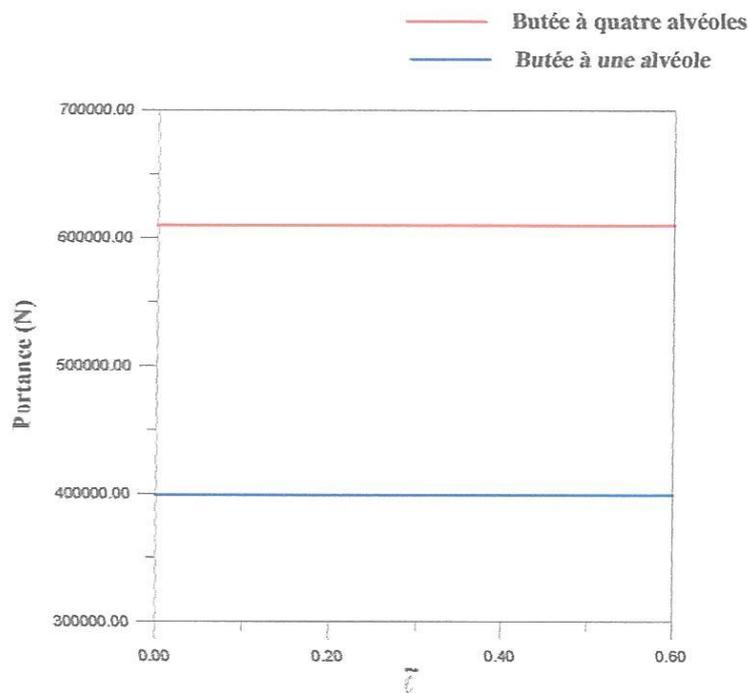


Fig.V-9 : Variation de la portance en fonction du paramètre du couple de contraintes.

- Performances statiques

La figure V-9 représente la variation de la portance hydrostatique générée par les pressions régnant dans les alvéoles et les portées des butées à une et quatre alvéoles en fonction du paramètre des couples des contraintes. Les résultats obtenus montrent que la présence des additifs dans le lubrifiant

n'a pas d'effets appréciables sur la portance même pour les grandes valeurs de ℓ ; c'est-à-dire dans le cas des polymères de longues chaînes moléculaires.

La figure V-10 montre les variations de la puissance dissipée de l'écoulement en fonction du paramètre des couples des contraintes dans le cas des deux butées (à une (trait discontinu) et à quatre alvéoles (trait continu)). Celle-ci est obtenue à partir de l'intégration de la fonction de dissipation visqueuse. Les résultats montrent que la puissance dissipée diminue avec le paramètre des couples de contraintes. D'autre part, pour une même valeur du paramètre des couples des contraintes, la puissance dissipée calculée dans le cas de la butée à quatre alvéoles est plus importante que celle obtenue dans le cas de la butée à une alvéole.

Il convient de souligner que la puissance dissipée doit être considéré comme un paramètre important dans la conception des butées hydrostatiques car elle conditionne l'élévation de température du fluide lubrifiant.

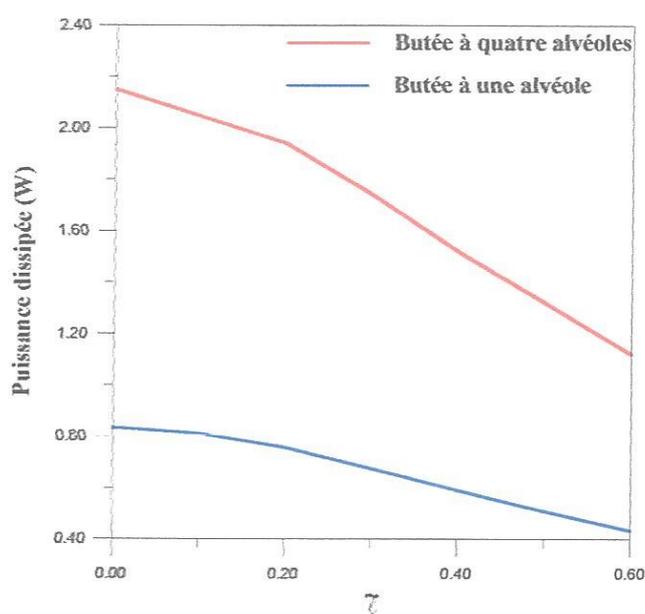


Fig.V-10 : Variation de la puissance dissipée en fonction du paramètre $\tilde{\ell}$.

Le figure V-11 montre la variation des débits de fuite dans les directions x et z en fonction du paramètre des couples de contraintes. Ces débits sont calculés par l'intégration du champ des vitesses moyennes aux bords libres de la butée fig. V-12 et V-13. Rappelons que ces vitesses sont calculées à partir d'une intégration du champ de vitesse de l'écoulement à travers l'épaisseur du film (fig. V-14). Il est à remarquer que sur cette figure que lorsque le paramètre des couples de

contraintes $\tilde{\ell}$ augmente, le débit volumique de fuite diminue. Pour une valeur donnée de $\tilde{\ell}$, le débit calculé dans le cas d'une butée à quatre alvéoles est plus grand que celui obtenu dans le cas d'une butée à une alvéole. La diminution du débit de fuite avec $\tilde{\ell}$ s'explique par la réduction du module de la vitesse d'écoulement aux extrémités libres de la butée comme il est clairement indiqué sur les figures V-12 et V-13. On peut conclure que les systèmes hydrostatiques utilisant des huiles additivées nécessitent l'emploi de pompes d'alimentation en lubrifiant moins puissantes que ceux lubrifiés avec des huiles de base pures.

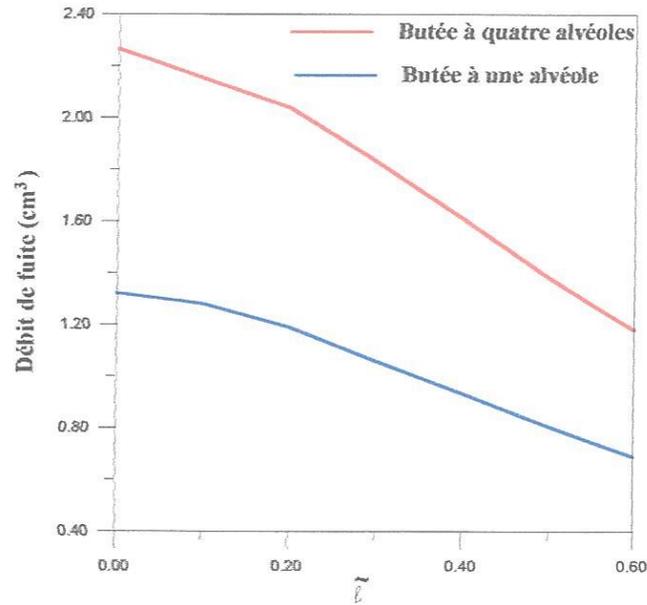


Fig. V-11 : Variation du débit de fuite en fonction du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$.

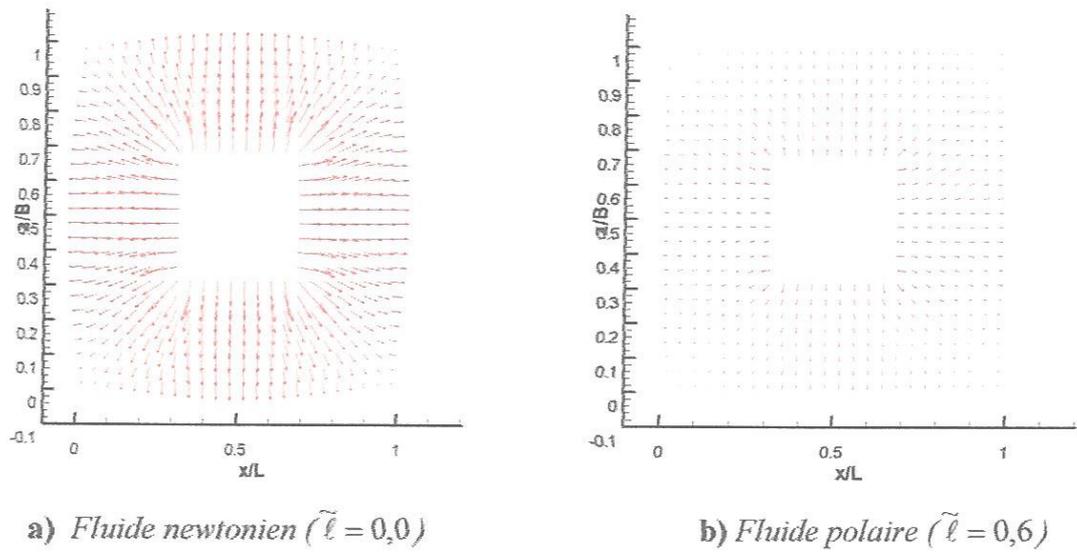


Fig.V-12: Champ de vitesse moyenne dans une butée hydrostatique à une alvéole.

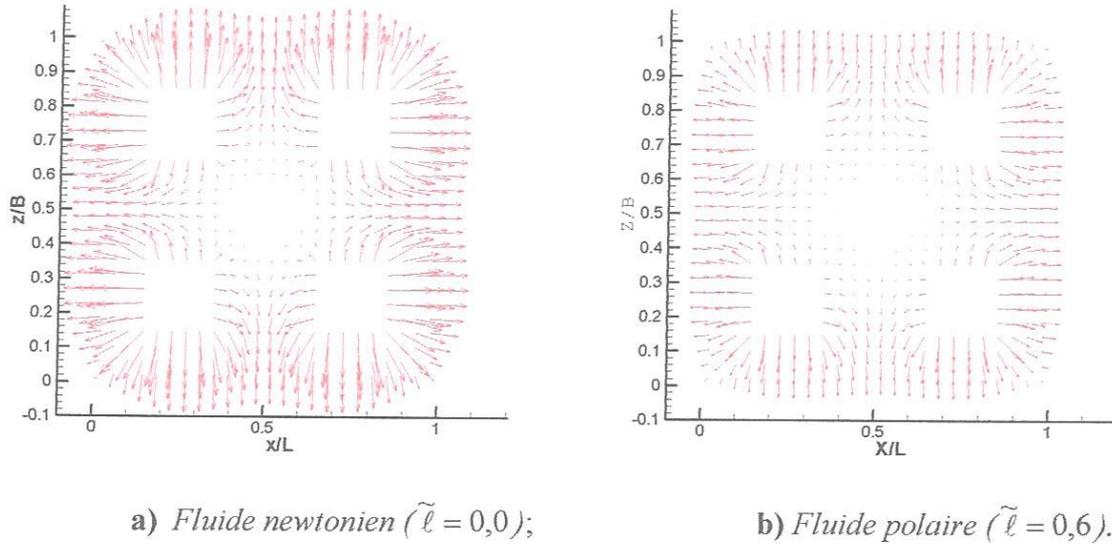


Fig.V-13: Champ de vitesse moyenne dans une butée hydrostatique à quatre alvéoles.

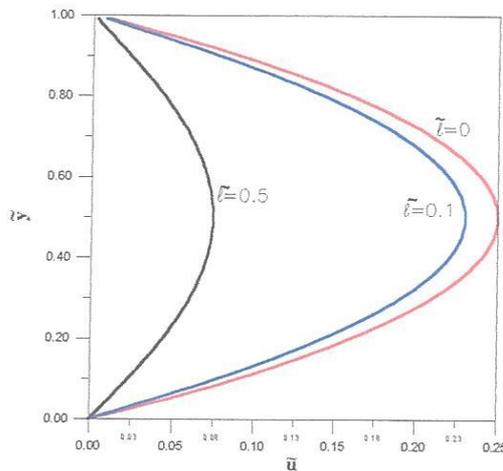


Fig. V-14 : Variation du profil de la vitesse d'écoulement adimensionnée \tilde{u} à travers l'épaisseur du film pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$.

4.2. Cas des butées hydrodynamiques

A la différence des butées hydrostatiques, dont la capacité de charge est obtenue par pressurisation extérieure, la génération de la portance dans les butées hydrodynamiques est due aux déplacements relatifs des surfaces de la butée et à l'effet du coin d'huile généré par le profil du patin. (Fig.V-15). La butée étudiée est une butée hydrodynamique à six patins fixes dont les caractéristiques géométriques et cinématiques sont reportées dans le tableau V-4. La géométrie du film dans le patin est donnée par :

$$h = h_{\min} + C_{\text{wed}} \left(\frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0} \right) \quad (\text{V-1})$$

avec : $C_{wed} = h_{max} - h_{min}$

où h_{max} et h_{min} sont, respectivement, les épaisseurs maximale et minimale du film.

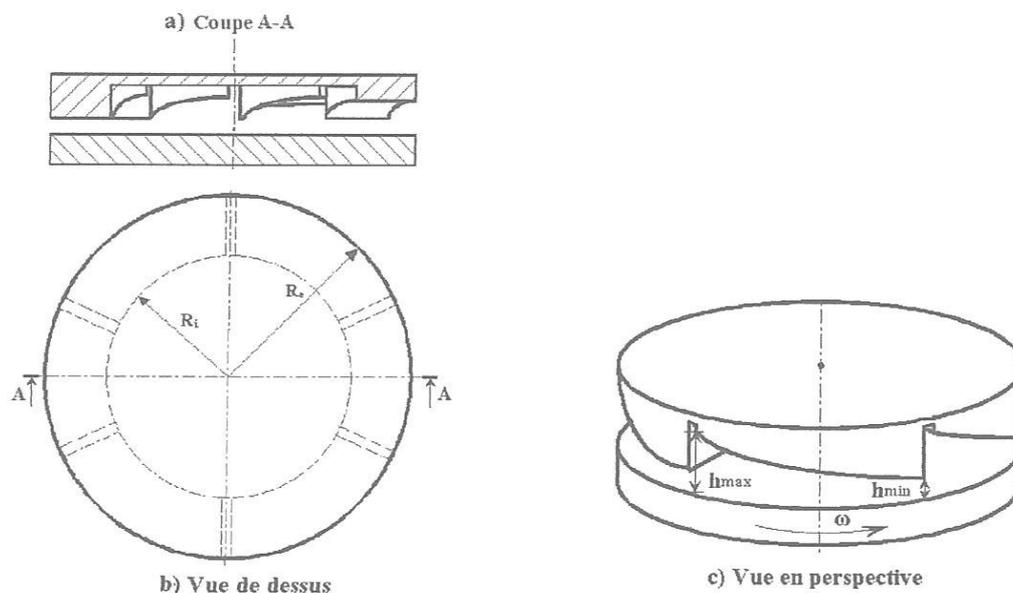
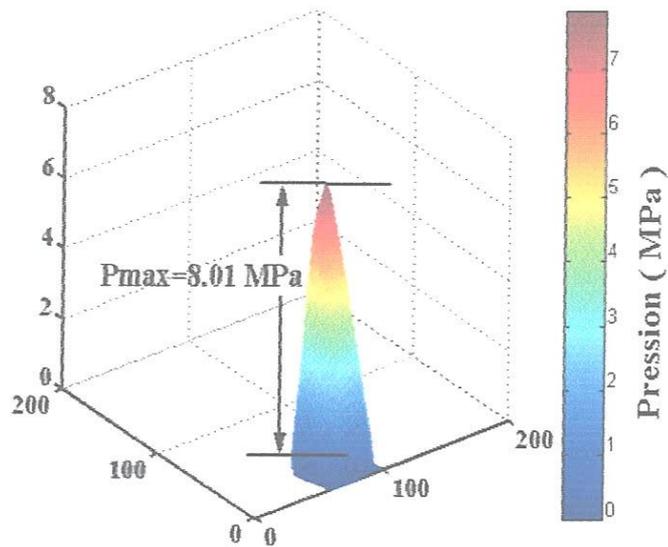


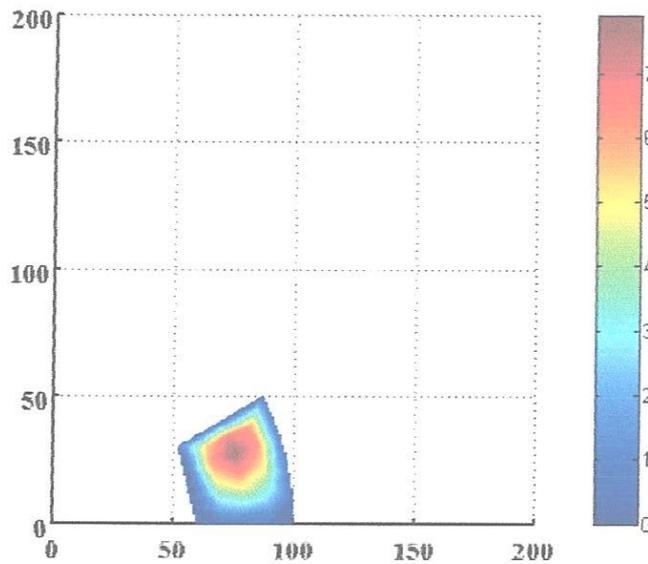
Fig. V-15 : Schématisation d'une butée hydrodynamique à patins fixes.

Tableau V-4 : Caractéristiques de la butée hydrodynamique à patins fixes.

Caractéristiques	Symbole	Unité	Valeur
A- Caractéristiques géométriques			
Rayon extérieur du patin	R_e	m	100×10^{-3}
Rayon intérieur du patin	R_i	m	60×10^{-3}
Amplitude angulaire du patin	Θ_0	degrés	30
Épaisseur minimale du film à la sortie du patin (trailing edge)	h_{min}	m	10×10^{-6}
Épaisseur maximale du film à l'entrée du patin (leading edge)	h_{max}	m	20×10^{-6}
A- Caractéristique cinématique			
Vitesse angulaire du grain mobile	ω	rad/s	100π
B- Propriétés physiques du lubrifiant			
Masse volumique	ρ	kg/m ³	10^3
Viscosité dynamique à 20°C	μ	Pa.s	10^{-3}



a) Profil de pression



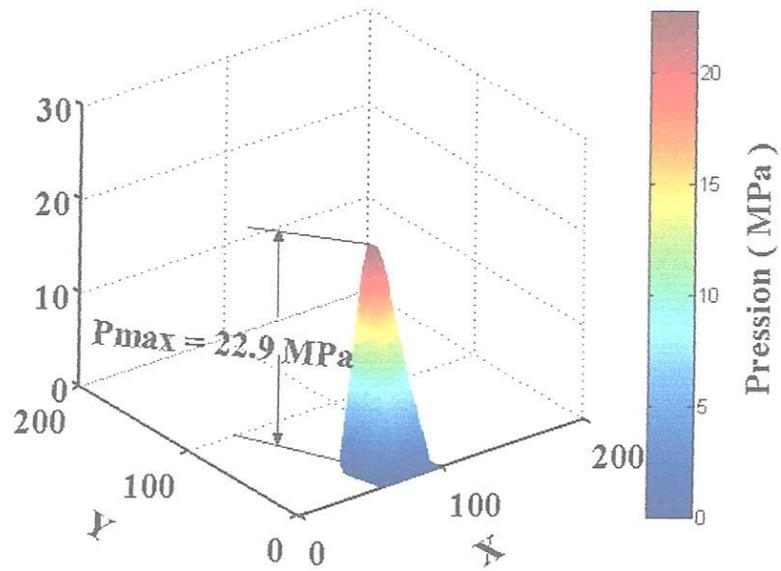
b) Zones de pression

Fig.V-16: Champ de pression dans un patin lubrifié par un fluide newtonien ($\tilde{\ell} = 0,0$)

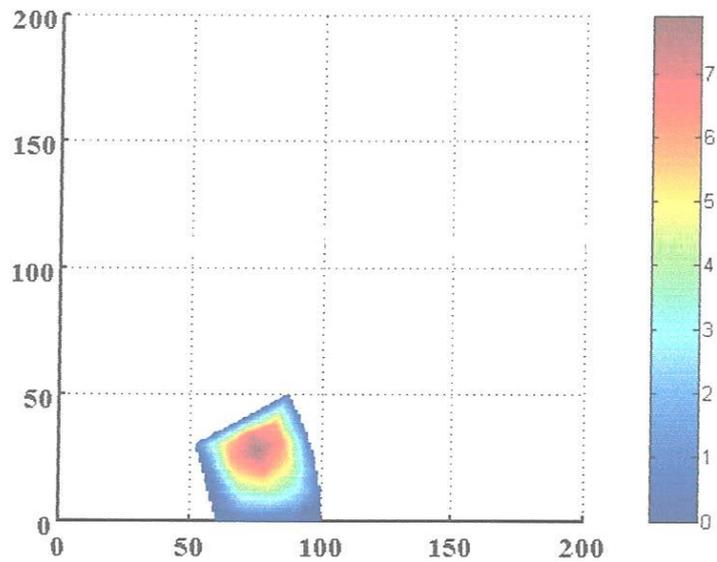
- Champ de pression hydrodynamique

Les distributions du champ de pression hydrodynamique sont calculées pour deux valeurs du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell} = 0,0$ (cas newtonien) et $\tilde{\ell} = 0,6$ (cas polaire). Les figures V-16 et V-17 montrent que la présence des additifs dans le lubrifiant affecte de façon importante le profil de pression. Par comparaison aux huiles non additivées (newtoniennes), les huiles contenant des additifs entraînent une augmentation importante du pic de pression dans le cas des polymères de

longues chaînes moléculaires. L'augmentation de la pression hydrodynamique améliore bien évidemment la capacité de charge du patin (fig. V-18). On peut conclure que les systèmes hydrodynamiques lubrifiés avec des huiles additivées permettent de supporter des charges plus importantes que ceux utilisant des huiles de base pures comme lubrifiant.



a) Profil de pression



b) Zones de pression

Fig.V-17 : Champ de pression dans un patin lubrifié par un fluide polaire ($\tilde{\ell} = 0,6$)

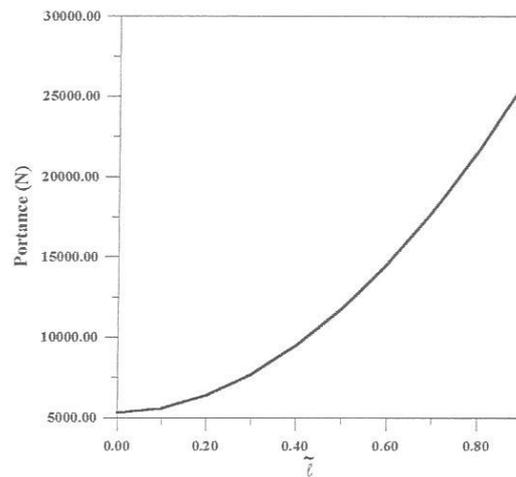


Fig.V-18 : Variation de la portance hydrodynamique avec le paramètre \tilde{l} .

5. Conclusion

L'étude paramétrique menée dans ce chapitre a permis de mettre en évidence les effets de la présence des additifs dans les huiles lubrifiantes sur le comportement statique des butées hydrostatiques et hydrodynamiques. Les conclusions dégagées sont comme suit :

- *Cas des butées hydrostatiques :*
 - ❖ le champ de pression et la portance ne sont pas affectés par la présence des additifs ;
 - ❖ une diminution de la puissance dissipée et du débit volumique de fuite ou de la puissance de pompage surtout dans le cas des polymères de longues chaînes moléculaires. Ces résultats sont en bonne concordance avec ceux publiés dans [37].

- *Cas des butées hydrodynamiques :*
 - ❖ par comparaison aux fluides non additivés (newtoniens), les fluides contenant des additifs entraînent une augmentation du pic de pression. Cette augmentation est d'autant plus significative que la valeur du paramètre des couples de contraintes est grande ;
 - ❖ les systèmes hydrodynamiques lubrifiés par des huiles additivées offrent une meilleure capacité de charge que les systèmes utilisant des huiles de base pures (sans additifs) comme lubrifiants.

vue de trouver une solution approchée à l'équation de Reynolds modifiée. Cette formulation a conduit au développement de plusieurs programmes de calcul MS FORTRAN.

Enfin, la troisième partie de ce travail est réservée pour l'étude paramétrique en vue de mettre en évidence les effets du paramètre des couples de contraintes représentant la taille des chaînes moléculaires présentes dans le fluide lubrifiant sur le comportement des butées hydrostatiques et hydrodynamiques.

Les calculs ont été effectués sur trois types de butées hydrostatiques:

- ✓ butée rectangulaire à une alvéole;
- ✓ butée rectangulaire à quatre alvéoles;
- ✓ butée cylindrique à une alvéole centrale.

Et un type de butée hydrodynamique à patins fixes.

Cette étude a permis de montrer que:

Dans le cas des butées hydrostatiques :

- le paramètre des couples de contraintes ℓ n'a pas d'effet sur la portance hydrostatique à cause de la présence des alvéoles d'alimentation;
- Une diminution du débit volumique de fuite avec ℓ et cela dans les trois cas de butées étudiées. Ce qui nécessite l'emploi de pompes de plus faible puissance;
- Une diminution importante de la puissance dissipée surtout pour les grandes valeurs de ℓ . Il a été observé que, pour une même valeur de ℓ , la puissance dissipée dans le cas d'une butée alimentée par une seule alvéole est plus faible que dans le cas d'une butée alimentée par quatre alvéoles.

Dans le cas des butées hydrodynamiques :

- La présence des additifs joue un rôle positif vis-à-vis de la portance du système;
- Le pic de pression calculé dans le cas polaire est plus important que celui obtenu pour un fluide newtonien notamment pour les grandes valeurs de ℓ ;
- Une augmentation importante du débit de fuite avec ℓ ;
- Une augmentation linéaire de la portance avec la vitesse angulaire du grain mobile.

Les résultats théoriques obtenus au cours de cette étude présentent d'un point de vue technologique un intérêt certain car ils permettent aux constructeurs des paliers de butées de prendre en

considération la nature du lubrifiant et de son comportement rhéologique ainsi que son influence sur le comportement statique des butées fluides. Par conséquent, le paramètre des couples de contraintes ℓ qui représente la longueur de la chaîne moléculaire des polymères rajoutés à la base du lubrifiant afin d'améliorer ses performances doit être considéré comme un paramètre important dans la conception des butées hydrostatiques et hydrodynamiques.

Pour compléter cette étude, il serait intéressant de prendre en considération les effets thermiques en plus des effets de la rhéologie du fluide sur le comportement statique et dynamique des butées fluides. Dans ces conditions, le problème de lubrification est gouverné par un système d'équations différentielles couplées qui sont :

- L'équation de Reynolds généralisée écrite pour un fluide polaire;
- L'équation de l'énergie modifiée pour le milieu fluide;
- L'équation de la chaleur pour le milieu solide.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. Comolet, Mécanique expérimentale des fluides, MASSON, 1994.
- [2] J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe, M. Godet, Lubrification hydrodynamique : Paliers et butées, Collection des études de recherches d'EDF, Eyrolles, 1990.
- [3] V. N. Constantinescu, Al. Nica, M. D. Pascovici, G. Ceptureanu, S. Nedelcu, Sliding bearings, 1985 Alleston Press Inc., USA.
- [4] D. Nicolas, Butées et paliers hydrostatiques, Techniques de l'ingénieur, traité Sciences fondamentales, Doc. B 673,
- [5] D. Meuwly, L'analyse des lubrifiants pour armes à feu par FTIR, publication de la Free Software Foundation; version 1.2 de la licence, sous licence GPL, 2005.
- [6] J. M. Georges, Frottement, usure et lubrification, Eyrolles, 2000.
- [7] R. M. Gresham, Lubricant base oils, Tribology & Lubrication Technology, April 2004.
- [8] B. Sillion, Les lubrifiants pour automobiles, l'actualité chimique, Octobre 2003.
- [9] L. Breton, Chimie organique, éditions MARKETING, 1981.
- [10] N. Allinger, M. Cava, D. C. De jongh, C. R. Johnson, N. A. Lebel, C. L. Stevens, Chimie organique, vol. III : Applications, Mc GRAW-HILL, 1983.
- [11] C. Chitour, Physico-chimie des surfaces, Tome 1, Office des Publications Universitaires, 2004.
- [12] R. Gojon, Matériaux pour paliers lisses, Techniques de l'ingénieur, traité Sciences fondamentales, Doc. B 5330,
- [13] J.-M. Piau, Fluides non newtoniens, Techniques de l'ingénieur, traité Sciences fondamentales, Doc. A 710,
- [14] V. K. Stokes, Couple stresses in fluids, the physics of fluids, vol. 9, n° 9, September 1966.
- [15] G. Couarraze, J. L. Grossiord- " Initiation à la rhéologie ". Technique et Documentation, Lavoisier, Paris, 1983.
- [16] L. E. Malvern, Introduction to the mechanics of a continuous medium, Prentice-Hall, Inc., 1969.
- [17] I. L. Ryhming, Dynamique des fluides, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1991.
- [18] R. Boudet, A. Chauvrier, Mécanique des milieux continus, Hermes,

- [19] J. Frêne, paliers hydrodynamiques, Techniques de l'ingénieur, traité Sciences fondamentales, Doc. B 671
- [20] N. Piskounov, Calcul Différentiel et Intégral, Tome II, Editions MIR, Moscou, 1980.
- [21] M. Lahmar, Elastohydrodynamic analysis of double-layered journal bearings lubricated with couple-stress fluids, Proc Instn Mech.Engrs Vol. 219 Part J, IMechF, 2005.
- [22] M. R. Spiegel, Théorie et applications de l'analyse, Mc GRAW-HILL, 1973.

- [23] A. Benali, comportement dynamique des butées hydrodynamiques, thèse de doctorat d'état, Université de Poitiers (France), 1988.
- [24] X-L Wang, K-Q Zhu et C-L Gui : A study of a journal bearing lubricated by couple stress fluids considering thermal and cavitation effects, Proc Instn Mech Engrs, Vol 216 part J, J, Engineering Tribology, IMechE 2002.
- [25] G. Dhatt, G. Touzot, Une présentation de méthode des éléments finis, Collection de l'Université de Campiègne, 1984.
- [26] A. Gourdin M. Boumahrat, Méthodes numériques appliquées, O. P. U., 1991.
- [27] M. Lahmar, notes de cours de Fortran, Université de Guelma, 2004.
- [28] Rosenberg, R. C., A method for determining the influence of multigrade oils on journal bearing performance. SAE Trans, 1973, 82, paper 730483.
- [29] Rosenberg, R. C., The influence of polymer additives on journal bearings performance. Fuels and Lubricants Meeting, Houston, Texas, 3-5 June 1975, Paper 750692 (SAE).
- [30] Robin, M. Etude de la lubrification des paliers de longueur finie: Influence des additifs de viscosité, Thèse de doctorat, Janvier 1978, Editions Technip.
- [31] Oliver, D. R. Load enhancement effects due to polymer thickening in a short model journal bearings. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1988, 30, 185-196.
- [32] Spikes, H. A. The behaviour of lubricants in contacts: current understanding and future possibilities, Proc. Instn Mech. Engrs, Part J: J. Engineering Tribology, 1994, 28, 3-15.
- [33] Ariman, T. T. and Sylvester, N. D. Microcontinuum fluid mechanics: a review. Int. J. Eng. Sci., 1973, 11, 905-930.
- [34] Ariman, T. T. and Sylvester, N. D. Application of microcontinuum fluid mechanics. J. Eng. Sci., 1974, 12, 273-293.
- [35] Voigt, W. Lehrbuch der kristallphysik, 1910 (reprinted 1928) (B. G. Teubner, Leipzig and Berlin).
- [36] Gupta, R. S. and Sharma, L. G. Analysis of couple stress lubricant in hydrostatic thrust bearings. Wear, 1988, 48, 257-269.
- [37] Lin J. R. Static and dynamic characteristics of externally pressurized circular step thrust bearings lubricated with couple-stress fluids. *Tribology Int.*, 1999, 32, 207-216.
- [38] Ramanaiah, G. Slider bearings lubricated by fluids with couple-stress. *Wear*, 1979, 52, 27-36.
- [39] Sinha, P. and Singh, C. Couple-stresses in the lubrication of rolling contact bearings considering cavitation. *Wear*, 1981, 67, 85-91.
- [40] Bujurke, N. M. and Naduvini, N. G. The lubrication of the lightly cylinders in combined rolling, sliding and normal motion with couple-stress fluid. Int. J. Mech. Sci., 1990, 32, 969-979.

- [41] Lin, J. R. Squeeze film characteristics of long partial journal bearings lubricated with couple-stress fluids. *Tribology Int.*, 1997, 30(1), 53-58.
- [42] Lin, J. R. Squeeze film characteristics of finite journal bearings: couple-stress fluid model. *Tribology Int.*, 1997, 31(4), 201-207.
- [43] Lin, J. R., Yang, C. B., and Lu, R. F. Effects of couple-stresses in the cyclic squeeze films of finite partial journal bearings. *Tribology Int.*, 2001, 34, 119-125.
- [44] Naduvinamani, N. B., Hiremath, P. S., and Gurubasavaraj, G. Squeeze film lubrication of a short porous journal bearing with couple-stress fluids. *Tribology Int.*, 2001,34, 739-747.
- [45] Mokhiamer, U. M., Crosby, W. A., El-Gamal, H. A. A study of a journal bearing lubricated by fluids with couple-stress considering the elasticity of the liner. *Wear*, 1999, 224, 194-201.
- [46] Naduvinamani, N. B., Hiremath, P. S., Gurubasavaraj, G. Surface roughness effects in a short porous journal bearing with a couple-stress fluid. *Fluid Dyn. Res.*, 2002, 31(5-6),333-354.
- [47] X-L Wang, K-Q Zhu et Wen S. Z. Thermohydrodynamic analysis of pournal bearings lubricated with couple-stress fluids. *Tribology Int.*, 2001, 34, 335-343.
- [48] Lahmar M.,Haddad A., et Nicolas D. Elastohydrodynamic analysis of one-layered journal bearings. *J. Engineering Tribology Proc. Instn Mech. Engrs, Part J*: 1998, 212, 193-205.
- [49] Y. Birembaut, Butées hydrostatiques : Calcul du champ de pression et de la portance, CETIM n° 66, 1980.

ANNEXE -A-

Principe de la quantité de mouvement de translation et de rotation

Le principe de la quantité de mouvement, pour une collection de particules, énonce que le taux de variation (par unité de temps) de la quantité de mouvement pour un ensemble de particules donné est égale à la somme vectorielle de toutes les forces extérieures agissant sur les particules de l'ensemble, muni de la troisième loi de Newton de l'action et de la réaction qui gouverne les forces intérieures. La forme continue de ce principe est un postulat de base de la mécanique des milieux

continus. Alors la variation de la quantité de mouvement $\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV$, où : $\frac{D}{Dt}$ désigne la dérivée

matérielle de l'intégrale de volume V délimité par S , énoncée par le postulat est :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_S \vec{t} dS + \int_V \rho \vec{b} dV \quad (A-1)$$

ou en notation indicielle :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_S t_i dS + \int_V \rho b_i dV \quad (A-2)$$

En substituant $t_i = T_{\bar{r}} n_j$ et en utilisant le théorème de la divergence pour transformer l'intégrale de surface en plus du théorème de transport de Reynolds pour transformer la dérivée matérielle du volume spatiale V délimité par la surface fixe S , les éqs.(A-2) s'écrivent :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) dV + \int_S (\rho u_i) v_j n_j dS \quad (A-3)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_i dV = \int_V \left[\underbrace{\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{\rho \frac{Du_i}{Dt}} + v_i \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) \right)}_{\frac{D\rho}{Dt} = 0} \right] dV \quad (A-4)$$

Alors :

$$\int_V \rho \frac{Du_i}{Dt} dV = \int_V \left[\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \right] dV \quad (A-5)$$

Le choix du volume étant arbitraire, on obtient les équations ponctuelles suivantes :

$$\rho \ddot{x}_i = T_{ji,j} + \rho b_i \quad (\text{A-6})$$

$$\text{avec : } \ddot{x}_j = \frac{Dv_j}{Dt} = \frac{D^2 x_j}{Dt^2}.$$

La présence de couples et de couples de contrainte n'affecte pas le principe de la quantité de mouvement de translation, d'ici les équations (A-2) restent applicables. Nous devons, cependant, prendre en compte ces couples dans l'équation du moment de la quantité de mouvement, qui prend la forme :

$$\frac{D}{Dt} \int_V [(\vec{r} \times \rho \vec{v}) + \rho \vec{l}] dV = \int_S [(\vec{r} \times \vec{t}) + \vec{m}] dS + \int_V [(\vec{r} \times \rho \vec{b}) + \rho \vec{c}] dV \quad (\text{A-7})$$

Et sur un système de coordonnées cartésiennes :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho [e_{ijk} x_j \dot{x}_k + l_i] dV = \int_S [e_{ijk} x_j t_k + m_i] dS + \int_V \rho [e_{ijk} x_j b_k + c_i] dV \quad (\text{A-8})$$

où, la quantité l_i représente la quantité de mouvement de rotation de la particule par rapport à son centre d'inertie. En substituant : $t_i = T_{ji} n_j$, $m_i = M_{ji} n_j$ et en transformant l'intégrale de surface, l'équation (A-8) devient :

$$\int_V \rho \frac{Dl_i}{Dt} dV + \int_V e_{ijk} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho x_j \dot{x}_k) + \frac{\partial}{\partial x_m} (\rho x_j \dot{x}_k \dot{x}_m) \right] dV = \int_V \left[e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_r} (x_j T_{rk}) + \frac{\partial M_{ri}}{\partial x_r} \right] dV + \int_V \rho [e_{ijk} x_j b_k + c_i] dV \quad (\text{A-9})$$

En développant les dérivées et effectuant certains regroupements utiles, le système d'équations (A-9) s'écrit :

$$\int_V \rho \frac{Dl_i}{Dt} dV + \int_V e_{ijk} \left[\dot{x}_k x_j \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \dot{x}_r)}{\partial x_r} \right)}_{\frac{D\rho}{Dt}=0} + \rho \underbrace{\left(\frac{\partial (x_j \dot{x}_k)}{\partial t} + \dot{x}_r \frac{\partial (x_j \dot{x}_k)}{\partial x_r} \right)}_{\rho \frac{D}{Dt} (x_j \dot{x}_k)} \right] dV = \int_V \left[e_{ijk} \left(x_j \underbrace{\left(\frac{\partial T_{rk}}{\partial x_r} + \rho b_k \right)}_{\frac{Du_k}{Dt}} + \delta_{jr} T_{rk} \right) + \frac{\partial M_{ri}}{\partial x_r} + \rho c_i \right] dV \quad (\text{A-10})$$

Maintenant, et puisque : $\frac{Dx_j}{Dt} = u_j$

$$\int_V \rho \frac{Dl_i}{Dt} dV + \int_V e_{ijk} \rho \left[u_j u_k + x_j \frac{Du_k}{Dt} \right] dV = \int_V \left[e_{ijk} \left(x_j \underbrace{\left(\frac{\partial T_{rk}}{\partial x_r} + \rho b_k \right)}_{\frac{Du_k}{Dt}} + \delta_{jr} T_{rk} \right) + \frac{\partial M_{ri}}{\partial x_r} + \rho c_i \right] dV$$

$e_{ijk} u_j u_k = 0$ parce que $u_j u_k$ sont symétrique en indices quand e_{ijk} est antisymétrique. Et en vertu du principe de la quantité de mouvement de translation, le dernier terme de la deuxième intégrale du coté gauche s'annule avec le premier terme de l'intégrale de droite par l'équation (A-6). Notons que :

$$\delta_{jr} T_{rk} = T_{jk}$$

$$\int_V \rho \frac{dl_i}{dt} dV = \int_V e_{ijk} T_{jk} dV + \int_V [M_{ri,r} + \rho c_i] dV \quad (A-11)$$

$$\int_V \rho \frac{dl_i}{dt} dV = \int_V [e_{ijk} T_{jk} + M_{ri,r} + \rho c_i] dV \quad (A-12)$$

et en chaque point :

$$M_{ri,r} + \rho c_i + e_{ijk} T_{jk} = \rho \frac{Dl_i}{Dt} \quad (A-13)$$

ANNEXE -B-

Principe de conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique)

En mécanique des milieux continus, le système thermodynamique est, habituellement, choisi comme une collection donnée de matière continue; c'est-à-dire le système est fermé n'échangeant pas de matière avec son environnement, la surface délimitant le système est en mouvement avec le flux de matière. La première loi de la thermodynamique relie le travail effectué dans le système et le transfert de chaleur à l'intérieur du système à la variation de l'énergie totale du système :

$$\frac{d(\text{Energie totale du système})}{dt} = \text{Puissance}_{\text{reçue}} + \text{Chaleur}_{\text{reçue}} \quad (\text{B-1})$$

on suppose que le seul transfert d'énergie au système est dû :

- au travail mécanique effectué par les forces et les couples de surface et de volume;
- au transfert de chaleur à travers la surface extérieure du volume et par une source interne de chaleur distribuée.

L'énergie totale du système est considérée comme la somme de deux parties :

- l'énergie cinétique E_c : énergie cinétique macroscopique associée a la vitesse observable du milieu;
- L'énergie interne U : qui englobe; l'énergie cinétique des mouvements thermiques aléatoires des molécules associée aux mesures de température, l'énergie élastique stockée et peut être d'autres formes d'énergie non explicitées.

L'énergie interne par unité de masse ou énergie interne spécifique est notée : e , alors ρe est l'énergie interne par unité de volume. La première loi, éq. (B-1), peut maintenant s'écrire :

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left[\frac{1}{2} \rho u_i u_i + \rho e \right] dV = \int_S [t_i u_i + m_i w_i] dS + \int_V [\rho b_i u_i + \rho c_i w_i] dV - \int_S q_i n_i dS + \int_V \rho r dV \quad (\text{B-2})$$

et après transformation des intégrales de surface et substitution de $t_i = T_{ji} n_j$, $m_i = M_{ji} n_j$:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left[\frac{1}{2} \rho u_i u_i + \rho e \right] dV = \int_V \left[\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \right] u_i dV + \int_V \left[T_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} + \rho c_i \right) w_i + M_{ji} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \rho r - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \right] dV \quad (\text{B-3})$$

la première intégrale de droite s'annule avec la première quantité de gauche et sachant que T_{ji} et

$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ n'étant pas symétriques, nous pouvons écrire:

$$T_{ji} = T_{(ji)} + T_{[ji]} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = D_{ij} + W_{ij} \quad (\text{B-4})$$

où dans les deux cas le premier terme est symétrique le second est antisymétrique. Alors :

$$T_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = T_{(ji)} D_{ij} + T_{[ji]} W_{ij} \quad (\text{B-5})$$

où $T_{[ji]} W_{ij} = e_{mni} T_{mn} w_i$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV = \int_V \left[T_{(ij)} D_{ij} + M_{ji} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \rho r - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \right] dV \quad (\text{B-6})$$

L'équation différentielle, exprimant l'équilibre énergétique en tout point, est :

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{(ij)} D_{ij} + M_{ji} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \rho r - \frac{\partial q_m}{\partial x_m}, \quad \text{avec: } q_m = -k \frac{\partial T}{\partial x_m}, \quad i, j, m = 1, 2, 3 \quad (\text{B-7})$$

$$M_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \left(M_{ij}^D + \frac{1}{3} M_{mn} \delta_{ij} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = M_{ij}^D \frac{\partial w_i}{\partial x_j}, \quad \text{parce que: } \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0$$

L'équation d'énergie devient :

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{(ij)} D_{ij} + M_{ij}^D \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \rho r - q_{j,j} \quad (\text{B-8})$$

Pour un fluide newtonien (non polaire), l'équation (B-8) se réduit à :

$$\rho \frac{De}{Dt} = T_{ij} D_{ij} + \rho r - q_{j,j} \quad (\text{B-9})$$

où $T_{ji} = T_{ij}$

ANNEXE C

Sommaire de différentes formules écrites en coordonnées cylindriques

- *Matrice représentant le tenseur gradient de vitesse :*

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (C-1)$$

- *Tenseurs taux de déformation D et de vorticité W :*

$$\left. \begin{aligned} [D] &= \frac{1}{2} \left\{ [L] + [L]^T \right\} & [W] &= \frac{1}{2} \left\{ [L] - [L]^T \right\} \\ D_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & D_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & D_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ D_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] & D_{rz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \\ D_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (C-2)$$

- *Equations de mouvement de Cauchy*

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left(\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \rho b_r \\ \rho \left(\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) &= \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \rho b_\theta \\ \rho \frac{Du_z}{Dt} &= \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} + \rho b_z \end{aligned} \right. \quad (C-3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{rz}}{\partial z} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r} + \rho c_r + T_{\theta z} - T_{z\theta} &= 0 \\ \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} + \frac{M_{r\theta} + M_{\theta r}}{r} + \rho c_\theta + T_{rz} - T_{zr} &= 0 \\ \frac{\partial M_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{zz}}{\partial z} + \frac{M_{rz}}{r} + \rho c_z + T_{r\theta} - T_{\theta r} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (C-4)$$

où: u_r , u_θ et u_z sont les composantes spatiales de la vitesse.

• *Composantes du tenseur des contraintes T :*

$$\begin{aligned}
 T_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, & T_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), & T_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 T_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) - \eta \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) \right. \\
 & & & & & \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{C-5}$$

$$T_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \eta \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right]$$

$$T_{\theta z} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) - \eta \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right]$$

ANNEXE -D-

Analyse dimensionnelle des équations de mouvement d'un fluide polaire

1. Coordonnées cartésiennes

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -p_{,i} + \mu u_{i,rr} - \eta u_{i,rsss} \quad (D-1)$$

En mécanique des films minces visqueux, la dimension suivant l'épaisseur du film $(0, \bar{x}_2)$ est très faible par rapport aux deux autres, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes du système d'équations (D-1) d'effectuer une analyse dimensionnelle. Pour ce faire, choisissant les variables adimensionnées suivantes :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{h}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{tV}{L}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \quad (D-2)$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad \tilde{v} = \frac{vL}{Vh}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{V}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes $(0, \bar{x}_1)$ et $(0, \bar{x}_3)$, h et $\frac{Vh}{L}$ celles suivant $(0, \bar{x}_2)$, $\frac{L}{V}$, μ_0 et λ_0 définissent l'ordre de grandeur du temps et des coefficients de Navier, ρ_0 et η_0 celui de la masse volumique et du coefficient responsable de la présence des couples de contrainte. Ce changement de variables conduit à poser :

$$\tilde{p} = p \frac{h^2}{VL\mu_0}$$

Compte tenu de ce changement de variables et en posant $\text{Re} = \frac{\rho_0 Vh}{\mu_0}$: nombre de Reynolds relatif à

l'épaisseur du film et $\varepsilon = h/L$ paramètre d'échelle, nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} &= \varepsilon \left\{ -\text{Re} \frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} + \varepsilon \left[\tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \ell^2 \left(\frac{1}{L^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^4} + \frac{2}{h^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2 \partial \tilde{y}^2} \right) \right] \right\} + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\tilde{\eta} \ell^2}{h^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} &= \varepsilon^2 \left\{ -\text{Re} \frac{D\tilde{v}}{D\tilde{t}} + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} + \varepsilon^2 \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right) - \frac{\tilde{\eta} \ell^2}{L^2} \left(\frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^4} + 2 \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{z}^2} \right) \right] \right\} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} &= \varepsilon \left\{ -\text{Re} \frac{D\tilde{w}}{D\tilde{t}} + \varepsilon \left[\tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{\eta} \ell^2 \left(\frac{1}{L^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{2}{h^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} \right) \right] \right\} + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\tilde{\eta} \ell^2}{h^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} \end{aligned} \right\} \quad (D-3)$$

En négligeant les termes multipliés par ε^2 , ε^3 et ε^4 il reste :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} &= -\varepsilon \Re e \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_j} \right] + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \tilde{\ell}^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} &= -\varepsilon \Re e \left[\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}_j} \right] + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \tilde{\ell}^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} \end{aligned} \right\} \quad (D-4)$$

avec $\tilde{\ell} = \ell/h$

Les termes en $\varepsilon \Re e$, ou termes d'inertie, du système (D-4) seront négligeable devant les termes de viscosité quand $\Re e \ll 1$. Donc il vient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} &= \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \tilde{\ell}^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} &= \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \tilde{\ell}^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} \end{aligned} \right\} \quad (D-5)$$

Et pour revenir aux variables dimensionnées, on multiplie chaque terme du système d'équation (D-5)

par $\frac{\mu_0 V}{h^2}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \end{aligned} \right. \quad (D-6)$$

2. Coordonnées cylindriques

comme en coordonnées cartésiennes, on fait les mêmes hypothèses de la mécanique des films minces visqueux, la dimension suivant l'épaisseur du film $(0, \bar{z})$ est très faible par rapport aux deux autres, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes du système d'équations (III-45) d'effectuer une analyse dimensionnelle. Pour ce faire, choisissons les variables adimensionnées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \tilde{r} R_m \\ z = \tilde{z} h \\ t = \tilde{t} \frac{R_m}{V} \end{array} \right. \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} u_r = \tilde{u}_r V \\ u_\theta = \tilde{u}_\theta V \\ u_z = \tilde{u}_z \frac{V h}{R_m} \end{array} \right. \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \mu = \tilde{\mu} \mu_0 \\ \eta = \tilde{\eta} \eta_0 \\ \rho = \tilde{\rho} \rho_0 \end{array} \right. \quad (D-7)$$

R_m et V sont respectivement la dimension (rayon moyen de la butée) et la vitesse caractéristiques selon les axes $(0, \bar{e}_r)$ et $(0, \bar{e}_\theta)$ h et $\frac{Vh}{R_m}$ celles suivant $(0, \bar{e}_z)$, R_m/V , μ_0 et η_0 définissent l'ordre de grandeur du temps et des coefficients physiques. Ce changement de variables conduit à poser :

$$p = \tilde{p} \frac{\mu_0 R_m V}{h^2}$$

Compte tenu de ces changements de variables le système (III-45) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = & -\Re_c \tilde{\rho} \varepsilon \left(\frac{D\tilde{u}_r}{D\tilde{t}} - \frac{\tilde{u}_\theta^2}{\tilde{r}} \right) + \tilde{\mu} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) - \\ & - \tilde{\eta} \varepsilon^4 \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \left\{ \frac{\partial^4 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{1}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^4 \tilde{u}_r}{\partial \theta^4} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}^4} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\frac{\varepsilon^2}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}^3} + \frac{\varepsilon^2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}^2 \partial \tilde{z}^2} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\varepsilon^2}{\tilde{r}^3} \frac{\partial^3 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r} \partial \theta^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}^2 \partial \theta^2} \right] - \frac{2}{\tilde{r}^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}^2} - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\tilde{u}_r}{\tilde{r}^4} \left\{ \right. \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} = & -\Re_c \tilde{\rho} \varepsilon \left(\frac{D\tilde{u}_\theta}{D\tilde{t}} + \frac{\tilde{u}_r \tilde{u}_\theta}{\tilde{r}} \right) + \tilde{\mu} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\tilde{u}_\theta}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \theta} \right) - \\ & - \tilde{\eta} \varepsilon^4 \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \left\{ \frac{\partial^4 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{1}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^4 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta^4} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}^4} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\frac{\varepsilon^2}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}^3} + \frac{\varepsilon^2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}^2 \partial \tilde{z}^2} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\varepsilon^2}{\tilde{r}^3} \frac{\partial^3 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r} \partial \theta^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}^2 \partial \theta^2} \right] - \frac{2}{\tilde{r}^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}^2} - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \theta} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\tilde{u}_\theta}{\tilde{r}^4} \left\{ \right. \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = & \varepsilon^2 \left\{ -\Re_c \tilde{\rho} \varepsilon \frac{D\tilde{u}_z}{D\tilde{t}} + \tilde{\mu} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}^2} \right) - \right. \\ & - \tilde{\eta} \varepsilon^4 \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \left\{ \frac{\partial^4 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{1}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^4 \tilde{u}_z}{\partial \theta^4} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}^4} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\frac{\varepsilon^2}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}^3} + \frac{\varepsilon^2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}^2 \partial \tilde{z}^2} + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\varepsilon^2}{\tilde{r}^3} \frac{\partial^3 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r} \partial \theta^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}^2 \partial \theta^2} \right] \right\} \left. \right\} \end{aligned}$$

avec: $\mathfrak{R}_e = \frac{\rho_0 V h}{\mu_0}$: nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur du film fluide, $\varepsilon = \frac{h}{R_m}$ paramètre d'échelle est $\ell_0^2 = \eta_0 / \mu_0$.

En négligeant les termes en ε^2 , ε^3 et ε^4 on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = -\mathfrak{R}_e \tilde{p} \varepsilon \left(\frac{D\tilde{u}_r}{D\tilde{t}} - \frac{u_\theta^2}{\tilde{r}} \right) + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}^4} \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} = -\mathfrak{R}_e \tilde{p} \varepsilon \left(\frac{D\tilde{u}_\theta}{D\tilde{t}} - \frac{\tilde{u}_r \tilde{u}_\theta}{\tilde{r}} \right) + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = 0 \end{cases} \quad (D-8)$$

Quand, $\mathfrak{R}_e \varepsilon \ll 1$ les termes d'inertie sont négligeables devant ceux de viscosité :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}^4} \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{\ell_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = 0. \end{cases} \quad (D-9)$$

Et pour revenir aux variables dimensionnées, on multiplie chaque terme du système d'équations précédent par $\frac{\mu_0 V}{h^2}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u_r}{\partial z^4} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u_\theta}{\partial z^4} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (D-10)$$

ANNEXE -E-

Génération automatique de maillage

Dans une analyse pratique, les modèles d'éléments finis peuvent contenir des dizaines ou des centaines de milliers de degrés de liberté. Il n'est pas possible de créer de tels maillages manuellement. Le générateur de maillage est un logiciel qui divise le domaine de résolution en plusieurs sous domaines (éléments finis). Supposons que nous voulons générer un maillage quadrilatéral à l'intérieur d'un domaine qui a la forme d'un quadrilatère curviligne. La technique de maillage montré en figure E-1 peut être utilisée dans ce cas.

Si chaque coté du domaine peut être approximé par une parabole alors le domaine ressemble à un élément isoparamétrique à huit nœuds. Le domaine est maillé en carré dans le système de coordonnées locales ξ et η .

Le carré en coordonnées ξ et η est divisé en éléments rectangulaires et ensuite les coordonnées des nœuds sont transformées en retour au système de coordonnées globales x, y .

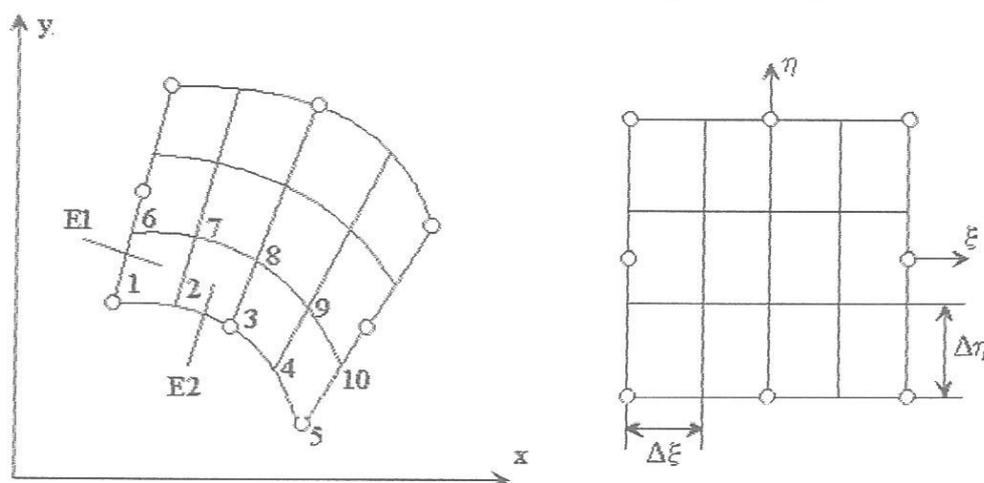


Fig. E-1: Génération automatique de maillage

a) algorithme de calcul des coordonnées du nœud i:

n_{ξ} = nombre d'éléments dans la direction ξ .

n_{η} = nombre d'éléments dans la direction η .

$$\text{Ligne : } R = (i - 1) / (n_{\xi} + 1) + 1 \quad (\text{E-1})$$

$$\text{Colonne : } C = \text{mod}((i - 1), (n_{\xi} + 1)) + 1 \quad (\text{E-2})$$

$$\Delta \xi = 2 / n_{\xi} \quad \Delta \eta = 2 / n_{\eta} \quad (\text{E-3})$$

$$\begin{aligned}\xi &= -1 + \Delta\xi(C-1) \\ \eta &= -1 + \Delta\eta(R-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \sum N_k(\xi, \eta)x_k \\ y &= \sum N_k(\xi, \eta)y_k\end{aligned}\tag{E-4}$$

b) connectivités de l'élément e :

$$\text{Ligne de l'élément : } R = (e-1)/n_\xi + 1\tag{E-5}$$

$$\text{Colonne de l'élément : } C = \text{mod}((e-1), n_\xi) + 1\tag{E-6}$$

Connectivité (nombre total des noeuds) :

$$\begin{aligned}i_1 &= (R-1)(n_\xi + 1) + C \\ i_2 &= i_1 + 1 \\ i_3 &= R(n_\xi + 1) + C + 1 \\ i_4 &= i_3 - 1\end{aligned}\tag{E-7}$$

Le déplacement des nœuds du milieu vers les coins du domaine aide au raffinement du maillage (éléments plus petits) près de ce coin.

Si le raffinement se fait sur le côté de l'élément qui est parallèle à l'axe ξ et la dimension du plus petit élément près du nœud du coin est Δl alors le nœud du milieu doit être déplacé à la position :

$$\alpha = \frac{l_m}{l} = \frac{1 + \frac{\Delta l}{l} n_\xi - \frac{2}{n_\xi}}{4 \left(1 - \frac{1}{n_\xi} \right)}\tag{E-8}$$

PRINCIPALES NOTATIONS

D_e	Diamètre extérieur de la butée, [m];
D_i	Diamètre intérieur de la butée, [m];
D_{ij}	Tenseur des taux de déformation, [s^{-1}];
D/Dt	Dérivée particulaire;
e	Energie interne massique, [J/kg];
f_i	Forces massiques, [N/kg];
h	Epaisseur du film fluide, [m];
h_{max}	Epaisseur maximale du film, [m];
h_{min}	Epaisseur minimale du film, [m];
ℓ	Longueur caractéristique des additifs, [m];
λ	Viscosité de dilatation, [Pa.s];
M_{ij}	Tenseur des couples de contraintes, [N.m/m ²];
μ	Viscosité de cisaillement, [Pa.s];
n	Nombre de tours par minute;
N	Nombre de tours par seconde;
n_s	Nombre de patins;
η, η'	Constantes du matériau responsables de l'effet de couple de contrainte, [N.s];
P	Pression statique, [Pa];
\mathcal{P}	Puissance dissipée, [W];
q_k	Gradient de température;
Q_{xs}	Débit d'entrée, [m ³ /s];
Q_{zs}	Débit de fuite radiale, [m ³ /s];
R_e	Rayon extérieur, [m];
R_i	Rayon intérieur, [m];
R_m	Rayon moyen du patin de la butée, [m];

r	Source interne de chaleur, [W/kg];
ρ	Masse volumique, [kg/m ³];
δ_{ij}	Symbole de kronecker;
t	Variable de temps, [s];
T_{ij}	Tenseur des contraintes, [Pa];
Θ	Taux de dilatation cubique, [s ⁻¹];
θ_0	Angle effectif du patin (amplitude angulaire du patin), [rad];
u_i	Composantes de la vitesse, [m/s];
ω	Vitesse angulaire du membre tournant, [rad/s];
W	Capacité de charge de la butée (portance), [N];
W_s	Charge d'un patin individuel, [N];
x_i	Variables d'espace, [m];

ABREVIATIONS

ASTM : American Society for Testing and Materials;

VI : Viscosity Index;

TBN : Total Basic Number;

PIB : PolyIsoButylène;

PIBSA : PolyIsoButényl Anhydride Succinimique;

OCP : Olefin CoPolymers;

EP : Extrême Pression;

NF : Norme Française;

MMC : Mécanique des Milieux Continus;

MEF : Méthode des Eléments Finis.

Liste des figures

Figures	page
I - 1 : Butée hydrodynamique	3
I - 2 : Vue éclatée d'une butée	3
I - 3 : Schéma d'un contact lubrifié	4
I - 4 : Diagramme de Stribeck	5
I - 5 : Schéma d'un contact lubrifié en régimes limite	5
I - 6 : Régime mixte	6
I - 7 : Schéma d'un contact lubrifié en régime hydrodynamique	6
I - 8 : Contact hydrodynamique : Pneumatique-Chaussée	7
I - 9 : Répartition des pression dans un contact hertzien	8
I - 10 : Butée à patins fixes	9
I - 11 : Schéma d'une butée hydrodynamique à géométrie fixe; notations	10
I - 12 : Paramètres géométriques pour un patin rectangulaire équivalent	11
I - 13 : Butée axiale à	17
I - 14 : Butée axiale à rainure spirale	18
I - 15 : Photographie d'une butée à patins oscillants	19
I - 16 : Principe de fonctionnement d'un système hydrostatique	20
I - 17 : Butées hydrostatiques cylindriques	21
I - 18 : Butée axiale avec poches multiples	23
I - 19 : Schématisation d'une butée a double effet	23
I - 20 : Butée conique à 4 alvéole	24
I - 21 : Configuration des butées sphériques	24
I - 22 : Fonctionnement hybride d'une butée hydrostatique	25
II - 1 : Structures de graisses au lithium observées en microscopie	29
II - 2 : Structures des huiles de base	30
II - 3 : Un solvant souvent employer : la base 175 Neutral Solvent	32
II - 4 : Additifs anti-oxydants	34
II - 5 : Organisation des additifs dispersants et détergents dans l'huile	34
II - 6 : Structures des additifs dispersants	35
II - 7 : Structures des additifs détergents	36
II - 8 : Structures des additifs anticongelants	36
II - 9 : Structures des polymères hydrocarbonés améliorant le VI	37

II - 10 : Structures des polymères à fonctions esters améliorant le VI	38
II - 11 : Structures des additifs anti-usure et extrême pression	38
II - 12 : Écoulement laminaire entre deux plans (Écoulement de Couette)	39
II - 13 : Rhéogramme d'un fluide newtonien ($\mu = tg\alpha$)	41
II - 14 : Rhéogramme d'un fluide rhéofluidifiant	43
II - 15 : Rhéogramme d'un fluide rhéoépaississant	44
II - 16 : Modèle de Maxwell	44
II - 17 : Réponse d'un fluide à une contrainte de cisaillement	45
II - 18 : Rhéogramme d'un fluide plastique de Bingham	46
III - 1 : Bilan des efforts agissants sur un élément de volume	48
III - 2 : Schéma général d'un contact hydrodynamique	55
III - 3 : L'origine du système d'axes confondu avec la paroi 1	56
III - 4 : Shématisation d'un patin dans le repère absolu	59
III - 5 : Origine du système confondu avec la paroi 1	60
III- 6 : Action du fluide sur les parois d'une butée hydrodynamique	62
III -7 : Débits de fuite	65
III -8 : Débit de fuite radiale	66
III -9 : Débits de fuite radiale et circonférentielle	66
IV - 1 : Discrétisation d'une butée à rainures spirales	72
IV - 2 : Discrétisation d'une butée à rainure radiale	73
IV-3 : Transformation géométrique dans le cas d'un élément à quatre noeud	76
IV-4 : Maillage d'un patin de la butée hydrodynamique avec des éléments Q8	81
IV-5 : Maillage d'une butée hydrostatique rectangulaire	82
V-1 : Structure générale du programme de calcul par éléments finis	91
V-2: Organigramme succinct du programme de calcul	96
V-3 : Schématisation d'une butée cylindrique à une alvéole	97
V-4 : Champ de pression dans une butée hydrostatique cylindrique à une alvéole centrale	98
V-5 : Schématisation d'une butée hydrostatique	99
V-6 : Champ de pression dans une butée hydrostatique à une alvéole	100
V-7 : Champ de pression dans une butée hydrostatique à quatre alvéoles	101
V-8 : Champ de pression dans la section médiane de la butée rectangulaire	102
V-9 : Variation de la portance en fonction du paramètre du couple de contraintes	102
V-10: Variation de la puissance dissipée en fonction du paramètre $\tilde{\ell}$	103
V-11 : Variation du débit de fuite en fonction du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$	104
V-12 : Champ de vitesse moyenne dans une butée hydrostatique à une alvéole	104
<i>Liste des figures & tableaux</i>	132

V-13 : Champ de vitesse moyenne dans une butée hydrostatique à quatre alvéoles	105
V-14 : Variation du profil de vitesse à travers h pour différentes valeurs de $\tilde{\ell}$	105
V-15 : Schématisation d'une butée à patins fixes	106
V-16 : Champ de pression dans un patin lubrifié par un fluide newtonien ($\tilde{\ell} = 0,0$)	107
V-17 : Champ de pression dans un patin lubrifié par un fluide polaire ($\tilde{\ell} = 0,6$)	108
V-18 : Variation de la portance avec le paramètre $\tilde{\ell}$	109
E-1: Génération automatique de maillage	127

Liste des tableaux

Tableaux	page
IV-1: Expression des fonctions de forme $N(\xi,\eta)$ et leurs gradients pour l'élément Q4	80
IV-2 : Expression des fonctions de forme $N(\xi,\eta)$ et leurs gradients pour l'élément Q8	81
IV-3 : Expression des fonctions de forme $N(\xi,\eta)$ et leurs gradients pour l'élément Q9	83
IV-4 : Paramètres de la quadrature de Gauss à une dimension	85
V-1 : Comparaison des résultats numériques avec ceux de la réf. [33]	97
V-2 : Caractéristiques géométriques de la butée cylindrique à une alvéole	98
V-3 : Caractéristiques géométriques de la butée rectangulaire	99
V-4 : Caractéristiques de la butée hydrodynamique à patins fixes	106

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	1
Chapitre I : Revue bibliographique sur les butées hydrodynamiques et hydrostatiques	3
1. Introduction	3
2. Différents régimes de lubrification	4
2.1. Contacts à basse pression	5
- Lubrification limite	5
- Lubrification mixte	6
- Lubrification hydrodynamique	6
2.2. Contacts à haute pression	7
- Zone (I)	7
- Zone (II)	7
- Zone (III)	7
3. Différents types de butées fluides	8
3.1. Butées hydrodynamiques	9
3.1.1. Patins rectangulaires plans fixes	9
3.1.2. Glissière plane rectangulaire à pivot	13
3.1.3. Patin rectangulaire courbe pivotant	14
3.1.4. Butées axiales avec patins plans fixes	15
3.1.5. Butées axiales à poches	16
3.1.6. Butées axiales à rainure spirale	17
3.1.7. Butées axiales à patins oscillants	19
3.2. Principe de lubrification hydrostatique	20
3.3. Avantages et inconvénients des systèmes hydrostatiques	21
3.4. Différents types de butées hydrostatiques	21
3.4.1. Butées axiales avec patins indépendants	22
3.4.2. Butées axiales avec poches multiples	22
3.4.3. Butées axiales avec fonctionnement différentiel	23
3.4.4. Butées coniques et sphériques	24
3.5. Butées hybrides	25
4. Conclusion	26

Chapitre II : Composition chimique et comportement rhéologique des huiles

lubrifiantes	27
1. Introduction	27
2. Principales fonctions d'un lubrifiant	28
3. Différents types de lubrifiants	28
3.1. Lubrifiants gazeux	28
3.2. Lubrifiants liquide	28
3.3. Lubrifiants semi-solides (graisses)	29
4. Composition chimique des huiles lubrifiantes	29
4.1. Huiles de base	30
a) Les huiles d'origine végétale	31
b) Les huiles minérales	31
1) Bases à structures aromatiques	31
2) Bases à structures paraffiniques	31
3) Bases à structures naphténiques	31
c) Les huiles synthétiques	32
4.2. Les additifs ou dopes	33
4.2.1. Additifs améliorant la stabilité chimique de l'huile	34
4.2.2. Les additifs améliorant les propriétés rhéologiques des lubrifiants	36
4.2.3. Les additifs extrême pression et anti-usure	38
5. Viscosité des lubrifiants	39
5.1. Définition de la viscosité	39
6. Comportements rhéologiques des huiles lubrifiantes	40
6.1. Equations constitutives	41
6.2. Fluides newtoniens	41
6.3. Fluides non newtoniens	42
6.3.1. Fluide polaire (couple-stresses fluid)	42
6.3.2. Fluides visqueux non linéaires	43
6.3.3. Fluide viscoélastique	44
6.3.4. Fluide viscoplastique ou fluide de Bingham	45
7. Conclusion	46

CHAPITRE III : Equations générales de la lubrification par fluides à rhéologie

complexe	47
1. Introduction, notion de couple de contrainte	47

2. Notion de couple de contrainte	47
3. Cinématique de l'écoulement	48
4. Equations du domaine	49
4.1. Equation de continuité	49
4.2. Equations de mouvement d'Euler	50
4.3 Equation de la conservation de l'énergie	52
4.4. Equations constitutives	53
5. Equations de Reynolds (coordonnées cartésiennes)	54
6. Equations de Reynolds (coordonnées cylindriques)	58
7. calcul des performances statiques des butées	61
7.1. Champ de pression dans le film	61
7.2. Action du fluide sur les surfaces des butées	62
7.3. Vitesses moyennes de l'écoulement	64
7.4. Débits de fuite	65
7.5. Puissance dissipée	67
8. Conclusion	62

CHAPITRE IV : Formulation du problème de lubrification dans les butées fluides par la méthode des éléments finis	69
1. Introduction	69
2. Formulation variationnelle	69
2.1. Formulation en coordonnées cartésiennes	70
2.2. Formulation en coordonnées cylindriques	71
3. Approximation des formes intégrales par éléments finis	72
3.1. Principe de la méthode	72
3.2. Formulation du problème hydrodynamique en coordonnées cartésiennes	73
3.2.1. Formulation et discrétisation par éléments finis	73
3.2.2. Expressions des matrices $[k^{(e)}]$ et $\{f^{(e)}\}$ sur l'élément de référence	75
3.3. Formulation du problème hydrodynamique en coordonnées cylindriques	77
3.3.1. Formulation et discrétisation par éléments finis	77
3.3.2. Expressions des matrices $[k^e]$ et $\{f^e\}$ sur l'élément de référence	79
3.4. Choix des éléments de maillage	80
3.5. Assemblage des matrices élémentaire	83
3.6. Intégration numérique	84

3.7. Résolution du système d'équations	85
3.7.1. Introduction des conditions aux limites	85
3.7.2. Résolution par la méthode de Gauss-Seidel	86
4. Conclusion	86
CHAPITRE V : Effets du paramètre des couples de contraintes sur le comportement des butées hydrostatiques et hydrodynamiques	87
1. introduction	87
2. Description des programmes de calcul par éléments finis	90
2.1. Liste des sous programmes utilisés	92
3. Validation	97
4. Etudes paramétriques	99
4.1. Cas des butées hydrostatiques	99
4.2. Cas des butées hydrodynamiques	105
5. Conclusion	109
Conclusion générale	110
Références bibliographiques	113
Annexe -A-	116
Annexe -B-	119
Annexe -C-	121
Annexe -D-	123
Annexe E	127
Principales notations utilisées	129
Liste des figures et tableaux	131