

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Mémoire de Magister

**Présenté à l'Université de Guelma
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie**

Département de : Génie Mécanique
Spécialité : Construction et Productique

Présenté par : **SEDDIKI Salah Hammadi**

**ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE EXPERIMENTALE ET
NUMERIQUE DE PLAQUES STRATIFIEES EN COMPOSITES**

Sous la Direction du : **Dr L. FATMI**

Décembre 2005

Soutenu le :devant la Commission d'Examen

œ JURY œ

MM.

OUELAA Nouredine	Professeur, Université de Guelma, Président ;
REDJEL Bachir	Professeur, Université d'Annaba, Examineur ;
TABIKH Hichem	Professeur, Université de Guelma, Examineur;
FATMI Louendl	Maître de Conférences, Université de Guelma, Rapporteur;
AMRANE Mcd Nadir	Maître de Conférences, Université de Guelma, Examineur; Rep. du Doyen de la Faculté des Sciences et de l'Ingénierie.

DEDICACES

A mes parents ;
A mes grands parents ;
A ma sœur et mon frère ;
A tous les membres de ma grande famille ;
A mes amis et camarades de promotion.

REMERCIEMENTS

Ce mémoire vient sanctionner une année de travail au sein du Laboratoire de Mécanique et Structures du Département de Génie Mécanique de l'Université de Guelma.

Je tiens à remercier en premier lieu le **Dr L. FATMI**, qui m'a encadré dans ce travail pour ses conseils, sa disponibilité et son suivi attentif tout le long de la préparation de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également au **Pr N. OUELAA**, Directeur du Laboratoire de Mécanique et Structures pour les facilités offertes dans le cadre du laboratoire et sa participation active à la réalisation de la partie expérimentale de ce travail. Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance envers **Mr K. BEY** pour la préparation des plaques et envers le **Dr S. GUENFOUD** pour m'avoir initié au logiciel de calcul *Mathematica*, le témoignage de toute ma gratitude et mes remerciements chaleureux envers **Mr M. KHAROUBI** pour ses encouragements et son aide précieuse.

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma sympathie aux membres du jury **Pr B. REDJEL**, **Pr H. TABIKH** et **Dr M-N. AMRANE** pour l'intérêt qu'ils ont montré à l'examen du contenu de ce travail.

Mes vifs remerciements s'adressent également au **Dr M-A YALLES** chef du département de génie mécanique pour m'avoir soutenu et permis de bénéficier des moyens du département ainsi qu'au personnel du département de génie mécanique et plus particulièrement les techniciens du hall technologique et du laboratoire de science des matériaux.

TABLE
DES
MATIERES

1.5.5.2 – Pultrusion.....	37
1.6 – Lcs stratifiés composites.....	37
1.6.1 – Désignation des stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels.....	38
1.6.2 – Modes de stratification particuliers.....	36

CHAPITRE 2 – FORMULATION DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE DES STRATIFIES

2.1 – Introduction.....	42
2.2 – Détermination des caractéristiques mécaniques d'un pli unidirectionnel dans son repère d'orthotropie.....	43
2.2.1 – Schéma d'élasticité linéaire.....	43
2.2.2 – Approches théoriques pour la détermination des modules élastiques d'un composite unidirectionnel.....	45
2.2.2.1 – Comportement local décrit par la loi des mélanges.....	45
2.2.2.2 – Méthodes analytiques pour la détermination des modules d'élasticité du pli.....	49
2.3 – Détermination de l'équation constitutive du stratifié.....	51
2.3.1 – Caractéristiques d'une couche rapportées au référentiel du stratifié.....	51
2.3.2 – Etat de contraintes planes et constantes de rigidité réduites.....	52
2.3.3 – Théorie des plaques - schémas du premier ordre.....	54
2.3.4 – Théorie des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse....	56
2.3.4.1 – Champ des déformations.....	56
2.3.4.2 – Champ des contraintes.....	57
2.3.4.3 – Résultantes et moments.....	58
2.3.4.4 – Équation constitutive.....	63
2.4 – Formulation du problème général de dynamique des stratifiés.....	63
2.4.1 – Relations fondamentales des plaques dans un schéma du premier ordre.....	63
2.4.1.1 – Equilibre par rapport aux résultantes en membrane.....	64
2.4.1.2 – Equilibre par rapport aux résultantes de cisaillement.....	65
2.4.1.3 – Equilibre par rapport aux moments.....	66
2.4.2 – Equations du mouvement du stratifié.....	67
2.5 – Expression des conditions aux limites.....	69
2.5.1 – Appui simple.....	70
2.5.2 – Encastrement.....	70
2.5.3 – Condition de bord libre.....	71
2.6 – Formulation énergétique de la théorie des stratifiés.....	72
2.6.1 – Energie de déformation.....	72
2.6.2 – Energie cinétique.....	73

CHAPITRE 3 – DETERMINATION ANALYTIQUE ET EN CALCUL DE STRUCTURES DES FREQUENCES ET MODES PROPRES DE PLAQUES STRATIFIEES

3.1 – Généralités sur la résolution des problèmes de vibrations des structures.....	76
3.2 – Fréquences et déformées propres des structures composites.....	76
3.3 – Vibrations de flexion des plaques minces symétriques.....	78
3.3.1 – Equation du mouvement.....	78
3.3.2 – Fréquences et déformées propres des plaques rectangulaires.....	78

3.4 – Détermination des fréquences et modes propres des plaques par la méthode de Rayleigh-Ritz.....	82
3.4.1 – Principe.....	82
3.4.2 – Application au problème de vibrations des plaques stratifiées Symétriques.....	83
3.4.3 – Construction de la base fonctionnelle – Fonctions caractéristiques des vibrations des poutres.....	85
3.4.4 – Organigramme du programme de calcul.....	87
3.5 – Validation du programme élaboré.....	91
3.5.1 – Caractéristiques mécaniques et géométrique de la plaque étudiée.....	91
3.5.2 – Maillage et conditions aux limites utilisés sous <i>I-DEAS</i>	92
3.5.3 – Résultats obtenus.....	93
3.5.4 – Analyse des résultats.....	97

CHAPITRE 4 – DETERMINATION EXPERIMENTALE DES FREQUENCES PROPRES ET AMORTISSEMENTS MODAUX DE PLAQUES STRATIFIEES

4.1 – Vibrations expérimentales des structures.....	101
4.2 – Matériau étudié.....	101
4.2.1 – Mode de fabrication et stratification.....	101
4.2.2 – Caractéristiques mécaniques des plaques étudiées.....	102
4.2.3 – Conditions aux limites et points de mesure.....	103
4.3 – Banc d'essais.....	104
4.4 – Déroulement des essais – mesure des fréquences propres.....	105
4.5 – Résultats obtenus.....	106
4.6 – Analyse des résultats.....	113
4.7 – Etude de l'amortissement des stratifiés.....	118
4.7.1 – Amortissement.....	118
4.7.2 – Détermination expérimentale de l'amortissement.....	119
4.7.2.1 – Méthode de mesure.....	119
4.7.2.2 – Résultats obtenus.....	119
4.7.3 – Evaluation de la réponse amortie sous <i>I-DEAS</i>	121
4.7.3.1 – Calcul de la réponse par la méthode de décomposition modale..	121
4.7.3.2 – Réponse amortie à une excitation sinusoïdale.....	123

CONCLUSIONS	125
--------------------------	-----

BIBLIOGRAPHIE	128
----------------------------	-----

ANNEXES

ANNEXE A – Fonctions caractéristiques des vibrations des poutres et expressions des intégrales adimensionnelles.....	132
A.1 – Propriétés générales.....	132
A.2 – Cas de la poutre simplement appuyée à ses deux extrémités.....	133
A.3 – Cas de la poutre ayant une extrémité appuyée et l'autre encastree.....	133
A.4 – Cas de la poutre ayant une extrémité appuyée et l'autre libre.....	135
A.5 – Cas de la poutre encastree en ses deux extrémités.....	137
A.6 – Cas de la poutre ayant une extrémité encastree et l'autre libre.....	139

A.7 – Cas de la poutre ayant ses deux extrémités libres.....	141
ANNEXE B – Tableaux comparatifs des fréquences propres calculées sous <i>matlab</i> et en calcul de structures sous <i>I-DEAS</i> pour une plaque symétrique sous différentes combinaisons de conditions aux limites.....	145
ANNEXE C – Spectres des réponses expérimentales des plaques testées.....	152
C.1 – Spectres de la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$ – Configuration ELLL.....	152
C.2 – Spectres de la plaque 2 $[90/0_2/90]_s$ – Configuration ELLL.....	153
C.3 – Spectres de la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$ – Configuration ELEL.....	154
C.4 – Spectres de la plaque 2 $[90/0_2/90]_s$ – Configuration ELEL.....	155

INTRODUCTION

Le comportement dynamique est un paramètre important dont il faut tenir compte lors de la conception des structures. En effet, les mouvements vibratoires sont à l'origine de nombreux problèmes typiques pouvant conduire à la ruine de la structure, tels que la résonance et la fatigue, à une limitation d'exploitation en raison d'un niveau de bruit élevé ou d'une perturbation des performances de la structure par la présence de vibrations indésirables. Dans le cas des vibrations linéaires la détermination des paramètres modaux d'une structure, à savoir les fréquences et déformées propres des modes de résonance ainsi que les amortissements modaux associés, permet de localiser les problèmes liés aux vibrations et de construire un modèle de comportement en basses fréquences de cette structure, servant à prédire la réponse de celle-ci aux différents types de chargements dynamiques, et ainsi à vérifier les solutions apportées pour le contrôle de ces problèmes.

Le caractère modulable des propriétés des stratifiés composites permet d'envisager de larges possibilités d'optimisation des performances d'une structure en agissant directement sur les fréquences et déformées propres de celle-ci sans modifier sa géométrie ou ses dimensions, par simple ajustement des paramètres du matériau (nature des constituants, taux de renfort et séquence d'empilement). De plus, l'amortissement interne important et prédominant dans les composites à matrices organiques assure souvent une dissipation d'énergie suffisante pour limiter les amplitudes de résonance ou supprimer entièrement les vibrations parasites auxquelles sont sujettes les structures légères fabriquées à partir de matériaux composites. Pour tirer avantage de ces matériaux, il faut alors savoir déterminer les paramètres modaux d'une structure à partir de la connaissance des propriétés de ces constituants.

L'objectif fixé au présent travail était d'étudier le comportement dynamique des plaques stratifiées vu leur importance comme éléments de structures. D'un autre côté, cette géométrie permet d'introduire la formulation spécifique aux stratifiés et met en évidence un bon nombre de difficultés liées à la résolution du problème vibratoire, point de vue comportement du matériau et conditions aux limites. Si les caractéristiques élastiques des stratifiés sont correctement approchées par les modèles théoriques, les propriétés viscoélastiques à l'origine de l'amortissement sont beaucoup plus difficiles à modéliser. Cet aspect nous a conduit à envisager de traiter le problème par deux approches : i) numérique ayant pour but de calculer les fréquences et modes propres non amorties des vibrations en flexion des plaques stratifiées rectangulaires soumises à différentes configurations possibles de conditions aux limites standards sur les bords. ii) expérimentale ayant pour but, dans un premier temps de déterminer les fréquences propres de deux plaques particulières dans les configurations ELLL et ELEL afin de valider les bases modales correspondantes issues de l'approche numérique. En deuxième étape associer les amortissements modaux de ces plaques, mesurés expérimentalement, à leurs bases modales pour évaluer les réponses amorties des plaques à des chargements dynamiques. L'étude bibliographique considérée nous a amené à privilégier un développement analytique dans l'approche numérique, utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz basé sur l'approximation du déplacement de la plaque par les fonctions poutres.

Le travail réalisé est organisé en quatre chapitres.

- Le chapitre 1 est une présentation générale des composites stratifiés du point de vue définition, classification, principaux constituants, modes d'obtentions et désignation.

- Le chapitre 2 est consacré à la formulation théorique du comportement dynamique des stratifiés. Il expose dans un premier temps les étapes d'homogénéisations permettant de déterminer les propriétés élastiques à l'échelle d'une couche (modules d'élasticités), et à l'échelle du stratifié (équation constitutive). Ensuite, les équations du mouvement des

stratifiés sont dérivées à partir des relations d'équilibre des plaques dans un schéma du premier degré. Les expressions des conditions aux limites standards sur la frontière d'une plaque sont données en terme de déplacements, efforts et moments. Finalement la formulation énergétique du problème est développée pour introduire les méthodes de résolution approchées.

- Le chapitre 3 traite la résolution du problème des vibrations de flexion des plaques minces rectangulaires en stratifiés symétriques, pour toutes les combinaisons possibles de conditions aux limites. La méthodologie de recherche des fréquences et modes propres est exposée et les difficultés qui lui sont liées sont surmontées en utilisant la méthode analytique de Rayleigh-Ritz, basée sur une approximation du déplacement par les fonctions caractéristiques de vibrations des poutres. La programmation de cette dernière sous *Matlab* a permis de calculer les fréquences propres non amorties de ces plaques et de tracer les déformées correspondantes. Les résultats obtenus sont validés en calcul de structures par éléments finis en utilisant le code de calcul *I-DEAS*.

- Le chapitre 4 est une analyse modale expérimentale de deux plaques de stratification distinctes dans les configurations ELLL et ELEL. Les mesures des fréquences propres ont été comparées à celles obtenues par les modèles théoriques. Les amortissements modaux expérimentaux introduits au code de calcul de structures par éléments finis ont permis d'évaluer la réponse amortie d'une plaque sous un chargement sinusoïdal.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES STRATIFIES

1.1 Définition

Un composite est un matériau obtenu par association de deux ou plusieurs matériaux, aux propriétés complémentaires, de manière synergique pour former un nouveau matériau présentant des caractéristiques supérieures à celles des constituants pris séparément [1].

A la différence des alliages (matériaux obtenus par mélange), les constituants du composite sont non miscibles et se présentent en phases séparées dans le matériau final : ils ne subissent ni transformation ni recombinaison et restent détectables à l'échelle microscopique (composites classiques) [2].

Le matériau est donc hétérogène de par sa fabrication, et cette hétérogénéité est théoriquement maîtrisée.

1.2 Constituants et caractéristiques générales

Un composite est généralement constitué d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue (figure 1.1).

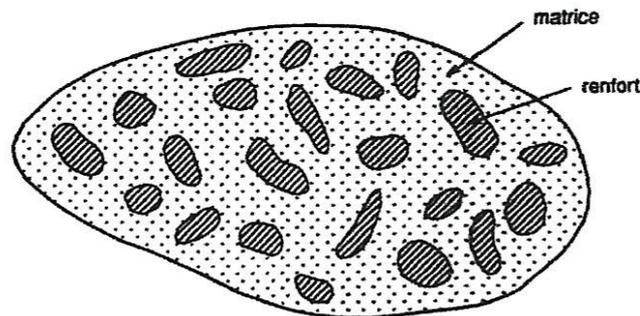


Figure 1.1 Matériau composite

La phase discontinue est, dans la plus part des cas, la phase la plus dure et confère au matériau l'essentiel de ses caractéristiques mécaniques : elle est appelée "renfort". La phase continue est appelée "matrice". Quelques exemples sont présentés sur le tableau 1.1.

	Constituants	Domaines d'application
Composite à matrice minérale.		
Béton	Ciment / sable / granulats	Génie civil
Composite carbone- carbone	Carbone / fibre de carbone	Aviation, espace, sports, biomédecine, etc.
Composite céramique	Céramique / fibre céramique	Pièces thermomécaniques

Composite à matrice métallique	Aluminium / fibre de bore Aluminium / fibre de carbone	Espace
Composite à matrice organique. Papier, carton ; Panneaux de particules ; Panneaux de fibres ; Toiles enduites ; Matériaux d'étanchéité ; Pneumatiques ; Stratifiés ; Plastiques renforcés.	Résine / charge / fibres cellulosiques Résine / copeaux de bois Résine / fibre de bois Résine souples/ tissus. Elastomères / bitume / textiles Caoutchouc / toiles / acier Résine / charges / fibre de verre, de carbone, etc. Résines / microsphères.	Imprimerie, emballage, etc. Menuiserie ; Bâtiment ; Sports, bâtiment ; Toiture, terrasse, etc. ; Automobile ; Domaines multiples.
Sandwiches peaux âmes	Métaux, stratifiés, etc. Mousse, nids d'abeilles, balsa Plastiques renforcés, etc.	Domaines multiples

Tableau 1.1 Exemples de matériaux composites [1]

Bien que le principe de ces matériaux apparaisse dans des matériaux naturels (bois) et fut utilisé depuis longtemps (torchis béton), l'essor actuel des matériaux composites a été impulsé par le développement des industries aérospatiales et des transports [3]. Dans ces domaines, l'objectif de réduction de poids conduit à comparer les performances des matériaux à travers leurs caractéristiques spécifiques.

Dans cette optique, un matériau élaboré sous forme de fibres ou particules présente une meilleure tenue mécanique (résistance et rigidité) par rapport à sa forme massive (tableaux 1.2 et 1.3). En effet les faibles dimensions transversales des fibres ou particules (de l'ordre du μm), minimisent la présence et la taille des défauts résultant en une meilleure résistance à la rupture [1].

Matériau	Module E (GPa)	Contrainte à la rupture σ_u (GPa)	Masse volumique ρ (kg/m^3)	Module spécifique E/ρ (MN m/kg)	Contrainte spécifique σ_u/ρ (kN m/kg)
Acier	210	340 - 2 100	7 800	26,9	43 - 270
Alliages d'aluminium	70	140 - 620	2 700	25,9	52 - 230
Bois	30	-	390	33,3	-
Verre	70	700 - 2 100	2 500	28	280 - 840
Tungstène	350	1 100 - 4 100	19 300	18,1	57 - 210
Béryllium	300	700	1 830	164	380

Tableau 1.2 Caractéristiques spécifiques des matériaux usuels élaborés sous forme massive [1]

Fibres de	Module de Young E (GPa)	Contrainte à la rupture σ_u (GPa)	Masse volumique ρ (kg/m ³)	Module spécifique E/ρ (MN m/kg)	Contrainte spécifique σ_u/ρ (kN m/kg)
Verre E	72,4	3 500	2 540	28,5	1380
Verre S	85,5	4 600	2 480	34,5	1850
Carbone à					
- haut module	390	2 100	1 900	205	1 100
- contrainte élevée	240	3 500	1 850	130	1 890
Kevlar (aramide)	130	2 800	1 500	87	1 870
Bore	385	2 800	2 630	146	1 100

Tableau 1.3 Caractéristiques spécifiques des matériaux élaborés sous forme de fibres [1]

Ce type de matériaux (fibres et particules) constitue donc un choix de premier plan pour les applications mécaniques (hautes performances et gain de poids). Toutefois il est clair qu'ils ne peuvent être utilisés seuls pour la fabrication de pièces ou structures. D'où l'idée de les utiliser comme renforts incorporés dans une matrice permettant de les lier ensemble et de les maintenir en position, garantissant ainsi l'intégrité géométrique et matérielle (protection des renforts) des pièces et des structures. La matrice assure aussi le transfert et la répartition des efforts extérieurs entre renforts, des propriétés mécaniques complémentaires, ainsi que diverses propriétés physiques et chimiques.

Le transfert des efforts de la matrice au renfort fait intervenir un 'troisième constituant' l'interface [4]. La compatibilité renfort-matrice dépend des propriétés adhésives de cette fine couche ainsi que de la déformabilité de la matrice.

Les propriétés globales des matériaux composites résultent donc [1] :

- Des propriétés des matériaux constituants ;
- De leur disposition géométrique (répartition et orientation) ;
- De leur interaction.

La description d'un matériau composite nécessitera alors la connaissance de tous les paramètres qui déterminent ses propriétés, à savoir :

- La nature des constituants ;
- La géométrie du renfort, sa concentration et sa distribution ;
- La nature de l'interface renfort-matrice.

La modélisation du comportement d'un composite se fait sur la base d'hypothèses simplificatrices : formes de renforts idéalisées (sphères ou cylindres), répartition uniforme du renfort. Les propriétés mécaniques sont alors évaluées à partir des propriétés des constituants, de leurs proportions, ainsi que de l'orientation du renfort. Par contre, la nature de l'interface, bien qu'elle ait une influence primordiale sur le comportement réel du composite, sa prise en compte reste très difficile.

1.3 Classification des matériaux composites

La distinction entre les différents types de composites peut se faire selon les critères suivants :

1.3.1 Classification selon la forme des constituants

a) Composites à fibres

La matière renforçante se présente sous forme de fibres longues, courtes ou coupées, dont l'arrangement et l'orientation déterminent les propriétés mécaniques du matériau permettant une conception adaptée à l'application (conception à la carte) en agissant sur :

- La nature des constituants ;
- La proportion de chaque constituant ;
- L'orientation des fibres.

b) Composites à particules

Dans ce cas le renfort se présente sous forme de particules, qui sont utilisées pour l'amélioration de certaines propriétés mécaniques et physiques de la matrice (rigidité, tenue à la température, résistance à l'abrasion...) ou simplement pour diminuer le coût de production du matériau sans altérer ses caractéristiques.

1.3.2 Classification selon la nature des constituants

Selon la nature de la matrice et du renfort on rencontre plusieurs combinaisons possibles :

a) Composites à matrice organique

- résines et charges associées à :
 - Des fibres minérales : verre, carbone, etc. ;
 - Des fibres organiques : kevlar, polyamides, etc. ;
 - Des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

b) Composites à matrice métallique

- métaux légers et leurs alliages associés à :
 - Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC) ;
 - Des fibres métalliques : bore ;
 - Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de SiC.

c) Composites à matrice minérale

- céramiques associées à :
 - Des fibres métalliques : bore ;
 - Des particules métalliques : cermets ;
 - Des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les figures 1.2 et 1.3 récapitulent les principaux matériaux utilisés comme renforts et matrices.

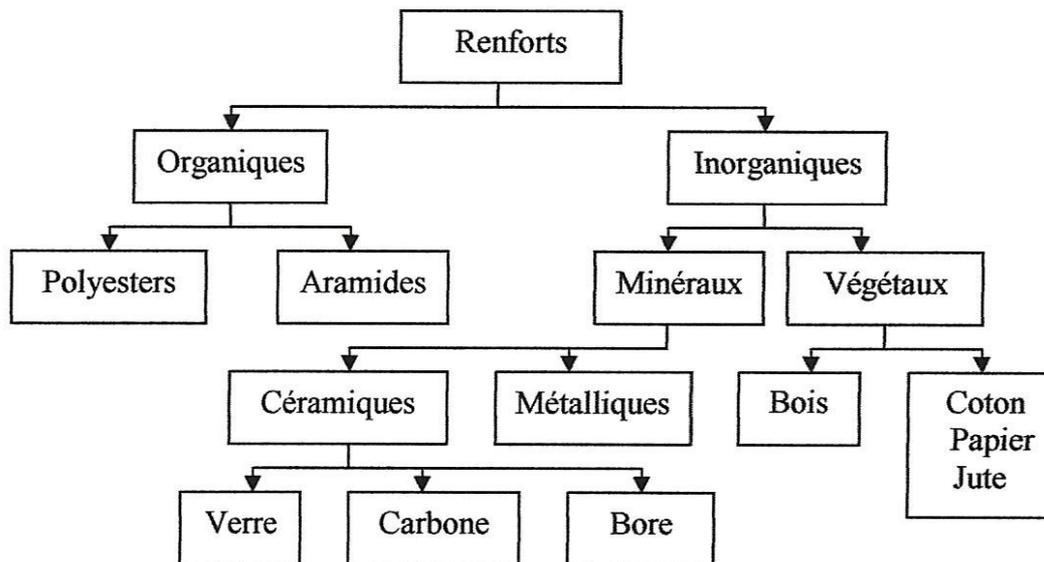


Figure 1.2 Matériaux de base pour les renforts [4]

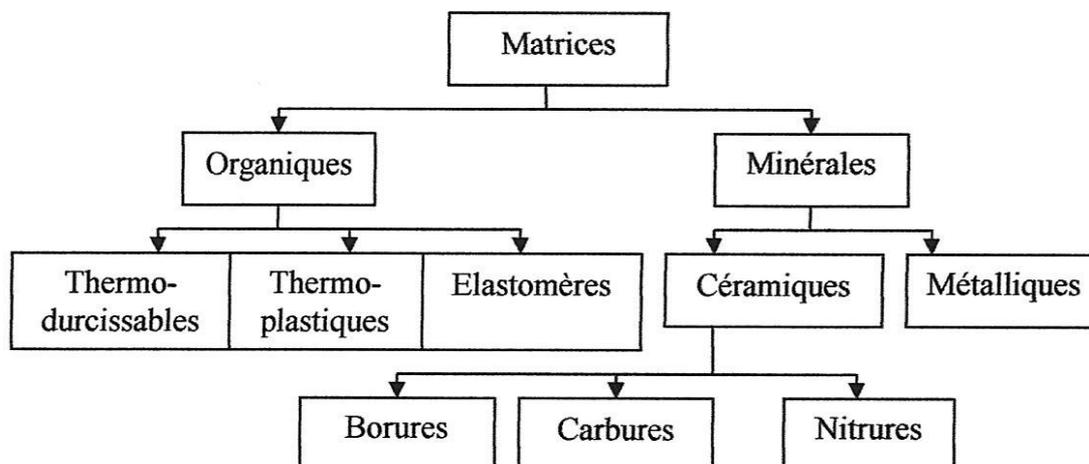


Figure 1.3 Les principaux types de matrices [4]

1.3.3 Classification suivant performance et diffusion

a) Les composites grande diffusion

De caractéristiques moyennes, ils sont orientés vers l'optimisation des coûts. Ils représentent 95% des composites utilisés et ont un domaine d'application très large : capotage, conserveries, décoration, etc.

b) Les composites hautes performances

Ils sont orientés vers l'optimisation des caractéristiques mécaniques et thermiques tout en diminuant le poids au maximum. Leurs coûts sont très élevés, ils sont réservés aux applications de pointe tel que l'aéronautique et l'espace, l'armement, le sport de haut niveau, etc.

1.4 Principaux constituants des composites à matrices organiques

Nous avons vu qu'un matériau composite est essentiellement constitué d'une matrice et d'un renfort. Le choix de ces deux constituants obéit aux exigences et contraintes de service (caractéristiques mécaniques élevées, tenue en température, résistance à la corrosion, etc.) tout en s'assurant de la compatibilité entre les éléments associés. A cet effet, les matrices organiques constituées de résines polymères associées à différentes charges et additifs sont celles qui offrent le plus de flexibilité du point de vue développement (synthèse de nouvelles résines) et conception (compatibilité avec différents renforts grâce à leur déformabilité et à la diversité de leurs compositions et propriétés mécaniques et physico-chimiques). De plus la légèreté, le faible coût de fabrication et la facilité de mise en œuvre de ce type de résines font des composites à matrices organiques la principale catégorie de composites utilisés dans l'industrie.

Les renforts sous formes de particules sont appelés charges renforçantes. Le terme renfort se restreint aux fibres dans leurs différentes présentations (courtes, longues, tissus, etc.).

1.4.1 Les résines

Les résines polymères se subdivisent en deux grandes familles : résines thermodurcissables et résines thermoplastiques [1 et 3].

1.4.1.1 Les résines thermodurcissables

Après polymérisation par traitement thermique (chaleur, radiation) ou physico-chimique (catalyseur, durcisseur) ou par l'association des deux, ce type de résines se transforment en produits essentiellement infusibles et insolubles [4], elles ne peuvent être mises en œuvre qu'une seule fois. Leurs propriétés mécaniques et thermomécaniques remarquables font d'elles les résines les plus utilisées pour la mise en œuvre des matériaux composites, les principales résines employées dans ce domaine sont par ordre d'importance décroissant :

a) Les résines polyesters insaturées

Les composites à base de résines polyesters connaissent le plus important développement industriel grâce à leur grande diversité (polyesters condensés, vinylesters, dérivés allyliques, etc.), bonne mouillabilité des fibres et tissus, facilité de mise en œuvre (procédés automatisés) ainsi qu'à leur faible coût. Les résines de type polyesters rigides possèdent une bonne stabilité dimensionnelle et tenue chimique, mais leur utilisation est limitée aux températures inférieures à 120 °C, elles sont inflammables, sensibles aux chocs, à l'humidité et aux rayons ultraviolets.

b) Les résines de condensation

Les résines de condensation comportent les résines phénoliques, les aminoplastes et les résines furaniques :

- Les résines phénoliques, parmi lesquelles on trouve la bakélite, sont les plus anciennes résines thermodurcissables. Elles se caractérisent par une bonne tenue à la chaleur et au fluage. Elles ont une excellente stabilité dimensionnelle, un faible retrait et de bonnes propriétés mécaniques et chimiques. Leur utilisation est pénalisée par de faibles cadences de production, une non adaptation aux utilisations alimentaires et par les couleurs foncées des produits.
- Les résines aminoplastes de caractéristiques semblables à celles des résines phénoliques, offrent en plus la compatibilité avec les produits alimentaires et la possibilité d'être colorées.
- Les résines furaniques sont peu utilisées en raison de leur coût élevé, cependant elles présentent des propriétés intéressantes en terme de rapidité de durcissement (cadence de production élevée) et de résistance aux agents chimiques (fabrication de citernes, tuyaux, bacs, etc.).

c) Les résines époxydes

En raison de leur coût élevé et de leurs bonnes caractéristiques mécaniques (traction, flexion, compression, choc, fluage, etc.), les résines époxydes sont essentiellement employées pour l'élaboration de matériaux composites à hautes performances (aéronautique, espace, balistique,..etc.), utilisables jusqu'à des températures de l'ordre de 190 °C ou en milieu agressif. La mise en oeuvre des composites est facilitée par la très bonne mouillabilité des renforts et la compatibilité avec les différents types de fibres (verre, carbone, Kevlar). Leur faible retrait lors du moulage (<1%) permet d'obtenir des pièces précises. L'obtention de performances optimales requiert un temps de polymérisation assez long, ce qui se répercute sur le coût de fabrication

1.4.1.2 Les résines thermoplastiques

Ce type de polymères ont la particularité de pouvoir être alternativement ramollis par chauffage et durcis par refroidissement dans un intervalle de températures spécifique à chaque matériau [4]. Contrairement aux résines thermodurcissables, ils sont recyclables, mais présentent des propriétés mécaniques et thermomécaniques plus faibles. Ces résines sont appelées aussi «plastiques», elles comportent une large gamme de produits : polychlorure de vinyle (PVC), polyéthylène, polypropylène, polyamide, polycarbonate, etc., regroupés en plastiques de grande diffusion et plastiques techniques. Les premiers sont mis en œuvre par injection pour obtenir des pièces moulées ou par extrusion pour obtenir des films, des plaques, des tubes, des profilés, etc. Les seconds sont mis en œuvre par injection. Leur intérêt réside dans le faible coût de la matière première et le rendement élevé des procédés utilisés (injection, extrusion). Toutefois, leur emploi dans la mise en œuvre de matériaux composites est limitée en raison de la nécessité de faire appel à des transformations à hautes températures de produits solides (granulés, plaques feuilles ou films).

1.4.1.3 Autres types de résines

En plus des thermoplastiques et des thermodurcissables, il existe deux autres classes de résines à usages spécifiques :

- Les résines thermostables : on les retrouve aussi bien parmi les résines thermodurcissables que thermoplastiques, elles se distinguent par leurs performances thermiques (stabilité thermique jusqu'à 300 °C). Elles sont développées essentiellement dans les domaines aéronautique et spatial ;
- Les élastomères : renforcés de fibres, ils sont utilisés dans diverses applications du domaine de l'automobile.

1.4.2 Les charges et les additifs

Différents produits peuvent être ajoutés à la résine pour améliorer ses caractéristiques mécaniques et physiques, faciliter sa mise en œuvre ou simplement pour en diminuer le coût. On parlera de charges quand la quantité ajoutée est de quelques dizaines de %, et d'additifs lorsque cette quantité ne dépasse pas quelques %.

1.4.2.1 Les charges

a) Les charges renforçantes

Elles sont incorporées aux résines pour améliorer leurs caractéristiques mécaniques, selon leur forme géométrique elles sont classées en :

- Charges sphériques : sphères de faible diamètre, de 10 à 150 µm généralement, appelées aussi microbilles. La forme sphérique évite les concentrations de contraintes dans la matrice et diminue par conséquent sa sensibilité à la fissuration. Les microbilles de verre creuses représentent 99% des charges sphériques utilisées.
- Charges non sphériques : le mica sous forme d'écailles est le matériau le plus utilisé. Des écailles de dimensions allant de 100 à 500 µm et d'une épaisseur de 1 à 20 µm sont incorporées à des résines thermoplastiques ou thermodurcissables pour des applications électriques et électroniques.

b) Les charges non renforçantes

Les charges non renforçantes sont ajoutées pour diminuer le coût de la résine sans altérer ses performances, ou bien pour améliorer certaines de ses propriétés :

- Charges de faible coût : extraites de roches ou de minerais (carbonates, silicates, silices, etc.), leur incorporation augmente le module d'élasticité, la dureté, la viscosité et la stabilité dimensionnelle mais diminue la résistance à la traction et à la flexion.
- Charges ignifugeantes : ont pour rôle de réduire ou d'empêcher la combustion de la résine.

- Charges conductrices et antistatiques : ces charges sont utilisées pour rendre la matrice conductrice de chaleur et d'électricité dans certaines applications.

1.4.2.2 Les additifs

a) Les lubrifiants et agents de démoulage

Ils sont utilisés pour faciliter le façonnage de la résine et réduire sa tendance à adhérer aux moules et mandrins.

b) Les pigments et colorants

En fonction de la nature de la résine et de l'utilisation du matériau composite, ce dernier est coloré soit par des pigments (particules insolubles d'oxydes ou de sels métalliques) dispersés dans une pâte, soit par des colorants (composés organiques solubles dans l'eau ou dans un solvant).

c) Les agents anti-retrait et les agents de fluage

Le retrait de la résine après polymérisation peut aboutir à un mauvais état de surface, à un gauchissement ou à des microfissurations des pièces moulées. L'ajout de produits spécifiques anti-retrait, à base de thermoplastiques ou d'élastomères, permet de diminuer ou même d'annuler le phénomène.

d) Les agents anti-ultraviolet

Ils ont pour rôle de protéger la résine des rayons ultraviolets contenus dans le rayonnement solaire. En les absorbant, ils évitent une dégradation prématurée de la résine par rupture de liaisons atomiques ou par photo-oxydation.

1.4.3 Les fibres et tissus

1.4.3.1 Généralités

Les matériaux composites tiennent l'essentiel de leurs caractéristiques mécaniques des matériaux de renfort : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Le choix approprié du renfort permet aussi d'améliorer certaines propriétés physiques d'un composite : comportement thermique, tenue à la température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Pour élaborer des composites performants, les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : caractéristiques mécaniques élevées, masse volumique faible, bonne compatibilité avec les résines, facilité de mise en œuvre, faible coût, etc. La nature des renforts (organique, minérale, synthétique..) et leurs formes sont fonctions de l'application. Toutefois les plus utilisés sont sous formes de fibres et se présentent sous différentes formes commerciales :

- sous forme linéique (fils, mèches, etc.) ;
- sous forme de tissu surfacique (tissus simples, mats, etc.) ;
- sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.).

Les renforts les plus performants développés à ce jour sont des fibres courtes particulières appelées Trichites ou Whiskers, formées à base de monocristaux.

1.4.3.2 Formes linéiques

Les fibres sont élaborées en filaments unitaires de 5 à 15 μm de diamètre, appelés monofilaments. Ces filaments sont ensuite réunis en fils ou en mèches pour faciliter leur utilisation. Les fils continus ou discontinus sont caractérisés par leur masse linéique dont l'unité est le *tex* qui représente la masse en gramme d'un fil de 1 Km de longueur, soit :

$$1 \text{ tex} = 1\text{g/Km.} \quad \text{ou} \quad 1 \text{ tex} = 10^{-6} \text{ kg/m.}$$

L'utilisation directe des formes linéiques pour la mise en œuvre de composites est limitée à quelques procédés particuliers tels que l'enroulement filamentaire et la pultrusion.

1.4.3.3 Fibres de formes surfaciques

Les fils sont transformés par les techniques de l'industrie papetière et de tissage pour réaliser des formes surfaciques : mats, tissus ou rubans, qui facilitent la manipulation et la mise en œuvre des renforts.

a) Les mats

Se sont des nappes de fils continus ou discontinus dispersés dans un plan et assemblés par un liant soluble ou non dans la résine, l'absence d'orientations préférentielles des fibres conduit à un comportement isotrope du mat dans son plan. Les mats de fils coupés, plus déformables, permettent d'obtenir des formes embouties. Les mats de fils continus sont utilisés pour réaliser des formes complexes par moulage.

b) Les tissus et rubans

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser. L'ensemble est maintenu par l'entrecroisement des fils suivant deux directions (figure 1.4).

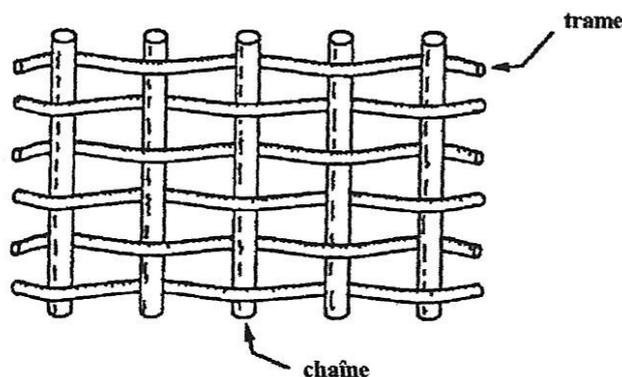


Figure 1.4 Chaînes et trames d'un tissu

- Une direction chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu ;
- Une direction trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.

Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés, donc par la masse linéique du fils, et par le mode d'entrecroisement (ou armure) des fils de chaîne et des fils de trame. Les armures classiques utilisées sont : toile (ou taffetas), satin, sergé, armure haut module, armure unidirectionnelle. Ces deux dernières donnent les meilleures performances (l'absence d'entrecroisement supprime les effets d'ondulation et de cisaillement des fils). Les mats et tissus sont caractérisés par leur masse surfacique en gramme/m².

1.4.3.4 Structures tissées multidirectionnelles

a) Tresses et préformes

Des tissus tubulaires (tresses ou préformes) peuvent être obtenus par tissage cylindrique ou conique : les fils s'entrecroisent en hélice, dont la variation de pas permet d'ajuster la tresse à la forme qu'elle doit couvrir. On peut ainsi réaliser une pièce de révolution ayant un diamètre variable le long de son arc, ce qui permet d'obtenir divers tissus en forme de « chaussettes » coniques, ogivales ou hémisphériques. Ces tissus sont utilisés dans les constructions aéronautiques (cône de rentrée, tuyères, etc.).

b) Tissus multidirectionnels

Des tissages volumiques sont également utilisés. Ils se caractérisent par le nombre de directions de tissage 3D et 4D. La structure la plus simple est celle du tissage 3D où les fils sont disposés suivant trois directions orthogonales.

1.4.4 Les principales fibres

1.4.4.1 Les fibres de verre

Le comportement du verre dans sa forme massive est dominé par son caractère fragile. En revanche, lorsqu'il est élaboré sous forme de fibres de très faibles diamètres, il devient tenace et révèle de bonnes caractéristiques mécaniques. Les fibres sont obtenues à partir du verre textile composé d'un mélange d'oxydes : silice, alumine, chaux, magnésie, et oxyde de bore. Les proportions du mélange, et l'ajout d'oxydes modificateurs donnent au matériau final ses propriétés spécifiques. Différents types de verre peuvent être distingués :

- Le verre E à usage général, bonnes propriétés électriques ;
- Le verre D à hautes propriétés diélectriques, utilisé pour la construction de matériel de télécommunications ;
- Le verre C résistant aux agents chimiques, enrobage des structures sévèrement exposées ;
- Les verres R et S à caractéristiques mécaniques élevées, utilisés pour la réalisation de structures de hautes performances mécaniques.

a) Elaboration des fibres de verre

Les fibres de verre sont produites par étirement à grande vitesse et refroidissement de filaments obtenus par l'écoulement du verre en fusion à travers les orifices calibrés d'une filière. Les filaments sont aussitôt enduits d'un agent d'ensimage qui a pour rôles essentiels de protéger les filaments contre l'abrasion, de faciliter par la suite leur imprégnation par la résine et d'améliorer leur liaison avec cette dernière.

Deux procédés d'étirage peuvent être utilisés :

- Etirage mécanique donnant des fibres continues assemblées en fils de base *silionne*;
- Etirage pneumatique donnant des fibres discontinues assemblées en ruban *verranne*.

b) Caractéristiques mécaniques des fibres de verre

Les valeurs de référence pour les caractéristiques mécaniques des fibres de verre sont celles mesurées sur des monofilaments prélevés à la sortie de la filière. Le tableau 1.4 donne les valeurs usuelles de ces grandeurs. Cependant, les valeurs les plus représentatives, et en particulier pour les caractéristiques à la rupture des fibres (tableau 1.5), sont celles déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel où la liaison verre-résine favorise une répartition assez homogène de la charge entre les filaments dont les caractéristiques sont diminuées par les différentes sollicitations mécaniques et chimiques subies lors des opérations de transformation en fils industriels.

Caractéristiques			Verre E	Verre R
Masse volumique	ρ	kg/m ³	2600	2550
Module de Young	E_f	GPa	73	86
Contrainte à la rupture	σ_{fu}	MPa	3400	4400
Allongement à la rupture	ε_{fu}	%	4,4	5,2
Coefficient de Poisson	ν_f		0.22	-

Tableau 1.4 Caractéristiques mécaniques des verres type E et R mesurées sur monofilaments à la sortie de la filière [1]

	Verre E	Verre R
Contrainte à la rupture (Mpa)	2400-2600	3000-3600
Allongement à la rupture	3,4	4

Tableau 1.5 Caractéristiques à la rupture d'un fil silionne industriel déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel verre/époxyde [1]

En plus de leurs bonnes caractéristiques mécaniques, les fibres de verre ont aussi une bonne tenue thermique, elles conservent ces caractéristiques jusqu'à des températures assez élevées 200 °C pour le verre E et 250 °C pour le verre R.

1.4.4.2 Les fibres de carbone

La mise en œuvre des fibres de carbone est motivée par les caractéristiques spécifiques remarquablement élevées que prévoit la théorie pour la structure cristalline hexagonale du graphite. Les fortes liaisons entre atomes voisins d'un même plan cristallographique donnent un module de Young de l'ordre de 1200 GPa et une contrainte à la rupture de 20000 MPa dans les directions parallèles aux plans cristallographiques, pour une masse volumique inférieure à 2000 kg/m³. Malgré les imperfections des cristaux obtenus par les procédés industriels, l'élaboration de fibres d'axes parallèles aux plans cristallographiques permet d'obtenir des fibres parmi les plus performantes (650 GPa pour le module de Young et 4000 MPa pour la contrainte à la rupture).

a) *Elaboration des fibres de carbone*

Les fibres de carbone sont élaborées par décomposition thermique sans fusion d'un polymère *précurseur* fibres ou fils. Trois opérations successives sont nécessaires : oxydation, carbonisation sous gaz inerte et graphitisation. Le *précurseur* peut être :

• des fibres acryliques

Des mèches de filaments acryliques, obtenus à partir du polyacrylonitrile (PAN), sont traitées thermiquement. Après carbonisation les fibres de carbone obtenues ont une haute résistance (fibres HR). Une transformation supplémentaire par graphitisation permet d'obtenir des fibres à haut module de Young (HM) ou très haut module (THM). Les deux types de fibres HR et HM, subissent un traitement de surface (ensimage) pour amélioration de la liaison fibre-résine.

* le brai

Le fil obtenu à partir du brai (résidu pâteux de la distillation du charbon ou du pétrole) donne après traitement un carbone de haut module, mais de caractéristiques légèrement plus faibles que celles des fibres (HM) obtenues par le procédé (PAN).

b) *Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone*

Sur le tableau 1.6 est reportée une comparaison des caractéristiques des fibres de carbone et des fibres de verre E. Les fibres de carbone se distinguent en plus par une excellente tenue à la température, jusqu'à 1500 °C environ, d'où le développement de composites à fibres de carbone et matrice de carbone à haute tenue thermique utilisés dans les tuyères, les disques de freins, etc.

Caractéristiques			Verre E	Carbone HR	Carbone HM	Carbone THM	Carbone HM (brai)
Masse volumique	ρ	(kg/m ³)	2600	1 750	1810	1950	2000
Diamètre		(μm)		8	8	8	12
Module de Young	E_f	(Gpa)	73	220	400	600	380
Module spécifique	E_f/ρ	(MN m/kg)	28	120	210	310	190
Contrainte à la rupture	σ_{fu}	(Mpa)	3400	3000-3500	2800	2000	2000-2400

Contrainte spécifique σ_{fu}/ρ (kNm/kg)	1300	1710-2860	1550	1030	1000-1200
Prix de revient / aux fibres de verre	1	25-30	50-60	65-70	25-30

Tableau 1.6 Caractéristiques des fibres de carbone et du verre E

1.4.4.3 Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées

Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées sont des fibres de synthèse plus connues sous la désignation commerciale de fibres de « **Kevlar** », lancée par Dupont de Nemours (USA) depuis 1972. D'autres industriels commercialisent également ces fibres sous des désignations propres à chacun (Twaron, Technora, etc.). Elles sont élaborées par filage d'une solution sulfurique concentrée d'un haut polymère, polyaramide ou polyamide. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité.

a) Caractéristiques mécaniques des fibres aramides

Le tableau 1 7 résume les caractéristiques de différents types de fibres aramides, mesurées sur monofilaments. Les valeurs de contrainte à la rupture de ces fibres sont proches de celles des fibres de carbone HR, pour un prix de revient 3 à 5 fois moindre. Des ensimages adaptés sont développés pour améliorer l'adhérence fibre-résine. Les fibres de Kevlar sont associées à d'autres fibres (verre, carbone) pour former des composites hybrides.

Caractéristiques	Kevlar 29	Kevlar 49	Kevlar 149	Twaron	Technora
Masse volumique ρ (kg/m ³)	1440	1450	1470	1440	1390
Diamètre (μm)	12	12	12	12	12
Module de Young E_f (Gpa)	60	130	200	100	90
Module spécifique E_f/ρ (MN m/kg)	42	90	136	70	65
Contrainte à la rupture σ_{fu} (Mpa)	3000	3600	3000	3500	38000
Contrainte spécifique σ_{fu}/ρ (kN m/kg)	2080	2480	2040	2430	2730
Allongement à la rupture (%)	4	3	1.5	3	4

Tableau 1.7 Caractéristiques mécaniques de différents types de monofilaments aramides

b) Domaines d'utilisation

L'une des premières utilisations des fibres d'aramides a été le remplacement des armatures d'acier dans les pneumatiques. En raison de leur légèreté et de leur résistance au choc et à l'impact, leur usage s'est développé dans la fabrication de protections contre projectiles (blindages, gilets pare-balles., etc.), ainsi que dans certains articles de sports (skis, raquettes de tennis., etc.).

1.4.4.4 Les fibres céramiques

Le principal intérêt des céramiques est leur caractère réfractaire. Diverses fibres sont obtenues par dépôt chimique en phase vapeur d'un revêtement céramique : de bore (fibres de bore B), de bore-carbure de bore (fibres B-B₄C), de silicium (fibres de silicium) ou de bore-silicium (fibres BorSic), sur un fil support en tungstène ou en carbone.

a) Caractéristiques mécaniques et utilisation

Les différentes fibres céramiques ont des caractéristiques assez voisines (tableau 1.8). Ces caractéristiques restent maintenues jusqu'à des températures allant de 500 à 1000 °C. Les fibres SiC et BorSic sont utilisées avec des matrices métalliques ou céramiques pour la fabrication des aubes de compresseurs et de turbines. Les fibres de bore et de bore-carbure de bore associées aux résines thermoplastiques et thermodurcissables, notamment époxydes, sont utilisées dans les domaines des sports et loisirs.

Caractéristiques		Bore	Bore + B ₄ C	SiC
Masse volumique	ρ (kg/m ³)	2600	2600	3000
Diamètre	(μ m)	100-150	100-150	100-150
Module de Young	E_f (Gpa)	430	430	410
Module spécifique	E_f/ρ (MN m/kg)	165	165	140
Contrainte à la rupture	σ_{fu} (Mpa)	3800	4000	3900
Contrainte spécifique	σ_{fu}/ρ (kN m/kg)	1460	1540	1300

Tableau 1.8 Caractéristiques mécaniques de quelques fibres céramiques

1.4.4.5 Les fibres synthétiques thermostables

Les fibres synthétiques thermostables sont des fibres organiques obtenues par synthèse. Leurs caractéristiques mécaniques sont faibles mais restent conservées aux températures élevées. Elles sont associées à des résines thermostables pour obtenir des matériaux composites de bonne tenue thermique, utilisés dans les isolants électriques et thermiques, les protections thermiques : boucliers de missiles et cônes de rentrée de véhicule spatial. Chaque fabricant propose sa propre formule sous une désignation commerciale. Le tableau 1.10 résume les caractéristiques mécaniques de quelques unes d'entre elles.

Caractéristiques		Kermel	Nomex	Kynol	PBI	Apyeil
Masse volumique	ρ (kg/m ³)	1350	1380	1270	1430	1380
Module de Young	E_f (Gpa)	7	16	4.5	6	17
Contrainte à la rupture	σ_{fu} (Mpa)	470	670	280	500	660
Allongement à la rupture	ϵ_{fu} %	20	45	20-60	30	40

Tableau 1.10 Caractéristiques mécaniques des fibres thermostables

1.4.4.5 Autres fibres

Il existe d'autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à la rupture, excepté les fibres métalliques, et dont l'utilisation est réservée à la recherche de :

- produits à bas prix de revient ;
- produits à haute isolation thermique ;
- produits de bonne conductivité thermique ou électrique.

Parmi ces fibres nous avons :

a) les fibres d'origine végétale

- le bois, utilisé sous forme de fibres orientées, feutres, papiers imprégnés, etc. ;
- le sisal, le jute, le lin, de moins en moins utilisés au profit des fibres de verre.

b) les fibres d'origine minérale

- l'amiante (interdite dans certaines utilisations) ;
- la silice.

c) les fibres synthétiques

- fibres polyester (tergal, dacron, térylène, etc.) ;
- fibres polyamides.

d) les fibres métalliques

- acier ;
- cuivre ;
- aluminium.

Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques afin d'obtenir des composites:

- de bonne conductivité thermique et électrique,
- de caractéristiques thermo-mécaniques élevées.

1.5 Modes de fabrication des composites

Nous présentons les procédés destinés principalement à la fabrication des composites à matrices organiques. Ils comportent trois opérations essentielles [1, 3 et 4] :

- mise en forme de la pièce ;
- imprégnation du renfort par la résine : elle peut être antérieure à la mise en forme ou carrément à l'opération de fabrication (pré imprégnés) ;
- durcissement de la résine (polymérisation).

La différence entre les procédés réside dans les moyens mis en œuvre pour réaliser ces trois étapes. L'épaisseur souhaitée des pièces fabriquées est obtenue dans la plus part des cas par l'empilement de plusieurs couches de matrice-renfort formant ainsi les stratifiés.

Une approche pratique pour présenter les divers modes est le classement de ces derniers selon leurs capacités de production (série) et la forme des produits [5 et 6].

1.5.1 Petites séries

1.5.1.1 Moulage au contact

L'opération se fait sur un moule ouvert (figure 1.5) et nécessite peu de moyens (c'est le procédé le plus simple et le moins coûteux). Les opérations de moulage restent pour l'essentiel inchangées dans les autres procédés et se déroulent comme suit :

- le demi moule est enduit avec un agent de démoulage, puis une couche de résine de "gel coat" est déposée ;
- le renfort (mat, tissu) est placé sur le moule, il prend la forme de la pièce ;
- imprégnation du renfort par la résine liquide suivie d'un ébullage au rouleau cannelé, on parle aussi de compactage ;
- après gélification de toute l'épaisseur on procède au démoulage ;
- le durcissement (polymérisation) s'effectue en milieu ambiant et peut être accélérée par étuvage ;
- finition de la pièce : détourage, ponçage, peinture..., etc.

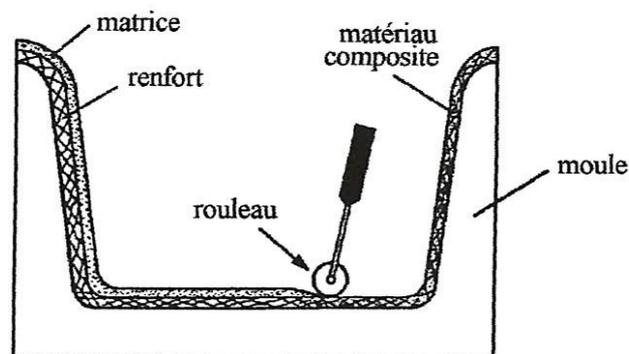


Figure 1.5 Principe du moulage au contact

1.5.1.2 Moulage par projection simultanée

Comme pour le moulage au contact, ce procédé se fait sur un moule ouvert (figure 1.6), la différence est que les couches sont déposées par projection simultanée du renfort (fibres coupées) et de la résine liquide. Toutes les autres opérations sont identiques à celles citées ci-dessus.

Ces deux procédés permettent d'obtenir des pièces et des structures composites avec un faible coût, de dimensions importantes et de formes variées mais de précision et de performances mécaniques limitées.

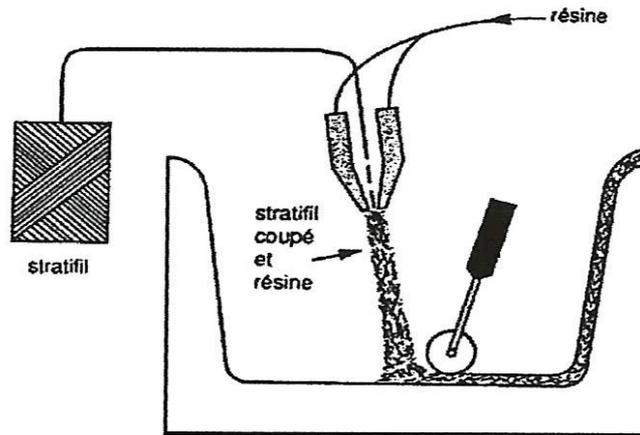


Figure 1.6 : Moulage par projection simultanée

1.5.2 Procédés pour moyennes séries

1.5.2.1 Moulage sous vide

Le moulage se fait entre moule et contre moule, le renfort est placé en premier, la résine est versée par-dessus et le contre moule poreux, recouvert d'une membrane étanche, vient fermer l'ensemble (figure 1.7). L'étalage de la résine, l'imprégnation et l'ébullage se font sous l'effet de la dépression créée à l'intérieur du moule. Le contre moule peut être réduit à la seule membrane d'étanchéité (moulage au sac). Ce procédé permet d'obtenir des pièces de bonnes caractéristiques mécaniques grâce à une distribution uniforme de la résine et un faible taux de porosité.

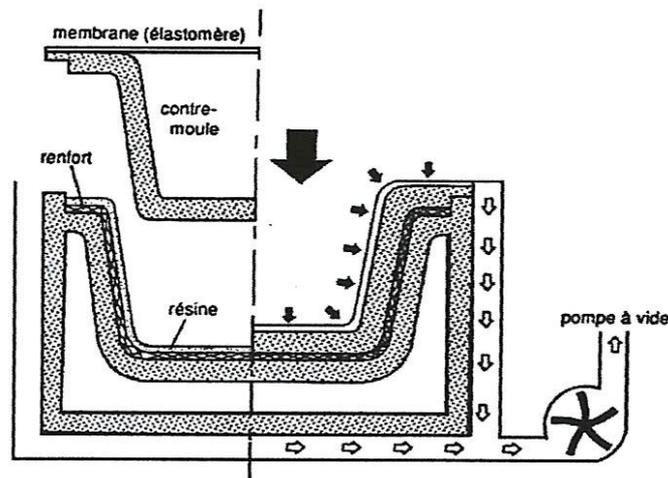


Figure 1.7 : Moulage sous vide

1.5.2.2 Moulage par compression à froid

L'imprégnation et l'ébullage se font en moule fermé par pression mécanique (contre moule monté sur la partie mobile de la presse). La durée de fermeture du moule correspond à la polymérisation de la résine. La chaleur accumulée par exothermie maintient la température du

moule (50 à 70°C). La différence de pression entre parties horizontales et non horizontales de la pièce donne un taux de renfort variable.

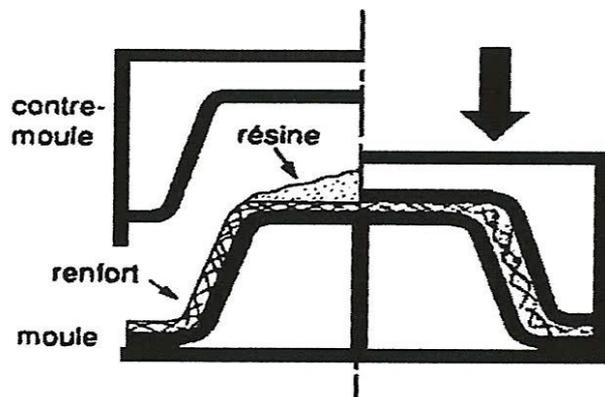


Figure 1.8 Moulage par compression à froid

1.5.2.3 Moulage par injection de résine liquide sous pression (RTM^A)

La résine liquide est injectée sous pression dans un moule fermé à l'intérieur duquel le renfort a été préalablement placé (figure 1.9). Ce procédé permet d'intégrer des inserts, de réaliser des pièces compliquées où même des structures sandwiches avec une très bonne maîtrise du taux de renfort. Une variante de ce procédé (VARTM^{**}) consiste à créer une dépression entre moule et contre moule ce qui diminue d'avantage le taux de porosité.

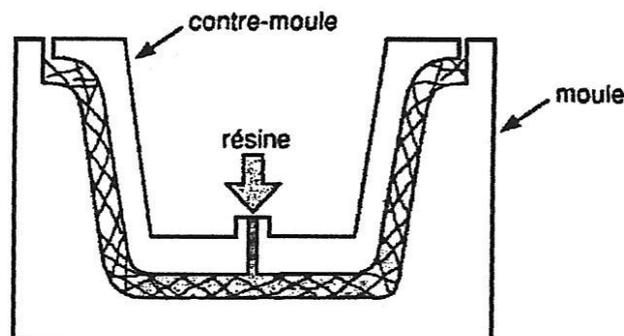


Figure 1.9 Moulage par injection de résine

* RTM : Resin Transfert Molding

** VARTM : Vaccum Assisted RTM

1.5.2.4 Moulage en autoclave

Au lieu d'un contre moule, ce procédé utilise une membrane déformable qui enveloppe le renfort imprégné et le moule, formant ainsi un sac étanche. Le moule est ensuite placé dans une enceinte chauffée et pressurisée (autoclave) qui permet de réaliser des cycles de cuisson

précis en température et en pression. La pression hydrostatique exercée par le fluide de l'enceinte sur la pièce, assistée par une dépression à l'intérieur du sac, permet une répartition uniforme de la résine. L'utilisation de prepregs (drappage de préimprégnés) améliore la maîtrise de l'orientation des fibres et du taux de renfort qui peut atteindre 70% en volume. Ce procédé permet d'obtenir des structures très fines ou sandwiches de hautes performances.

1.5.3 Procédés pour grandes séries

Les procédés pour grandes séries nécessitent l'emploi de demi-produits facilitant la mise en place des renforts et la manipulation des résines. Il existe trois types de demi-produits :

- Préformes : renforts préparés aux formes et aux dimensions exactes des pièces à réaliser avant l'opération de fabrication.
- Préimprégnés : renforts de différentes présentations imprégnés de résine et stockés jusqu'à leur emploi, on distingue :
 - a) Les prepregs : stratifils, roving, rubans ou tissus préimprégnés ;
 - b) Les Compounds, qui comportent :
 - Les mats préimprégnés (SMC : sheet moulding compounds) présentés en feuilles ;
 - Les prémix : mélanges de résines, charges et fibres coupées présentés en vrac sous deux formes :
 - BMC : Bulk moulding compounds (vrac) ;
 - DMC : Dough moulding compounds (pâte).

1.5.3.1 Moulage par compression à chaud par voie humide

Le procédé est exactement le même que le moulage par compression à froid sauf qu'il utilise un moule chauffé (figure 1.10) ayant pour but d'accélérer la polymérisation. Il est compatible avec l'emploi des préformes.

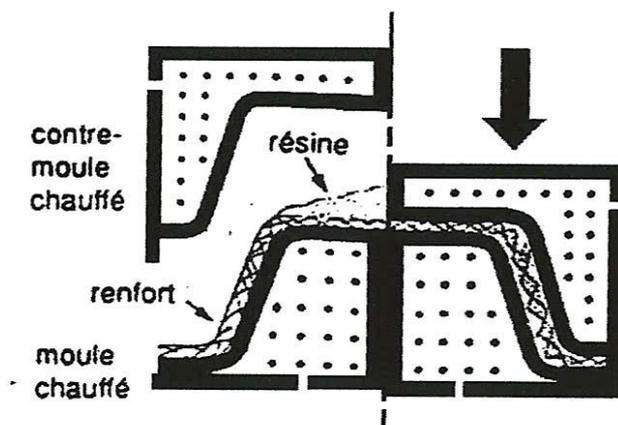


Figure 1.10 Moulage par compression à chaud

1.5.3.2 Moulage par compression à chaud par voie sèche

Semblable au précédent, il requiert l'utilisation de demi-produits compounds. Sous l'effet de la chaleur et de la pression, la matière s'écoule et remplit toute l'empreinte du moule. Les possibilités des formes obtenues sont très grandes et les cadences plus élevées.

1.5.3.3 Moulage par injection de compounds

L'opération consiste à injecter sous forte pression et à grande vitesse, par une vis d'Archimède (figure. 1.11), des compounds (SMC ou prémix) dans un moule fermé et chauffé où a lieu la polymérisation. Les produits obtenus sont appelés plastiques renforcés. Le procédé permet d'obtenir des pièces complexes monoblocs.

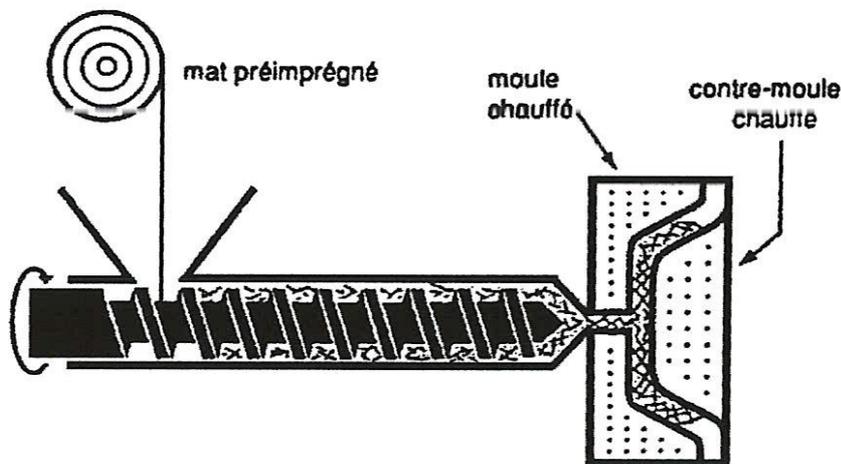


Figure 1.11 : Moulage par injection de compounds

1.5.3.4 Moulage par injection réaction (R-RIM)

L'injection se fait dans un moule fermé sous faible pression. La résine est formée de deux constituants mélangés dans une canne juste avant l'injection. Le renfort est soit mélangé à l'un des composants (fibres broyées) soit mis en place préalablement dans le moule (mat ou tissu).

1.5.4 Procédés pour corps creux

1.5.4.1 Enroulement filamentaire

C'est une opération de bobinage de renforts continus sur un moule ou un mandrin (figure 1.12) assurée par la rotation de ces derniers et le mouvement du système d'approvisionnement en renfort. Ces mouvements et leurs combinaisons déterminent le type d'enroulement : circonférentiel, hélicoïdale (continu et discontinu) ou polaire. Les pièces obtenues sont des tubes, des tuyaux, des réservoirs, etc.

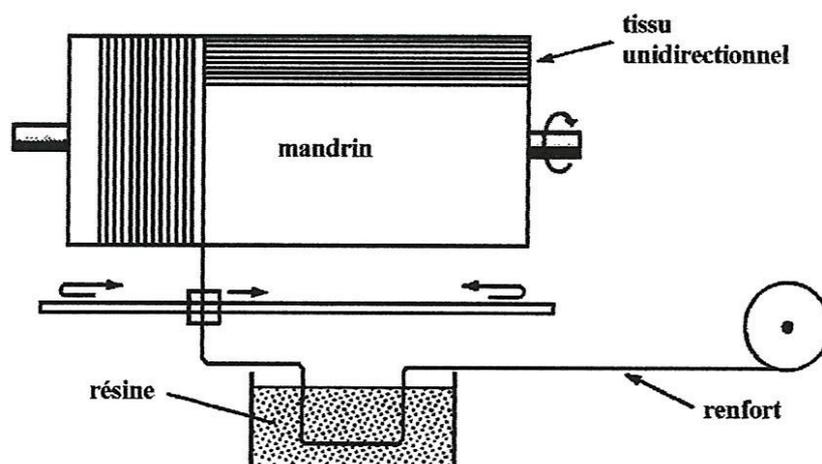


Figure 1.12 Exemple d'enroulement filamentaire circonférentiel

1.5.4.2 Centrifugation

Le renfort et la résine sont projetés sur la paroi intérieure d'un moule tournant à grande vitesse (2000 tr/min). L'imprégnation est réalisée sous l'effet de la force centrifuge.

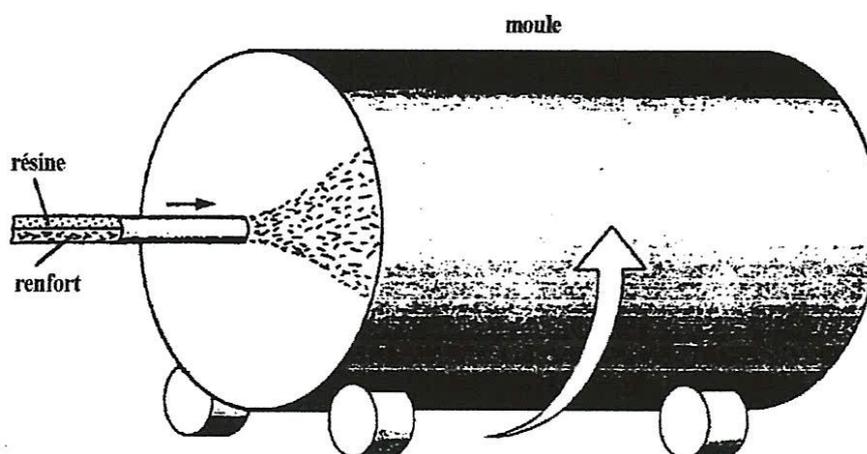


Figure 1.13 Moulage par centrifugation

1.5.5 Procédé de moulage en continu

1.5.5.1 Moulage entre pellicules

Le renfort imprégné de résine est pris en sandwich entre deux pellicules (film de démoulage) servant de moule, s'ensuit une mise en forme (plaques planes, sandwichs, panneaux ondulés ou nervurés..., etc.) et une polymérisation par chauffage.

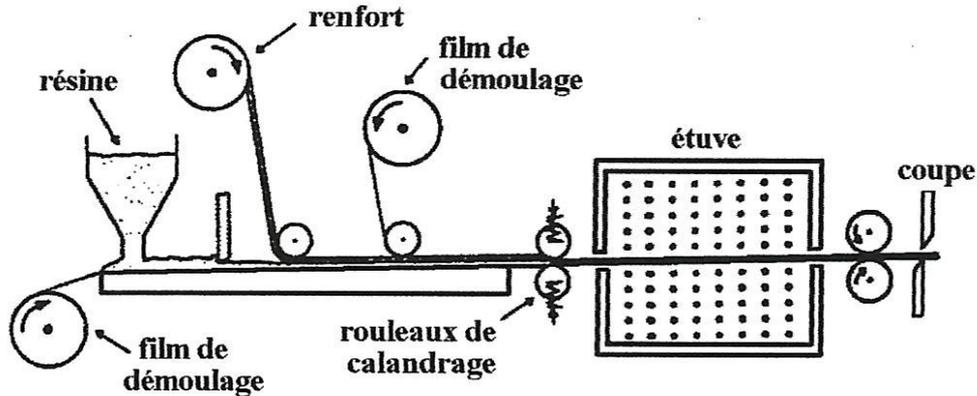


Figure 1.14 Moulage entre pellicules

1.5.5.2 Pultrusion

Le procédé consiste à tirer à travers une filière chauffée (figure 1.15) des renforts imprégnés de résine. La mise en forme et la polymérisation se font simultanément dans la filière et donnent des profilés pleins ou creux de formes complexes et de section constante.

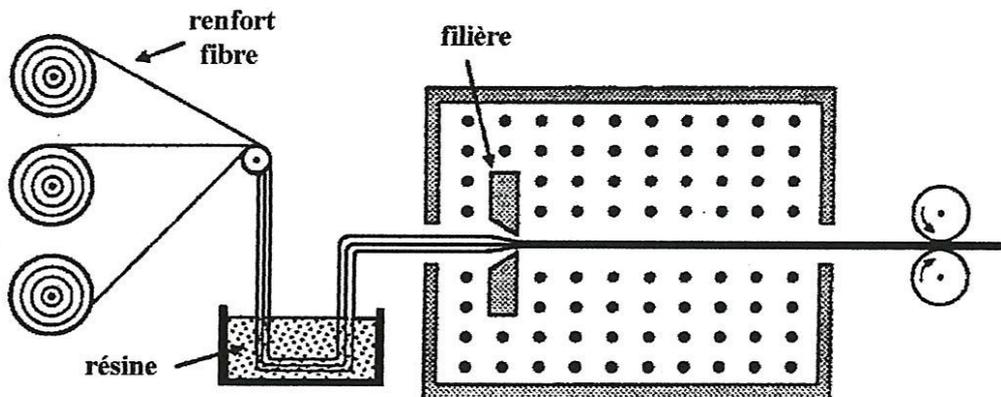


Figure 1.15 Pultrusion

1.6 Les stratifiés composites

Les stratifiés sont des composites formés par un empilement de couches successives de renfort-matrice appelées plis ou encore monocouches constituant l'élément de base de toute structure composite. Les plis sont caractérisés par la forme du renfort (mat, fils, roving, tissu, ..., etc.) qui détermine leur comportement mécanique, une répartition aléatoire de fibres courtes ou longues (mat par exemple) correspond à une couche pratiquement isotrope dans son plan, une orientation privilégiée des fibres correspond à une anisotropie marquée. Les couches peuvent être de natures différentes en matière des fibres et forme du renfort. Ces deux paramètres, en plus de l'empilement et de l'orientation, permettent de moduler les caractéristiques du stratifié pour répondre au mieux aux sollicitations imposées.

La désignation d'un stratifié doit tenir compte de tous ces paramètres. Elle se fait généralement selon un code établi pour les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels auxquels peut se ramener l'étude de tout autre type de stratifiés (figure 1.16).

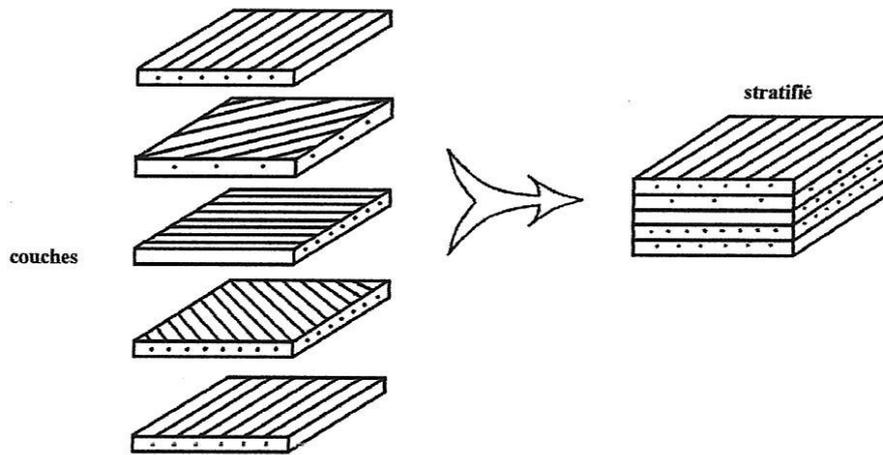


Figure 1.16 Modèle de base des stratifiés

1.6.1 Désignation des stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels

Les règles de désignation d'un stratifié sont les suivantes :

- Chaque couche est désignée par la valeur de son angle d'orientation (angle d'orientation des fibres en degrés par rapport à l'axe x de référence). Le sens de l'orientation est pris en compte (positif ou négatif), la désignation dépend donc du référentiel choisi (figure 1.17) ;
- Les couches successives d'angles différents sont séparées par un / ;
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique indiquant le nombre de couches dans cette direction ;
- Si deux couches successives ont des orientations de même valeurs et de sens opposés, elles peuvent être désignées par le signe \pm :

$$+ \theta / - \theta \equiv \pm \theta, \quad - \theta / + \theta \equiv \mp \theta.$$

- La désignation se fait couche par couche en allant d'une face à l'autre, des crochets indiquant le début et la fin.

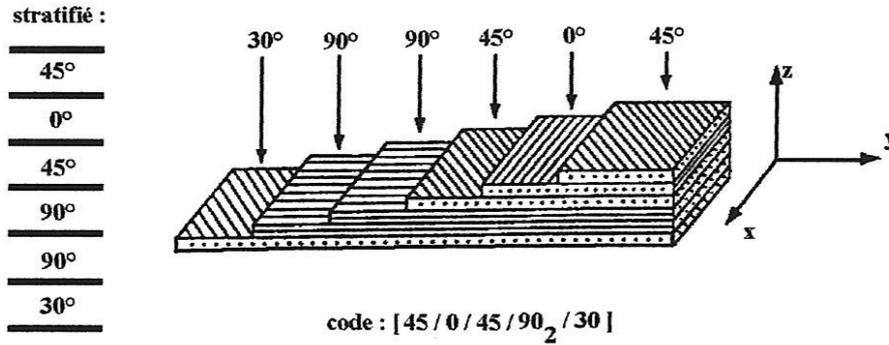


Figure 1.17 Exemple de désignation d'un stratifié

- S'il y a une séquence qui se répète, les couches en question sont mises entre parenthèses pour désigner la séquence. Un indice numérique indique le nombre de répétition de celle-ci (figure 1.18).



Figure 1.18 Stratifié avec une séquence répétée

1.6.2 Modes de stratification particuliers

Selon la séquence d'empilement, on rencontre des stratifiés :

a) Equilibrés : le stratifié comporte autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.

b) Symétriques : le plan moyen du stratifié est plan de symétrie (par rapport à la disposition des couches). La désignation dans ce cas peut se limiter à la moitié des plis en débutant d'une face et en s'arrêtant au plan moyen à côté duquel un indice "s" désigne cette symétrie. Si le nombre total des couches est impair la couche centrale (plan de symétrie) est surlignée (figure 1.19).

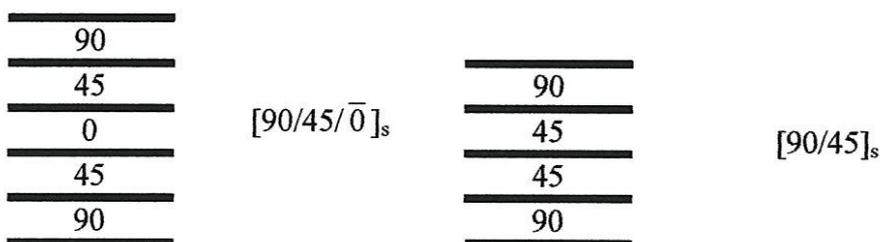


Figure 1.19 Désignation de stratifiés symétriques

c) Croisés : un stratifié croisé est constitué exclusivement de la séquence $[0/90^\circ]$ qui se répète n fois.

d) Orthogonaux : ils comportent autant de couches à 0° que de couches à 90° .

e) Hybrides : se sont des stratifiés composés de couches renforcées par des fibres de natures différentes. Une meilleure performance peut être obtenue en utilisant au mieux les propriétés de chaque type de renfort. On peut distinguer :

- des hybrides interplis, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente ;
- des hybrides intraplis, constitués par une séquence de plis identiques, chaque pli étant constitué de couches différentes ;
- des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les couches.

Le matériau de la fibre doit être mentionné pour chaque couche. Un exemple est donné en figure 1.20

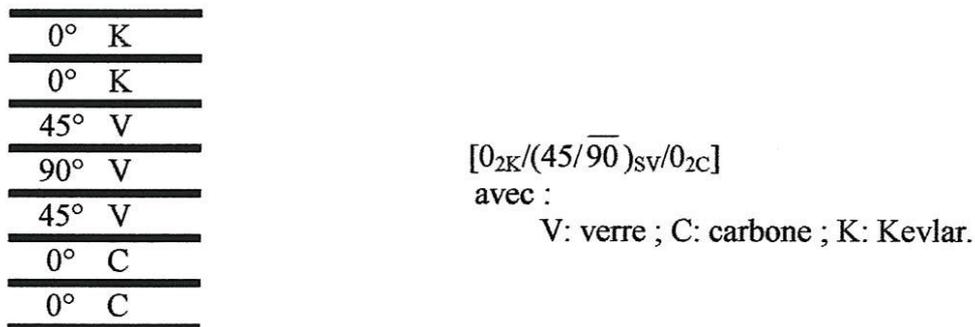


Figure 1.20 Désignation d'un stratifié hybride

CHAPITRE 2

FORMULATION DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE DES STRATIFIES

2.1 Introduction

Dans les différents procédés de mise en œuvre, la réalisation de structures stratifiées en composites se fait par le dépôt de couches successives de renfort-résine sur un moule, comportant des surfaces planes ou courbes. Par conséquent, les structures obtenues sont des structures multicouches de type plaques ou coques [1], comportant deux niveaux d'hétérogénéité :

- Hétérogénéité à l'échelle des constituants d'une couche : fibres et matrice : *hétérogénéité microscopique* ;
- Hétérogénéité à l'échelle des constituants du stratifié : plis de différentes compositions et/ou orientations : *hétérogénéité macroscopique*.

Pour faciliter la modélisation du comportement mécanique de tels composites, les milieux hétérogènes sont remplacés par des milieux homogènes de comportement moyen équivalent. Ce passage appelé *homogénéisation* s'effectue en deux étapes :

- Homogénéisation micromécanique : le pli hétérogène est représenté par un pli homogène équivalent dont le modèle de comportement (isotrope, orthotrope ou anisotrope) dépend de la forme du renfort (mat, stratifils ou tissus unidirectionnels, tissus 2D), et dont les caractéristiques dépendent de la nature et des proportions des constituants (fibres et résine).

Les modules d'élasticité du pli ou modules de l'ingénieur, déterminés sur des éprouvettes de laboratoire, sont une très bonne mesure des propriétés homogénéisées d'une couche pour un taux de renfort donné. Cependant le taux de renfort réel obtenu sur le stratifié est généralement différent de celui des éprouvettes de caractérisation (différence liée aux étapes de fabrication), de plus pour la conception et l'optimisation d'un stratifié il sera plus intéressant de déterminer les caractéristiques mécaniques du pli par des formules théoriques en fonction des caractéristiques des fibres et de la matrice et de la fraction volumique des fibres au sein du stratifié.

- Homogénéisation macromécanique : le stratifié est remplacé par un matériau homogène anisotrope dont les caractéristiques mécaniques sont déterminées à partir des propriétés homogénéisées des plis, à travers l'application des définitions de la théorie des plaques multicouches. Les plis pouvant être orientés différemment, pour pouvoir écrire la loi de comportement (ou équation constitutive) du stratifié, il est nécessaire d'exprimer leurs propriétés dans un même référentiel.

Pour la mise en équation du problème général de mécanique des milieux continus, la formulation variationnelle permet de faciliter l'écriture analytique des équations du mouvement et des conditions aux limites pour les systèmes complexes [7]. Elle permet aussi d'introduire des méthodes de calcul approchées numériques ou analytiques. Dans le cas des stratifiés, la formulation directe des plaques est beaucoup plus facile, et pour une géométrie simple les conditions aux limites sont déduites de manière intuitive, les deux approches (variationnelle ou directe) étant équivalente [8]. Cependant, il sera nécessaire de développer une formulation énergétique des stratifiés pour introduire les méthodes de calcul approchées.

2.2 Détermination des caractéristiques mécaniques d'un pli unidirectionnel dans son repère d'orthotropie

2.2.1 Schéma d'élasticité linéaire

Un pli unidirectionnel (figure 2.1) est composé de fibres parallèles assemblées et maintenues par la résine. Ses axes principaux sont 1(*L*) direction longitudinale portée par les fibres, 2 et 3 (*T* et *T'*) perpendiculaires aux fibres.

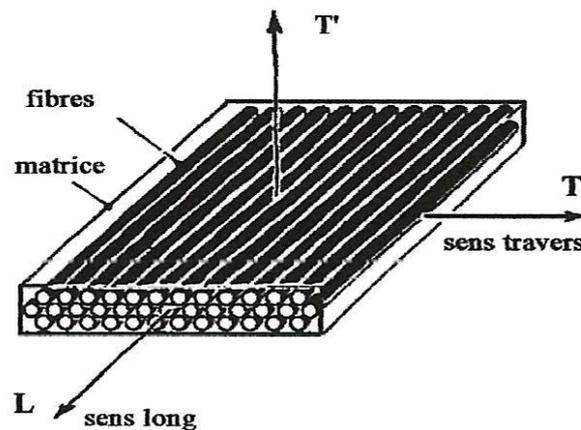


Figure 2.1 Pli unidirectionnel

Cette géométrie induit des invariances de comportement par rotation quelconque autour de l'axe *L* qui est alors axe d'isotropie, le matériau est isotrope dans tout plan perpendiculaire à cet axe. Le composite est isotrope transverse. En exploitant cette propriété, la loi de comportement du matériau en terme des coefficients de souplesse (expression 2.1) s'écrit en fonction de 5 modules d'élasticité indépendants [9] suivant la relation matricielle (2.2) :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad ; i, j = 1,3 \quad (2.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TT'}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{TT'}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TT'}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Où:

E_L : Module de traction dans la direction L ;

$E_T = E_{T'}$: Module de traction dans les directions T et T' ;

$\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{LT'}}{E_L}$: Contraction suivant T et T' pour une traction appliquée suivant L ;

$G_{LT} = G_{LT'}$: Module de cisaillement autour des directions T et T' ;

$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TT'})}$: Module de cisaillement autour de la direction L .

avec:

$\{\varepsilon\}^T = \langle \varepsilon_1 (= \varepsilon_{11}), \varepsilon_2 (= \varepsilon_{22}), \varepsilon_3 (= \varepsilon_{33}), \varepsilon_4 (= 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23}), \varepsilon_5 (= 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13}), \varepsilon_6 (= 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12}) \rangle$;

$\{\sigma\}^T = \langle \sigma_1 (= \sigma_{11}), \sigma_2 (= \sigma_{22}), \sigma_3 (= \sigma_{33}), \sigma_4 (= \sigma_{23}), \sigma_5 (= \sigma_{13}), \sigma_6 (= \sigma_{12}) \rangle$.

L'inversion de la relation (2.2) conduit à l'écriture de la loi de comportement en fonction des coefficients de rigidité sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Où les constantes de rigidités sont reliées aux modules élastiques [1] par les expressions :

$$C_{11} = \frac{1-\nu_{TT'}^2}{E_T \Delta}$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{TL}(1+\nu_{TT'})}{E_T \Delta}$$

$$C_{22} = \frac{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}{E_L E_T \Delta} \quad (2.4)$$

$$C_{23} = \frac{\nu_{TT'} + \nu_{LT}\nu_{TL}}{E_L E_T \Delta}$$

$$C_{66} = G_{LT}$$

avec :

$$\Delta = \frac{1-2\nu_{LT}\nu_{TL}-2\nu_{LT}\nu_{TT'}\nu_{TL}-\nu_{TT'}^2}{E_L E_T^2}$$

2.2.2 Approches théoriques pour la détermination des modules élastiques d'un composite unidirectionnel

Le problème consiste à évaluer le comportement local de l'association fibre-matrice à partir des caractéristiques mécaniques et des proportions des constituants, et de le généraliser ensuite au composite. Les fibres et la matrice sont considérées comme étant des matériaux isotropes à élasticité linéaire. Leur comportement est décrit par les modules suivants :

	<i>Pour la matrice</i>	<i>pour les fibres</i>
Module de Young	E_m	E_f
Coefficient de Poisson	ν_m	ν_f
Module de cisaillement	$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$	$G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}$
Module de compressibilité	$k_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)}$	$k_f = \frac{E_f}{3(1-2\nu_f)}$
Module de compression latérale	$K_m = k_m + \frac{G_m}{3}$	$K_f = k_f + \frac{G_f}{3}$

2.2.2.1 Comportement local décrit par la loi des mélanges

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques d'un composite, nous étudions un assemblage de géométrie donnée de deux phases (fibre et matrice) de caractéristiques mécaniques différentes, soumis à des sollicitations simples [10].

a) Module d'élasticité longitudinal

Considérons un chargement F parallèle au plan de séparation de la fibre et de la matrice (figure 2.2). Les deux matériaux étant considérés parfaitement collés par hypothèse, la matrice (m) et la fibre (f) possèdent la même déformation longitudinale ε_L que le matériau composite :

$$\varepsilon_{Lm} = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_L \quad (2.1)$$

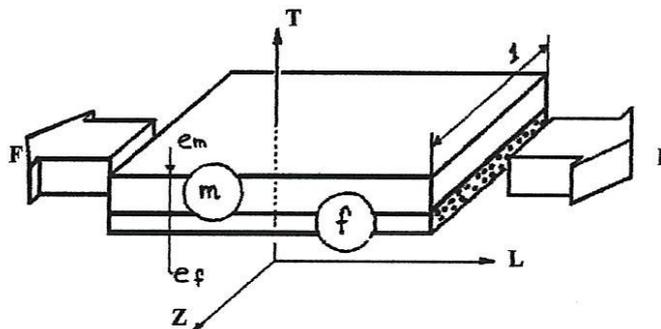


Figure 2.2 Chargement longitudinal

L'état de contraintes dans chaque matériau est un état de traction pure, et les contraintes de traction sont données par :

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_L \quad \text{dans la matrice ;}$$

et $\sigma_f = E_f \varepsilon_L$ dans la fibre.

La charge totale appliquée est :

$$F = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m \quad (2.2)$$

Où : S_f et S_m sont respectivement les aires de la section droite de la fibre et de la matrice.

En reportant les expressions des contraintes dans cette dernière relation nous obtenons :

$$F = (E_f S_f + E_m S_m) \varepsilon_L \quad (2.3)$$

La contrainte de traction dans le composite est définie par :

$$\sigma_L = \frac{F}{S} = E_L \varepsilon_L \quad (2.4)$$

En remplaçant F par son expression on obtient :

$$E_L = E_f \frac{S_f}{S} + E_m \frac{S_m}{S} \quad (2.5)$$

Avec :

E_L : Module d'élasticité longitudinal du composite ;

$S = S_f + S_m$: Section droite du composite.

Pour un composite de largeur et de longueur égales à l'unité, les fractions volumiques de la fibre (V_f), et de la matrice (V_m) sont données par :

$$V_f = \frac{S_f \times 1}{S \times 1} = \frac{e_f}{e_f + e_m} \quad (2.6)$$

$$V_m = \frac{S_m \times 1}{S \times 1} = \frac{e_m}{e_f + e_m} \quad (2.7)$$

Le module d'élasticité du composite s'écrit alors :

$$E_L = E_f V_f + E_m V_m \quad (2.8)$$

Finalement, en notons que $V_f + V_m = 1$, cette dernière expression peut s'écrire :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (2.9)$$

b) Module d'élasticité transversal E_T

Considérons à présent le même matériau que précédemment, soumis à un chargement suivant l'épaisseur du composite (figure 2.3).

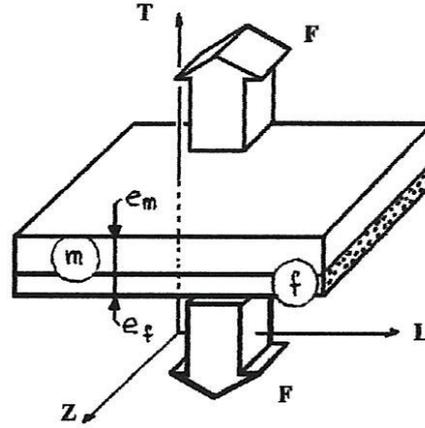


Figure 2.3 Chargement transversal

Dans ce cas les états de contraintes dans la fibre et dans la matrice sont identiques, et sont définies par la contrainte de traction dans le composite σ_T , tel que :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_T \quad (2.10)$$

La déformation dans le composite est donné par :

$$\varepsilon_T = \frac{1}{E_T} \sigma_T = \frac{\Delta(e_m + e_f)}{e_m + e_f} = \frac{\Delta e_m}{e_m + e_f} + \frac{\Delta e_f}{e_m + e_f} = \varepsilon_{Tm} V_m + \varepsilon_{Tf} V_f \quad (2.11)$$

Cette expression peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{1}{E_T} \sigma_T = \frac{1}{E_m} \sigma_T V_m + \frac{1}{E_f} \sigma_T V_f \Rightarrow \frac{1}{E_T} = \frac{1}{E_m} V_m + \frac{1}{E_f} V_f \quad (2.12)$$

Le module d'élasticité transversal a pour expression :

$$E_T = \frac{E_m E_f}{V_m E_f + V_f E_m} \quad (2.13)$$

Ou encore :

$$E_T = E_m \frac{1}{(1 - V_f) + \frac{E_m}{E_f} V_f} \quad (2.14)$$

c) Coefficient de Poisson ν_{LT}

Le coefficient de Poisson ν_{LT} est défini comme étant le rapport des déformations transversale-longitudinale, pour un chargement longitudinal (figure 2.2).

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} \quad (2.15)$$

En remplaçant la déformation transversale (ε_T) par son expression (2.11), nous obtenons :

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_{Tm} V_m + \varepsilon_{Tf} V_f}{\varepsilon_L} \quad (2.16)$$

Et en introduisant les coefficients de Poisson de la matrice et de la fibre pour la même déformation ($\varepsilon_{Lm} = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_L$) :

$$\nu_m = -\frac{\varepsilon_{Tm}}{\varepsilon_L} \quad \text{et} \quad \nu_f = -\frac{\varepsilon_{Tf}}{\varepsilon_L} \quad (2.17)$$

Le coefficient de Poisson du composite s'écrit :

$$\nu_{LT} = \nu_m (1 - V_f) + \nu_f V_f \quad (2.18)$$

d) Module de cisaillement G_{LT}

L'état de chargement donnant lieu à une déformation de cisaillement est illustré par la figure 2.4.

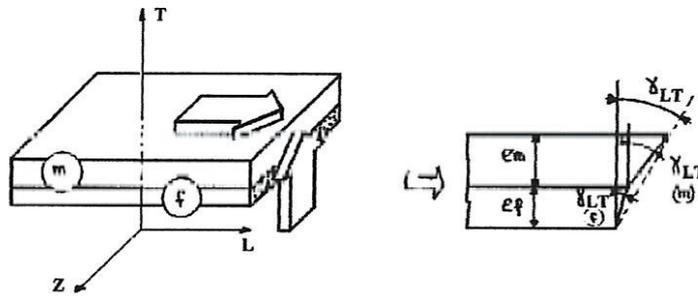


Figure 2.4 Chargement donnant le cisaillement

Les contraintes de cisaillement dans la matrice et la fibre sont identiques et égales à la contrainte dans le composite :

$$\tau_{LTm} = \tau_{LTf} = \tau_{LT} \quad (2.19)$$

La déformation angulaire (γ_{LT}) dans un matériau élastique est reliée à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement (G_{LT}) selon l'expression :

$$\gamma_{LT} = \frac{2(1 + \nu_{LT})}{E_L} \tau_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}} \quad (2.20)$$

D'autre part on observe sur la figure 2.4 que :

$$\gamma_{LT} \times (e_m + e_f) = \gamma_{LTm} \times e_m + \gamma_{LTf} \times e_f \quad (2.21)$$

Ce qui revient à écrire :

$$\gamma_{LT} = \gamma_{LTm} V_m + \gamma_{LTf} V_f \quad (2.22)$$

Ou encore :

$$\frac{\tau_{LT}}{G_{LT}} = \frac{\tau_{LTm}}{G_m} V_m + \frac{\tau_{LTf}}{G_f} V_f \quad (2.23)$$

Finalement, en tenant compte de l'égalité des contraintes, le module de cisaillement du composite prend la forme :

$$G_{LT} = G_m \frac{1}{(1-V_f) + \frac{G_m}{G_f} V_f} \quad (2.24)$$

2.2.2.2 Méthodes analytiques pour la détermination des modules d'élasticité du pli

La comparaison entre les valeurs des modules déterminées expérimentalement sur des unidirectionnels et évaluées par la loi des mélanges a montré que seules les formules (2.9) et (2.18) donnent des valeurs proches de celles obtenues expérimentalement. De plus, cette méthode ne permet pas d'évaluer le module de cisaillement G_{TT} . Une approche plus précise consiste à développer des modèles tenant compte de la géométrie des fibres et de leur arrangement à l'intérieur de la matrice. En considérant un arrangement cylindrique (cellule élémentaire constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de résine figure 2.5), la résolution du problème d'élasticité correspondant permet d'aboutir à des solutions analytiques exactes [1] représentant le comportement du composite constitué d'une répartition uniforme de cette cellule.

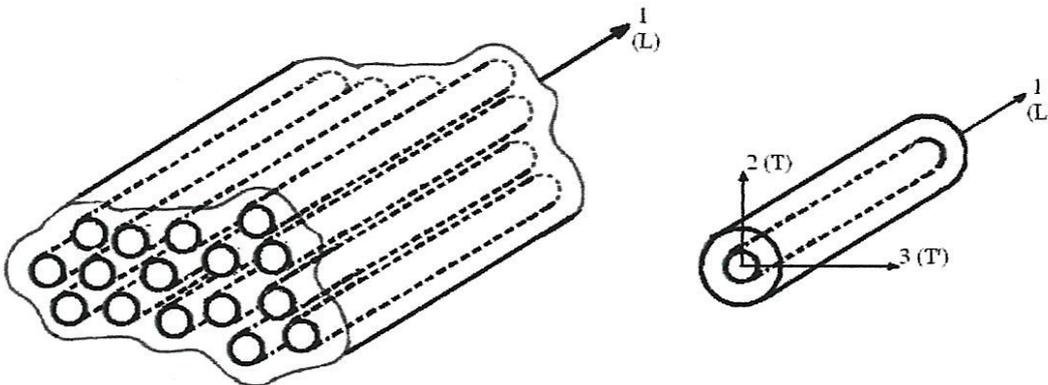


Figure 2.5 Composite unidirectionnel et cellule élémentaire

Les cinq modules indépendants obtenus par cette approche sont :

a) Module d'élasticité longitudinal

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) + \frac{4 V_f (1 - V_f) (\nu_f - \nu_m)^2}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}} \quad (2.25)$$

$$\approx E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

b) Coefficient de Poisson ν_{LT}

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) + \frac{V_f (1 - V_f) (\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}} \quad (2.26)$$

$$\approx \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f)$$

c) Module de cisaillement G_{LT}

$$G_{LT} = G_m \frac{G_f (1 + V_f) + G_m (1 - V_f)}{G_f (1 - V_f) + G_m (1 + V_f)} \quad (2.27)$$

d) Module de compression latéral K_L

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{k_f - k_m + \frac{(G_f - G_m)}{3}} + \frac{1 - V_f}{k_m + \frac{4}{3} G_m}} \quad (2.28)$$

e) Module de cisaillement transversal $G_{TT'}$

$$G_{TT'} = G_m \left(1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + \frac{k_m + \frac{7}{3} G_m}{2 k_m + \frac{8}{3} G_m} (1 - V_f)} \right) \quad (2.29)$$

Le module de Young transversal est calculé à partir des modules précédents grâce à la relation d'élasticité :

$$E_T = \frac{2}{\frac{1}{2 K_L} + \frac{1}{2 G_{TT'}} + 2 \frac{\nu_{LT}^2}{E_L}} \quad (2.30)$$

2.3 Détermination de l'équation constitutive du stratifié

2.3.1 Caractéristiques d'une couche rapportées au référentiel du stratifié

Dans le cas général, un stratifié est constitué de plusieurs couches orthotropes, homogènes ou composites, chacune d'elles pouvant être orientée différemment par rapport au référentiel du stratifié. L'orientation d'une couche est mesurée par l'angle θ (figure 2.6), formé par son axe principal 1 (L) avec l'axe 1' (x) de référence. La notation (1',2',3') est utilisée dans les relations matricielles, tandis que la notation (x,y,z) trouve son application pour les relations tensorielles.

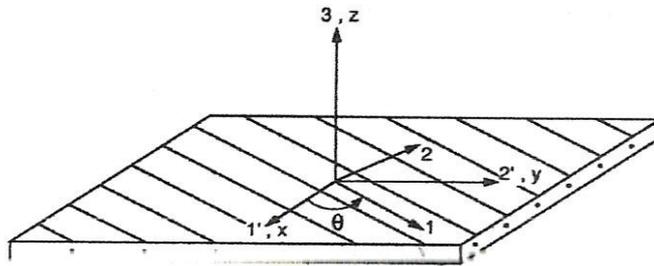


Figure 2.6 Axes principaux (1,2,3) d'une couche et référentiel (1',2',3') = (x,y,z) du stratifié

La matrice de passage du système (1,2,3) au système de référence (x,y,z) est donnée par :

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

La relation de changement de base correspondante pour le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma'] = [a][\sigma][a]^T \quad (2.32)$$

Qui après développement et réécriture en notation matricielle prend la forme :

$$\{\sigma'\} = [T_\sigma] \{\sigma\} \quad (2.33)$$

Où

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

La relation de changement de base pour la matrice de rigidité s'écrit alors :

$$[C'] = [T_\sigma][C][T_\sigma]^T \quad (2.35)$$

Quelque soit θ , la matrice de rigidité rapportée aux axes du stratifié possède la structure suivante :

$$[C'] = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{22} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Cette forme met en évidence des termes de couplage traction-cisaillement dans le plan (C'_{16} , C'_{26} , C'_{36}), et cisaillement-cisaillement (C'_{45}), de nature différente du couplage induit par l'effet de Poisson [10].

2.3.2 Etat de contraintes planes et constantes de rigidité réduites

Un état de contraintes planes dans une couche est définie par le tenseur des contraintes au point (M), exprimé dans le référentiel du stratifié par :

$$[\sigma'(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Compte tenu de l'expression (2.36), la loi de comportement de la couche, sous forme matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{22} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

D'où l'on tire:

$$\varepsilon'_3 = -\frac{1}{C'_{33}}(C'_{13} \varepsilon'_1 + C'_{23} \varepsilon'_2 + C'_{36} \varepsilon'_6) \quad (2.39)$$

En reportant cette dernière expression dans la loi de comportement, celle-ci se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Où Q'_{ij} sont les constantes de rigidité réduites dans un état de contraintes planes, calculées à partir des constantes de rigidité comme suit :

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3} C'_{j3}}{C'_{33}} \quad (2.41)$$

$$Q'_{ij} = Q'_{ji} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 6$$

Pour une couche à renfort unidirectionnel rapportée à son repère d'orthotropie, et en tenant compte des expressions (2.4), les constantes de rigidité réduites sont reliées aux modules de la couche selon les relations suivantes :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} \quad Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \quad (2.42)$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} \quad Q_{66} = G_{LT}$$

Les relations de changement de base pour les constantes de rigidité réduites Q'_{ij} , et pour les rigidités de cisaillement C'_{44} , C'_{45} et C'_{55} , déduites des expressions (2.35) et (2.40), sont données par :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{aligned} \quad (2.43-a)$$

$$C'_{44} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta$$

$$C'_{45} = \left(C_{66} - \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \right) \sin \theta \cos \theta \quad (2.43-b)$$

$$C'_{44} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta$$

2.3.3 Théorie des plaques - schémas du premier ordre

Une plaque (figure 2.7) est un système matériel délimité par deux plans parallèles, distants l'un de l'autre d'une distance h , et une surface cylindrique dont les génératrices sont perpendiculaires à ces plans. Un plan intermédiaire parallèle aux deux premiers définit le plan de référence (xoy). L'épaisseur h mesurée dans le sens $o\vec{z}$ est petite comparativement aux deux autres dimensions ($o\vec{x}$ et $o\vec{y}$), ce qui justifie l'hypothèse de contrainte normale négligée ($\sigma_{zz} = 0$) [11].

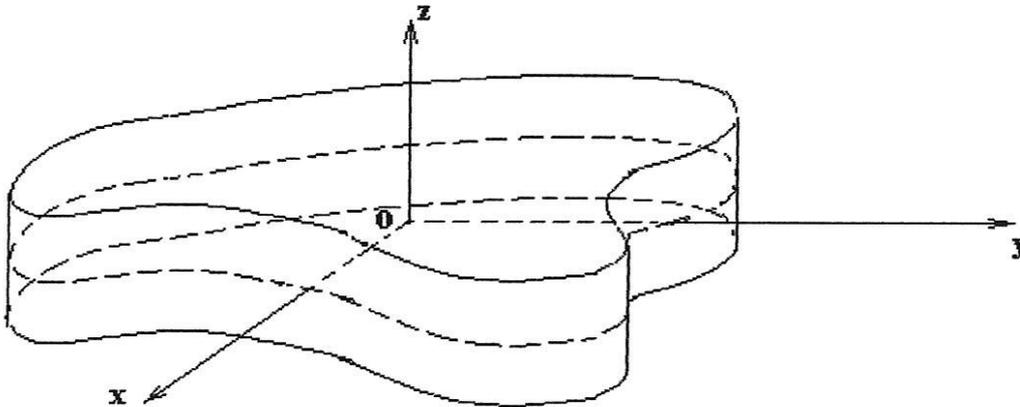


Figure 2.7 Élément de plaque

Les schémas du premier ordre sont basés sur l'hypothèse de Kirchhoff qui stipule que "les sections droites restent droites après chargement". L'expression mathématique de cette hypothèse consiste à développer les déplacements de tout point $M(x, y, z)$ de la plaque, notés u , v et w , en polynômes du premier degré en z , fonctions des déplacements d'un point de référence du plan moyen $M_0(x, y, 0)$, notés u_0 , v_0 et w_0 . Le champ des déplacements s'écrit alors :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0 + z\varphi_x \\ v(x, y, z) = v_0 + z\varphi_y \\ w(x, y, z) = w_0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Où :

u_0, v_0 : Déplacements en membrane.

w_0 : Déplacement transversal (flèche)

φ_x, φ_y : Rotations des sections droites respectivement dans les plans (x, z) et (y, z).

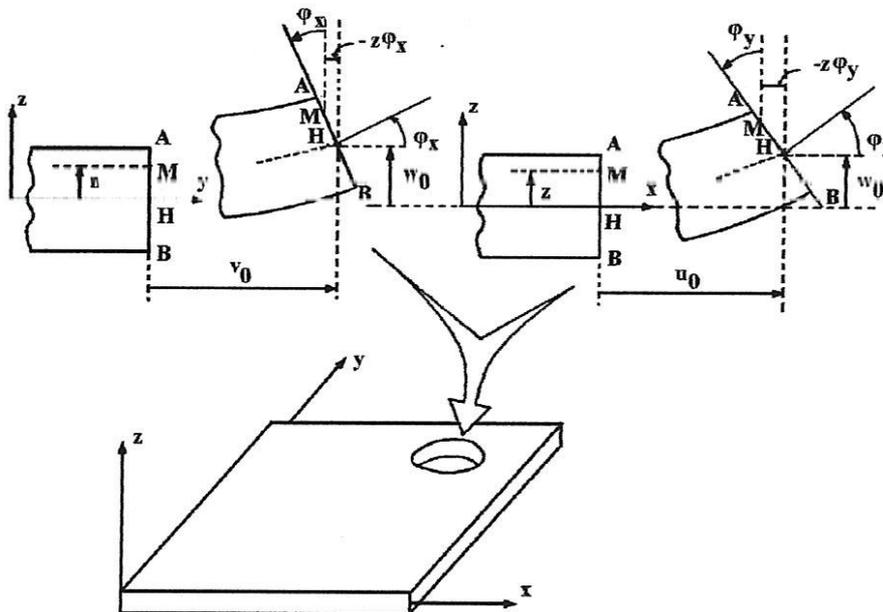


Figure 2.8 Schématisation des déformations dans le cas des théories du premier ordre

Le champ des déformations associé, déduit à partir de la définition du tenseur de la petite déformation qui s'énonce :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad i, j = x, y, z \quad (2.45)$$

Et en introduisant les distorsions angulaires :

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad \text{si } i \neq j \quad (2.46)$$

S'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (2.47)$$

La théorie de Love-Kirchhoff, pour laquelle les déformations en cisaillement transverse sont négligées ($\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$), correspond à la théorie classique des stratifiés. Dans le schéma de Reissner-Mindlin, ces déformations sont supposées être constantes dans l'épaisseur de la plaque, et égales aux déformations moyennes de celle-ci. Des facteurs de correction en cisaillement transverse sont alors introduits pour tenir compte du gauchissement des sections droites [11]. Cette théorie correspond à la théorie des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse.

2.3.4 Théorie des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse

2.3.4.1 Champ des déformations

Les déformations au point $M(x,y,z)$, définies par la relation (2.47), peuvent être décomposées en :

a) champ des déformations en membrane-flexion

$$\left\{ \varepsilon_{mf}(M(x,y,z)) \right\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Correspondant à la superposition des :

* déformations en membrane :

$$\{\varepsilon_m(x, y)\} = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

*et déformations en flexion et torsion :

$$\{\varepsilon_f(x, y)\} = \begin{bmatrix} \varepsilon^f_{xx} \\ \varepsilon^f_{yy} \\ \gamma^f_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Où $\{k(x, y)\}$ est le vecteur des courbures du plan moyen défini par :

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

b) champ des déformations en cisaillement transverse

$$\{\gamma_c(M(x, y, z))\} = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Où $\gamma^0_{yz}, \gamma^0_{xz}$ sont les déformations moyennes du stratifié.

2.3.4.2 Champ des contraintes

Dans un stratifié constitué de n couches, la relation contraintes-déformations dans la couche k rapportée au référentiel du stratifié s'écrit, en fonction de la loi (2.38), comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

En considérant l'hypothèse de la théorie des plaques ($\sigma_{zz} = 0$), et en remarquant que le champ des contraintes de cisaillement transverse est découplé du champ des contraintes de membrane-flexion, ce dernier correspond à un état de contraintes planes. En introduisant les coefficients de rigidité réduites et en séparant les contraintes et les déformations de cisaillement transverse, la relation (2.53) devient :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

En décomposant le champ des déformations, les relations de comportement en membrane flexion s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [Q']_k \{ \varepsilon_m(x, y) \} + z [Q']_k \{ k(x, y) \} \quad (2.56)$$

Et les relations de comportement en cisaillement transverse sont données par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \{ \gamma_c(x, y) \} \quad (2.57)$$

2.3.4.3 Résultantes et moments

La figure 2.9 représente la disposition des couches et leur repérage par rapport au plan moyen du stratifié. Par convention [12], les couches sont numérotées de bas en haut dans le référentiel du stratifié, chaque couche k étant limitée par deux cotes h_{k-1} et h_k , mesurées par rapport à la surface moyenne. L'intégration des contraintes dans l'épaisseur du stratifié, en respect de la relation de comportement pour chaque couche (2.54) et du champ des déformations de la plaque, permet de définir les résultantes et moments à l'échelle du stratifié [13].

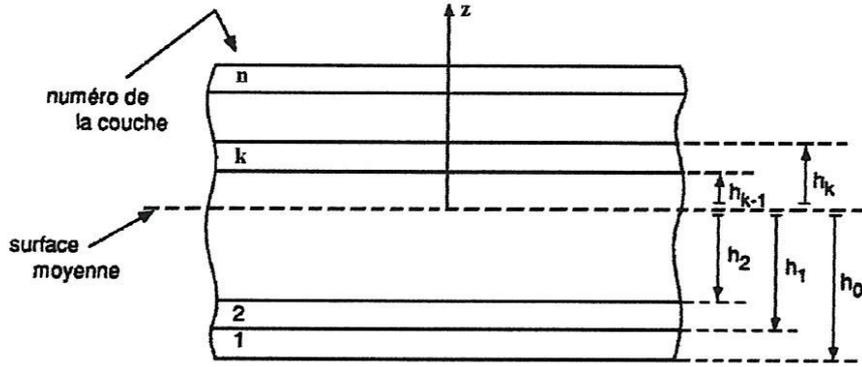


Figure 2.9 élément de plaque stratifiée

a) Résultantes en membrane

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x,y)$ est défini par :

$$\{N(x,y)\} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (2.58)$$

N_x , N_y et N_{xy} sont les résultantes par unité de longueur, respectivement des contraintes normales selon x, y et des contraintes de cisaillement dans le plan (x,y), elles sont représentées sur la figure 2.10.

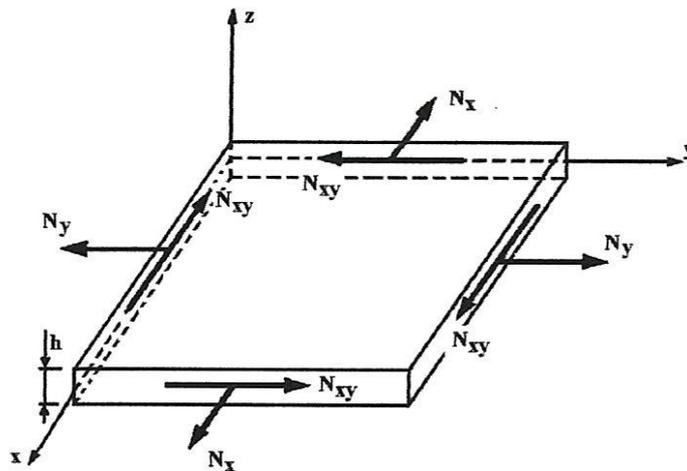


Figure 2.10 Représentation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de plaque stratifiée

La discontinuité des contraintes, due à l'hétérogénéité de l'assemblage des couches, conduit à réécrire la relation (2.58) sous la forme :

$$\{N(x, y)\} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (2.59)$$

En reportant (2.56) dans cette dernière expression, les résultantes en membrane s'écrivent :

$$\begin{aligned} \{N(x, y)\} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} ([Q']_k \{\varepsilon_m(x, y)\} + z [Q']_k \{k(x, y)\}) dz \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ [Q']_k \{\varepsilon_m(x, y)\} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + [Q']_k \{k(x, y)\} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right\} \\ &\quad - \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [Q']_k [\varepsilon_m] + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) [Q']_k [K(x, y)] \end{aligned}$$

Soit :

$$\{N(x, y)\} = [A] \{\varepsilon_m(x, y)\} + [B] \{k(x, y)\} \quad (2.60)$$

Avec:

$$[A] : A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k \quad (2.61)$$

$$[B] : B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k$$

b) Résultantes en cisaillement

De la même manière, on définit les résultantes en cisaillement, par unité de longueur, comme suit :

$$\{Q(x, y)\} = \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k dz \quad (2.62)$$

Ces résultantes sont schématisées sur la figure 2.11

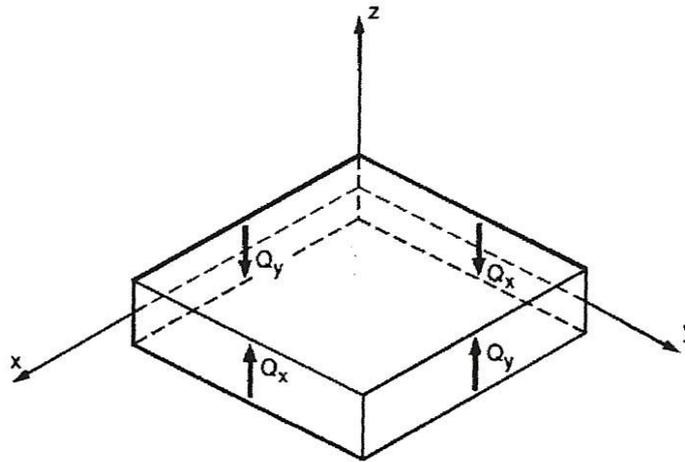


Figure 2.11 Représentation des résultantes en cisaillement

En introduisant la relation (2.57) dans l'expression (2.62), les résultantes en cisaillement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \{Q(x, y)\} &= \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \{\gamma_c(x, y)\} dz \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \\ &= \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{45} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}_k \end{aligned}$$

Soit :

$$\{Q(x, y)\} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Avec:

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (C'_{ij})_k \quad ; i, j = 4, 5 \quad (2.64)$$

Pour tenir compte de l'état de déformation réel (gauchissement des sections droites), les résultantes de cisaillement sont modifiées en remplaçant les coefficients F_{ij} par de nouveaux coefficients H_{ij} [1], tels que :

$$F_{ij} = k_{ij} H_{ij} \quad (2.65)$$

Où les paramètres k_{ij} sont des facteurs de correction en cisaillement, à déterminer.

Les résultantes de cisaillement sont alors données par :

$$\{Q(x, y)\} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

c) Moments de flexion-torsion

Les contraintes de traction et de cisaillement exercées sur un élément de stratifié génèrent des moments résultants de flexion et de torsion, définis par unité de longueur selon :

$$\{M_f(x, y)\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (2.67)$$

M_x et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} le moment de torsion. La figure 2.12 illustre ce cas.

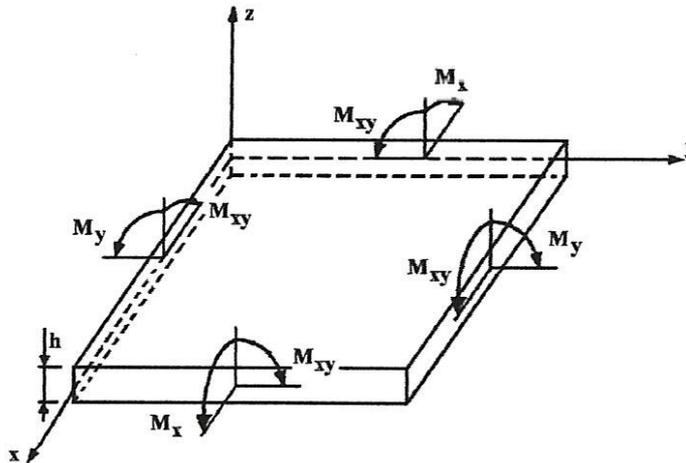


Figure 2.12 Représentation des moments de flexion et de torsion

En remplaçant les contraintes dans le plan par leur expression (2.56), les moments résultants s'écrivent :

$$\begin{aligned} \{M_f(x, y)\} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \left([Q']_k \{\varepsilon_m(x, y)\} + z [Q']_k \{k(x, y)\} \right) dz \\ &= \sum_{k=1}^n [Q']_k \{\varepsilon_m(x, y)\} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz + \sum_{k=1}^n [Q']_k \{k(x, y)\} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) [Q']_k \{\varepsilon_m(x, y)\} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) [Q']_k \{k(x, y)\} \end{aligned}$$

Soit :

$$\{M_f(x, y)\} = [B] \{\varepsilon_m(x, y)\} + [D] \{k(x, y)\} \quad (2.68)$$

Avec:

$[B]$: définie en (2.61)

$$[D] : D_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \quad (2.69)$$

2.3.4.4 Équation constitutive

En regroupant les expressions (2.60), (2.66) et (2.68), nous obtenons une équation qui relie les efforts et les moments résultants aux déformations et courbures du plan moyen du stratifié. Cette équation décrit le comportement global du stratifié, elle est appelée équation constitutive et prend la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Où :

A_{ij} : est la matrice de rigidité en membrane ;

D_{ij} : est la matrice de rigidité en flexion-torsion ;

H_{ij} : est la matrice de rigidité en cisaillement transverse ;

B_{ij} : est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

Ce couplage est nul pour une stratification symétrique. Mais même dans ce cas, ils subsistent d'autres niveaux de couplage qui font la spécificité du comportement des stratifiés. Il s'agit du

- Couplage traction-cisaillement induit par les termes A_{16} et A_{26} ;
- Couplage flexion-torsion induit par les termes D_{16} et D_{26} ;
- Couplage cisaillement-cisaillement induit par le terme H_{45} .

2.4 Formulation du problème général de dynamique des stratifiés

2.4.1 Relations fondamentales des plaques dans un schéma du premier ordre

Les relations fondamentales ou équations d'équilibre d'un solide élastique sont données par la forme élémentaire :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho a_i, \quad i, j = 1, 3 \quad (2.71)$$

Où f_i et a_i sont respectivement les composantes suivant \vec{i} du vecteur force volumique et du vecteur accélération.

Dans le cas des plaques multicouches, l'intégration de ces équations suivant l'épaisseur de la plaque permet d'obtenir les relations d'équilibres relatives aux résultantes et moments [13].

2.4.1.1 Equilibre par rapport aux résultantes en membrane

La première équation d'équilibre, exprimée dans le référentiel du stratifié ($i = x$), correspond à l'équilibre des efforts en membrane dans la direction x et s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz \quad (2.72)$$

La continuité des contraintes dans chaque couche k , et leur discontinuité d'une couche à l'autre conduisent à écrire :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx}^k dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (2.73)$$

De même pour la contrainte de cisaillement plan σ_{xy} :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (2.74)$$

Ainsi que pour la contrainte de cisaillement transversale σ_{xz} :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} dz = \sum_{k=1}^n \sigma_{xz}^k \Big|_{h_{k-1}}^{h_k} = \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (2.75)$$

Où $\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right)$, $\sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right)$ sont les contraintes de cisaillement extérieures exercées respectivement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque, notées :

$$\tau_{1x} = \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) \quad \text{et} \quad \tau_{2x} = \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (2.76)$$

L'intégrale de la composante suivant x de la force de volume se note :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x \quad (2.77)$$

L'intégration du second terme de l'équation (2.72), compte tenu de la forme du champ des déplacements (2.44) nous permet d'écrire :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz \quad (2.78)$$

Finalement en posant :

$$(\rho_s, R) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z) dz \quad (2.79)$$

L'équation d'équilibre en membrane, dans la direction x s'écrit :

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \tau_{1x} - \tau_{2x} + F_x = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2.80)$$

De même pour la direction y dont l'équation d'équilibre est donnée par :

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \tau_{1y} - \tau_{2y} + F_y = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (2.81)$$

avec :

$$\tau_{1y} = \sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) \quad \text{et} \quad \tau_{2y} = \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (2.82)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_y dz = F_y \quad (2.83)$$

2.4.4.2 Equilibre par rapport aux résultantes de cisaillement

La dernière relation d'équilibre pour ($i = z$) s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z dz \quad (2.84)$$

La même démarche précédente conduit à :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad (2.85)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (2.86)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = \sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) = q \quad (2.87)$$

Où q est la différence entre les pressions exercées sur les faces de la plaque.

La relation d'équilibre devient alors :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (2.88)$$

avec :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = F_z \quad (2.89)$$

2.4.1.3 Equilibre par rapport aux moments

L'expression de l'équilibre des moments, pour un élément de plaque, s'obtient en multipliant les deux premières équations d'équilibre (2.71) par z et en les intégrant dans l'épaisseur. L'équilibre des moments le long de la direction x s'exprime selon l'équation :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz \quad (2.90)$$

Les deux premiers termes s'écrivent :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (2.91)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dz = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.92)$$

L'intégration par parties du troisième terme aboutit à :

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz &= [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \\ &= \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) - Q_x \\ &= \frac{h}{2} (\tau_{1x} - \tau_{2x}) - Q_x \end{aligned} \quad (2.93)$$

Finalement en introduisant le moment d'inertie par rapport au plan moyen (xoy) de l'élément de plaque unitaire situé au point (x,y) :

$$I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (2.94)$$

Et en posant :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\rho} f_z dz \quad (2.95)$$

L'équilibre des moments le long de la direction x s'écrit :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} - \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (2.96)$$

De la même manière, nous obtenons l'équation d'équilibre des moments le long de la direction y :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} - \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (2.97)$$

Avec:

$$P_y = \int_{-h/2}^{h/2} \rho f_y dz \quad (2.98)$$

Les relations (2.80), (2.81), (2.88), (2.96) et (2.97) constituent les équations d'équilibre ou équations du mouvement dans le cas de la théorie classique des plaques. Elles s'appliquent aussi bien à des plaques homogènes qu'à des stratifiés [1].

La combinaison des trois dernières relations d'équilibre permet d'écrire une nouvelle équation du mouvement indépendante des résultantes de cisaillement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = \\ \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial x \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (2.99)$$

2.4.2 Equations du mouvement du stratifié

Les équations du mouvement du stratifié sont obtenues en reportant les expressions des résultantes et des moments données par l'équation constitutive (2.70) dans les relations fondamentales des plaques. Dans le cas où les faces du stratifié sont libres de toutes contraintes et les forces de volume sont nulles, les équations du mouvement du stratifié sollicité transversalement par une charge q sont données par :

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\
 & + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \\
 & + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned}
 & H_{55} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + H_{45} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + H_{44} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
 & - H_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - H_{45} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_{xx}}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \\
 & - H_{45} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - H_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

2.5 Expression des conditions aux limites

Les conditions imposées aux frontières d'une structure permettent d'aboutir à des solutions uniques des équations du mouvement (2.100) à (2.104). La figure 2.13 représente un élément de frontière repéré au point $P(x,y,0)$ par le système d'axes \vec{n} , normale extérieure, \vec{t} la tangente dans le plan moyen et $\vec{k} = \vec{z}$. La déformée au point P du stratifié est caractérisée par le déplacement de ce point exprimé dans la base $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{k})$ par ses composantes $u_{0n}(x,y)$, $v_{0n}(x,y)$, $w_{0n}(x,y)$, et par l'orientation de la déformée définie par $\frac{\partial w_0}{\partial n}$. Les efforts exercés au point P sont les résultantes en membrane N_n, N_{nt} , en cisaillement Q_n , les moments de flexion M_n et de torsion M_{nt} . Les conditions imposées portent sur l'une des grandeurs de chacune des paires suivantes :

$$u_{0n}, N_n \quad u_{0t}, N_{nt} \quad \frac{\partial w_0}{\partial n}, M_n \quad w_0, \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n \tag{2.105}$$

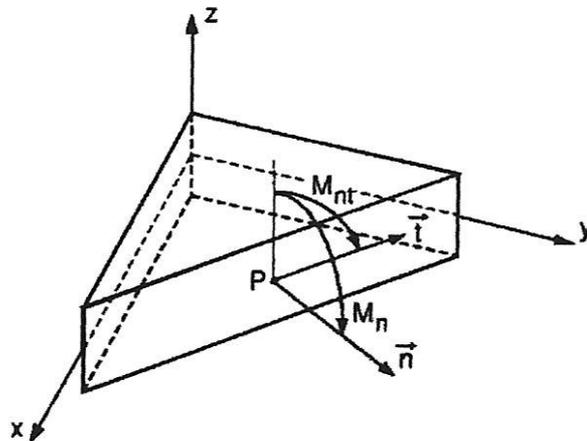


Figure 2.13 Elément de frontière de la plaque et repère associé

2.5.1 Appui simple

La figure 2.14 représente la condition d'appui simple. L'expression de cette condition est donnée par :

$$w_0 = 0 \quad M_n = 0 \quad N_n = 0 \quad N_{nt} = 0 \quad (2.106)$$

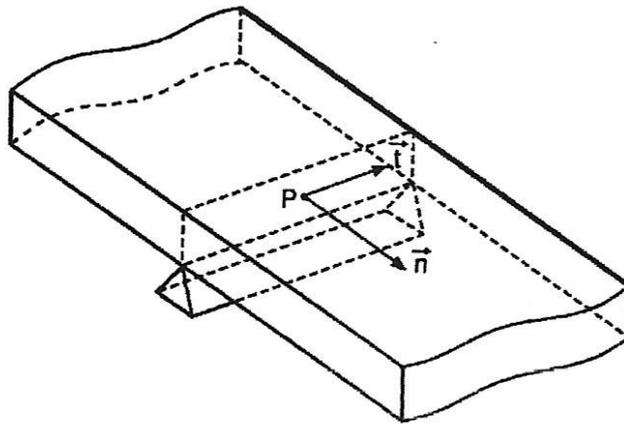


Figure 2.14 Schématisation d'un appui simple

2.5.2 Encastrement

En considérant la figure 2.15, la condition de bord encasté peut s'exprimer selon :

$$w_0 = 0 \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0 \quad u_{0n} = 0 \quad u_{0t} = 0 \quad (2.107)$$

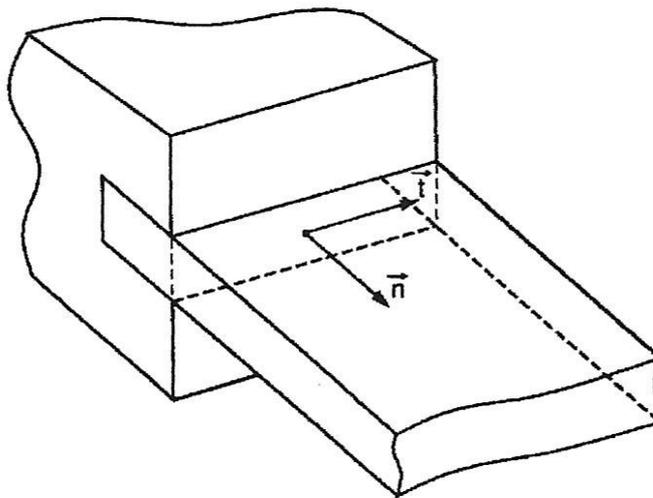


Figure 2.15 Représentation d'un encastrement

2.5.3 Condition de bord libre

Un bord libre est caractérisé par la nullité de tous les efforts et moments :

$$N_n = N_{nt} = Q_n = M_n = M_{nt} \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0 \quad (2.108)$$

L'équilibre des moments de torsion sur ce bord (figure 2.16) s'exprime sous la forme :

$$-M_{nt} + M_{nt} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} dt + Q_n dt = 0 \quad (2.109)$$

Où $Q_n dt$ est le moment résultant dû à l'effort de cisaillement. La résultante de cisaillement est donc reliée au moment de torsion par :

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0 \quad (2.110)$$

Qui est la condition de frontière de Kirchhoff. Elle exprime la contribution du moment de torsion sur le bord à l'effort tranchant total exercé sur ce dernier [7]. La condition de bord libre se résume dans ce cas à :

$$N_n = 0 \quad N_{nt} = 0 \quad M_n = 0 \quad \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0 \quad (2.111)$$

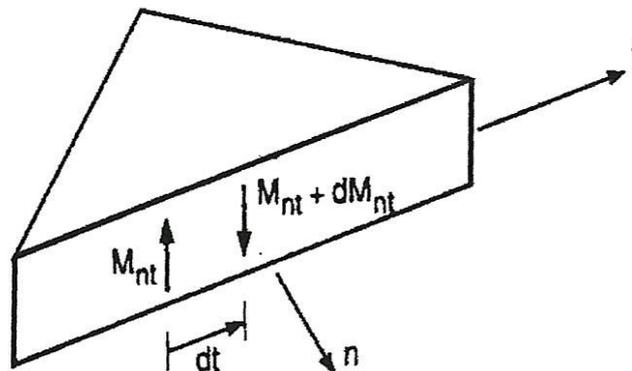


Figure 2.16 Variation du moment de torsion le long d'un bord

2.6 Formulation énergétique de la théorie des stratifiés

La résolution du problème général de dynamique des stratifiés consiste à déterminer les trois déplacements u_0, v_0 et w_0 , et les deux rotations φ_x et φ_y , satisfaisant simultanément les équations du mouvement (2.100) à (2.104) et les conditions aux limites imposées sur la frontière. L'utilisation d'une approche variationnelle permet de développer des méthodes de résolution approchées. Ces approches sont basées sur le calcul des énergies de la structure : énergie de déformation, énergie cinétique, travail des efforts extérieurs et énergie dissipée [7].

2.6.1 Energie de déformation

Pour un milieu élastique, l'énergie de déformation élémentaire s'exprime par :

$$dU_d = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (2.112)$$

L'intégration de cette relation sur le volume d'un solide permet d'obtenir l'expression de l'énergie de déformation totale du solide élastique :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (2.113)$$

Ou sous forme explicite :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} \right\} dv \quad (2.114)$$

En tenant compte de l'hypothèse de contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$), et des relations contraintes déformations pour chaque couche k (2.54), l'énergie de déformation totale d'un stratifié peut se mettre sous la forme :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \left\{ Q_{11}^k \varepsilon_{xx}^2 + 2 Q_{12}^k \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2 Q_{16}^k \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} + Q_{22}^k \varepsilon_{yy}^2 + 2 Q_{26}^k \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} \right. \\ \left. + Q_{66}^k \gamma_{xy}^2 + C_{44} \gamma_{yz}^2 + 2 C_{45} \gamma_{yz} \gamma_{xz} + C_{55} \gamma_{xz}^2 \right\} dv \quad (2.115)$$

En reportant les expressions des déformations (2.47) dans cette dernière expression et en intégrant dans l'épaisseur, nous obtenons l'expression de l'énergie de déformation totale d'un stratifié en fonction des déplacements et des constantes de rigidité de l'équation constitutive.

$$\begin{aligned}
 U_d = \frac{1}{2} \int_s \left\{ & A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2 A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + 2 A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 & + 2 A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \\
 & + 2 B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + 2 B_{12} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \\
 & + 2 B_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right) + 2 B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 & + 2 B_{26} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right) \\
 & + 2 B_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 & + D_{11} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + 2 D_{16} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right)^2 \\
 & + 2 D_{26} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)^2 \\
 & \left. + H_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2 H_{45} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + H_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right\} ds
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

2.6.2 Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un volume élémentaire est donnée par :

$$dE_c = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dv \tag{2.117}$$

Où \bar{u} est le vecteur déplacement de composantes : u, v, w .

L'énergie cinétique totale d'un solide s'exprime donc selon l'intégrale :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dv \tag{2.118}$$

En remplaçant chaque composante du vecteur déplacement par son expression (2.44), et en intégrant dans l'épaisseur, l'énergie cinétique du stratifié, dans le cas d'un schéma du premier ordre, s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_s \left\{ \rho_s \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right) + R \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \right) + I_{xy} \left(\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \right)^2 \right) \right\} ds \quad (2.119)$$

Où :

$$\rho_s, R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho dz \quad (2.120)$$

Avec :

ρ_s : Masse surfacique du stratifié au point (x,y) ;

I_{xy} : Moment d'inertie par rapport au plan (xoy) de l'élément unitaire de plaque situé au point (x,y) .

CHAPITRE 3

DETERMINATION
ANALYTIQUE ET EN CALCUL
DE STRUCTURES DES
FREQUENCES ET
MODES PROPRES DE
PLAQUES PARTIEES

3.1 Généralités sur la résolution des problèmes de vibrations des structures

L'étude des vibrations d'une structure a pour objectif de déterminer son comportement aux chargements dynamiques, dans le but de comprendre et de contrôler les problèmes typiques liés aux mouvements vibratoires (fatigue, résonance, bruit...). La maîtrise du problème inverse [14] permet de développer des techniques efficaces et rapides de caractérisation élastique ou viscoélastique, de contrôle de qualité, d'inspection et diagnostic des structures, basées sur les mesures des vibrations. Dans les deux cas, la première étape consiste à évaluer la réponse de la structure en fonction de tous les paramètres influant sur cette réponse. Selon les hypothèses retenues, la formulation permet de tenir compte du comportement du matériau, des défauts et des endommagements, de la nature du chargement et éventuellement de l'amortissement externe et de l'effet du milieu, en exprimant la relation entre ces paramètres et les inconnues du problème, champ des contraintes (approche contraintes) ou des déplacements (approche déplacements), sous forme d'équations aux dérivées partielles. La complexité de ces équations, conjuguée à la géométrie de la structure et aux conditions aux limites, ne permet pas en général d'aboutir à une solution exacte, et seules les méthodes d'intégration directe permettent d'obtenir des solutions numériques [7]. La modélisation apporte une simplification du problème [8] en introduisant des approximations des champs inconnus, compatibles avec la géométrie et les conditions aux limites. Pour une approche déplacement, la modélisation peut être discrète (masses concentrées), analytique (déplacements généralisés) ou par éléments finis. Elle permet, dans le domaine des vibrations linéaires, la résolution du problème par superposition modale (ou intégration modale). Cette méthode consiste à décomposer la réponse dans une base formée par les modes propres de la structure appelée base modale. Chaque composante m représente la participation du mode m à la réponse globale, solution de l'équation de l'oscillateur à 1 degré de liberté découplée des autres modes. Le comportement dynamique de la structure sera alors défini par ses caractéristiques modales: fréquences et déformées propres et amortissements modaux. Ces caractéristiques sont obtenues en résolvant le problème aux valeurs et vecteurs propres correspondant aux vibrations libres de la structure.

3.2 Fréquences et déformées propres des structures composites

L'étude la plus détaillée qui puisse être menée sur les vibrations des structures composites repose sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Dans ce cadre Chen et Lue [15] reportent une solution analytique exacte pour les vibrations libres d'une plaque stratifiée orthotrope, rectangulaire, simplement appuyée sur ses quatre cotés et proposent une résolution semi analytique, basée sur la méthode de quadrature différentielle, pour le même type de plaques ayant deux bords opposés en appui simple. Hormis ces cas, une telle étude nécessite le recours à une modélisation par éléments finis 3D. Toutefois, les types de chargements auxquels sont généralement destinés les stratifiés (membrane, flexion) font que les théories des plaques constituent des approximations suffisantes du comportement des plaques et coques stratifiées. Les théories d'ordre supérieur tendant à modéliser la déformation réelle des sections droites (gauchissement) permettent une analyse précise des effets de cette déformation sur les fréquences et amortissements modaux, effets qui sont majorés dans le cas des structures épaisses (stratifiés épais). Khatri et Asnani [16] ont associé la puissance de la méthode variationnelle pour la mise en équation à un traitement individuel des couches pour étudier les vibrations d'une coque stratifiée conique en appui simple. Les équations du mouvement développées dans une approche viscoélastique (principe de correspondance) et tenant compte des inerties de translation et de rotation sont résolues par la méthode de Galerkin pour obtenir les modes propres et les amortissements. Koo et Lee [17] proposent une modélisation éléments finis basée sur une distribution linéaire des déplacements plans

dans l'épaisseur du stratifié pour étudier l'influence de ces derniers sur les fréquences propres et amortissements de plaques symétriques rectangulaires simplement appuyées. Qian et al [18] ont développé un élément fini plaque spécifique avec une distribution cubique des déplacements plans pour résoudre le problème d'identification (problème inverse) à partir des vibrations de flexion, et pour l'étude de sensibilité, de plaques rectangulaires complètement libre, en stratifiés unidirectionnels ou croisés. Cependant, la méthode des éléments finis est difficile à mettre en œuvre. Pour les problèmes d'optimisation, d'identification ou pour les études de sensibilité, les approches analytiques sont mieux adaptées. Wang [19] utilise la méthode Rayleigh-Ritz basée sur les fonctions B-spline dans le contexte de la théorie du premier ordre pour déterminer les fréquences et déformées propres de plaques en stratifiés quelconques en forme de losange. Hufenbach et al [20] utilisent la méthode de Rayleigh-Ritz pour résoudre le problème des vibrations d'un tube stratifié symétrique, cylindrique, en appui simple. Le déplacement transversal est modélisé par la fonction caractéristique de la poutre appuyée-appuyée dans le cadre de la théorie de Timoshenko. Angoulvant [21] a appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz à 36 termes, aux plaques symétriques rectangulaires, basées sur la théorie classique des stratifiés, et a comparé deux types d'approximations : les fonctions poutres et les fonctions polynomiales pour différentes combinaisons de bords encastres ou libres. Il conclut que les fonctions poutres donnent de meilleurs résultats. Ayorinde et Yu [22] ont optimisé la méthode, dans le cas des plaques épaisses, sur la base d'une approximation à trois modes des déplacements et rotations par les fonctions poutres en formulation de Timoshenko. Cheung et Zhou [23] ont développé des fonctions poutres avec appuis intermédiaires pour modéliser des plaques symétriques, supportées en un ou plusieurs points à l'intérieur de leurs domaines, par la méthode de Rayleigh-Ritz. Anlas et Goker [24] ont utilisé des polynômes orthogonaux comme fonctions d'approximation avec transformation de base pour décrire les vibrations libres de plaques symétriques en forme de losange simplement appuyées ou complètement encastres. Nallim et al [25] généralise cette approche pour les plaques quadrilatérales de formes quelconques, à stratification symétriques pour différentes conditions aux limites.

L'analyse de ces différents travaux met en évidence quatre niveaux de difficulté abordés : la formulation (élasticité 3D, théories des plaques), géométrie et conditions aux limites (plaque rectangulaires ou non, coques de révolution), type de stratification (orthotrope, symétrique ou quelconque) et méthodes de résolution (analytique exacte ou approchée, éléments finis). Partant du fait qu'en règle générale la conception des matériaux stratifiés fait appel à des architectures symétriques [10], et que les épaisseurs réalisées permettent souvent d'approcher le problème avec la théorie classique des stratifiés [26], notre travail consiste à déterminer les fréquences et déformées propres non amorties de plaques symétriques minces rectangulaires, en balayant les différentes combinaisons possibles de conditions aux limites standards sur les bords. Le seul cas qui se prête à une résolution analytique exacte est présenté (plaque orthotrope simplement appuyée sur ses quatre cotés) et sa solution est exposée. Pour tous les autres cas, les solutions sont déterminées par la méthode de Rayleigh-Ritz en utilisant les fonctions poutres comme fonctions d'approximation.

3.3 Vibrations de flexion des plaques minces symétriques

3.3.1 Equation du mouvement

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, les déformations de cisaillement transverse sont négligées.

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (3.1)$$

En reportant cette égalité dans les relations (2.47) nous obtenons :

$$\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad \varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.2)$$

Pour un stratifié symétrique, les termes de couplage membrane-flexion-torsion (2.61), ainsi que le terme intégral R (2.79), sont nuls :

$$B_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad R = 0 \quad (3.4)$$

Dans ces conditions, et d'après les équations du mouvement (2.100) à (2.104), les déplacements du stratifié dans le plan sont découplés du déplacement transversal. Les résultantes en cisaillement étant nulles par hypothèse (3.1), le déplacement transversal (ou de flexion) est complètement décrit par l'équation du mouvement (2.99) qui, en considérant l'expression des moments (3.5) et des courbures (3.6), et en négligeant les inerties de rotation, prend la forme de l'expression (3.7).

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.3.2 Fréquences et déformées propres des plaques rectangulaires

Considérant l'équation du mouvement transversal libre du stratifié ($q=0$). La solution vibratoire harmonique de cette équation est recherchée, par la méthode de séparation des variables d'espaces et du temps, sous la forme :

$$w_0(x, y, t) = e^{j\omega t} w_0(x, y) \quad (3.8)$$

où :

ω : est la pulsation ou fréquence circulaire du mouvement ;

$w_0(x, y)$: est la solution spatiale ou déformée.

En reportant cette forme dans l'équation du mouvement, nous aboutissons à l'équation aux fréquences :

$$\begin{aligned} -\rho_s \omega^2 w_0 + D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} \\ + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

La résolution du problème consiste à déterminer toutes les fonctions $w_0(x, y)$ satisfaisant les conditions aux limites (déformées propres) et d'en déduire les fréquences propres correspondantes. Dans le cas d'une plaque rectangulaire de longueur a et de largeur b (figure 3.1), les conditions aux limites standards (paragraphe 2.5) s'écrivent, pour les bords parallèles à la direction y :

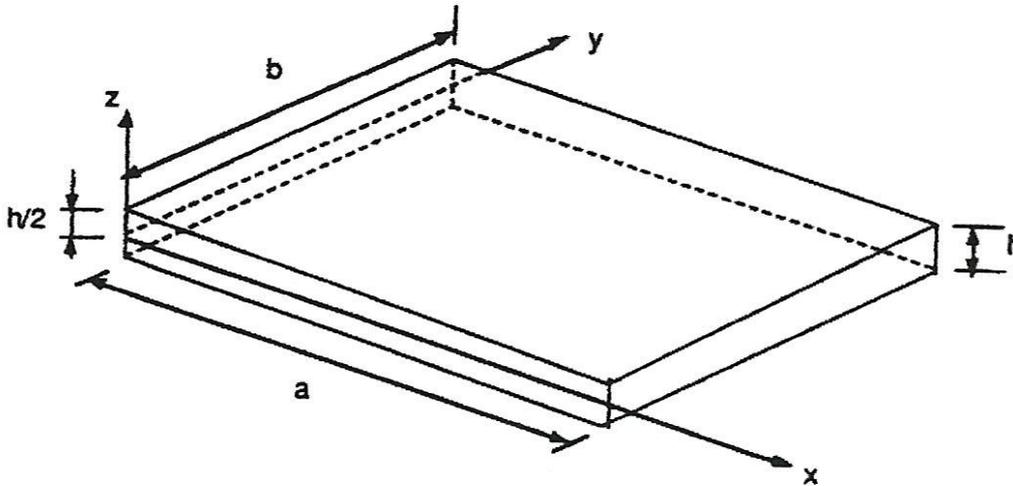


Figure 3.1 Plaque rectangulaire

* *en appui simple* :

$$w_0 = 0 \quad M_x = 0 \quad (3.10)$$

* *encastré* :

$$w_0 = 0 \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

* *libre* :

$$M_x = 0 \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \quad (3.12)$$

Où la résultante de cisaillement transverse Q_x est reliée aux moments par la relation (2.96)
En tenant compte des différentes hypothèses retenues, la condition de bord libre devient :

$$M_x = 0 \qquad \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (3.13)$$

En remplaçant les moments et courbures par leurs expressions (3.5) et (3.6), les conditions aux limites s'expriment en fonction du déplacement :

*** pour l'appui simple :**

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 = 0 \end{array} \right. \qquad (3.14 - a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right. \qquad (3.14 - b)$$

*** Pour l'encastrement :**

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 = 0 \end{array} \right. \qquad (3.15 - a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \qquad (3.15 - b)$$

*** et pour le coté libre :**

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right. \qquad (3.16 - a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 4D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \end{array} \right. \qquad (3.16 - b)$$

De même pour les cotés parallèles à la direction x , nous obtenons :

*** Pour l'appui simple :**

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 = 0 \\ D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right. \qquad (3.17)$$

* Pour l'encastrement :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

* et pour le coté libre :

$$\begin{cases} D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \\ 2D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

La solution recherchée doit donc satisfaire simultanément l'équation du mouvement (3.9), et les conditions aux limites définies par une combinaison quelconque de quatre conditions parmi (3.14) à (3.19). Dans le cas d'une plaque orthotrope ($D_{16} = D_{26} = 0$), en appui simple sur ses quatre bords, la solution analytique exacte est donnée sous la forme (3.20) qui satisfait explicitement les conditions (3.14) et (3.15).

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.20)$$

la déformée propre du mode (m,n) et sa fréquence propre sont donnée par [1] :

$$\begin{aligned} w_{mn} &= A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \omega_{mn} &= \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} [D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 R^2 + D_{22} n^4 R^4]} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Avec :

$$R = a/b \quad (3.22)$$

L'absence de solutions exactes pour toutes les autres conditions aux limites conduit à la recherche de solutions approchées.

3.4 Détermination des fréquences et modes propres des plaques par la méthode de Rayleigh-Ritz

3.4.1 Principe

La méthode de Rayleigh-Ritz est une méthode d'approximation basée sur une approche variationnelle. Elle consiste à écrire une solution approchée du déplacement u sous la forme d'une série pondérée de fonctions admissibles \tilde{u}_i , chacune d'elles vérifiant séparément les conditions aux limites essentielles imposées au solide.

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{u}_i \quad (3.23)$$

L'ensemble de ces fonctions constitue la base fonctionnelle, et l'approximation est d'autant plus précise que le nombre de termes n , ou de degrés de liberté, utilisés est important [7].

L'application de la méthode à la fonctionnelle énergie totale du solide déformable, et l'écriture du théorème des travaux virtuels relatif à cette dernière (3.24), permet de déterminer les paramètres a_i de l'approximation (amplitudes ou coordonnées généralisées), en écrivant les conditions de stationnarité de la fonctionnelle par rapport à chaque terme a_i selon (3.25).

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} (E_c + W - U_d) dt \right] = \delta U = 0 \quad (3.24)$$

Avec :

E_c : Energie cinétique totale ;
 W : Travail des forces extérieures ;
 U_d : Energie de déformation totale.

$$\delta \tilde{U}(\tilde{u}) = \delta \tilde{U}(a_i) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{U}}{\partial a_i} = 0, \quad i=1, n \quad (3.25)$$

Dans le cas des vibrations libres, le travail des forces extérieures est nul :

$$W = 0 \quad (3.26)$$

Les conditions de stationnarité s'écrivent alors [21] :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} (\tilde{U}_{d \max} - \tilde{E}_{c \max}) = 0 \quad (3.27)$$

Ces n équations permettent de construire un système linéaire de taille $n \times n$ équivalent au problème aux valeurs (fréquences) et vecteurs (déformées) propres du problème réel.

Pour un stratifié symétrique, sous les hypothèses de la théorie classique des stratifiés et en négligeant les inerties de rotation, les énergies cinétique et de déformation exprimées respectivement par (2.116) et (2.119) se réduisent à :

$$E_C = \frac{1}{2} \int_S \rho_s \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \quad (3.28)$$

$$U_d = \frac{1}{2} \int_S \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4 D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4 D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} ds \quad (3.29)$$

3.4.2 Application au problème de vibrations des plaques stratifiées symétriques

Un choix judicieux des fonctions admissibles pour décrire le déplacement transverse de la plaque rectangulaire considérée, consiste à approcher ce dernier par une double somme :

$$w_0(x, y, t) = e^{j\omega t} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (3.30)$$

Où : $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ sont des fonctions vérifiant les conditions aux limites des deux poutres reposant respectivement le long des directions x et y .

En remplaçant le déplacement transversal par l'approximation (3.30), l'énergie totale maximale de la plaque devient :

$$\tilde{U}_{d\max} - \tilde{E}_{c\max} = \frac{1}{2} \int_S \left\{ D_{11} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n \right)^2 \right. \\ + 2 D_{12} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m \frac{\partial^2 Y_n}{\partial x^2} \right) \\ + 4 D_{16} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} Y_n \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial Y_n}{\partial x} \right) \\ + D_{22} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y^2} \right)^2 \\ + 4 D_{26} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m \frac{\partial^2 Y_n}{\partial x^2} \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) \\ \left. + 4 D_{66} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{\partial X_m}{\partial x} \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right)^2 - \rho_s \omega^2 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m Y_n \right)^2 \right\} ds \quad (3.31)$$

et les $M \times N$ conditions de stationnarité (3.27) conduisent à écrire pour chaque pair d'indice (m, l) :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial A_{mi}} = \frac{\partial}{\partial A_{mi}} (\tilde{U}_{d \max} - \tilde{E}_{C \max}) = 0 \quad (3.32)$$

Soit, après dérivation et réarrangement :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \{ & D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + [D_{12} (I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}) + 4 D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11}] R^2 \\ & + 2 D_{16} (I_{mi}^{12} J_{nj}^{10} + I_{mi}^{21} J_{nj}^{01}) R + 2 D_{26} (I_{mi}^{10} J_{nj}^{12} + I_{mi}^{01} J_{nj}^{21}) R^3 \\ & + D_{22} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 - \rho_s a^4 \omega^2 I_{mi}^{00} J_{nj}^{00} \} A_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

avec :

$$I_{mi}^{pq} = \int_0^1 \frac{d^p X_m}{du^p} \frac{d^q X_i}{du^q} du, \quad m, i = 1, 2, \dots, M \quad \text{et} \quad p, q = 0, 1, 2 \quad (3.34)$$

$$J_{nj}^{rs} = \int_0^1 \frac{d^r Y_n}{dv^r} \frac{d^s Y_j}{dv^s} dv, \quad n, j = 1, 2, \dots, N \quad \text{et} \quad r, s = 0, 1, 2 \quad (3.35)$$

intégrales adimensionnelles calculées avec le changement de variables :

$$u = x/a \quad \text{et} \quad v = y/b \quad (3.36)$$

En introduisant la pulsation propre adimensionnelle :

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_s}{D_{11}}} \quad (3.37)$$

Et en posant

$$\begin{aligned} D_{12} &= \alpha_{12} D_{11} & D_{16} &= \alpha_{16} D_{11} \\ D_{26} &= \alpha_{26} D_{11} & D_{22} &= \alpha_{22} D_{11} \\ D_{66} &= \alpha_{66} D_{11} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Et

$$C_{\min j}^{pqrs} = I_{mi}^{pq} J_{nj}^{rs} \quad (3.39)$$

L'expression (3.33) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \{ & C_{\min j}^{2200} + [\alpha_{12} (C_{\min j}^{2002} + C_{\min j}^{0220}) + 4 \alpha_{66} C_{\min j}^{1111}] R^3 + 2 \alpha_{16} (C_{\min j}^{1210} + C_{\min j}^{2101}) R \\ & + 2 \alpha_{26} (C_{\min j}^{1012} + C_{\min j}^{0121}) R^3 + \alpha_{22} C_{\min j}^{0022} R^4 - \Omega^2 C_{\min j}^{0000} \} A_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ce système de $M \times N$ équations linéaires homogènes peut être réécrit sous une forme matricielle en introduisant la notation indicielle suivante :

$$k = (m-1) \times N + n \quad \text{et} \quad l = (i-1) \times N + j \quad (3.41)$$

pour $m, i = 1, 2, \dots, M$ et $n, j = 1, 2, \dots, N$

On définit alors les termes :

$$a_{kl} = C_{\min j}^{2200} + [\alpha_{12} (C_{\min j}^{2002} + C_{\min j}^{0220}) + 4 \alpha_{12} C_{\min j}^{1111}] R^2 + 2 \alpha_{16} (C_{\min j}^{1210} + C_{\min j}^{2101}) R + 2 \alpha_{26} (C_{\min j}^{1012} + C_{\min j}^{0121}) R^3 + \alpha_{22} C_{\min j}^{0022} R^4 \quad (3.42)$$

$$b_{kl} = C_{\min j}^{0000} \quad (3.43)$$

finalement le problème aux valeurs et vecteurs propres est obtenu sous la forme :

$$([a] - \Omega^2 [b]) \{A\} = 0 \quad (3.44)$$

Dont les valeurs propres Ω_{mm} sont reliées aux fréquences propres de la plaque par la relation :

$$f_{mm} = \frac{\omega_{mm}}{2\pi} = \frac{\Omega_{mm}}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_s}} \quad (3.45)$$

3.4.3 Construction de la base fonctionnelle – Fonctions caractéristiques des vibrations des poutres

Nous utilisons dans ce travail les fonctions caractéristiques des vibrations des poutres comme fonctions admissibles. Cette méthode a été introduite par D. Young pour les plaques isotropes et depuis largement reprise pour l'étude de différents types de plaques notamment composites [21].

Une poutre stratifiée peut être considérée comme une plaque dont le rapport a/b est élevé (Figure 3.2). La formulation de base reste donc inchangée.

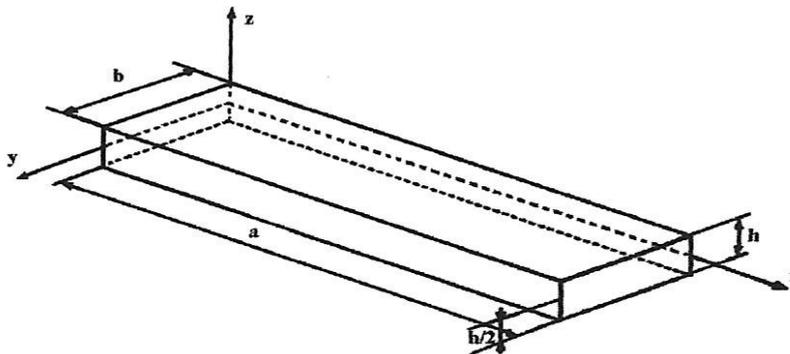


Figure 3.2 Schéma d'une poutre

Les hypothèses de condensation dans le cas d'une flexion dans le plan (x, z) [27] sont données par :

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, t) = e^{j\omega t} X(x) \quad (3.46)$$

$$M_y = M_{xy} = 0 \quad (3.47)$$

Dans ces conditions, l'équation du mouvement (2.99) devient :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -\rho_s \omega^2 e^{j\omega t} X \quad (3.48)$$

Considérant la relation de comportement (3.5) du stratifié, l'inversion de la matrice de rigidité de flexion permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Ce qui implique, d'après (3.6), (3.46) et (3.47) :

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -e^{j\omega t} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = D_{11}^* M_x \quad (3.50)$$

Soit :

$$M_x = -e^{j\omega t} \frac{1}{D_{11}^*} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (3.51)$$

En reportant ce dernier résultat dans l'équation aux fréquences (3.48), celle-ci prend la forme :

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \omega^2 \rho_s D_{11}^* X = 0 \quad (3.52)$$

Nous retrouvons ici une forme analogue à l'équation aux fréquences des poutres homogènes isotropes en flexion, sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli [28]. Les solutions (déformées propres) sont indépendantes des propriétés mécaniques du matériau de la poutre. En considérant les variables adimensionnelles (3.36), la solution générale de cette équation différentielle prend la forme :

$$X_m(u) = C \cos(\lambda_m u) + D \sin(\lambda_m u) + E \cosh(\lambda_m u) + F \sinh(\lambda_m u) \quad (3.53)$$

Où λ_m est le nombre d'onde caractéristique du $m^{\text{ème}}$ mode de vibration.

Les nombres d'onde et les constantes C, D, E et F sont déterminés en imposant le respect des conditions aux limites aux extrémités de la poutre. Ces conditions sont déduites des expressions (3.14) à (3.16) en tenant compte de l'hypothèse (3.46), soit :

* pour l'appui simple :

$$\begin{cases} X = 0 & (3.54 - a) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 & (3.54 - b) \end{cases}$$

* Pour l'encastrement :

$$\begin{cases} X = 0 & (3.55 - a) \\ \frac{\partial X}{\partial x} = 0 & (3.55 - b) \end{cases}$$

* et pour le coté libre :

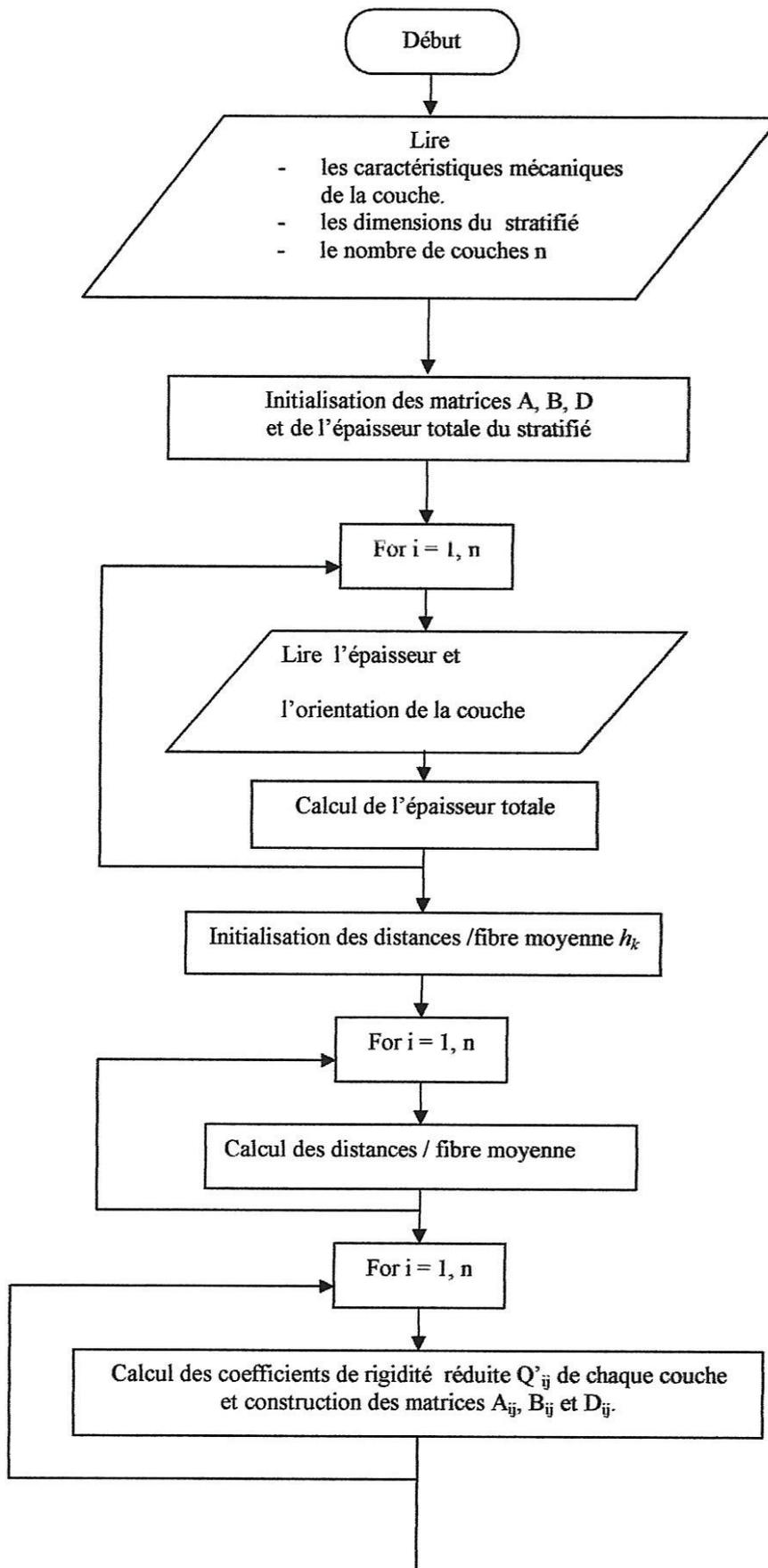
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 & (3.56 - a) \\ \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} = 0 & (3.56 - b) \end{cases}$$

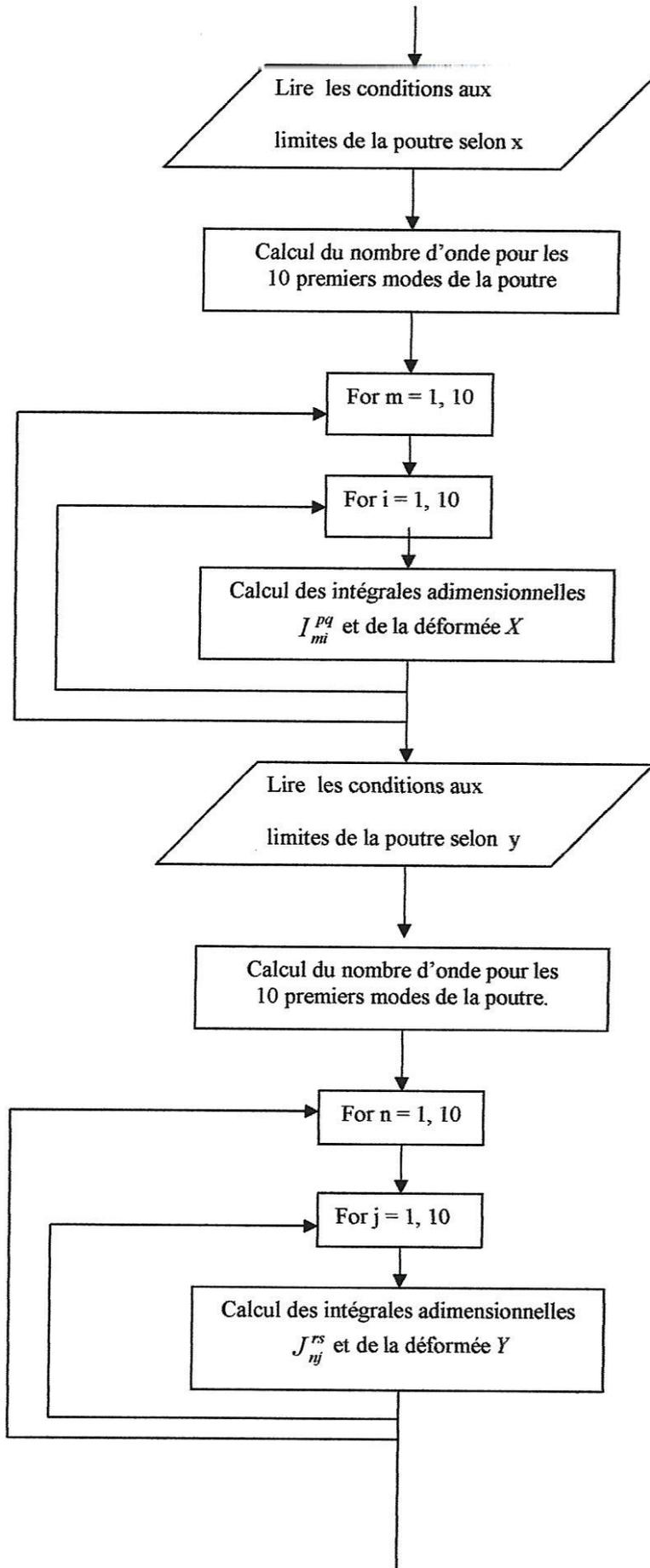
En examinant ces expressions, on s'aperçoit que lorsqu'une plaque est modélisée par deux poutres croisées, seule la condition de bord encasté de la plaque est entièrement vérifiée (3.15) et (3.55). Dans le cas d'un appui simple, la condition relative au déplacement est vérifiée, (3.14-a) et (3.54-a), alors que celle relative au moment fléchissant (3.14-b) est tronquée (3.54-b). Pour la condition de bord libre, l'expression du moment (3.16-a) et celle de l'effort tranchant (3.16-b) sont tronquées. Ces deux conditions (appui simple et coté libre) ne sont qu'approchées, influant ainsi sur la précision de la méthode.

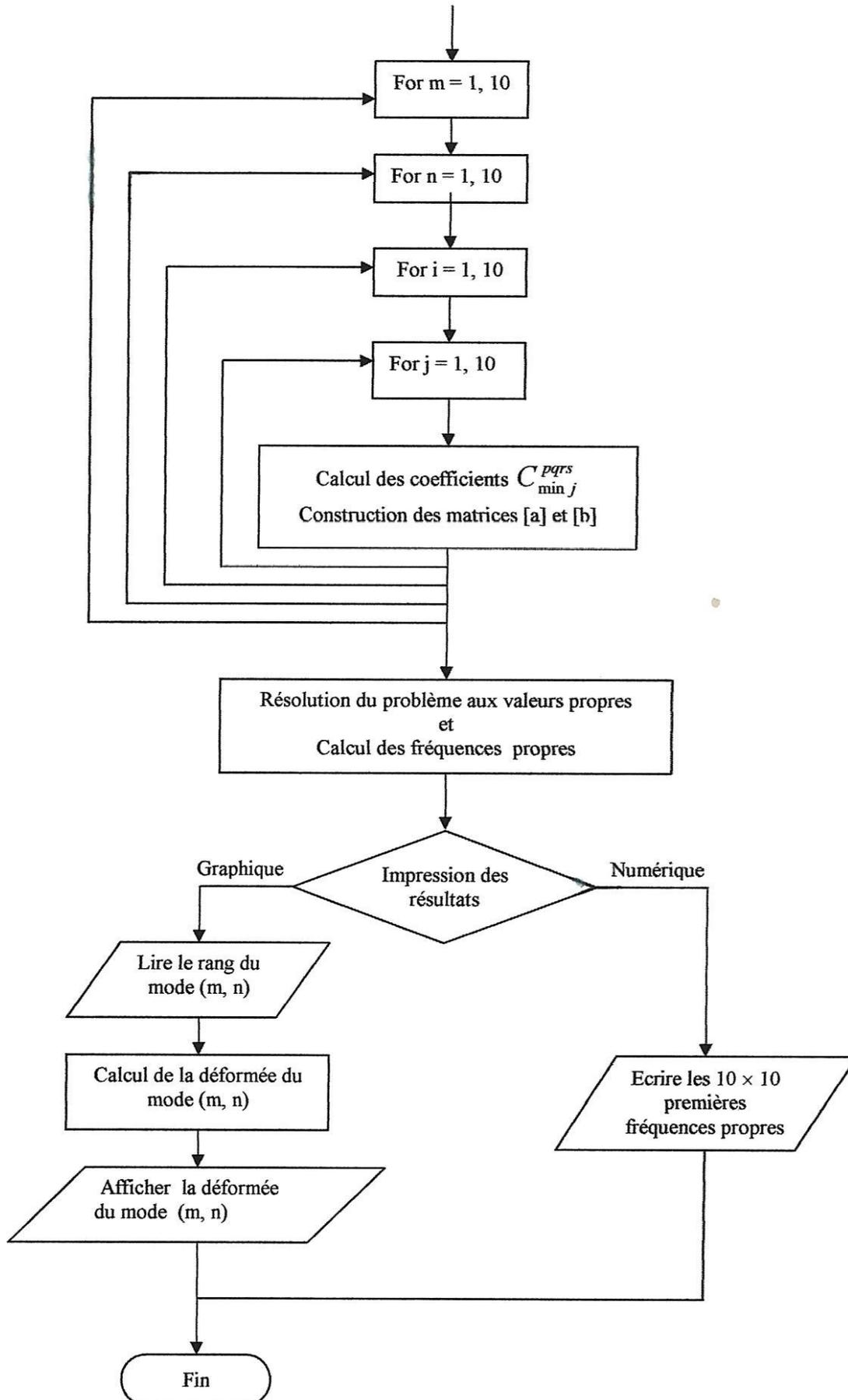
Chaque extrémité pouvant être simplement appuyée (A), encastée (E) ou libre (L), six combinaisons de conditions aux limites sans répétition sont possibles : AA, AE, AL, EE, EL et LL. Les fonctions poutres (ou déformées) de chacun de ces cas ainsi que les intégrales adimensionnelles (3.34), calculées par *Mathématica* [29], sont reportées en Annexe A.

3.4.4 Organigramme du programme de calcul

Nous utilisons une approximation à 100 termes ($M = N = 10$) pour déterminer les cent premières fréquences et déformées propres d'une plaque stratifiée symétrique, rectangulaire. La plaque étant modélisée par deux poutres croisées, trente six (6x6) combinaisons de conditions aux limites sont possibles dont vingt et une sans répétition. Les expressions exactes des intégrales adimensionnelles I_{mi}^{pq} et J_{nj}^{rs} pour chaque cas de poutre sont programmées sous *Matlab* [30 et 31] et incorporées à un programme général de calcul des modes propres des plaques développé sur la base du travail de M. KHAROUBI et L. FATMI [32], qui permet de calculer les coefficients de la loi constitutive d'un stratifié. L'organigramme de ce programme est présenté ci-après.







3.5 Validation du programme élaboré

Dans le but de valider le programme élaboré, les résultats issus de ce dernier sont confrontés aux fréquences et déformées propres d'une plaque rectangulaire symétrique, obtenues en calcul de structures par éléments finis sous *I-DEAS* pour les vingt et une configurations considérées de la plaque.

3.5.1 Caractéristiques mécaniques et géométrique de la plaque étudiée

Nous considérons une plaque carrée de dimensions $250 \times 250 \times 2,5 \text{ mm}^3$, constituée d'un stratifié symétrique tiré de la littérature. La plaque est fabriquée par stratification successive de quatre couches unidirectionnelles identiques à renfort de fibres de verre et de matrice en résine époxyde, de $0,625 \text{ mm}$ d'épaisseur chacune, disposées selon la séquence $[30/0_2/30]$. La fraction volumique des fibres est de $0,45$. Les caractéristiques mécaniques d'une couche, déterminées expérimentalement [21], sont :

$$\begin{aligned} E_L &= 34,61 \text{ GPa} ; \\ E_T &= 7,02 \text{ GPa} ; \\ G_{LT} &= 3,19 \text{ GPa} ; \\ \nu_{LT} &= 0,186 \end{aligned} \quad (3.57)$$

et la masse volumique du stratifié est $\rho = 1830 \text{ kg/m}^3$.

L'utilisation des caractéristiques citées ci-dessus, en tenant compte de l'empilement des couches considérées, permet d'évaluer les matrices de rigidité du stratifié par le programme de calcul comme suit :

$$\begin{aligned} A &= 1.0 \text{ e} + 007 \begin{bmatrix} 7.22347 & 0.95063 & 1.11100 \\ 0.95063 & 2.01378 & 0.39290 \\ 1.11100 & 0.39290 & 1.419398 \end{bmatrix} \text{ milliN / mm} \\ B_{ij} &= 0 \\ D &= 1.0 \text{ e} + 007 \begin{bmatrix} 3.18012 & 0.73805 & 1.01264 \\ 0.73805 & 1.14509 & 0.35811 \\ 1.01264 & 0.35811 & 0.98219 \end{bmatrix} \text{ milliN} \times \text{mm} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Pour les calculs sous *I-DEAS*, travaillant en formulation de Mindlin (prise en compte du cisaillement transverse), les caractéristiques mécaniques (3.57) sont complétées par le module de cisaillement transverse $G_{TT'}$ et le coefficient de Poisson $\nu_{TT'}$, évalués à partir de l'expression (2.29). Pour un renfort en fibres de verre ($E_f = 73 \text{ GPa}$, $\nu_f = 0,22$) et une matrice époxyde ($E_m = 2,8 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0,3$), nous trouvons :

$$\begin{aligned} G_{TT'} &= 2759,3 \text{ MPa} ; \\ \nu_{TT'} &= 0,27 \end{aligned} \quad (3.59)$$

La saisie de l'ensemble des données du matériau au code de calcul conduit à la détermination des termes de la matrice de rigidité et à l'affichage de la séquence d'empilement (figure 3.3). Les résultats obtenus sont identiques à ceux calculés sous *Matlab*.

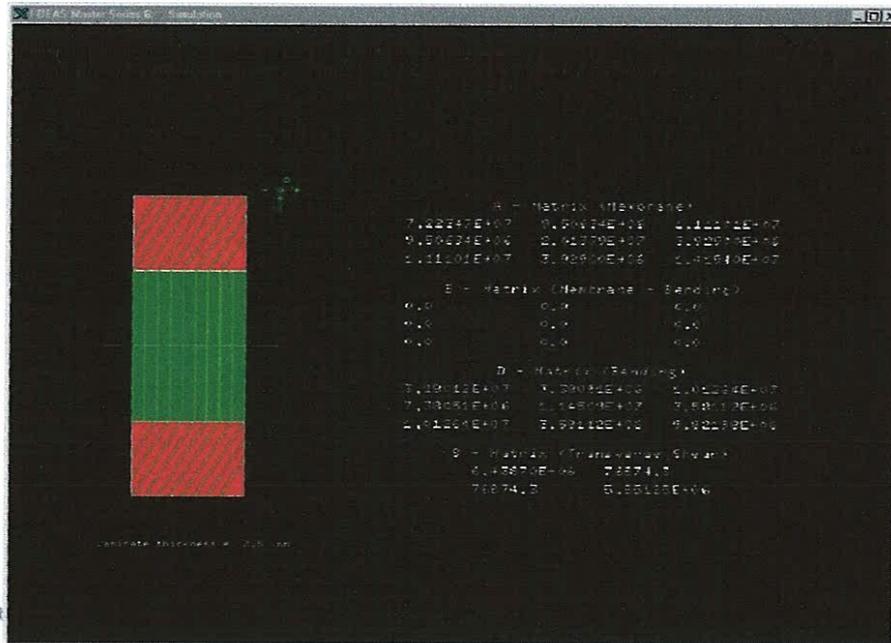


Figure 3.3 Empilement des couches et matrice de rigidité globale calculée par *I-DEAS*

3.5.2 Maillage et conditions aux limites utilisés sous *I-DEAS*

La discrétisation des plaques est effectuée par des éléments de type 'Thin Shell' (coque mince) quadrilatère linéaire, en formulation de Mindlin. Une optimisation du maillage a été effectuée pour assurer la convergence des fréquences propres. Les conditions aux limites sont modélisées en appliquant les définitions relatives aux torseurs cinématiques correspondants à chaque coté de la plaque. La figure 3.4 représente la plaque discrétisée en éléments finis dans le cas de la configuration ALEL.

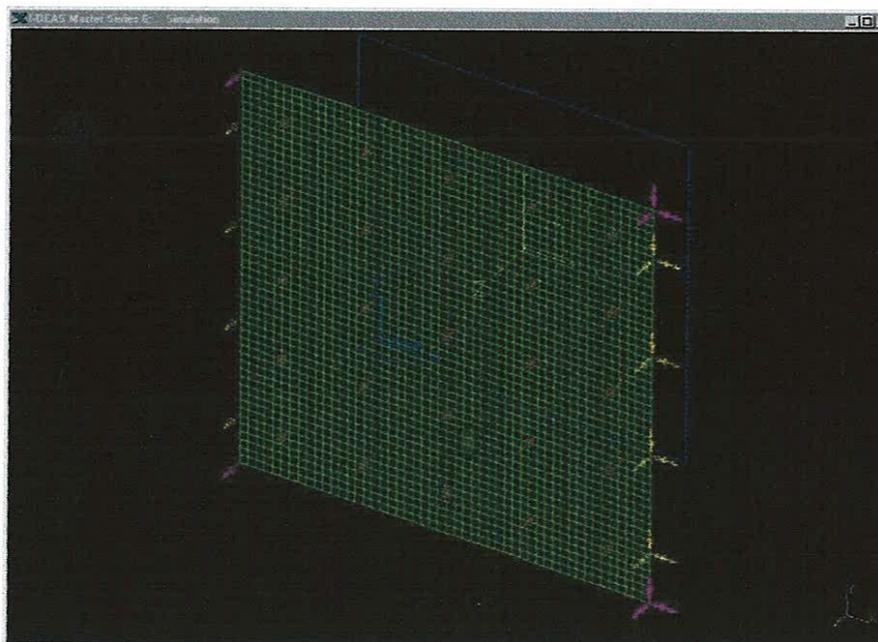
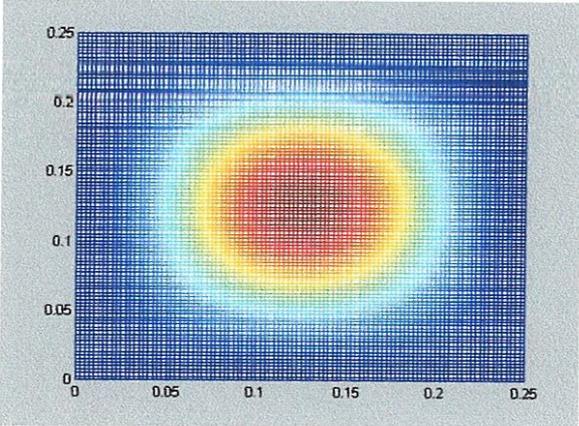
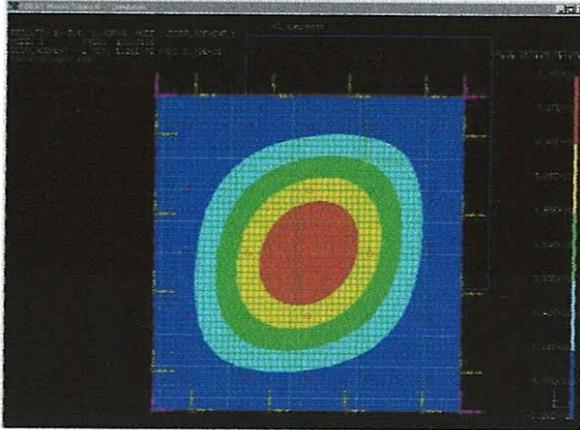
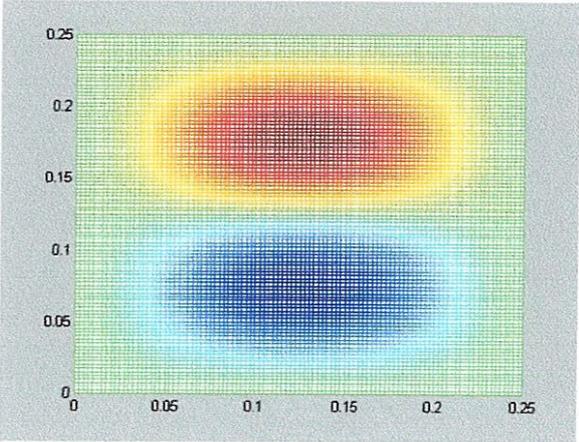
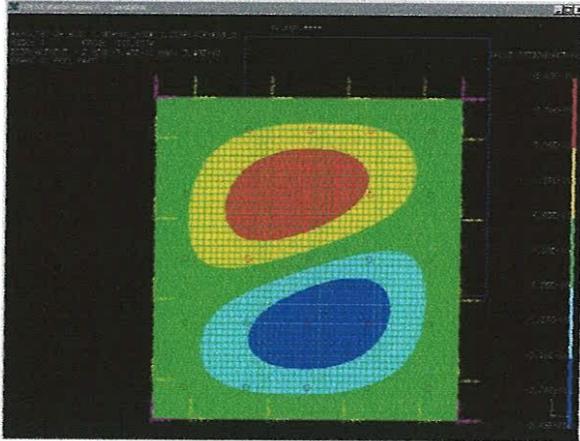
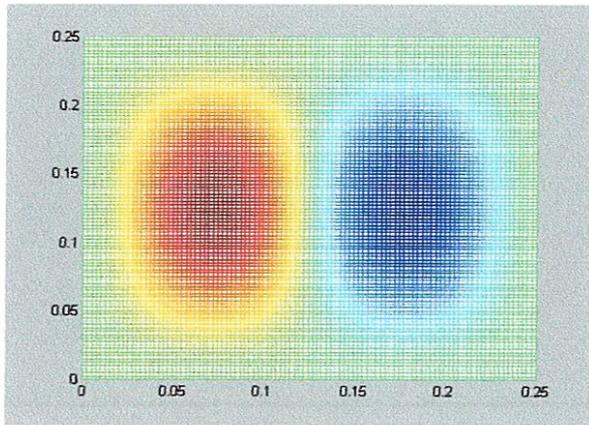


Figure 3.4 Maillage et conditions aux limites appliqués à la plaque
Cas de la configuration ALEL

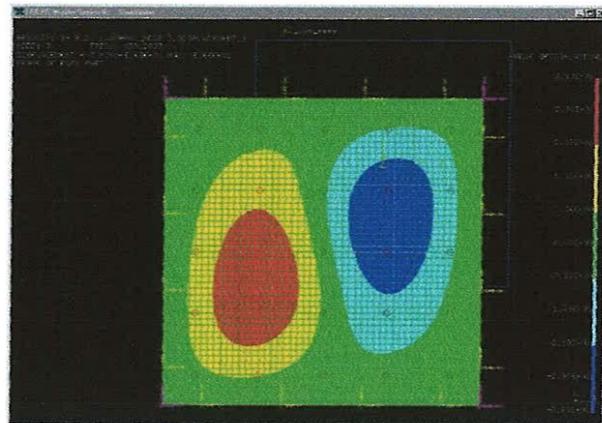
3.5.3 Résultats obtenus

Dans cette partie, seuls les résultats correspondants aux deux cas extrêmes de plaque, complètement encastree (EEEE) et complètement libre (LLLL), sont exposés. Les figures 3.5 et 3.6 représentent respectivement les fréquences et déformées propres des six premiers modes élastiques de flexion de la plaque (EEEE) et (LLLL) obtenues par les deux approches considérées. Les modes rigides de la plaque complètement libre inclus dans le calcul ne sont pas représentés. La représentation 2D retenue, amplitude du déplacement transversal en projection sur le plan de la plaque, fait apparaître les lignes nodales (lignes de déplacement nul), permettant ainsi d'identifier les modes.

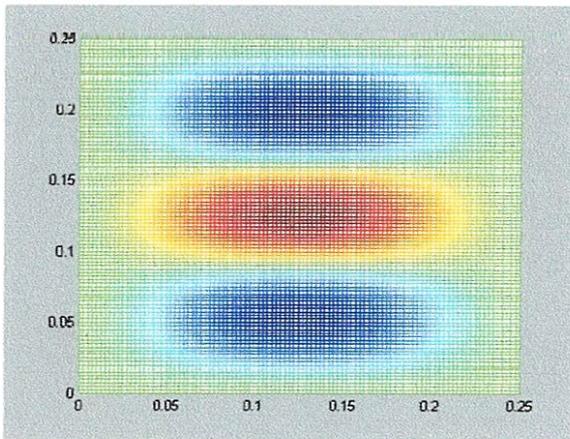
<p>Résultats obtenus avec le programme de calcul élaboré sous <i>Matlab</i></p>	<p>Résultats obtenus en calcul de structures par éléments finis sous <i>I-DEAS</i></p>
 <p data-bbox="312 1301 549 1375">Mode 1,1 $f = 197.35699$ Hz</p>	 <p data-bbox="943 1308 1161 1382">Mode 1,1 $f = 196.9165$ Hz</p>
 <p data-bbox="304 1933 544 2007">Mode 1,2 $f = 333.46959$ Hz</p>	 <p data-bbox="935 1937 1153 2011">Mode 1,2 $f = 332.5774$ Hz</p>



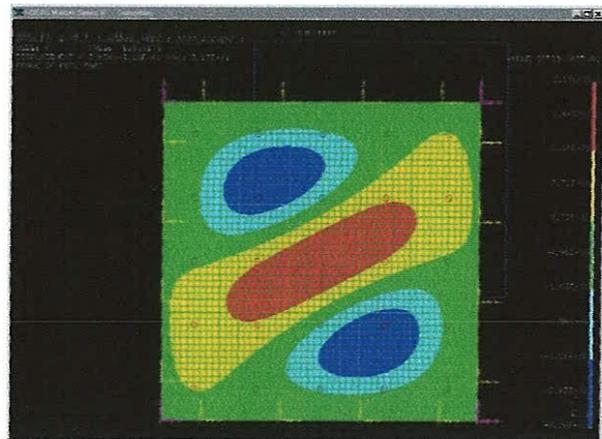
Mode 2,1
 $f = 461.17657 \text{ Hz}$



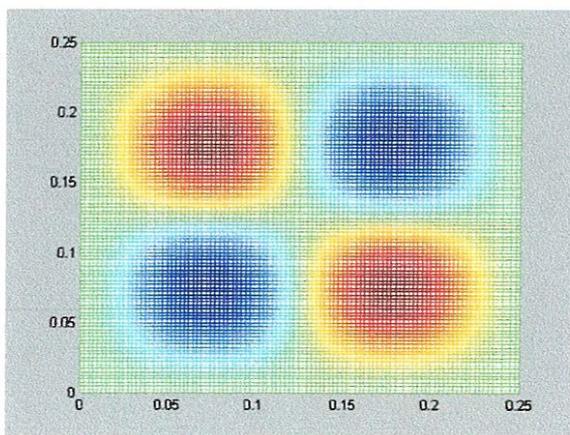
Mode 2,1
 $f = 459.2835 \text{ Hz}$



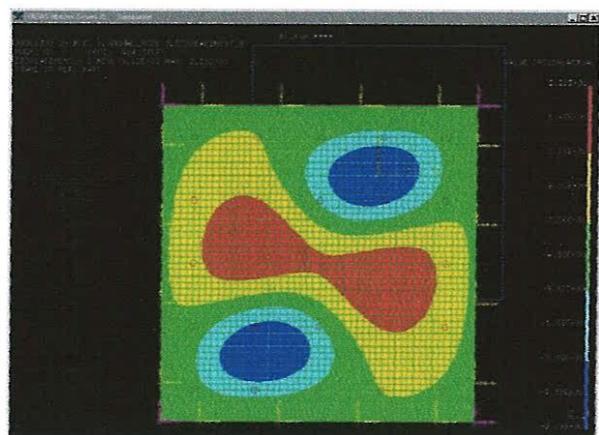
Mode 1,3
 $f = 530.86007 \text{ Hz}$



Mode 1,3
 $f = 529.01730 \text{ Hz}$



Mode 2,2
 $f = 617.46993 \text{ Hz}$



Mode 2,2
 $f = 614.32170 \text{ Hz}$

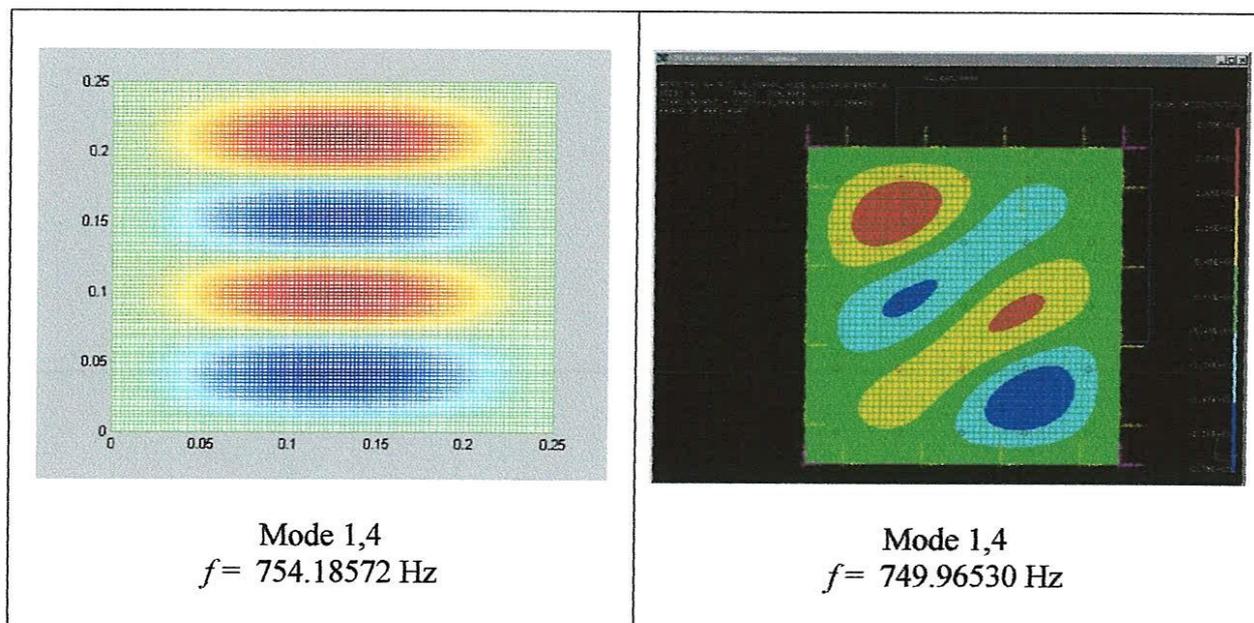
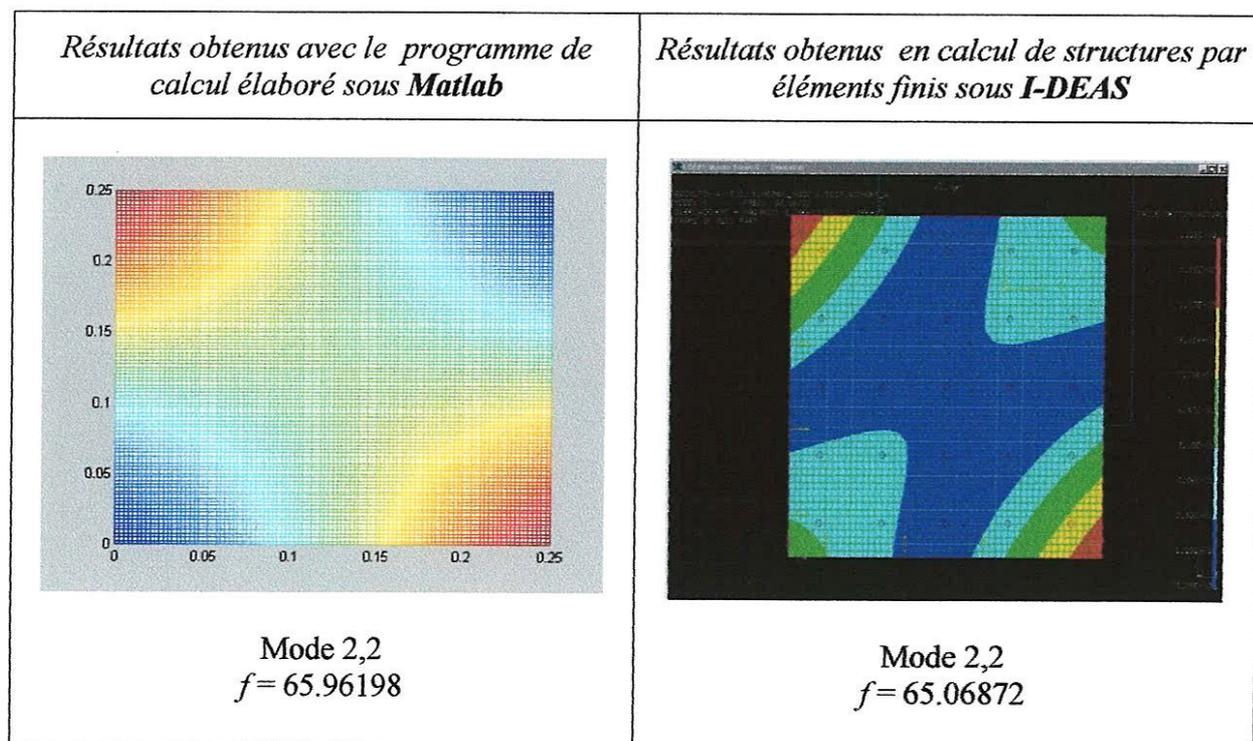
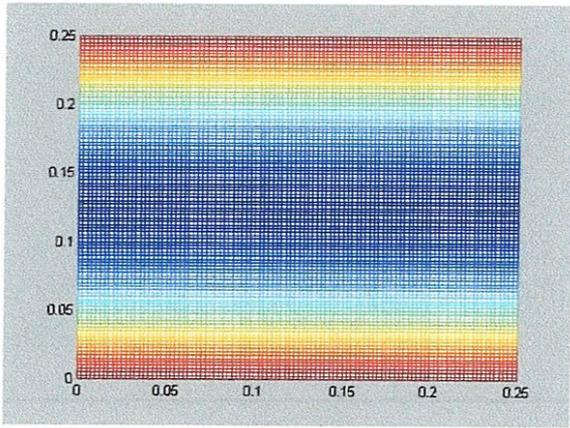
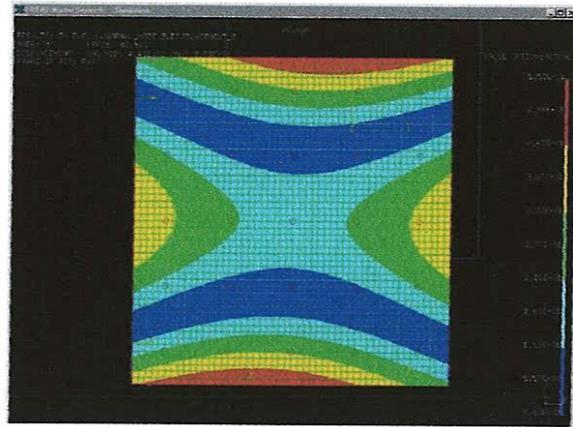


Figure 3.5 Fréquences et déformées propres des six premiers modes de flexion de la plaque EEEE calculées sous *Matlab* et en calcul de structures sous *I-DEAS*

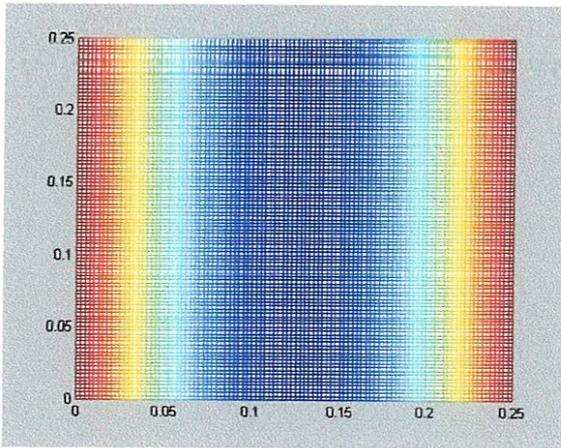




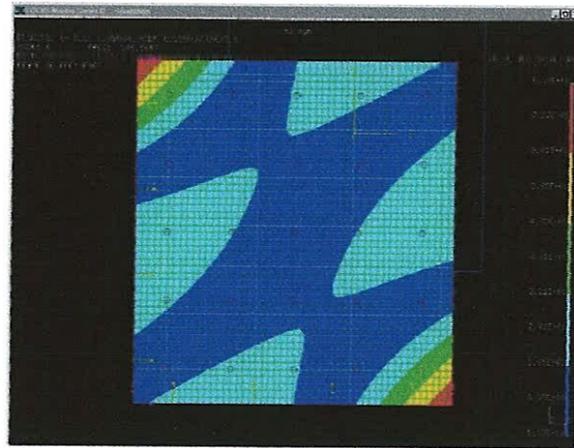
Mode 1,3
 $f = 83.46802$



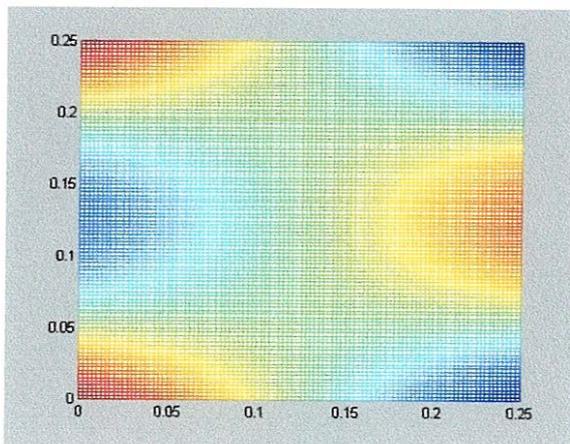
Mode 1,3
 $f = 82.563$



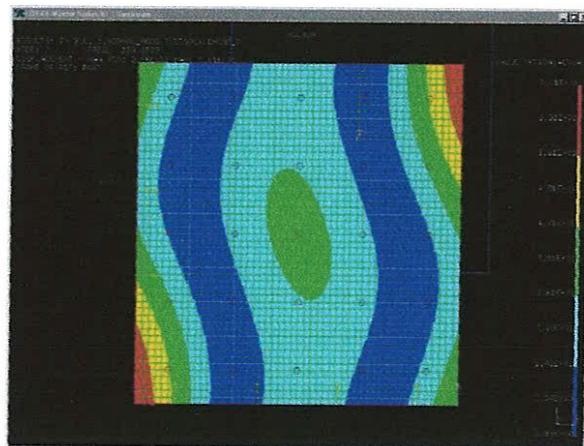
Mode 3,1
 $f = 150.64541$



Mode 3,1
 $f = 148.9687$



Mode 2,3
 $f = 154.95575$



Mode 2,3
 $f = 153.6577$

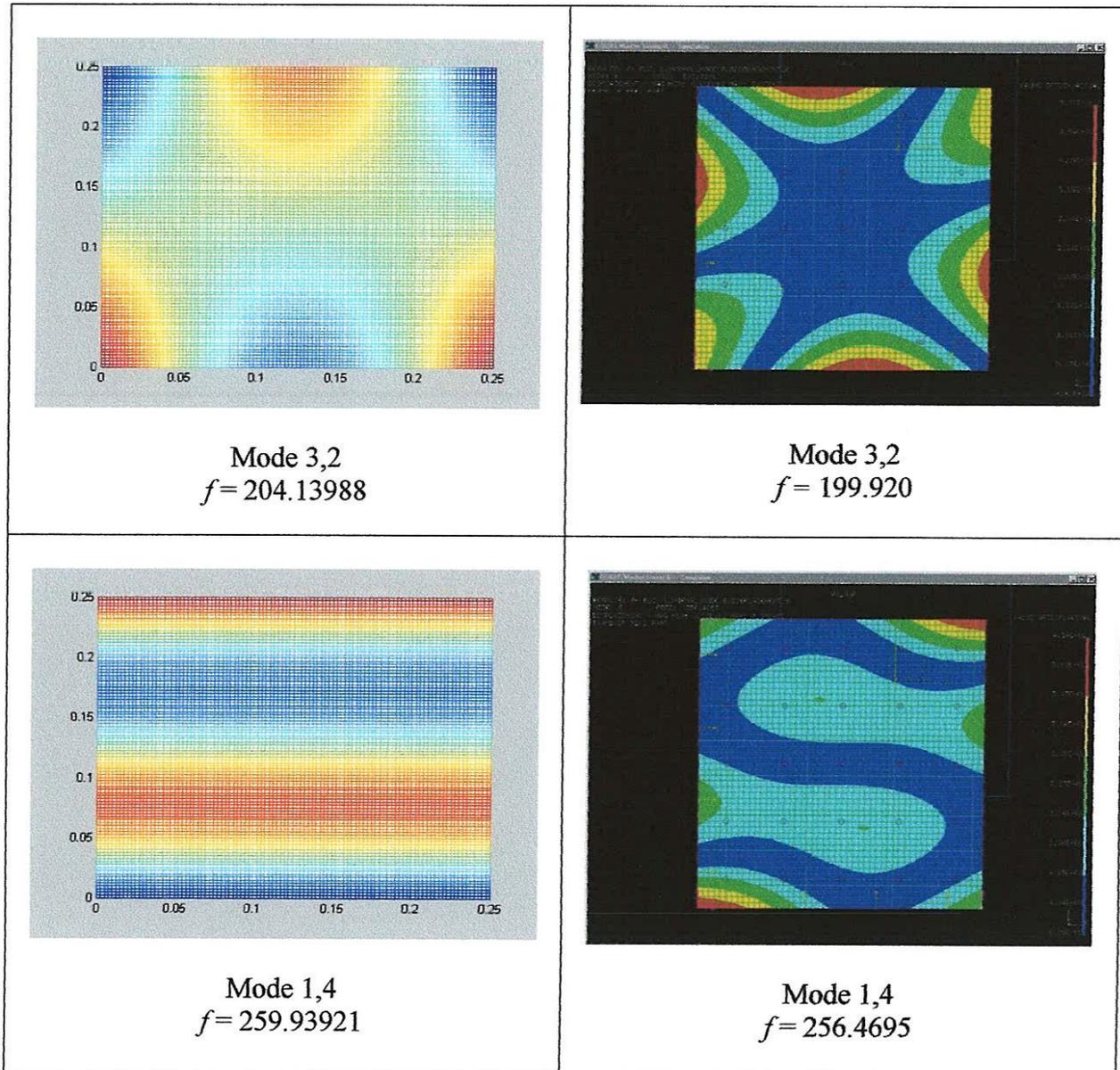


Figure 3.6 Fréquences et déformées propres des six premiers modes de flexion de la plaque LLL (modes rigides exclus), calculées sous *Matlab* et en calcul de structures sous *I-DEAS*

3.5.4 Analyse des résultats

Sur les tableaux 3.1 et 3.2 sont reportées les valeurs des fréquences propres obtenues par les deux méthodes considérées, analytique et calcul de structures par éléments finis, respectivement pour les configurations (EEEE) et (LLL). La même démarche est utilisée pour analyser les résultats obtenus pour les autres combinaisons de conditions aux limites. Les tableaux comparatifs sont regroupés en Annexe B.

Il ressort de ces tableaux que les valeurs des fréquences propres obtenues analytiquement sont systématiquement supérieures à celles obtenues en calcul de structures et que l'écart entre les deux approches tend, à quelques exceptions près, à croître avec le rang du mode. Ces écarts

Modes	Déformées	Fréquences propres calculées analytiquement	Fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	197,35699	196,91650	0,44049	0,22
2	1,2	333,46959	332,57740	0,89219	0,27
3	2,1	461,17657	459,28350	1,89307	0,41
4	1,3	530,86007	529,01730	1,84277	0,35
5	2,2	617,46993	614,32170	3,14823	0,51
6	1,4	754,18572	749,96530	4,22042	0,56

Tableau 3.1 Comparaison des fréquences propres obtenues sous *Matlab* et en calcul de structures sous *I-DEAS* dans le cas de la plaque **EEEE**

Modes	Déformées	Fréquences propres calculées analytiquement	Fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	2,2	65,96198	65,06872	0,89326	1,37
2	1,3	83,46802	82,56300	0,90502	1,10
3	3,1	150,6454	148,96870	1,67671	1,13
4	2,3	154,95580	153,65770	1,29805	0,85
5	3,2	204,13990	199,92010	4,21978	2,11
6	1,4	259,93921	256,46930	3,46991	1,35

Tableau 3.2 Comparaison des fréquences propres obtenues sous *Matlab* et en calcul de structures sous *I-DEAS* dans le cas de la plaque **LLLL**

peuvent être expliqués par la différence de formulation. En effet, le problème résolu sous *I-DEAS* est le problème général décrit par les équations (2.100) à (2.104), et prend en considération les trois composantes du déplacement de la plaque, alors que dans notre approche nous ne considérons que le déplacement transversal. D'autre part, la formulation des éléments retenus par le code de calcul est basée sur la théorie des stratifiés du premier ordre (Mindlin) alors que celle utilisée pour développer le programme de calcul élaboré est la théorie classique des stratifiés. Cette dernière négligeant le cisaillement transverse et l'inertie de rotation des sections droites, conduit à surestimer les valeurs des fréquences propres [33]. En effet les contraintes de cisaillement transverse tendent à diminuer l'énergie de déformation alors que l'inertie de rotation augmente l'énergie cinétique totale de la plaque ce qui abaisse les fréquences propres représentées schématiquement par le rapport énergie de déformation - énergie cinétique, ou quotient de Rayleigh [7]. Ces deux effets s'accroissent dans le sens du rang du mode expliquant ainsi la tendance à l'augmentation de l'écart entre les deux formulations pour les modes de rang supérieur.

D'un autre côté, la comparaison entre les différentes configurations en terme d'erreurs relatives commises sur l'estimation des fréquences propres par la méthode de Rayleigh-Ritz, montre que la plus grande précision est obtenue dans le cas de la plaque complètement encadrée et que la valeur de l'erreur augmente progressivement en changeant un côté encadré en côté appuyé puis en côté libre. Ceci peut être alloué à la précision de l'approximation utilisée (fonctions poutres). En effet l'approximation du déplacement transversal par les

fonctions poutres ne permet pas de tenir compte des couplages flexion-torsion (induit par les termes D_{16} et D_{26} de la matrice de rigidité de flexion (3.5), ni du couplage flexion-flexion (terme D_{12}). Nous avons abordé cette limitation sur les conditions aux limites (paragraphe 3.4.3), et nous retrouvons bien la conséquence de celle-ci dans la tendance observée. Par ailleurs, l'analyse des déformées propres montre que même dans le cas le plus favorable où l'approximation par les fonctions poutres permet de vérifier les conditions aux limites sur tous les cotés de la plaque (configuration EEEE), le couplage à l'intérieur du domaine n'est pas modélisé par celle-ci, il se manifeste (figure 3.5) par la rotation subie par les lignes nodales : parallèles aux bords de la plaque dans le cas de l'approximation, elles sont déviées dans le cas de la modélisation éléments finis reflétant la déformation réelle de la plaque qui subit une torsion au tour de l'axe z pour toute flexion dans les plans (x,z) ou (y,z) . Cet aspect permet aussi d'expliquer les écarts entre les deux méthodes.

Cependant l'erreur relative enregistrée est inférieure à 3.0 %, dans toutes les configurations calculées et simulées. Ce résultat permet de conclure à la validité du programme de calcul élaboré.

CHAPITRE 4

DETERMINATION EXPERIMENTALE
DES
FREQUENCES PROPRES
ET
AMORTISSEMENTS MODAUX
DE
PLAQUES STRATIFIEES

4.1 Vibrations expérimentales des structures

L'étude expérimentale du comportement vibratoire consiste à mesurer les caractéristiques modales d'une structure (fréquences et déformées propres, amortissements modaux) représentatives de son comportement dynamique. Ces mesures renseignent sur l'état réel de la structure et permettent une meilleure maîtrise du problème de contrôle des vibrations (localisation exacte des fréquences de résonance, identifications des déformées...). Elles servent à valider les modèles théoriques ou à construire des modèles de comportement, notamment en basses fréquences [27], utilisés pour les calculs de prédiction et pour analyse des informations contenues dans ces mesures (techniques de caractérisation, de détection et de suivi de l'évolution des défauts et endommagements). Généralement deux types d'essai peuvent être utilisés [7] :

- Essai d'excitation appropriée : la structure est excitée en plusieurs points simultanément, par des forces harmoniques synchrones dont la fréquence et les amplitudes sont réglées par approximations successives jusqu'à l'obtention d'une réponse résonante : la fréquence et la déformée propre sont alors mesurées directement. Cette technique, fiable mais difficile d'emploi, est réservée aux structures de pointe de grandes dimensions.

- Essai d'excitation non appropriée : la méthode consiste à exciter la structure en un point avec une force quelconque (en particulier impulsionnelle) et mesurer sa réponse en d'autres points. Les caractéristiques modales sont obtenues après analyse, par des équipements appropriés (analyseurs de vibration), des réponses et des fonctions de transfert obtenues sur un intervalle de fréquences choisi. Cette méthode, rapide et simple, convient aussi bien aux éprouvettes de laboratoire qu'aux tests sur des structures à échelle réelle [14].

Nous utilisons cette dernière méthode pour déterminer, dans un premier temps, les fréquences propres de flexion de deux plaques de stratification distinctes, testées dans les configurations ELLL et ELEL. Les mesures obtenues sont comparées aux fréquences propres de ces plaques calculées par les deux approches considérées (chapitre 3). La détermination expérimentale des déformées propres n'est pas envisagée, elle est plus complexe et nécessite plus de moyen. Cette démarche est complétée par une étude de l'amortissement ayant pour finalité l'évaluation de la réponse amortie des plaques étudiées.

4.2 Matériau étudié

4.2.1 Mode de fabrication et stratification

L'étude expérimentale porte sur deux matériaux stratifiés symétriques à renfort de fibres de verre type E et de matrice en résine époxyde. Ces matériaux sont fabriqués sous forme de plaques par stratification successive de huit couches identiques de renfort sous forme de tissu unidirectionnel VEX 300, de masse surfacique $M_s = 300 \text{ g/m}^2$, orientés à 0° et 90° selon les séquences d'empilement $[0/90_2/0]_s$ pour le premier et $[90/0_2/90]_s$ pour le second. L'imprégnation par la résine époxyde, de type SR 1500, effectuée par voie humide est suivie d'une polymérisation sous vide par la technique du sac pendant 8 heures à température ambiante. Les matériaux obtenus sont découpés, sur une tronçonneuse à disque diamanté, aux dimensions des plaques testées $250 \times 202 \text{ mm}^2$. La première plaque de séquence d'empilement $[0/90_2/0]_s$ (couches externes orientées parallèlement à la direction x du référentiel, figure 4.1) a été réalisée avec une épaisseur moyenne de 1,9 mm. La deuxième plaque de séquence d'empilement $[90/0_2/90]_s$ a une épaisseur moyenne de 2,2 mm.

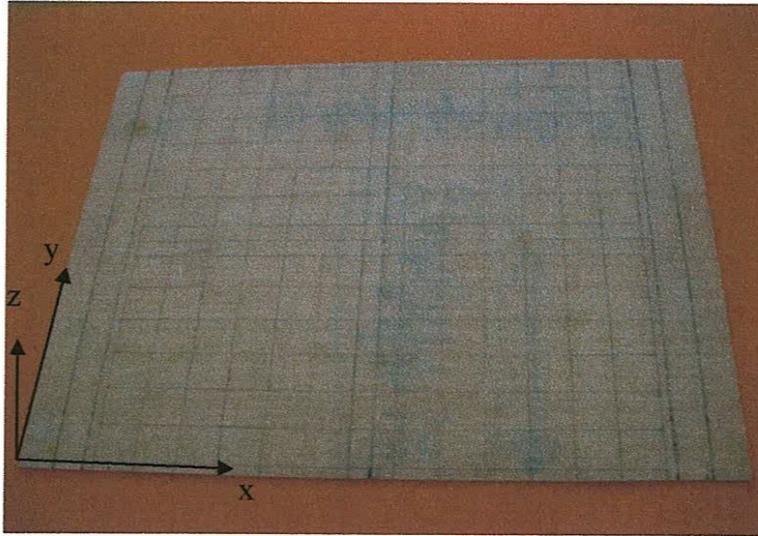


Figure 4.1 Plaque étudiée rapportée à son référentiel

4.2.2 Caractéristiques mécaniques des plaques étudiées

La pesée des plaques a permis de déterminer leurs masses volumiques. La masse de la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$ est de 164,3 g conduisant à une masse volumique $\rho_1 = 1710,0 \text{ Kg/m}^3$. Celle de la plaque 2 $[90/0_2/90]_s$ est de 185,0 g correspondant à une masse volumique $\rho_2 = 1665,0 \text{ Kg/m}^3$.

Le taux de renfort dans chaque stratifié est évalué sur la base de la masse surfacique du renfort M_s , de la masse volumique des fibres ρ_f et de l'épaisseur d'une couche e_c par la relation [1] :

$$V_f = \frac{M_s}{\rho_f e_c} \quad (4.1)$$

Pour des fibres de verre de type E de masse volumique $\rho_f = 2600,0 \text{ Kg/m}^3$, la fraction volumique des fibres est de 0,48 pour la plaque 1 et de 0,42 pour la plaque 2. A partir de ces données, les propriétés mécaniques des couches dans chaque plaque sont évaluées par les expressions (2.25) à (2.30) sur la base des propriétés suivantes pour :

- Les fibres de verre : $E_f = 73 \text{ GPa}$;
 $\nu_f = 0,22$.
- La matrice époxyde : $E_m = 2,8 \text{ GPa}$;
 $\nu_f = 0,3$.

Ces caractéristiques sont résumées dans les tableaux 4.1 et 4.2. Elles ont servi à calculer les fréquences et déformées propres des deux plaques, analytiquement et en calcul de structures par éléments finis, pour les deux configurations expérimentales retenues.

Module de Young longitudinal E_L (MPa)	Module de Young transversal $E_T = E_{T'}$ (MPa)	Module de cisaillement $G_{LT} = G_{LT'}$ (MPa)	Module de cisaillement $G_{TT'}$ (MPa)	Coefficient de Poisson $\nu_{LT} = \nu_{LT'}$	Coefficient de Poisson $\nu_{TT'}$
36496,0	6814,0	2815,4	2468,0	0,26	0,38

Tableau 4.1 Caractéristiques mécaniques d'une couche unidirectionnelle dans son repère d'orthotropie - plaque 1 $[0/90_2/0]_s$

Module de Young longitudinal E_L (MPa)	Module de Young transversal $E_T = E_{T'}$ (MPa)	Module de cisaillement $G_{LT} = G_{LT'}$ (MPa)	Module de cisaillement $G_{TT'}$ (MPa)	Coefficient de Poisson $\nu_{LT} = \nu_{LT'}$	Coefficient de Poisson $\nu_{TT'}$
32284,0	6031,12	2458,69	2179,6	0,2664	0,3836

Tableau 4.2 Caractéristiques mécaniques d'une couche unidirectionnelle dans son repère d'orthotropie - plaque 2 $[90/0_2/90]_s$

4.2.3 Conditions aux limites et points de mesure

L'encastrement est réalisé suivant la largeur de la plaque (direction y). Les plaques testées ont alors les dimensions $226 \times 202 \text{ mm}^2$, dans la configuration ELLL et $202 \times 202 \text{ mm}^2$ dans la configuration ELEL. Dans le but de repérer les points de mesure expérimentaux, les plaques ont été préalablement quadrillées de mailles de $15 \times 15 \text{ mm}^2$ (figure 4.2), neuf points de mesure ont été retenus.

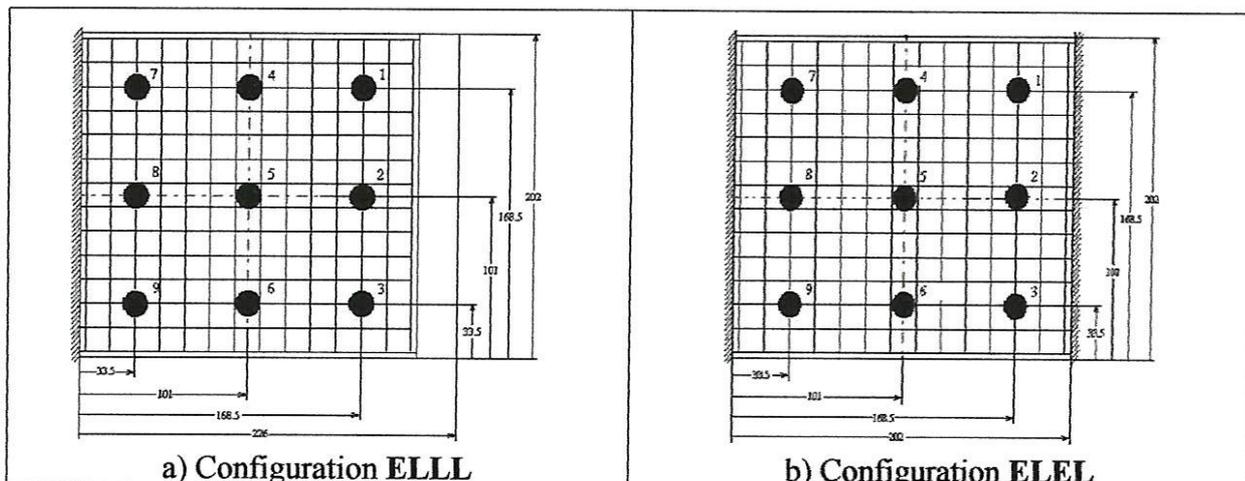
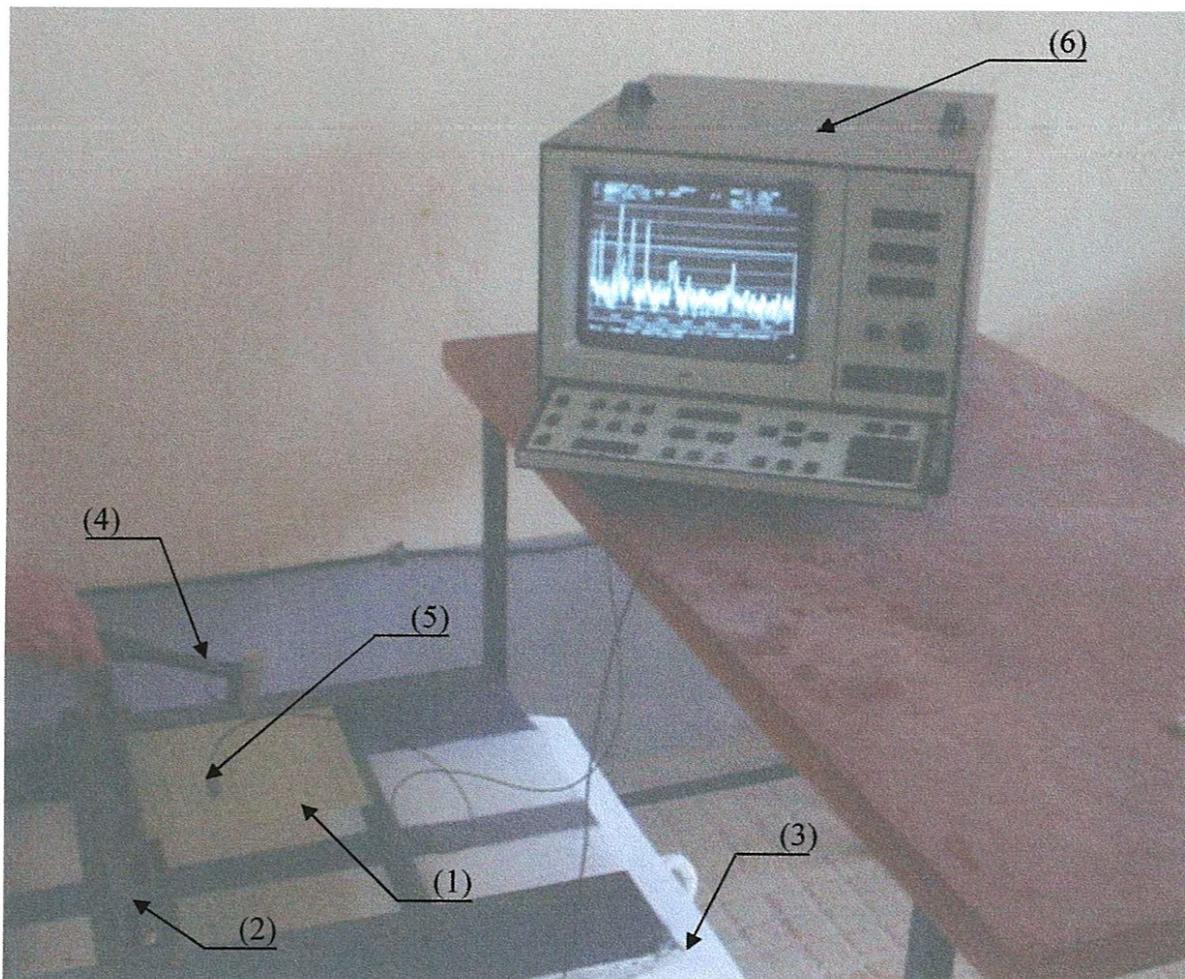


Figure 4.2 Quadrillage et points de mesure expérimentaux

4.3 Banc d'essais

La figure 4.3 montre le banc d'essais et les moyens utilisés. La plaque testée (1) est maintenue horizontalement grâce à un dispositif de fixation (2) permettant de réaliser la condition d'encastrement sur l'un des bords de la plaque. Pour éviter toutes perturbations des fréquences propres de la plaque par celles du dispositif de maintien [34], ce dernier est fixé sur un bloc rigide en béton (3). La plaque est excitée, par impact, avec un marteau de choc (4) générant une force impulsionnelle. Le capteur de force monté sur le marteau permet de traduire cette excitation en signal temporel. Un accéléromètre (5) fixé sur la plaque permet de mesurer l'amplitude de l'accélération de ce point en fonction du temps. L'analyseur bi canaux (6) permet l'acquisition simultanée des deux signaux, leurs traitements en temps réel par transformée de Fourier rapide (FFT) et l'enregistrement des données sur support informatique.



- | | |
|--------------------------------|--|
| (1) : Plaque étudiée ; | (4) : Marteau de choc avec capteur de force B&K 8200 |
| (2) : Dispositif de maintien ; | (5) : Accéléromètre B&K 3484 |
| (3) : Bloc de béton | (6) : Analyseur bi canaux B&K 2035 |

Figure 4.3 Banc d'essais et moyens utilisés

4.4 Déroulement des essais – mesure des fréquences propres

L'accéléromètre est fixé sur la plaque excitée en flexion avec un marteau de choc (figure 4.4). La force d'excitation et l'accélération du point de mesure sont traduites en signaux temporels grâce aux capteurs et traités par l'analyseur affichant, entre autres, les spectres de ces signaux (amplitudes (dB) en fonction de la fréquence, figure 4.5).



Figure 4.4 Excitation de la plaque au marteau de choc

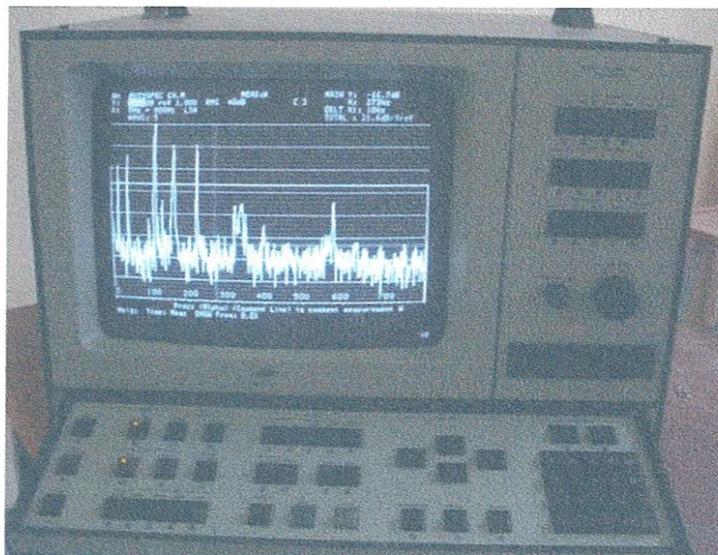


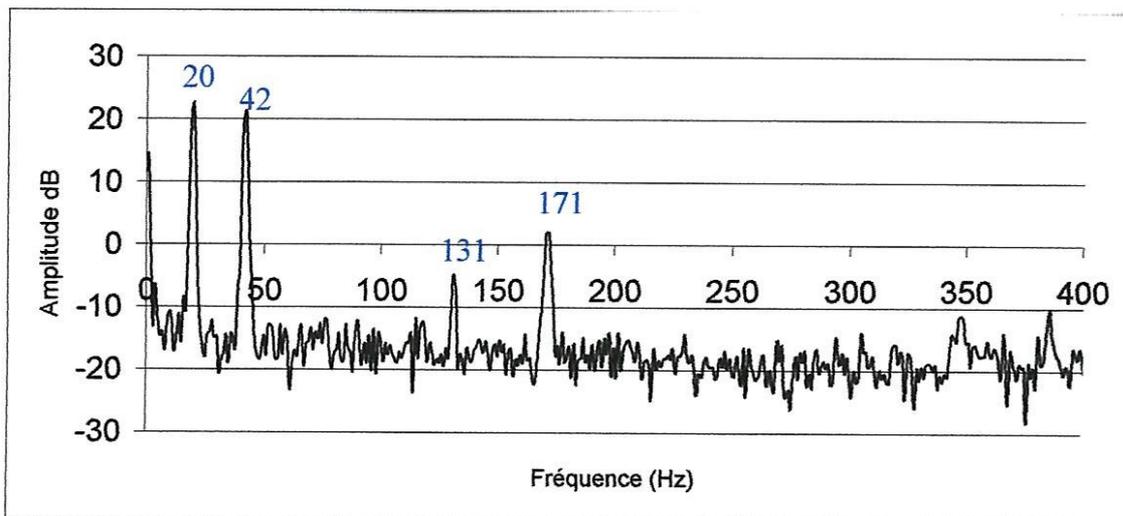
Figure 4.5 Spectre de la réponse en accélération de la plaque

L'analyse d'une impulsion dans le domaine fréquentiel (par transformée de Fourier) montre que l'excitation par choc génère en théorie l'ensemble des fréquences $[0, +\infty [$ permettant ainsi d'exciter toutes les fréquences propres de la plaque. Pour chaque fréquence propre il se produit une réponse résonante de la plaque (réponse avec une amplitude maximale), qui apparaît sous la forme d'un pic sur le spectre de réponse. Chaque pic de ce spectre correspond

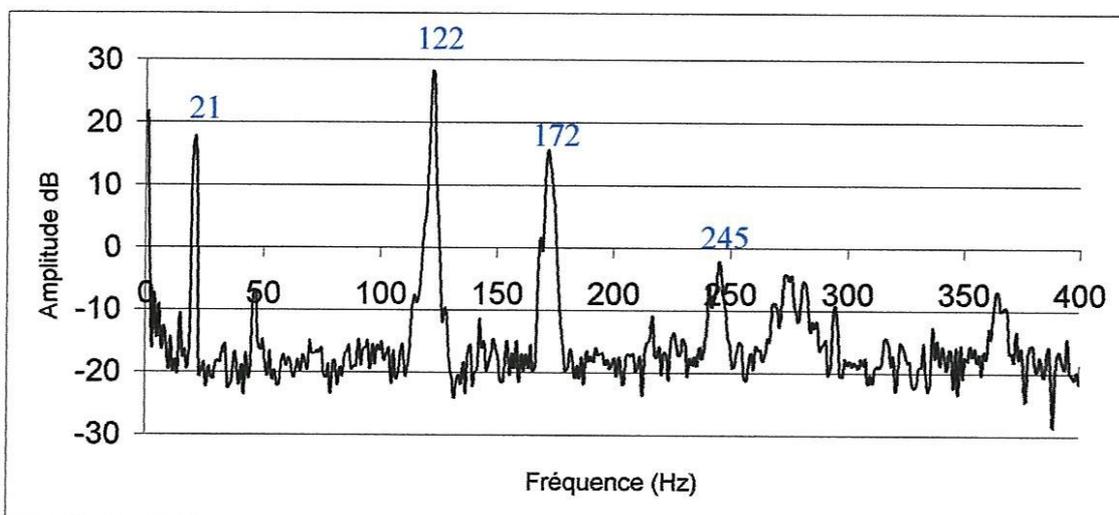
donc à une fréquence propre de la plaque. En réalité, la plage de fréquences générées dépend de la rigidité de l'embout du marteau de choc [21]. Pour détecter tous les modes, la procédure est répétée à différents points de la plaque (dans notre cas neuf points de mesure). L'étude est menée sur l'intervalle $[0,800]$ Hz avec une résolution en fréquence de 1 Hz.

4.5 Résultats obtenus

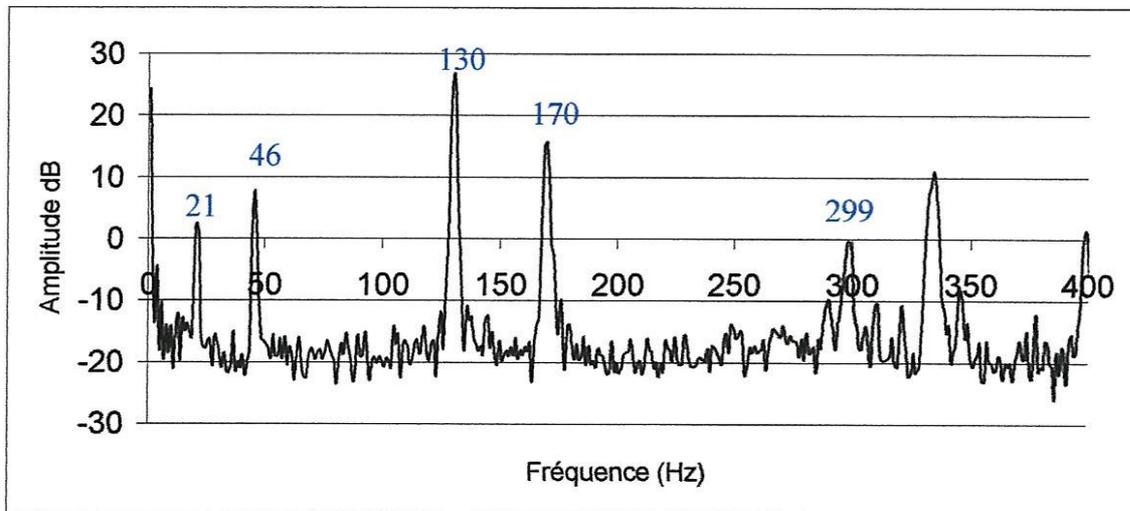
La figure 4.6 donne quelques exemples de spectres de réponses expérimentales mesurées sur la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$, configuration ELLL, pour laquelle les six premiers modes propres appartiennent dans la bande de fréquences $[0,400]$ Hz. L'ensemble des spectres mesurés aux différents points expérimentaux des deux plaques, dans les deux configurations d'essais, est reporté en Annexe C. Chaque valeur expérimentale de fréquence propre relevée à partir de ces spectres est affectée au point où elle a été mesurée, et l'ensemble des valeurs mesurées pour un mode est comparé aux fréquence et déformée propres calculées analytiquement sous *Matlab* et en calcul de structures par éléments finis sous *I-DEAS*, pour ce même mode (tableaux 4.3 à 4.6).



a) Spectre de la réponse de la plaque au point 1

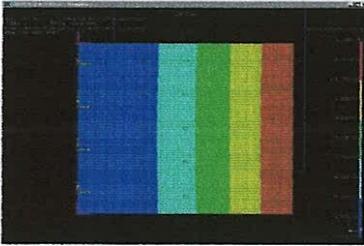
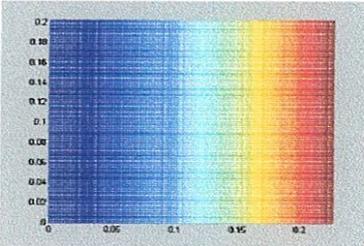
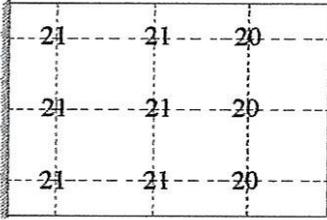
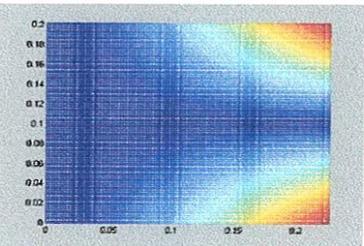
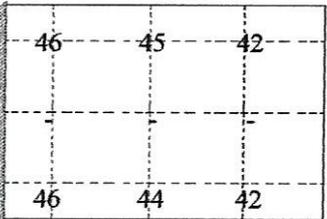


b) Spectre de la réponse de la plaque au point 5



c) Spectre de la réponse de la plaque au point 9

Figure 4.6 Exemples de spectres des réponses expérimentales mesurées sur la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$ - configuration ELLL

a) Fréquences et déformées propres obtenues en calcul de structures par éléments finis sous I-DEAS	b) Fréquences et déformées propres obtenues avec le programme de calcul élaboré sous Matlab	c) Fréquences propres expérimentales en fonction de la position du point de mesure
 <p>Mode 1,1 $f = 22.83$ Hz</p>	 <p>Mode 1,1 $f = 22.84$ Hz</p>	 <p>Mode 1 $f = 20 - 21$ Hz</p>
 <p>Mode 1,2 $f = 40.86$ Hz</p>	 <p>Mode 1,2 $f = 40.96$ Hz</p>	 <p>Mode 2 $f = 42 - 46$ Hz</p>

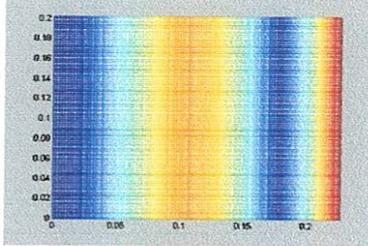
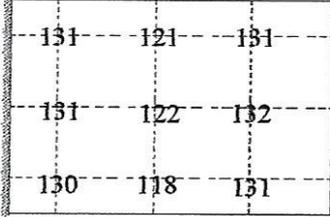
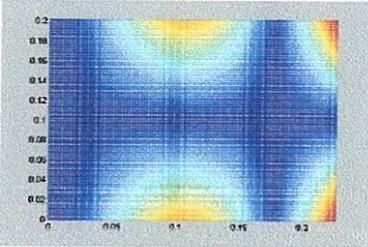
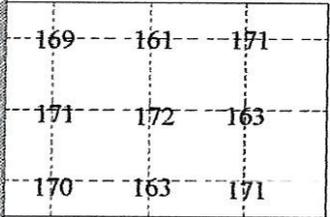
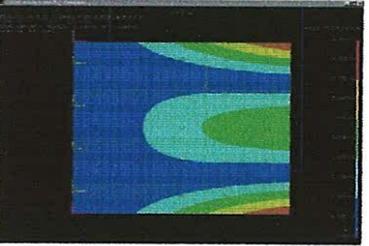
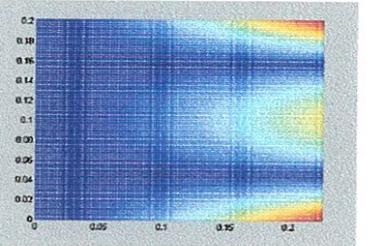
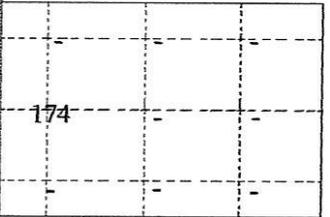
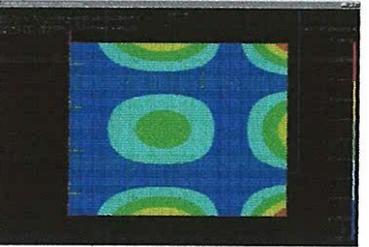
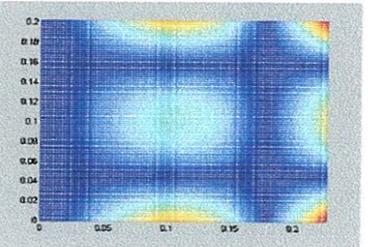
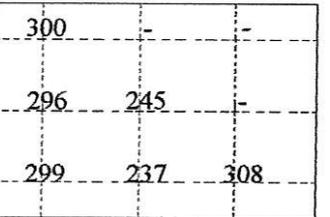
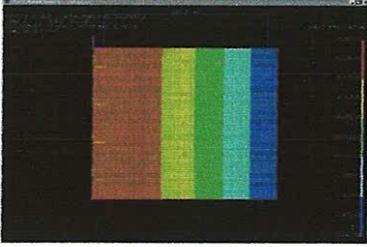
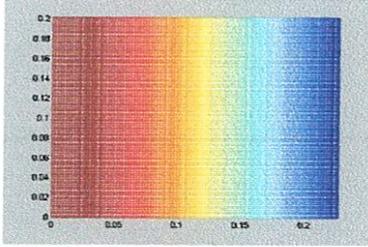
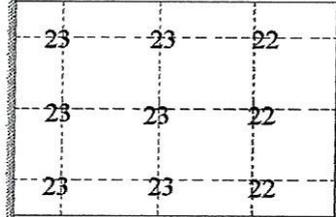
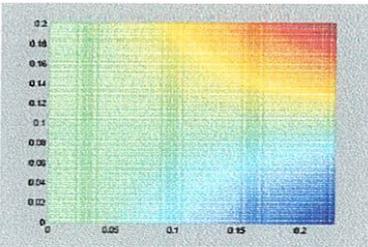
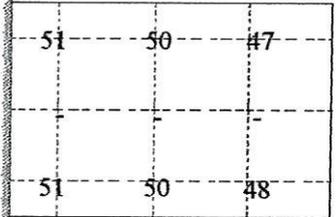
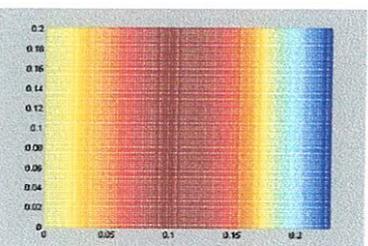
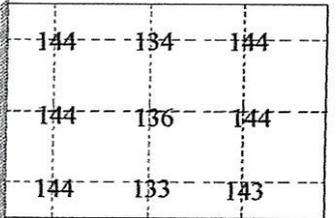
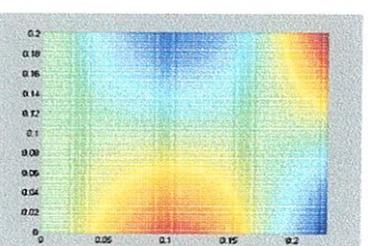
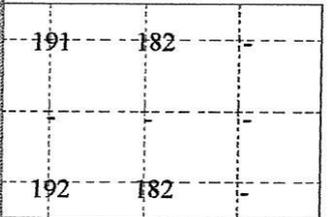
 <p>Mode 2,1 $f = 142.65$ Hz</p>	 <p>Mode 2,1 $f = 142.84$ Hz</p>	 <p>Mode 3 $f = 118 - 132$ Hz</p>
 <p>Mode 2,2 $f = 170.67$ Hz</p>	 <p>Mode 2,2 $f = 171.14$ Hz</p>	 <p>Mode 4 $f = 161 - 171$ Hz</p>
 <p>Mode 1,3 $f = 173.82$ Hz</p>	 <p>Mode 1,3 $f = 174.15$ Hz</p>	 <p>Mode 5 $f = 174$ Hz</p>
 <p>Mode 2,3 $f = 285.65$ Hz</p>	 <p>Mode 2,3 $f = 286.85$ Hz</p>	 <p>Mode 6 $f = 237 - 308$ Hz</p>

Tableau 4.3 Valeurs des fréquences propres calculées et mesurées aux différents points, pour les six premiers modes de flexion de la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$ - Configuration ELLL

a) Fréquences et déformées propres obtenues en calcul de structures par éléments finis sous I-DEAS	b) Fréquences et déformées propres obtenues avec le programme de calcul élaboré sous Matlab	c) Fréquences propres expérimentales en fonction de la position du point de mesure
 <p>Mode 1,1 $f = 22.14$ Hz</p>	 <p>Mode 1,1 $f = 22.16$ Hz</p>	 <p>Mode 1 $f = 22 - 23$ Hz</p>
 <p>Mode 1,2 $f = 42.90$ Hz</p>	 <p>Mode 1,2 $f = 43.02$ Hz</p>	 <p>Mode 2 $f = 47 - 51$ Hz</p>
 <p>Mode 2,1 $f = 138.46$ Hz</p>	 <p>Mode 2,1 $f = 138.69$ Hz</p>	 <p>Mode 3 $f = 133 - 144$ Hz</p>
 <p>Mode 2,2 $f = 172.27$ Hz</p>	 <p>Mode 2,2 $f = 172.88$ Hz</p>	 <p>Mode 4 $f = 182 - 192$ Hz</p>

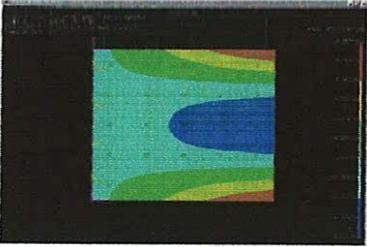
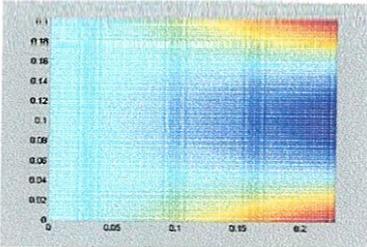
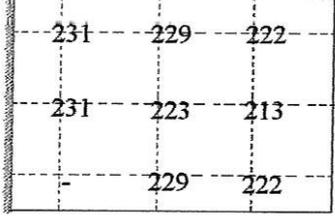
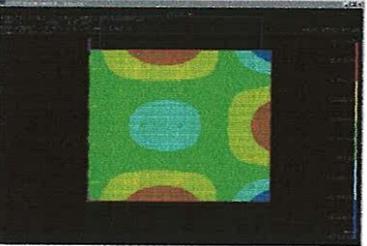
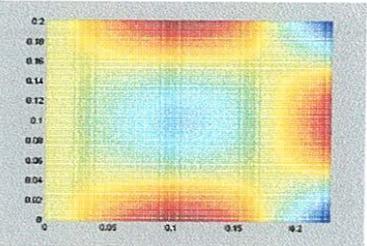
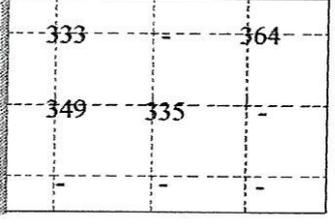
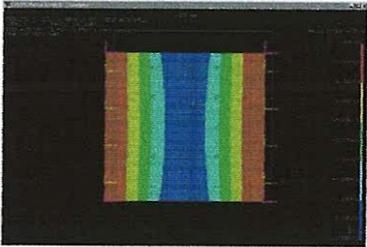
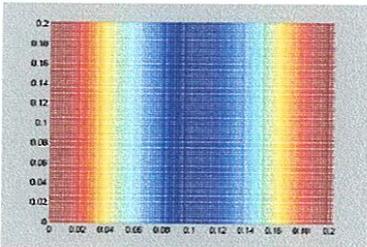
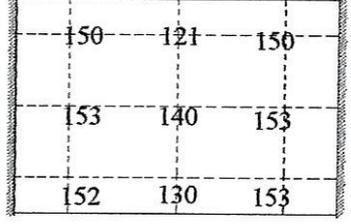
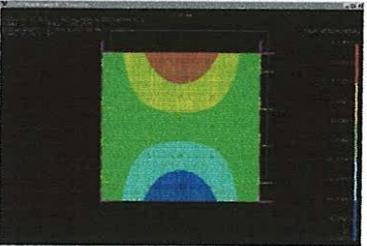
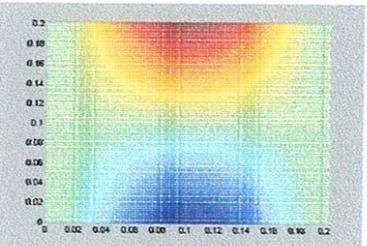
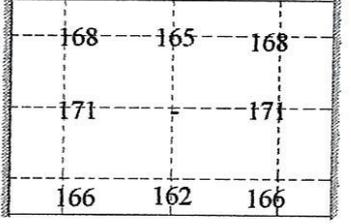
 <p>Mode 1,3 $f = 213.44 \text{ Hz}$</p>	 <p>Mode 1,3 $f = 213.89 \text{ Hz}$</p>	 <p>Mode 5 $f = 213 - 231 \text{ Hz}$</p>
 <p>Mode 2,3 $f = 319.06 \text{ Hz}$</p>	 <p>Mode 2,3 $f = 320.63 \text{ Hz}$</p>	 <p>Mode 6 $f = 333 - 364 \text{ Hz}$</p>

Tableau 4.4 Valeurs des fréquences propres calculées et mesurées aux différents points, pour les six premiers modes de flexion de la **plaque 2** $[90/0_2/90]_s$ - Configuration **ELLL**

<p>a) Fréquences et déformées propres obtenues en calcul de structures par éléments finis sous I-DEAS</p>	<p>b) Fréquences et déformées propres obtenues avec le programme de calcul élaboré sous Matlab</p>	<p>c) Fréquences propres expérimentales en fonction de la position du point de mesure</p>
 <p>Mode 1,1 $f = 181.66$</p>	 <p>Mode 1,1 $f = 181.98 \text{ Hz}$</p>	 <p>Mode 1 $f = 121 - 154 \text{ Hz}$</p>
 <p>Mode 1,2 $f = 193.34 \text{ Hz}$</p>	 <p>Mode 1,2 $f = 193.79 \text{ Hz}$</p>	 <p>Mode 2 $f = 162 - 171 \text{ Hz}$</p>

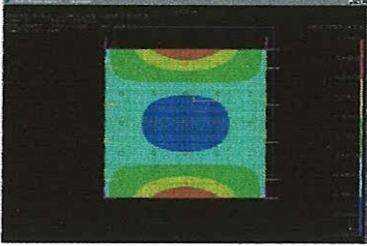
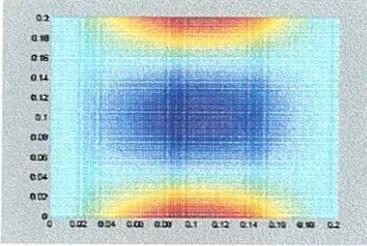
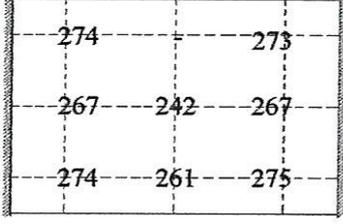
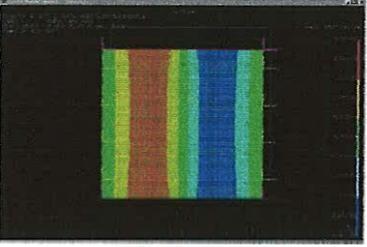
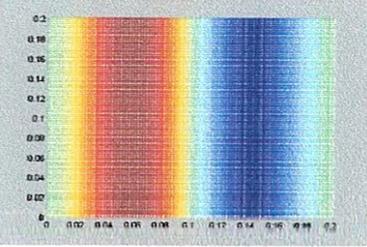
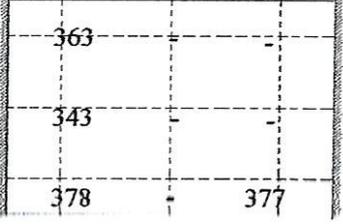
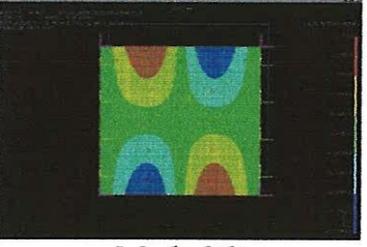
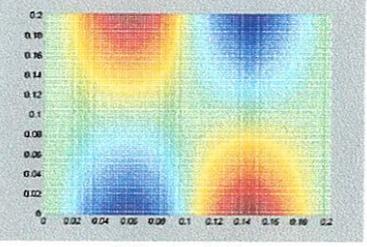
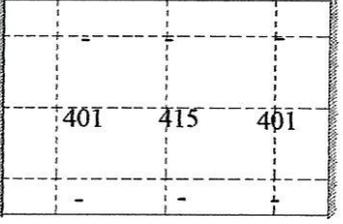
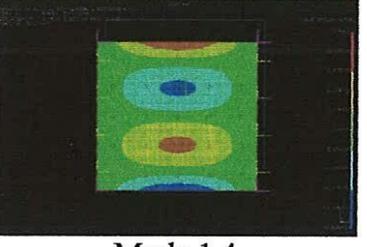
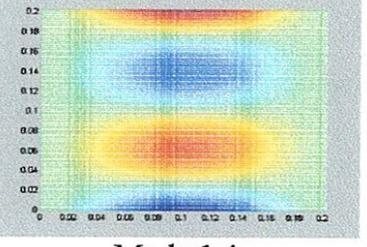
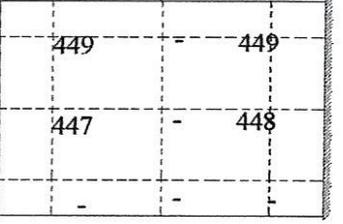
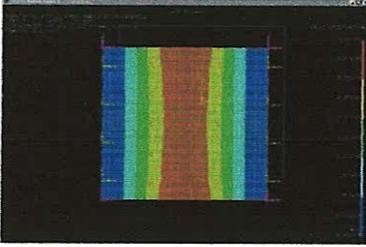
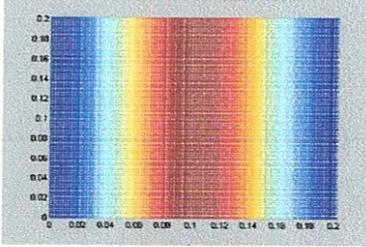
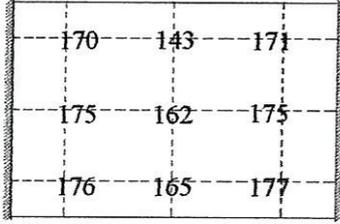
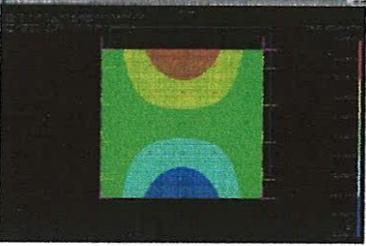
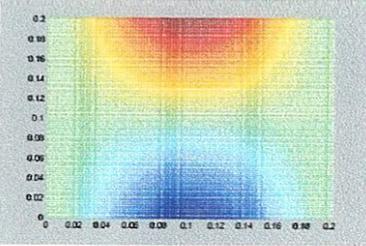
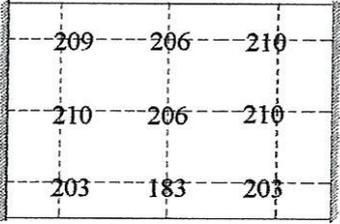
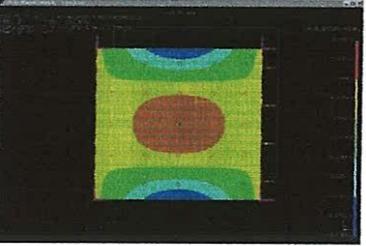
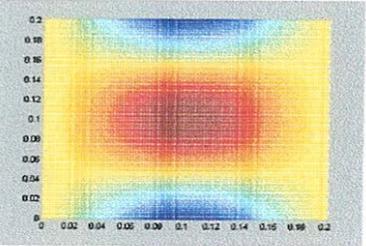
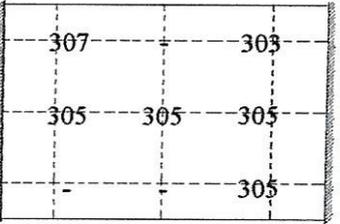
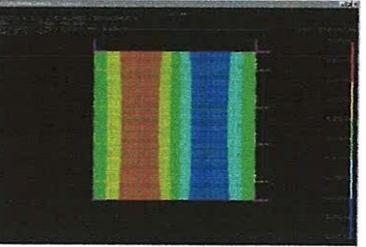
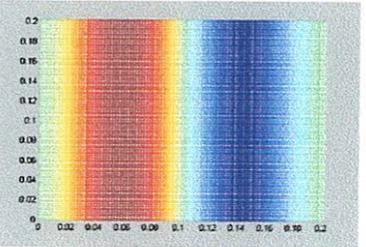
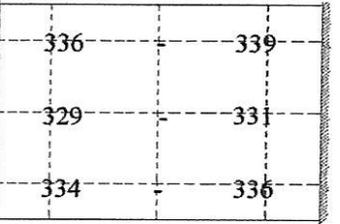
 <p>Mode 1,3 $f = 278.70$ Hz</p>	 <p>Mode 1,3 $f = 279.59$ Hz</p>	 <p>Mode 3 $f = 242 - 275$ Hz</p>
 <p>Mode 2,1 $f = 499.92$ Hz</p>	 <p>Mode 2,1 $f = 501.66$ Hz</p>	 <p>Mode 4 $f = 343 - 378$ Hz</p>
 <p>Mode 2,2 $f = 515.86$ Hz</p>	 <p>Mode 2,2 $f = 517.94$ Hz</p>	 <p>Mode 5 $f = 401 - 415$ Hz</p>
 <p>Mode 1,4 $f = 519.61$ Hz</p>	 <p>Mode 1,4 $f = 521.66$ Hz</p>	 <p>Mode 6 $f = 447 - 449$ Hz</p>

Tableau 4.5 Valeurs des fréquences propres calculées et mesurées aux différents points, pour les six premiers modes de flexion de la **plaque 1** $[0/90_2/0]_s$ - Configuration **ELEL**

<p>a) Fréquences et déformées propres obtenues en calcul de structures par éléments finis sous I-DEAS</p>	<p>b) Fréquences et déformées propres obtenues avec le programme de calcul élaboré sous Matlab</p>	<p>c) Fréquences propres expérimentales en fonction de la position du point de mesure</p>
 <p>Mode 1,1 $f = 176.12$ Hz</p>	 <p>Mode 1,1 $f = 176.54$ Hz</p>	 <p>Mode 1 $f = 143 - 177$ Hz</p>
 <p>Mode 1,2 $f = 190.45$ Hz</p>	 <p>Mode 1,2 $f = 191.07$ Hz</p>	 <p>Mode 2 $f = 183 - 210$ Hz</p>
 <p>Mode 1,3 $f = 306.99$ Hz</p>	 <p>Mode 1,3 $f = 308.21$ Hz</p>	 <p>Mode 3 $f = 305 - 307$ Hz</p>
 <p>Mode 2,1 $f = 484.30$ Hz</p>	 <p>Mode 2,1 $f = 486.66$ Hz</p>	 <p>Mode 4 $f = 329 - 339$ Hz</p>

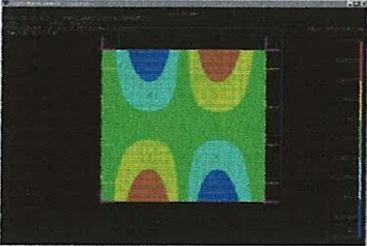
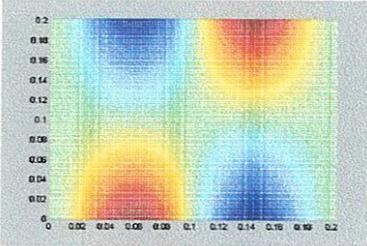
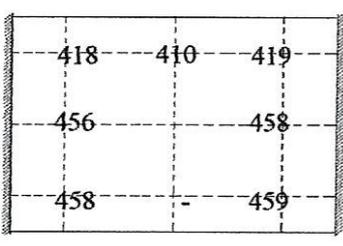
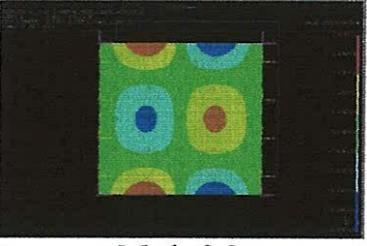
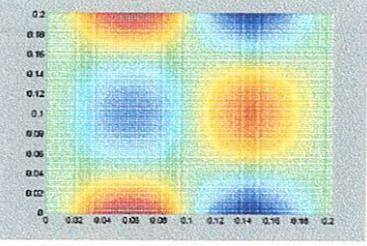
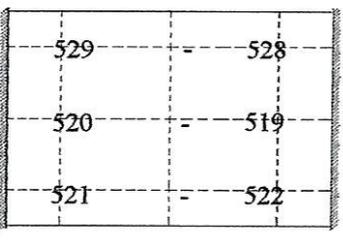
 <p>Mode 2,2 $f = 504.00$ Hz</p>	 <p>Mode 2,2 $f = 506.81$ Hz</p>	 <p>Mode 5 $f = 410 - 459$ Hz</p>
 <p>Mode 2,3 $f = 600.10$ Hz</p>	 <p>Mode 2,3 $f = 604.21$ Hz</p>	 <p>Mode 6 $f = 519 - 529$ Hz</p>

Tableau 4.6 Valeurs des fréquences propres calculées et mesurées aux différents points, pour les six premiers modes de flexion de la plaque 2 $[90/0_2/90]_s$ - Configuration ELEL

4.6 Analyse des résultats

La comparaison des valeurs des fréquences propres calculées par les deux approches théoriques montre qu'une meilleure précision, en terme d'erreur relative, est obtenue avec le programme de calcul dans les deux configurations ELLL et ELEL, par rapport au cas de la plaque symétrique considérée au chapitre précédent. Les plaques étudiées expérimentalement ayant un comportement orthotrope ($D_{16} = D_{26} = 0$) résultant de la stratification croisée, il ne subsiste plus que le couplage dû au terme D_{12} . La troncature commise sur les expressions des conditions aux limites est moins importante, et comme on peut l'observer sur les déformées propres (tableaux 4.3 à 4.6), l'approximation du déplacement par les fonctions poutres est plus réaliste, les plaques ne subissant pas de torsion dans le plan (les lignes nodales sont parallèles aux bords de la plaque dans les deux approches). Ces observations confirment l'analyse présentée au chapitre 3.

D'un autre côté, la comparaison entre les valeurs calculées des fréquences propres et celles mesurées expérimentalement montre que ces dernières sont proches de la théorie, notamment pour les premiers modes des deux plaques dans la configuration ELLL et pour la deuxième plaque dans la configuration ELEL alors qu'elles divergent complètement dans le cas de la plaque 1 dans cette même configuration. Ces valeurs expérimentales présentent par ailleurs d'importantes dispersions pour un mode donné que l'on peut classer en deux types :

a) Une dispersion d'ordre générale :

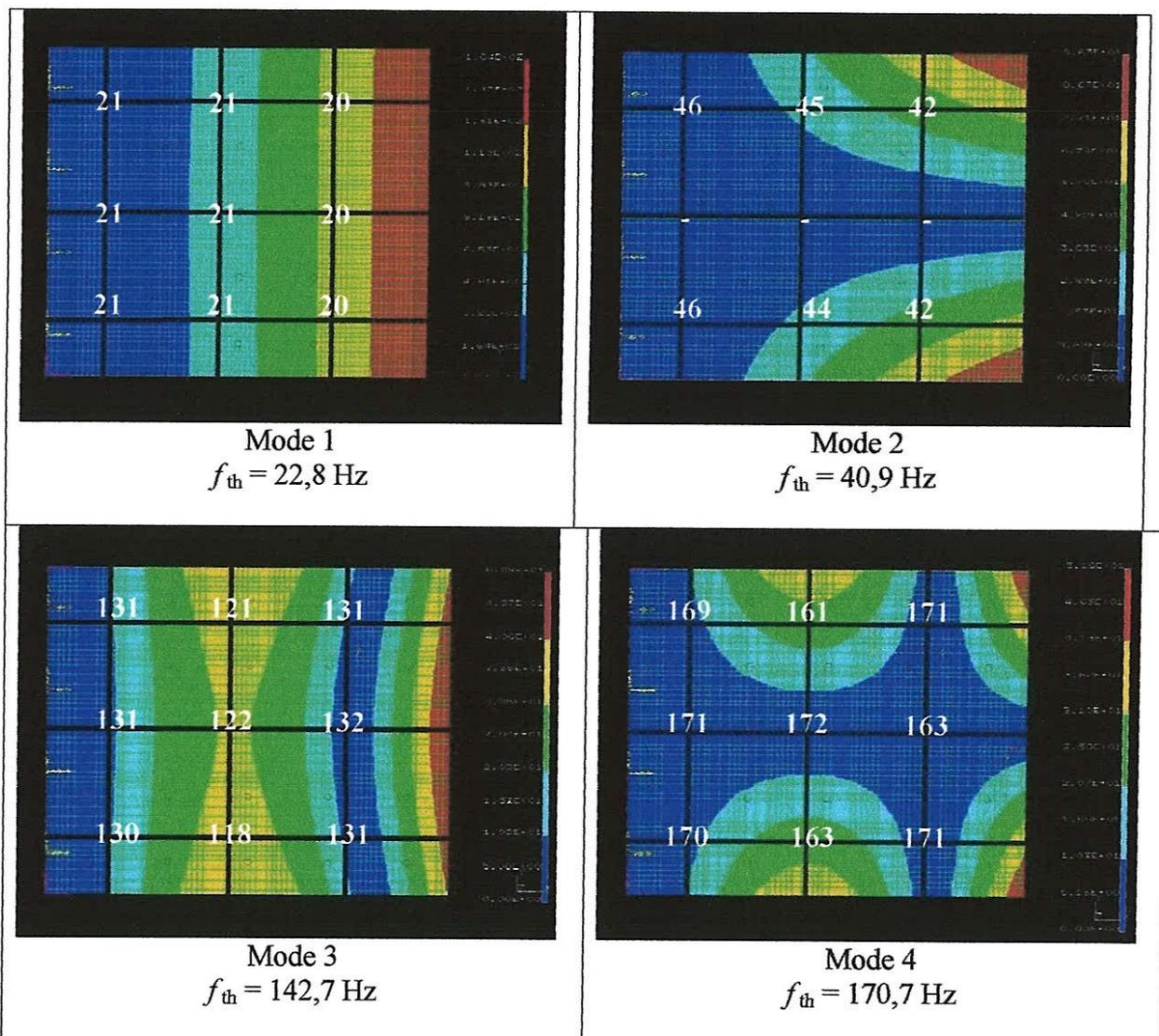
Elle est due à l'hétérogénéité du matériau de la plaque [21] et à l'incertitude (ou dispersion) sur l'épaisseur [26], liées au procédé de fabrication artisanal de la plaque (distribution non uniforme de la matière).

b) Une dispersion en rapport avec les déformées propres :

On note que les fréquences propres mesurées varient sensiblement en fonction du point de mesure avec des tendances différentes selon les modes. Considérons la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$ dans la configuration ELLL. La superposition (tableau 4.7) des valeurs mesurées des fréquences propres et des déformées propres théoriques de la plaque, pour un mode donné, montre qu'il y a une certaine corrélation entre l'amplitude du déplacement du point de mesure et la valeur mesurée de la fréquence :

- Les plus faibles valeurs des fréquences mesurées pour un mode correspondent à des points d'amplitudes de déplacement maximales ;
- Les valeurs les plus importantes des fréquences mesurées pour un mode correspondent à des points d'amplitudes de déplacement minimales, près des extrémités libres ou encastrées.

Nous pensons que ces phénomènes sont dus à la combinaison de deux effets : l'effet du bord et l'inertie de la masse du capteur (9 g.). L'effet du bord correspond à une augmentation de la rigidité près des extrémités encastrees ou libres d'une structure du fait de l'atténuation du déplacement dans ces régions induite par les ondes évanescentes. L'effet de la masse du capteur est lié aux déformées propres de la plaque. L'inertie de cette masse est proportionnelle à la vitesse du point de mesure et donc à l'amplitude du déplacement de ce point : lorsque le



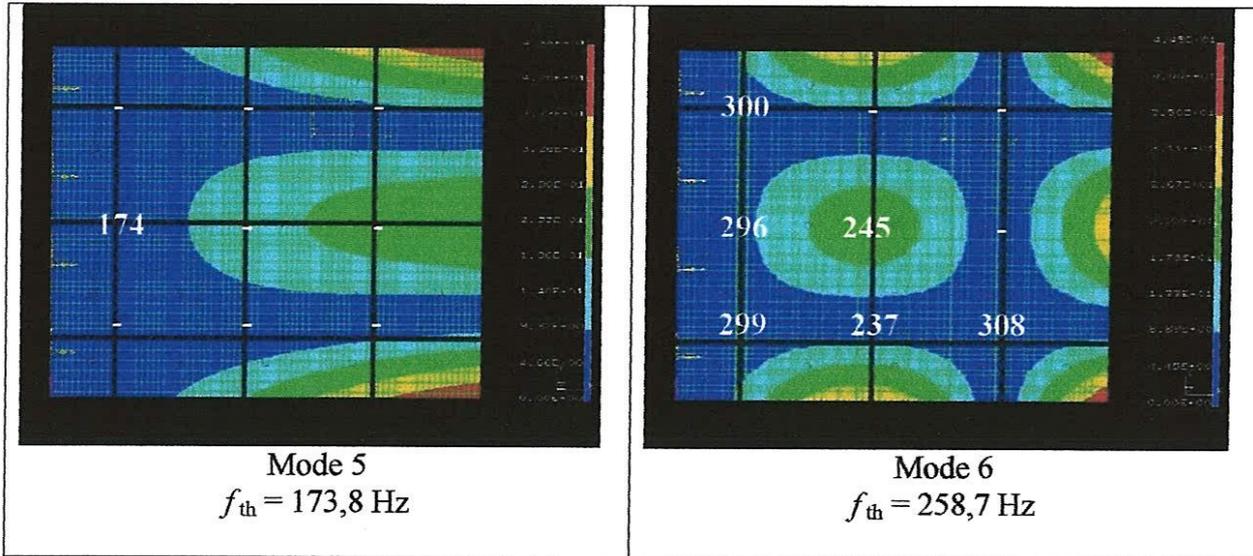


Tableau 4.7 Superposition des fréquences propres expérimentales et des déformées propres théoriques tracées sous *I-DEAS* dans le cas de la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$

capteur est placé près d'un ventre de vibration (point de déplacement maximal) son inertie est maximale et l'énergie cinétique additionnelle apportée au système tend à abaisser la valeur mesurée de la fréquence (cas de la ligne centrale du mode 3, tableau 4.7). Par contre lorsqu'il est placé près d'un bord libre, encastré ou près d'une ligne nodale, l'énergie cinétique additionnelle est faible et ne modifie que légèrement la fréquence propre mesurée. Dans le cas limite où le capteur est placé sur la ligne nodale du mode 2 (points 2, 5 et 8), la fréquence de ce mode n'apparaît pas sur les spectres expérimentaux : le déplacement en ces points étant nul, l'amplitude calculée par l'analyseur à cette fréquence est nulle.

Les modes 1,2,3 et 6 obéissent bien à cette logique : les fréquences propres mesurées des deux premiers modes sont maximales lorsque le point de mesure s'approche du bord encastré (points 7,8 et 9); celles du troisième et sixième modes sont minimales lorsque le capteur est placé près des ventres de vibration (points 4,5 et 6).

Pour les modes 4 et 5 on remarque que les fréquences propres théoriques des deux modes sont proches laissant supposer un couplage de leurs modes expérimentaux [35] et une interférence de leurs fréquences propres mesurées. De plus, la déformée calculée du mode 4 montre une ligne nodale semblable à celle du mode 2 (points 2,5 et 8). Par conséquent, les fréquences mesurées en ces points ne correspondent pas au mode (4) mais au mode suivant (5). Dans ce cas l'analyse précédente peut être étendue à ces deux modes : la tendance de variation des fréquences mesurées en fonction des points de mesure suit bien la variation de l'amplitude du déplacement pour les deux modes (tableau 4.8).

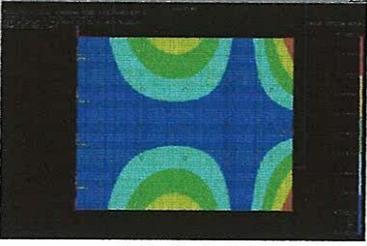
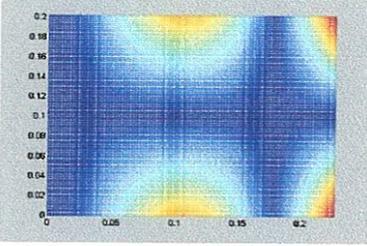
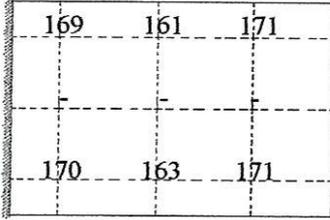
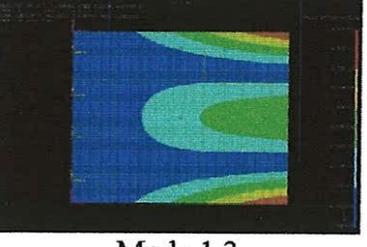
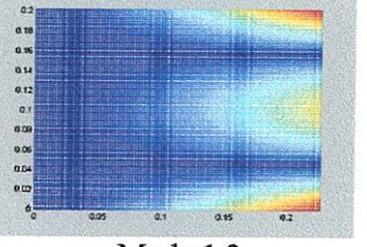
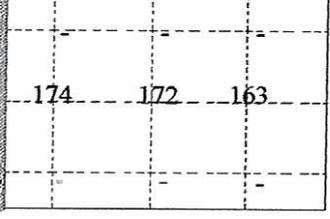
 <p>Mode 2,2 $f = 170.67$ Hz</p>	 <p>Mode 2,2 $f = 171.14$ Hz</p>	 <p>Mode 4 $f = 161 - 171$ Hz</p>
 <p>Mode 1,3 $f = 173.82$</p>	 <p>Mode 1,3 $f = 174.15$ Hz</p>	 <p>Mode 5 $f = 163 - 174$ Hz</p>
<p><i>a) I-DEAS</i></p>	<p><i>b) Matlab</i></p>	<p><i>c) Expérimental</i></p>

Tableau 4.8 Variation des fréquences propres mesurées en fonction de l'amplitude du déplacement du point de mesure pour les modes 4 et 5 de la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$ - Configuration ELEL

Cette analyse peut être étendue aux autres cas étudiés. On peut alors considérer que les valeurs les moins perturbées par l'effet de la masse du capteur (valeurs mesurées loin des ventres de vibration) sont les valeurs les plus proches des fréquences propres réelles. Les tableaux 4.9 à 4.12 récapitulent les résultats obtenus précédemment sur la base de ce nouvel aspect.

Modes	1	2	3	4	5	6
Fréquences propres théoriques (Hz)	22,8	40,9	142,7	170,7	173,8	285,7
Fréquences propres mesurées (Hz)	21	46	132	171	174	308

Tableau 4.9 Valeurs des fréquences propres calculées et mesurées pour les six premiers modes de flexion de la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$ - Configuration ELLL

Modes	1	2	3	4	5	6
Fréquences propres théoriques (Hz)	22,15	42,9	138,5	172,3	213,4	319,1
Fréquences propres mesurées (Hz)	23	51	144	192	231	349

Tableau 4.10 Valeurs des fréquences propres calculées et mesurées pour les six premiers modes de flexion de la **plaque 2** $[90/0_2/90]_s$ - Configuration **ELLL**

Modes	1	2	3	4	5	6
Fréquences propres théoriques (Hz)	181,7	193,3	287,7	500,0	515,9	519,0
Fréquences propres mesurées (Hz)	154	171	275	378	415	419

Tableau 4.11 Valeurs des fréquences propres calculées et mesurées pour les six premiers modes de flexion de la **plaque 1** $[0/90_2/0]_s$ - Configuration **ELEL**

Modes	1	2	3	4	5	6
Fréquences propres théoriques (Hz)	176,1	190,5	307,0	484,3	504,0	600,1
Fréquences propres mesurées (Hz)	177	210	307	339	459	529

Tableau 4.12 Valeurs des fréquences propres calculées et mesurées pour les six premiers modes de flexion de la **plaque 2** $[90/0_2/90]_s$ - Configuration **ELEL**

Ces tableaux mettent en évidence des divergences entre la théorie et les mesures que la dispersion seule ne suffit pas à expliquer. Les autres causes de ces différences sont d'une part le fait que les caractéristiques mécaniques utilisées pour le calcul ne sont que des approximations des propriétés réelles estimées par des approches théoriques, et d'autre part les difficultés liés aux conditions expérimentales. En effet la réalisation d'un encastrement de rigidité infini correspondant parfaitement à la théorie est impossible [34] et réciproquement la modélisation d'un encastrement réel n'est pas aisée [36]. Cet effet est plus marqué dans le cas de deux encastresments, configuration ELEL, pour laquelle on observe les déviations les plus importantes entre la théorie et l'expérience. De plus nous avons noté lors des essais que pour la plaque $[0/90_2/0]_s$ testée dans la configuration ELEL, le dispositif utilisé produisait une compression en membrane sur cette plaque. Les précharges de compression ayant pour effet d'abaisser les fréquences propres [1], cette remarque va dans le sens des mesures expérimentales qui divergent dès le premier mode dans ce cas.

4.7 Etude de l'amortissement des stratifiés

4.7.1 Amortissement

L'amortissement, ou la dissipation de l'énergie mécanique par les différents mécanismes, est un paramètre important dans l'étude du comportement dynamique des structures. Il agit aussi bien sur l'amplitude du mouvement vibratoire (résonance notamment) que sur la durée de vie en fatigue (perte de rigidité par suite d'échauffement, ... etc.).

Les stratifiés composites se caractérisent par un amortissement intrinsèque (structural) supérieur à celui des matériaux usuels, pouvant constituer à lui seul une solution de contrôle des vibrations. De plus cet amortissement est modulable, comme les autres propriétés des stratifiés, par le choix des constituants et de la séquence d'empilement d'où l'intérêt grandissant pour l'utilisation des composites dans la réalisation de structures de pointe. L'optimisation des performances de telles structures nécessite la compréhension de tous les mécanismes d'amortissement ainsi que l'influence des paramètres du matériau sur ces derniers dans un but de modélisation et de prédiction. Chandra et al [37] ont présenté une revue bibliographique sur les travaux menés dans ce sens. La complexité de l'analyse de l'amortissement dans les composites à renforts fibreux provient de ses sources multiples, intervenant aux différentes échelles du matériaux (nature viscoélastique des constituants, propriétés de l'interface fibre/matrice, endommagement : décohésion et délaminage). Deux types d'approches sont utilisées pour modéliser l'amortissement dans les stratifiés :

- La première basée sur le principe de correspondance ou approche viscoélastique introduite par Hashin, elle consiste à remplacer les modules élastiques par les modules complexes correspondants dans la formulation du problème aux valeurs propres, dont la résolution permet d'obtenir les fréquences propres amorties (partie réelle de la valeur propre complexe), et les facteurs de perte modaux (rapport de la partie imaginaire à la partie réelle).

- La deuxième approche est basée sur l'énergie de déformation, elle définit une capacité d'amortissement spécifique globale du stratifié (rapport énergie dissipée - énergie de déformation) égale à la somme des capacités spécifiques d'amortissement associées à chacune des composantes du tenseur de contraintes dans les différents plis. Cette approche est aussi connue comme l'approche de Adams-Bacon, ou critère de Adams-Bacon, elle a été développée dans les cas des poutres pour un état de contraintes planes. Yim [38] a étendue cette approche en considérant l'énergie de déformation en cisaillement transverse pour étudier l'effet de ce dernier sur l'amortissement des poutres stratifiées. Berthelot et Sefrani [39] ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour calculer l'énergie de déformation des plaques afin d'étudier l'effet de la largeur sur l'amortissement des poutres.

Cependant, ces méthodes théoriques de prédiction restent limitées d'une part elles nécessitent une caractérisation complète du matériau de chaque couche (modules complexes et facteurs de perte élémentaires sensibles à la température et à la fréquence [40]), et d'autre part elles ne permettent pas de tenir compte des imperfections et défauts, liés à la mise en œuvre et à l'assemblage des couches, croissant avec la taille de la structure. Dans ce contexte, seule l'expérience fournit une mesure globale de l'amortissement à l'échelle du stratifié et permet d'établir des modèles empiriques de prédiction [41 et 42], ou d'obtenir une estimation fiable du comportement dynamique de la structure lorsque les valeurs mesurées des amortissements modaux sont associées à des modèles théoriques éprouvés [34].

4.7.2 Détermination expérimentale de l'amortissement

4.7.2.1 Méthode de mesure

Les amortissements modaux sont évalués par la méthode dite de largeur de bande à demi puissance [27 et 35], qui correspond à -3dB de l'amplitude maximale (figure 4.7).

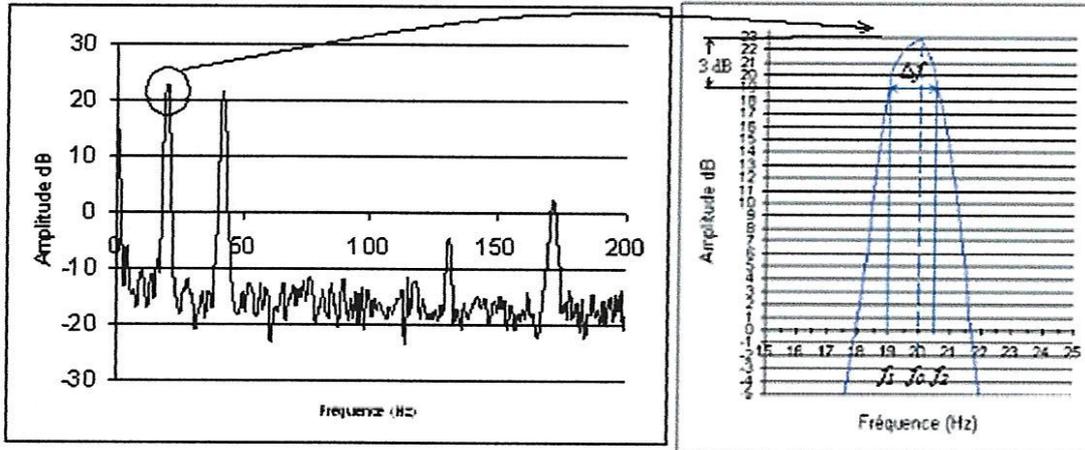


Figure 4.7 Largeur de bande à - 3 dB correspondant au premier mode de la plaque 1 $[0/90_2/0]_s$ - Configuration ELLL, point de mesure 1

Pour chaque mode i , le facteur de perte η_i est calculé par :

$$\eta_i = \frac{\Delta f}{f_i} \quad (4.2)$$

Où :

f_i : fréquence propre du mode i ;
 Δf : largeur de bande à - 3dB.

Le taux d'amortissement est relié au facteur de perte par

$$\xi_i = \frac{1}{2} \eta_i = \frac{\Delta f}{2f_i} \quad (4.3)$$

4.7.2.2 Résultats obtenus

La valeur moyenne de l'amortissement modal du mode i est calculée en appliquant la relation (4.3) pour chaque fréquence propre f_i mesurée aux points considérés. L'amortissement des stratifiés dépend de la fréquence [37,39 et 41], et est sensible aux différentes sources de dispersion ainsi qu'aux conditions aux limites et moyens de mesure [26], le recours à la moyenne permet d'obtenir une estimation de l'amortissement sur l'intervalle de fréquences mesurées pour le mode i . Les tableaux 4.13 à 4.16 regroupent les valeurs moyennes des amortissements modaux, calculées à partir des spectres expérimentaux. Dans le cas de la configuration ELEL, seuls les amortissements correspondant aux trois

premiers modes propres de chaque plaque sont évalués en raison de la grande déviation observée entre les valeurs théoriques et mesurées des fréquences propres.

Modes	1	2	3	4	5	6
Fréquences propres théoriques (Hz)	22,8	40,9	142,7	170,7	173,8	285,7
Intervales des fréquences mesurées (Hz)	20-21	42-46	118-131	161-174	161-174	237-308
Taux d'amortissement ξ (%)	3.87	1.72	0.61	0.56	0.56	0.43

Tableau 4.13 Amortissements modaux moyens des six premiers modes de flexion de la **plaque 1**- Configuration **ELLL**

Modes	1	2	3	4	5	6
Fréquences propres théoriques (Hz)	22,1	42,9	138,5	172,3	213,4	319,1
Intervale de fréquences mesurées (Hz)	22-23	47-51	133-144	182-192	213-231	333-364
Taux d'amortissement ξ (%)	3.25	1.64	0.61	0.58	0.44	0.39

Tableau 4.14 Amortissements modaux moyens des six premiers modes de flexion de la **plaque 2** - Configuration **ELLL**

Modes	1	2	3	4	5	6
Fréquences propres théoriques (Hz)	181,7	193,4	278,7	499,2	515,9	519,6
Intervales de fréquences mesurées (Hz)	121-154	162-171	242-275	343-378	401-415	447-449
Taux d'amortissement ξ (%)	0,64	0,55	0,46	-	-	-

Tableau 4.15 Amortissements modaux moyens des six premiers modes de flexion de la **plaque 1**- Configuration **ELEL**

Modes	1	2	3	4	5	6
Fréquences propres théoriques (Hz)	176,1	190,5	307	484,3	504,0	600,1
Intervales de fréquences mesurées (Hz)	143-177	183-210	305-307	329-339	410-459	519-529
Taux d'amortissement ξ (%)	0,52	0,47	0,35	-	-	-

Tableau 4.16 Amortissements modaux moyens des six premiers modes de flexion de la **plaque 2** - Configuration **ELEL**

L'analyse de ces tableaux montre une tendance générale à la diminution des amortissements modaux avec la croissance des fréquences. Cette observation rejoint les conclusions de Maher et al [42] dont les travaux ont abouti à établir un modèle empirique quasi hyperbolique reliant les facteurs de perte à la fréquence, pour différentes séquences de stratification des matériaux étudiés. Cependant, Berthelot et Sefrani [39] obtiennent un résultat totalement différent : pour une séquence d'empilement donnée, l'amortissement du stratifié croît linéairement en fonction de la fréquence. Ils démontrent que dans les cas de faibles amortissements de la structure la valeur mesurée de l'amortissement modal en basses fréquences dépend fortement de la résolution en fréquence adoptée et du nombre d'échantillons de signal enregistrés dans l'intervalle de fréquences analysées. Plus cette valeur est faible, plus il faut augmenter la résolution et le nombre d'échantillons enregistrés pour une meilleure évaluation de la valeur de l'amortissement. Dans le cas de notre travail, on a été limité par les possibilités de l'analyseur utilisé, il ne permet qu'une résolution de 801 points en fréquence (points pour lesquels la transformée de Fourier est calculée), et un nombre maximum d'échantillons acquis de 1024, contre $1,5 \times 10^6$ échantillons enregistrés dans le cas de Berthelot et Serfrani. Nous pensons avoir travaillé dans les mêmes conditions que Maher et al, d'où la similitude de nos résultats.

4.7.3 Evaluation de la réponse amortie sous *I-DEAS*

4.7.3.1 Calcul de la réponse par la méthode de décomposition modale

La modélisation des structures par la méthode des éléments finis, dans le cas des vibrations linéaires, conduit à remplacer le problème continu décrit par un système d'équations aux dérivées partielles par un problème discret décrit par un système d'équations algébriques linéaires (4.4), dont les inconnues sont les variables nodales.

$$[M] \{\ddot{X}\} + [C] \{\dot{X}\} + [K] \{X\} = \{F(t)\} \quad (4.4)$$

Où :

- $\{X\}$, $\{\dot{X}\}$ et $\{\ddot{X}\}$: Sont les vecteurs des variables nodales (déplacements-rotations et accélérations aux nœuds) de dimension N;
- $[M]$, $[C]$ et $[K]$: Sont respectivement les matrices globales masse, amortissement et raideur de dimension N x N ;
- $\{F(t)\}$: Vecteur des forces généralisées appliquées aux nœuds de dimension N.

L'extraction de la base modale sous *I-DEAS* se fait, indépendamment du cas étudié, sous les hypothèses suivantes [43] :

- $\{F(t)\} = 0$: les sollicitations extérieures sont nulles ;
- $\{X_s\} = 0$: les déplacements imposés sont nuls.

Dans ces conditions le système (4.4) se réduit au problème aux valeurs et vecteurs propres (4.5) dont les N solutions $(\omega_i, \{X\}_i)$ sont les pulsations et déformées propres des vibrations libres non amorties de la structure.

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{X\} = \{0\} \quad (4.5)$$

Cette partie est basée sur l'algorithme de Lanczos pour l'extraction des n premiers modes de vibrations. La réponse de la structure est calculée par la méthode de superposition modale. Elle consiste à écrire la réponse comme la somme des contributions de tous les modes sous la forme :

$$\{X\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(t) \{X\}_i \quad (4.6)$$

Où :

$\{X\}_i$: Sont les vecteurs propres du système conservatif associé (4.5) ;

$\Phi_i(t)$: Solution temporelle harmonique de pulsation non amortie ω_i .

La somme est tronquée au nombre de modes calculés n , il reste donc à déterminer les solutions temporelles $\Phi_i(t)$. En reportant l'expression (4.6) dans l'équation (4.4), on peut écrire :

$$[M] \sum_{i=1}^n \ddot{\Phi}_i(t) \{X\}_i + [C] \sum_{i=1}^n \dot{\Phi}_i(t) \{X\}_i + [K] \sum_{i=1}^n \Phi_i(t) \{X\}_i = \{F(t)\} \quad (4.7)$$

Ou encore :

$$\sum_{i=1}^n \ddot{\Phi}_i(t) [M] \{X\}_i + \sum_{i=1}^n \dot{\Phi}_i(t) [C] \{X\}_i + \sum_{i=1}^n \Phi_i(t) [K] \{X\}_i = \{F(t)\} \quad (4.8)$$

En pré multipliant l'équation (4.8) par $\{X_j\}^T$, et compte tenu des propriétés d'orthogonalité des modes propres, par rapport aux matrices masse et raideur globale (relations (4.9) et (4.10)), l'équation (4.8) se réécrit sous la forme (4.11).

$$\{X\}_i^T [K] \{X\}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ K_i & \text{si } i = j \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\{X\}_i^T [M] \{X\}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ M_i & \text{si } i = j \end{cases} \quad (4.10)$$

$$M_i \ddot{\Phi}_i(t) + \sum_{j=1}^n \dot{\Phi}_j(t) \{X\}_i^T [C] \{X\}_j + K_i \Phi_i(t) = F_i(t) \quad (4.11)$$

Avec :

$$F_i(t) = \{X\}_i^T \{F(t)\}$$

Dans cette forme il subsiste un couplage par l'amortissement entre les modes propres. Pour les structures faiblement amorties, l'hypothèse d'un amortissement diagonal égal à l'amortissement modal [43], permet de découpler l'équation (4.11) en équation (4.12) :

$$M_i \ddot{\Phi}_i(t) + C_i \dot{\Phi}_i(t) + K_i \Phi_i(t) = F_i(t) \quad (4.12)$$

Cette forme est appelée équation du mouvement en coordonnées modales. Elle est analogue à l'équation de l'oscillateur à un degré de liberté, dont les solutions sont déterminées en fonction des conditions initiales.

4.7.3.2 Réponse amortie à une excitation sinusoïdale

Nous considérons le cas de la plaque 1 dans la configuration ELLL. Une excitation sinusoïdale de fréquence 0.5 Hz et d'amplitude unitaire ($F=1$ N) est appliquée au point (1) de la plaque (figure 4.7) pour une durée de 4,5s, la réponse en déplacement (mm) au point (2) est calculée sur l'intervalle $[0,20]$ s, dans un premier temps sans tenir compte de l'amortissement ensuite en introduisant les amortissements modaux déterminés expérimentalement.

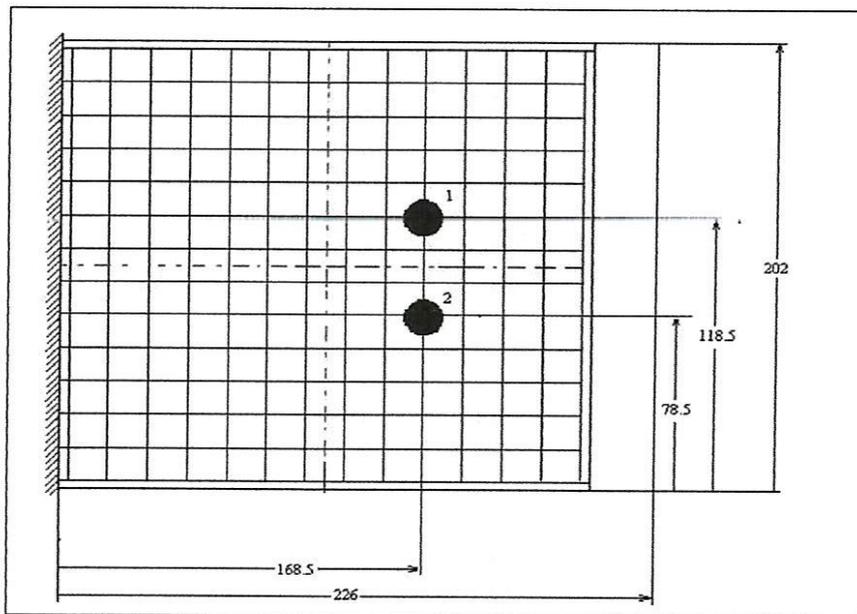


Figure 4. 7 Point d'excitation et de calcul de la réponse sur la plaque

Les réponses sont calculées sur la base des six premiers modes, la figure 4.8 représente le déplacement du point (2) de la plaque tracé en fonction du temps par I-DEAS.

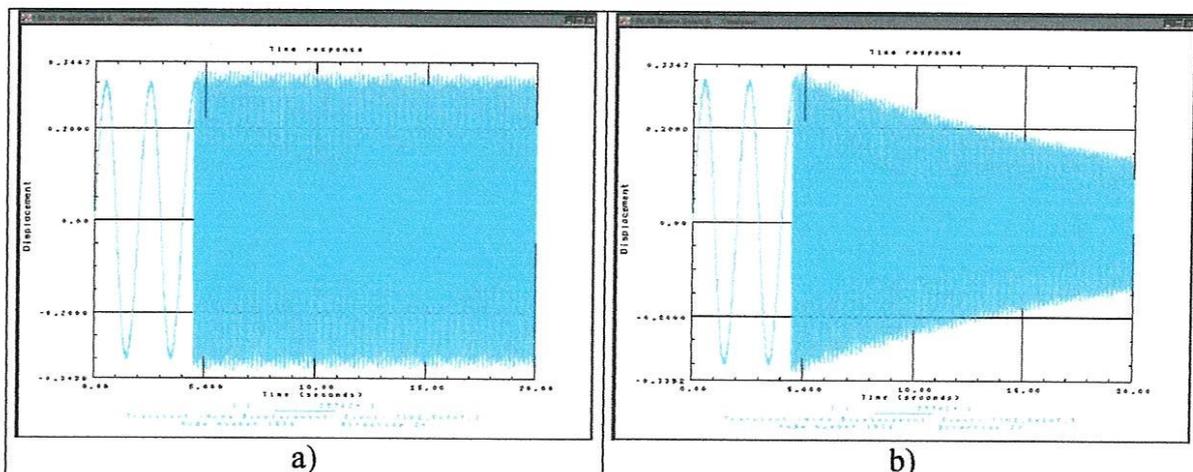


Figure 4.8 Réponses en déplacement de la plaque au point (2) consécutive à l'excitation sinusoïdale au point (1) : a) réponse non amortie, b) réponse amortie

CONCLUSIONS

L'objectif assigné à ce travail est l'étude du comportement vibratoire, expérimentale et numérique de plaques stratifiées en composites. Pour atteindre cet objectif nous avons commencé par une étude bibliographique détaillée sur les stratifiés composites. De nombreux travaux sont consacrés à l'étude du comportement dynamique des structures stratifiées dans le souci d'une meilleure compréhension et maîtrise des problèmes vibratoires. Les structures étudiées sont de types plaques ou coques et la formulation de base des stratifiés est largement adaptée à de telles analyses. La résolution du problème est essentiellement basée sur l'approche modale consistant à déterminer les caractéristiques modales des structures, théoriques ou expérimentales. Un grand intérêt est accordé aux performances d'amortissement des composites dont la modélisation reste très difficile. La synthèse de ces travaux nous a amené à procéder en trois étapes. La première à consister à effectuer un développement complet de la formulation des stratifiés, reliant les propriétés des constituants à celles de la structure, grâce aux concepts d'homogénéisation, et mettant en évidence les paramètres gouvernant le comportement des plaques stratifiées et les difficultés de traitement du problème du point de vue matériau et conditions aux limites. La deuxième étape part d'un certain nombre de simplifications rencontrées dans l'architecture d'une large gamme de structures réalisées en composites : une stratification symétrique et des épaisseurs relativement faibles. Dans ce cadre, le comportement en flexion est découplé des autres mouvements et les vibrations de flexion sont prépondérantes en basses fréquences. L'approximation par la théorie classique des stratifiés permet une application aisée de la méthode analytique de Rayleigh-Ritz basée sur la modélisation du déplacement transversal de la plaque par les fonctions caractéristiques de vibrations des poutres homogènes. Cette approximation a permis de traiter la totalité des combinaisons de conditions aux limites standards sur les bords d'une plaque rectangulaire. La programmation de la méthode sous *Matlab* a permis d'obtenir les fréquences et déformées propres de ces plaques, elle est validée en calcul de structures par éléments finis. La formulation analytique permet d'envisager des études de conception et optimisation ainsi que des analyses de sensibilité. La troisième étape est une approche expérimentale par analyse modale menée sur deux plaques dans deux configurations ELLL et ELEL, par la technique impulsionnelle. L'analyse des réponses expérimentales de ces plaques a permis d'identifier les fréquences de résonance et les amortissements modaux.

La comparaison des résultats obtenus par le programme de calcul élaboré avec ceux issus du calcul de structures pour un stratifié symétrique a permis de valider l'approche analytique utilisée et a mis en évidence l'avantage de cette dernière en terme de rapidité de convergence. L'analyse de l'effet de l'approximation par les fonctions poutres sur les conditions aux limites et les déformées propres a mis en évidence l'influence des termes de couplages flexion-torsion et flexion-flexion. Les hypothèses des plaques minces conduisent à surestimer les fréquences propres et la déviation avec la théorie du premier ordre augmente avec le rang du mode. Cependant la précision obtenue dans tous les cas reste satisfaisante sur les premiers modes permettant de construire un modèle de comportement fiable en basses fréquences.

L'analyse des résultats expérimentaux et leurs comparaisons avec les résultats des calculs théoriques a mis en évidence les difficultés liées à l'étude expérimentale. La masse du capteur utilisé perturbe les fréquences propres mesurées des plaques de manière importante. Ces perturbations sont dues à l'inertie de cette masse et dépendent de l'amplitude des vibrations du point de mesure, qui est fonction des modes propres. La condition d'encastrement théorique est difficile à réaliser expérimentalement, conduisant à une divergence entre la théorie et la mesure qui croit dans les sens des hautes fréquences. L'introduction d'un deuxième encastrement augmente ces divergences ne permettant de valider les bases modales théoriques que dans le premier cas (ELLL). Les amortissements modaux sont très sensibles

aux fréquences. Toutefois le recours à la moyenne sur l'intervalle des fréquences mesurées pour un mode permet d'envisager l'évaluation de la réponse amortie, construite sur la base modale théorique déterminée en calcul de structures dans la configuration ELLL.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **BERTHELOT J.M.**, « Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures », Masson, 1992.
- [2] **BILLOET J.L.**, « Introduction aux matériaux composites à hautes performances », Teknea ENSAM, 1992.
- [3] **CHRETIEN G.**, « Matériaux composites à matrice organique », Techniques et Documentations, Lavoisier, 1986.
- [4] **BAHLOULI N.**, « Les matériaux composites », www-ipst.u-strasb.fr/nadia/courcomp/
- [5] **BERBAIN F., CHEVALIER A.**, « Mise en œuvre des plastiques renforcés », Technique de l'ingénieur, traité A 9 III, article 3250.
- [6] **DESSARTHE A., GUYOT H., CARAYOL M.**, « Techniques de fabrication des pièces mécaniques en plastiques ou composites », CETIM, 1994.
- [7] **GERARDIN M., RIXEN D.**, « Théorie des vibrations Application à la dynamique des structures » 2^{ème} édition, Masson 1996.
- [8] **PECKER A.**, « Cours Dynamique des structures 2004/2005 », http://www.enpc.fr/fr/formations/ecole_virt/cours/pecker/index.htm
- [9] **LEMAITRE J., CHABOCHE J.L.**, « Mécanique des matériaux solides », 2^{ème} édition, Dunod 1988.
- [10] **GAY D.**, « Matériaux Composites », Hermes, 1991.
- [11] **BATOZ J.L., DHATT G.**, « Modélisation des structures par éléments finis Volume 2 : poutres et plaques », Hermes, 1990.
- [12] **PABIOT J.**, « Plastiques renforcés Propriétés mécaniques. Calcul », Technique de l'ingénieur, traité A 9 I, article 3245.
- [13] **LAROZE S.L., BARRAU J.J.**, « Mécanique des Structures, Tome 4, Calcul des Structures En Matériaux Composites », Eyrolles Masson, 1987.
- [14] **GIBSON R.F.**, « Modal vibration response measurements for characterization of composite materials and structures », Composites science and technology, 2000, 60, 2769-2780.
- [15] **CHEN W.Q., LÜE C.F.**, « 3D free vibration analysis of cross-ply laminated plates with one pair of opposite edges simply supported », Composite Structures, 2005, 69, 77–87.
- [16] **KHATRI K.N., ASNANI N.T.**, « Vibration and damping analysis of fiber-reinforced composites material conical shells », Journal of sound and vibration, 1995, 184(4), 553–566.
- [17] **KOO K.N., LEE I.**, « Vibration and damping analysis of fiber-reinforced composites material conical shells », Journal of sound and vibration, 1996, 193(3), 581–595

- [18] QIAN G.L., HOA S.V., XIAO X., « A vibration method for measuring mechanical properties of composite, theory and experiment », *Composite Structures*, 1997, Vol. 39, No. 1-2, 31-38.
- [19] WANG S., « Free vibration analysis of skew fibre-reinforced composite laminates based on first order shear deformation theory », *Computers & Structures*, 1997, Vol. 63, No. 3, 525-538.
- [20] HUFENBACH W., HOLSTE C., KROLL L., «Vibration and damping behaviour of multi-layered composite cylindrical shells», *Composite structures*, 2002, 58, 165-174.
- [21] ANGOULVANT F., « Caractérisation dynamique des matériaux composites. Etude de l'amortissement » Thèse de doctorat, université du Maine juin 1998.
- [22] AYORINDE E. O., YU L., « On the elastic characterization of composite plates with vibration data », *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 283, 243-262.
- [23] CHEUNG Y.K., ZHOU D., « The free vibrations of rectangular composite plates with point-supports using static beam functions », *Composites structures*, 1999 , 44, 145-154.
- [24] ANLAS G., GOKER G., « Vibration analysis of skew fibre-reinforced composite laminated plates », *Journal of sound and vibration*, 2001, 242 (2), 265-276.
- [25] NALLIM L., MARTINEZ S. O., GROSSI R. O., « Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2005, 194, 1797-1822.
- [26] TALBOT J.P., WOODHOUSE J., « The vibration damping of laminated plates », *Composites Part A*, 1997, 28A, 1007-1012.
- [27] JAOUEN L., « Vibrations des milieux discrets et continus », version du 19/04/2005, http://www.univ-lemans.fr/~r940020/ens/cours_vibrations_DESS_MNPM.pdf
- [28] HAN S. M., BENARAYA H., WEI T., « Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories », *Journal of Sound and vibration*, 1999, 225(5), 935-988.
- [29] MATHÉMATICA, Logiciel de calcul scientifique par Wolfram Research, version 4.1 .
- [30] MATLAB, « The Language of Technical Computing ‘’, Version 5.3. (R11), 21/01/1999.
- [31] MESBAH A., MOKHTARI M., « Apprendre et maîtriser MATLAB pour étudiants, chercheurs et ingénieurs, version 4, 5 et Simlink », Springer-verlag Berlin Hridelberg 1997.
- [32] KHAROUBI M., FATMI L., « Contribution à l'étude numérique en traction de deux stratifiés à renfort unidirectionnel », 1^{ère} Rencontre sur les journées des sciences et technologies avancées 24-25 Mai 2003, Université de Guelma.
- [33] RADU A.G., CHATTOPADHYAY A., «Dynamic stability analysis of composite plates including delaminations using a higher order theory and transformation matrix approach», *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), 1949-1965.

- [34] **TITA V., DE CARVALHO J., LIRANI J.**, « A Procedure to Estimate the Dynamic Damped Behavior of Fiber Reinforced Composite Beams Submitted to Flexural Vibrations », *Materials Research*, 2001, Vol. 4, No. 4 , 315-321.
- [35] **LALANNE M., BERTHIER P., DER HAGOPIAN J.**, « Mécanique des vibrations linéaires », 2^{ème} édition, Masson, 1986.
- [36] **GORNET L., LECLERC D., REGOIN J. P.**, « Comportement vibratoire d'une poutre composite carbone époxy : recalage de modèles éléments finis », *Proceeding des 13^{ème} Journées Nationales sur les Composites*, 12,13 et 14 Mars 2003 Université Louis Pasteur Strasbourg, Volume 1, 533-542.
- [37] **CHANDRA R., SINGH S.P., GUPTA K.**, « Damping studies in fiber-reinforced composites - a review », *Composite Structures*, 1999, 46, 41-51.
- [38] **YIM J.H., GILLESPIE J.W. Jr.**, « Damping characteristics of 0° and 90° AS4/3501-6 unidirectional laminates including the transverse shear effect », *Composite structures*, 2000, 50, 217-225.
- [39] **BERTHELOT J.M., SEFRANI Y.**, « Damping analysis of unidirectional glass and Kevlar fibre composites », *Composites science and technology*, 2004, 64, 1261-1278.
- [40] **ADAMOU F.N., MULLER P., GAUTHERIN M.T.**, « Evaluation de l'amortissement d'une plaque sandwich acier-polymère-acier », *Mécanique & Industrie*, 2003, 4, 77-81.
- [41] **YIM J.H.**, « A damping analysis of composite laminates using the closed form expression for the basic damping of Poisson's ratio », *Composite structures*, 1999, 46, 405-411.
- [42] **MAHER A., RAMADAN F., FERRA M.**, « Modeling of vibrating damping in composite structures », *Composite structures*, 1999, 46, 163-170.
- [43] **SDRC**, « Analyse de réponses dynamiques avec I-DEAS Response Analysis » Manuel de formation, 2001.

ANNEXES

ANNEXE A

Fonctions Caractéristiques des vibrations des poutres et expressions des intégrales adimensionnelles

A.1 Propriétés générales

En imposant le respect d'une des conditions aux limites (3.54), (3.55) ou (3.56), à la première extrémité ($u = 0$) nous obtenons des relations entre les constantes C , D , E et F de la forme :

$$\begin{cases} C = \pm E \\ D = \pm F \end{cases}$$

L'écriture de la condition aux limites pour la deuxième extrémité ($u=1$) conduit à un système linéaire en C et D qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Où : $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 sont des fonctions trigonométriques et hyperboliques du nombre d'onde λ . La recherche de solution non triviale de ce système conduit à écrire une équation non linéaire telle que :

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$$

Les solutions λ_m de cette équation sont les nombres d'onde des modes de vibrations. Les solutions numériques de cette équation sont déterminées, pour chaque cas de poutre, par la méthode de Newton-Raphson programmée sous **Matlab**. Pour chaque mode m , les constantes C_m et D_m sont définies à une constante multiplicative près. En normalisant C_m à 1 et en posant:

$$\gamma_m = \frac{D_m}{C_m}$$

L'équation de la déformée prend la forme générale

$$X_m(u) = \cos(\lambda_m u) \pm \cosh(\lambda_m u) \pm \gamma_m [\sin(\lambda_m u) \pm \sinh(\lambda_m u)]$$

Cette équation vérifie la condition d'orthogonalité des modes propres qui correspond à l'intégrale adimensionnelle (3.34) pour $p = q = 0$, exprimée par :

$$I_{mi}^{00} = \int_0^1 X_m X_i du \begin{cases} \neq 0, \text{ si } m = i \\ = 0, \text{ si } m \neq i \end{cases}$$

Les dérivées deuxièmes correspondant à $p = q = 2$ sont aussi orthogonales :

$$I_{mi}^{22} = \int_0^1 X_m X_i du \begin{cases} \neq 0, \text{ si } m = i \\ = 0, \text{ si } m \neq i \end{cases}$$

Les expressions des intégrales adimensionnelles sont évaluées par *Mathematica* pour chaque cas de poutre pour $p < q$, en notant que dans le cas inverse nous avons :

$$I_{mi}^{pq} = \int_0^1 \frac{d^p X_m}{du^p} \frac{d^q X_i}{du^q} du = \int_0^1 \frac{d^q X_i}{du^q} \frac{d^p X_m}{du^p} du = I_{im}^{qp}$$

A.2 Cas de la poutre simplement appuyée à ses deux extrémités

Dans le cas de la poutre simplement appuyée en $u = 0$ et $u = 1$, la fonction poutre est donnée par :

$$X_m(u) = \sin(\lambda_m u)$$

Et le nombre d'onde est donné par

$$\lambda_m = m \pi \quad \text{pour } m = 1, 2, 3, \dots$$

Les intégrales adimensionnelles sont calculées selon les expressions :

$$I_{mm}^{00} = 0,5$$

$$I_{mi}^{01} = \begin{cases} 0, \text{ si } m = i \\ \frac{i[-m + m \cos(i \pi) \cos(m \pi) + i \sin(i \pi) \sin(m \pi)]}{(i - m)(i + m)} \text{ si } m \neq i \end{cases}$$

$$I_{mi}^{02} = -\lambda_i^2 I_{mi}^{00}$$

$$I_{mi}^{11} = \lambda_i \lambda_m I_{mi}^{00}$$

$$I_{mi}^{12} = -\lambda_m^2 I_{mi}^{10}$$

$$I_{mm}^{22} = \lambda_m^4$$

A.3 Cas de la poutre ayant une extrémité appuyée et l'autre encastree

Pour une poutre appuyée en $u = 0$ et encastree en $u = 1$, l'équation de la déformées s'écrit :

$$X_m = \sin(\lambda_m u) - \gamma_m \sinh(\lambda_m u)$$

Avec :

$$\gamma_m = \frac{\sin(\lambda_m)}{\sinh(\lambda_m)}$$

Et λ_m sont les solutions de l'équation : $\tan(\lambda_m) = \tanh(\lambda_m)$ pour $m = 1, 2, 3, \dots$

Les valeurs numériques des racines λ_m pour les dix premiers modes sont résumées au tableau suivant :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_m	3,926	7,068	10,63	13,35	16,49	19,63	22,77	25,92	29,60	32,20

Les intégrales adimensionnelles sont exprimées par :

a) pour $m = i$

$$I_{mm}^{00} = \frac{-2 \coth(\lambda_m) \sin^2(\lambda_m) + \sin(2\lambda_m) + \lambda_m [2 - 2 \operatorname{csch}^2(\lambda_m) \sin^2(\lambda_m)]}{4 \lambda_m}$$

$$I_{mm}^{01} = 0$$

$$I_{mm}^{02} = \frac{\lambda_m}{4} (2 \coth(\lambda_m) \sin^2(\lambda_m) + \sin(2\lambda_m) - 2 \lambda_m [1 + \operatorname{csch}^2(\lambda_m) \sin^2(\lambda_m)])$$

$$I_{mm}^{11} = -\frac{\lambda_m}{4} \operatorname{csch}^2(\lambda_m) (\sin(2\lambda_m) \sinh^2(\lambda_m) + \sin^2(\lambda_m) \sinh(2\lambda_m) + \lambda_m [\cos(2\lambda_m) - \cos(2\lambda_m)])$$

$$I_{mm}^{12} = \lambda_m^2 \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_m) [-1 + \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m)]$$

$$I_{mm}^{22} = -\frac{\lambda_m^3}{4} (-\coth(\lambda_m) \sin^2(\lambda_m) + 3 \sin(2\lambda_m) + 2 \lambda_m [-1 + \sin^2(\lambda_m) \operatorname{csch}^2(\lambda_m)])$$

b) pour $m \neq i$

$$\begin{aligned} I_{mi}^{01} = & \frac{\lambda_i \lambda_m}{\lambda_i^4 - \lambda_m^4} \left(\lambda_i^2 (-1 + \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) \coth(\lambda_m) + \operatorname{csch}(\lambda_m)]) \right. \\ & + \sin(\lambda_i) (\coth(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) - \coth(\lambda_m) \sin(\lambda_m)] + \operatorname{csch}(\lambda_i) [-1 + \operatorname{csch}(\lambda_m) \sin(\lambda_m)]) \\ & + \lambda_m^2 (-1 + \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_m) [-1 + \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m)]) \\ & + \sin(\lambda_i) \operatorname{csch}(\lambda_i) (1 + \operatorname{csch}(\lambda_m) \sin(\lambda_m) - \cosh(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) + \coth(\lambda_m) \sin(\lambda_m)]) \\ & \left. + 4 \lambda_i \lambda_m \sin(\lambda_i) \sin(\lambda_m) \right) \end{aligned}$$

$$I_{mi}^{02} = \frac{2 \lambda_i^2 \lambda_m^2}{\lambda_i^4 - \lambda_m^4} (\lambda_i \sin(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) + \sin(\lambda_i) \coth(\lambda_i)] - \lambda_m \sin(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) \coth(\lambda_m)])$$

$$I_{mi}^{11} = \frac{2 \lambda_i^2 \lambda_m^2}{\lambda_i^4 - \lambda_m^4} (-\lambda_i \sin(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) + \sin(\lambda_i) \coth(\lambda_i)] - \lambda_m \sin(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) \coth(\lambda_m)])$$

$$I_{mi}^{12} = \frac{\lambda_i^3 \lambda_m}{\lambda_i^4 - \lambda_m^4} (\lambda_i^2 (-1 + \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) [-\cos(\lambda_i) \coth(\lambda_m) + \operatorname{csch}(\lambda_m)]) \\ + \sin(\lambda_i) \operatorname{csch}(\lambda_i) (1 - \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_m) + \cosh(\lambda_i) [-\cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) \coth(\lambda_m)])) \\ + \lambda_m^2 (-1 + \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_m) [-1 + \cos(\lambda_i) \cosh(\lambda_i)]) \\ + \sin(\lambda_i) \operatorname{csch}(\lambda_i) (-1 - \operatorname{csch}(\lambda_m) \sin(\lambda_m) + \cosh(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) + \coth(\lambda_m) \sin(\lambda_m)]))$$

A.4 Cas de la poutre ayant une extrémité appuyée et l'autre libre

Dans ce cas, le premier mode de vibration est un mode rigide (tangage). Les déformées propres sont données par :

$$X_1 = \sqrt{3} u$$

$$X_m = \sin(\lambda_m u) + \gamma_m \sinh(\lambda_m u), \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

Avec :

$$\gamma_m = \frac{\sin(\lambda_m)}{\sinh(\lambda_m)}$$

Et λ_m sont les solutions de l'équation : $\tan(\lambda_m) = \tanh(\lambda_m)$ pour $m = 2, 3, 4, \dots$

Les valeurs numériques des racines λ_m pour les dix premiers modes sont résumées au tableau suivant :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_m	0	3,926	7,068	10,63	13,35	16,49	19,63	22,77	25,92	29,6

Les intégrales adimensionnelles sont exprimées par :

a) pour $m = i = 1$

$$I_{11}^{00} = 1$$

$$I_{12}^{01} = 1,5$$

$$I_{11}^{11} = 3$$

$$I_{11}^{02} = I_{11}^{12} = I_{11}^{22} = 0$$

b) pour $m=1$ et $i \geq 2$

$$I_{li}^{01} = \frac{\sqrt{3} \left(-1 + \cos(\lambda_i) + \sin(\lambda_i) \left[2 \lambda_i - \tanh\left(\frac{\lambda_i}{2}\right) \right] \right)}{\lambda_i}$$

$$I_{li}^{02} = \sqrt{3} \left(-2 \sin(\lambda_i) + \lambda_i [\cos(\lambda_i) + \sin(\lambda_i) \coth(\lambda_i)] \right)$$

$$I_{li}^{11} = 2 \sqrt{3} \sin(\lambda_i)$$

$$I_{li}^{12} = \sqrt{3} \lambda_i \left[-1 + \cos(\lambda_i) + \sin(\lambda_i) \tanh\left(\frac{\lambda_i}{2}\right) \right]$$

c) pour $m \geq 2$ et $i=1$

$$I_{m1}^{01} = \frac{\sqrt{3} \left[1 - \cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) \tanh\left(\frac{\lambda_m}{2}\right) \right]}{\lambda_m}$$

$$I_{m1}^{11} = 2 \sqrt{3} \sin(\lambda_m)$$

$$I_{m1}^{02} = I_{m1}^{12} = 0$$

d) pour $m \geq 2$ et $i \geq 2$

d)-1 $m = i$

$$I_{mm}^{00} = \frac{1}{4 \lambda_m} \left(6 \coth(\lambda_m) \sin^2(\lambda_m) - 3 \sin(2 \lambda_m) + \lambda_m [2 - 2 \sin^2(\lambda_m) \operatorname{csch}^2(\lambda_m)] \right)$$

$$I_{mm}^{01} = 2 \sin^2(\lambda_m)$$

$$I_{mm}^{02} = \frac{\lambda_m}{4} \left(\sin(2 \lambda_m) [\sin^2(\lambda_m) \operatorname{csch}^2(\lambda_m) \sinh(2 \lambda_m) - 2 \lambda_m - 2 \lambda_m \sin^2(\lambda_m) \operatorname{csch}^2(\lambda_m)] \right)$$

$$I_{mm}^{11} = \frac{\lambda_m}{4} \left(3 [\sin(2 \lambda_m) + 2 \coth(\lambda_m) \sin^2(\lambda_m)] + \lambda_m \operatorname{csch}^2(\lambda_m) [-\cos(2 \lambda_m) + \cosh(2 \lambda_m)] \right)$$

$$I_{mm}^{12} = \lambda_m^2 \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_m) [-1 + \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m)]$$

$$I_{mm}^{22} = -\frac{\lambda_m^3}{4} \left(2 \coth(\lambda_m) \sin^2(\lambda_m) - \sin(2 \lambda_m) + 2 \lambda_m [-1 + \sin^2(\lambda_m) \operatorname{csch}^2(\lambda_m)] \right)$$

d)-2 $m \neq i$

$$\begin{aligned}
I_{mi}^{01} = & \frac{1}{\lambda_i^4 - \lambda_m^4} \left(4 \lambda_i^4 \sin(\lambda_i) \sin(\lambda_m) \right. \\
& + \lambda_i^3 \lambda_m \left(-1 + \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_i) [-1 + \cos(\lambda_i) \cosh(\lambda_m)] \right. \\
& \quad \left. \left. + \sin(\lambda_i) (-\operatorname{coth}(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) + \operatorname{coth}(\lambda_m) \sin(\lambda_m)] + \operatorname{csch}(\lambda_i) [1 + \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_m)]) \right) \right) \\
& + \lambda_i \lambda_m^3 \left(-1 + \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) [-\cos(\lambda_i) \operatorname{coth}(\lambda_m) + \operatorname{csch}(\lambda_m)] \right. \\
& \quad \left. \left. + \sin(\lambda_i) (\operatorname{coth}(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) - \operatorname{coth}(\lambda_m) \sin(\lambda_m)]) + \operatorname{csch}(\lambda_i) [-1 + \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_m)] \right) \right)
\end{aligned}$$

$$I_{mi}^{02} = \frac{2 \lambda_i^4}{\lambda_i^4 - \lambda_m^4} \left(\lambda_i \sin(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) + \sin(\lambda_i) \operatorname{coth}(\lambda_i)] - \lambda_m \sin(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_i) \operatorname{coth}(\lambda_i)] \right)$$

$$I_{mi}^{11} = \frac{2 \lambda_i \lambda_m}{\lambda_i^4 - \lambda_m^4} \left(\lambda_i^3 \sin(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) \operatorname{coth}(\lambda_m)] + \lambda_m^3 \sin(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) + \sin(\lambda_i) \operatorname{coth}(\lambda_i)] \right)$$

$$\begin{aligned}
I_{mi}^{12} = & \frac{1}{\lambda_i^4 - \lambda_m^4} \left(\lambda_i^3 \lambda_m \left(-1 + \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_i) [-1 + \cos(\lambda_i) \cosh(\lambda_m)] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sin(\lambda_i) (\operatorname{coth}(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) + \operatorname{coth}(\lambda_m) \sin(\lambda_m)] - \operatorname{csch}(\lambda_i) [1 + \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_m)]) \right) \right) \\
& + \lambda_i^3 \lambda_m^3 \left(-1 + \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) [-\cos(\lambda_i) \operatorname{coth}(\lambda_m) + \operatorname{csch}(\lambda_m)] \right. \\
& \quad \left. \left. + \sin(\lambda_i) (\operatorname{coth}(\lambda_i) [-\cos(\lambda_m) + \operatorname{coth}(\lambda_m) \sin(\lambda_m)]) + \operatorname{csch}(\lambda_i) [1 - \sin(\lambda_m) \operatorname{csch}(\lambda_m)] \right) \right)
\end{aligned}$$

$$I_{mi}^{22} = \frac{2 \lambda_i^3 \lambda_m^3}{\lambda_i^4 - \lambda_m^4} \left(\lambda_i \sin(\lambda_i) [\cos(\lambda_m) - \sin(\lambda_m) \operatorname{coth}(\lambda_m)] + \lambda_m \sin(\lambda_m) [-\cos(\lambda_i) - \sin(\lambda_i) \operatorname{coth}(\lambda_i)] \right)$$

A.5 Cas de la poutre encastree en ses deux extremités

Pour une poutre encastree en $u = 0$ en $u = 1$, l'equation de la deformeés s'écrit :

$$X_m(u) = \cos(\lambda_m u) - \cosh(\lambda_m u) - \gamma_m [\sin(\lambda_m u) - \sinh(\lambda_m u)]$$

Avec:

$$\gamma_m = \frac{\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)}{\sin(\lambda_m) - \sinh(\lambda_m)}$$

Et λ_m sont les solutions de l'equation : $\cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m) = 1$ pour $m = 1, 2, 3, \dots$

Les valeurs numériques des racines λ_m pour les dix premiers modes sont résumées au tableau suivant :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_m	4,73	7,85	10,99	14,13	17,28	20,42	23,56	26,7	29,85	32,99

Les intégrales adimensionnelles sont exprimées par :

a) pour $m = i$

$$I_{mm}^{00} = 1$$

$$I_{mm}^{01} = 0$$

$$I_{mm}^{02} = \left(\lambda_m \left(-4 \cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) + 3 \sin(2 \lambda_m) - \cosh(2 \lambda_m) \sin(2 \lambda_m) - 4 \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) \right. \right. \\ \left. \left. - \sinh(2 \lambda_m) [-3 + \cos(2 \lambda_m)] - 4 \lambda_m [\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)]^2 \right) \right) / \left(4 [\sin(\lambda_m) - \sinh(\lambda_m)]^2 \right)$$

$$I_{mm}^{11} = \left(\lambda_m \left(4 \cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) - 3 \sin(2 \lambda_m) + \cosh(2 \lambda_m) \sin(2 \lambda_m) + 4 \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) \right. \right. \\ \left. \left. + \sinh(2 \lambda_m) [-3 + \cos(2 \lambda_m)] + 4 \lambda_m [\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)]^2 \right) \right) / \left(4 [\sin(\lambda_m) - \sinh(\lambda_m)]^2 \right)$$

$$I_{mm}^{12} = 0$$

$$I_{mm}^{22} = \lambda_m^4$$

b) pour $m \neq i$

$$I_{mi}^{01} = 4 \lambda_i \lambda_m \left(\lambda_i^2 \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) [-1 + \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m)] \right. \\ \left. + \lambda_i \lambda_m \left(\sin(\lambda_m) \left(\sin(\lambda_i) [-1 + \cosh(\lambda_i) \cosh(\lambda_m)] - \sinh(\lambda_i) [-1 + \cos(\lambda_i) \cosh(\lambda_m)] \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \sinh(\lambda_m) \left(\sin(\lambda_i) [1 - \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m)] + \sinh(\lambda_i) [-1 + \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m)] \right) \right) \right) \\ \left. + \lambda_m^2 \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) [-1 + \cos(\lambda_i) \cosh(\lambda_i)] \right) / \\ \left([\sin(\lambda_i) - \sinh(\lambda_i)] [\sin(\lambda_m) - \sinh(\lambda_m)] (\lambda_i^4 - \lambda_m^4) \right)$$

$$\begin{aligned}
I_{mm}^{02} = & \left(4 \lambda_i^2 \lambda_m^2 \left(\lambda_i \left(\sin(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i) + \cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \sinh(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i) + \cos(\lambda_m) \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)] \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda_m \left(\sin(\lambda_m) [\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)] [-\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i)] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) [-\cosh(\lambda_i) \sin(\lambda_i) + \cos(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)] \right) \right) \right) / \\
& \left([\sin(\lambda_i) - \sinh(\lambda_i)] [\sin(\lambda_m) - \sinh(\lambda_m)] (\lambda_i^4 - \lambda_m^4) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{mi}^{11} = & - \left(4 \lambda_i^2 \lambda_m^2 \left(\lambda_i \left(\sin(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i) + \cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \sinh(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i) + \cos(\lambda_m) \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)] \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \lambda_m \left(\sin(\lambda_m) [\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)] [-\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i)] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) [-\cosh(\lambda_i) \sin(\lambda_i) + \cos(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)] \right) \right) \right) / \\
& \left([\sin(\lambda_i) - \sinh(\lambda_i)] [\sin(\lambda_m) - \sinh(\lambda_m)] (\lambda_i^4 - \lambda_m^4) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{mi}^{12} = & \left(4 \lambda_i^3 \lambda_m \left(\lambda_i^2 [-1 + \cos(\lambda_i) \cosh(\lambda_i)] [-1 + \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m)] \right. \right. \\
& \left. \left. - \lambda_m^2 ([\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)] [\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)] \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \sin(\lambda_i) \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_i) \sinh(\lambda_m) \right) \right) \right) / (\lambda_i^4 - \lambda_m^4)
\end{aligned}$$

A.6 Cas de la poutre ayant une extrémité encastree et l'autre libre

Pour une poutre encastree en $u = 0$ et libre en $u = 1$, l'equation de la deforme'es s'ecrit :

$$X_m(u) = \cos(\lambda_m u) - \cosh(\lambda_m u) - \gamma_m [\sin(\lambda_m u) - \sinh(\lambda_m u)]$$

Avec :

$$\gamma_m = \frac{\cos(\lambda_m) + \cosh(\lambda_m)}{\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)}$$

Et λ_m sont les solutions de l'equation : $\cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m) = -1$ pour $m = 1, 2, 3, \dots$

Les valeurs numeriques des racines λ_m pour les dix premiers modes sont resume'es au tableau suivant :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_m	1,87	4,69	7,85	10,99	14,14	17,28	20,42	23,56	26,7	29,84

a) pour $m = i$

$$I_{nm}^{00} = 1$$

$$I_{nm}^{01} = 2 \frac{[\cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m)]^2}{[\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)]^2}$$

$$I_{nm}^{02} = \frac{4 \lambda_i \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) [\cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m)]}{[\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)]^2} - I_{mi}^{11}$$

$$I_{nm}^{11} = (\lambda_m (-4 \cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) + \sin(2 \lambda_m) - 3 \cosh(2 \lambda_m) \sin(2 \lambda_m) - 4 \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) + \sinh(2 \lambda_m) [1 - 3 \cos(2 \lambda_m)] + 4 \lambda_m [\cos(\lambda_m) + \cosh(\lambda_m)]^2) / (4 [\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)]^2))$$

$$I_{nm}^{12} = \frac{2 \lambda_m^2 \sin^2(\lambda_m) \sinh^2(\lambda_m)}{[\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)]^2}$$

$$I_{mi}^{22} = \lambda_m^4$$

b) pour $m \neq i$

$$I_{mi}^{01} = (4 \lambda_i (\lambda_i^3 [-\cosh(\lambda_i) \sin(\lambda_i) + \cos(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)] + [-\cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) + \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m)] + \lambda_i^2 \lambda_m \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) [1 + \cos(\lambda_i) \cosh(\lambda_i)] - \lambda_i \lambda_m^2 [\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i)] [\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)] + \lambda_m^3 \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) [1 + \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m)]) / ([\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i)][\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)] (\lambda_i^4 - \lambda_m^4))$$

$$I_{mi}^{02} = \frac{4 \lambda_i \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) [\cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m)]}{[\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i)][\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)]} - I_{mi}^{11}$$

$$\begin{aligned}
I_{mi}^{11} = & \left(4 \lambda_i \lambda_m \left(\lambda_i^3 \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) [\cosh(\lambda_i) \sin(\lambda_i) - \cos(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)] \right. \right. \\
& - \lambda_i^2 \lambda_m \sinh(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) + \cosh(\lambda_i)] [\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)] \left. \right) \\
& + \lambda_i \lambda_m^2 \sinh(\lambda_m) [\cos(\lambda_m) + \cosh(\lambda_m)] [\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i)] \\
& \left. + \lambda_m^3 \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) [-\cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) + \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m)] \right) / \\
& \left([\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i)] [\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)] (\lambda_i^4 - \lambda_m^4) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{mi}^{12} = & \left(4 \lambda_i \lambda_m \left(4 \lambda_i^4 \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) \right. \right. \\
& + 4 \lambda_i^2 \lambda_m^2 (1 - \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m) + \cosh(\lambda_m) [-\cos(\lambda_i) + \cos(\lambda_m)]) \\
& \left. + \cosh(\lambda_i) (\cos(\lambda_i) - \cos(\lambda_m) + \cosh(\lambda_m) [-1 + \cos(\lambda_i) \cos(\lambda_m)]) \right) / \\
& \left([\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i)] [\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)] (\lambda_i^4 - \lambda_m^4) \right)
\end{aligned}$$

A.7 Cas de la poutre libre aux deux extrémités

Dans ce cas, les deux premiers modes de vibration sont des modes rigides (pompage et tangage respectivement). Les déformées propres sont données par :

$$X_1(u) = 1$$

$$X_2(u) = 2\sqrt{3}\left(u - \frac{1}{2}\right)$$

$$X_m(u) = \cos(\lambda_m u) + \cosh(\lambda_m u) + \gamma_m [\sin(\lambda_m u) + \sinh(\lambda_m u)] \quad m = 3, 4, 5 \dots$$

Avec :

$$\gamma_m = \frac{\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)}{\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)}$$

Et λ_m sont les solutions de l'équation : $\cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m) = 1$ pour $m = 3, 4, 5 \dots$

Les valeurs numériques des racines λ_m pour les dix premiers modes sont résumées au tableau suivant :

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_m	0	0	4,73	7,85	10,99	14,13	17,28	20,42	23,56	26,7

Les intégrales adimensionnelles sont exprimées par :

a) pour $m = i = 1$

$$I_{mi}^{00} = 1$$

$$I_{mi}^{01} = I_{mi}^{02} = I_{mi}^{11} = I_{mi}^{12} = I_{mi}^{22} = 0$$

b) pour $m = 1$ et $i = 2$

$$I_{mi}^{02} = I_{mi}^{11} = I_{mi}^{12} = 0$$

$$I_{mi}^{01} = 2\sqrt{3}$$

c) pour $m = 1$ et $i \geq 3$

$$I_{mi}^{11} = I_{mi}^{12} = 0$$

$$I_{mi}^{01} = 2 \left(\frac{\sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)}{\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)} - 1 \right)$$

$$I_{mi}^{02} = 2 \lambda_i \left(\frac{\sin(\lambda_i) [\cosh(\lambda_i) - 1] + \sinh(\lambda_i) [\cos(\lambda_i) - 1]}{\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)} \right)$$

d) pour $m = 2$ et $i = 1$

$$I_{mi}^{01} = I_{mi}^{02} = I_{mi}^{11} = I_{mi}^{12} = 0$$

e) pour $m = 2$ et $i = 2$

$$I_{mi}^{00} = 1$$

$$I_{mi}^{11} = 12$$

$$I_{mi}^{01} = I_{mi}^{02} = I_{mi}^{12} = I_{mi}^{22} = 0$$

f) pour $m = 2$ et $i \geq 3$

$$I_{mi}^{01} = 2\sqrt{3} \left(1 + [\sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) / (\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i))] \right)$$

$$I_{mi}^{02} = 2\sqrt{3} \left(\frac{2 [\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i) - \sin(\lambda_i)]}{\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)} + \lambda_i \frac{\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i) + \sin(\lambda_i) \cosh(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i) \cosh(\lambda_i)}{\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)} \right)$$

$$I_{mi}^{11} = 4\sqrt{3} \left(\frac{[\sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)]}{[\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)]} - 1 \right)$$

$$I_{mi}^{12} = 4\sqrt{3} \lambda_i \left(\frac{\sin(\lambda_i) \cosh(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i) \cosh \lambda_i - [\sin(\lambda_i) + \sinh(\lambda_i)]}{[\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)]} \right)$$

g) pour $m \geq 3$ et $i = 1$

$$I_{mi}^{01} = I_{mi}^{02} = I_{mi}^{11} = I_{mi}^{12} = 0$$

h) pour $m \geq 3$ et $i = 2$

$$I_{mi}^{01} = I_{mi}^{02} = I_{mi}^{12} = 0$$

$$I_{mi}^{11} = 4\sqrt{3} \left(\frac{[\sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m)]}{[\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)]} - 1 \right)$$

h) pour $m \geq 3$ et $i \geq 3$

h)-1 $m = i$

$$I_{mm}^{00} = 1$$

$$I_{mm}^{01} = 0$$

$$I_{mm}^{02} = \left(\lambda_m \left(4 \cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) + 3 \sinh(2 \lambda_m) - \cos(2 \lambda_m) \sinh(2 \lambda_m) - 4 \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) \right. \right. \\ \left. \left. + \sin(2 \lambda_m) [-3 + \cosh(2 \lambda_m)] - 4 \lambda_m [\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)]^2 \right) \right) / \left(4 [\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)]^2 \right)$$

$$I_{mm}^{11} = \left(\lambda_m \left(3 \left(4 \cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) + \sin(2 \lambda_m) [-3 + \cosh(2 \lambda_m)] - 4 \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 3 \sinh(2 \lambda_m) - \cos(2 \lambda_m) \sinh(2 \lambda_m) \right) + 4 \lambda_m [\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)]^2 \right) \right) / \\ \left(4 [\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)]^2 \right)$$

$$I_{mm}^{12} = 0$$

$$I_{mm}^{22} = \lambda_i^2$$

h)- 2 $m \neq i$

$$I_{mi}^{01} = 4 \left(\lambda_i^4 ([\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)][-\cos(\lambda_m) + \cosh(\lambda_m)] + \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m)) \right. \\ \left. + \lambda_i^2 \lambda_m^2 [-1 + \cos(\lambda_i) \cosh(\lambda_i)][-1 + \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m)] \right) / \\ \left([\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)][\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)](\lambda_i^4 - \lambda_m^4) \right)$$

$$I_{mi}^{02} = \lambda_i^4 \left(4 \lambda_i (-[\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)][\sin(\lambda_i) + \sin h(\lambda_i)] \right. \\ \left. + \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) [\cosh(\lambda_i) \sin(\lambda_i) - \cos(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)]) \right. \\ \left. + 4 \lambda_m ([\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)][\sin(\lambda_m) + \sin h(\lambda_m)] \right. \\ \left. - \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) [\cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m)]) \right) / \\ \left([\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)][\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)](\lambda_i^4 - \lambda_m^4) \right)$$

$$I_{mi}^{11} = \lambda_i \lambda_m \left(-4 \lambda_i^3 ([\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)][\sin(\lambda_i) + \sin h(\lambda_i)] \right. \\ \left. - \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i) [\cosh(\lambda_m) \sin(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \sinh(\lambda_m)]) \right. \\ \left. + 4 \lambda_m^3 ([-\cos(\lambda_m) + \cosh(\lambda_m)][\sin(\lambda_i) + \sin h(\lambda_i)] \right. \\ \left. + \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) [\cosh(\lambda_i) \sin(\lambda_i) - \cos(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)]) \right) / \\ \left([\cos(\lambda_i) - \cosh(\lambda_i)][\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)](\lambda_i^4 - \lambda_m^4) \right)$$

$$I_{mi}^{12} = \lambda_i^2 \lambda_m \left(\lambda_i^3 (-4 \sin(\lambda_i) [\sin(\lambda_m) + \sin h(\lambda_m)] + 2 \sinh(\lambda_i) (-2 \sinh(\lambda_m)) \right. \\ \left. + 2 \sinh(\lambda_m) (-1 + \cos(\lambda_m) [\cos(\lambda_i) + \cosh(\lambda_i)]) + \sinh(2 \lambda_m) [\cos(\lambda_i) + \cosh(\lambda_i)]) \right. \\ \left. - 2 \lambda_i^2 \lambda_m \sinh^2(\lambda_m) (1 + 2 \cos(\lambda_i) \cosh(\lambda_i) + \cosh(2 \lambda_i) + 2 \sin(\lambda_i) \sinh(\lambda_i)) \right. \\ \left. + 4 \lambda_i \lambda_m^2 \cosh(\lambda_i) \cosh(\lambda_m) [\sin(\lambda_i) + \sin h(\lambda_i)][\sin(\lambda_m) + \sin h(\lambda_m)] \right. \\ \left. - 2 \lambda_m^3 \sinh^2(\lambda_i) (1 + 2 \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m) + \cosh(2 \lambda_m) + 2 \sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m)) \right) / \\ \left([\cos(\lambda_i) + \cosh(\lambda_i)][\cos(\lambda_m) + \cosh(\lambda_m)](\lambda_i^4 - \lambda_m^4) \right)$$

ANNEXE B

Tableaux comparatifs des fréquences propres calculées sous *matlab* et en calcul de structures sous *I-DEAS* pour une plaque symétrique sous différentes combinaisons de conditions aux limites

Tableau B.1 Comparaison des fréquences propres de la plaque AEEE calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	163,66473	162,8394	0,82533	0,51
2	1,2	309,76398	308,3327	1,43128	0,46
3	2,1	393,25229	391,0931	2,15919	0,55
4	1,3	493,75099	490,6736	3,07739	0,63
5	2,2	582,28319	578,7061	3,57709	0,62
6	1,4	709,41198	703,8405	5,57148	0,79

Tableau B.2 Comparaison des fréquences propres de la plaque EAEA calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	176,49828	175,9443	0,55398	0,31
2	1,2	271,78990	270,5672	1,2227	0,45
3	1,3	442,40662	440,5823	1,82432	0,41
4	2,1	447,19649	445,206	1,99049	0,45
5	2,2	556,50318	552,5992	3,90398	0,71
6	1,4	661,13453	657,271	3,86353	0,59

Tableau B.3 Comparaison des fréquences propres de la plaque AAEE calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	149,33838	148,5278	0,81058	0,56
2	1,2	275,55817	274,1121	1,44607	0,53
3	2,1	383,31063	381,3683	1,94233	0,51
4	1,3	456,19956	453,6556	2,54396	0,56
5	2,2	537,83803	534,085	3,75303	0,70
6	1,4	665,19922	660,0536	5,14562	0,78

Tableau B.4 Comparaison des fréquences propres de la plaque EELE calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	102,28773	101,7064	0,58133	0,57
2	2,1	214,85126	213,1281	1,72316	0,81
3	1,2	264,03181	262,1253	1,90651	0,73
4	2,2	369,30549	366,5602	2,74529	0,75
5	3,1	478,47798	474,6721	3,80588	0,80
6	1,3	504,93083	500,8604	4,07043	0,81

Tableau B.5 Comparaison des fréquences propres de la plaque EAEL calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	149,97145	149,04500	0,92645	0,62
2	1,2	201,36280	199,81360	1,5492	0,77
3	1,3	318,38134	315,78400	2,59734	0,82
4	2,1	409,17248	405,60850	3,56398	0,88
5	2,2	476,84468	472,70900	4,13568	0,87
6	1,4	506,71864	502,48720	4,23144	0,84

Tableau B.6 Comparaison des fréquences propres de la plaque AAAA calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	109,45521	108,4683	0,98691	0,91
2	1,2	224,40871	222,6418	1,76691	0,79
3	2,1	313,22109	311,1272	2,09389	0,67
4	1,3	388,67356	385,6491	3,02446	0,78
5	2,2	464,05946	459,8468	4,21266	0,91
6	2,3	583,57898	577,8641	5,71488	0,99

Tableau B.7 Comparaison des fréquences propres de la plaque **AAEA** calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	138,03277	136,8143	1,21847	0,89
2	1,2	245,41035	243,0334	2,37695	0,98
3	2,1	375,10782	372,596	2,51182	0,67
4	1,3	416,93717	413,7223	3,21487	0,78
5	2,2	502,88945	497,0955	5,79395	1,16
6	1,4	622,66295	616,0713	6,59165	1,07

Tableau B.8 Comparaison des fréquences propres de la plaque **EALÉ** calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	75,65758	75,09660	0,56098	0,75
2	2,1	193,54738	192,40570	1,14168	0,59
3	1,2	223,72668	221,10400	2,62268	1,19
4	2,2	335,52348	332,52160	3,00188	0,90
5	1,3	431,00183	427,96470	3,03713	0,71
6	3,1	475,19271	469,93600	5,25671	1,12

Tableau B.9 Comparaison des fréquences propres de la plaque **EALA** calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	62,29617	61,63588	0,66029	1,07
2	1,2	167,72873	167,04850	0,68023	0,41
3	2,1	207,91621	204,93540	2,98081	1,45
4	2,2	306,86685	304,56860	2,29825	0,75
5	1,3	382,34240	378,77200	3,57040	0,94
6	3,1	468,90331	464,26700	4,63631	1,00

Tableau B.10 Comparaison des fréquences propres de la plaque EELL calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	41,57844	41,24547	0,33297	0,81
2	1,2	111,56936	110,6672	0,90216	0,82
3	2,1	172,69017	171,214	1,47617	0,86
4	1,3	238,36208	236,2957	2,06638	0,87
5	2,2	290,78289	287,4013	3,38159	1,18
6	3,1	390,87184	386,5544	4,31744	1,12

Tableau B.11 Comparaison des fréquences propres de la plaque ELEL calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	144,80366	144,01100	0,79266	0,55
2	1,2	161,34627	159,76200	1,58427	0,99
3	1,3	233,65800	231,27540	2,3826	1,03
4	1,4	365,70013	362,23430	3,46583	0,96
5	2,1	407,93137	404,05120	3,88017	0,96
6	2,2	422,62070	417,48830	5,1324	1,23

Tableau B.12 Comparaison des fréquences propres de la plaque AALE calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	69,675493	69,04308	0,632413	0,92
2	2,1	165,58704	163,6384	1,94864	1,19
3	1,2	213,17613	211,1161	2,06003	0,97
4	2,2	306,06451	302,7922	3,27231	1,08
5	3,1	402,96311	398,2557	4,70741	1,18
6	1,3	432,25207	428,3718	3,88027	0,90

Tableau B.13 Comparaison des fréquences propres de la plaque ALEL calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	97,281391	96,56136	0,720031	0,75
2	1,2	123,86347	122,1273	1,73617	1,42
3	1,3	201,37353	198,4224	2,95113	1,49
4	2,1	314,26112	311,5997	2,66142	0,85
5	1,4	351,9195	347,1079	4,8116	1,39
6	2,2	358,14824	353,568	4,58024	1,29

Tableau B.14 Comparaison des fréquences propres de la plaque AALA calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	53,953072	53,1185	0,834572	1,57
2	2,1	149,54793	148,2455	1,30243	0,88
3	1,2	184,56749	181,4348	3,13269	1,73
4	2,2	278,69941	275,262	3,43741	1,25
5	1,3	370,51258	367,6506	2,86198	0,78
6	3,1	404,54375	398,373	6,17075	1,55

Tableau B.15 Comparaison des fréquences propres de la plaque EALL calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	34,16848	33,92330	0,24518	0,72
2	1,2	89,21419	88,338460	0,87573	0,99
3	2,1	166,17032	164,70540	1,46492	0,89
4	1,3	205,71709	204,19020	1,52689	0,75
5	2,2	261,63112	257,60530	4,02582	1,56
6	1,4	356,83907	352,80940	4,02967	1,14

Tableau B.16 Comparaison des fréquences propres de la plaque **AALL** calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	16,913497	16,68013	0,233367	1,40
2	1,2	74,083403	73,4896	0,593803	0,81
3	2,1	125,91892	124,443	1,47592	1,19
4	1,3	182,45373	180,6315	1,82223	1,00
5	2,2	236,06872	232,845	3,22372	1,38
6	3,1	316,89763	312,875	4,02263	1,28

Tableau B.17 Comparaison des fréquences propres de la plaque **ALAL** calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	64,42581	63,80925	0,61656	0,97
2	1,2	91,770404	90,07124	1,69916	1,89
3	1,3	172,06997	169,5674	2,50257	1,48
4	2,1	255,69847	253,755	1,94347	0,77
5	2,2	299,40171	294,3187	5,08301	1,73
6	1,4	317,88707	313,8452	4,04187	1,29

Tableau B.18 Comparaison des fréquences propres de la plaque **ELLL** calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

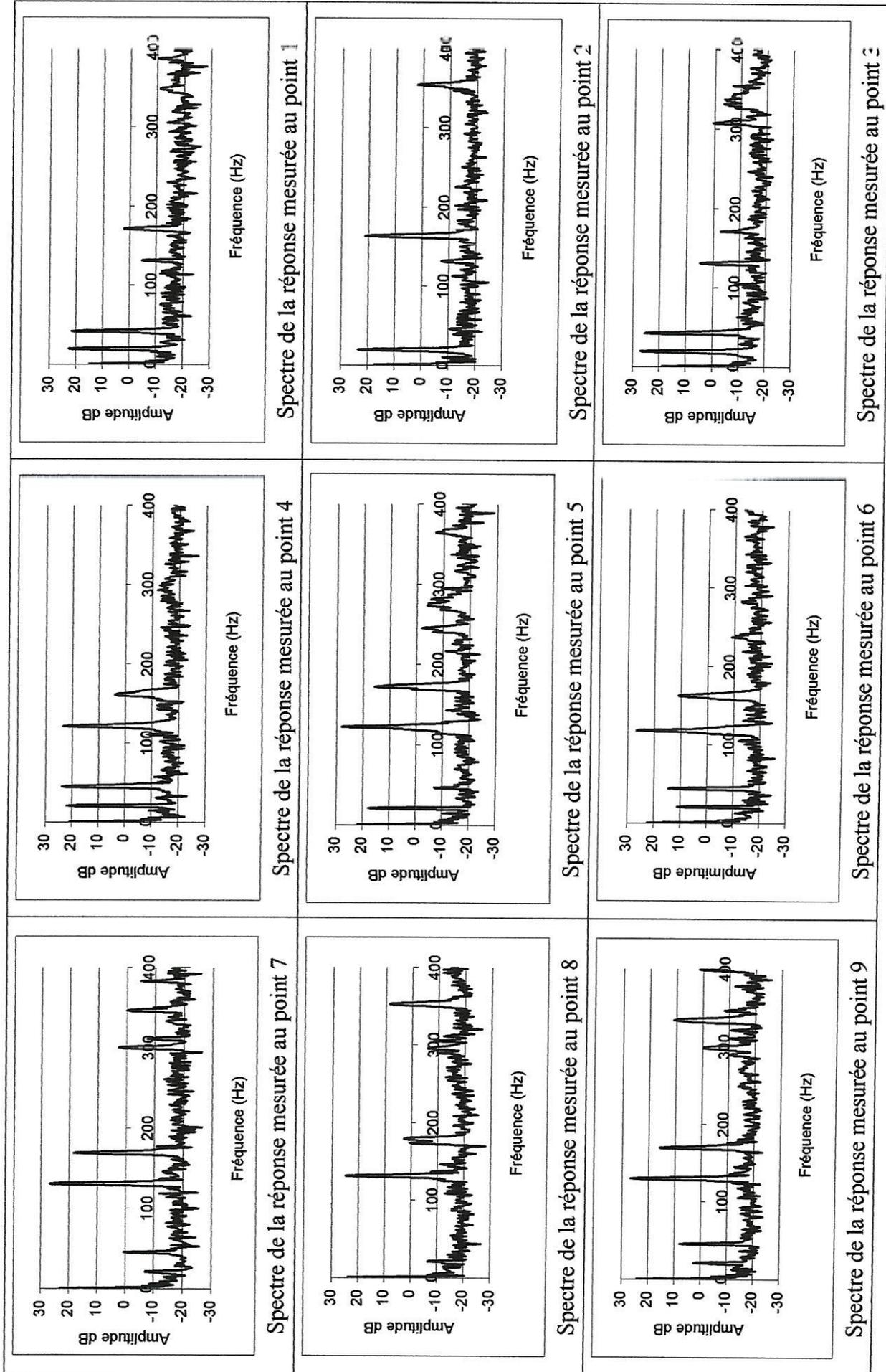
Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	21,57403	21,47500	0,09903	0,46
2	1,2	48,78090	48,25790	0,52300	1,08
3	1,3	118,03811	116,85600	1,18211	1,01
4	2,1	139,58792	138,50330	1,08462	0,78
5	2,2	187,74801	184,44200	3,30601	1,79
6	1,4	253,97664	252,13050	1,84614	0,73

Tableau B.19 Comparaison des fréquences propres de la plaque ALLL calculées sous *Matlab* et obtenues en calcul de structures sous *I-DEAS*

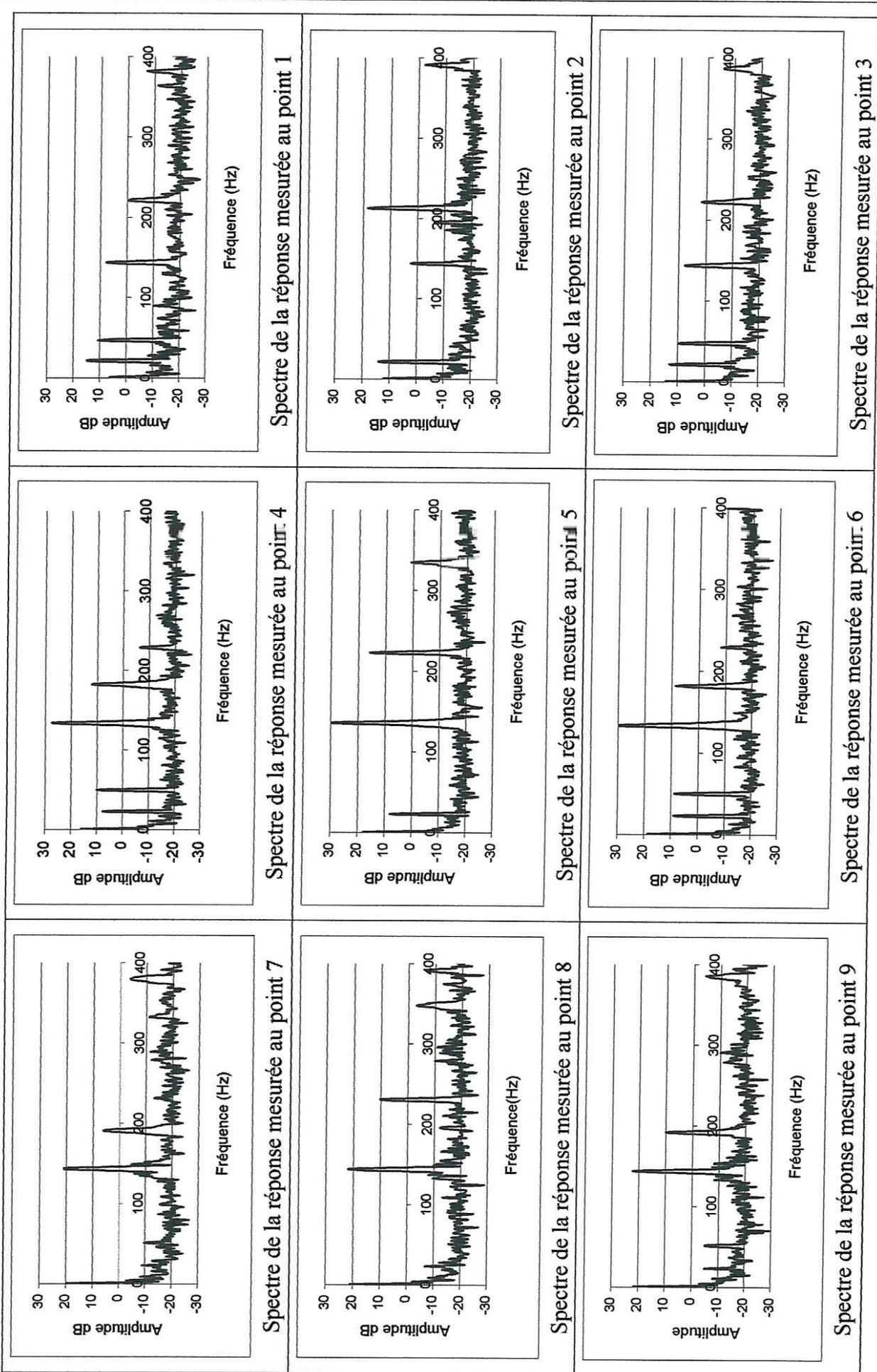
Modes	Déformées	fréquences propres calculées analytiquement	fréquences propres obtenues en calcul de structures	Ecart (Hz)	Ecart relatif $\frac{f_{cs} - f_a}{f_{cs}}$ (%)
1	1,1	0	0	0	-
2	1,2	34,05916	33,59099	0,46817	1,39
3	2,1	97,77048	96,61924	1,15124	1,19
4	1,3	108,81391	108,0666	0,74731	0,69
5	2,2	154,11625	150,6346	3,48165	2,31
6	1,4	228,64944	226,0994	2,55004	1,13

ANNEXE C

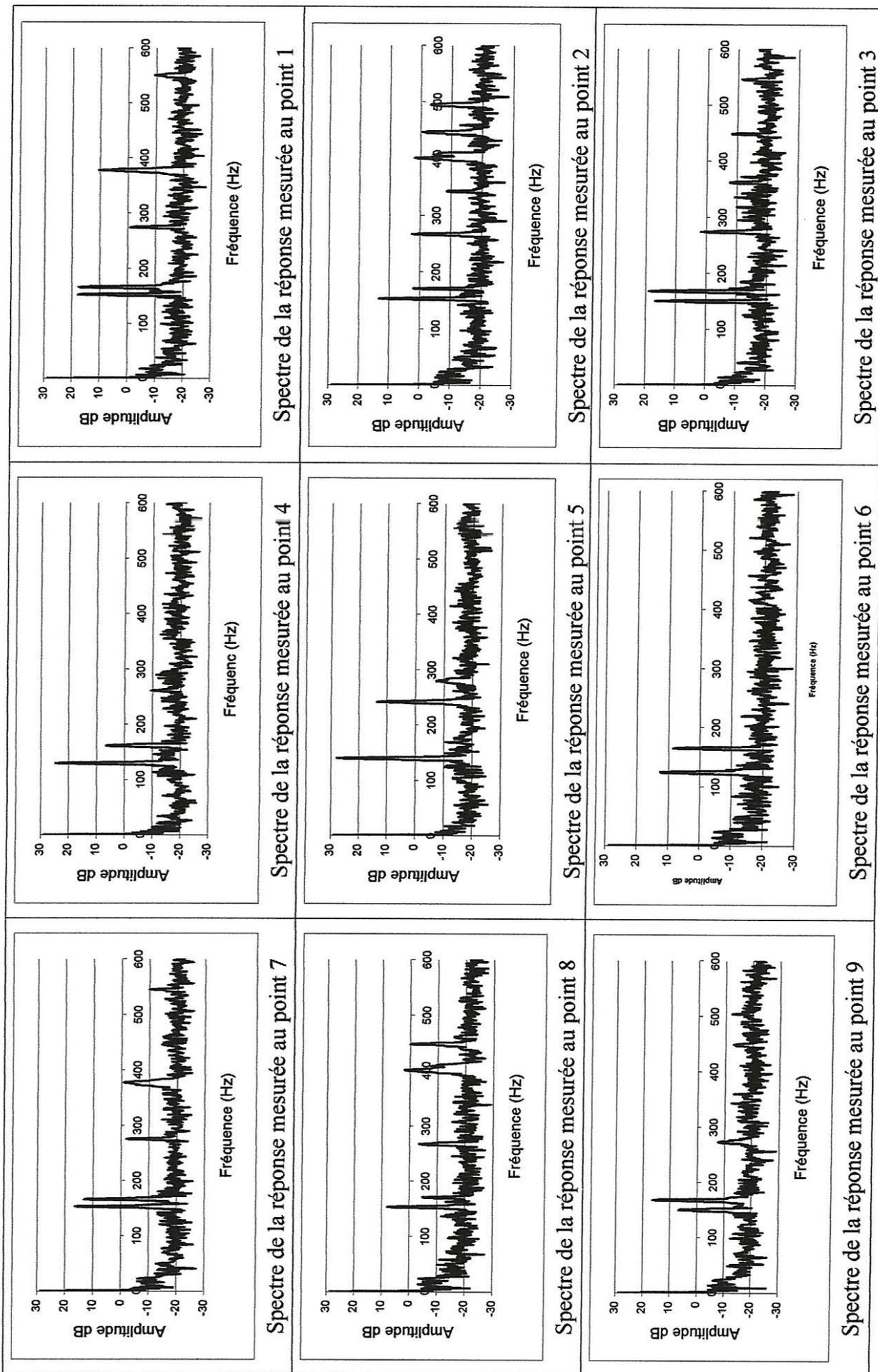
Spectres des réponses expérimentales des plaques testées



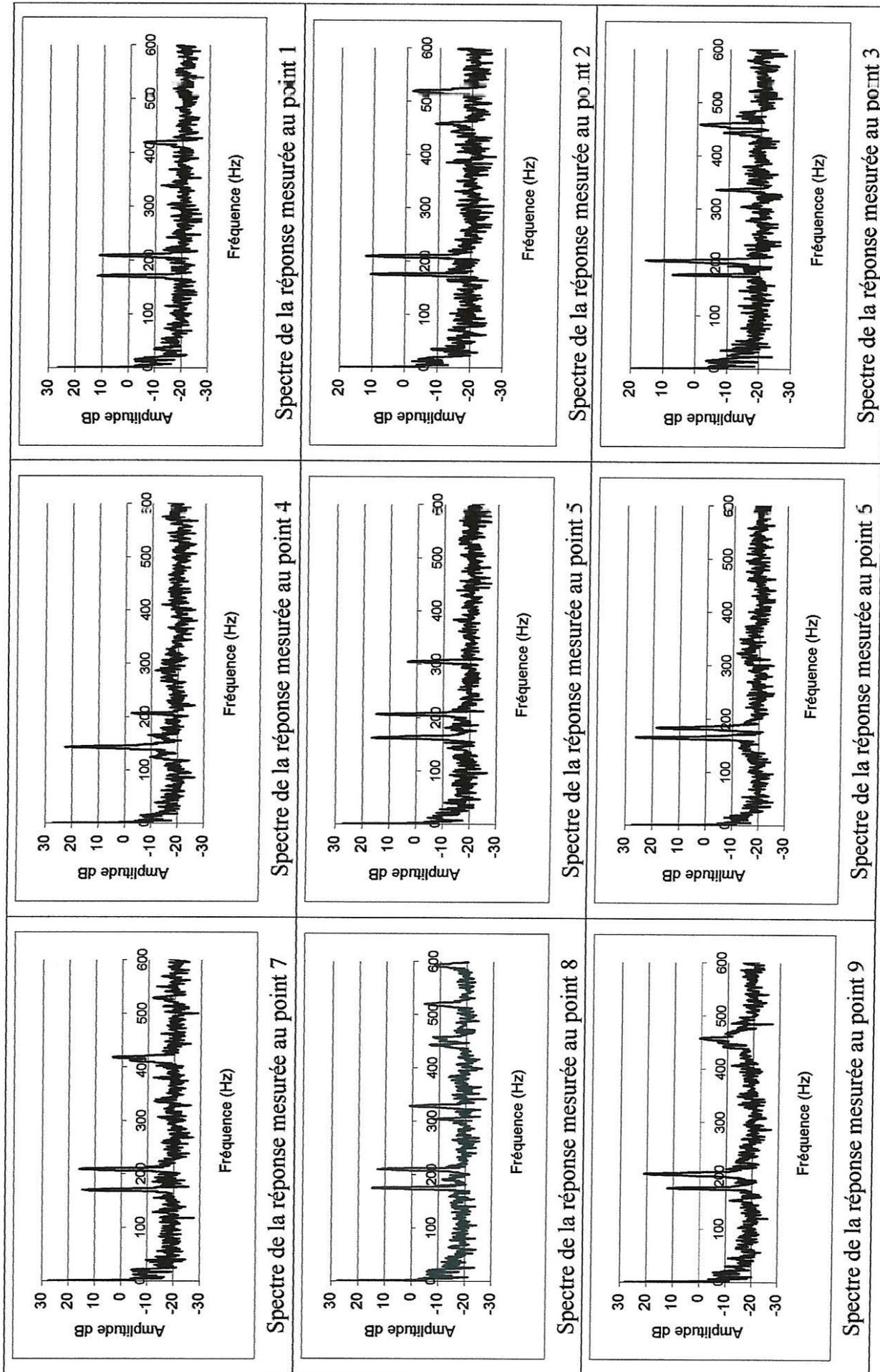
C.1 Spectres de la plaque 1 [0/90₂/0]_s – Configuration ELLL



C.2 Spectres de la plaque 2 [90/0_z/90]_s – Configuration ELLL



C.3 Spectres de la plaque 1 [0/90₂/0]_s – Configuration ELEL



C.4 Spectres de la plaque 2 [90/0₂/90]_s – Configuration ELEL

Résumé

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'étude du comportement vibratoire expérimentale et numérique des plaques stratifiées en composites. Le travail réalisé est présenté en trois grandes parties :

La première est consacrée à l'étude bibliographique sur les stratifiés, suivi par un développement détaillé de la formulation du comportement vibratoire des plaques stratifiées.

La deuxième est réservée à la détermination des fréquences et modes propres non amortis en appliquant le programme de calcul élaboré sous *Matlab* et validé en calcul des structures par éléments finis sous le code de calcul *I-DEAS* à des plaques rectangulaires symétriques minces pour différentes conditions aux limites possibles. Une solution exacte est exposée dans le cas de la plaque orthotrope simplement appuyée sur ses quatre cotés. Pour tous les autres cas, les solutions sont déterminées par la méthode de Rayleigh-Ritz en utilisant les fonctions poutres comme fonctions d'approximation.

La troisième partie traite la détermination expérimentale des fréquences propres et des amortissements modaux des plaques stratifiées étudiées. Une étude comparative des trois méthodes : analytique, calcul de structures par éléments finis et expérimentale en termes de fréquences propres pour deux types de stratifications dans les configurations ELLL et ELEL est abordée. Cette partie est suivie par la détermination expérimentale de l'amortissement modal et couronnée par l'évaluation de la réponse amortie d'une plaque stratifiée en composites soumise à une excitation sinusoïdale.

Mots clés : Composites stratifiés, Comportement dynamique, Plaques, Vibrations de flexion, Fréquences et modes propres, Méthode de Rayleigh-Ritz, Calcul de structures, Analyse modale expérimentale.