

Mémoire de Magister

Présenté à l'Université de Guelma
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

63

Département de: Mécanique
Spécialité: Construction et Productique

Présenté par: BELHADEF Khemissi

**PREDICTION DE L'ENDOMMAGEMENT DE FATIGUE ET
DYNAMIQUE DES STRUCTURES ENDOMMAGEABLES**

Sous la Direction de: Dr Mohamed Nadir AMRANE

Juin 2006

Soutenu le:

devant la commission d'examen

œ JURY œ

MM.

OUELAA N.

Pr, Université de Guelma, Président;

GUENFOUD S.

FATMI L.

BELBAH A.

AMRANE M. N.

M. C, Université de Guelma, Examineur;

M. C, Université de Guelma, Examineur;

M. C, Université de Guelma, Examineur;

M. C, Université de Guelma, Rapporteur ;

Rep. Du Doyen de la Faculté des Sciences et de
l'Ingénierie.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Département de Mécanique de l'Université 8 Mai de Guelma.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadreur **Dr Mohamed Nadir AMRANE** pour ses conseils précieux et sa patience pour l'élaboration de ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma sympathie aux membres du jury **Pr. N. OUELAA, Dr L.FATMI, Dr S. GUENFOUD** et **Dr A BELBAH** qui ont bien voulu examiner le contenu de ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à l'accomplissement de ce mémoire.

-A mes parents;
-A mes frères;
-A ma femme;
-A mes enfants;
-A ma famille;
-A mes amis.

Table des Matières

Introduction générale.....	10
Chapitre I: Généralités sur les matériaux composites	13
I-1: Définition.....	13
I-2: Caractéristiques générales.....	13
I-3: Classification des matériaux composites.....	14
I-3-1: Classification suivant la forme des constituants.....	14
I-3-2: Classification suivant la nature des constituants.....	14
I-4: Eléments constituants d'un matériau composite.....	14
I-4-1: Les résines.....	14
I-4-2: Les renforts.....	15
I-4-2-1: Généralités.....	15
I-4-2-2: Les principales fibres.....	16
I-4-2-2-1: Les fibres de verre.....	16
I-4-2-2-2: Caractéristiques des fibres de verre E et R.....	16
I-5: Structures confectionnées par des matériaux composites.....	16
I-6: Matériaux composites structurales.....	18
Chapitre II: Etude bibliographique sur l'endommagement de fatigue	20
II-1: Théorie de l'endommagement.....	20
II-1-1: Variable d'endommagement	21
II-1-2: Loi de comportement endommagée (Postulat de la contrainte effective).....	22
II-2: Modèles d'endommagement des matériaux composites.....	24
II-2-1: Modèle de A.POURSARTIP et AL.....	24
II-2-2: Modèle de K.KAMIMURA.....	25
II-2-3: Modèle de T.RENARD.....	26
II-2-4: Présentation du modèle utilisé (Modèle de J.L.CHABOCHE).....	26
II-3: Essai de flexion trois points en fatigue.....	28
II-3-1: Présentation de l'essai.....	28
II-3-2: Comportement mécanique des matériaux composites.....	28
II-3-2-1: Comportement en flexion.....	29
II-3-2-2: Endommagement de fatigue.....	30
II-3-2-3: Mécanismes d'endommagement.....	31
Chapitre III: Approche R.D.M du modèle d'endommagement et aspects numériques du problème	34
III-1: Présentation du problème.....	34
III-2: Formulation R.D.M par l'introduction de l'endommagement.....	35
III-2-1: Flexion circulaire.....	35
III-2-2: Flexion trois points.....	36
III-3: Les aspects numériques.....	38
a) Discrétisation spatiale selon X.....	38
b) Discrétisation spatiale selon Y.....	38
c) Intégration spatiale en x et y.....	38
d) Intégration temporelle en chaque point de la discrétisation.....	39

III-4: Idée générale du processus numérique.....	39
III-4-1: Poutre initialement saine.....	39
III-4-2: Poutre à un stade d'endommagement donné.....	40
III-5: Organigramme du programme principal.....	41
III-6: Données des problèmes étudiés.....	42
III-6-1: Caractéristiques géométriques des éprouvettes.....	42
III-6-2: Caractéristiques mécaniques initiales des matériaux.....	42
III-6-3: Caractéristiques des sollicitations.....	43
III-6-4: Caractéristiques de la discrétisation spatiale.....	43
III-7: Résultats et discussion.....	43
III-8: Validation du modèle proposé.....	53
III-9: Conclusion et remarques.....	56
Chapitre IV: Dynamique des structures composites endommageables	58
IV-1: Formulation de l'équation du mouvement	58
IV-2: Vibrations libres transversales de la poutre.....	61
IV-3: Solution de l'équation du mouvement.....	61
IV-3-1: Introduction des conditions aux limites.....	63
IV-4: Principe de la méthode des éléments finis.....	65
IV-4-1: Modélisation (passage milieu continu - milieu discret).....	66
IV-4-2: Evaluation de l'énergie potentielle et cinétique.....	66
IV-4-2-1: Energie potentielle.....	66
IV-4-2-2: Energie cinétique.....	67
IV-4-2-3: Matrices de rigidité et de masse élémentaires K^e et M^e	67
IV-4-2-4: Matrices de rigidité et de masse globales K^G et M^G	70
IV-5: Analyse modale.....	70
IV-5-1: Problème aux valeurs et vecteurs propres.....	71
a) Cas de la structure non endommagée.....	71
b) Cas de la structure endommagée.....	72
IV-5-2: Présentation des formes propres endommagées et non endommagées.....	73
IV-5-3: Extraction des facteurs de perte des énergies modales.....	73
IV-5-4: Equation de vibrations libres de la poutre.....	75
IV-5-5: Equation de vibrations forcées de la poutre.....	75
IV-6: Résultats et discussion.....	77
IV-7: Conclusion.....	90
Conclusion générale et perspectives.....	92
Références bibliographiques.....	94

Introduction Générale

Introduction générale

La recherche des performances technique liée aux besoins d'optimisation et d'allègement, a conduit à l'utilisation des matériaux renforcés appelés: matériaux composites. Les matériaux composites associent un faible poids spécifique à de bonnes caractéristiques mécaniques de résistance, de rigidité et de durée de vie en fatigue. Ces avantages incitent donc à utiliser les matériaux composites dans diverses applications structurales (aéronautique, industrie automobile, équipements sportifs, matériels domestiques, etc...). Ces applications concernent souvent des pièces composites assurant des fonctions mécaniques essentielles dans le cas de l'automobile par exemple: la conception d'une lame de ressort en composite unidirectionnel verre/époxy conduit à des solutions technologiques avantageuses. Cette application est en grande partie liée à la tenue en fatigue du matériau.

De ce fait, la construction de la théorie de l'endommagement des matériaux composites s'avère indispensable. Connaissant l'histoire des contraintes et des déformations relatives à un élément de volume donné d'une structure, les lois d'endommagement fournissent par intégration temporelle l'évolution de l'endommagement jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique. On détermine ainsi le temps ou le nombre de cycles correspondant à l'amorçage d'une telle fissure au point le plus sollicité de la structure. Cette théorie a été mise pour la première fois par L.M.Kachanov en 1958. C'est la base des calculs modernes de résistance des structures utilisés au niveau de la conception, de la vérification et du contrôle.

Les applications technologiques diverses des structures composites pousse ainsi les chercheurs et les ingénieurs de recherche & développement à mieux comprendre leur comportements structuraux et à s'investir dans ce domaine. Cet intérêt est très justifié du fait du caractère inhomogène et endommageable des structures composites.

Ce travail intitulé « **Prédiction de l'endommagement de fatigue et dynamique des structures endommageables** » se positionne dans cette perspective qui vise à mieux comprendre l'évolution de l'endommagement de fatigue des structures composites fibreuses linéaires sollicitées en flexion trois points ainsi que l'influence de la dégradation de la rigidité sur le comportement dynamique de ce type de structures.

Pour ce faire, une stratégie R.D.M est dégagée et une méthodologie numérique est développée et mise au point. Cette vision s'avère très intéressante:

- Pour suivre l'évolution de l'état structural tout le long de sa durée de vie.
- Pour évaluer les caractéristiques dynamiques courantes à un stade d'endommagement donné (fréquences propres, modes propres) et l'extraction du facteur de perte de l'énergie modale.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres:

Le premier chapitre comporte des généralités sur les composites, leurs classifications ainsi que leur procédés d'élaboration.

Introduction générale

Le deuxième chapitre est consacré à une étude bibliographique sur l'endommagement de fatigue, une revue sur la théorie de l'endommagement y est présentée, ses mécanismes et quelques modèles de la littérature ainsi que le modèle de J.L.Chaboche utilisé dans cette étude.

Le troisième chapitre porte sur l'approche R.D.M utilisée, le passage de la loi élastique endommagée au modèle structural de la flexion trois point ainsi que le modèle numérique avec le processus développé dans cette étude.

Une présentation détaillée de ce dernier constitue l'essentiel de la stratégie numérique proposée. Les résultats obtenus, leurs validations expérimentales et les discussions sont présentées à la fin de ce chapitre.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude dynamique du composite unidirectionnel endommageable, l'intégration du modèle endommagé dans un calcul élément finis et l'extraction à travers une analyse modale des caractéristiques dynamiques et ce à un stade donné de la vie de la structure étudiée.

CHAPITRE I

Généralités sur les Matériaux Composites

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

I-1: Définition

Un matériau composite est constitué de l'ensemble de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes (figure 1), qui se complètent pour aboutir à un matériau dont les performances sont supérieures à ceux des composants pris séparément.

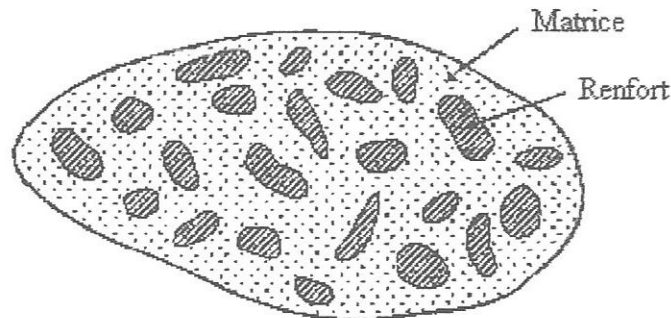


Figure 1: Matériau Composite

I-2: Caractéristiques générales

Un matériau composite est généralement caractérisé par une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue.

Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes le composite est dit hybride.

- La phase discontinue est appelée le renfort ou matériau renforçant qui est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue.
- La phase continue est appelée la matrice.

Les propriétés des matériaux composites résultent:

- des propriétés des matériaux constituants,
- de leur distribution géométrique,
- de leurs interactions, etc...

La description d'un matériau composite nécessite de spécifier:

- 1- La nature des constituants et leurs propriétés,
 - 2- La géométrie du renfort qui est caractérisé par: sa forme, sa taille, la concentration du renfort et sa disposition (son orientation), sa distribution dans le volume du composite est un paramètre important, une distribution uniforme sera un homogénéité du matériau, dans le cas d'une distribution non uniforme du renfort, la rupture du matériau sera initiée dans les zones pauvres en renfort, diminuant aussi la résistance du composite.
 - 3- La nature de l'interface matrice-renfort.
- L'orientation des fibres détermine l'anisotropie du matériau composite.

I-3: Classification des matériaux composites

Les matériaux composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

I-3-1: Classification suivant la forme des constituants

Selon la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes:

- 1- Composite à fibres: les renforts se trouvent sous forme de fibres.
- 2- Composite à particules: le renfort se trouve sous forme de particules qui ne possèdent pas de dimension privilégiées.

I-3-2: Classification suivant la nature des constituants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés:

- 1) Composite à matrice organique avec résine chargée:
 - Fibres minérales: verre, carbone, etc.
 - Fibres organique: Kevlar, polyamides, etc.
 - Fibres métalliques: bores, aluminium, etc.
- 2) Composites à matrice métallique (alliages légers et ultra-légers d'aluminium, de magnésium, de titane) avec résine chargée :
 - Fibres minérales: carbone, carbure de silicium (SiC).
 - Fibres métalliques: bore.
 - Fibres métallo-minérales: fibre de bore revêtues des carbone de silicium (borSiC).
- 3) Composite à matrice minérale (Céramique) avec:
 - Fibres métalliques: bore.
 - Particules métalliques: cermets.
 - Particules minérales: carbures, nitrures.

I-4: Eléments constituants d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué principalement d'une matrice (résine) et d'un renfort (fibres, particules).

I-4-1: Les résines

Les résines ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Elles doivent être déformables et ayant une masse volumique faible de façon à conserver les caractéristiques spécifiques élevés des matériaux composites. Il y a deux grandes familles de résines [1, 13 et 14]: les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables.

Les résines thermodurcissables, possèdent la propriété de pouvoir être mise en forme plusieurs fois par chauffage et refroidissement successifs. Ces résines peuvent être donc récupérées et facilement recyclées.

Par contre les résines thermoplastiques ne peuvent être mise en forme qu'une seule fois.

Compte tenue des caractéristiques mécaniques plus élevées, les résines thermodurcissables sont les plus employées dans la fabrication des matériaux composites.

On partant de l'ordre décroissant en tonnage des résines thermodurcissables on a :

- Les résines polysters insaturées: polysters condensés, vinylesters, dérivés allylitiques, etc.
- Les résines époxydes.

Du fait de leurs bonnes caractéristiques mécaniques, les résines époxydes sont utilisées sans charges, sont les matrices des composites à haute performances (construction aéronautiques, espaces, missiles, etc.). Ces principaux avantages sont:

- Bonnes propriétés mécaniques (traction, flexion, compression, choc, fluage, etc.) en association avec les fibres de verre ou de carbone.
- Excellente résistance chimique.
- Un faible retrait au moulage (de 0.5 à 1 %).
- Excellente adhérence aux matériaux métalliques.
- Caractéristiques thermique élevées.

Mais elles présentent aussi les inconvénients suivants:

- Coût élevé.
- Temps de polymérisation long.
- une sensibilité à la fissuration.

I-4-2: Les renforts

I-4-2-1: Généralités

Les renforts permettent d'améliorer certaines des propriétés physiques [1, 13, 15 et 16] des matériaux composites: comportement thermique, tenue en température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques,...etc. les propriétés mécaniques: rigidité, résistance à la rupture, dureté,... etc.

Les caractéristiques recherchées pour les renforts sont: caractéristiques mécaniques élevées, masse volumique faible, bonne compatibilité avec les résines, facilité de la mise en œuvre, faible coût, etc. Selon leur utilisation, les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales:

- Sous forme linéique (fils, mèches,... etc.).
- Sous forme de tissus surfaciques (tissus simples, mats,... etc.).
- Sous formes multidirectionnelles (tresse, tissus complexes,... etc.).
- Des fibres courtes particulières.

I-4-2-2: Les principales fibres

I-4-2-2-1: Les fibres de verre

Le verre sous forme massive est caractérisé par une très grande fragilité, mais il perd ce caractère lorsqu'il est élaboré sous forme de fibres de faibles diamètres (Quelques dizaines de microns)

Les fibres de verre sont élaborées à partir du verre textile filable. On distingue les différents types de verres filables (tableau 1).

type	Caractéristiques générales
E	à usage général, bonne propriétés électriques.
D	hautes propriétés diélectriques.
A	haute teneur en alcali.
C	bonne résistance chimique.
R, S	Haute résistance mécanique.

Tableau 1: Différents types de verres filables [1].

I-4-2-2-2: Caractéristiques mécaniques des fibres de verre E et R

Les caractéristiques mécaniques de référence, sont celles mesurées sur des monofilaments prélevés à la sortie de la filière, tableau 2.

Caractéristiques			Verre E	Verre R
Masse volumique	ρ	Kg/m ³	2600	2550
Module de Young	E_f	Gpa	73	86
Contrainte à la rupture	σ_{fu}	Mpa	3400	4400
Allongement à la rupture	ε_{fu}	%	4.4	5.2
Coefficient de Poisson	ν_f	-	0.22	-

Tableau 2: Caractéristiques mécaniques des verres types E et R.

Le verre E est employé pour la fibre de verre constituant le renfort du matériau composite faisant l'objet de notre travail.

I-5: Structures confectionnées par des matériaux composites

Les procédés de la mise en œuvre de matériaux composites nécessitent trois étapes indispensables:

- 1) Une étape d'association : l'imprégnation du renfort par la résine.
- 2) Une étape rhéologique de la mise en forme de la pièce.
- 3) Une étape thermique de solidification du matériau : soit par refroidissement pour les matrices thermoplastiques, soit par polycondensation ou réticulation pour les matrices thermodurcissables (à température croissante). IL existe différents procédés d'élaboration des matériaux composites, mais le plus utilisé est le procédé par moulage, les principales opérations d'une mise en forme par moulage sont rappelées figure 2.

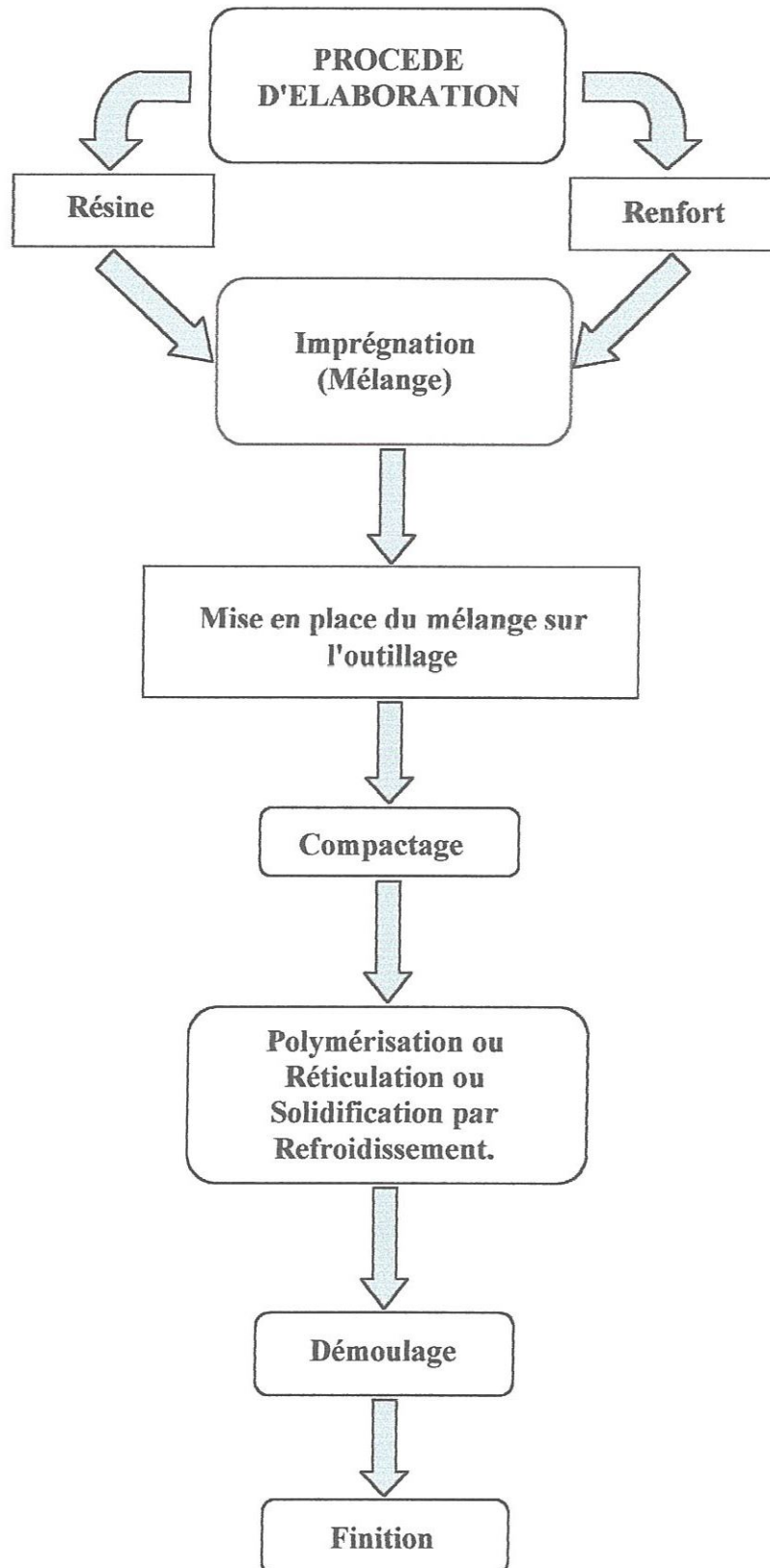


Figure 2: Principales étapes d'un procédé d'élaboration par moulage [10].

I-6: Matériaux composites structurales

Les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories:

- Les monocouches.
- Les stratifiés.
- Les sandwichs.

Les monocouches présentent l'élément de base de la structure composite. La forme du renfort caractérise les différents types de monocouches. Le renfort peut être à fibres longues, ce sont les plis unidirectionnels, courts ou à fibres tissées.

Les stratifiés sont constitués d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme référentiel du stratifié.

Les sandwichs sont des matériaux possédant deux peaux de grande rigidité et de faible épaisseur et renfermant un cœur de forte épaisseur et de faible résistance.

CHAPITRE II

Etude Bibliographique sur l'Endommagement de Fatigue

Chapitre II

Etude bibliographique sur l'endommagement de fatigue

Actuellement, pour connaître les états de contraintes et de déformations d'une structure composite endommageable, la théorie de l'endommagement des matériaux est systématiquement utilisée. On ne se limitera pas dans cette étude à un calcul élastique de la structure qui conserve ces propriétés mécaniques initiales, du fait qu'elle ne tient pas compte de divers phénomènes qui peuvent apparaître lors de la mise en sollicitation de la structure ; citons notamment la dégradation progressive du matériau par perte de rigidité. Cette dégradation peut conduire jusqu'à la rupture de la structure.

II-1: Théorie de l'endommagement

La notion de la théorie de l'endommagement a été introduite pour la première fois par L.M. Kachanov en 1958, puis par Y.N.Rabotnov en 1969 [11]. Cette théorie décrit par définition l'évolution du matériau entre l'état vierge (non endommagé) et l'amorçage d'une fissure macroscopique.

Cette théorie a été développée initialement pour des métaux, néanmoins elle est plus utilisée dans le cas des matériaux composites.

La rupture finale d'une structure est le résultat d'une succession de phénomènes, ainsi J.Lemaitre et J.L.Chaboche [3] ont proposé la description du processus de rupture représenté par la figure II-1:

1- Le domaine de la mécanique de l'endommagement couvre le comportement du matériau jusqu'à la naissance d'une fissure macroscopique. La mécanique de l'endommagement décrit l'évolution du matériau entre l'état sain et l'amorçage d'une fissure macroscopique. Elle s'occupe d'une population entière de microfissures qui sont décrites statistiquement, le matériau est traité comme un milieu continu.

2- Le domaine de la mécanique de la rupture étudie la propagation lente ou rapide de cette fissure. La mécanique de la rupture s'occupe d'une macro fissure géométriquement bien définie, le milieu est traité comme une structure.

Ces deux approches sont complémentaires, l'étape finale de l'endommagement pourrait être considérée comme l'étape initiale de la mécanique de la rupture.

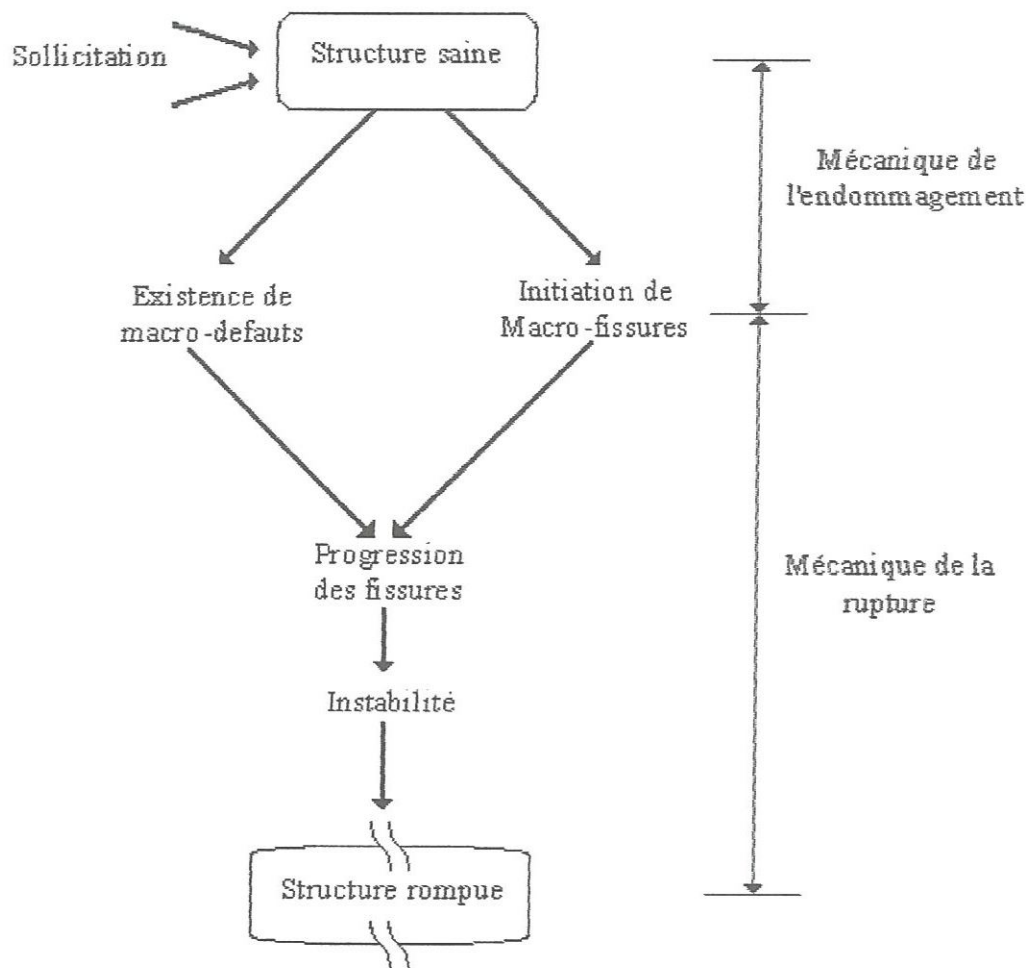


Figure.II-1: Schéma de l'endommagement.
(D'après Lemaitre-Chaboche) [3].

II-1-1: Variable d'endommagement

La définition de la variable mécanique d'endommagement pose un problème difficile, dans la mesure où macroscopiquement un élément de volume endommagé se distingue peu d'un élément de volume vierge. On est alors obligé d'imaginer une (ou plusieurs) variable (s) interne (s) représentative (s) de l'état de la détérioration de la matière.

L.M.Kachanov, puis Y.N.Rabotnov ont décrit l'endommagement des matériaux en introduisant un paramètre scalaire "D" qui opère sur la contrainte pour définir la contrainte effective équation II-1.

$$\tilde{\sigma} = \sigma_{eff} = \frac{\sigma}{(1-D)} \quad (II-1)$$

Le paramètre "D" est défini comme suit:

- $D=0$ initialement (matériau sain).
- $0 < D < 1$ pour le matériau endommagé.
- $D=1$ à la rupture.

II-1-2: Loi de comportement endommagée (postulat de la contrainte effective)

Le cadre rhéologique nous est fourni par la mécanique de l'endommagement, son application aux matériaux composites pose des problèmes difficiles, mais on se trouve ici dans un cas relativement simple d'un matériau composite unidirectionnel sollicité localement en traction-compression, on pourra donc se contenter d'un modèle unidirectionnel élastique endommageable, et la variable d'endommagement peut donc être définie à partir de la variable locale de rigidité.

Diverses définitions ont été proposées, mais le choix a porté sur la plus simple d'entre elles à savoir celle issue du postulat de Kachanov où on se limite à l'endommagement isotrope que l'on décrit par une seule variable scalaire interne "D", c'est-à-dire que le matériau considéré s'endommage de la même manière dans toutes les directions, où D est définie par:

$$D = \frac{(E_0 - \tilde{E})}{E_0} \quad ; \quad \tilde{E} = E_0(1 - D) \quad (II-2)$$

\tilde{E} : Module d'élasticité du matériau endommagé.
 E_0 : Module d'élasticité du matériau sain (initial).

L'introduction de la variable d'endommagement représentant une densité surfacique de discontinuités de la matière conduit directement à la notion de la contrainte effective c'est-à-dire la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts.

Dans le cas unidirectionnel, si F est la force appliquée sur une section S de l'élément de volume, $\sigma = F / S$ est la contrainte usuelle qui satisfait les équations d'équilibre. Soit une éprouvette sollicitée en traction.

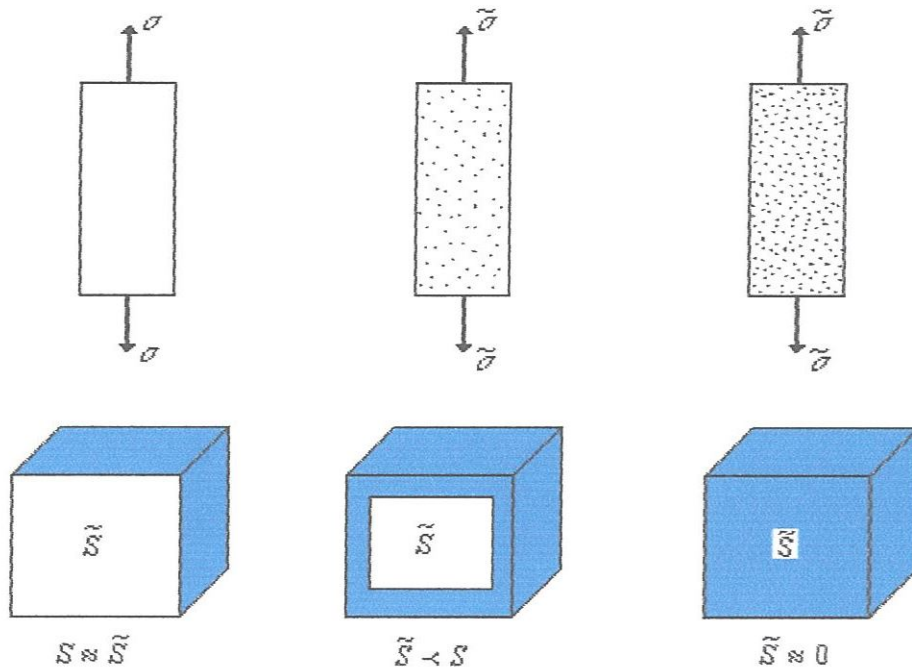


Figure.II-2: Représentation schématique de l'effet de l'endommagement sur la surface résistante.

S : Section de l'éprouvette à l'état sain.

\tilde{S} : Section résiduelle résistante à la sollicitation ou section effective.

Soit S_D la différence de section:

$$S_D = S - \tilde{S}$$

Et D est définie par:

$$D = \frac{S_D}{S}$$

$S_D = 0 \quad \rightarrow D = 0$ Correspond au matériau vierge.

$S_D = S - \tilde{S} \rightarrow 0 < D < 1$ Correspond à un état d'endommagement de l'éprouvette.

$S_D = S \quad \rightarrow D = 1$ Correspond à la rupture de l'éprouvette.

La contrainte effective $\tilde{\sigma}$ est définie comme la contrainte σ se rapportant à la section effective \tilde{S} (Introduite par Kachanov).

$$\tilde{S} = S - S_D = S \left(1 - \frac{S_D}{S} \right) = S(1 - D)$$

Soit F l'effort appliqué à l'éprouvette à un instant quelconque, la contrainte effective est donnée par:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F}{S(1 - D)} \quad (\text{II-3})$$

Prenons le cas le plus simple, celui d'une loi de comportement élastique à un stade d'endommagement donné.

$$\sigma = E_0 \varepsilon \quad \text{Pour un matériau sain} \quad (\text{II-4a})$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{E} \varepsilon \quad \text{Pour un matériau endommagé} \quad (\text{II-4b})$$

$$\frac{\sigma}{(1 - D)} = E_0 \varepsilon \Rightarrow \tilde{\sigma} = E_0 (1 - D) \varepsilon \quad (\text{II-5})$$

L'équation II-5 représente la loi de comportement élastique endommagée. Le degré de dégradation du matériau sous un chargement est représenté par une variable scalaire unique " D " affectant le module de Young.

$$\tilde{E} = E_0 (1 - D). \quad \text{Module de Young effectif.} \quad (\text{II-6})$$

II-2: Modèles d'endommagement des matériaux composites

Nous présentons quelques applications de la mécanique de l'endommagement dans le domaine des matériaux composites, utilisant la variable d'endommagement " D " scalaire et isotrope.

II-2-1: Modèle de A.POURSARTIP et AL

A.POURSARTIP et AL ont proposé un modèle d'endommagement de fatigue sous forme différentielle pour les matériaux composites unidirectionnels.

Le sens physique de la variable " D " est le nombre de fissures se produisant au cours du chargement, réduisant en fait le module de Young.

Cette définition peut s'exprimer sous la forme:

$$D = \frac{1}{S} \sum_i^n a_i^2$$

Où:

a_i : Largeur de la $n^{\text{ème}}$ fissure.

S : Surface d'une section.

La relation entre la variable d'endommagement " D " et le module de Young longitudinal " E " s'écrit:

$$E = E_0 g(D)$$

Où:

E_0 est le module de Young initial.

$g(D)$ est une fonction à déterminer.

Pour les matériaux isotropes, POURSARTIP et AL proposent:

$$\frac{E}{E_0} = 1 - cD \quad \text{Où : } c \approx 1.5$$

Et la loi d'évolution de la variable " D " est donnée par:

$$\frac{dD}{dN} = f(\Delta\sigma, D)$$

Cette loi dépend de l'amplitude des contraintes $\Delta\sigma$ et la valeur de " D " à chaque instant.

Dans le cas; $\Delta\sigma$ constant et le rapport de sollicitation $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1$, deux équations d'évolution en fonction de la phase d'endommagement sont proposées:

- Une phase initiale, qui occupe 30 % de la durée de vie:

$$\frac{dD}{dN} = A_1 \exp(b_1, \Delta\sigma, a_1, \Delta\varepsilon)$$

- Une phase finale, cette loi ne dépend que de la déformation $\Delta\varepsilon$:

$$\frac{dD}{dN} = A_2 \exp(a_2, \Delta\varepsilon)$$

Avec, A_1 , b_1 , a_1 et A_2 , a_2 des coefficients à déterminer expérimentalement.

II-2-2: Modèle de K.KAMIMURA

K.KAMIMURA a proposé une modélisation de l'endommagement décrivant la relation entre le comportement global non endommagé et endommagé dans les matériaux composites. Son étude consiste à introduire la notion d'endommagement, d'après KACHANOV et RABOTNOV, dans la théorie des plaques stratifiées en supposant que le comportement élastique endommagé est définie par la matrice de rigidité endommagée. Celle-ci est constitué par trois variables internes qui sont les paramètres d'endommagement: longitudinal, transversal et en cisaillement.

Dans le cas des matériaux composites unidirectionnels, KACHANOV et RABOTNOV font les hypothèses suivantes:

- 1- Il existe trois paramètres d'endommagement D_1 , D_2 et D_3 qui se différencient par les modes d'endommagement: rupture des fibres, rupture de la matrice et le délaminage de l'interface, figure.II-3.
- 2- Il n'y a pas d'interaction entre ces différents paramètres d'endommagement.

K.KAMIMURA a défini la variable d'endommagement " D " comme suit:

$$D = \left(1 - \frac{E}{E_0}\right).$$

E_0 : Module de Young initial.

E : Module de Young effectif.

Il a appliqué en fait son modèle au matériau composite stratifié $[0/90]_s$, il a obtenu une bonne concordance entre le modèle théorique et les résultats expérimentaux.

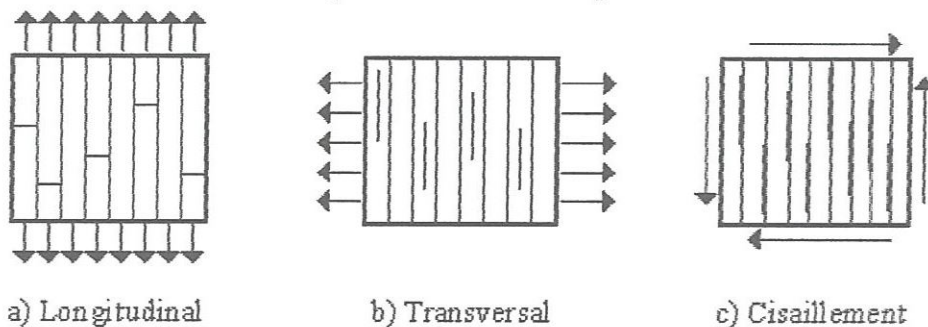


Figure.II-3: Modes d'endommagement des composites unidirectionnels induit par différentes sollicitations (d'après K.KAMIMURA) [11].

II-2-3: Modèle de J.RENARD

Une étude de l'endommagement en cisaillement quasi-statique dans les matériaux composites unidirectionnels carbone / époxy à l'aide d'un essai de torsion. Il a introduit deux variables de type plastique d'endommagement qui présentent la déformation résiduelle après relâchement des contraintes.

La première variable d'endommagement " W " représente le rapport entre la déformation résiduelle généralisée e_r , et la déformation totale généralisée e_t . Elle s'écrit:

$$W = \frac{e_r}{e_t}$$

La deuxième variable d'endommagement " W' " représente le rapport entre l'angle de torsion résiduel θ_r , et l'angle de torsion total θ_t . Elle s'écrit:

$$W' = \frac{\theta_r}{\theta_t}$$

J.RENARD a proposé une loi à seuil, avec une variation linéaire au-delà du seuil, sous la forme:

$$W(1, M) = \begin{cases} 0 & \text{si } M < M_s \\ K(M - M_s) & \text{si } M > M_s \end{cases}$$

Où:

M_s : Couple de seuil.

K : Constante de proportionnalité.

$W(1, M)$: Valeur du paramètre d'endommagement pour le couple M au cours d'un premier chargement.

Il a trouvé que l'accroissement de l'endommagement prend une forme d'une progression géométrique en fonction du nombre de cycles, suivant la formule:

$$W(N, M) = \alpha W(N-1, M) \quad \alpha = 0.59 \pm 0.01.$$

II-2-4: Présentation du modèle utilisé (Modèle de J.L.Chaboche)

Dans notre étude, nous allons proposer une loi d'évolution de l'endommagement élastique-fragile, gouvernée par les fibres.

Pour la loi d'évolution de la variable d'endommagement, nous adoptons une loi sous forme différentielle, permettant de prendre en compte un certain nombre de phénomènes, en particulier les effets de cumulations non linéaires, sa forme générale est donnée par l'expression suivante:

$$\frac{dD}{dN} = F(\Delta\varepsilon, \sigma_m, h, t, R, D) \quad \text{(II-7)}$$

Cette loi représente l'augmentation de l'endommagement par cycle, en fonction de la variable d'endommagement " D " et des paramètres définissant le cycle de chargement, tels que:

- $\Delta\varepsilon$: Amplitude en déformation.
- σ_m : Contrainte moyenne au cours d'un cycle.
- h : Paramètre de l'histoire.
- $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$: Rapport des sollicitations.
- t : Température.

Les paramètres h et t sont supposés constants et connus, ils définissent les conditions initiales et les conditions d'essai du matériau et nous négligerons l'influence de la contrainte moyenne.

On suppose dans la suite un comportement indépendant des vitesses, ainsi que R est supposé constant et égal à 0.1.

D'où la loi d'évolution simple prendra la forme simplifiée suivante:

$$\frac{dD}{dN} = F(\Delta\varepsilon, D) \quad (\text{II-8})$$

Soit deux lois d'évolution particulières:

Loi symétrique (a):

$$\frac{dD}{dN} = A \frac{(\Delta\varepsilon)^c}{(1-D)^b} \quad (\text{II-9a})$$

Loi dissymétrique (b):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dD}{dN} = A \frac{(\Delta\varepsilon)^c}{(1-D)^b} \\ \frac{dD}{dN} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-9b})$$

Les trois constantes A , b et c sont des constantes du matériau à identifier à partir des expériences pour des essais de flexion trois points en fatigue (en appuis simples).

La loi (a) suppose que l'endommagement se produit d'une façon symétrique: la partie en traction et la partie en compression.

La loi (b) quant à elle néglige l'effet de l'endommagement sur la partie en compression.

II-3: Essai de flexion trois points en fatigue

II-3-1: Présentation de l'essai

Les essais de flexion trois points sont conduits sur des machines figure.II-4, les éprouvettes de composite sont sollicitées en flexion ondulée, à charge imposée ou à déformation imposée constante.

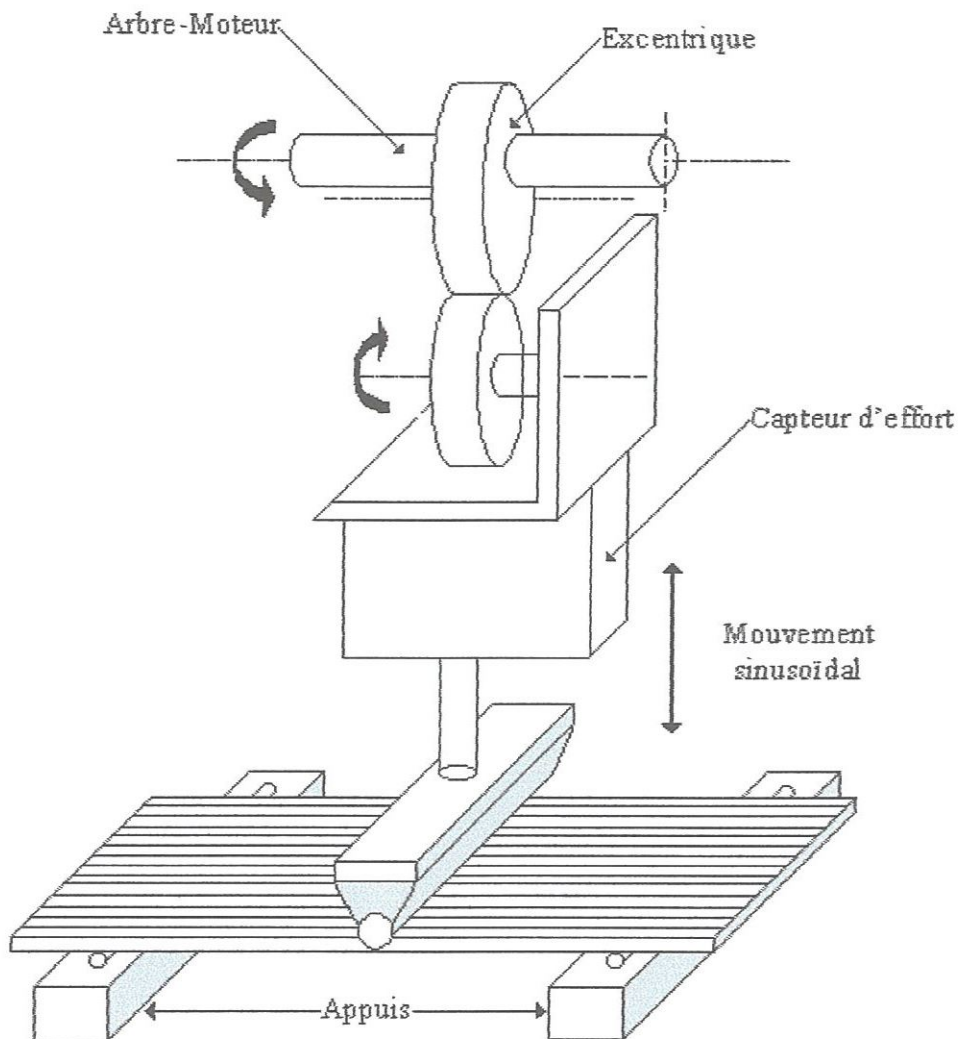


Figure. II-4: Machine de fatigue en flexion trois points.

II-3-2: Comportement mécanique des matériaux composites

Nous présentons quelques aspects du comportement mécanique des matériaux composites, tels que: le comportement en flexion et l'endommagement de fatigue, qui forme la base théorique de notre étude.

II-3-2-1: Comportement en flexion

L'essai de flexion trois points est fréquemment utilisé pour déterminer la résistance et la rigidité en flexion des matériaux composites.

Malgré ces avantages, cet essai pose un problème difficile; car la déformation totale mesurée résulte des déformations provenant de la flexion et du cisaillement.

Son mode de rupture dépend du rapport $\frac{L}{h}$ entre la distance entre appuis L et l'épaisseur h :

- $\frac{L}{h}$ est grand le mode de flexion est prépondérant.
- $\frac{L}{h}$ est petit, le mode de cisaillement peut jouer un rôle important.

D'après l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, la déflection totale d'une poutre rectangulaire sollicitée en flexion trois points s'écrit:

$$\delta_t = \frac{P \varepsilon^2}{4 h E} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2} \right) \left(\frac{E}{G} \right) \right] \quad (\text{II-10})$$

h : Largeur de la poutre.

α : Coefficient de non linéarité du cisaillement.

E : Module de Young.

G : Module de cisaillement.

L'équation (II-10) peut s'écrire

$$\delta_t = \delta_f + \delta_s \quad (\text{II-11a})$$

Où

$$\delta_t = \delta_f \left(1 + \frac{\delta_s}{\delta_f} \right) \quad (\text{II-12b})$$

Dans l'essai de flexion trois points, on mesure la déflection au milieu de l'éprouvette δ_t et on calcule le module de Young apparent sous la forme:

$$E = \frac{P \varepsilon^2}{4 b \delta_t} \quad (\text{II-13})$$

Lorsque le module de Young est égal au module de Young exact, le rapport $\frac{\delta_s}{\delta_f}$ doit être petit, ce qui implique:

$$\frac{\delta_s}{\delta_f} = \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2} \right) \left(\frac{E}{G} \right) \text{ Très petit devant 1.} \quad (\text{II-14})$$

Dans le cas du matériau composite unidirectionnel, le module de Young E sera remplacé par E_{11} c'est-à-dire le module de Young dans la direction des fibres, ainsi que le module de cisaillement par G_{12} .

Le facteur de correction (Equation II-14) est constitué de deux éléments importants:

$$\frac{\alpha}{\varepsilon^2} \text{ et } \frac{E}{G}$$

Pour un matériau donné, $\frac{E}{G}$ et α sont fixes, ces facteurs de correction ne dépendent alors que

du rapport $\varepsilon = \left(\frac{L}{h}\right)$ qui détermine le mode de rupture en flexion.

Il faut que ce rapport soit suffisamment grand pour que le facteur de correction soit négligeable $\frac{\delta_s}{\delta_f} \ll 1$ ce qui signifie que le mode de rupture en flexion δ_f doit être dominant.

Nous présentons quelques valeurs proposées:

Conformément à la norme ASTM D.790 [11]: $\frac{L}{h} = 16$. Pour obtenir un module de Young en

flexion au voisinage du module de Young en traction ($E_f = E_t$), la valeur $\left(\frac{L}{h}\right)_{\min} = 60$ est proposée.

II-3-2-2: Endommagement de fatigue

L'expérience industrielle montre que les ruptures en service sont les plus souvent dues à la fatigue, chaque fois que l'on est en présence d'efforts variables dans le temps, d'efforts périodiques comme ceux qui apparaissent dans les moteurs, les machines tournantes ou les pièces des véhicules en déplacement. La rupture peut se produire par des contraintes relativement faibles, souvent bien inférieures à la résistance de traction et même à la limite élastique, lorsque leur application est répétée en un grand nombre de fois (problème de fatigue).

De plus cet endommagement de fatigue ne s'accompagne d'aucune modification de forme ou d'aspect de la pièce, c'est pourquoi la fissuration par fatigue est progressive ce qui implique que la rupture apparaît brutalement.

Le cas le plus simple de l'endommagement de fatigue est celui d'un matériau composite unidirectionnel sollicité en traction dans la direction des fibres. En réalité, dans ce cas, le comportement du matériau est essentiellement gouverné par les fibres, ces fibres travaillent en traction simple et la matrice n'intervient pratiquement pas, figure II-5.

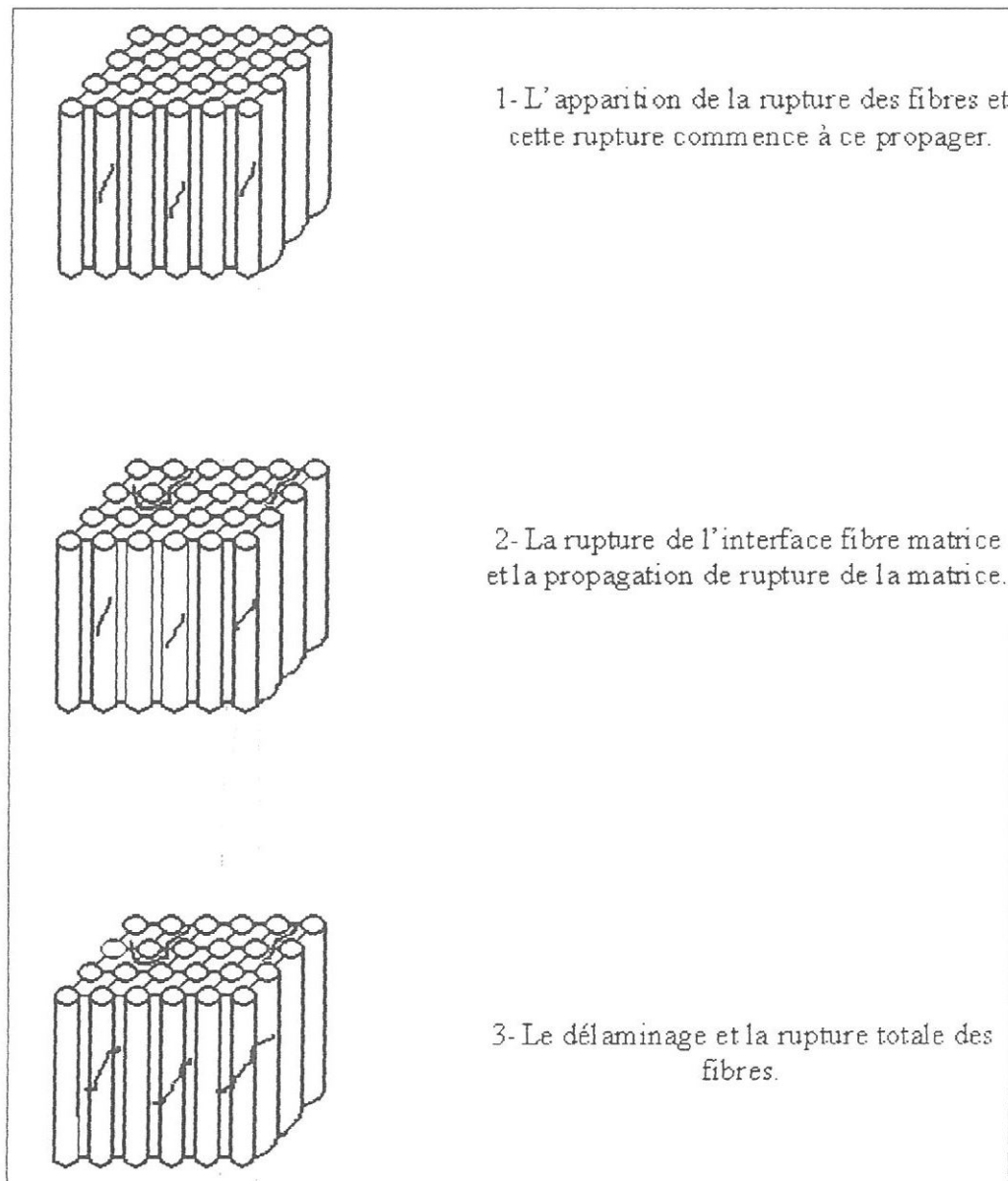


Figure II-5: Modes de rupture dans un essai de fatigue [11].

II-3-2-3: Mécanismes d'endommagement

Le paramètre d'observation le plus employé pour le suivi de l'endommagement est la variation de rigidité, dans un essai de fatigue flexion trois points, cette variation de rigidité est suivie par une mesure de l'augmentation du déplacement pour l'essai à force imposée, ou de la diminution de la charge pour l'essai à déplacement imposé.

La caractérisation physique de l'endommagement en fatigue flexion peut être effectuée par des examens aux microscopes optique et électronique à balayage, un examen des surfaces et coupes transversales des éprouvettes correspondant aux essais interrompus permet de caractériser la nature du dommage et les sites préférentiels de son amorçage. La figure II-6 montre les mécanismes d'endommagement de fatigue en flexion pour un matériau composite carbone / époxyde [17].

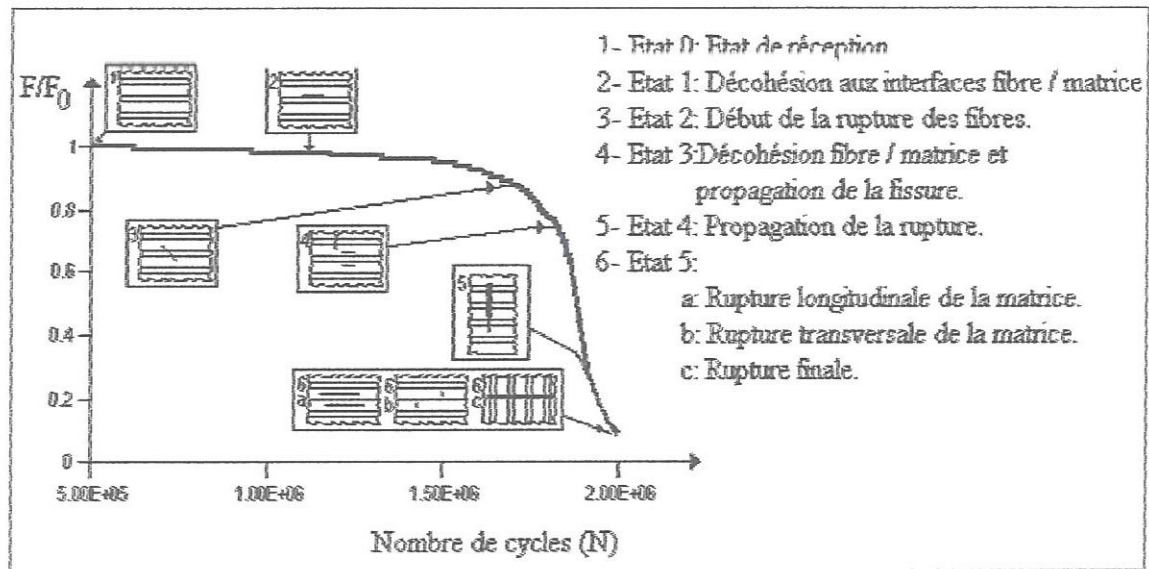


Figure II-6: Mécanismes d'endommagement de fatigue en flexion [17].

CHAPITRE III

Approche R.D.M du Modèle
d'Endommagement et Aspects
Numériques du Problème

Chapitre III

Approche R.D.M du modèle d'endommagement et aspects numériques du problème

La mise en place d'un modèle numérique prenant en compte l'endommagement dans un calcul de structure nécessite l'implémentation de la loi élastique endommagée introduite au chapitre II dans une approche R.D.M classique. Cette stratégie permettra la prédiction de la répartition spatiale et temporelle de l'endommagement, des contraintes ainsi que leur évolution et l'état de contraintes de la poutre dans les zones les plus sollicitées.

III-1: Présentation du problème

Notre problème est géométriquement simple, il s'agit d'une poutre parallélépipédique soumise à une sollicitation de fatigue en flexion trois points, figure III-1.

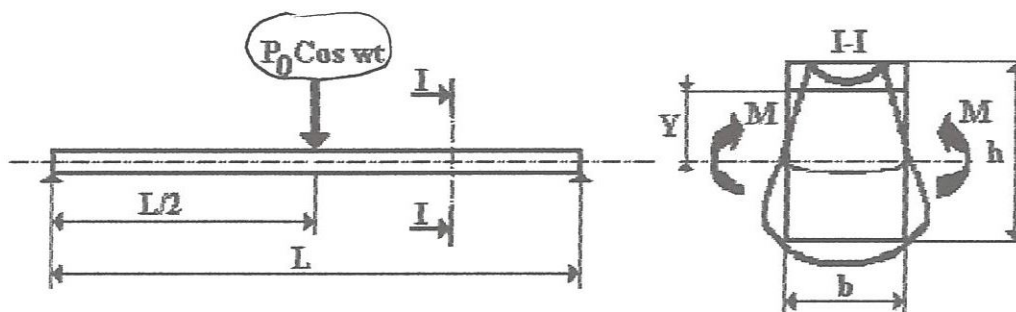


Figure. III-1: Une poutre sollicitée en flexion trois points.

Tous les calculs sont faits dans le cadre de la résistance des matériaux: la longueur de la poutre est suffisamment longue par rapport à son épaisseur. Nous nous limiterons à un calcul de flexion pure en négligeant l'effet de l'effort tranchant.

Dans notre travail, la valeur $\frac{L}{h}$ est pris égale à 20 (rapport distance entre appuis et épaisseur), le rapport $\frac{L}{h} \geq 16$ est conseillé par la norme ASTM.

Il est à noter que les essais de flexion trois points peuvent être réalisés de deux manières:

- La force P_0 est imposée et on mesure le déplacement.
- Le déplacement δ_0 est imposé et on mesure la force.

Du fait que le phénomène de l'endommagement est suivi par la variation de la rigidité globale (K) ou locale (H), ces deux essais ont le même principe.

L'évaluation de cette rigidité globale se fait à partir du modèle d'endommagement local.

Dans ce travail nous appliquerons notre modèle dans le cas des essais à forces imposées.

III-2: Formulation R.D.M par l'introduction de l'endommagement

III-2-1: Flexion circulaire

Notre modèle "unidirectionnel élastique endommageable" est basé essentiellement sur le fait que la variation locale de rigidité résulte de l'endommagement des fibres.

Dans un essai de flexion, cette variation dépend de la position de chaque élément de volume par rapport à l'axe neutre. Il nous faut donc tenir compte de la répartition des contraintes dans l'épaisseur de la poutre.

Nous déterminons la variable de l'endommagement " D " en fonction du nombre de cycles N et de l'ordonnée Y de l'élément considéré par rapport à l'axe neutre de la poutre:

$$D = D(N, Y) \quad (\text{III-1})$$

Nous considérons une poutre sollicitée en flexion pure par un moment M , la variable de déformation duale est la courbure k et nous cherchons à suivre l'évolution de la rigidité en flexion en fonction du nombre de cycle N :

$$M = H(N)k \quad (\text{III-2})$$

D'après l'hypothèse de Navier-Bernoulli la déformation est une fonction linéaire de la courbure k , ainsi elle est donnée par:

$$\Delta \varepsilon (Y) = k(Y - Y_0) \quad (\text{III-3})$$

Y_0 : est l'ordonnée de la ligne neutre qui peut évoluer, pour une loi d'endommagement dissymétrique.

A un stade d'endommagement donné, la variable d'endommagement " D " dépend uniquement de Y et l'application de l'hypothèse des contraintes effectives équation II-4a dans une loi de comportement élastique du matériau endommagé, l'équation II-4b donne:

$$\sigma (Y) = E_0 [1 - D (Y)] k (Y - Y_0) \quad (\text{III-4})$$

En écrivant que l'effort normal dans l'épaisseur est nul, la position de l'axe neutre Y_0 est déduite de:

$$\iint \sigma(Y) dS = \sum N = N_t + N_c = 0 \quad (\text{III-5a})$$

Où:

N_t : Effort normal résultant des contraintes de traction.

N_c : Effort normal résultant des contraintes de compression.

Rapportant l'équation III-4 dans III-5a:

$$\sum N = E_0 k \iint [1 - D(Y)] (Y - Y_0) dS = 0 \quad (\text{III-5b})$$

La rigidité H est déduite de l'expression du moment de flexion M :

$$\sum M = \iint Y \sigma(Y) dS \quad (\text{III-6a})$$

Rapportant l'équation III-4 dans III-6a:

$$\sum M = E_0 k \iint Y [1 - D(Y)] (Y - Y_0) dS = 0 \quad (\text{III-6b})$$

Dans le cas d'une poutre à section rectangulaire, de hauteur h et de largeur b , l'évolution de l'axe neutre Y_0 et la rigidité en flexion H sont données par:

$$Y_0 = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 - D(Y)] Y dY}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 - D(Y)] dY} \quad (\text{III-7})$$

$$H = E_0 b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 - D(Y)) (Y^2 - Y Y_0) dY \quad (\text{III-8})$$

III-2-2: Flexion trois points

La loi de comportement décrite précédemment est une loi locale et son utilisation pour l'analyse des essais de flexion trois points réalisés exige un nouveau calcul de structure (R.D.M).

Le comportement global de la structure est caractérisé par la relation force-déplacement. La rigidité globale K reliant la force appliquée et le déplacement observé est donnée par:

$$P = K(N) \delta \quad (\text{III-9})$$

Les équations III-7 et III-8 du paragraphe précédent donneront à un stade d'endommagement fixe, la position de l'axe neutre Y_0 et la rigidité en flexion H en fonction de la position x .

La rigidité K est déduite de l'énergie de déformation en flexion:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(x)}{H(x)} dx \quad (\text{III-10a})$$

Dans notre cas, elle devient:

$$U = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P^2 x^2}{4 H(x)} dx \quad (\text{III-10b})$$

D'après le théorème de Castigliano, la relation entre le déplacement δ et la charge P est donnée par:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{x^2}{H(x)} dx \quad (\text{III-11})$$

En la reportant dans l'équation II-9, la rigidité globale K est calculée par:

$$K = \left[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{x^2}{2 H(x)} dx \right]^{-1} \quad (\text{III-12a})$$

Nous constatons que la valeur de $H(x)$ est constante par paliers sur la demi-longueur de la poutre. En utilisant ce résultat, nous pouvons écrire plus simplement l'équation III-12a sous la forme suivante [12]:

$$K^{-1} = \int_0^{x_1} \frac{x^2}{2H_0} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{2H_1} dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{x^2}{2H_2} dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{x^2}{2H_3} dx + \int_{x_4}^{x_5} \frac{x^2}{2H_4} dx + \int_{x_5}^{x_6} \frac{x^2}{2H_5} dx + \int_{x_6}^{x_7} \frac{x^2}{2H_6} dx + \int_{x_7}^{x_8} \frac{x^2}{2H_7} dx + \int_{x_8}^{x_9} \frac{x^2}{2H_8} dx + \int_{x_9}^{x_{10}} \frac{x^2}{2H_9} dx + \int_{x_{10}}^{\frac{L}{2}} \frac{x^2}{2H_{10}} dx \quad (\text{III-12b})$$

Les termes H_i de l'équation III-12b étant tous constants sur chaque intervalle d'intégration, l'expression de la rigidité globale est alors obtenue sous la forme suivante:

$$K = 6 \left[\frac{x_1^3}{H_0} + \frac{x_2^3 - x_1^3}{H_1} + \dots + \frac{x_{10}^3 - x_9^3}{H_9} + \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3 - x_{10}^3}{H_{10}} \right]^{-1} \quad (\text{III-12c})$$

III-3: Aspects numériques

D'un point de vue numérique, le calcul à faire présente des points importants que nous allons détailler ci-dessous.

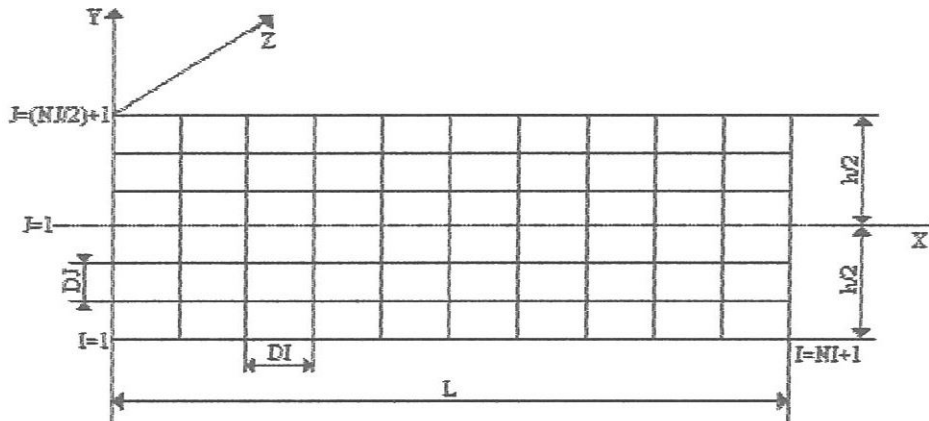


Figure. III-2 : Discretisation spatiale adoptée selon X et Y.

a) Discretisation spatiale selon X

La longueur de la poutre est discrétisée en un certain nombre de tranches identiques, soit (NI) , voir figure III-2. Toutes les fonctions seront donc évaluées aux nœuds d'un maillage régulier, figure III-3.

b) Discretisation spatiale selon Y

L'épaisseur de la poutre (h) est découpée en certain nombre de couches identiques, soit (NJ) , voir figure III-2.

Dans le cas général d'une loi d'évolution dissymétrique équation II-9b, Il faut découper toute l'épaisseur, tandis qu'une demi épaisseur suffit dans le cas d'une loi d'évolution symétrique équation II-9a.

c) Intégration spatiale en x et y

Nous avons effectué trois calculs d'intégration spatiale:

- Deux fois sur l'épaisseur de l'éprouvette suivant l'axe Y, les équations III-8 et III-7, respectivement pour le calcul de la rigidité en flexion H et l'évolution de l'axe neutre Y_0 dans le cas d'une loi d'évolution dissymétrique.
- Une fois sur la longueur de l'éprouvette suivant l'axe X, l'équation III-12a, pour le calcul la rigidité globale K .

Ainsi, la méthode d'intégration des trapèzes couramment utilisée dans un calcul d'intégrale, est mise en place systématiquement dans chaque étape de calcul sur toute l'épaisseur [20].

Cette méthode est également utilisée sur toute la longueur de l'éprouvette pour calculer l'évolution du déplacement δ et la rigidité globale K , par intégration des équations III-11 et III-12a respectivement suivant le nombre de cycles N .

Dans le cas symétrique, soit l'équation II-9a, le calcul est beaucoup plus simple du fait que l'axe neutre (fibre moyenne) reste constant ($Y_0 = 0$) d'où l'une des intégrations disparaît (équation III-7).

d) Intégration temporelle en chaque point de la discrétisation

La résolution de l'équation différentielle qui gouverne la loi d'évolution de l'endommagement, équations II-9a et II-9b doit être effectuée en utilisant une intégration temporelle. Nous avons choisi la méthode de RUNGE-KUTTA du 4^{ème} ordre, qui est la méthode la plus utilisée dans la résolution des équations différentielles, en raison de sa simplicité, sa précision est également acceptable [19]. Cette méthode semble bien adaptée dans notre calcul et elle nous donne les valeurs de l'endommagement instantané $D(Y, N)$ à chaque étape de calcul.

III-4: Idée générale du processus numérique

III-4-1: Poutre initialement saine

La poutre est supposée initialement saine, les fibres ne sont pas endommagées.

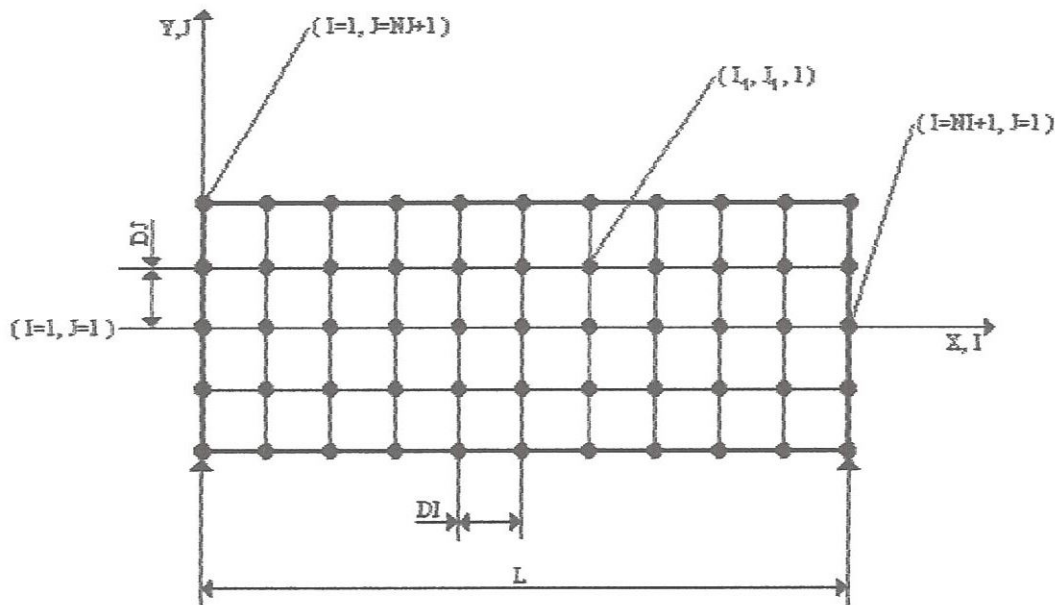


Figure III-3: Maillage de la structure

Quelque soit la position de discrétisation, figure III-3:

$(I=1, NI+1)$ Et $(J=1, NI+1)$ pour un nombre de cycle $N = 1$:

$$NI = \frac{L}{DI} \quad \text{Et} \quad NJ = \frac{h}{DJ}$$

L'endommagement est nul: $D(I, J, N) = D(I, J, 1) = 0$

Résultats

- Axe neutre $Y_0(I, N) = 0$
- Rigidité locale $H(I, N) = H_0$
- Rigidité globale $K(N) = K_0$
- Déformation $\Delta \varepsilon(I, J, N) = 0$

III-4-2: Poutre à un stade d'endommagement donné

On connaît tout sur l'état sain (vierge) de la poutre ($Y_0 = 0, H_0, K_0, \Delta \varepsilon = 0$) pour $D(I_1, J_1, 1)$.

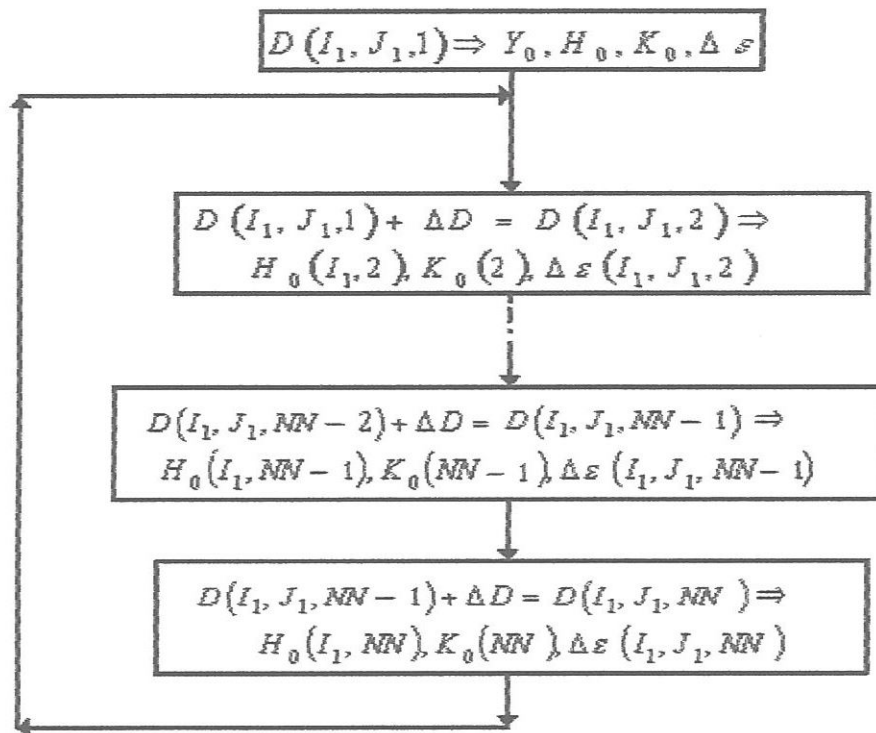


Figure III-4: Détails du processus numérique.

On peut donc calculer par le biais de l'intégration de l'équation différentielle (la loi d'évolution de l'endommagement) $D(I, J, N)$ en fonction du nombre de cycles fixe, soit $D(I_1, J_1, 2)$, on pourra connaître tout sur l'état de la poutre à ce stade d'endommagement $N = 2$, et ainsi de suite.

Connaissant tout sur l'état de la poutre à un stade d'endommagement $N = NN - 1$ on pourra finalement connaître $D(I_1, J_1, NN)$ et automatiquement tout sur l'état de la poutre à $N = NN$, figure III-4, dans ce cas il est clair qu'on a une sollicitation, les fibres de la structure sont endommagées.

$\forall N, \forall J$ Pour $N=1, NN$ et $J=1, NJ+1$

On a,

$$D(I=1, J, N) = D(I=NI+1, J, N) = 0 \text{ Aux extrémités de la poutre.}$$

III-5: Organigramme du programme principal

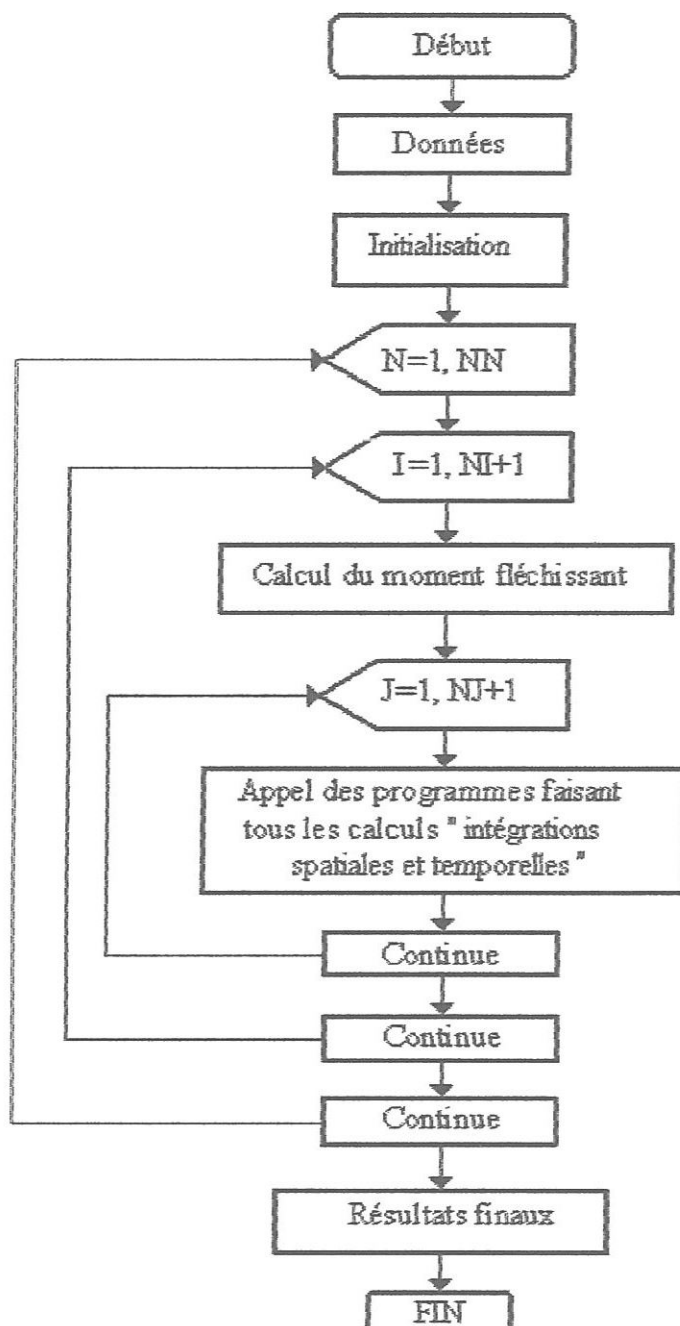


Figure III-5: Organigramme principal.

III-6: Données des problèmes étudiés

III-6-1: Caractéristiques géométriques des éprouvettes

Deux poutres parallélépipédiques de matériaux différents:

Cas 1: Poutre en composite unidirectionnel verre / époxy

Cas 2: Poutre en composite unidirectionnel carbone / époxy

Les poutres sont de sections similaires et constantes dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes:

- Longueur de la poutre $L = 0.4 \text{ m}$.
- Epaisseur de la poutre $h = 0.02 \text{ m}$.
- Largeur de la poutre $b = 0.04 \text{ m}$.

III-6-2: Caractéristiques mécaniques initiales des matériaux

Du point de vue résistance, on suppose que les fibres de verre et de carbone sont les seules à intervenir, la résistance de la matrice est négligée dans les deux cas traités.

Cas 1: Fibres de verre

- Module de Young initial: $E_0 = 72400 \text{ MPa}$
- Densité volumique: $\rho = 2540 \text{ Kg/m}^3$
- Endommagement initial: $D(I, J, 1) = 0$
- Rigidité globale: $K_0 = 48 E_0 \frac{b h^3}{L^3}$
- Rigidité locale: $H_0 = E_0 I_{GZ} = E_0 \frac{b h^3}{12}$

Avec:

I_{GZ} : Moment d'inertie de la poutre.

Cas 2: Fibres de carbone

- Module de Young initial: $E_0 = 230000 \text{ MPa}$
- Densité volumique: $\rho = 1700 \text{ Kg/m}^3$
- Endommagement initial: $D(I, J, 1) = 0$
- Rigidité globale: $K_0 = 48 E_0 \frac{b h^3}{L^3}$
- Rigidité locale: $H_0 = E_0 I_{GZ} = E_0 \frac{b h^3}{12}$

III-6-3: Caractéristiques des sollicitations

- $\Delta\sigma = 500 \text{ MPa}$: Amplitude des sollicitations à la surface de la poutre
- $NN = 40$: Nombre d'incrément des cycles de chargement
- $DN = 4.10^4 \text{ cycles/ incrément}$: Nombre de cycles par incrément (*cas 1*)
- $DN = 4.10^5 \text{ cycles/ incrément}$: Nombre de cycles par incrément (*cas 2*)

III-6-4: Caractéristiques de la discrétisation spatiale

- Incrément DI suivant X : $\rightarrow DI = \frac{L}{20}$
- L'incrément DJ suivant Y : $\rightarrow DJ = \frac{h}{40}$
- Nombre d'incrément suivant X : $\rightarrow NI = 20$
- Nombre d'incrément suivant Y : $\rightarrow NJ = 40$

III-6-5: Modèle utilisé

Les valeurs des paramètres A , b et c de la loi d'évolution de l'endommagement de fatigue énoncée par J.L Chaboche et définissant le modèle utilisé sont identifiées par Sidoroff et Subagio [11].

$$\begin{cases} A = 0.0035 \\ b = 8 \\ c = 2 \end{cases}$$

III-7: Résultats et discussion

Nous présentons les résultats obtenus par l'approche proposée et le modèle numérique développé pour les deux matériaux étudiés. Toutes les simulations présentées correspondent à la loi d'évolution symétrique équation II-9a avec les valeurs données ci dessus pour les paramètres A , b et c .

Les figures (III-6a, III-6b, III-13a, III-13b) et (III-7a, III-7b, III-14a, III-14b) représentent respectivement l'évolution de la répartition de la variable d'endommagement D et les contraintes σ en fonction du nombre de cycles. Les résultats sont dégagés pour deux éprouvettes (*cas 1* en verre / époxy) et (*cas 2* en carbone / époxy) pour tester la sensibilité du modèle développé dans cette étude.

Deux sections distinctes sont privilégiées:

- La section médiane, à $X = L/2$.
- La section à $X = L/4$.

On remarque dans ces figures, une apparition assez rapide d'une zone totalement endommagée en surface dans la section à $X=L/2$, $D=1$ et $\sigma=0$, tandis qu'une zone moins endommagée en surface dans la section à $X=L/4$, ce qui est évident car la section à $X=L/2$ est la section la plus sollicitée. Ces résultats montrent que dans un essai cyclique de flexion trois

points, l'endommagement de fatigue se reparti d'une manière hétérogène sur la longueur de la poutre.

La figure III-7 nous donne une idée globale sur la localisation des zones endommagées après un dosage de 640.000 cycles. Les figures III-8 (a, b et c) représentent le développement de l'endommagement des fibres tendues pour différents stades d'endommagement.

La variation de l'état de contrainte dans la section médiane à différents dosages de cycle est représentée dans la figure III-10. D'après L'allure de ces courbes, on peut dire qu'un matériau composite unidirectionnel en fatigue est gouverné par un comportement élastique fragile.

L'évolution de la rigidité locale H/H_0 en flexion est représentée dans la figure III-11, on observe que les sections les plus endommagées (8, 9 et 10) ne sont pas trop loin de la section médiane, par contre les sections près de l'appui (1, 2 et 3) restent intactes ou presque.

L'évolution de la perte de rigidité globale du matériau en fonction du nombre de cycles est représentée dans la figure III-12. Cette représentation montre une faible décroissance linéaire de la rigidité globale, suivie d'une diminution importante, qui intervient après (720.000 cycles), correspondant à une perte de rigidité globale sensiblement égale à 10%.

Résultats cas 1: Composite en Verre / Epoxy

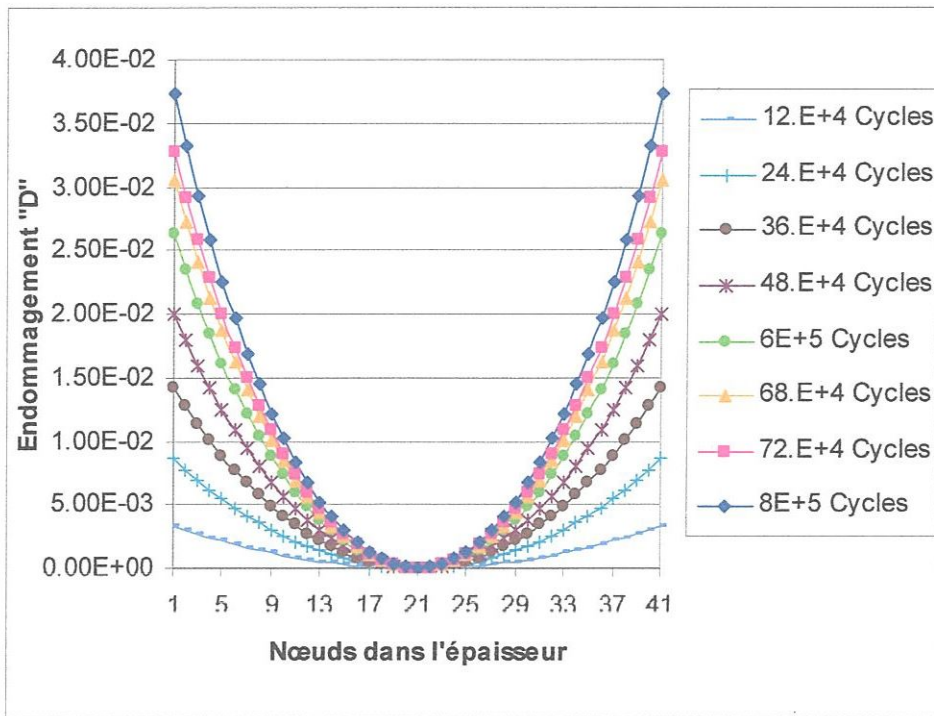


Figure.III-6a: Evolution de l'endommagement dans la section à $X=L/4$ en fonction du nombre de cycles.

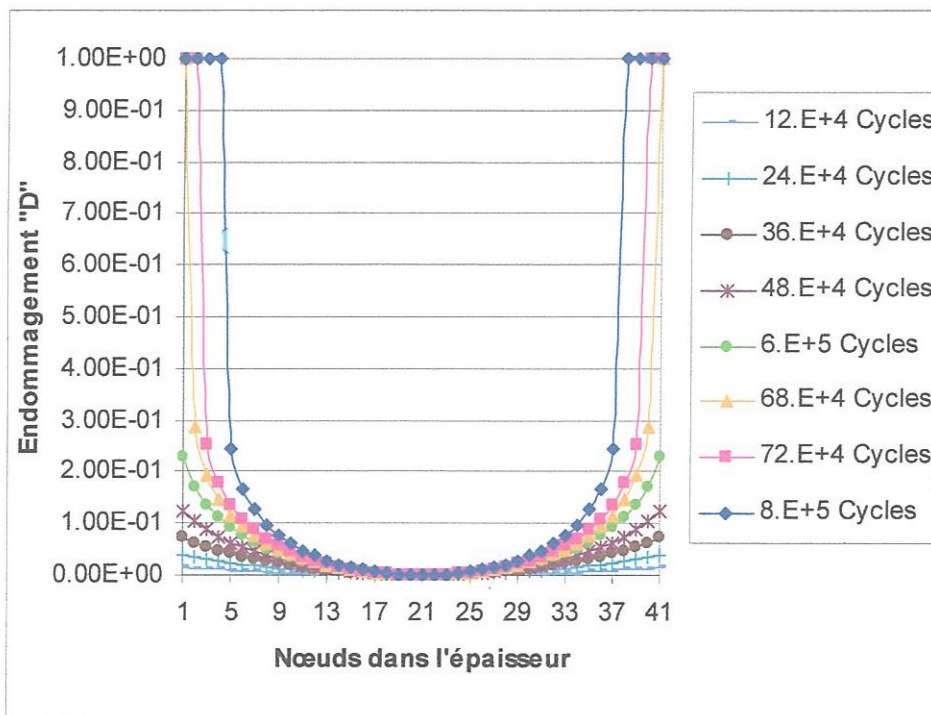


Figure.III-6b: Evolution de l'endommagement dans la section médiane ($X=L/2$) en fonction du nombre de cycles.

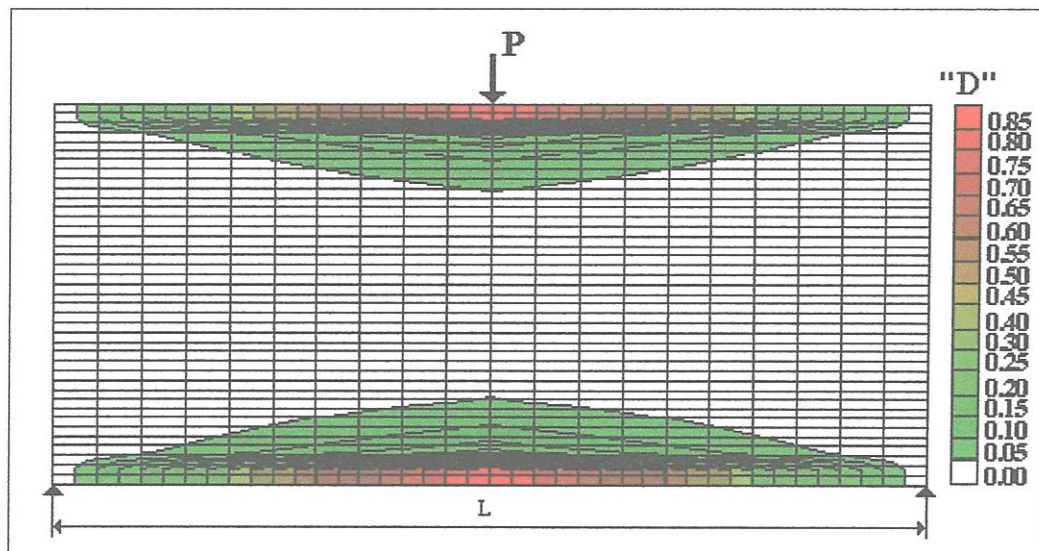


Figure III-7: Zones endommagées de la poutre à 640.000 cycles.

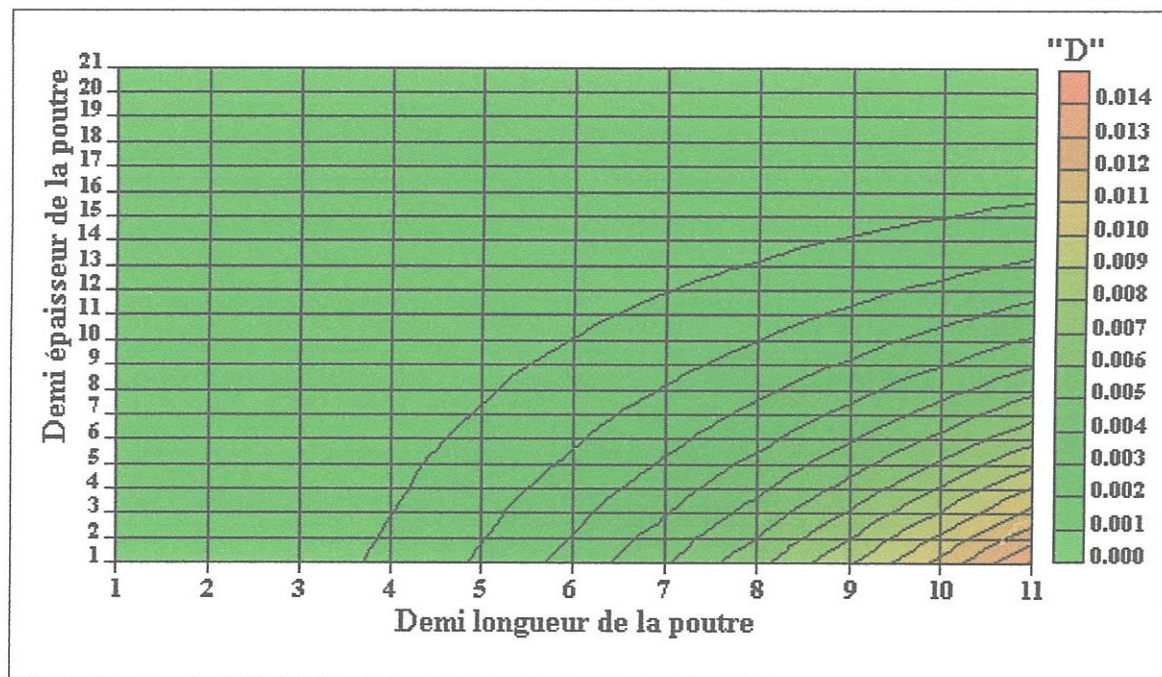


Figure III-8a: Développement de l'endommagement dans la poutre à 120.000 cycles

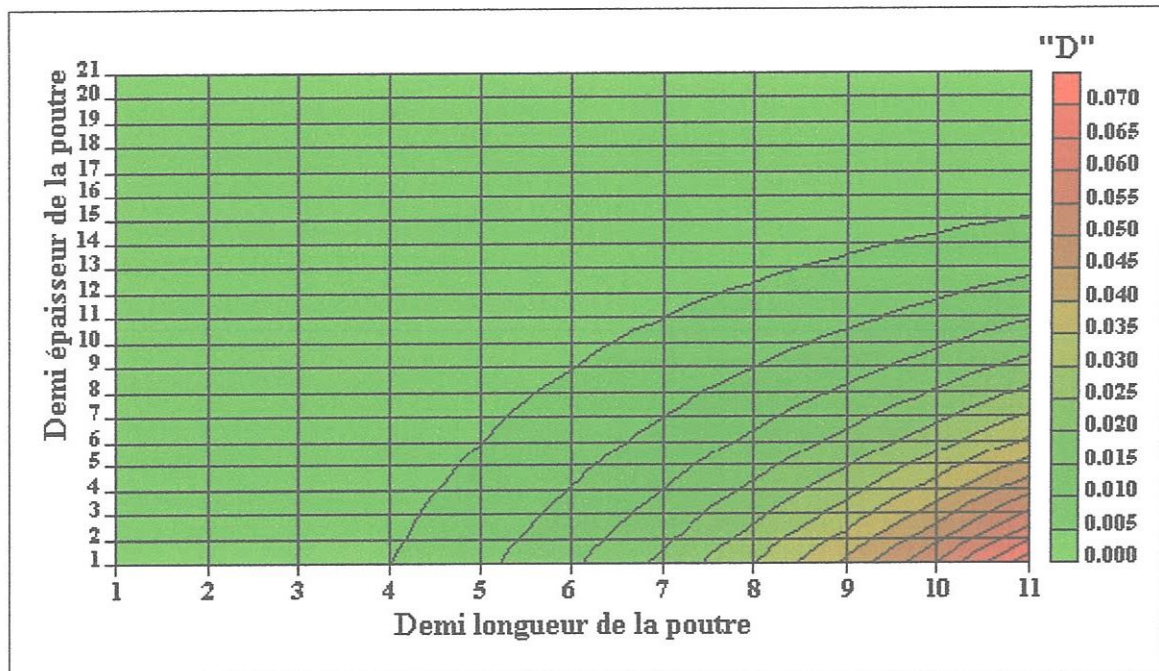


Figure III-8b: Développement de l'endommagement dans la poutre à 360.000 cycles

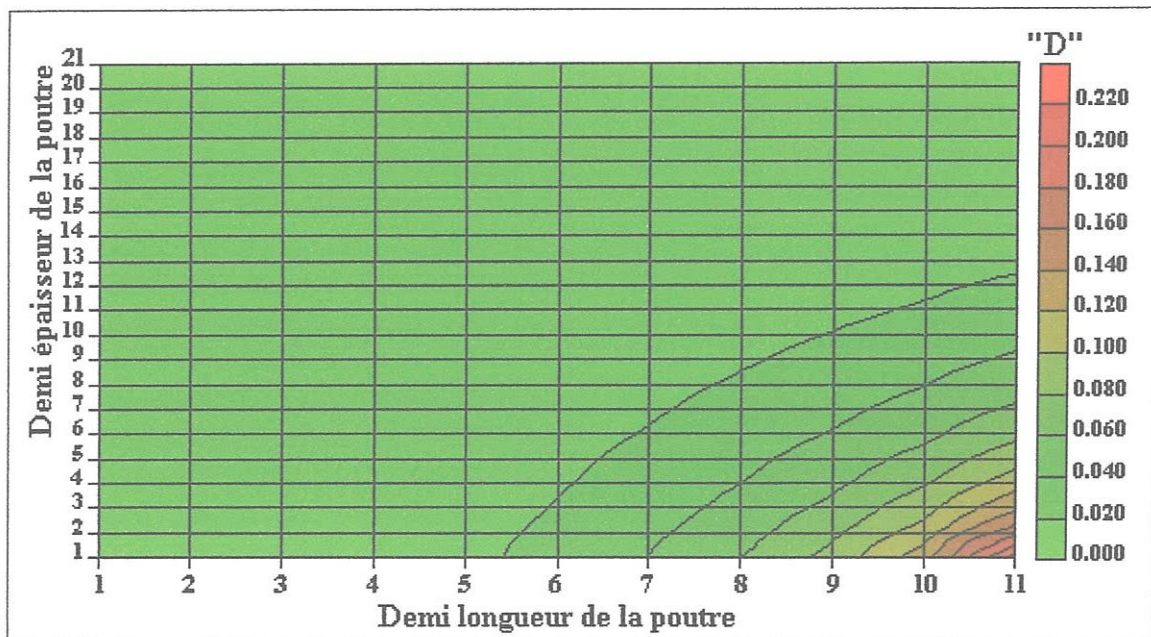


Figure III-8c: Développement de l'endommagement dans la poutre à 600.000 cycles

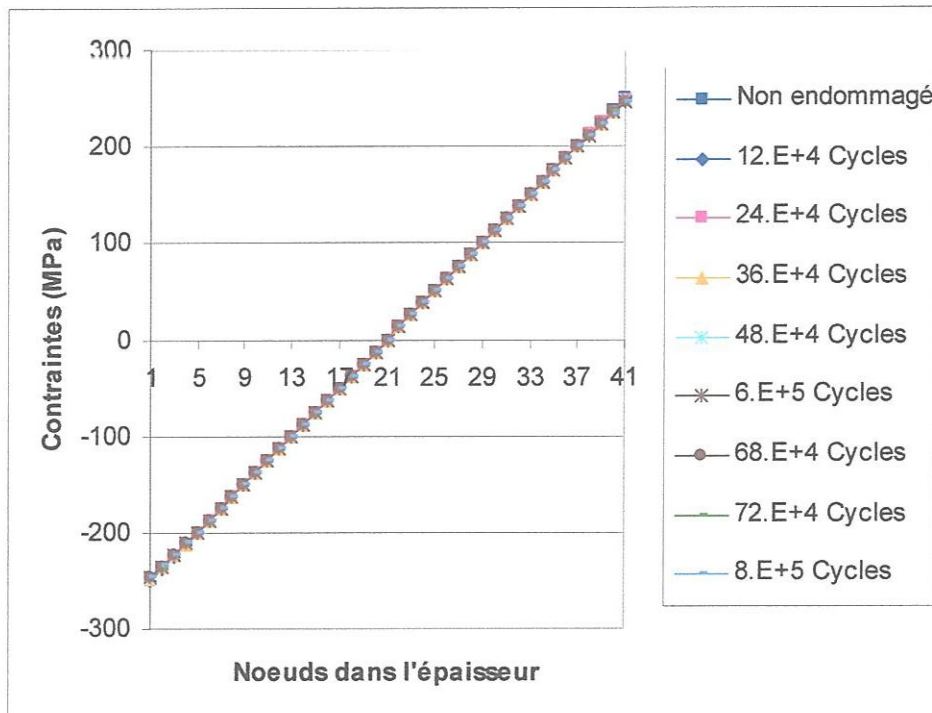


Figure.III-9a: Evolution de la contrainte dans la section à $X=L/4$ en fonction du nombre de cycles.

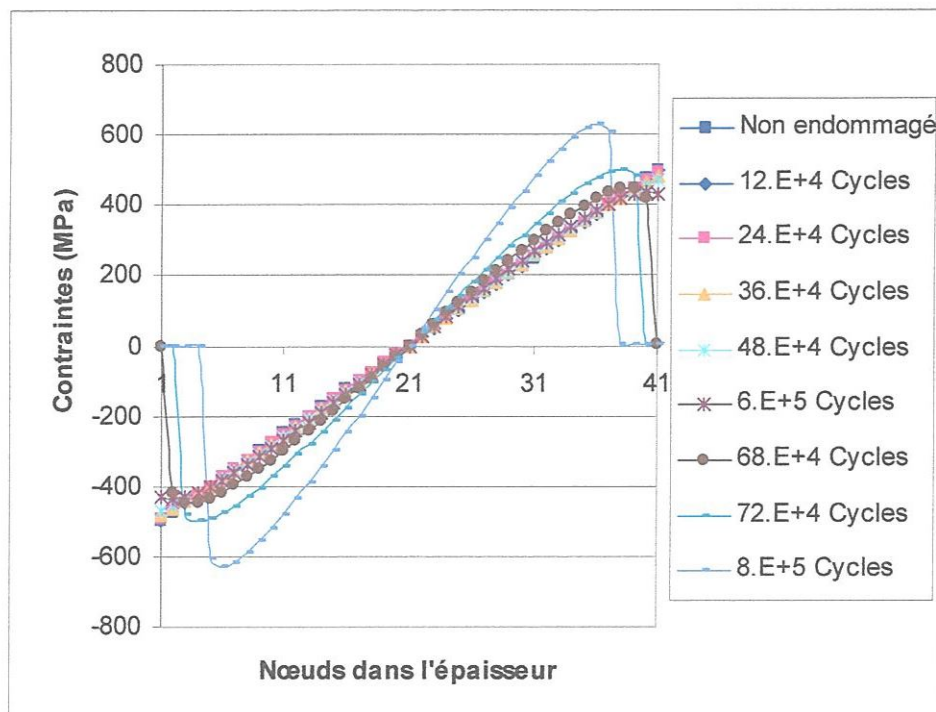


Figure.III-9b: Evolution de la contrainte dans la section médiane ($X=L/2$) en fonction du nombre de cycles.

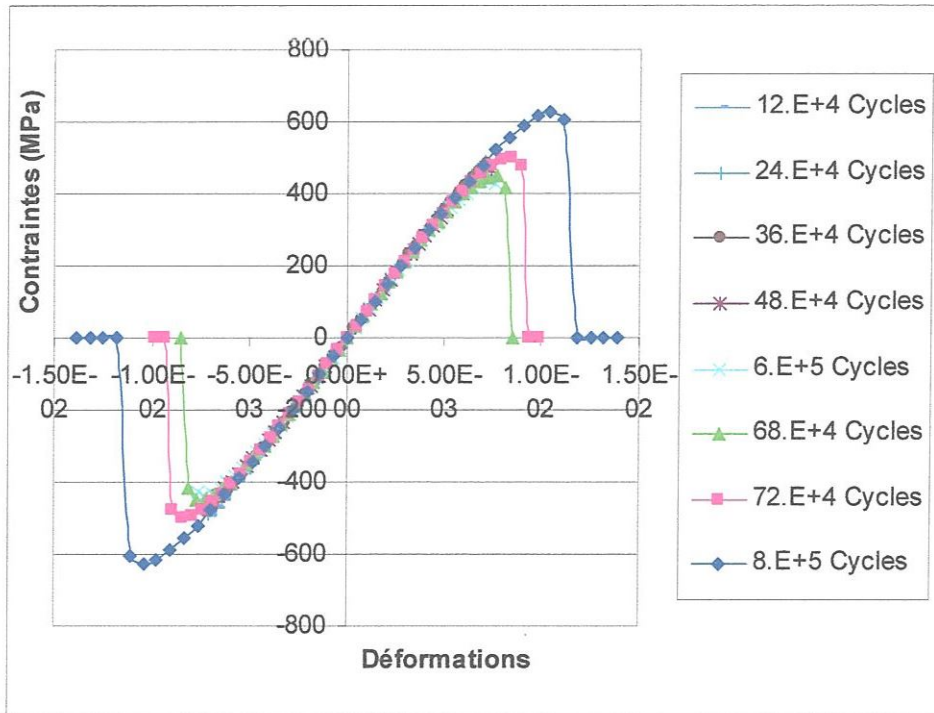


Figure.III-10: Variation de l'état de contrainte dans la section médiane ($X=L/2$) en fonction du nombre de cycles.

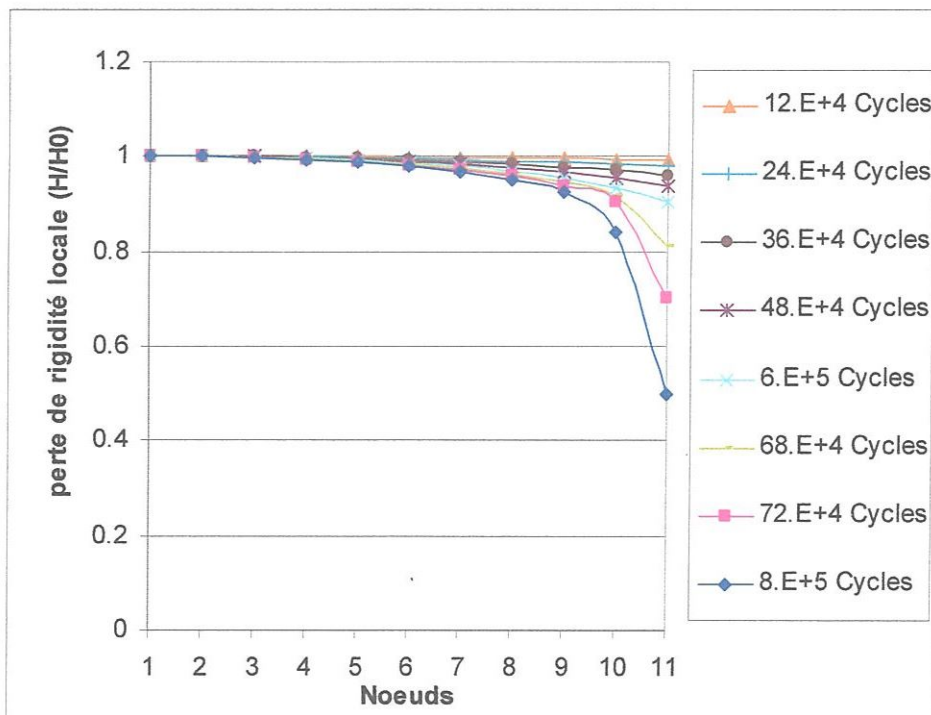


Figure. III-11: Evolution de la perte de rigidité locale (H/H_0) en fonction du nombre de cycles.

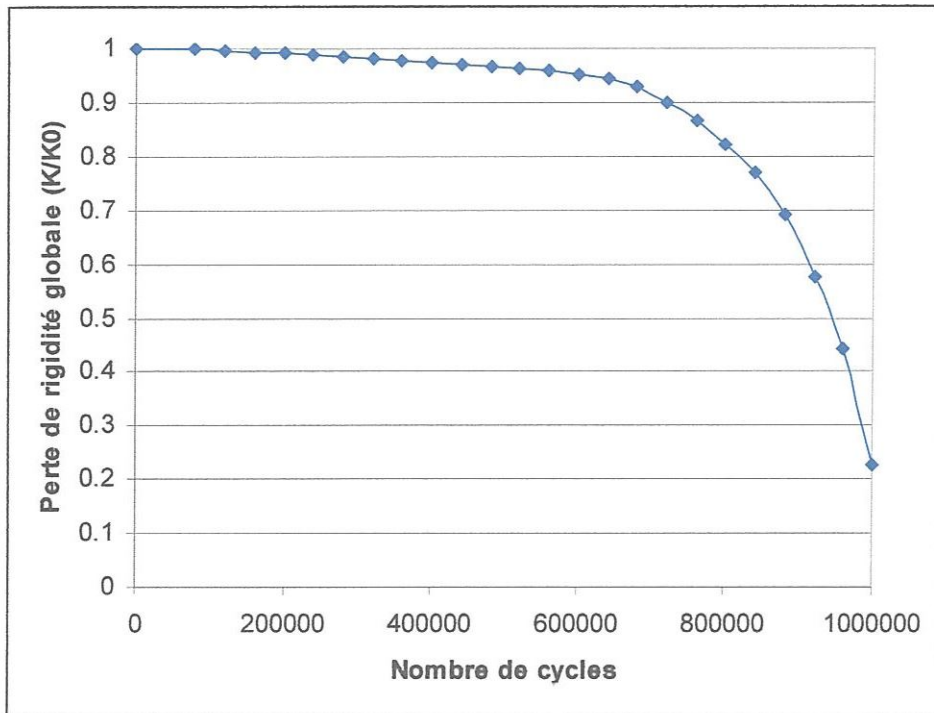


Figure. III-12: Evolution de la perte de rigidité globale (K/K_0) en fonction du nombre de cycles.

Résultats cas 2: Composite Carbone / Epoxy

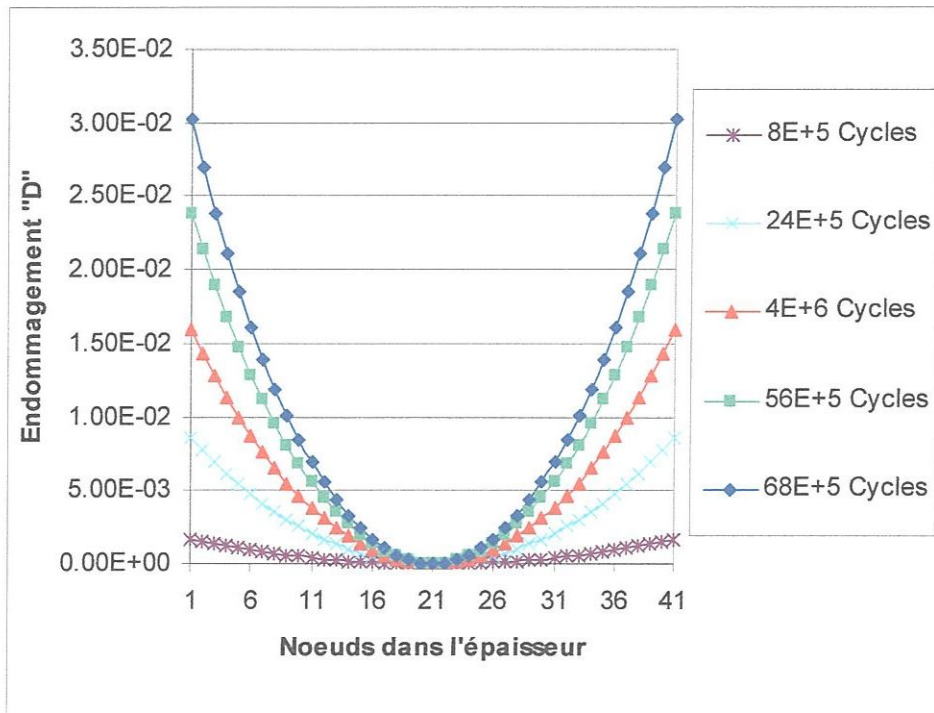


Figure.III-13a: Evolution de l'endommagement dans la section à $X=L/4$ en fonction du nombre de cycles.

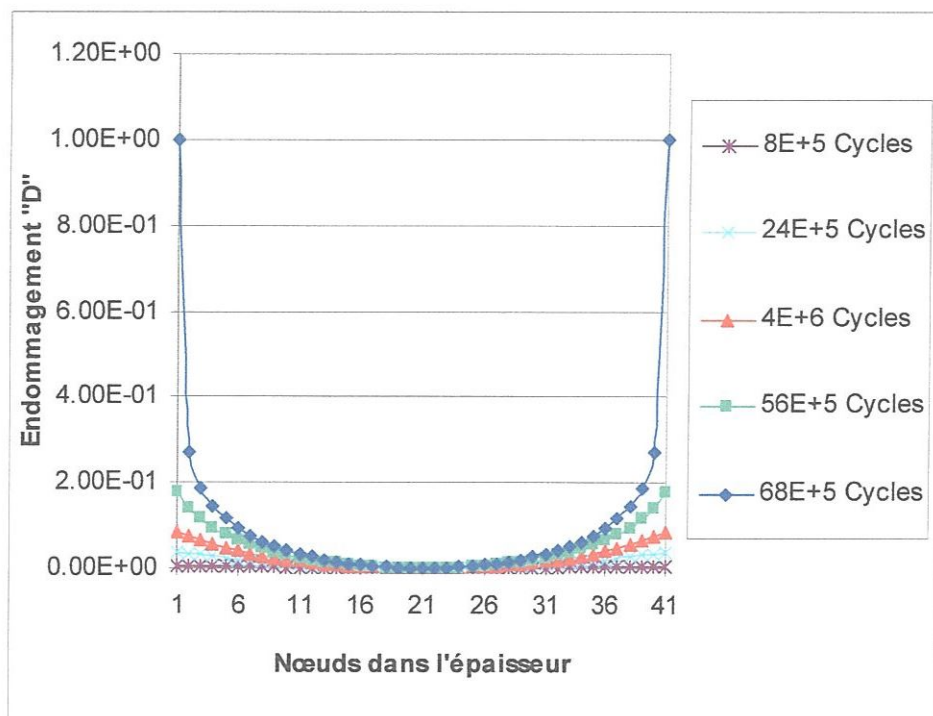


Figure.III-13b: Evolution de l'endommagement dans la section médiane ($X=L/2$) en fonction du nombre de cycles.

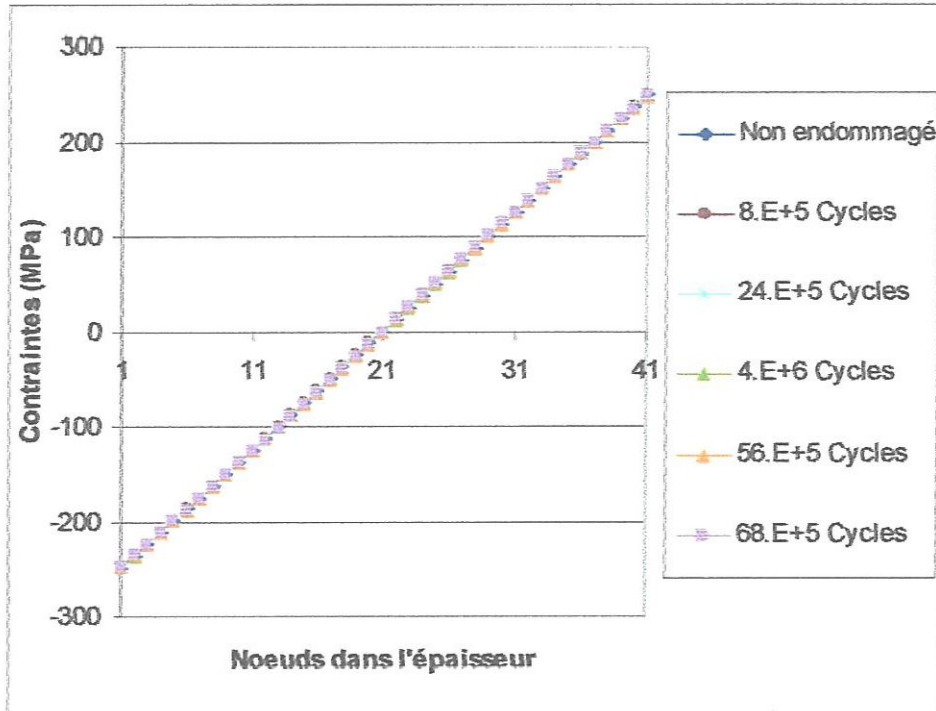


Figure.III-14a: Evolution de la contrainte dans la section à $X=L/4$ en fonction du nombre de cycles.

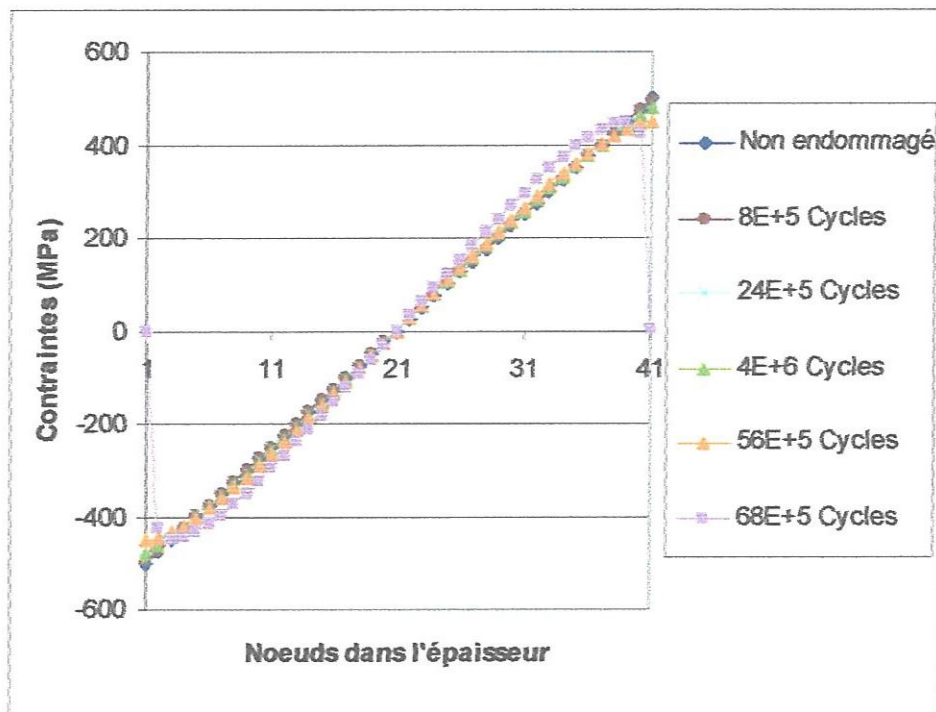


Figure.III-14b: Evolution de la contrainte dans la section médiane ($X=L/2$) en fonction du nombre de cycles.

III-8: Validation du modèle proposé

Notre objectif est la validation expérimentale de l'approche R.D.M proposée et la stratégie numérique développée et cela à travers les résultats des essais de fatigue en flexion trois points existants dans la littérature: la validation est ainsi effectuée sur deux éprouvettes confectionnées par deux matériaux différents.

Cas 1: Epreuve en composite verre / époxy [11]

Des essais de flexion trois points en fatigue à force imposée réalisés sur des éprouvettes en matériau composite unidirectionnel verre / époxy dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes:

- Longueur de la poutre $L = 0.16 m$
- Epaisseur de la poutre $h = 0.008 m$
- Largeur de la poutre $b = 0.03 m$

Les essais ont été menés sur des machines hydrauliques à la fréquence de 10 Hz avec un rapport de charge $R = \sigma_{\max} / \sigma_{\min} = 0.1$, pour deux niveaux de sollicitations ($\Delta\sigma = 600 MPa$ et $\Delta\sigma = 700 MPa$). Le module de Young du matériau composite unidirectionnel ayant un taux volumique de verre égale à 60 % est $E = 44920 MPa$, le module de Young du renfort est pris égal à $E = 72400 MPa$. Les résultats obtenus pour ce type de matériau sont représentés dans les figures III-13 et III-14 pour deux niveaux de sollicitations, dans la zone technologique choisie correspondant à une perte de rigidité globale égale à 10 % comme étant le niveau de dégradation du matériau.

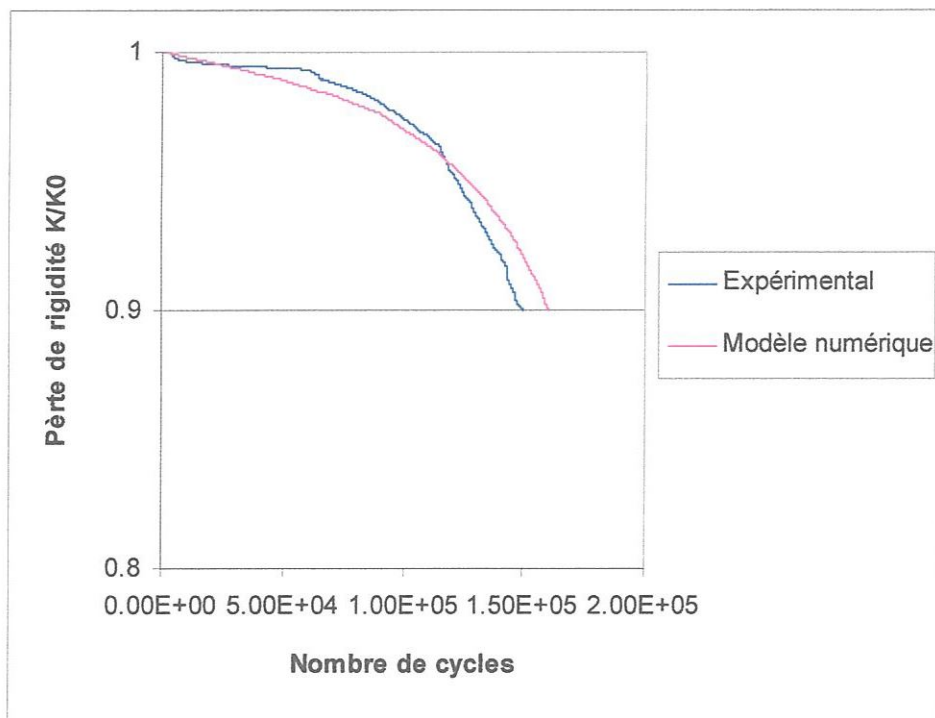


Figure III-13: Comparaison des résultats pour $\Delta\sigma = 600 MPa$
(Expérimental [11]-modèle proposé)

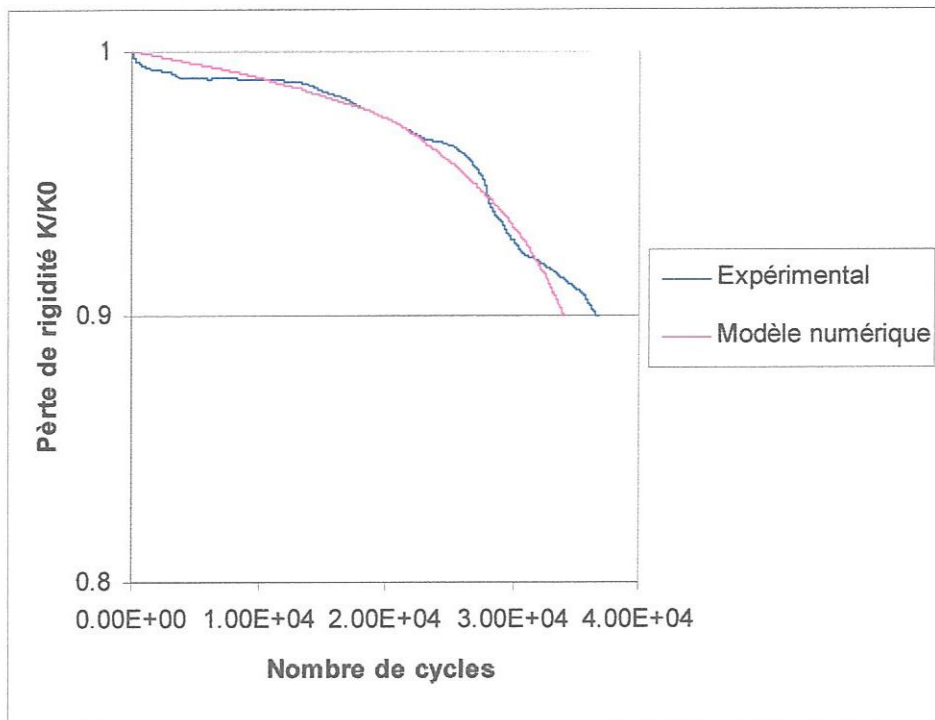


Figure III-14: Comparaison des résultats pour $\Delta\sigma=700\text{ MPa}$
(Expérimental [11]-modèle proposé)

Cas 2: Epreuve en composite carbone / époxy T300-5208 [17]

Des essais de flexion trois points en fatigue effectués sur un matériau composite unidirectionnel carbone époxyde T300-5208 à deux niveaux de contraintes compris entre 50 % et 60 % de σ_R à la fréquence de 5 Hz, le module de Young du renfort est égal à $E=230.000\text{ MPa}$. Les essais sont effectués à déplacements imposés:

- 5.5 mm pour $\Delta\sigma = 120.000\text{ MPa}$
- 6 mm pour $\Delta\sigma = 130.000\text{ MPa}$.

Les caractéristiques géométriques des éprouvettes sont les suivantes:

- Longueur de la poutre $L = 0.13\text{ m}$
- Epaisseur de la poutre $h = 0.007\text{ m}$
- Largeur de la poutre $b = 0.007\text{ m}$

Les résultats obtenus sont représentés dans les figures III-15 et III-16 pour les deux niveaux de sollicitations $\Delta\sigma$.

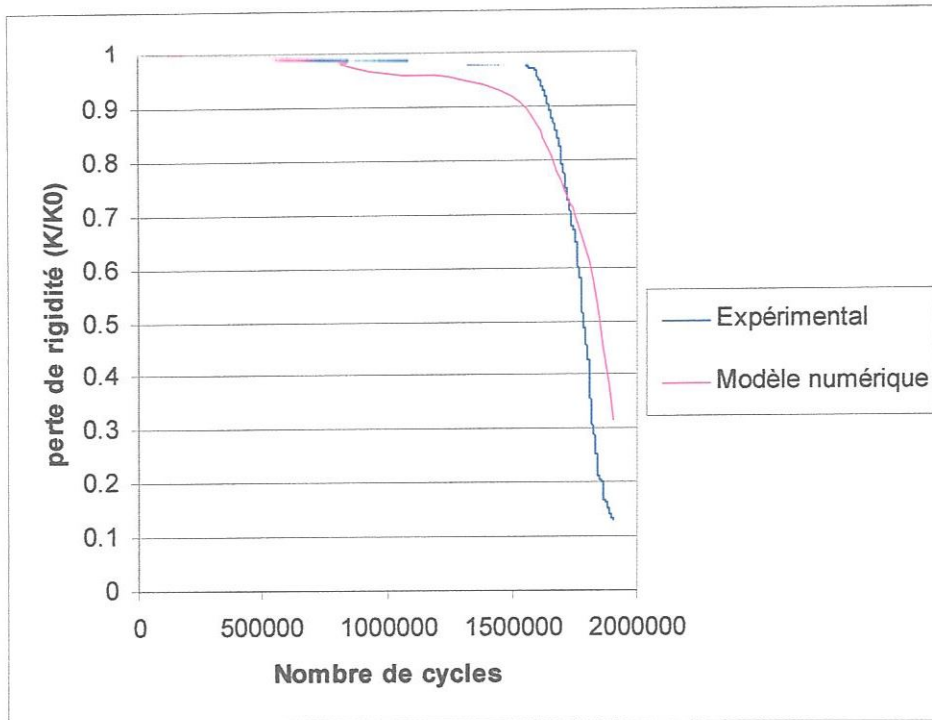


Figure III-15: Comparaison des résultats pour $\Delta\sigma=120.000 MPa$ (Expérimental [17]-modèle proposé)

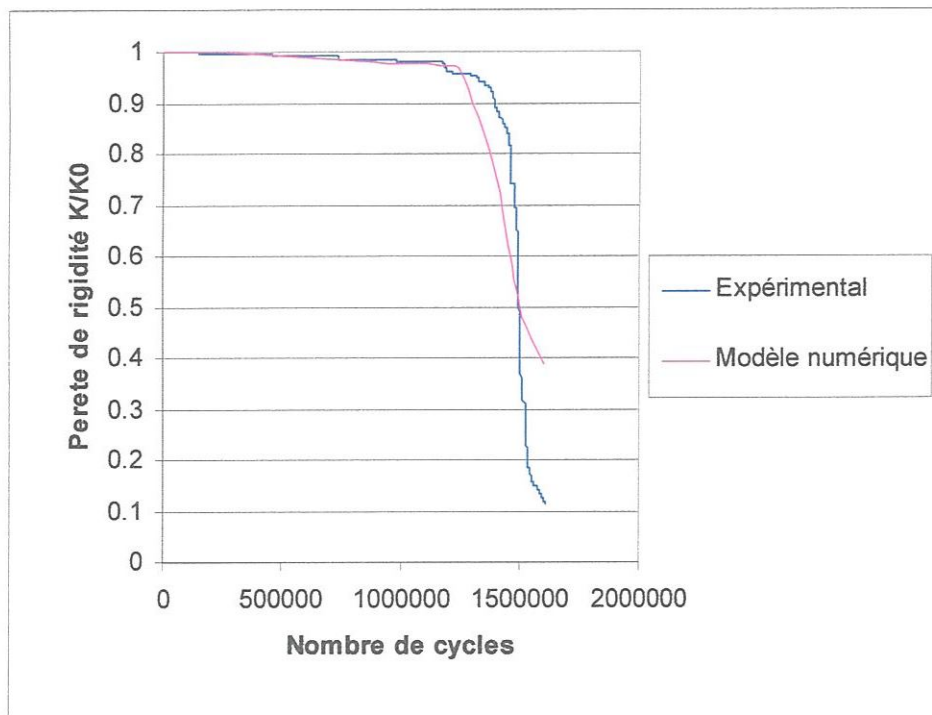


Figure III-16: Comparaison des résultats pour $\Delta\sigma=130.000 MPa$ (Expérimental [17]-modèle proposé)

III-9: Conclusion et remarques

Dans ce chapitre nous avons présenté notre modèle "unidirectionnel élastique endommageable". Ce modèle basé sur l'hypothèse de Kachanov–Rabotnov est constitué principalement de trois éléments:

- Une variable d'endommagement scalaire " D " qui représente la variable locale de rigidité résultant de la rupture des fibres.
- Une loi de comportement élastique endommagée et non endommagée donnée par les équation II-4a et II-4b.
- Une loi d'évolution symétrique de la variable d'endommagement équation II-9a.

Nous avons présenté par ailleurs dans ce chapitre:

- Un calcul de structure de type R.D.M qui permet de prévoir la répartition spatiale de l'endommagement, des contraintes et la variation de la rigidité (locale H/H_0 et globale K/K_0), ainsi que leurs évolutions en fonction du nombre de cycles pour le cas de flexion trois points.
- Une validation du modèle par des résultats expérimentaux existants dans la littérature; pour deux types de matériaux composites unidirectionnels (verre / époxyde) et (carbone / époxyde).

La comparaison de nos résultats à ceux obtenus expérimentalement montre une bonne concordance, ce qui témoigne de l'efficacité de l'approche entreprise et la stratégie numérique développé pour le traitement de ce type de problème.

Remarques

- Notre programme est structuré de la sorte qu'il reste applicable si on change la loi d'évolution différentielle de l'endommagement " D ", ou dans le cas où on ajoute des sollicitations supplémentaires.
- On pouvait affiner les résultats en donnant des incréments suffisamment petits ce qui augmente le temps d'exécution; mais on s'est contenté des grandes lignes du modèle.

CHAPITRE IV

Dynamique des Structures

Composites Endommageables

Chapitre IV

Dynamique des structures composites endommageables

Dans le chapitre III, on a montré que l'endommagement des structures composites peut produire une altération des caractéristiques mécaniques (la rigidité par exemple). A leurs tours, ces dernières affectent les caractéristiques dynamiques (fréquences propres, formes propres et amortissements modaux). Cet axe de recherche a fait l'objet de plusieurs études, principalement expérimentales [23 et 7]. Ainsi, dans cette partie de ce travail, on se propose d'étudier d'une part l'influence de la perte de rigidité sur les propriétés dynamiques d'une poutre en composite endommageable et d'autre part l'influence de celle-ci sur les réponses temporelles en vibration libre et fréquentielles en vibration forcée.

A travers une approche éléments finis, la détermination de l'énergie de déformation élastique du composite endommageable se fera par introduction discrète de l'état d'endommagement. L'énergie cinétique n'étant pas altérée se calcule de la manière classique. Les caractéristiques dynamiques évolutives de la structure endommageable étudiée sont extraites par analyse modale.

IV-1: Formulation de l'équation du mouvement

Nous étudions le mouvement transversal de la poutre en déterminant l'équation du mouvement de la poutre par la méthode variationnelle de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (\text{IV-1})$$

Où:

T : L'énergie cinétique totale de la poutre

V : L'énergie potentielle de la poutre

W : Le travail des forces non conservatrices agissant sur la poutre: Forces de dissipation dues à l'amortissement et toutes les autres forces extérieures.

La fonctionnelle de Hamilton est donnée par l'intégrale:

$$\psi = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} W dt \quad (\text{IV-2})$$

L'extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton, nous permet de déterminer l'équation du mouvement de la poutre.

Considérons une poutre de longueur L , de section S , de masse volumique ρ et de module d'élasticité longitudinal E dans un plan orthonormé xyz .

L'expression de l'énergie potentielle pour un solide élastique est donnée par [21]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (IV-3)$$

Où:

ε_{ij} : Tenseur de déformation

Dans notre cas la poutre est mono-dimensionnelle suivant l'axe X_x , on a:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_{zz} = 0, \varepsilon_{xz} = 0 \quad (IV-4)$$

σ_{ij} : Tenseur de contrainte, il a pour expression:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{xx} = E \frac{\partial w}{\partial x} \quad (IV-5)$$

Remplaçant les expressions IV-4 et IV-5 dans l'expression de l'énergie potentielle:

$$U = \frac{1}{2} E \int_V \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dv \quad (IV-6)$$

D'après l'hypothèse de Bernoulli:

$$U(x, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

D'où l'expression IV-6 devient:

$$U = \frac{1}{2} E \int_V \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dv \quad (IV-7)$$

Avec: $dv = dx.dy.dz$

Posons:

$$I = \int_S z^2 ds, \quad ds = dy.dz$$

L'expression de l'énergie potentielle devient:

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (IV-8)$$

L'expression de l'énergie cinétique est donnée par:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dv \quad (\text{IV-9a})$$

Après intégration sur la section de la poutre l'expression (IV-9a) devient:

$$T = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (\text{IV-9b})$$

Le travail des forces extérieures $F(x,t)$:

$$W = \int_0^L F(x,t) w dx \quad (\text{IV-10})$$

Remplaçant les expressions IV-8, IV-9b et IV-10 dans IV-2, l'expression de la fonctionnelle de Hamilton devient:

$$\psi = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \rho S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + F w \right\} dx \right] dt \quad (\text{IV-11})$$

L'extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton conduit à l'équation du mouvement de la poutre.

L'équation de Lagrange associée à la fonctionnelle de Hamilton IV-11 peut s'écrire sous la forme [3]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial w, t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial w, xx} = 0 \quad (\text{IV-12})$$

Avec:

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} = F(x,t) \quad (\text{IV-13})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial w, t} = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{IV-14})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial w, xx} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (\text{IV-15})$$

Remplaçant les expressions IV-13, IV-14 et IV-15 dans IV-12 on obtient l'équation du mouvement transversal de la poutre à section constante:

$$F(x,t) - \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{IV-16})$$

IV-2: Vibration transversale de la poutre

Nous considérons une poutre droite reposant sur deux appuis simples, et nous nous intéressons au mouvement engendré par une sollicitation transversale.

La fonction $w(x,t)$ représente le déplacement transversal de la poutre, elle vérifie l'équation du mouvement suivante:

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \forall x \in]0, L[, \forall t \quad (\text{IV-17})$$

I : Moment d'inertie de la poutre.

E : Module de Young du matériau.

ρ : La masse volumique de la poutre.

S : La section droite.

La résolution de l'équation IV-17 est la base de calcul de la réponse vibratoire en flexion. Elle n'est possible analytiquement que dans des cas particuliers de variation des caractéristiques mécaniques de la poutre suivant l'axe neutre. Nous baserons notre travail sur le cas le plus simple, celui d'une poutre homogène à section constante; qui se résout aisément.

Dans ces conditions $\rho S = cte$ et $EI = cte$, l'équation IV-17 devient:

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{IV-18})$$

IV-3: Solution de l'équation du mouvement

Pour résoudre l'équation IV-18 nous employons la méthode de séparation des variables.

Nous posons:

$$w(x,t) = f(x) g(t) \quad (\text{IV-19})$$

Introduisant l'équation IV-19 dans IV-18:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} f(x) + \frac{EI}{\rho S} g(t) \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = 0 \quad (\text{IV-20})$$

Par séparation des variables à droite les fonctions du temps et à gauche les fonctions d'espace:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} / g(t) = - \frac{EI}{\rho S} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} / f(x) = a \quad (\text{IV-21})$$

On constate que "a" est une constante car le premier membre de l'équation IV-21 est indépendant de x et le deuxième membre est indépendant de t, "a" est une constante indépendante de x et de t.

Séparons l'équation IV-21 en deux équations:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} - a g(t) = 0 \quad (\text{IV-22})$$

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} + a \frac{\rho S}{EI} f(x) = 0 \quad (\text{IV-23})$$

La constante "a" peut être positive négative ou nulle, on en déduit les trois types de solutions:

- $a = 0$

$$\begin{cases} g(t) = At + B \\ f(x) = C + Dx + Ex^2 + Fx^3 \end{cases} \quad (\text{IV-24})$$

Introduisant l'équation IV-24 dans IV-19:

$$w(x,t) = (At + B)(C + Dx + Ex^2 + Fx^3) \quad (\text{IV-25})$$

C'est le cas d'une vibration sans déformation.

- $a < 0$, on pose $a = -\omega^2, \omega \neq 0$.

Les équations IV-22 et IV-23 deviennent:

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \omega^2 g = 0 \quad (\text{IV-26})$$

$$\frac{d^4 f}{dx^4} + K^2 f = 0 \quad (\text{IV-27})$$

Avec: $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ nombre d'onde, ω la pulsation.

Les solutions des équations IV-26 et IV-27 sont données par :

$$\begin{cases} g(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ f(x) = C \cos(Kx) + D \sin(Kx) + E \operatorname{Ch}(Kx) + F \operatorname{Sh}(Kx) \end{cases} \quad (\text{IV-28})$$

Avec, $\omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} K^2$

La solution de l'équation du mouvement est donnée par:

$$w(x,t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) (C \cos(Kx) + D \sin(Kx) + E \operatorname{Ch}(Kx) + F \operatorname{Sh}(Kx)) \quad (\text{IV-29})$$

- $a > 0$

Les solutions des équations IV-26 et IV-27 sont données par:

$$\begin{cases} g(t) = A e^{+\sqrt{a}t} + B e^{-\sqrt{a}t} \\ f(x) = C e^{+j\alpha x} + D e^{-j\alpha x} + E e^{\alpha x} + F e^{-\alpha x} \end{cases} \quad (\text{IV-30})$$

Avec: $\alpha = \sqrt{j \sqrt{a \frac{\rho S}{EI}}}$

Remarque:

Dans les cas:

- $a = 0$: La solution (IV-25) est possible mais marginale car elle n'est considérée que dans le cas de conditions aux limites autorisant les mouvements sans déformation.
- $a > 0$: Conduit à la solution triviale dès que l'on impose le respect des conditions aux limites.

Donc, le mouvement vibratoire est introduit par le cas de la constante négative et a donc comme forme générale l'équation IV-29.

IV-3-1: Introduction des conditions aux limites

Les conditions aux limites dans notre cas sont les suivantes:

$x=0$:

$$\begin{cases} w(0, t) = 0 \dots \dots \dots \text{Déplacement transversal nul} \\ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0 \dots \dots \dots \text{Moment fléchissant nul} \end{cases} \quad (\text{IV-31})$$

$x=L$:

$$\begin{cases} w(L, t) = 0, \quad \forall t \quad \text{Déplacement transversal nul} \\ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0 \quad \forall t \quad \text{Moment fléchissant nul} \end{cases} \quad (\text{IV-32})$$

En imposant les conditions aux limites à l'équation IV-29:

$$\begin{cases} C + E = 0 \\ C - E = 0 \\ C \cos KL + D \sin KL + E \operatorname{Ch} KL + F \operatorname{Sh} KL = 0 \\ -C \cos KL - D \sin KL + E \operatorname{Ch} KL + F \operatorname{Sh} KL = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-33})$$

Les deux premières relations du système d'équation (IV-33) conduisent à:

$$C = E = 0$$

D'où l'on déduit le système suivant des deux dernières relations:

$$\begin{bmatrix} \sin KL & \operatorname{Sh} KL \\ -\sin KL & \operatorname{Sh} KL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-34})$$

Si le système linéaire IV-34 a un déterminant non nul, il admet une solution unique:

$$\begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-35})$$

Et l'équation IV-29 conduit à la solution triviale :

$$w(x, t) = 0 \quad (\text{IV-36})$$

Pour obtenir une solution non triviale, il est donc nécessaire que le déterminant du système IV-33 soit nul, Ce qui donne:

$$\sin KL \cdot \operatorname{Sh} KL = 0 \quad (\text{IV-37})$$

C'est-à-dire

$$\sin KL = 0 \quad (\text{IV-38})$$

L'équation IV-38 est l'équation aux fréquences propres, montre qu'il a une infinité de valeurs du nombre d'onde qui le vérifie:

$$K_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, \infty \quad (\text{IV-39})$$

Pour trouver les solutions, on résout le système linéaire IV-18 pour les valeurs de K_n qui annulent le déterminant:

$$\begin{bmatrix} 0 & \operatorname{Sh} KL \\ 0 & \operatorname{Sh} KL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-40})$$

C'est-à-dire $F = 0$ et D quelconque.

Et après la forme du déplacement vibratoire pour chaque indice n (la constante arbitraire D est supposée égale à 1):

$$w(x, t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (\text{IV-41})$$

Le mouvement vibratoire général est la somme de toutes les participations modales, soit:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (\text{IV-42})$$

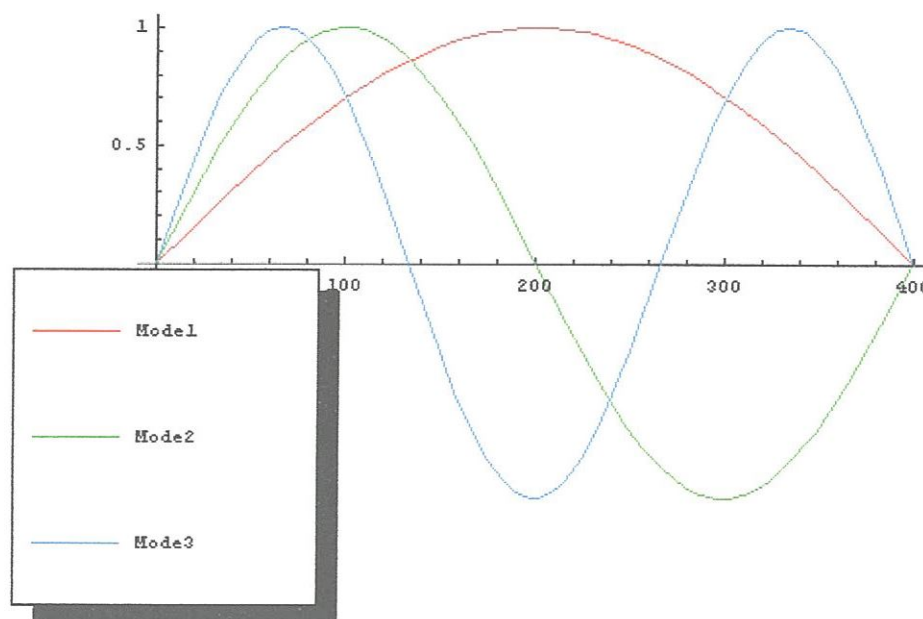


Figure IV.1: Formes propres de la poutre.

IV-4: Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est la méthode approchée la plus utilisée pour permettre le passage du milieu continu au milieu discret s'appuyant ainsi au calcul dynamique des structures. Cette méthode est basée sur une discrétisation spatiale en éléments finis.

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on doit suivre les étapes suivantes:

- Discrétisation spatiale du domaine en éléments finis.
- Formulation au niveau de l'élément.
- Formulation globale après assemblage.

L'objectif de ce paragraphe est de mettre en place les équations matricielles de notre problème, une poutre en flexion trois points.

IV-4-1: Modélisation (passage milieu continu - milieu discret)

Le problème à résoudre consiste en une poutre droite sollicitée en son milieu par une charge dont les extrémités reposent sur deux appuis simples.

Dans le modèle éléments finis, la poutre de longueur L est alors modélisée par n poutres élémentaires de rigidité de flexion $(EI)_i$, de longueur $l = \frac{L}{n}$ (figure IV-2).

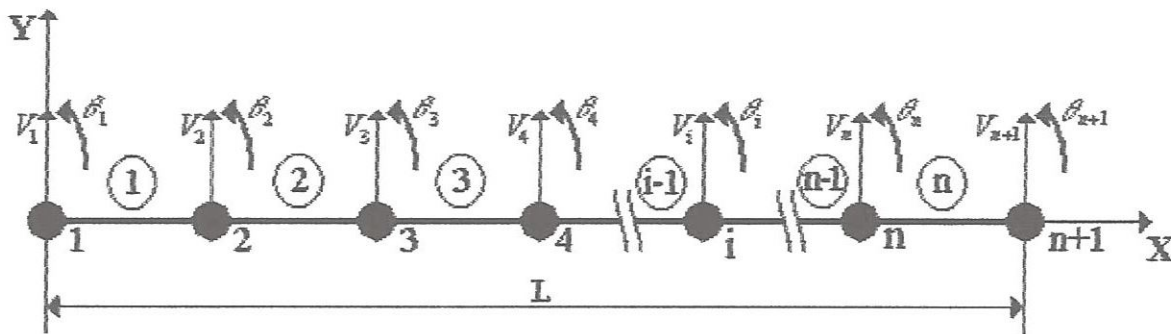


Fig.IV-2: Modélisation de la poutre en flexion

Par souci de commodité, on choisira un nombre d'éléments pairs afin de pouvoir appliquer la charge au centre de la poutre.

IV-4-2: Evaluation de l'énergie potentielle et cinétique

IV-4-2-1: Energie potentielle

Une poutre de longueur L pouvant se déformer en flexion dans le plan XY supposé être un plan principal de flexion.

L'hypothèse classique sur la déformation des sections droites sera admise, ce qui revient à négliger l'effort tranchant. Dans ce cas, la déformation d'une fibre située à une distance y de la fibre neutre s'exprime par la relation suivante:

$$\varepsilon = \frac{y}{R} \text{ Avec la courbure } \frac{1}{R}$$

Approximant la courbure par la dérivée seconde de la flèche w'' : $\varepsilon = y w''$

L'expression de la contrainte est donnée par:

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{y}{R} = E y w''$$

On caractérise l'état de contrainte de flexion par le moment fléchissant $(M = \int_s \sigma y ds)$

$$\text{D'où, } M = \int_s E \frac{y^2}{R} ds = \frac{EI}{R} = EI w''$$

La relation $\sigma = E \varepsilon$ représente la relation d'élasticité, intégrant sur la section droite, le potentiel élastique de déformation s'exprime sous la forme:

$$W = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} E y^2 w'^2$$

D'où l'expression de l'énergie de déformation:

$$U = \int_v W dv = \frac{1}{2} \int_0^L E \left[\int_s y^2 ds \right] w'^2 dx$$

Soit:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L w'^2 dx \tag{IV-43}$$

Avec: I l'inertie de la section pour le plan principal de flexion considéré, soit:

$$I = \int_s y^2 ds$$

IV-4-2-2: Energie cinétique

Une poutre en flexion dans le plan XY, l'énergie cinétique sans effets secondaires est donnée sous la forme:

$$T = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \dot{w}^2 dx \tag{IV-44}$$

IV-4-2-3: Matrices de rigidité et de masse élémentaires K^e et M^e

Les matrices de rigidité et de masse sont spécifiques à la méthode des éléments finis. Pour calculer la matrice de rigidité et de masse élémentaires K^e et M^e , il faut d'abord définir le type du modèle utilisé pour la poutre: dans le cas d'une poutre de BERNOULLI, avec effort de cisaillement négligé.

Le plus simple élément poutre en flexion est représenté en figure IV-3. Celui ci est caractérisé par un degré de liberté de translation transversale et un degré de liberté de rotation à chaque nœud, soit quatre degrés de liberté par élément.

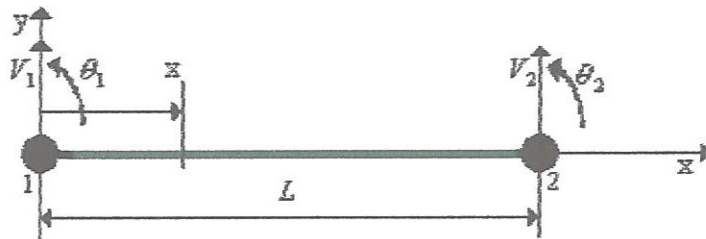


Figure.IV-3: Élément poutre en flexion

L'expression de la flèche w en un point de l'élément à une distance x prendra la forme cubique suivante:

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

En fonction des coordonnées modales (V_1, θ_1, V_2 et θ_2), $w(x)$ peut se mettre sous la forme matricielle suivante (degrés de liberté):

$$w(x) = N(x)\{\varphi\} \quad \varphi = \left\{ \begin{array}{l} V_1 \\ \theta_1 \\ \text{---} \\ V_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Nœud 1} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{Nœud 2} \end{array}$$

Ou encore sous forme matricielle condensée comme suit:

$$w(x) = [N]\{\varphi\} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Avec les fonctions de formes:

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{cases}$$

La matrice de rigidité élémentaire est déterminée à partir de l'énergie de déformation d'un élément en flexion, équation IV-43:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_f^2}{EI} dx$$

Avec

$$-M_f = EI w'' = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

Avec:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = N_1''(x)V_1 + N_2''(x)\theta_1 + N_3''(x)V_2 + N_4''(x)\theta_2$$

D'après le théorème de Castigliano, la relation entre charge et déplacement est donnée par:

$$F_i = \frac{\partial U_i}{\partial V_i} = \int_0^L \frac{\partial}{\partial V_i} \left(\frac{1}{2EI} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx$$

$$F_i = EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial V_i} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx$$

D'où;

$$F_i = EI \int_0^L \left[N_1''(x)V_1 + N_2''(x)\theta_1 + N_3''(x)V_2 + N_4''(x)\theta_2 \right] N_i''(x) dx \Rightarrow$$

$$K_{ij} = EI \int_0^L N_i''(x) N_j''(x) dx$$

Les matrices de rigidité et de masse élémentaires K^e et M^e sont données par:

$$\begin{cases} K^e = EI \int_0^L N_{,xx}^T N_{,xx} dx \\ M^e = \rho S \int_0^L N^T N dx \end{cases}$$

$$M^e = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e \end{bmatrix}$$

Les matrices de rigidité de l'élément poutre dans les cas non endommagé et endommagé sont données par:

- Cas de l'élément poutre non endommagé

$$K^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

- Cas de l'élément poutre endommagé

$$K_D^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12(1-D_1) & 6L(1-D_1) & -12 & 6L \\ 6L(1-D_1) & 4L^2(1-D_1) & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12(1-D_2) & -6L(1-D_2) \\ 6L & 2L^2 & -6L(1-D_2) & 4L^2(1-D_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11D_1}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22D_2}^e \end{bmatrix}$$

IV-5-1: Problème aux valeurs et vecteurs propres

a) Cas de la structure non endommagée

La poutre est modélisée en quatre poutres élémentaires de rigidité de flexion (EI) et de longueur $l = L/4$, l'introduction des conditions aux limites pour une poutre simplement appuyée ($V_1 = V_5 = 0$), les matrices de rigidité et de masse globales deviennent:

$$K^G = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$M^G = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 \\ -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 \\ 0 & -13l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Après définition des matrices de masse et de rigidité globales, en prenant la solution harmonique $x(t) = X e^{i\omega t}$, le système IV-45 prend la forme suivante:

$$[-\omega^2 M^G + K^G] \{X\} e^{i\omega t} = \{0\} \quad \text{(IV-46)}$$

Soit:

$$\left\{ \omega^2 \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 \\ -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 \\ 0 & -13l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \\ V_4 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les pulsations propres sont solutions du polynôme caractéristique:

$$\det |K^G - M^G \omega^2| = 0 \tag{IV-47}$$

Modes		1	2	3	4	5	6	7	8
Pulsations exactes (rad/s)		9.87	39.5	88.82	157.91	246.74	355.6	483.61	631.65
M. E.F	Pulsations (rad/s) (2 éléments)	9.908	43.81	110.14	200.8				
	Erreurs %	0.30	10.91	24	27.16				
	Pulsations (rad/s) (3 éléments)	9.88	39.94	98.69	183.32	328.01	451.8		
	Erreurs %	0.1	1.11	11.11	16.09	32.93	27.04		
	Pulsations (rad/s) (4 éléments)	9.87	39.63	90.44	175.27	287.59	440.5	660.02	803.19
	Erreurs %	0.02	0.32	1.82	10.99	16.55	23.88	36.47	27.15

Tableau IV-1: Comparaison des pulsations propres exactes et obtenues par M.E.F.

La solution approchée donnée par la discrétisation à quatre éléments totalisant huit degrés de liberté est comparée avec la solution exacte, tableau IV-1. On y constate que l'approximation représente parfaitement les trois premiers modes, le quatrième y approché avec une erreur ne dépassant pas 11 %.

b) Cas de la structure endommagée

D'après l'étude de l'évolution de l'endommagement faite au chapitre III, on a montré que l'endommagement prend des valeurs maximales sur les faces extrêmes tendues de la poutre dans tous les niveaux de sollicitations. Ces valeurs spécifiques ont été introduites systématiquement dans les matrices de rigidités élémentaires pour chaque section.

En prenant cette fois dans l'équation IV-45, $x(t) = X_D e^{i\omega_D t}$ le problème aux valeurs propres de la poutre devient:

$$[K_D^G - \omega_D^2 M^G] \{X_D\} = \{0\} \quad (IV-48)$$

Avec:

K_D^G : Matrice de rigidité globale à un stade d'endommagement.

ω_D : Pulsations propres à un stade d'endommagement fixé.

$$K_D^G = \begin{bmatrix} \frac{4EI(1-D_1)}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-6EI}{l^2} & \frac{24EI(1-D_2)}{l^3} & 0 & \frac{-12EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{8EI(1-D_2)}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{l^2} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{24EI(1-D_3)}{l^3} & 0 & \frac{-12EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{8EI(1-D_3)}{l} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI}{l^2} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{24EI(1-D_4)}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{8EI(1-D_4)}{l} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{4EI(1-D_5)}{l} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont obtenues par la résolution du polynôme caractéristique, soit:

$$\det [K_D^G - \omega_D^2 M^G] = 0 \quad (IV-49)$$

Les pulsations propres sont obtenues par une résolution numérique des équations IV-47 et IV-49. Les vecteurs propres sont ainsi déterminées par la résolution des deux systèmes d'équations IV-46 et IV-48, respectivement dans le cas non endommagé et endommagé avec la méthode d'élimination de Gauss sous **Mathematica** [14].

IV-5-2: Présentation des formes propres endommagée et non endommagée

De part l'expression IV-48, la variation des propriétés mécaniques introduite par l'endommagement de fatigue de la structure influencera inévitablement les formes propres (figure IV-8 et IV-9).

IV-5-3: Extraction des facteurs de perte des énergies modales

Dans un essai de flexion cyclique d'un matériau composite unidirectionnel, la dissipation d'énergie peut être caractérisée par le suivi de la perte de l'énergie modale. Cette perte est due essentiellement aux trois états gouvernants les mécanismes d'endommagement de fatigue en flexion [17] (voir chapitre II), dépendant de l'étape d'endommagement.

Le calcul des facteurs de perte des énergies modales pour les deux premiers modes propres de vibration de la structure est accompli par l'évaluation du rapport des énergies des déformations élastiques respectivement endommagée et non endommagées.

L'énergie de déformation modale de la poutre pour le cas non endommagé est donnée par:

$$U_n = \frac{1}{2} [\varphi_n]^T [K^G] [\varphi_n]$$

Avec:

- K^G : Matrice de rigidité (cas non endommagé)
- φ_n : Vecteur propre (cas non endommagé)

L'énergie de déformation modale de la poutre à un stade d'endommagement fixe est donnée par:

$$U_{nD} = \frac{1}{2} [\varphi_{nD}]^T [K_D^G] [\varphi_{nD}]$$

Avec:

- K_D^G : Matrice de rigidité à un stade d'endommagement fixe
- φ_{nD} : Vecteur propre à un stade d'endommagement fixe

Le facteur de perte de l'énergie modale pour différents stade d'endommagement est donné par:

$$\eta_{nD} = \frac{\Delta U_n}{U_n} = \frac{U_n - U_{nD}}{U_n}$$

Avec:

- U_n : Énergie de déformation modale (cas non endommagé)
- U_{nD} : Énergie de déformation modale (cas endommagé)

IV-5-4: Equation de vibrations libres de la poutre [18]

Dans le cas d'une poutre composite unidirectionnelle réaliste de longueur L , de section S , de masse volumique ρ et de module d'élasticité longitudinal E . Faiblement amortie, sollicitée en flexion pure appuyée simplement.

La réponse libre est donnée par l'équation suivante [18]:

$$w(x, t) = \frac{2L}{a\pi^2} \frac{I}{\rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right) \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (\text{IV-53})$$

IV-5-5: Equation des vibrations forcées de la poutre

Dans le cas d'une poutre composite unidirectionnelle réaliste, faiblement amortie, sollicitée en flexion pure appuyée simplement et excitée par une force $PCos\omega t$ appliquée en son milieu ($x_0 = L/2$). La réponse forcée est donnée par l'équation suivante [18]:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{\rho S L} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi_n\omega_n\omega)} \sin\frac{n\pi}{L} x_0 \sin\frac{n\pi}{L} x \cos\omega t \quad (\text{IV-54})$$

Avec:

- ω_n : Pulsations propres
- ω : Pulsation d'excitation
- P : Amplitude de la force d'excitation
- ξ_n : Taux d'amortissement
- $j^2 = -1$

Remarque

Il est à noter que l'étude est menée pour le cas des vibrations libres et le cas des vibrations forcées de la poutre dans son état saine et endommagée pour différents dosages de cycles.

IV-6: Résultats et discussion

Nous présentons les résultats obtenus dans ce chapitre en utilisant les résultats de l'évolution de l'endommagement présentés dans le chapitre III relatifs aux:

Cas 1: Eprouvette en composite verre / époxy

Cas 2: Eprouvette en composite carbone / époxy

L'évolution des quatre premières pulsations propres sont représentées dans les figures (IV-4, IV-5, IV-6, IV-7 pour le *cas 1*) et (IV-15, IV-16, IV-17, IV-18 pour le *cas 2*). Ces graphes illustrent la décroissance des pulsations propres en fonction du nombre de cycles. Les valeurs de la première et de la troisième pulsation propre correspondent à la rotation dans le plan XY. La variation induite sur la première pulsation est plus significative que sur les autres, donc l'effet de l'endommagement est très remarquable sur cette pulsation.

Les changements des formes propres pour les deux premiers modes propres d'un stade d'endommagement à un autre sont représentés dans les figures IV-8, IV-9 pour le *cas 1* uniquement pour illustration. On remarque que les formes propres subissent un élargissement avec l'augmentation de nombre de cycles à cause de la perte de rigidité du matériau.

Les facteurs de perte des énergies modales pour les deux premiers modes propres de vibration sont représentés dans les figures IV-10 et IV-11 pour le *cas 1*. On remarque une augmentation importante du facteur de perte de l'énergie pour le premier mode, ce ci est dû à une variation décroissante rapide de la première pulsation propre en fonction du nombre de cycles.

Nous avons étudié les vibrations libres de la poutre dans le cas non endommagé et dans différents stades d'endommagement. Les résultats obtenus des réponses temporelles aux points $X=L/4$ et $X=L/2$ sont représentés respectivement dans les figures (IV-12, IV-13 pour le *cas 1*) et (IV-19, IV-20 pour le *cas 2*). On a constaté une augmentation significative de la période et une augmentation de l'amplitude d'un stade d'endommagement à un autre à cause de la perte de rigidité du matériau.

Les figures IV-14 et IV-21, représentent respectivement les réponses forcées de la poutre dans les *cas 1* et *cas 2*, dans les cas non endommagés et endommagés, il est clair qu'on a une nette augmentation de l'amplitude avec un ripage (shift) des fréquences propres dans le domaine fréquentiel.

Résultats Cas 1: Composite en Verre / Epoxy

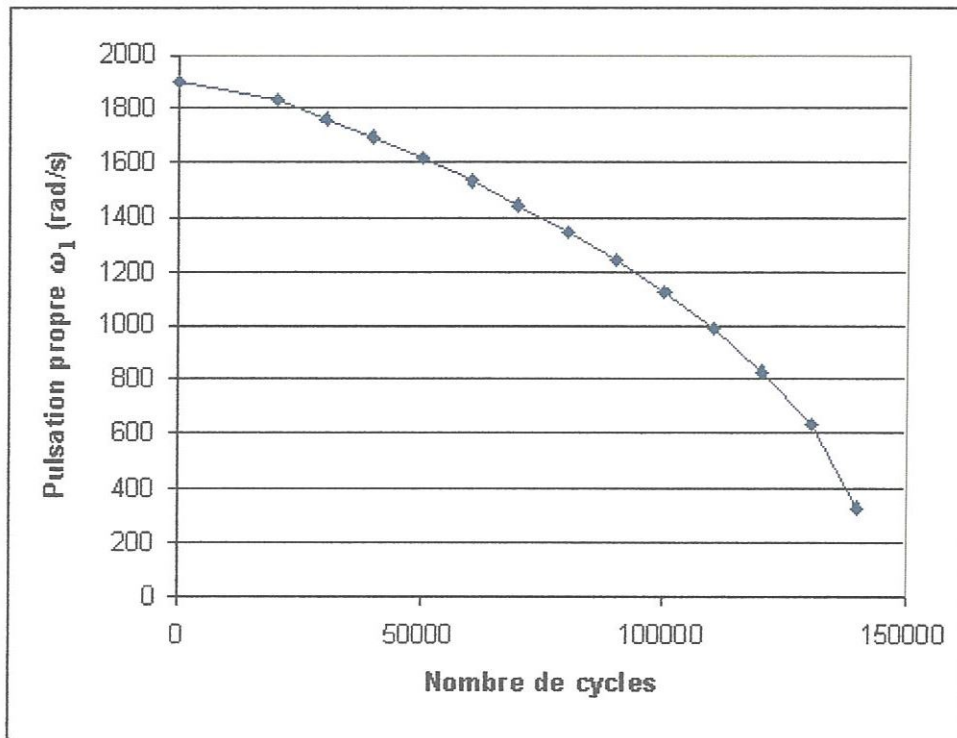


Figure. IV-4: Evolution de la pulsation propre ω_1 en fonction du nombre de cycles.

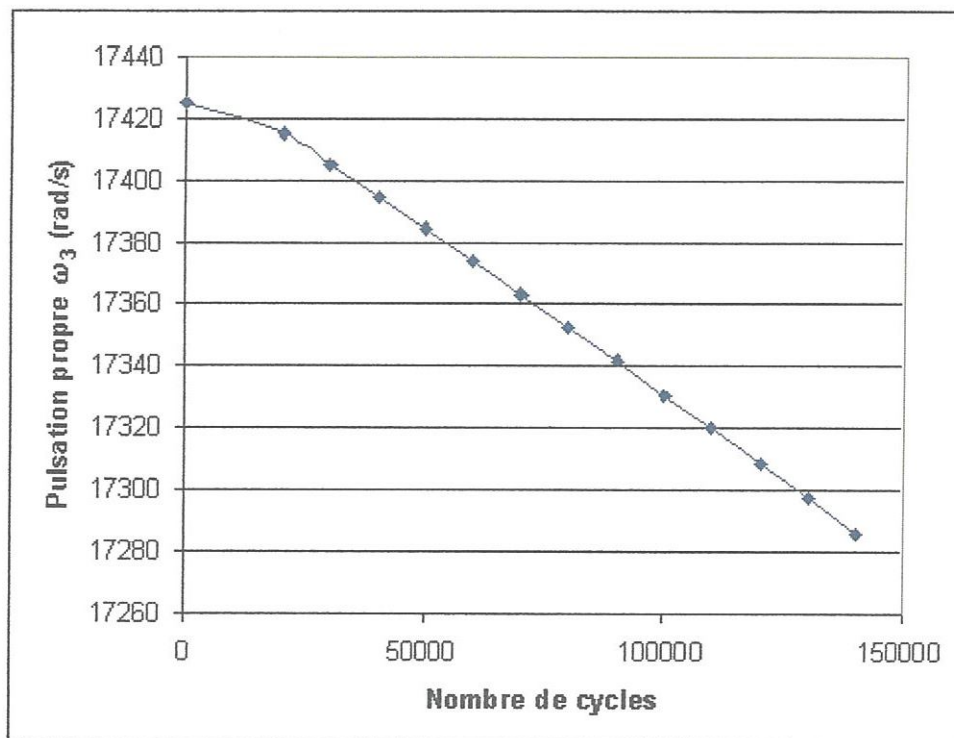


Figure. IV-5: Evolution de la pulsation propre ω_3 en fonction du nombre de cycles.

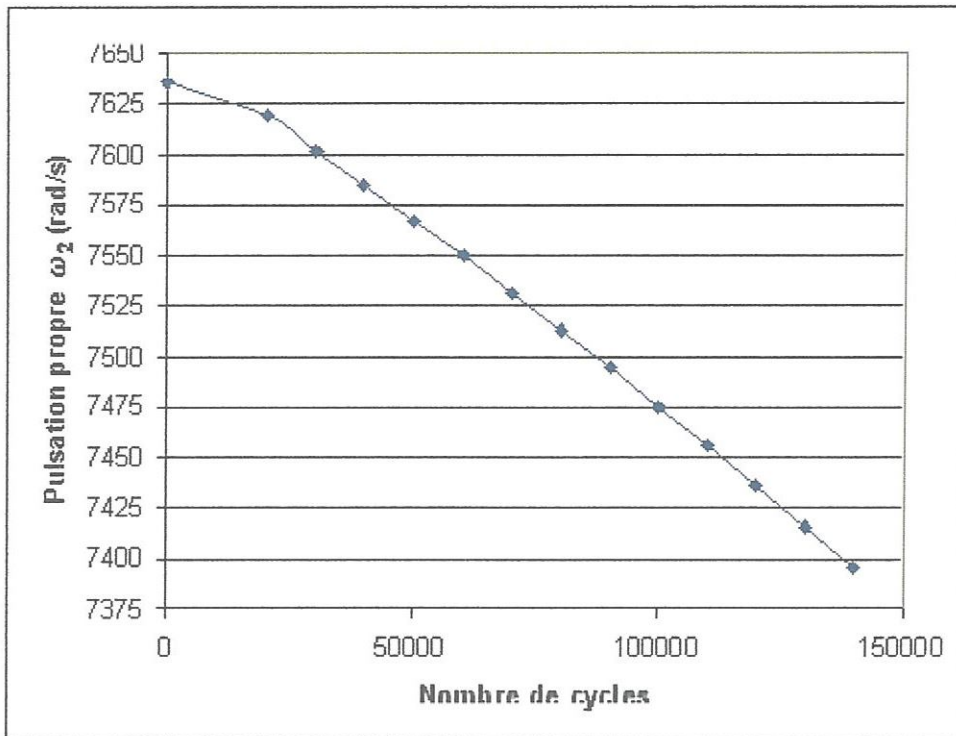


Figure. IV-6: Evolution de la pulsation propre ω_2 en fonction du nombre de cycles.

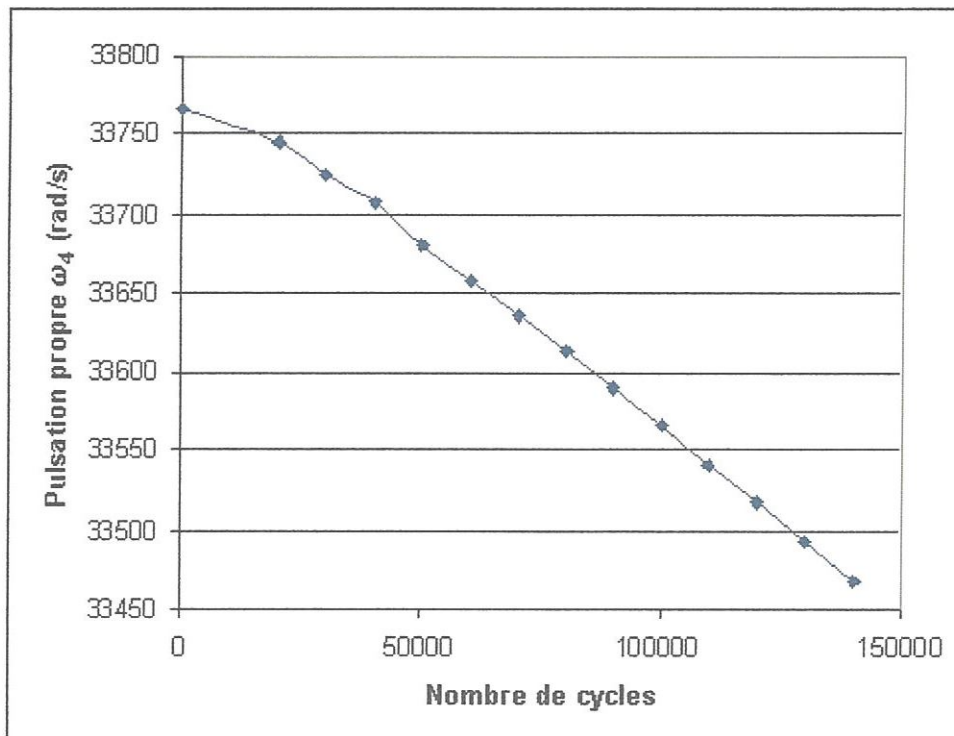


Figure. IV-7: Evolution de la pulsation propre ω_4 en fonction du nombre de cycles.

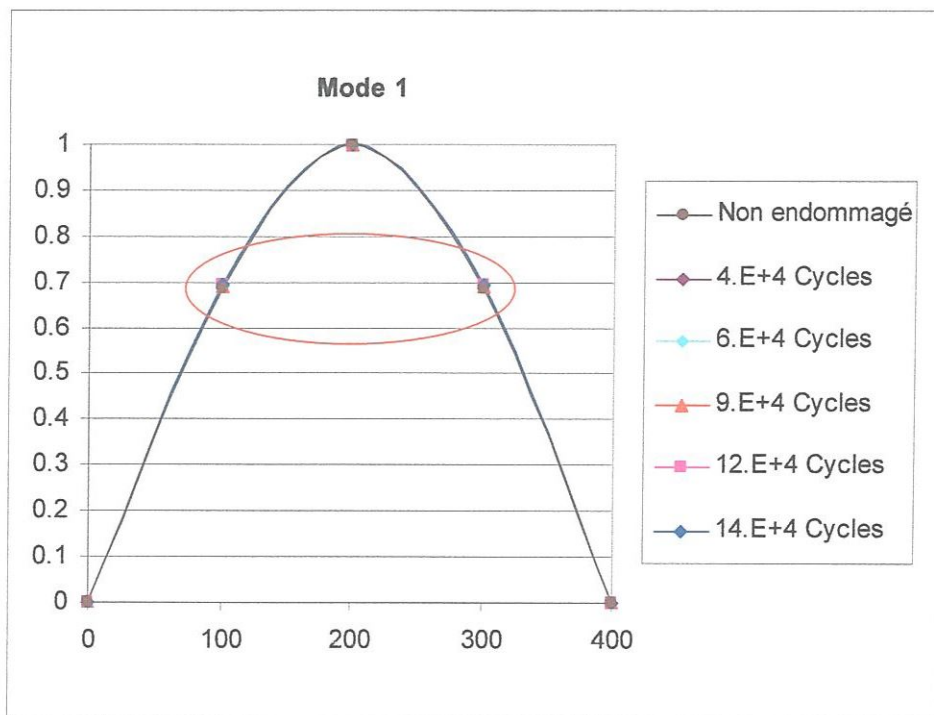


Figure.IV-8a: Premier mode propre:
Cas non endommagé et endommagés à différents dosages.

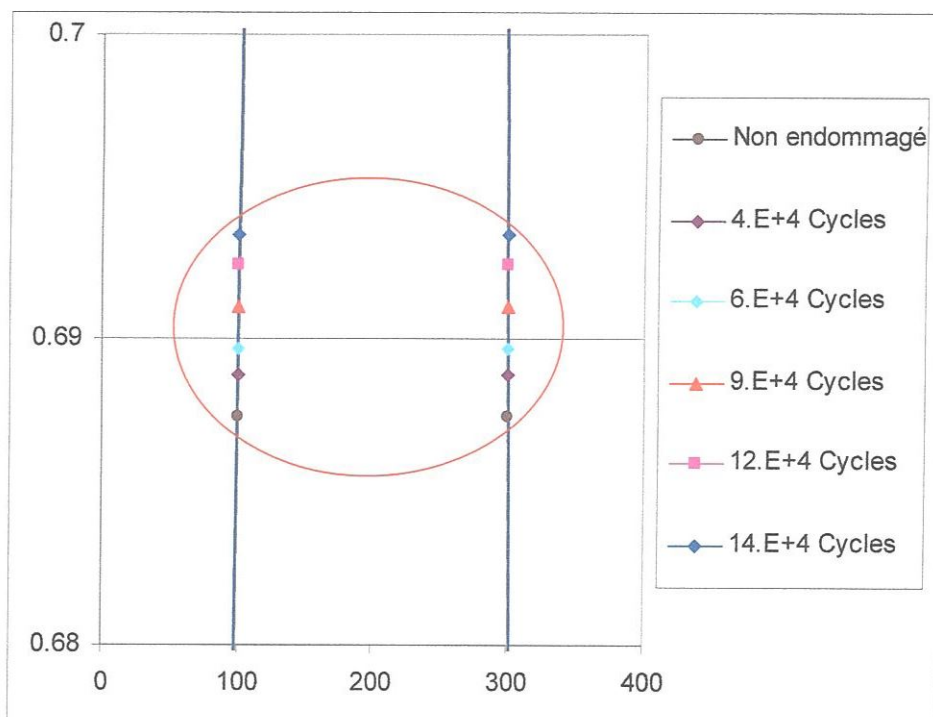


Figure.IV-8b: Détails de la zone sélectionnée.

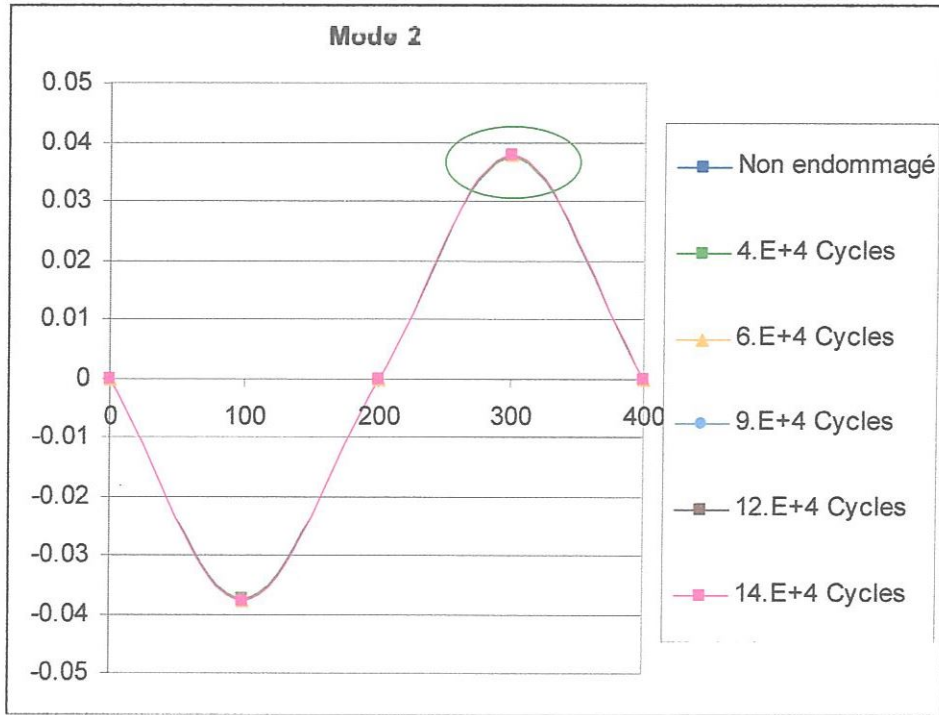


Figure.IV-9a: Second mode propre:
Cas non endommagé et endommagés à différents dosages.

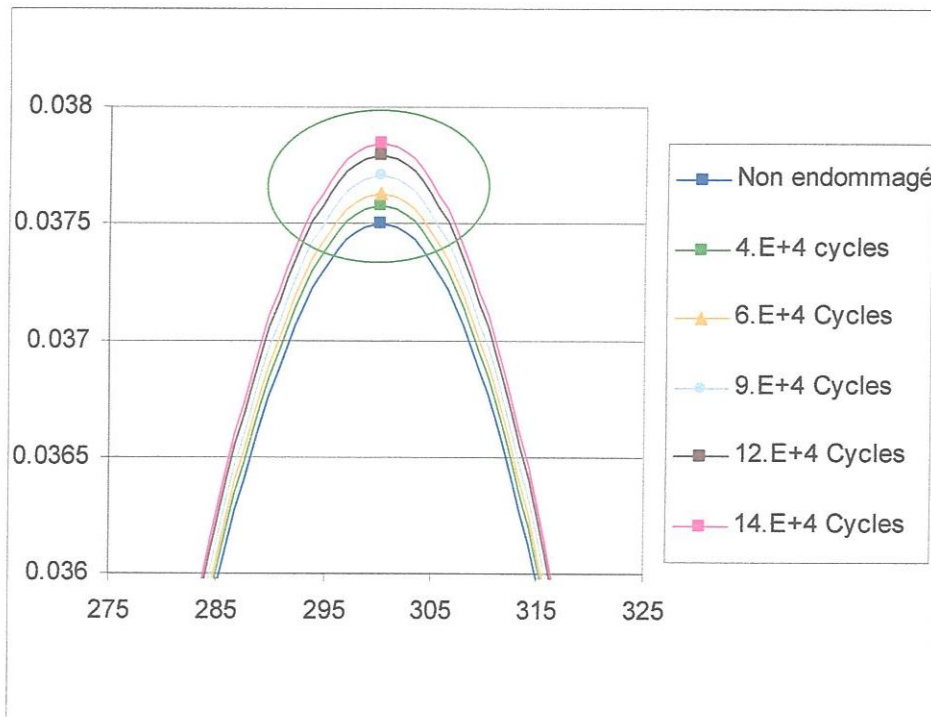


Figure.IV-9b: Détails de la zone sélectionnée.

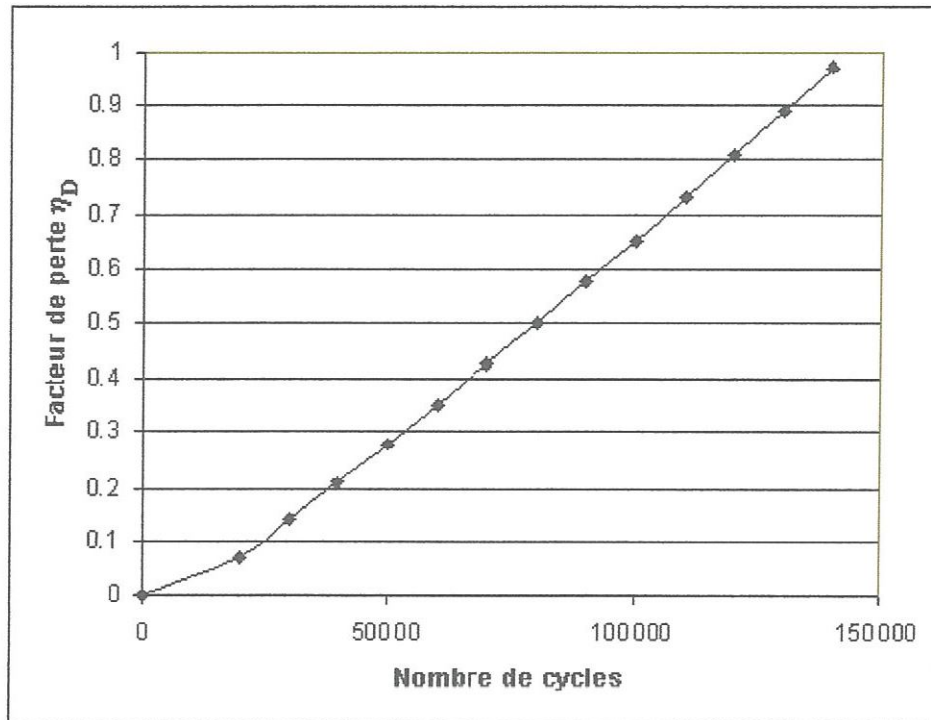


Figure.IV-10: Facteur de perte de l'énergie modale, premier mode (ω_1) en fonction du nombre de cycles.

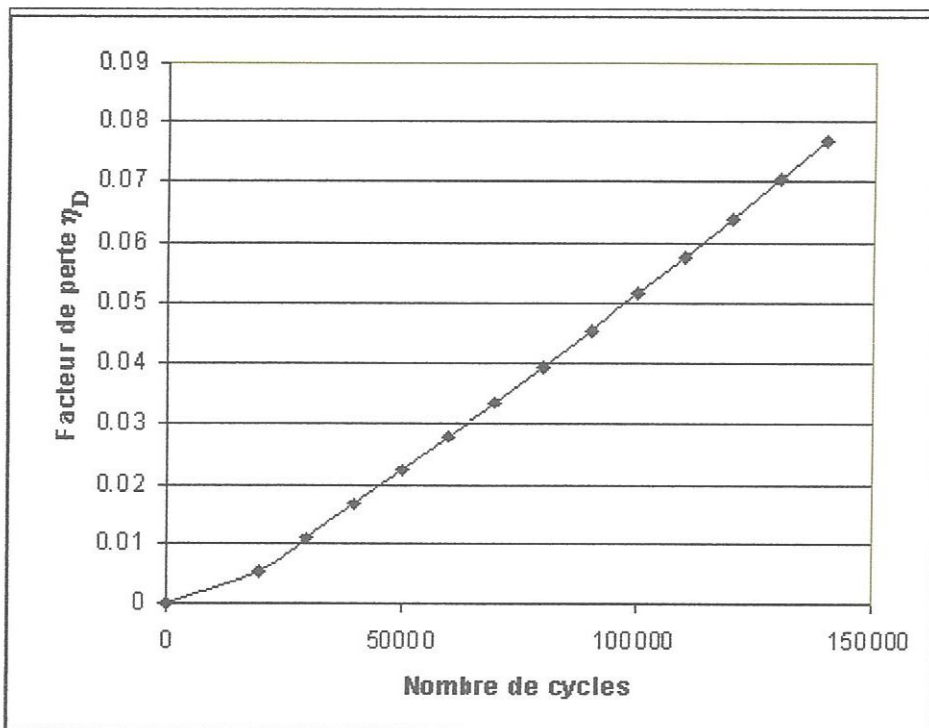


Figure.IV-11: Facteur de perte de l'énergie modale, second mode (ω_2) en fonction du nombre de cycles.

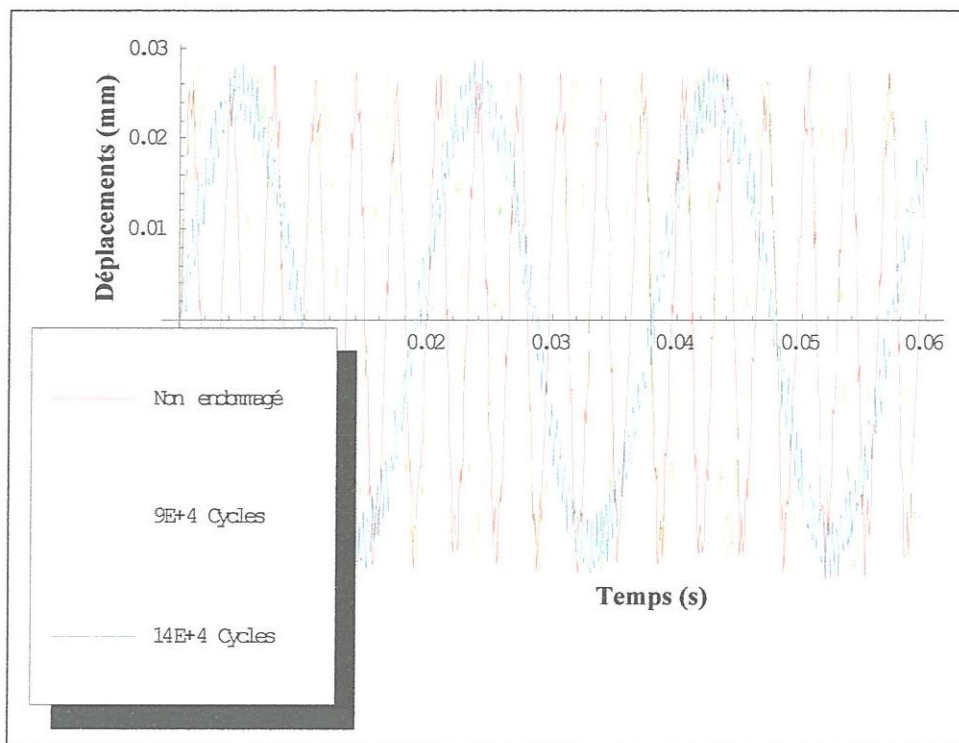


Figure.IV-12a: Réponses temporelles libres au point $X=L/4$: Cas non endommagé et endommagés à différents dosages de cycles.

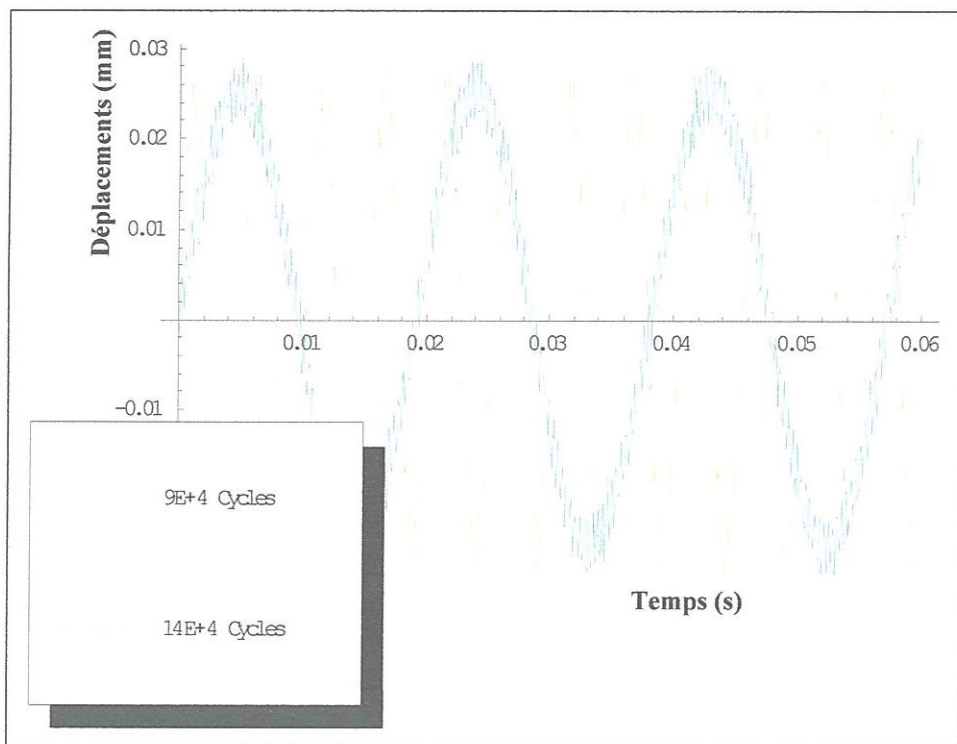


Figure.IV-12b: Réponses temporelles libres au point $X=L/4$: Cas intermédiaires d'endommagement fixés.

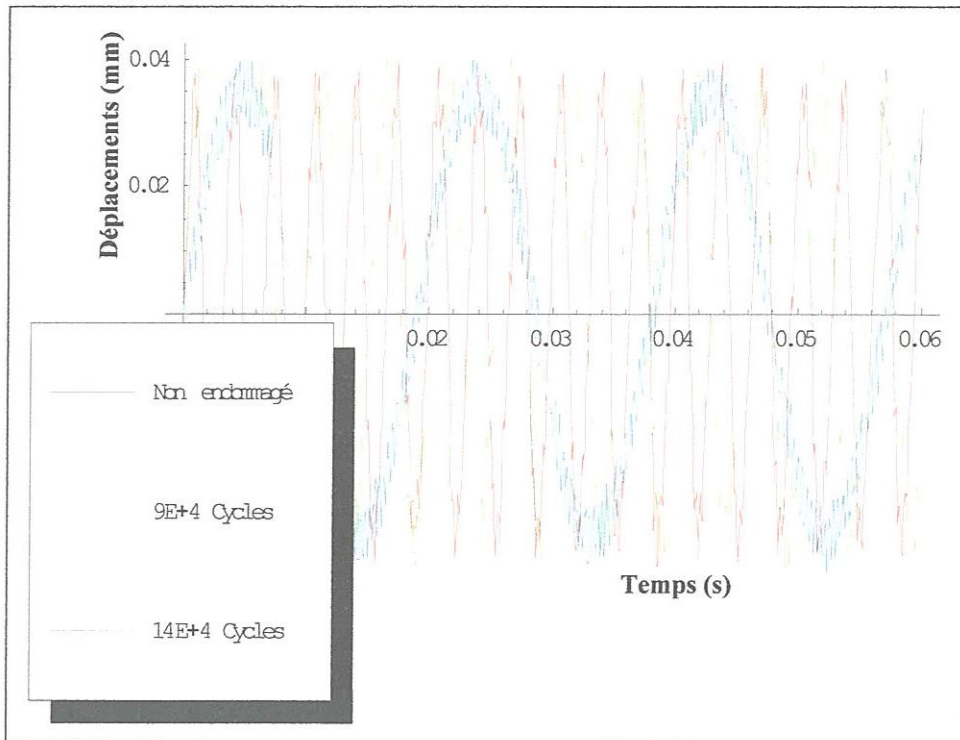


Figure.IV-13a: Réponses temporelles libres au point $X=L/2$:
Cas non endommagé et endommagés à différents dosages de cycles.

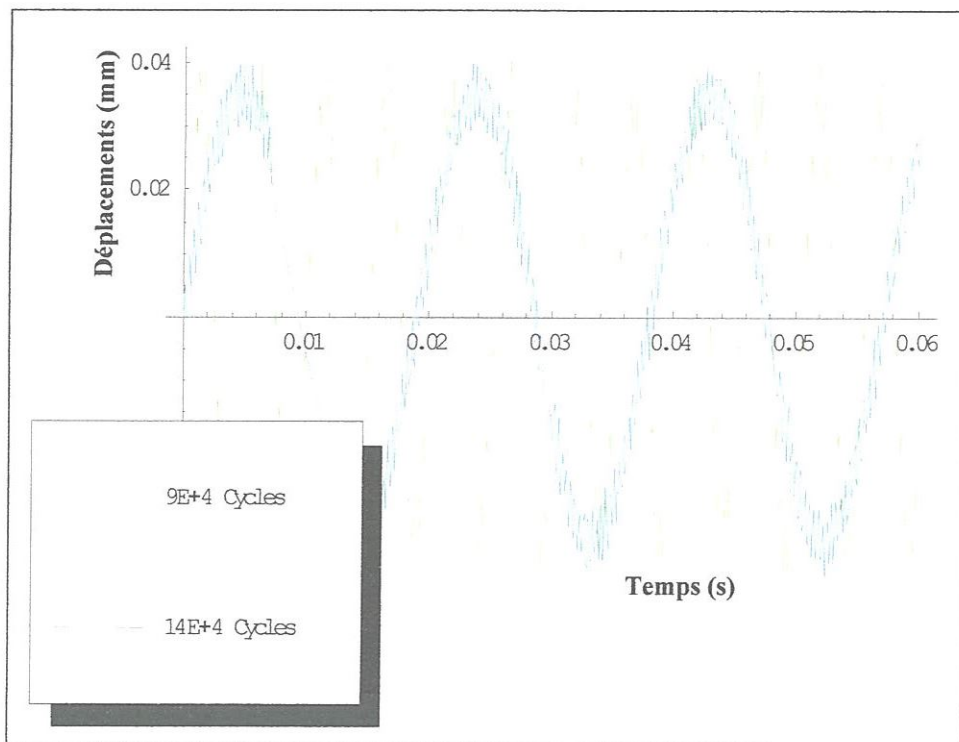


Figure.IV-13b: Réponses temporelles libres au point $X=L/2$:
Cas intermédiaires d'endommagement fixés.

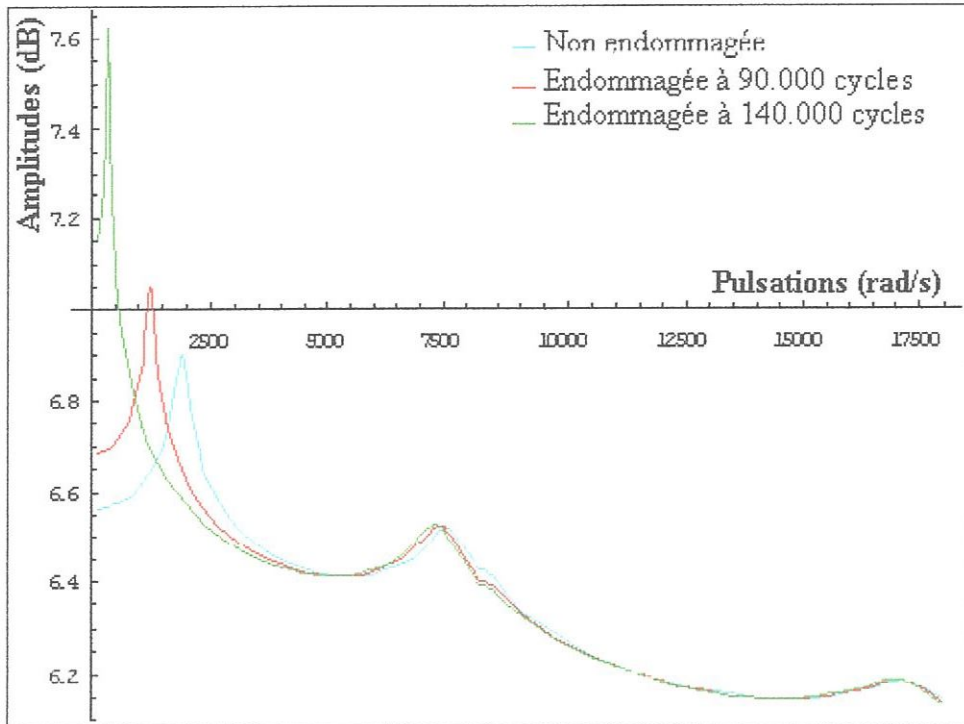


Figure.IV-14: Réponses fréquentielles à $X=L/2$:
Cas non endommagé et endommagés, $\xi_n = 0.054$.

Résultats Cas 2: Composite en Carbone / Epoxy

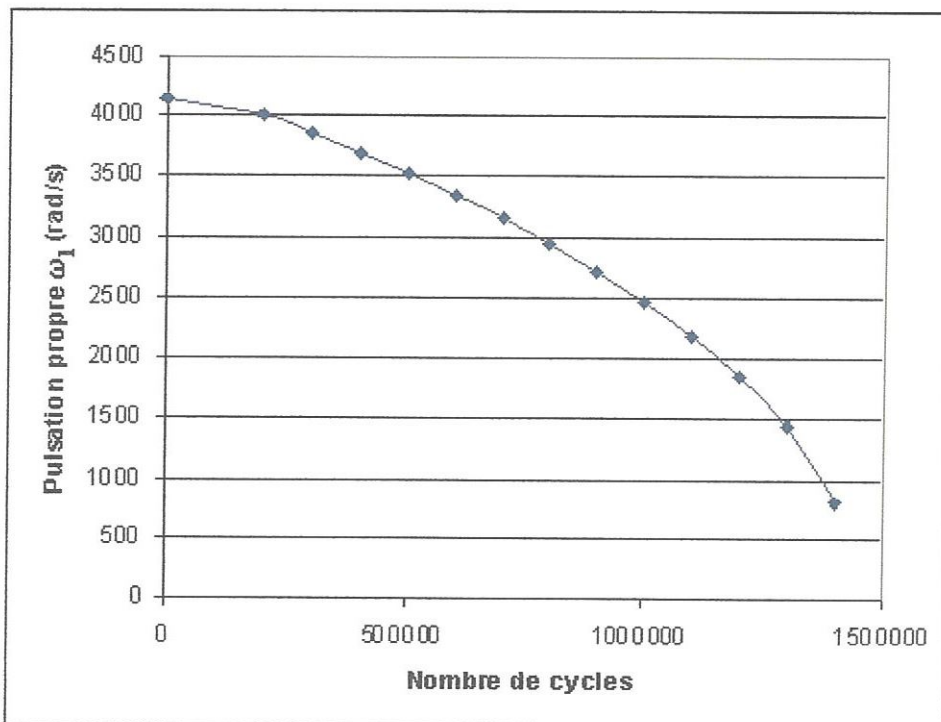


Figure. IV-15: Evolution de la pulsation propre ω_1 en fonction du nombre de cycles.

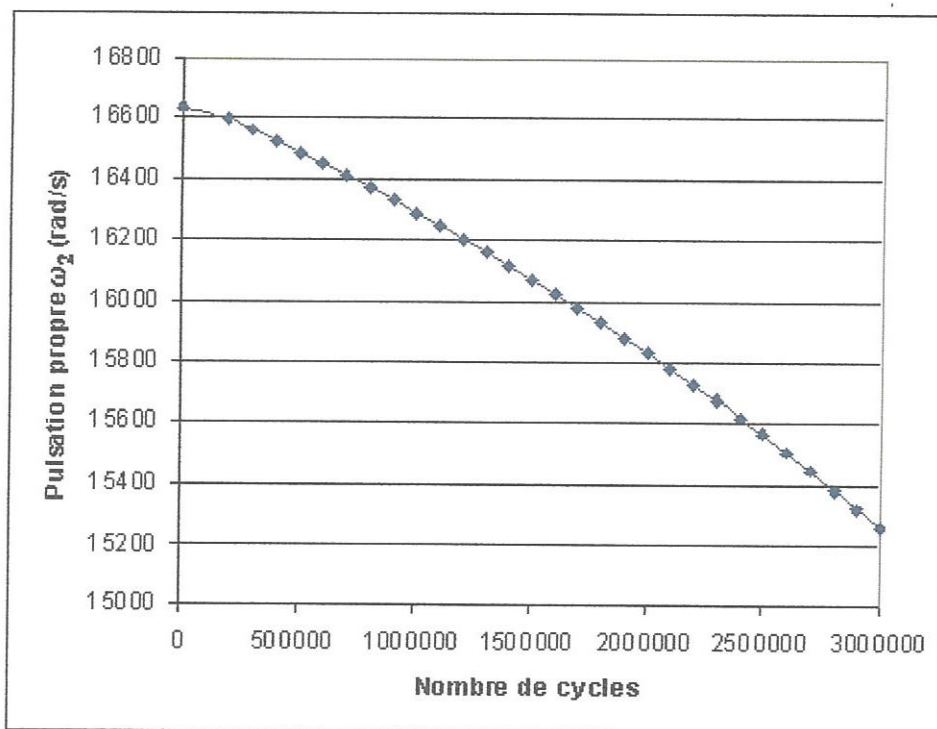


Figure. IV-16: Evolution de la pulsation propre ω_2 en fonction du nombre de cycles.

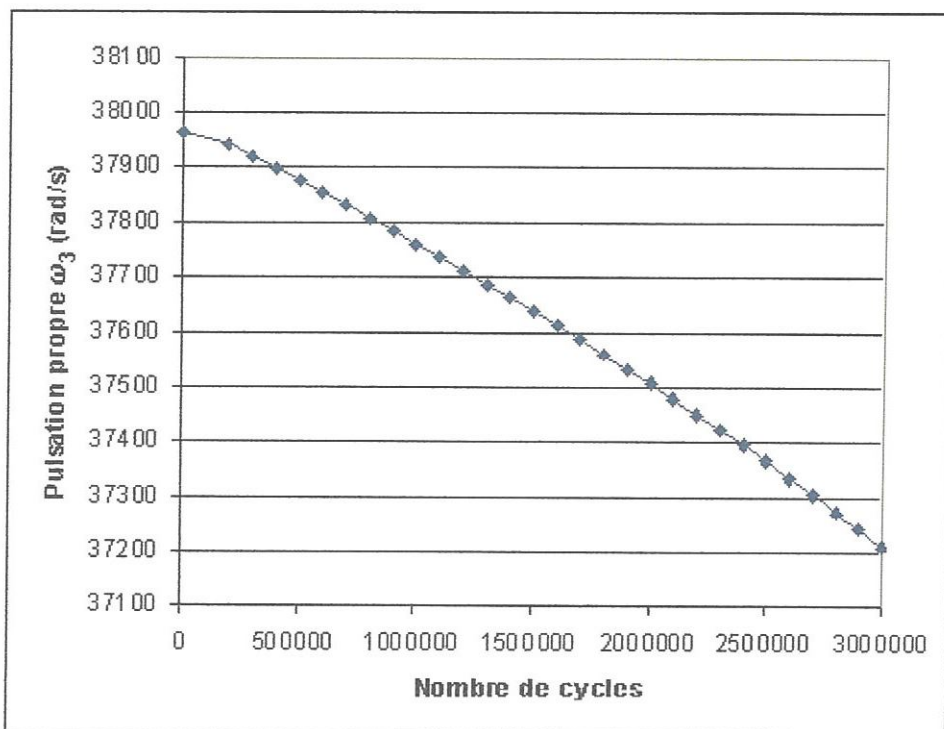


Figure. IV-17: Evolution de la pulsation propre ω_3 en fonction du nombre de cycles.

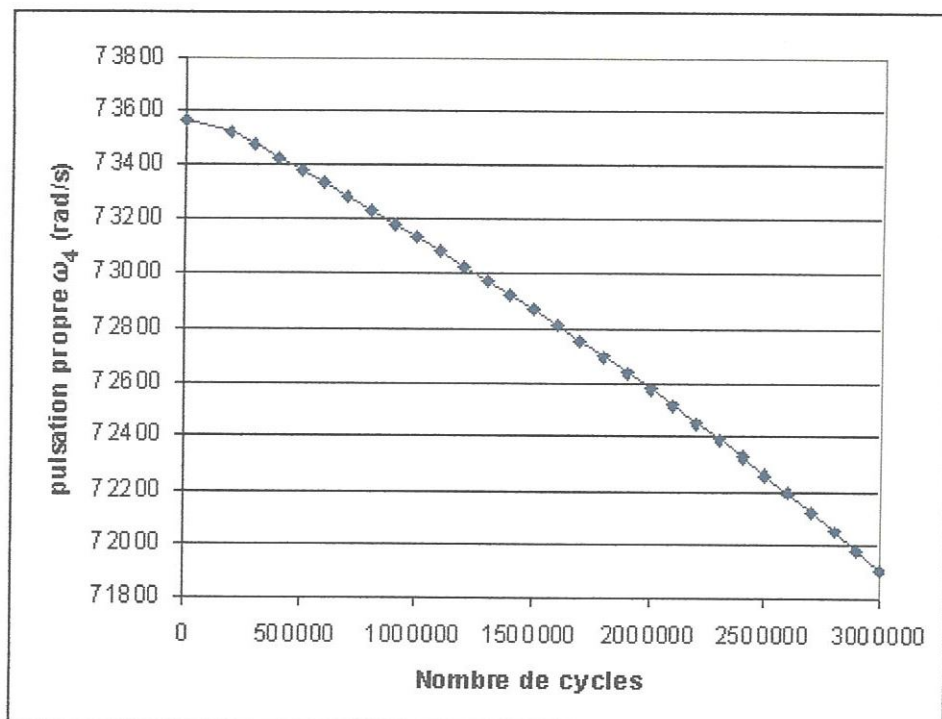


Figure. IV-18: Evolution de la pulsation propre ω_4 en fonction du nombre de cycles.

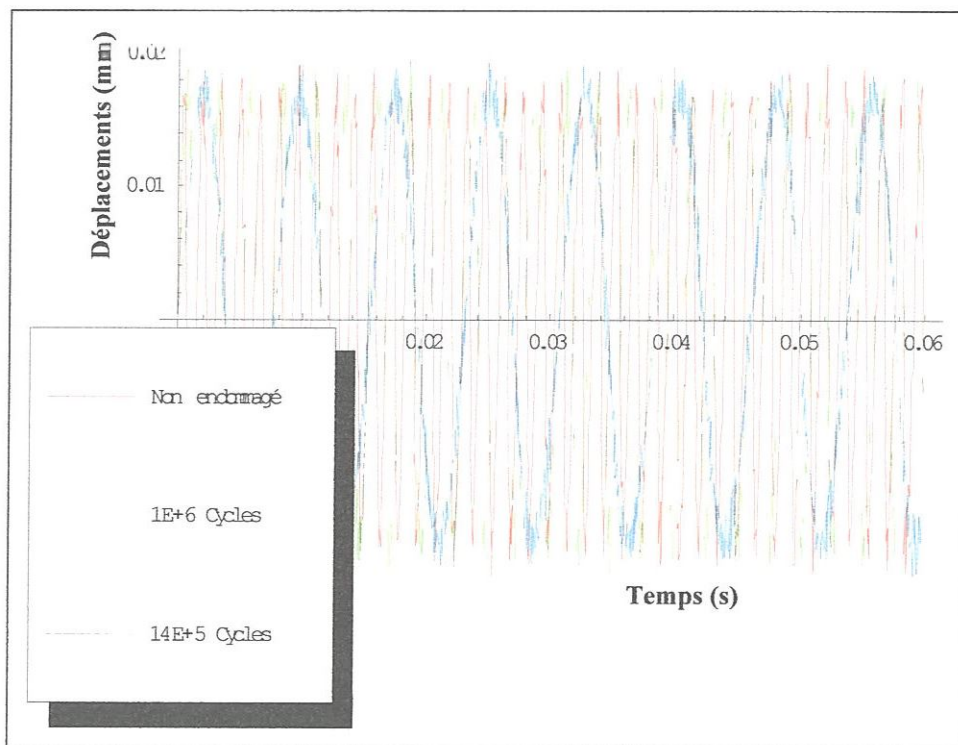


Figure.IV-19a: Réponses temporelles libres au point X=L/4: Cas non endommagé et endommagés à différents dosages de cycles.

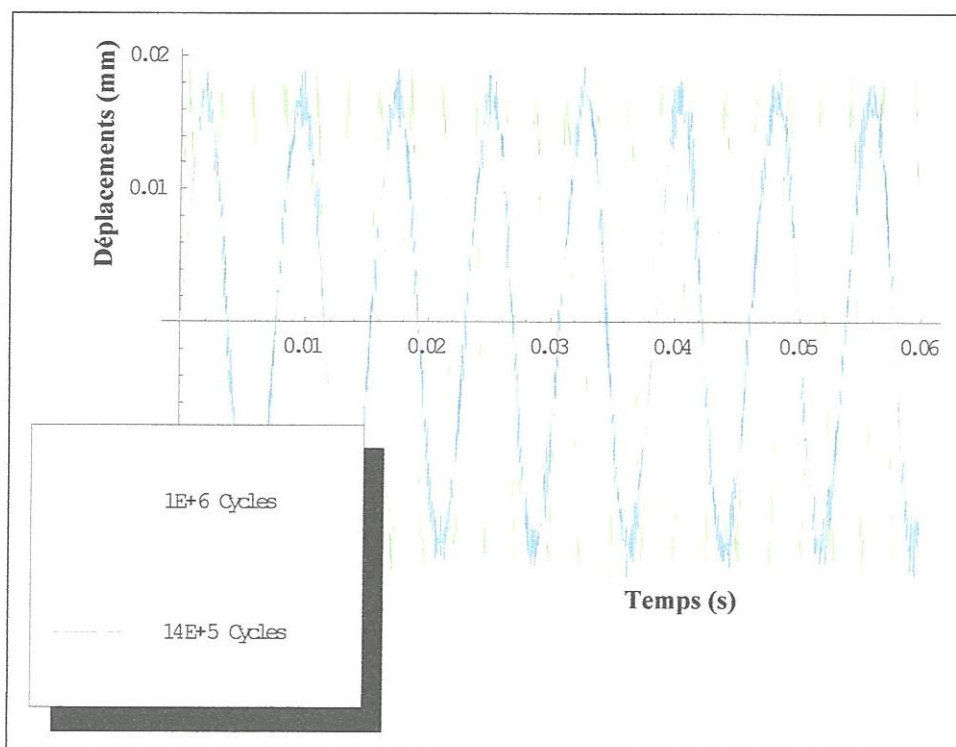


Figure.IV-19b: Réponses temporelles libres au point X=L/4: Cas intermédiaires d'endommagement fixés.

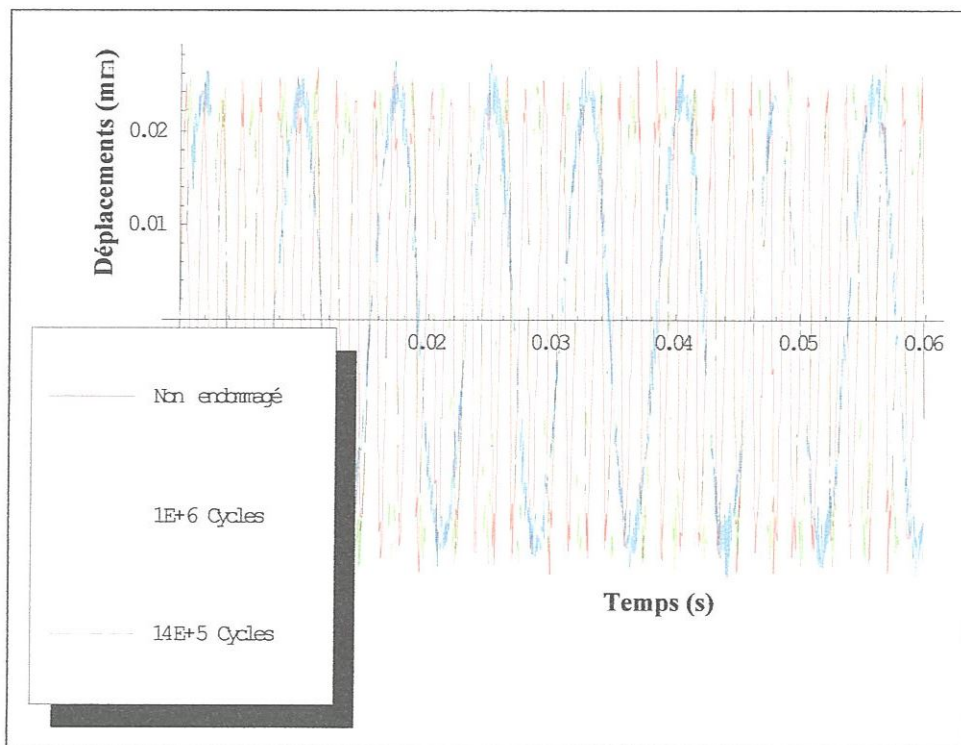


Figure.IV-20a: Réponses temporelles libres au point $X=L/2$: Cas non endommagé et endommagés à différents dosages de cycles.

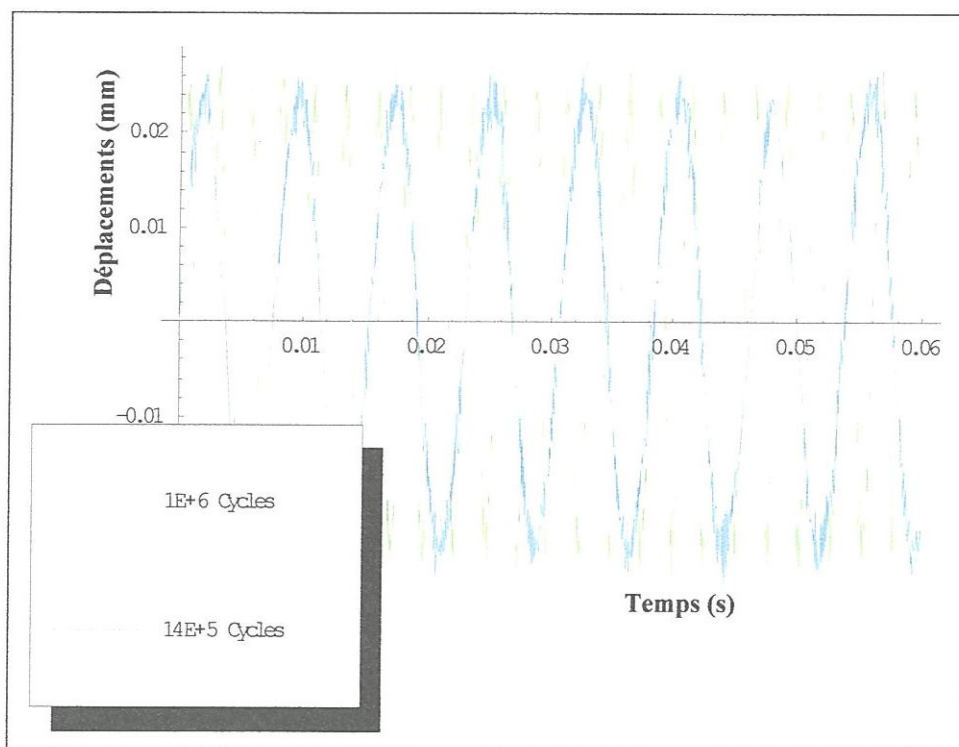


Figure.IV-20b: Réponses temporelles libres au point $X=L/2$: Cas intermédiaires d'endommagement fixés.

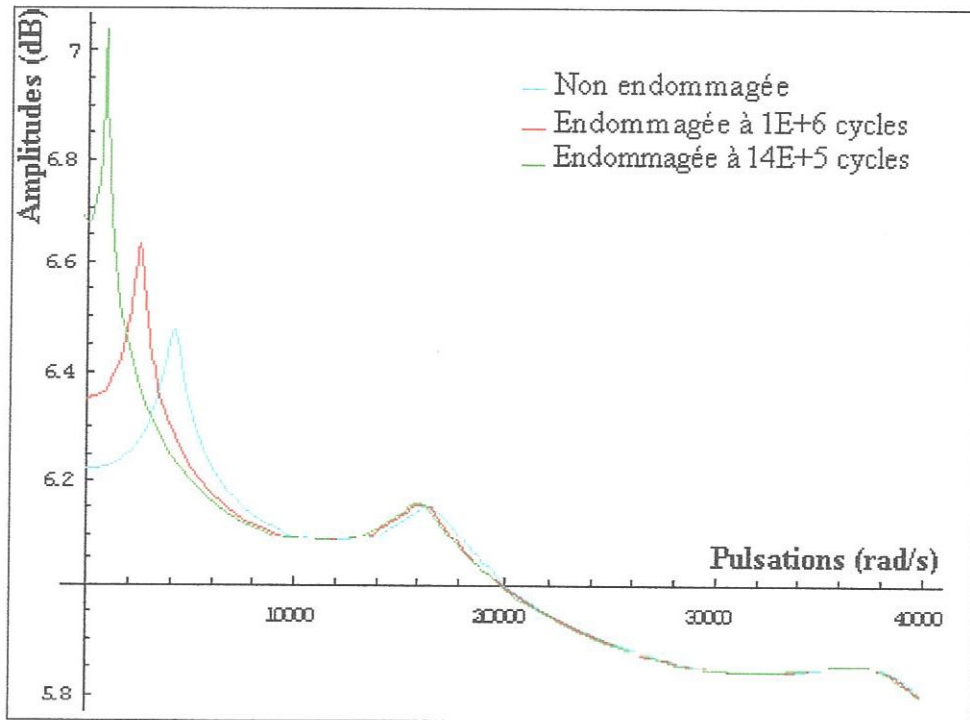


Figure.IV-21: Réponses fréquentielles à $X=L/2$:
Cas non endommagé et endommagés, $\xi_n=0.06$.

IV-7: Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'influence de la perte de rigidité sur les propriétés dynamiques d'une poutre composite unidirectionnelle après avoir déterminé l'état d'endommagement de fatigue au sein de cette même structure à des stades différents de dosage de cycles (chapitre III).

Par une approche éléments finis, l'extraction de la matrice de rigidité globale endommagée K_D^G de la structure est faite de la manière standard. La matrice de masse est prise invariante du fait de la conservation du volume de la structure même endommagée. La détermination de l'énergie de déformation élastique endommagée est faite à travers l'évaluation des énergies aux états non endommagés et endommagés.

L'analyse modale de la structure dans les cas non endommagé et endommagés nous a permis l'extraction des valeurs et des vecteurs propres correspondants.

Conclusion Générale et Perspectives

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de ce travail était de dégager une stratégie pour la prédiction de l'endommagement de fatigue ainsi que l'étude dynamique des structures endommageables.

En premier lieu, le but de cette étude est la mise en place d'un modèle numérique prenant en compte l'endommagement de fatigue dans un calcul de structure sollicitée en flexion trois points.

Ceci a été achevé par:

- l'implémentation d'un modèle local élastique endommagé obéissant au postulat de Kachanov-Rabotnov dans un calcul structural.
- La prise en compte de la loi d'évolution de L.M. Chaboche
- L'utilisation du modèle identifié de F. Sidoroff.

Le modèle numérique ainsi développé permettra d'une manière efficace la quantification de l'état de fatigue de la structure analysée.

En second lieu, une étude dynamique du composite unidirectionnel endommageable est menée par l'intégration du modèle endommagé développé dans le chapitre III dans un calcul éléments finis et l'extraction par une analyse modale des propriétés dynamiques à un stade d'endommagement donné de la structure, en examinant l'influence de la dégradation de la rigidité du composite sur:

- Les propriétés dynamiques.
- Les réponses temporelles et fréquentielles respectivement libres et forcées.

Vu les résultats obtenus par comparaison aux validations expérimentales de la littérature existante, notre travail montre la possibilité d'utiliser de manière efficace la mécanique de l'endommagement comme outil de conception et de contrôle des structures en matériaux composites. Le modèle d'endommagement unidirectionnel ainsi choisi est approprié à l'approche résistance des matériaux développée dans cette étude.

Les résultats du travail ainsi achevé peuvent contribuer sans nul doute à:

- 1) La détermination des fréquences évolutives des sollicitations pour accomplir des essais dynamiques forcés en toute sécurité.
- 2) La prédiction de la durée de vie restante de la structure avant son écroulement et par simple analyse modale à un stade donné de son service.
- 3) L'intégration du modèle dans des logiciels éléments finis commerciaux.

Le travail ainsi accompli peut constituer un noyau à de futures travaux et ouvre des perspectives réelles citons entre autres:

- Extension au cas des plaques.
- Extension aux autres cas de conditions aux limites.
- Intégration dans des méthodes de contrôles de vibrations actif et/ou passif.
- L'utilisation des réseaux neurones permettant l'accès à l'état de fatigue de la structure à travers les mesures expérimentales.

Références Bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] **J.M.BERTEHELOT**, "Comportement mécanique et analyse des structures", Edition Masson, France, 1992.
- [2] **K.L.EDWARDS**, "An overview of technology of fibre-reinforced plastics for design purposes", ELSEVIER Edition, 1998.
- [3] **J.LEMAITRE, J.L.CHABOCHE**, "Mécanique des matériaux solides", 2^{ème} édition, Edition DUNOD, 1988.
- [4] **Ph.TROMPETTE**, "Mécanique des structures par la méthode des éléments finis statique et dynamique", Edition Masson, 1992.
- [5] **ALAIN. GIRARD, NICOLAS ROY**, "Dynamique des structures industrielles", Edition LAVOISIER, 2003.
- [6] **G. VEVIZOLOS.**, "Vibration des structures", Edition Ellipses, 2002.
- [7] **N.I. GIANNOCCORO, A.MESSINA, R.NOBILE, F.W.PANELLA**, "Fatigue Damage of notched specimens through resonance and anti-resonance data", Engineering Failure Analysis, ELSEVIER Edition, pp 340-352, 2006.
- [8] **DROUIN, J.M.SENICOUT, F.LAVASTE et G.FEOUS**, "Vibration classique à la méthode des éléments finis", Volume 1, Edition AFNOR, 1993.
- [9] **J.F. IMBERT**, "Analyse des structures par éléments finis", Edition CEPADUES, 1984.
- [10] **N.BAHOULLI**, "Cours Matériaux composites", IPSTS, Université Louis Pasteur Strasbourg, 2006.
- [11] **B.S.SUBAGIO**, "Contribution à la modélisation de l'endommagement de fatigue en flexion dans les matériaux composites unidirectionnels", Thèse de doctorat, EC-Lyon, 1987.
- [12] **JEROME GRANDO**, "Faisabilité et modélisation des matériaux a propriétés adaptatives, cas de composites hybrides verre / époxy renfermant des alliages à mémoire de forme", Thèse de doctorat, EC-Lyon, 1995.
- [13] **A. DESSARTHE**, "Assemblage des Matériaux Composites, Structures Sandwichs, et Matières Plastiques", Edition CETIM, 1992.
- [14] **STEPHANE. WOLFRAMM**, "MATHEMATICA", Fourth Edition, Mathematica.

- [15] **G. CHRETIEN**, "Matériaux Composites à Matrice organique polymère et renfort type, Caractéristique technique de mise en œuvre application", Edition LAVOISIER, Paris, 1986.
- [16] **A. DESSARTHE, M.CAROYOL**, "Usinage des Matériaux Composites et élastomères", Edition CETIM, 1996.
- [17] **S. TAMBOURA, H.SIDHOUM, H.P.LIEURADE**, "Matériau Composite à Fibres de Carbone et Matrice Epoxy (T300-5208): Etude du mécanisme d'endommagement cyclique", Département Matériaux, Edition SIRPE, pp 15-20, 1996.
- [18] **N. OUELAA**, "Vibration des milieux continus", Cours de magister, Université 8 Mai 45 Guelma, Département de Mécanique, 2001.
- [19] **N. PISKONOV**, "Calcul différentiel et intégral", Tome 3, 8^{ème} édition, Editions MIR, MOSCOU, 1980.
- [20] **B. DEMIDOVITCH**, "Eléments de calcul numérique", 2^{ème} Edition, Editions MIR, MOSCOU, 1979.
- [21] **R. BIGRET**, "Vibrations des machines tournantes et des structures", Tome 3, Edition Technique et Documentation, Paris, 1980.
- [22] **A. ALVANDI**, "Contribution à l'utilisation pratique de l'évolution dynamique pour la détection d'endommagements dans les ponts", Thèse de doctorat, ENPC, Paris, 2003.
- [23] **J. DEGRIECK, WIM VAN PAEPEGEM**, "Fatigue damage modelling of fibre-reinforced composite materials: Review", Applied mechanics reviews, 54 (4), pp. 279-300, 2001.

Résumé

Depuis plusieurs années, les applications des matériaux composites dans les domaines technologiques et industriels ont connu un essor important. Ce qui exige des ingénieurs une bonne connaissance du comportement structural de telles applications.

Le travail présenté dans ce mémoire concerne la prédiction de l'endommagement de fatigue et la dynamique des structures endommageables, se subdivise en quatre chapitres:

- Le premier chapitre comporte des généralités sur les matériaux composites, leur classification ainsi que leur élaboration.
- Le deuxième chapitre est consacré à une étude bibliographique sur l'endommagement de fatigue dans laquelle on a présenté: la théorie de l'endommagement, les modèles et les mécanismes d'endommagement ainsi que le modèle utilisé de J.L.Chaboche.
- Le troisième chapitre porte sur l'approche R.D.M du modèle d'endommagement et les aspects numériques du problème permettant la prise en compte d'une loi élastique endommagée selon le postulat de Kachanov dans le calcul de structure en flexion trois points.
- Le quatrième chapitre est consacré à l'étude dynamique d'un composite unidirectionnel endommageable, l'intégration du modèle endommagé dans un calcul éléments finis, l'extraction des propriétés dynamiques par une analyse modale et la construction des réponses fréquentielles et temporelles de la structure à des stades donnés d'endommagement.

Deux validations expérimentales distinctes de la littérature existante ont été établies. Les résultats obtenus par le modèle développé ont montré l'efficacité des approches utilisées dans la prédiction de l'endommagement et l'analyse dynamique des structures endommageables.

Mots clés:

Endommagement de fatigue, perte de rigidité, composite unidirectionnel, analyse modale, éléments finis, postulat de Kachanov, loi d'évolution de l'endommagement de Chaboche, modèle d'endommagement de Sidoroff, structure endommageable.

Summary

For several years, the applications of composite materials in the technological and industrial fields have made significant great strides. That requires engineers to have good knowledge of structural behavior of such applications.

The work presented here concerning the fatigue damage prediction and dynamics of damaged structures is presented in four chapters as follows:

- The first chapter deals with generalities on composite materials and their manufacturing processes.
- The second chapter is devoted to a review study on fatigue damage, theories of damage models with emphasis on damage mechanisms and the used model proposed by J.L.Chaboche.
- The third chapter relates to a strength materials approach of the damage model and the numerical aspects of the problem allowing taking into account a damaged elastic law in three points bending structural analysis conform to Kachanov postulate and Sidoroff identified evolution law.
- The fourth chapter is devoted to the dynamic study of fatigue damage in unidirectional composite which consists in damaged model integrating a finite element to the calculation and dynamics properties extraction through a modal analysis at a given stage of damage in the structure.

Two different experimental validations from the literature are performed with the obtained results in the developed model. These results show the efficiency of the used approaches in fatigue damage prediction and in modal characteristics evaluation of damaged structures.

Key words:

Fatigue damage, loss rigidity, unidirectional composite, modal analysis, finite elements analysis, Kachanov postulate, Chaboche evolution damage law, Sidoroff model.

ملخص

منذ سنوات عديدة عرفت المواد المتآفة انطلاقاً كبيرة حيث استعملت في المجالات التكنولوجية و الصناعية المتقدمة مما ألزم المهندسين معرفة جيدة لسيرتها الهيكلية في مجالات تطبيقاتها.

العمل المقدم في هذه الرسالة والموسوم بـ"التصدع الناتج عن الكلال وديناميكية الهياكل القابلة للتصدع" ينقسم إلى أربع فصول:

- الفصل الأول يحتوي على عموميات حول المواد المتآفة: تعريفها، ترتيبها وكذا كيفية وطرق إعدادها.
 - الفصل الثاني مكرس لدراسة بيبليوغرافية حول الضرر أو التصدع من جراء القوى الدورية، حيث عرضنا: نظرية التصدع، نماجه، ميكانيكاته و كذا النموذج المستعمل (J.L.Chabuclic) في هذه الدراسة.
 - الفصل الثالث يتضمن مقارنة باستعمال قوانين مقاومة المواد لنموذج التصدع الهيكلي و الجوانب العددية للمسألة تسمح لنا بالأخذ بعين الاعتبار قوانين المرونة الناتجة عن الكلال في الحسابات الهيكلية الخاصة بالانحناء ذي الثلاثة نقاط.
 - الفصل الرابع خصص للدراسة الديناميكية للمواد المتآفة الأحادية التسليح القابلة للتصدع و إيماج النموذج في الحساب بطريقة العناصر المنتهية و استخراج الخواص الديناميكية بطريقة التحليل الشكلي في مرحلة معينة من تصدع الهيكل.
- قورنت النتائج المحصل عليها بالنموذج المطور في هذه الدراسة بنتائج تجريبتين على مادتين مختلفتين و قد حصلنا على نتائج متقاربة و أكدت لنا النتائج المحصل عليها فعالية المقاربة المستعملة للتنبؤ بالتصدع و ديناميكية الهياكل القابلة للتصدع.

دليل كلمات:

تصدع، طريقة العناصر المنتهية، ديناميكا الهياكل القابلة للتصدع، فقدان الصلابة، هيكل متآلف أحادي الاتجاه.