

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 08 Mai 45 de Guelma
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie
Département de Génie Mécanique

Ecole Doctorale Nationale de Mécanique de Construction

EDNMC

Mémoire de Magister



66

Comportement dynamique des dalles de roulement
multi-travées sous la sollicitation des véhicules mobiles

Spécialité : Mécanique de Construction

Option : Mécanique & Maintenance Industrielle

Présenté par : Youcef FISLI

Devant le jury :

Président	Mustapha LAHMAR	Pr	Université de Guelma
Encadreur	Salah GUENFOUD	Pr	Université de Guelma
Examineur	Mohamed GUENFOUD	Pr	Université de Guelma
Examineur	Mohamed Cherif DJAMAA	MCA	Université de Guelma
Invité	Abdelouahab REZAIGUIA	MCB	Université de Guelma

2010

Remerciements

Je tiens à remercier Professeur *Salah GUENFOUD* d'avoir accepté d'être mon encadreur et qui m'a donné la possibilité d'élaborer ce mémoire dans le domaine de la dynamique des structures sous chargement mobile.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Dr. *Abdelouahab REZAIGUIA* pour son aide et sa direction constamment de près de mon travail. Je le remercie pour sa disponibilité, ses encouragements, son soutien moral, sa sympathie et son amitié sincère dont il a fait preuve le long de ce travail. J'apprécie la confiance qu'il m'a témoignée et les conseils avisés qu'il m'a prodigué. Qu'il trouve ici mes sincères reconnaissances. Grâce à son expérience, cette étude m'a apporté beaucoup de savoir.

Je tiens à remercier Professeur *Mustapha LAHMAR* qui ; malgré ses multiples occupations ; a accepté de présider le jury de ce mémoire. Mes vifs remerciements aussi pour Professeur *Mohamed GUENFOUD* et Docteur *Mohamed Cherif DJAMAA* d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Enfin, je remercie en particulier ma famille et plus précisément ma mère et mon père qui m'ont encouragés tout au long de mes études, je n'oublie pas mes amies pour leur amitié et encourage.

Table des matières

Résumé

Principaux notations et symboles

Introduction générale

Chapitre 1 : Etude bibliographique.....	1
1.1 Ingénierie en ouvrage d'art.....	1
1.2 Action sur les ponts.....	1
1.3 Trafic routier.....	2
1.4 Nature des vibrations générées sur les ponts par les véhicules.....	2
1.4.1 Explication des phénomènes.....	2
1.4.2 Les ponts.....	4
1.4.3 Le profile de la haussée.....	6
1.4.4 Les véhicules	6
1.5 Modèles des véhicules.....	8
1.5.1 Véhicules bidimensionnels.....	8
1.5.1.1 Modèle à un degré de liberté.....	8
1.5.1.2 Modèle à deux et quatre degrés de liberté.....	9
1.5.2 Véhicules tridimensionnels.....	10
1.5.2.1 Modèle à sept degrés de liberté.....	10
1.5.2.2 Modèle à 11 degrés de liberté.....	11
1.6 Systèmes de suspensions et de liaisons des essieux tandem et tridem.....	12
1.7 Interaction des éléments contribuant au phénomène de vibration.....	14
1.8 Définition et importance du facteur d'amplification dynamique.....	15
1.9 Synthèse bibliographique.....	16
Chapitre 2 : Modélisations numérique du phénomène de l'interaction dynamique	
pont-véhiule.....	19
2.1 Introduction.....	19
2.2 Modélisation de la dalle de roulement du pont.....	19
2.3 Détermination des fréquences et des modes propres de la dalle du pont.....	22

2.4	Modélisation du véhicule mobile	27
2.4.1	Généralités	27
2.4.2	Conception des modèles.....	27
2.4.2.1	Modèle de véhicule à deux essieux.....	27
2.4.2.2	Modèle de véhicule à trois essieux.....	28
2.4.3	Démarche.....	29
2.4.4	Hypothèses de base.....	31
2.4.5	Mise en équations du modèle de véhicule à 4 D.D.L.....	32
2.4.6	Mise en équations du modèle de véhicule à 5 D.D.L.....	34
2.4.7	Mise en équations du modèle de véhicule à 6 D.D.L.....	36
2.5	Modélisation du profil de la chaussée.....	39
2.6	Résolution numérique des équations du mouvement.....	40
2.7	Algorithme de Résolution.....	42
2.8	Organigramme schématique du programme de calcul.....	44
Chapitre 3 : Résultats et interprétations.....		46
3.1	Introduction.....	46
3.2	Validation des fréquences et modes propres des dalles multi-travées.....	46
3.3	Exemple numérique de validation.....	54
3.3.1	Validation des fréquences propres.....	56
3.4	Application au cas d'une dalle de roulement d'un pont routier.....	60
3.4.1	Influence de la vitesse de roulement.....	60
3.4.2	Influence de profile de la chaussée.....	62
3.4.3	Influence de facteur d'amortissement visqueux de la dalle.....	64
Conclusion générale.....		65
Références bibliographiques.....		67
Annexe 1 : Fréquences et modes propres d'une poutre continue en appuis simples.....		69
Annexe 2 : Complément des intégrales du chapitre 2.....		79
Annexe 3 : Equations du mouvement de différents modèles de véhicules		85

Résumé

L'analyse du comportement dynamique des dalles de roulement des ponts routiers lors du passage des véhicules est un sujet d'extrême importance qui a fait l'objet de réflexion auparavant et continu d'être d'actualité. Les véhicules traversant les dalles de roulement des ponts à grande vitesse peuvent engendrer des effets dynamiques importants. Ces effets doivent être étudiés en simulant effectivement les réponses dynamiques des dalles de roulement des ponts et des véhicules.

Dans ce contexte, nous avons étudié le comportement dynamique d'une dalle de roulement d'un pont routier lors du passage d'un véhicule avec la prise en compte de l'interaction dynamique pont-véhicule et de l'états de la chaussée. Dans cette étude, la dalle de roulement est modélisée par une plaque orthotrope multi-travées. Le véhicule (camion) est modélisé par plusieurs modèles dynamiques à deux et à trois essieux sans ou avec essieux tandem, en deux ou en trois dimensions. Le profil de la chaussée est modélisé par une fonction caractérisée par une variable aléatoire et un coefficient de rugosité pour caractériser l'état de la route.

L'approche modale couplée à une intégration numérique par la méthode de Newmark sont utilisées pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicule. La résolution de ces équations s'effectue d'une manière découplée à l'aide d'un processus de calcul itératif. Plusieurs exemples numériques sont présentés et validés.

Principaux notations et symboles

$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$	Excentricités
a_{ij}	Amplitudes modales
b	Largeur de la dalles de roulement du pont
M_{ij}	Masses modales
K_{ij}	Rigidités modales
C_{ij}	Amortissements modaux
F_{ij}	Forces modales
c_{pi}	Amortissement dans le pneu i du véhicule
c_{si}	Amortissement dans la suspension i du véhicule
k_{pi}	Rigidité dans le pneu i du véhicule
k_{si}	Rigidité dans la suspension i du véhicule
$[M_v]$	Matrice de masse du véhicule
$[C_v]$	Matrice d'amortissement du véhicule
$[K_v]$	Matrice de rigidité du véhicule
D_x, D_y	Rigidités de flexion du pont selon x et y respectivement
D_{xy}	Rigidité de torsion du pont
E	Module d'élasticité
E_x, E_y	Modules d'élasticité selon x et y respectivement
ν, ν_{xy}, ν_{yx}	Coefficients de Poisson
FAD	Facteur d'Amplification Dynamique
G_{xy}	Module de cisaillement
α, β	Paramètres de stabilité de la méthode de Newmark
Δt	Pas du temps
ϕ_{ij}	Modes propres de la dalle de roulement du pont
φ_i	Modes propres du pont selon x
g	Accélération de la pesanteur
h	Epaisseur de la dalle de roulement du pont
H	Rigidité équivalente la dalle de roulement du pont
W	Travail virtuel
ε	Tolérance de convergence
m_j	Masses des roues i avec essieux

m_v, I_{θ_v}	Masse et moment d'inertie du bloc du véhicule respectivement
m_L, I_{θ_L}	Masse et moment d'inertie de la barre pivotante
$\Delta_{si}, \delta \Delta_{si}, \Delta_{pj}, \delta \Delta_{pj}$	Déplacements relatifs et déplacements relatifs virtuels des suspensions et des pneus respectivement
$z_j, \delta z_j$	Déplacements et déplacements virtuels des pneus selon l'axe vertical respectivement
$x_v, \delta x_v, z_v, \delta z_v$	Déplacements et déplacements virtuels du bloc rigide du véhicule selon l'axe horizontal et vertical respectivement
$\theta_v, \delta \theta_v$	Rotation et rotation virtuelle du corps du véhicule respectivement (tangage)
$I_{\theta_v}, I_{\alpha_v}$	Moments d'inertie de tangage et de roulis du bloc rigide du véhicule respectivement
w	Déplacement vertical de la dalle de roulement du pont
w_i	Déplacement vertical de la dalle de roulement du pont au point de contact i
A_r	Coefficient de rugosité spectrale
r_i	Rugosité du profil statique au point de contact i
$\{Z_v\}$	Vecteur des degrés de liberté du véhicule
$\{F_g\}$	Vecteur des forces de pesanteur
$\{F^{int}\}$	Vecteur des forces d'interaction en chaque point de contact i
F_{pk}^{int}	Force d'interaction entre la $k^{\text{ème}}$ roue du véhicule et la dalle de roulement du pont
ω_{ij}	Pulsations propres de la dalle de roulement du pont
ω_{sk}	Nombre d'ondes
ω_{s0}	Fréquence de discontinuité
θ_k	Variable aléatoire
Ω_i	Fréquences de passage
q_{ij}	Déplacements généralisés (coordonnées modales)
k_i	Paramètre de fréquence
l	Longueur du pont

Introduction générale

Le comportement vibratoire des ponts lors du passage des véhicules est un problème important dans l'ingénierie. Du point de vue vibration, la circulation des véhicules à grande vitesse peut engendrer des effets dynamiques importants et doivent être étudiés en simulant effectivement le déplacement du pont et des véhicules. Ce dernier aspect, lié au fonctionnement des ponts, a fait l'objet de réflexions auparavant et continue d'être d'actualité. Le problème de l'amplification des efforts pour des effets dynamiques reste sensible et préoccupant du fait de l'augmentation du trafic routier, tant sur le plan des intensités et de la fréquence de passages, que sur celui des vitesses de circulation.

Dans ce contexte, nous présentons une modélisation vibratoire d'une dalle de roulement d'un pont routier multi-travées lors du passage des véhicules avec la prise en compte de l'interaction dynamique pont-véhicules et des irrégularités du profil de la chaussée.

Dans le premier chapitre, nous avons fait une étude bibliographique sur la nature des vibrations générées sur les ponts par les véhicules. A la fin de ce chapitre, nous avons fait une synthèse bibliographique de plusieurs articles publiés dans ce domaine.

Au deuxième chapitre, on a modélisé le phénomène de l'interaction dynamique entre une dalle de roulement multi-travées d'un pont routier et un véhicule mobile. Plusieurs modèles des véhicules à deux et à trois essieux (essieux tandem), en deux et trois dimensions ont été présenté. La dalle de roulement du pont est modélisée par une plaque orthotrope multi-travées, continue aux appuis (plaque hyperstatique). Le profil de la route est représenté par une fonction aléatoire caractérisée par un coefficient de rugosité et une variable aléatoire. La résolution des équations du mouvement couplées pont-véhicule s'effectue par la méthode de Newmark couplée à la méthode modale et selon un processus de calcul itératif.

Le troisième chapitre est consacré à la validation et l'interprétation des résultats. Sur la base de la modélisation et l'algorithme proposés pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicule d'une manière découplée, plusieurs programmes en langage FORTRAN ont été développés. Nous avons présenté dans ce chapitre trois parties de résultats. La première partie concerne la validation des fréquences et des modes propres des dalles de roulement multi-travées. La deuxième partie concerne la validation de la réponse dynamique d'une dalle de roulement à une seule travée, sous la sollicitation d'un modèle de véhicule à sept degrés de liberté. La troisième partie est une application au cas d'une dalle de roulement sollicitée par un véhicule à sept degré de liberté. Les fréquences propres de la dalle du pont sont déterminées par l'approche modale et le logiciel des éléments finis ANSYS.

Finalement, nous terminons ce mémoire par une conclusion générale sur cette étude.

Chapitre 1

Etude bibliographique

1. 1 Ingénierie en ouvrages d'art

Depuis le début de la construction du réseau des routes nationales, le trafic routier a fortement augmenté; la croissance est marquée autant par le nombre de véhicules que par le tonnage transporté par essieu. On a des mécanismes de dégradation, ont de graves conséquences sur les structures. Ces mécanismes proviennent des agressions extérieures (actions climatiques et chimiques), de la qualité des caractéristiques du béton.

L'ingénieur de structure doit donc être capable d'estimer précisément la sécurité d'un pont à un moment donné, en utilisant toutes les données disponibles aussi bien les informations concernant la capacité portante que celles relatives aux sollicitations effectives propres à l'ouvrage étudié et ceci, afin de considérer toutes les potentialités de la structure analysée.

1.2 Actions sur les ponts

Les actions agissant sur un pont sont de nature fort diverse. L'action la plus importante est très souvent le poids propre de la structure porteuse associé à celui des éléments non porteurs, tels que le poids du revêtement, des bordures, des parapets et des divers équipements du pont (glissières, gaines techniques, évacuation des eaux, etc.). Par définition, le poids propre agit à long terme et sollicite l'ouvrage de manière statique. Le pont est également sollicité par le milieu environnant par l'action du vent, des tremblements de terre, du tassement du sol de fondation ainsi que par les activités humaines représentées par les actions du trafic. Ces différentes actions ont un caractère variable et se produisent de manière intermittente avec des intervalles de temps très variables. De plus, lorsque ces actions se manifestent, leurs directions et leurs intensités sont variables dans le temps. Le vent, les tremblements de terre et le trafic sont donc des actions qui agissent de manière dynamique sur l'ouvrage. Pour la plupart des ponts, le trafic constitue l'action variable prédominante.

1.3 Trafic routier

Le trafic routier varie d'un endroit à un autre et évolue en fonction du temps. En effet, suivant le tronçon de route, la composition et la densité du trafic change et l'évolution des besoins se répercute sur le trafic. L'action dynamique provoquée par le trafic routier sur un pont dépend de nombreuses variables liées aux flux de trafic, aux véhicules, au profil de la chaussée et au pont. Afin de simplifier l'analyse de l'ouvrage, ces actions dynamiques sont remplacées par des actions statiques équivalentes. Ces dernières sont constituées par un modèle de charge statique dont la valeur représentative est majorée par un facteur d'amplification dynamique. Cette manière de considérer l'action dynamique du trafic est proposée dans la plupart des normes de dimensionnement à travers le monde.

1.4 Nature des vibrations générées sur les ponts par les véhicules

1.4.1 Explication du phénomène

Afin de bien cerner le phénomène étudié, une description détaillée des effets dynamiques occasionnés par le passage d'un véhicule sur un pont est présentée.

En premier lieu, la situation où un véhicule mobile représenté par une force constante traverse une poutre simple à une vitesse constant v est considérée. La poutre est caractérisée par la portée, la rigidité et la masse linéaire. À chaque instant t , la force mobile se trouve à l'abscisse $x = vt$ le long de la poutre et provoque une déformée différente. Pour passer d'un état déformé à un autre durant un intervalle de temps Δt chaque élément infinitésimal de la poutre subit une accélération. En plus des forces élastiques, la poutre est donc sollicitée par des forces d'inertie et des forces d'amortissement. Les forces d'inertie causent des oscillations de la poutre qui, après le passage de la force mobile, retrouve peu à peu sa position de repos par l'entremise des forces d'amortissement.

La situation décrite correspond au cas où la masse du véhicule traversant le pont est très faible en regard de la masse de la structure. Dans le cas contraire, les effets d'inertie liés à la masse mobile doivent être pris en compte. Cette masse mobile, lors de son parcours sur la poutre, modifie les propriétés vibratoires de la structure. Les

modes et les fréquences de vibration du système en régime forcé varient durant le passage de la masse mobile [1].

La structure du véhicule est posée sur les essieux par l'intermédiaire de la suspension. Afin de simplifier, un véhicule peut être modélisé par un système constitué de deux masses, l'une représentant le châssis et la carrosserie et l'autre les essieux et les roues. Ces masses sont liées entre elles par un ressort matérialisé par la suspension (Figure 1.1).

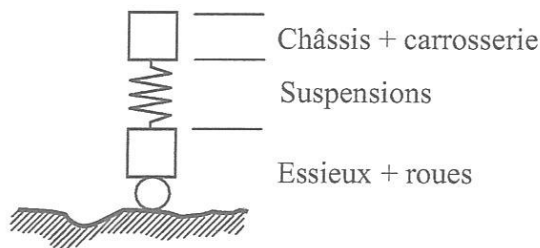


Figure 1.1: Véhicule modélisé par un système de deux masses

Considérons que ce modèle de véhicule roule à vitesse constante sur une surface lisse sur laquelle est aménagée un obstacle de forme sinusoïdale. Avant d'atteindre l'aspérité, les masses ne présentent aucun mouvement vertical. Au moment de franchir l'obstacle, la masse inférieure qui suit la forme du profil, provoque un déplacement relatif des extrémités du ressort ce qui modifie la force appliquée sur le sol. Dès lors que les masses se déplacent verticalement, des forces d'inertie et d'amortissement s'activent et provoquent les oscillations du véhicule qui influencent également la force exercée sur la surface de roulement.

Un pas supplémentaire dans la compréhension des effets dynamiques qui ont lieu lors du passage d'un véhicule sur un pont consiste à admettre que le véhicule idéalisé décrit précédemment circule à vitesse constante sur une chaussée horizontale et parfaitement lisse d'un pont. Dans ces conditions, à l'approche du pont, le véhicule exerce sous ses pneus une force constante correspondant à sa charge statique. Dès l'entrée du véhicule sur le pont et au fur et à mesure de sa progression, le pont se déforme et ainsi modifie le profil de la chaussée.

La situation réelle est similaire à celle décrite ci-dessus avec, en plus, d'autres sources d'excitation pouvant affecter la vibration du véhicule. Les irrégularités dans le

profil statique de la chaussée, les conditions initiales de vibration des véhicules conditionnées par l'état de la chaussée à l'approche du pont, la présence d'autres véhicules simultanément sur le pont et les forces causées par l'accélération, le freinage ou l'action du vent sont des facteurs qui génèrent une variation de l'intensité des charges appliquées sur le pont. Lors du franchissement du pont, ces facteurs influencent le mouvement du véhicule et conduisent la structure à se déformer sous l'action de charges d'intensités sans cesse actualisées. Dans ce contexte, le véhicule et le pont sont considérés comme deux systèmes vibratoires couplés.

Les explications fournies dans les paragraphes précédents montrent que les éléments qui entrent en jeu sont nombreux. Les paramètres intervenant dans l'interaction dynamique du véhicule et du pont sont décrits dans le but d'apporter des précisions nécessaires à la compréhension du phénomène vibratoire.

1.4.2 Les ponts

La géométrie et le système statique font de chaque pont un ouvrage particulier avec un comportement statique et dynamique spécifique. Les principales caractéristiques d'un pont sont: la masse, la rigidité et l'amortissement. La masse est un facteur important pour calculer les fréquences d'un pont. Elle comporte la masse de la structure porteuse, du revêtement, des parapets, des trottoirs et de tous les équipements du pont.

La rigidité d'un pont est déterminée principalement par le type de matériau, par les dimensions et par le type de section. Les ponts dont la section est formée d'un caisson (figure 1.2), assurent une plus grande rigidité de la flexion transversale et de la torsion [1].

L'amortissement caractérise la dissipation d'énergie lors des vibrations du pont. Par définition, l'amortissement est un phénomène thermodynamique, car il implique un transfert d'énergie mécanique vers une autre forme d'énergie qui est soit thermique soit de radiation. On distingue l'amortissement visqueux et l'amortissement structural. La différence dépend essentiellement de la manière dont les limites sont fixées entre chacun. L'amortissement visqueux correspond aux pertes d'énergie au niveau moléculaire dans le matériau. Cet amortissement dépend de la fréquence, de la

température, du type de déformation, de l'amplitude et de la géométrie de la structure. L'amortissement structural est de nature principalement frictionnel et correspond à l'énergie dissipée aux interfaces entre les parties distinctes d'une structure.

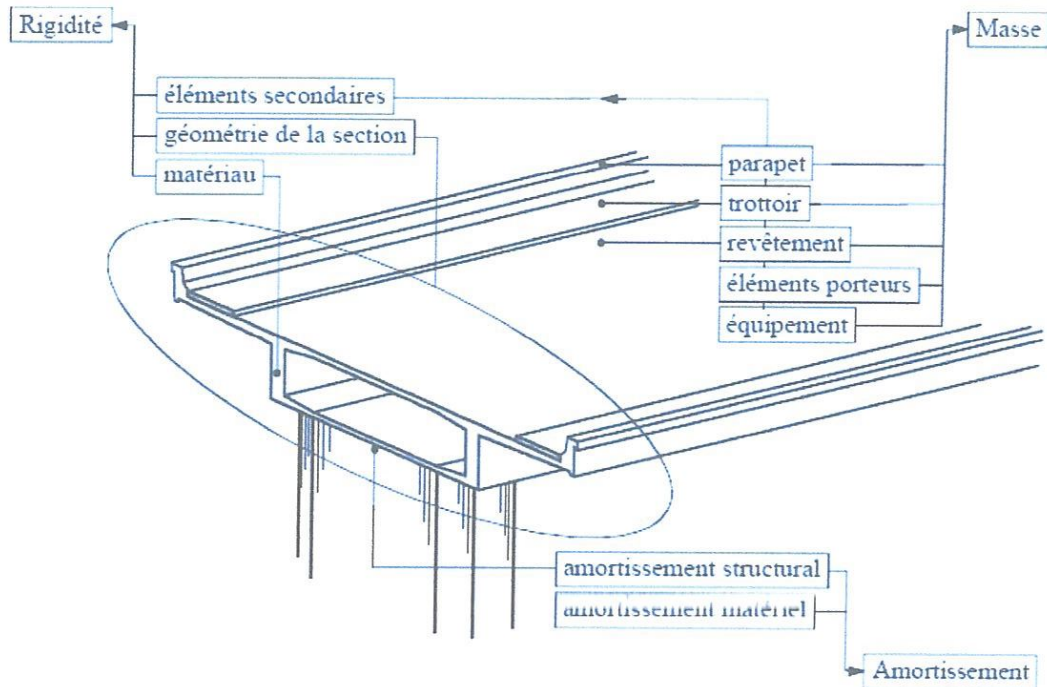


Figure 1.2 : Élément d'un pont

Les sections transversales sont regroupées dans quatre types (Tableau 1.1). Chaque type dépend de la portée des ponts. Les dalles ou les sections pleines caractérisent les ponts de courte portée, tels que les ponts-cadre, les passages inférieurs ou les ponts de portées inférieures à 25 m. Pour les travées plus longues, entre 30 et 70 m, les ponts dont la hauteur de la section est constante, sont bien adaptés. Les portées plus importantes sont franchies avec des ponts qui ont des sections à hauteurs variables [1].





Type de section transversale		Nombre [%]
Dalle		15
Section ouverte		45
Caisson à hauteur constante		28
Caisson à hauteur variable		12

Tableau 1.1: Types de sections transversales

1.4.3 Le profil de la chaussée

Le profil de la chaussée est un élément d'un grand intérêt pour l'étude du comportement dynamique d'un pont. On distingue le profil statique qui représente les irrégularités de la chaussée en fonction de la position et le profil dynamique qui correspond aux déflexions causées par les charges appliquées sur le pont. Le profil statique est déterminé par le profil en long de la route auquel est superposé les dénivellations aux appuis, les tassements différentiels des fondations ou les défauts d'alignement des travées, les contre flèches, les flèches dues aux effets différés et la rugosité du revêtement (Figure 1.3). Ces différentes composantes proviennent des tolérances de construction, des conditions d'exploitation ou des effets du temps. Les irrégularités du profil statique de la chaussée ont pour effet d'induire et d'entretenir les oscillations de la charge sur le système de suspension du véhicule.

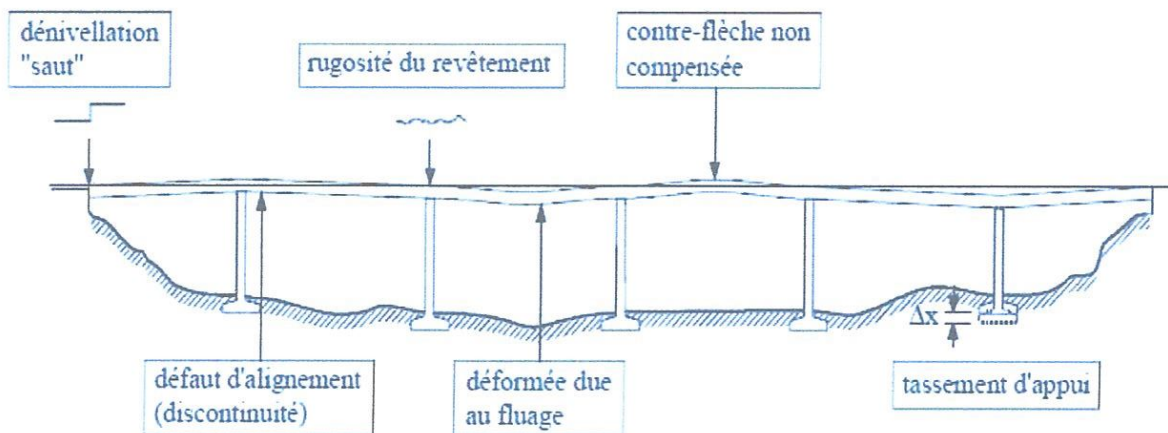


Figure 1.3 : Profil statique de la chaussée d'un pont

1.4.4 Les véhicules

Lors de l'étude du comportement dynamique des ponts, les poids lourds (camion), à cause de leur masse élevée, sont les véhicules qui retiennent le plus l'attention. La connaissance de leur comportement dynamique est donc essentielle.

La géométrie des poids lourds définit le nombre et l'espacement des essieux et influence la répartition des masses. Ces paramètres déterminent l'intensité et la position des charges statiques appliquées sur l'ouvrage.

La suspension d'un camion est caractérisée par sa rigidité et son amortissement. On distingue deux systèmes de suspension : les systèmes pneumatiques et les systèmes composés de lames d'acier. Les suspensions à lames d'acier sont plus réponsives, mais la tendance actuelle est plutôt favorable aux systèmes pneumatiques qui sont opérationnels pour toutes intensités de l'amplitude des vibrations [1].

Le pneu est caractérisé par le nombre et la disposition des bandes de caoutchouc ainsi que la pression d'air de gonflage, ce qui influe sur la rigidité du pneu et l'amortissement

L'ensemble des paramètres cités (Figure 1.4) détermine les propriétés modales du véhicule, à savoir les modes et les fréquences associées qui composent les mouvements vibratoires du camion lorsque ce dernier roule sur une chaussée. Quatre types d'oscillations caractérisent le mouvement d'un véhicule [2]:

- Le bondissement : Le bondissement correspond au mouvement vertical de la masse du véhicule.
- Le tangage : Le tangage est le mouvement du véhicule autour d'un axe perpendiculaire à son axe longitudinal et ses effets sont couplés à ceux des oscillations verticales (bondissement).
- Le roulis : Le roulis représente le balancement de la masse du véhicule autour de son axe longitudinal et provient de l'effet de roulement.
- Le sautellement : Le sautellement caractérise le mouvement vertical des essieux.

Il faut également mentionner comme éléments importants, le nombre et la vitesse des véhicules circulant sur le pont. Le nombre de véhicules qui chargent simultanément l'ouvrage modifie le comportement vibratoire de ce dernier. La vitesse détermine la durée du régime de vibrations forcées auquel l'ouvrage est soumis.

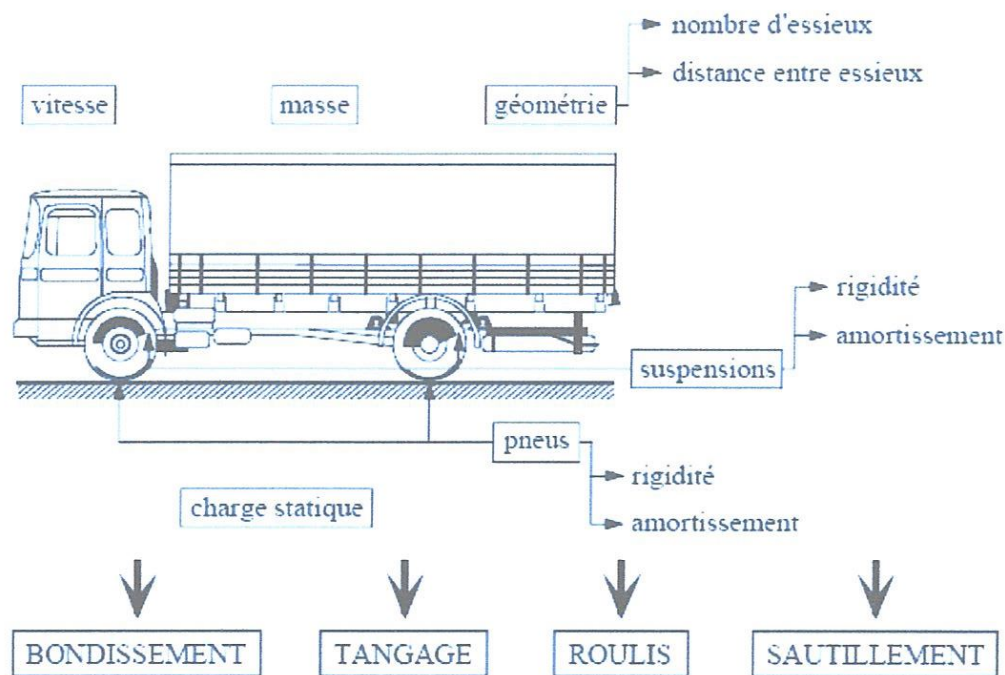


Figure 1.4 : Éléments des véhicules

1.5 Modèles de véhicules

Les modèles de véhicule se distinguent principalement par le type d'analyse (2 ou 3 dimensions), par le nombre de degrés de liberté, par la disposition des masses et par les lois de comportement des suspensions et des pneus. Les modèles sont décrits en considérant un ordre croissant des degrés de liberté.

1.5.1 Véhicules bidimensionnels

1.5.1.1 Modèle à un degré de liberté

Le véhicule remplacé par une seule masse mobile m_v lie par un ressort avec, en parallèle, un amortisseur [3]. C'est le modèle le plus simple qui peut être employé pour étudier l'interaction dynamique entre le véhicule mobile et le pont. Le seul degré de liberté correspondant le déplacement verticale Z_G de la masse du véhicule m_v .

k_{p1}, c_{p1} : sont respectivement la rigidité et l'amortissement qui modélisé la masse du véhicule.

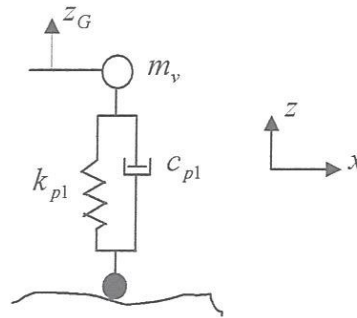


Figure 1.5 : système à un seul degré de liberté

1.5.1.2 Modèle à deux et quatre degrés de liberté

Le modèle à deux degrés de liberté permet de distinguer le châssis du véhicule (figure 1.6), ce dernier considéré comme un corps rigide posé sur deux ressorts avec, en parallèle, un amortisseur visqueux [4], [5]. D'autres auteurs [6] ont amélioré ce modèle en suspendant un corps rigide sur deux essieux dont les masses sont indépendantes du corps rigide et où les suspensions et les pneus sont représentés. Le système forme un modèle de véhicule à 4 degrés de liberté (figure 1.7) qui sont :

Z_G, θ : correspondant au bondissement et tangage du corps rigide respectivement.

Z_1, Z_2 : déplacements verticaux des masses des roues avec essieux m_1 et m_2 respectivement.

k_{s_i}, c_{s_i} : rigidité et amortissement dans la suspension i du véhicule.

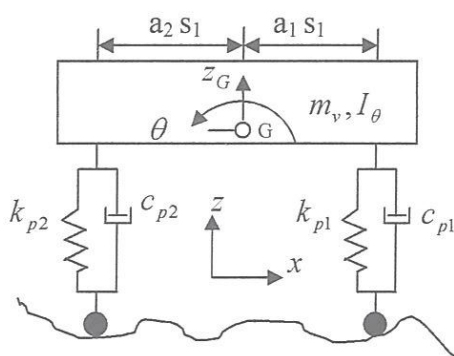


Figure 1.6 : Modèle bidimensionnel à 2 D.D.L

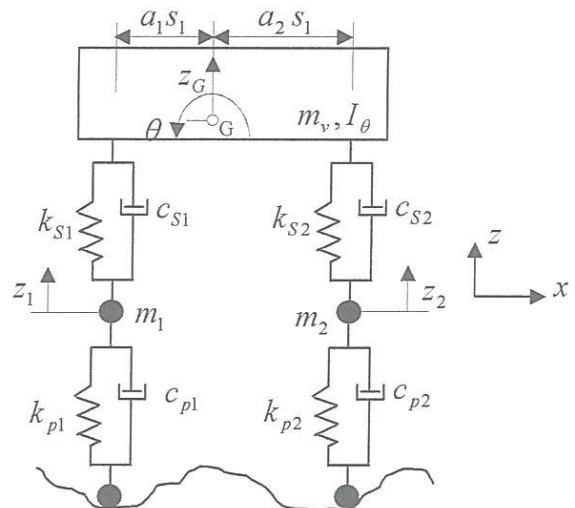


Figure 1.7 : Modèle bidimensionnel à 4 D.D.L

1.5.2 Véhicules tridimensionnels

1.5.2.1 Modèle à sept degrés de liberté

Le modèle de véhicule à sept degrés de liberté est constitué du châssis considéré comme un corps rigide de masse m_v posé sur des suspensions (figure 1.8). Ce modèle de véhicule, semblable à celui utilisé dans la référence [7] et aussi semblable à celui décrit dans la référence [8]. Le système de suspension est constitué par un ressort avec en parallèle un amortisseur. Les masses m_i qui représentent la masse des roues, des essieux, de la transmission et du mécanisme de direction du véhicule. Les pneus sont modélisés par une combinaison en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur visqueux. Les déplacements verticaux du corps du véhicule sont décrits par trois variables correspondants au déplacement vertical (bondissement ou Z_G), rotation autour de l'axe transversal (tangage ou θ), et rotation autour de l'axe longitudinal (roulis ou α). Le déplacement vertical de chaque masse m_i est exprimé par les variables Z_i où $i = 1$ à 4.

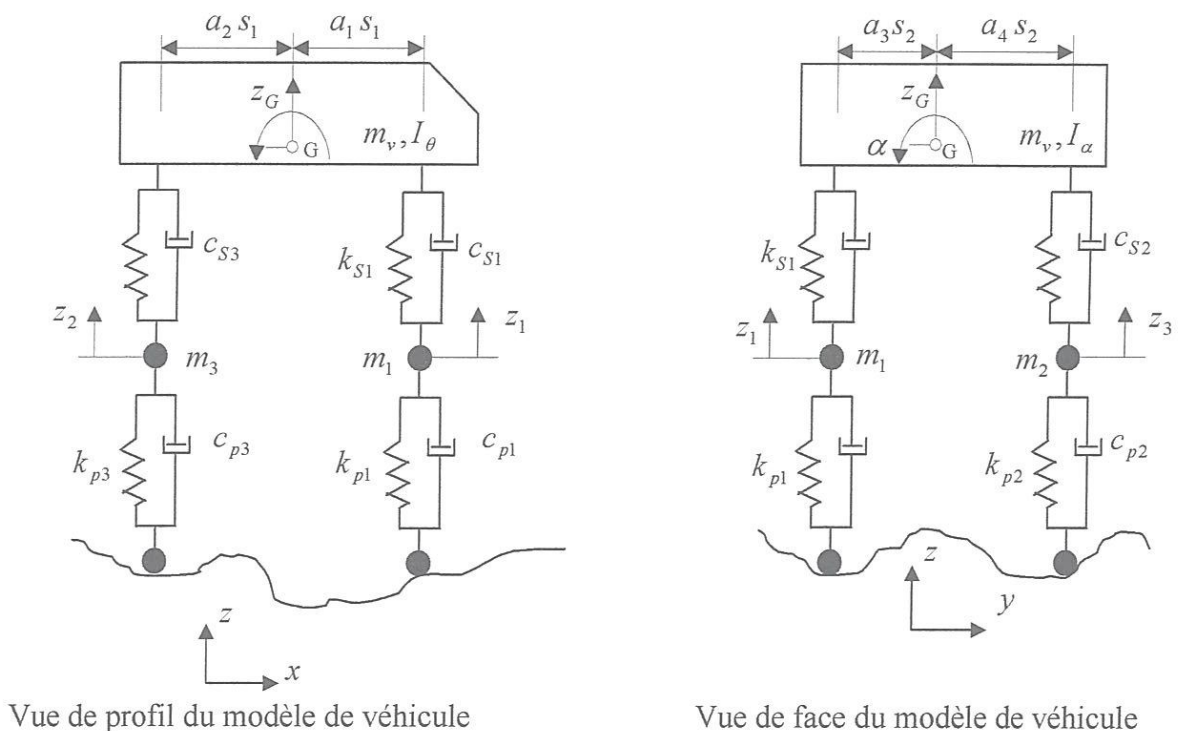


Figure 1.8 : modèle tridimensionnel à 7 degrés de liberté

1.5.2.2 Modèle à 11 degrés de liberté

Un camion semi-remorque à trois essieux simples, est modélisé avec 11 degrés de liberté [2]. Ce modèle tridimensionnel comporte 8 masses représentant le tracteur, la remorque et les deux essieux du tracteur ainsi que celui de la remorque (figure 1.9). Comme dans les modèles précédents, la suspension et les pneus des roues sont modélisés par une combinaison en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur visqueux. Dans ce modèle la cabine du camion est décrite par trois degrés de liberté (Z_{G1}, α_1 et θ_1), le remorque est décrit par deux degrés de liberté (Z_{G2}, θ_2). Le déplacement verticale de chaque masse m_i est exprimé par les variables Z_i où $i = 1$ à 6.

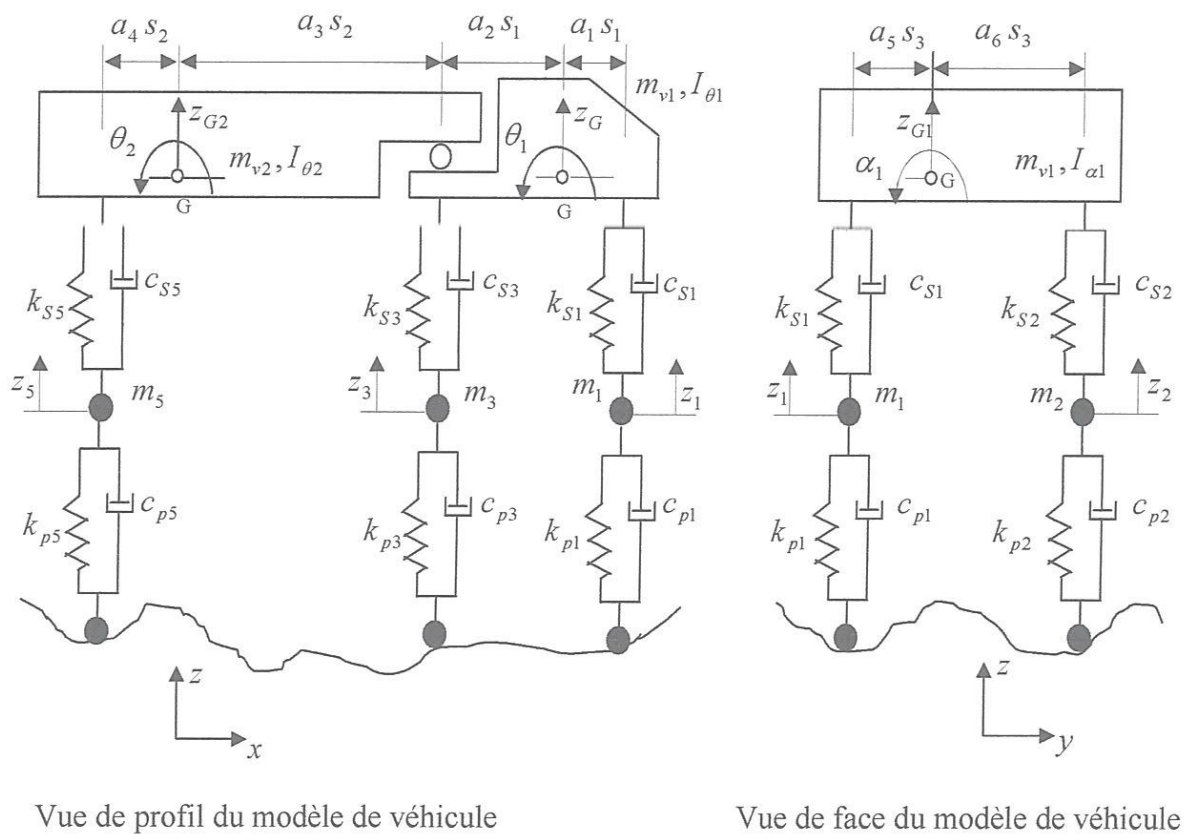


Figure 1.9 : modèle tridimensionnel à 11 degrés de liberté

1.6 Systèmes de suspensions et de liaisons à essieux tandem et tridem

Dans la plupart des modèles des véhicules, les essieux tandem d'un camion ou les essieux tridem d'une remorque sont considérés indépendants les uns des autres, bien que ces configurations d'essieux soient conçues avec des éléments de liaison pour répartir les charges entre les essieux [9].

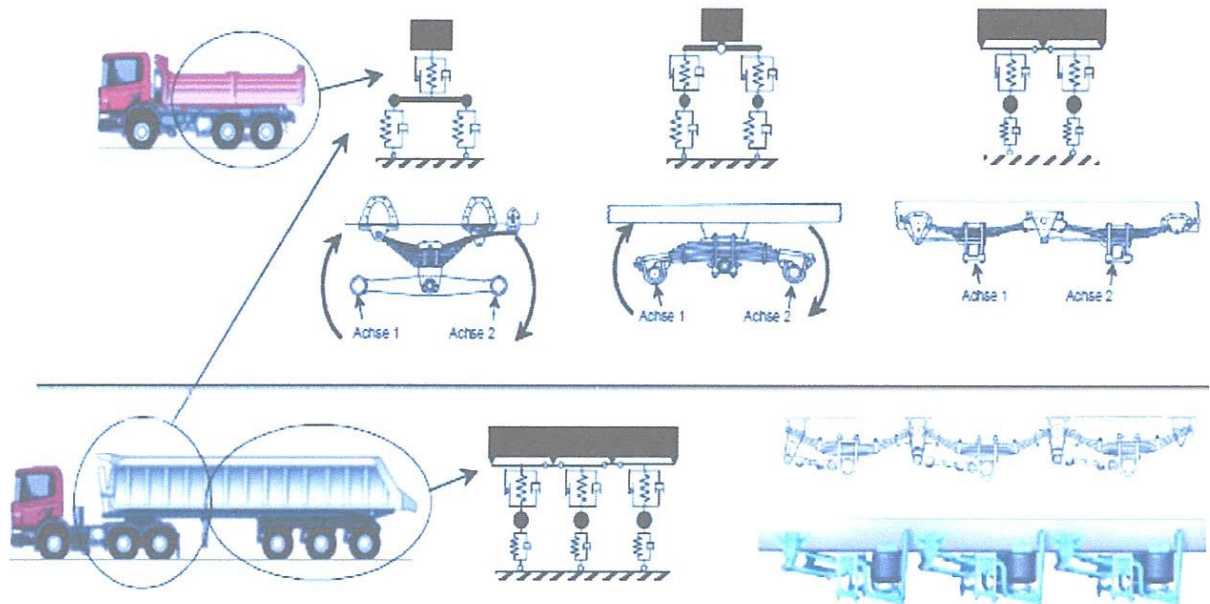


Figure 1.10 : Modèles des camions à essieux tandem et tridem

Plusieurs configurations d'essieux tandem existent pour équiper les camions simples, les tracteurs des semi-remorques ou les remorques. Deux types avec des suspensions à lames d'acier sont retenus pour le camion simple à trois essieux (figure 1.11).

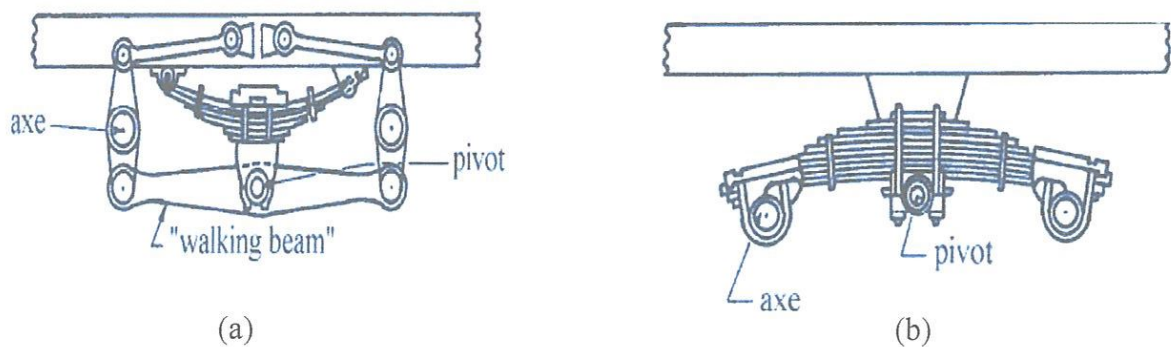


Figure 1.11 : Systèmes de suspensions des essieux tandem

Pour le premier type d'essieux tandem (Figure 1.11.a), le pivot se déplace essentiellement verticalement par rapport au châssis du véhicule et ce mouvement dépend de la flexibilité de la suspension. Dans le modèle (Figure 1.12), ce point est lié au corps du véhicule par un ressort représentant la suspension à laquelle un amortisseur visqueux est ajouté en parallèle. Les essieux du tandem de masse m_i sont attachés à chacune des extrémités de la poutre pivotante (walking beam) dont la masse est confondue à celle des essieux. Les pneus des roues de chaque essieu sont modélisés, par un montage en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur visqueux.

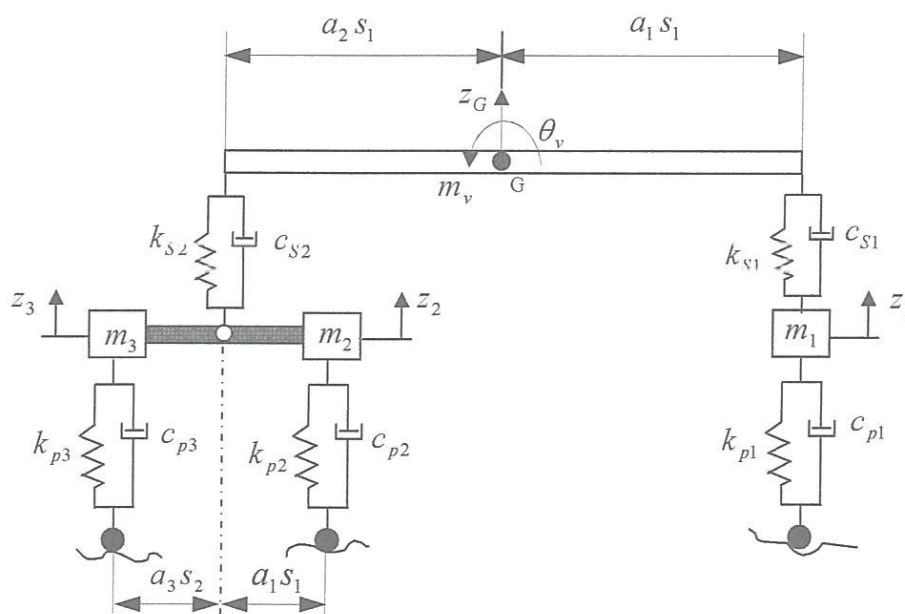


Figure 1.12 : Premier modèle de camion à trois essieux

Dans le deuxième type d'essieux tandem (Figure 1.11.b), la suspension et la liaison constituent un seul élément aux extrémités duquel sont fixés les axes. Le mouvement de chaque essieu par rapport au châssis est un mouvement de rotation sans déformation autour du pivot. La rotation de l'ensemble est représentée par le mouvement d'une barre pivotante infiniment rigide de masse m_L attachée à l'extrémité du corps rigide du véhicule (Figure 1.13). La flexion de chacun des porte-à-faux formant la suspension est modélisée par un ressort et un amortisseur visqueux liés à chaque extrémité de la barre pivotante et aux masses m_i indépendantes des deux essieux. Comme dans le modèle précédent, les pneus des roues de chaque essieu sont représentés par un ressort et un amortisseur visqueux mis en parallèle.

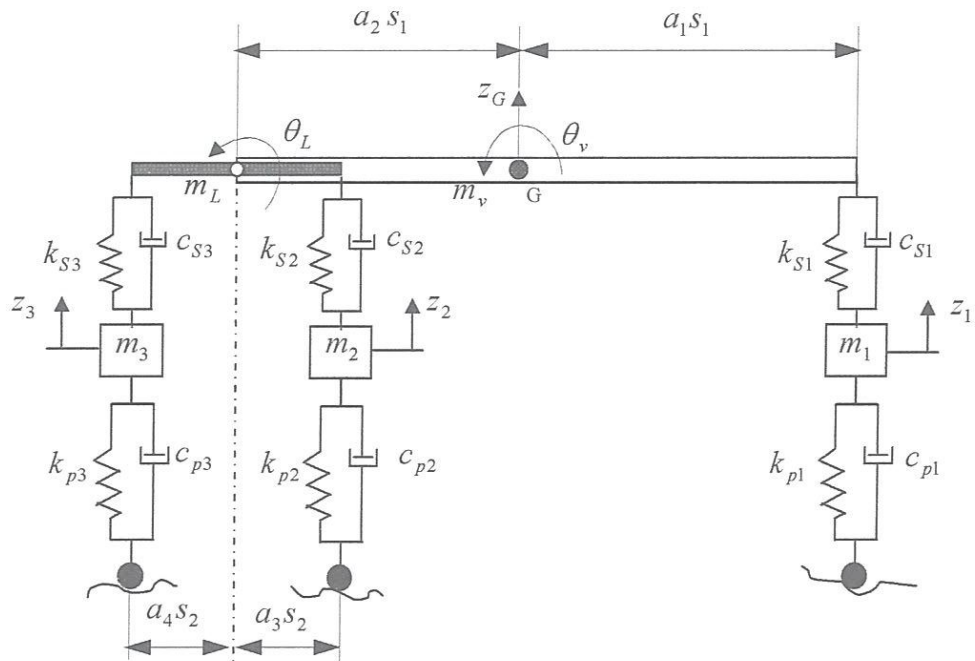


Figure 1.12 : Deuxième modèle de camion à trois essieux

1.7 Interaction des éléments contribuant au phénomène de vibration

Plusieurs paramètres décrits dans les paragraphes précédents n'ont pas seulement une influence directe sur le comportement dynamique des ponts traversés par des véhicules, mais, de plus, ils interviennent en interaction avec d'autres facteurs.

Suivant la valeur du rapport des masses défini par la masse totale du véhicule divisée par la masse totale de la superstructure, le contenu en fréquence des vibrations du pont change dans le temps, car la mobilité des charges fait varier la distribution des masses du système pont + véhicule. Si l'amplitude des oscillations de la masse du véhicule est grande, la sensibilité de la réponse du pont à la variation du rapport des masses dépend aussi du rapport des fréquences. Ce rapport est exprimé par la fréquence des oscillations verticales du véhicule divisée par la fréquence fondamentale du pont. Des vibrations de grandes amplitudes sont observées en cas de résonance, lorsqu'une force perturbatrice sollicite un système vibratoire avec une fréquence égale à celle du système. Dans le cas des ponts, il est plus approprié de parler d'un phénomène de quasi-résonance, car la quantité d'énergie transmise au pont n'est pas

infinie et la vibration forcée ne dure pas suffisamment longtemps pour que la résonance se développe.

L'influence de la vitesse est indissociable de l'espacement des essieux du véhicule et du profil de la chaussée. La vitesse représente le moyen par lequel la chaussée devient la force perturbatrice du véhicule. La vitesse et la rugosité de la chaussée sont les paramètres qui privilégient les mouvements des véhicules selon un mode plutôt qu'un autre. La vitesse du véhicule associée à l'espacement des essieux détermine la fréquence d'application des charges sur un élément structural. Différentes valeurs de cette fréquence peuvent être déterminées pour un véhicule constitué de plusieurs essieux. Pour de faibles vitesses, l'espacement des essieux tandem doit être considéré, alors que pour des vitesses plus élevées, l'espacement de base, en considérant le tandem comme un seul essieu, devient plus important.

1.8 Définition et importance du facteur d'amplification dynamique

Le facteur d'amplification dynamique est une valeur qui majore les effets statiques d'un pont causés par la charge statique d'un véhicule, pour tenir compte des effets dynamiques provoqués par le passage de ce véhicule. Cette approche revient à considérer les effets dynamiques comme des effets statiques supplémentaires.

Suivant les auteurs et suivant les pays, la désignation et la définition du facteur d'amplification dynamique est quelque peu différente, bien que l'objectif commun soit de fournir une valeur qui permette de considérer les effets dynamiques liés au trafic pour conserver le caractère statique de l'analyse des ponts. Le terme de facteur d'amplification dynamique est le plus répandu et est défini de la manière suivante:

Amplification Dynamique:

$$AD = \frac{R_{dyn} - R_{sta}}{R_{sta}} \quad (1.1)$$

Où R_{dyn} : réponse dynamique maximum,

R_{sta} : réponse statique maximum.

$$R_{dyn} = R_{sta}(1 + AD) \quad (1.2)$$

$$\text{Facteur d'amplification dynamique : } FAD = 1 + AD \quad (1.3)$$

Par conséquent, le rapport entre la réponse dynamique et la réponse statique qui représente le facteur d'amplification dynamique, est très

Souvent utilisé:

$$FAD = \frac{R_{dyn}}{R_{sta}} \quad (1.4)$$

La notion de facteur d'impact ou d'incrément dynamique exprimé en pour-cent est également utilisée dans la littérature:

$$I(\%) = \left(\frac{R_{dyn}}{R_{sta}} \right) \times 100\% \quad (1.5)$$

1.9 Synthèse bibliographique

Plusieurs chercheurs modélisent les dalles de roulement des ponts par des plaques minces isotropes ou orthotropes et les véhicules par des systèmes dynamiques mobiles. Le but est d'étudier les effets dynamiques provoqués par le trafic routier sur les ponts afin de déterminer les facteurs d'amplification dynamique qui majorent les effets statiques utilisés pour la vérification des états limites des dalles de roulement des ponts. N.Yagiz et L.E.Sakman [10], ont étudié les vibrations transversales d'une dalle de roulement d'un pont routier modélisé par une plaque rectangulaire isotrope, simplement appuyée. Le véhicule est modélisé par un modèle dynamique à 7 degré de liberté. Les équations de mouvement sont obtenues en utilisant les équations de Lagrange. L'intégral de convolution est utilisé pour déterminer les solutions des équations dérivées. Les auteurs ont étudié l'influence de la vitesse de roulement du véhicule sur les vibrations au centre de la dalle du pont. E. Esmailzadeh et N. Jalili [11], ont étudié l'interaction dynamique pont-véhicule d'un pont traversé par un véhicule mobile. Ce dernier est modélisé par un système dynamique à 6 degré de liberté et le pont est modélisé par une poutre équivalente d'Euler-Bernoulli. D'après les résultats obtenus pour différentes vitesses de roulement du véhicule, les auteurs ont démontré que la réponse dynamique maximale se produit à la proximité de la mi-travée du pont, alors que le moment de flexion maximal se produit à 20 % du point de mi-travée.

Marchesiello et al. [8], présentent une approche analytique au problème de l'interaction dynamique pont-véhicule. Le pont est modélisé par une plaque rectangulaire isotrope multi-travées, le véhicule est modélisé par un système dynamique à sept degrés de liberté qui se déplace à une vitesse constante. La réponse dynamique du pont est obtenue par l'application de la méthode modale avec la prise en compte des modes de flexion et de torsion négligés généralement dans la littérature. Les fréquences et modes propres du pont sont calculés par la méthode de Rayleigh-Ritz. Sur la base des modèles analytiques, un exemple d'application numérique d'un pont à trois travées est présenté.

Green et Cébon [12], ont modélisé un pont par une plaque isotrope simplement appuyée sur deux bords et libre sur les deux autres bords. Le véhicule traversant le pont est modélisé soit par une force, soit par un système dynamique mobile à deux et quatre degrés de liberté. La méthode modale et l'intégrale de convolution sont utilisées pour déterminer la solution de l'équation du mouvement qui tient compte de l'amortissement visqueux du pont.

Chompooming et Yener [13], ont présenté une formulation générale par éléments finis et un algorithme de solution pour une analyse dynamique relativement précise des problèmes d'interaction pont-véhicule avec la prise en compte des irrégularités de la chaussée. Des exemples numériques illustrant l'influence des irrégularités de la chaussée et la vitesse de véhicule sur la réponse dynamique du pont sont présentées pour montrer la validité et l'efficacité de la méthode proposée.

Zhu et Law [7], ont modélisé un pont routier multi-travées par une plaque rectangulaire orthotrope avec des appuis intermédiaires rigides. Le véhicule est modélisé par un système dynamique tridimensionnel H20-44 à sept degrés de liberté conformément à la norme AASHTO : American Association of State Highway and Transportation Officials. La méthode proposée pour analyser ce problème est basée sur une formulation lagrangienne du système de pont-véhicule qui est résolu avec la théorie des plaques orthotropes et la technique de superposition modale. Les auteurs ont étudié l'influence de la position du chemin de roulement du véhicule sur la réponse

dynamique du pont ainsi que l'influence de la vitesse de roulement et les irrégularités de la chaussée sur le facteur d'amplification dynamique du pont.

Une étude récente sur le comportement vibroacoustique d'un pont routier multi-travées traversé par véhicule mobile à plusieurs degrés de liberté a été présentée par Rezaigui. A. W [14], dans cette étude, le tablier du pont est modélisé par une plaque orthotrope équivalente multi-travées et le véhicule est modélisé par un système dynamique à sept degrés de liberté. L'approche modale couplée à une intégration numérique par la méthode de Newmark sont utilisées pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicule. La résolution de ces équations s'effectue à l'aide d'un algorithme itératif d'une manière découplée. Les fréquences propres du pont sont déterminées par l'approche modale et le code de calcul éléments finis I-DEAS. Deux exemples numériques sont présentés et validés.

Chapitre 2

Modélisation numérique du phénomène de l'interaction dynamique pont-véhicule

2.1 Introduction

Le phénomène de l'interaction dynamique pont-véhicule, lors du passage d'un véhicule sur un pont, est très complexe car plusieurs facteurs entre en jeu. Les facteurs importants intervenant dans l'interaction dynamique pont-véhicule qu'on doit les tenir compte lors de la modélisation sont : la dalle de roulement du pont, le véhicule comme source d'excitation et l'état de la chaussée comme interface entre le véhicule et la dalle de roulement du pont.

Dans ce chapitre, la dalle de roulement du pont est modélisée par une plaque mince orthotrope et multi-travées. Le véhicule est modélisé par plusieurs modèles à deux et à trois essieux en deux et en trois dimensions. Pour décrire correctement le comportement dynamique du véhicule, deux variantes avec des suspensions à essieux tandem sont retenues. Les irrégularités de la chaussée sont modélisées par une fonction caractérisée par un coefficient de rugosité spectral et une variable aléatoire. Nous avons utilisé la méthode modale pour résoudre l'équation du mouvement de la dalle de roulement du pont. Les équations du mouvement des différents modèles du véhicule sont établies en appliquant le principe des travaux virtuels. L'intégration numérique des différentes équations du mouvement découplées s'effectue par la méthode de Newmark avec un processus de calcul itératif.

2.2 Modélisation de la dalle de roulement du pont

La dalle de roulement du pont est modélisée par une plaque rectangulaire orthotrope, multi-travées, simplement appuyée en $x = 0$ et $x = l$ et libre en $y = 0$ et $y = b$. (figure 2.1). Elle a un comportement élastique linéaire et les effets secondaires (cisaillement et inertie de rotation) sont négligés. Les appuis intermédiaires sont linéaires, rigides et orthogonaux aux bords libres de la dalle. Vu que la longueur et la largeur de la dalle du pont sont beaucoup plus grandes par rapport à son épaisseur, la théorie des plaques minces est utilisée.

L'équation du mouvement en flexion pure qui régie le comportement vibratoire de la dalle de roulement du pont s'écrit [15] :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \delta(x-x_k(t), y-y_k) \quad (2.1)$$

Dans l'équation (2.1), $D_x = E_x h^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ est la rigidité de flexion selon la direction x , $D_y = E_y h^3 / 12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$ est la rigidité de flexion selon la direction y , $H = \nu_{xy} D_y + 2D_{xy}$ est la rigidité de flexion équivalente, $\bar{m} = \rho h$ est la masse par unité de surface de la plaque, c est le coefficient d'amortissement visqueux de la plaque, F_{pk}^{int} est la force d'interaction dynamique entre la $k^{ème}$ roue du véhicule et la dalle de roulement, $(x_k(t), y_k)$ est la position de la $k^{ème}$ force d'interaction dynamique sur la dalle de roulement, ν_{xy} et ν_{yx} sont les coefficients de Poisson selon les directions x et y respectivement, $D_{xy} = G_{xy} h^3 / 12$ est la rigidité de torsion, G_{xy} est le module de cisaillement, E_x et E_y sont les modules d'élasticité d'Young selon les directions x et y respectivement, δ est l'opérateur de Dirac.

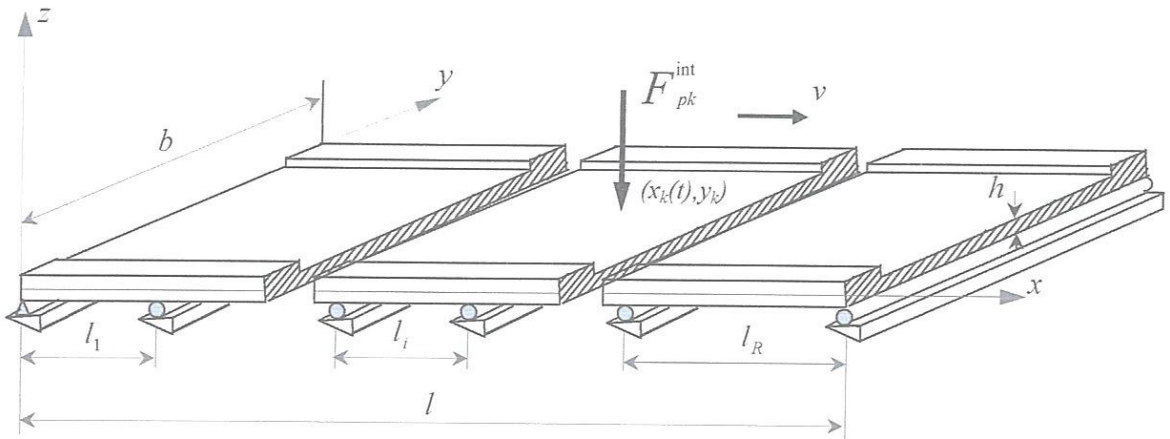


Figure 2.1 : Dalle de roulement modélisée par une plaque orthotrope multi-travées.

La résolution de l'équation du mouvement (2.1) est menée par la méthode de superposition modale. On décompose le déplacement vertical $w(x, y, t)$ de la dalle du pont dans la base modale de la manière suivante :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x, y) q_{ij}(t) \quad (2.2)$$

Où $\phi_{ij}(x, y)$ sont les modes propres d'une plaque mince orthotrope et multi-travées auxquelles sont associées les pulsations propres ω_{ij} et $q_{ij}(t)$ sont les coordonnées généralisées.

Remplaçant l'expression (2.2) dans l'équation de mouvement (2.1), puis multipliant les deux membres par $\phi_{kl}(x, y)$ et intégrons sur toute la surface du pont, on obtient :

$$\begin{aligned} & \iint_S \bar{m} \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij}(x, y) \ddot{q}_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \iint_S c \sum_{i,j=1}^{n,m} \phi_{ij}(x, y) \dot{q}_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \\ & \iint_S D_x \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + 2 \iint_S H \frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{ij}}{\partial y^2} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy + \\ & \iint_S D_y \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} q_{ij}(t) \phi_{kl}(x, y) dx dy = - \iint_S \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int} \phi_{kl} \delta(x - x_k(t), y - y_k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

L'orthogonalité des modes propres permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{m} \phi_{ij}(x, y) \phi_{kl}(x, y) dx dy &= \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ M_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases} \\ \iint_S c \phi_{ij}(x, y) \phi_{kl}(x, y) dx dy &= \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ C_{ij} = 2\xi_{ij} \omega_{ij} M_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases} \\ \iint_S \left(D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right) \phi_{kl}(x, y) dx dy &= \begin{cases} 0 & \text{pour } ij \neq kl \\ \omega_{ij}^2 M_{ij} = K_{ij} & \text{pour } ij = kl \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Où ξ_{ij} sont les facteurs d'amortissement modaux visqueux de dalle du pont.

En tenant compte des relations d'orthogonalité (2.4), les termes dans (2.3), dont $ij \neq kl$ disparaissent et il reste (i, j) équations modales découplées :

$$M_{ij} \ddot{q}_{ij}(t) + C_{ij} \dot{q}_{ij}(t) + K_{ij} q_{ij}(t) = F_{ij}(t) \quad (2.5)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \iint_S \bar{m} \phi_{ij}^2(x, y) dx dy \\
 C_{ij} &= \iint_S c \phi_{ij}^2(x, y) dx dy = 2\xi_{ij} \omega_{ij} M_{ij} \\
 K_{ij} &= \iint_S \left(D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} \right) \phi_{ij}(x, y) dx dy = M_{ij} \omega_{ij}^2 \\
 F_{ij} &= - \iint_S \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{\text{int}} \delta(x - x_k(t), y - y_k) \phi_{ij}(x, y) ds \\
 &= - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{\text{int}} \phi_{ij}(x_k(t), y_k)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Les masses modales sont calculées dans l'annexe 2.

2.3 Détermination des fréquences et des modes propres de la dalle du pont

Comme nous avons utilisé la méthode modale pour décomposer le déplacement vertical de la dalle du pont, le calcul des fréquences et modes propres de cette dernière est nécessaire. L'équation du mouvement en vibration libre s'écrit :

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \tag{2.7}$$

En vibration libre, le déplacement vertical du pont peut s'exprimer par [8]:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \phi_{ij}(x, y) e^{J \omega_{ij} t} \tag{2.8}$$

Avec a_{ij} sont les amplitudes modales et $J = \sqrt{-1}$.

On remplace l'expression (2.8) dans l'équation (2.7), on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \left[D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} - \bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij} \right] e^{J \omega_{ij} t} = 0$$

Pour déterminer les fréquences et les modes propres de la dalle du pont, on doit donc résoudre l'équation spatiale suivante :

$$D_x \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \phi_{ij}}{\partial y^4} - \bar{m} \omega_{ij}^2 \phi_{ij} = 0 \tag{2.9}$$

Pour déterminer les fréquences et les modes propres, plusieurs auteurs [7,8] utilisent les modes propres des poutres comme fonctions d'approximation dans une formulation variationnelle de Rayleigh-Ritz. Ces auteurs décomposent $\phi_{ij}(x, y)$ comme étant le produit de deux fonctions admissibles $\varphi_i(x)$ et $\psi_j(y)$ qui sont respectivement les modes propres d'une poutre continue en appuis simples et les modes propres d'une poutre libre. Cependant, des centaines d'intégrales doivent être évalué pour calculer les matrices de masse et de rigidité pour résoudre le problème aux fréquences et modes propres. Dans la présente étude, on considère que selon la direction x , les modes propres de la dalle du pont sont celles d'une poutre continue en appuis simples et selon la direction y , les modes propres sont présentées par une fonction $h_{ij}(y)$ vérifiant les conditions aux limites d'une plaque aux bords libres $y = 0$ et $y = b$ du pont [14].

$$\phi_{ij}(x, y) = \varphi_i(x)h_{ij}(y) \quad (2.10)$$

Les modes propres d'une poutre multi-travées selon x sont (voire annexe 1) :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} A_{1i} \left(\sin(k_i x) - \frac{\sin(k_i l_1)}{\sinh(k_i l_1)} \sinh(k_i x) \right), & 0 \leq x \leq l_1, \\ A_{ri} \left(\sin \left(k_i \left(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) - \frac{\sin(k_i l_r)}{\sinh(k_i l_r)} \sinh \left(k_i \left(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) \right) \\ + B_{ri} \left(\cos \left(k_i \left(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) - \cosh \left(k_i \left(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) + \frac{\cosh(k_i l_r) - \cos(k_i l_r)}{\sinh(k_i l_r)} \sinh \left(k_i \left(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) \right), & \sum_{j=1}^{r-1} l_j \leq x \leq \sum_{j=1}^r l_j \quad r = 2, 3, \dots, R-1, \\ A_{Ri} \left(\sin(k_i (l-x)) - \frac{\sin(k_i l_R)}{\sinh(k_i l_R)} \sinh(k_i (l-x)) \right), & l - l_R \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2.11)$$

Remplaçons donc l'expression (2.10) dans l'équation (2.9), puis multiplions par $\varphi_i(x)$ et intégrons sur la longueur de la dalle du pont, on obtient :

$$D_y \frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} \int_0^l \varphi_i^2 dx + 2H \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} \int_0^l \varphi_i'' \varphi_i dx + (D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2) h_{ij} \int_0^l \varphi_i^2 dx = 0 \quad (2.12)$$

Divisons (2.12) par $D_y \int_0^l \varphi_i^2 dx$, on obtient :

$$\frac{d^4 h_{ij}}{dy^4} + \frac{2Hk_{1i}^2}{D_y} \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2} + \left(\frac{D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2}{D_y} \right) h_{ij} = 0 \quad (2.13)$$

Avec :

$$k_{1i} = \sqrt{\int_0^l \varphi_i'' \varphi_i dx / \int_0^l \varphi_i^2 dx} \quad (2.14)$$

Les intégrales qui apparaissent dans l'expression (2.14), sont présentées dans l'annexe 2.

La solution générale de l'équation différentielle (2.13) est sous la forme :

$$h_{ij}(y) = A_{ij} e^{s_{ij} y} \quad (2.15)$$

On remplace (2.15) dans (2.13), on obtient

$$s_{ij}^4 - \frac{2Hk_{1i}^2}{D_y} s_{ij}^2 + \frac{D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2}{D_y} = 0 \quad (2.16)$$

Les solutions de (2.16) sont :

$$\begin{aligned} s_1 &= \pm \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{Hk_{1i}^2 + \sqrt{H^2 k_{1i}^4 - D_y (D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2)}} = \pm r_{1ij} \\ s_2 &= \pm j \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{Hk_{1i}^2 - \sqrt{H^2 k_{1i}^4 - D_y (D_x k_i^4 - \bar{m} \omega_{ij}^2)}} = \pm jr_{2ij} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les nombres d'ondes r_{1ij} et r_{2ij} sont liés par les pulsations ω_{ij} . Afin d'alléger l'écriture, on omet les indices ij dans r_{1ij} et r_{2ij} . Remplacent (2.17) dans (2.15), on obtient :

$$h_{ij} = A_{1ij} e^{r_1 y} + A_{2ij} e^{-r_1 y} + A_{3ij} e^{jr_2 y} + A_{4ij} e^{-jr_2 y} \quad (2.18)$$

Ou A_{1ij} , A_{2ij} , A_{3ij} et A_{4ij} sont des constants d'intégration.

Les fonctions exponentielles peuvent être remplacées par des fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\begin{aligned} e^{\pm r_1 y} &= \operatorname{chr}_1 y \pm \operatorname{shr}_1 y \\ e^{\pm jr_2 y} &= \cos r_2 y \pm j \sin r_2 y \end{aligned} \quad (2.19)$$

On trouve :

$$h_{ij}(y) = A_{ij} \sin r_2 y + B_{ij} \cos r_2 y + D_{ij} \operatorname{sh} r_1 y + E_{ij} \operatorname{ch} r_1 y \quad (2.20)$$

A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} et E_{ij} sont des constantes d'intégration. Elles sont déterminées par l'application des conditions aux limites aux bords libres $y = 0$ et $y = b$. Sur ces bords, le moment fléchissant et l'effort tranchant sont nuls, alors :

$$\begin{aligned} D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0, t) + \nu_{yx} D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0, t) &= 0 \\ - \left(D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, 0, t) + (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, 0, t) \right) &= 0 \\ D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b, t) + \nu_{yx} D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, b, t) &= 0 \\ - \left(D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, b, t) + (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, b, t) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

En tenant compte des expressions (2.8) et (2.10), les conditions aux limites (2.21) prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} D_y \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(0) - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 h_{ij}(0) &= 0 \\ D_y \frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(0) - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) k_{1i}^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(0) &= 0 \\ D_y \frac{d^2 h_{ij}}{dy^2}(b) - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 h_{ij}(b) &= 0 \\ D_y \frac{d^3 h_{ij}}{dy^3}(b) - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) k_{1i}^2 \frac{dh_{ij}}{dy}(b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

En appliquant les conditions aux limites (2.22) à l'expression (2.20), on obtient le système suivant (on omet les indices dans r_{1ij} , r_{2ij} , α_{ij} , θ_{ij} , γ_{ij} , et χ_{ij}):

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & \theta \\ \gamma & 0 & \chi & 0 \\ \alpha \sin r_2 b & \alpha \cos r_2 b & \theta \operatorname{sh} r_1 b & \theta \operatorname{ch} r_1 b \\ \gamma \cos r_2 b & -\gamma \sin r_2 b & \chi \operatorname{ch} r_1 b & \chi \operatorname{sh} r_1 b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \\ E_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -D_y r_2^2 - \nu_{yx} D_x k_{1i}^2 \\
 \theta &= \bar{D}_y r_1^2 - \nu_{yx} \bar{D}_x k_{1i}^2 \\
 \gamma &= -D_y r_2^3 - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_2 k_{1i}^2 \\
 \chi &= D_y r_1^3 - (\nu_{yx} D_x + 4D_{xy}) r_1 k_{1i}^2
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

L'annulation du déterminant de la matrice du système (2.23) permet d'aboutir à l'équation aux fréquences propres suivante.

$$2\alpha\theta\gamma\chi(\cos r_2 b \operatorname{ch} r_1 b - 1) + (\theta^2 \gamma^2 - \alpha^2 \chi^2) \sin r_2 b \operatorname{sh} r_1 b = 0 \tag{2.25}$$

Pour chaque valeur de k_i ($i = 1, \dots, n$), on calcul la valeur de k_{1i} et à l'aide du logiciel Mathématique, on détermine les racines r_1 ou r_2 de l'équation aux fréquences (2.25). Les expressions (2.17) permettent de calculer les pulsations ω_{ij} . Pour déterminer les modes propres de la dalle du pont, on peut simplifier le système (2.23) en normant la première composante A_{ij} du vecteur inconnu à 1 ($A_{ij} = 1$). On aura donc quatre équations à trois inconnus. On choisissent trois équations parmi les quatre :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \theta \\ 0 & x & 0 \\ \alpha \cos r_2 b & \theta \operatorname{sh} r_1 b & \theta \operatorname{ch} r_1 b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{ij} \\ D_{ij} \\ E_{ij} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma \\ \alpha \sin r_2 b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

D'où on obtient les expressions des constantes B_{ij}, D_{ij}, E_{ij} :

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= \left(\alpha \sin r_2 b - \frac{\gamma\theta}{x} \operatorname{sh} r_1 b \right) / (\alpha \operatorname{ch} r_1 b - \alpha \cos r_2 b) \\
 D_{ij} &= -\frac{\gamma}{x} \\
 E_{ij} &= \left(-\alpha \sin r_2 b + \frac{\gamma\theta}{x} \operatorname{sh} r_1 b \right) / (\theta \operatorname{ch} r_1 b - \theta \cos r_2 b)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Donc les modes propres sont :

$$\phi_{ij}(x, y) = \phi_i(x) \{ \sin r_2 y + \bar{B}_{ij} \cos r_2 y + \bar{D}_{ij} \operatorname{sh} r_1 y + \bar{E}_{ij} \operatorname{ch} r_1 y \} \tag{2.28}$$

2.4 Modélisation du véhicule mobile

2.4.1 Généralités

Le modèle de véhicule à deux essieux est trop approximatif pour considérer correctement des camions à trois essieux avec des essieux tandem à l'arrière, car la disposition des charges est très grossière et le mouvement de tangage du tandem n'est pas représenté. Le but est donc d'utiliser des modèles de véhicule à trois axes avec des essieux tandem.

2.4.2 Conception des modèles

Pour des raisons de clarté et de simplicité, les développements des équations de mouvement sont effectués pour une représentation en deux dimensions des véhicules. L'extension vers la troisième dimension ne pose pas de difficultés particulières. Cette extension est présentée dans l'annexe 3.

2.4.2.1 Modèle de véhicule à deux essieux

Le véhicule à deux essieux est modélisé en deux dimensions par un système à quatre degré de liberté (figure 2.2). Le châssis du véhicule est considéré comme un corps rigide de masse m_v , posé sur des suspensions. Les masses inférieures m_i représentent la masse des roues et des essieux. Les pneus sont modélisés par une combinaison en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur visqueux. Les déplacements verticaux du corps du véhicule sont décrits par deux variables z_{v1}, z_{v2} . Le déplacement vertical de chaque masse m_i est exprimé par les variables $z_i, i = 1,2$.

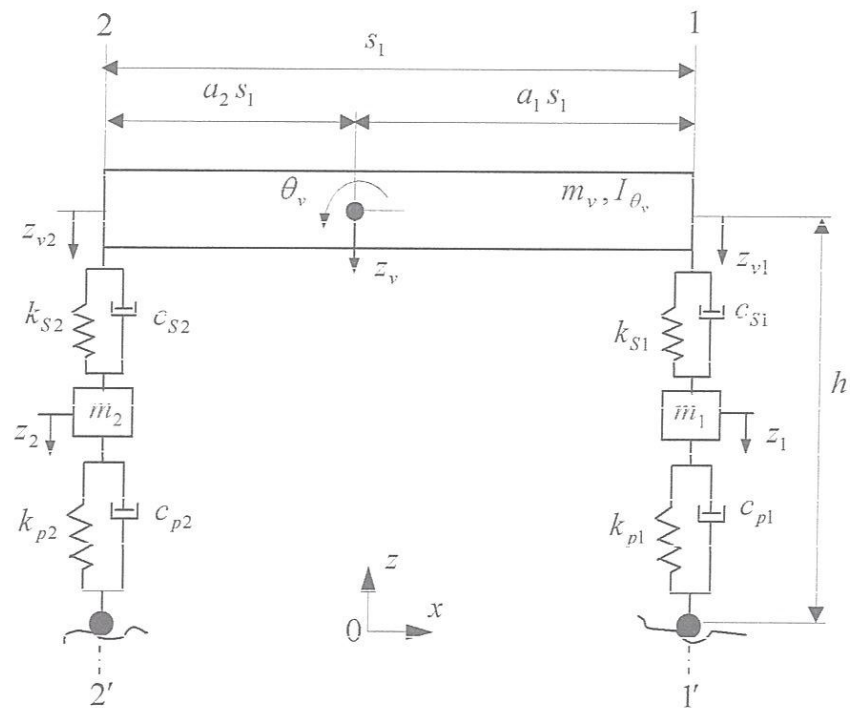


Figure 2.2 : Modèle en 2D du véhicule à deux essieux (4 D.D.L) [1]

2.4.2.2 Modèle de véhicule à trois essieux

Les deux modèles étudiés se basent sur le modèle de véhicule à deux essieux. Le système à 4 degrés de liberté modélisant le véhicule à deux essieux simples, à 4 variables indépendantes décrivant respectivement le mouvement vertical des deux essieux et des deux extrémités du corps du véhicule. Seule la partie arrière constituée par la masse de l'essieu, les suspensions et les pneus est modifiée.

Pour le premier type d'essieux tandem, le pivot se déplace essentiellement verticalement par rapport au châssis du véhicule et ce mouvement dépend de la flexibilité de la suspension. Dans le modèle (Figure 2.3), ce point est lié au corps du véhicule par un ressort représentant la suspension à laquelle un amortisseur visqueux est ajouté en parallèle. Les essieux du tandem de masse m_i sont attachés à chacune des extrémités de la poutre pivotante (walking beam) dont la masse est confondue à celle des essieux. Les pneus des roues de chaque essieu sont modélisés par un montage en parallèle d'un ressort et d'un amortisseur visqueux. Le champ de déplacements de ce modèle de véhicule est défini à l'instant t par 5 variables indépendantes. $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $z_v(t)$ et $\theta_v(t)$

Dans le deuxième type d'essieux tandem, la suspension et la liaison constituent un seul élément aux extrémités duquel sont fixés les axes. Le mouvement de chaque essieu par rapport au châssis est un mouvement de rotation sans déformation autour du pivot. La rotation de l'ensemble est représentée par le mouvement d'une barre pivotante infiniment rigide de masse m_L attachée à l'extrémité du corps rigide du véhicule (Figure 2.4). La flexion de chacun des porte-à-faux formant la suspension est modélisée par un ressort et un amortisseur visqueux liés à chaque extrémité de la barre pivotante et aux masses m_i indépendantes des deux essieux. Comme dans le modèle précédent, les pneus des roues de chaque essieu sont représentés par un ressort et un amortisseur visqueux mis en parallèle. Le champ de déplacements de ce modèle de véhicule est défini à l'instant t par 6 variables indépendantes: $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $z_v(t)$, $\theta_v(t)$ et $\theta_L(t)$

2.4. 3 Démarche

La démarche conduisant aux équations de mouvement des différents modèles de véhicule est similaire. Les éléments essentiels du développement de ces modèles sont décrits pour aboutir finalement aux équations de mouvement du système. Dans l'annexe 3, les équations de mouvement sont résumées sous la forme des matrices de masse $[M_v]$, d'amortissement $[C_v]$, de rigidité $[K_v]$ et du vecteur force $\{F\}$ pour les trois modèles en deux dimensions présentés ainsi que pour les modèles correspondants en trois dimensions.

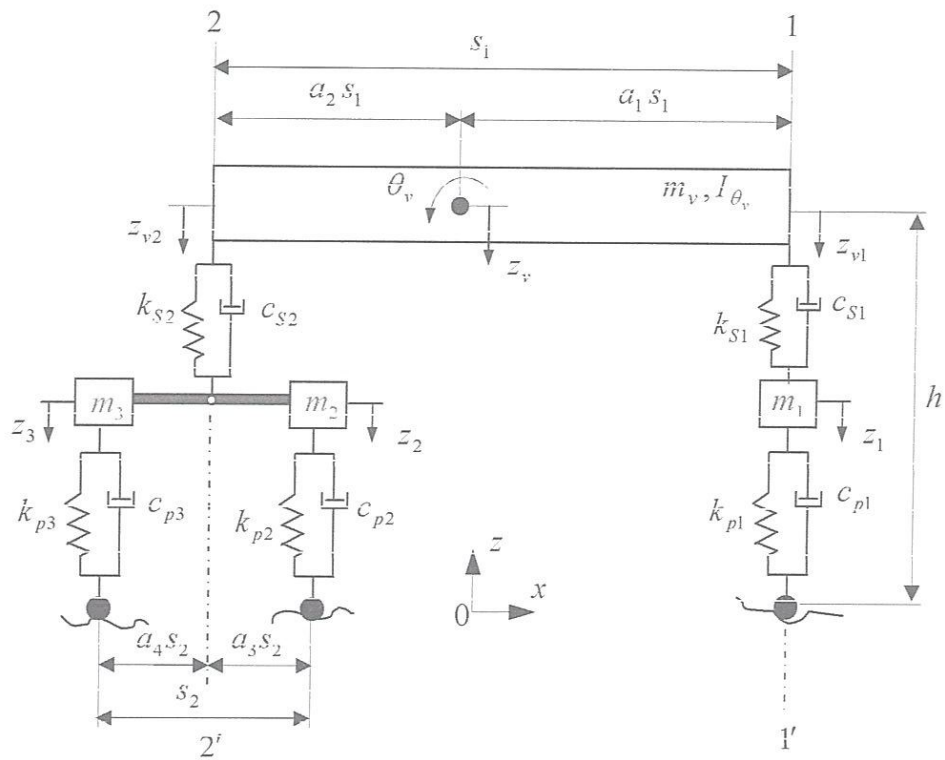


Figure 2.3 : Premier type du modèle à essieux tandem en 2D du véhicule à trois essieux (5 D.D.L), [1]

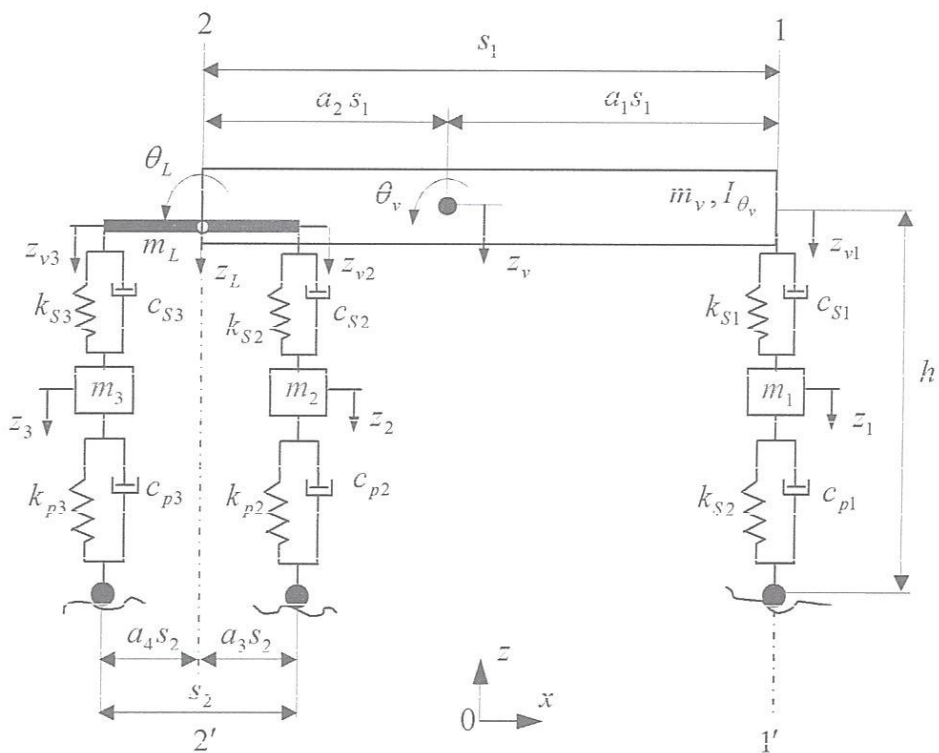


Figure 2.4 : Deuxième type du modèle à essieux tandem en 2D du véhicule à trois essieux (6 D.D.L), [1]

3.4.4 Hypothèses de base

Les hypothèses suivantes constituent la base du développement mathématique des trois modèles de véhicule, ces hypothèses sont utilisées par Broquet [1] :

1. Les pneus du véhicule restent en contact permanent avec la chaussée. Les déplacements des points de contact s'expriment par:

$$w_i(t) = w(x_i(t), y_i, t) + r(x_i(t), y_i) \quad (2.29)$$

Où $w(x_i(t), y_i, t)$ est le déplacement vertical du pont au point de contact de coordonnées x_i et y_i à l'instant t et $r(x_i(t), y_i)$ est la cote du profil de la chaussée au point x_i et y_i .

2. La rotation θ_v du bloc rigide du véhicule est considérée petite :

$$\begin{cases} \cos \theta_v \cong 1 \\ \sin \theta_v \cong \theta_v \end{cases} \quad (2.30)$$

3. Les axes 1-1' et 2-2' conservent leur orientation par rapport au véhicule (figure 2.5).

$$x_v = x_1 - a_1 s_1 + h \theta_v \quad (2.31)$$

Les équations de mouvement des véhicules sont établies en appliquant le principe des travaux virtuels qui stipule que pour tout champ de déplacements admissible, le travail effectué par les efforts internes et externes est nul. Dans le groupe des efforts internes, on compte les forces axiales générées dans les suspensions et les pneus ainsi que toutes les forces d'inertie. Le groupe des efforts externes comprend les forces de gravités.

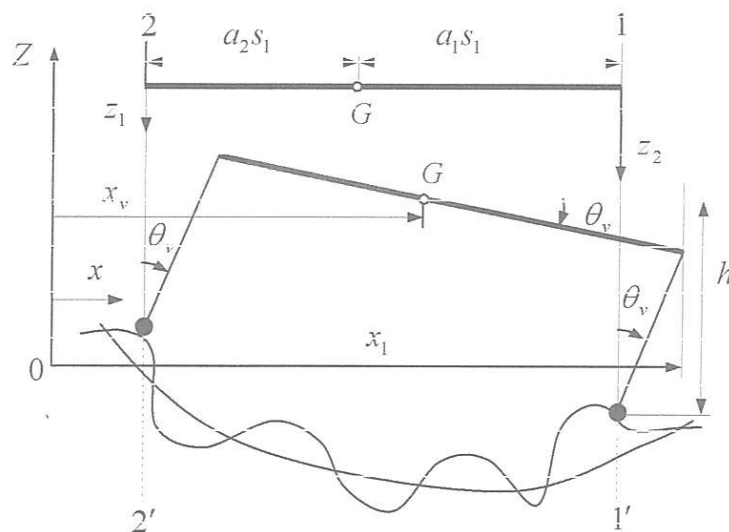


Figure 2.5 : Position du centre de gravité du véhicule

2.4.5 Mise en équations du modèle de véhicule à 4 D.D.L

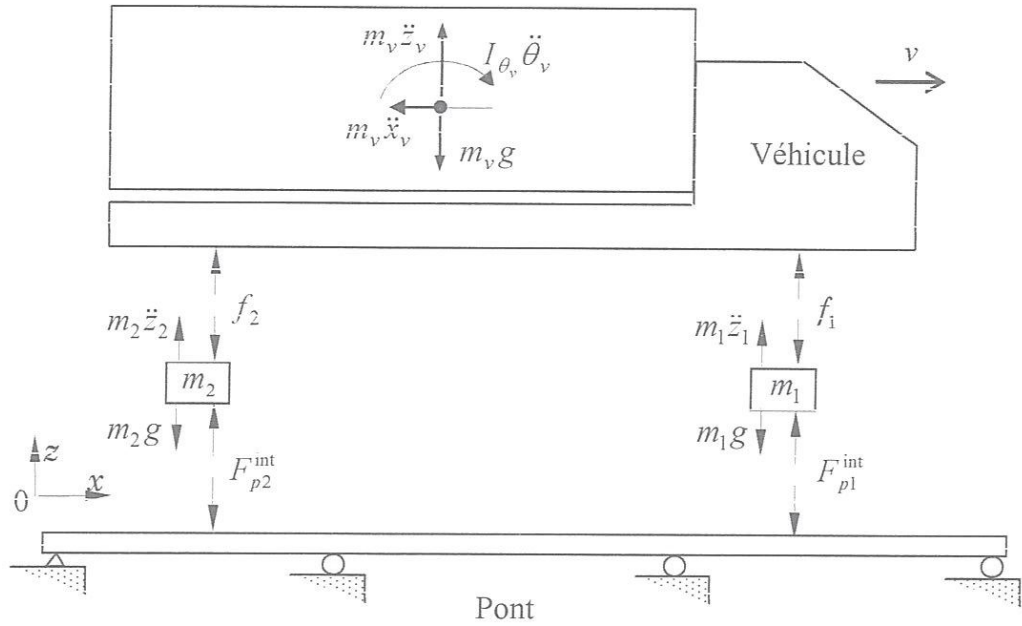


Figure 2.6 : Schéma d'équilibre des forces et des moments du modèle à 4D.D.L

L'équation des travaux virtuels appliquée au modèle à 4D.D.L prend la forme suivante:

$$W = \sum_{i=1}^2 f_i \delta \Delta_{si} + \sum_{j=1}^2 [F_{pj}^{int} \delta \Delta_{pj} + m_j \ddot{z}_j \delta z_j + m_j g \delta z_j] + [m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_v \ddot{x}_v \delta x_v + I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v \delta \theta_v] \quad (2.32)$$

Où les différents termes sont définis comme suit :

- W est le travail virtuel total du véhicule
- f_i, F_{pj}^{int} sont les forces dans les suspensions et dans les pneus
- m_j sont les masses des roues avec essieux
- m_v, I_{θ_v} sont respectivement la masse et le moment d'inertie de la masse du corps du véhicule
- g est l'accélération de la gravité
- $\Delta_{si}, \delta \Delta_{si}, \Delta_{pj}, \delta \Delta_{pj}$ sont respectivement les déplacements relatifs et les déplacements relatifs virtuels des suspensions et des pneus

$z_j, \delta z_j$ sont respectivement les déplacements et les déplacements virtuels des pneus selon l'axe vertical
 $x_v, \delta x_v, z_v, \delta z_v$ sont respectivement les déplacements et les déplacements virtuels du corps du véhicule selon l'axe horizontal et vertical
 $\theta_v, \delta \theta_v$ sont respectivement la rotation et la rotation virtuelle du corps du véhicule

La rotation θ_v et les déplacements x_v et z_v sont exprimés en fonction des variables cinématiques z_{vi} pour rendre homogène l'ensemble des variables du modèle .

$$\theta_v = \frac{z_{v2} - z_{v1}}{s_1}$$

$$x_v = x_1 + \frac{h}{s_1} (z_{v2} - z_{v1}) - a_1 s_1 \quad (2.33)$$

$$z_v = a_1 z_{v2} + a_2 z_{v1}$$

Les déplacements relatifs des suspensions Δ_{si} et des pneus Δ_{pj} sont donnés par:

$$\Delta_{si} = z_{vi} - z_i \quad i = 1,2$$

$$\Delta_{pj} = z_j - w(x_j, y_j, t) - r(x_j, y_j) \quad j = 1,2 \quad (2.34)$$

Les déplacements relatifs virtuels correspondants $\delta \Delta_{si}$ et $\delta \Delta_{pj}$ sont :

$$\delta \Delta_{si} = \delta z_{vi} - \delta z_i \quad i = 1,2$$

$$\delta \Delta_{pj} = \delta z_j - \delta w - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \delta x_j \quad j = 1,2 \quad (2.35)$$

Les forces dans les suspensions du véhicule sont :

$$f_i = k_{si} (z_{vi} - z_i) + c_{si} (\dot{z}_{vi} - \dot{z}_i) \quad i = 1,2 \quad (2.36)$$

Les forces d'interaction pont-véhicule dans les pneus sont :

$$F_{pj}^{\text{int}} = k_{pj} [z_j - w(x_j, y_j, t) - r(x_j, y_j)] + c_{pj} \left[\dot{z}_j - \frac{\partial w}{\partial t}(x_j, y_j, t) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_j, y=y_j} \dot{x}_j \right] \quad j=1,2 \quad (2.37)$$

L'équation des travaux virtuels permet d'obtenir les équations pour chaque degré de liberté du modèle à 4D.D.L, en remplaçant les différents termes par les relations données éq. (2.33 à 2.37) et en rejetant la solution triviale pour laquelle tous les déplacements, vitesses et accélérations sont nuls, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & m_1 \ddot{z}_1 + (k_{s1} + k_{p1})z_1 - k_{s1}z_{v1} + (c_{s1} + c_{p1})\dot{z}_1 - c_{s1}\dot{z}_{v1} = \\
 \text{Pour } z_1 & -m_1g + k_{p1}[w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\
 & m_2 \ddot{z}_2 + (k_{s2} + k_{p2})z_2 - k_{s2}z_{v2} + (c_{s2} + c_{p2})\dot{z}_2 - c_{s2}\dot{z}_{v2} = \\
 \text{Pour } z_2 & -m_2g + k_{p2}[w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\
 & -k_{s1}z_1 + k_{s1}z_{v1} - c_{s1}\dot{z}_1 + c_{s1}\dot{z}_{v1} + \ddot{z}_{v1} \left[m_v a_2^2 + m_v \frac{h^2}{s_1^2} + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \right] \\
 \text{Pour } z_{v1} & + \ddot{z}_{v2} \left[m_v a_1 a_2 - m_v \frac{h^2}{s_1^2} - \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \right] = -a_2 m_v g + m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\
 & -k_{s2}z_2 + k_{s2}z_{v2} - c_{s2}\dot{z}_2 + c_{s2}\dot{z}_{v2} + \ddot{z}_{v1} \left[m_v a_1 a_2 - m_v \frac{h^2}{s_1^2} - \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \right] \\
 \text{Pour } z_{v2} & + \ddot{z}_{v2} \left[m_v a_1^2 + m_v \frac{h^2}{s_1^2} + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \right] = -a_1 m_v g - m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Remarque : la mise en équations du modèle à 7D.D.L s'effectue de la même manière que celle du modèle à 4D.D.L.

2.4.6 Mise en équations du modèle de véhicule à 5 D.D.L

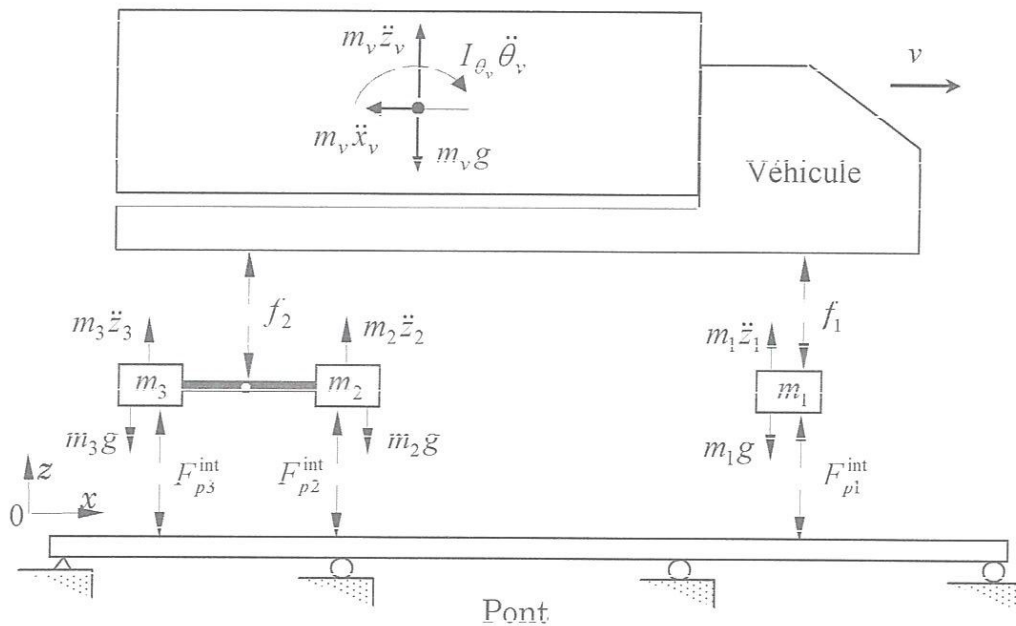


Figure 2.7 : Schéma d'équilibre des forces et des moments du modèle à 5 D.D.L

L'équation des travaux virtuels appliquée au modèle à 5D.D.L prend la forme suivante:

$$W = \sum_{i=1}^2 f_i \delta \Delta_{si} + \sum_{j=1}^3 \left[F_{pj}^{int} \delta \Delta_{pj} + m_j \ddot{z}_j \delta z_j + m_j g \delta z_j \right] + \left[m_v \ddot{z}_v \delta z_v + m_v g \delta z_v + m_v \ddot{x}_v \delta x_v + I_{\theta_v} \ddot{\theta}_v \delta \theta_v \right] \quad (2.39)$$

Les déplacements relatifs des suspensions Δ_{si} et des pneus son Δ_{pj} sont donnés par:

$$\begin{aligned} \Delta_{s1} &= z_{v1} - z_1, & \Delta_{s2} &= z_{v2} - (a_4 z_2 + a_3 z_3) \\ \Delta_{pj} &= z_j - w(x_j, y_j, t) - r(x_j, y_j) & j &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Les déplacements relatifs virtuels correspondants $\delta \Delta_{si}$ et $\delta \Delta_{pj}$ sont :

$$\begin{aligned} \delta \Delta_{s1} &= \delta z_{v1} - \delta z_1, & \delta \Delta_{s2} &= \delta z_{v2} - (a_4 \delta z_2 + a_3 \delta z_3) \\ \delta \Delta_{pj} &= \delta z_j - \delta w - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \delta x_j & j &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Les forces dans les suspensions du véhicule sont :

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{S1}(z_{v1} - z_1) + c_{S1}(\dot{z}_{v1} - \dot{z}_1) \\ f_2 &= k_{S2}(z_{v2} - a_4 z_2 - a_3 z_3) + c_{S2}(\dot{z}_{v2} - a_4 \dot{z}_2 - a_3 \dot{z}_3) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Les forces d'interaction pont-véhicule dans les pneus sont :

$$F_{pj}^{int} = k_{pj} [z_j - w(x_j, y_j, t) - r(x_j, y_j)] + c_{pj} \left[\dot{z}_j - \frac{\partial w}{\partial t}(x_j, y_j, t) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_j, y=y_j} \dot{x}_j \right] \quad j=1, 2, 3 \quad (2.43)$$

L'équation des travaux virtuels permet d'obtenir les équations pour chaque degré de liberté du modèle à 5D.D.L en remplaçant les différents termes par les relations données éq. (2.33 et 2.40 à 2.43) et en rejetant la solution triviale pour laquelle tous les déplacements, vitesses et accélérations sont nuls.

Pour z_1 :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + (k_{s1} + k_{p1}) z_1 - k_{s1} z_{v1} + (c_{s1} + c_{p1}) \dot{z}_1 - c_{s1} \dot{z}_{v1} = \\ - m_1 g + k_{p1} [w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \end{aligned}$$

Pour z_2 :

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{z}_2 + (k_{s2} a_4^2 + k_{p2}) z_2 + k_{s2} a_3 a_4 z_3 - k_{s2} a_4 z_{v2} + (c_{s2} a_4^2 + c_{p2}) \dot{z}_2 + c_{s2} a_3 a_4 \dot{z}_3 - c_{s2} a_4 \dot{z}_{v2} = \\ - m_2 g + k_{p2} [w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \end{aligned}$$

Pour z_3 :

$$m_3 \ddot{z}_3 + k_{s2} a_3 a_4 z_2 + (k_{s2} a_3^2 + k_{p3}) z_3 - k_{s2} a_3 z_{v2} + c_{s2} a_3 a_4 \dot{z}_2 + (c_{s2} a_3^2 + c_{p3}) \dot{z}_3 - c_{s2} a_3 \dot{z}_{v2} = -m_3 g + k_{p3} [w(x_3, y_3, t) + r(x_3, y_3)] + c_{p3} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_3, y_3, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_3, y=y_3} \dot{x}_1 \right]$$

Pour z_{v1} :

$$-k_{s1} z_1 + k_{s1} z_{v1} - c_{s1} \dot{z}_1 + c_{s1} \dot{z}_{v1} + \ddot{z}_{v1} \left[m_v a_2^2 + m_v \frac{h^2}{s_1^2} + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \right] + \ddot{z}_{v2} \left[m_v a_1 a_2 - m_v \frac{h^2}{s_1^2} - \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \right] = -a_2 m_v g + m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1$$

Pour z_{v2} :

(2.44)

$$-k_{s2} a_4 z_2 - k_{s2} a_3 z_3 + k_{s2} z_{v2} - c_{s2} a_4 \dot{z}_2 - c_{s2} a_3 \dot{z}_3 + c_{s2} \dot{z}_{v2} + \ddot{z}_{v1} \left[m_v a_1 a_2 - m_v \frac{h^2}{s_1^2} - \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \right] + \ddot{z}_{v2} \left[m_v a_1^2 + m_v \frac{h^2}{s_1^2} + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \right] = -a_1 m_v g - m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1$$

2.4.7 Mise en équations du modèle de véhicule à 6 D.D.L

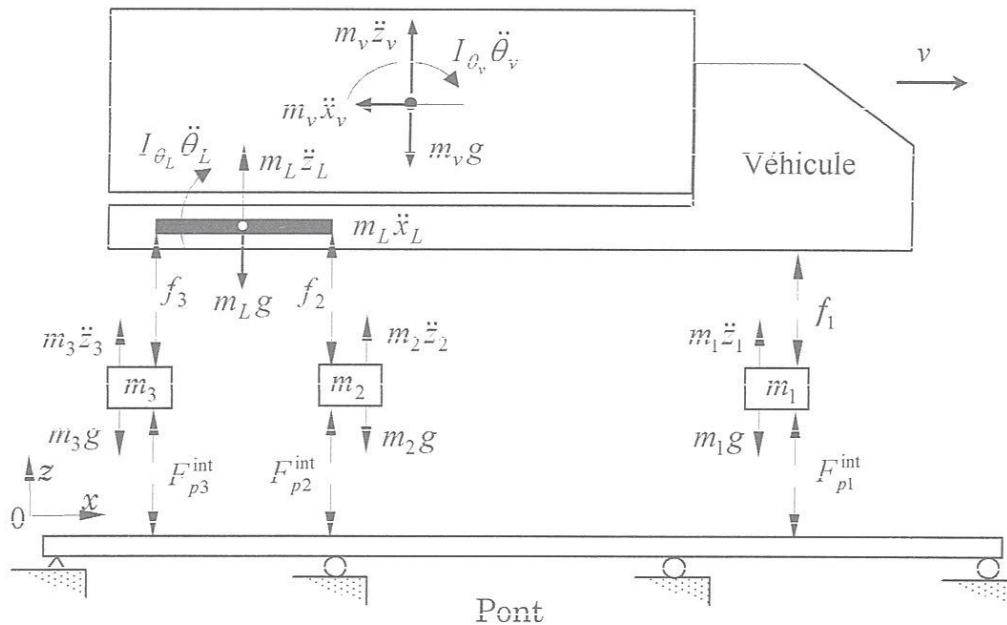


Figure 2.8 : Schéma d'équilibre des forces et des moments du modèle à 6 D.D.L

L'équation des travaux virtuels appliquée au modèle à 6D.D.L prend la forme suivante:

$$W = \sum_{i=1}^3 f_i \delta \Delta_{si} + \sum_{j=1}^3 \left[F_{pj}^{\text{int}} \delta \Delta_{pj} + m_j \ddot{z}_j \delta z_j + m_j g \delta z_j \right] + \left[m_k \ddot{z}_k \delta z_k + m_k g \delta z_k + m_k \ddot{x}_k \delta x_k + I_{\theta k} \ddot{\theta}_k \delta \theta_k \right] \quad (2.45)$$

Où les différents termes sont définis comme suit:

W	est le travail virtuel total du véhicule
f_i, F_{pj}^{int}	sont les forces dans les suspensions et dans les pneus
m_j	sont les masses des roues et des essieux
$m_k, I_{\theta k}$	sont respectivement la masse et le moment d'inertie de la masse du corps du véhicule et de la liaison des essieux tandem
g	est l'accélération de la gravité
$\Delta_{si}, \delta \Delta_{si}, \Delta_{pj}, \delta \Delta_{pj}$	sont respectivement les déplacements relatifs et les déplacements relatifs virtuels des suspensions et des pneus
$z_j, \delta z_j$	sont respectivement les déplacements et les déplacements virtuels des pneus selon l'axe vertical
$x_k, \delta x_k, z_k, \delta z_k$	sont respectivement les déplacements et les déplacements virtuels du corps du véhicule et de la liaison des essieux tandem selon l'axe horizontal et vertical
$\theta_k, \delta \theta_k$	sont respectivement la rotation et la rotation virtuelle du corps du véhicule et de la liaison des essieux tandem

Les rotations θ_v et θ_L ainsi que les déplacements x_v, x_L, z_v et z_L sont exprimés en fonction des variables cinématiques z_{vi} pour rendre homogène l'ensemble des variables du modèle.

$$\begin{aligned} z_L &= a_3 z_{v3} + a_4 z_{v2} \\ z_v &= a_1 a_3 z_{v3} + a_1 a_4 z_{v2} + a_2 z_{v1} \\ \theta_L &= \frac{z_{v3} - z_{v2}}{s_2} \\ \theta_v &= \frac{\bar{a}_3 z_{v3} + \bar{a}_4 z_{v2} - z_{v1}}{s_1} \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$x_L = x_1 + \frac{h}{s_1}(a_3 z_{v3} + a_4 z_{v2} - z_{v1}) - s_1$$

$$x_v = x_1 + \frac{h}{s_1}(a_3 z_{v3} + a_4 z_{v2} - z_{v1}) - a_1 s_1$$

Les déplacements relatifs des suspensions Δ_{si} et des pneus son Δ_{pj} t donnés par:

$$\begin{aligned} \Delta_{si} &= z_{vi} - z_i & i &= 1,2,3 \\ \Delta_{pj} &= z_j - w(x_j, y_j, t) - r(x_j, y_j) & j &= 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Les déplacements relatifs virtuels correspondants $\delta \Delta_{si}$ et $\delta \Delta_{pj}$ sont :

$$\begin{aligned} \delta \Delta_{si} &= \delta z_{vi} - \delta z_i & i &= 1,2,3 \\ \delta \Delta_{pj} &= \delta z_j - \delta w - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) \delta x_j & j &= 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Les forces dans les suspensions du véhicule sont :

$$f_i = k_{si}(z_{vi} - z_i) + c_{si}(\dot{z}_{vi} - \dot{z}_i) \quad i = 1,2,3 \quad (2.49)$$

Les forces d'interaction pont-véhicule dans les pneus sont :

$$F_{pj}^{int} = k_{pj} [z_j - w(x_j, y_j, t) - r(x_j, y_j)] + c_{pj} \left[\dot{z}_j - \frac{\partial w}{\partial t}(x_j, y_j, t) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_j, y=y_j} \dot{x}_j \right] \quad j = 1,2,3 \quad (2.50)$$

L'équation des travaux virtuels permet d'obtenir les équations de chaque degré de liberté du modèle à 6D.D.L en remplaçant les différents termes par les relations données éq. (2.46 à 2.50) et en rejetant la solution triviale pour laquelle tous les déplacements, vitesses et accélérations sont nuls.

$$\begin{aligned} & m_1 \ddot{z}_1 + (k_{s1} + k_{p1}) z_1 - k_{s1} z_{v1} + (c_{s1} + c_{p1}) \dot{z}_1 - c_{s1} \dot{z}_{v1} = \\ \text{Pour } z_1 & - m_1 g + k_{p1} [w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\ & m_2 \ddot{z}_2 + (k_{s2} + k_{p2}) z_2 - k_{s2} z_{v2} + (c_{s2} + c_{p2}) \dot{z}_2 - c_{s2} \dot{z}_{v2} = \\ \text{Pour } z_2 & - m_2 g + k_{p2} [w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\ & m_3 \ddot{z}_3 + (k_{s3} + k_{p3}) z_3 - k_{s3} z_{v3} + (c_{s3} + c_{p3}) \dot{z}_3 - c_{s3} \dot{z}_{v3} = \\ \text{Pour } z_3 & - m_3 g + k_{p3} [w(x_3, y_3, t) + r(x_3, y_3)] + c_{p3} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_3, y_3, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_3, y=y_3} \dot{x}_1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -k_{s1}z_1 + k_{s1}z_{v1} - c_{s1}\dot{z}_1 + c_{s1}\dot{z}_{v1} + \ddot{z}_{v1} \left[m_v a_2^2 + (m_v + m_L) \frac{h^2}{s_1^2} + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \right] \\
 \text{Pour } z_{v1} & + \ddot{z}_{v2} \left[m_v a_1 a_2 a_4 - (m_v + m_L) \frac{a_4 h^2}{s_1^2} - \frac{a_4}{s_1^2} I_{\theta v} \right] + \ddot{z}_{v3} \left[m_v a_1 a_2 a_3 - (m_v + m_L) \frac{a_3 h^2}{s_1^2} - \frac{a_3}{s_1^2} I_{\theta v} \right] \\
 & = -a_2 m_v g + (m_v + m_L) \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\
 & -k_{s2}z_2 + k_{s2}z_{v2} - c_{s2}\dot{z}_2 + c_{s2}\dot{z}_{v2} + \ddot{z}_{v1} \left[m_v a_1 a_2 a_4 - (m_v + m_L) \frac{a_4 h^2}{s_1^2} - \frac{a_4}{s_1^2} I_{\theta v} \right] \\
 \text{Pour } z_{v2} & + \ddot{z}_{v2} \left[m_v a_1^2 a_4^2 + m_L a_4^2 + (m_v + m_L) \frac{a_4^2 h^2}{s_1^2} + \frac{a_4^2}{s_1^2} I_{\theta v} + \frac{I_{\theta L}}{s_2^2} \right] \\
 & + \ddot{z}_{v3} \left[m_v a_1^2 a_3 a_4 + m_L a_3 a_4 + (m_v + m_L) \frac{a_3 a_4 h^2}{s_1^2} + \frac{a_3 a_4}{s_1^2} I_{\theta v} - \frac{I_{\theta L}}{s_2^2} \right] \\
 & = -a_1 a_4 m_v g - a_4 m_L g - (m_v + m_L) \frac{a_4 h}{s_1} \ddot{x}_1 \\
 & -k_{s3}z_3 + k_{s3}z_{v3} - c_{s3}\dot{z}_3 + c_{s3}\dot{z}_{v3} + \ddot{z}_{v1} \left[m_v a_1 a_2 a_3 - (m_v + m_L) \frac{a_3 h^2}{s_1^2} - \frac{a_3}{s_1^2} I_{\theta v} \right] \\
 \text{Pour } z_{v3} & + \ddot{z}_{v2} \left[m_v a_1^2 a_3 a_4 + m_L a_3 a_4 + (m_v + m_L) \frac{a_3 a_4 h^2}{s_1^2} + \frac{a_3 a_4}{s_1^2} I_{\theta v} - \frac{I_{\theta L}}{s_2^2} \right] \\
 & + \ddot{z}_{v3} \left[m_v a_1^2 a_3^2 + m_L a_3^2 + (m_v + m_L) \frac{a_3^2 h^2}{s_1^2} + \frac{a_3^2}{s_1^2} I_{\theta v} + \frac{I_{\theta L}}{s_2^2} \right] \\
 & = -a_1 a_3 m_v g - a_3 m_L g - (m_v + m_L) \frac{a_3 h}{s_1} \ddot{x}_1
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

On peut écrire les équations du mouvement (2.38 ,2.44 et 2.51) sous forme de système matriciel qui prend la forme suivante :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\} \tag{2.52}$$

Les matrices $[M_v]$, $[C_v]$, $[K_v]$ et les vecteurs $\{F_g\}$ et $\{F^{int}\}$ sont présentés dans l'annexe 3.

2.5 Modélisation du profil de la chaussée

Les irrégularités de la chaussée sont l'interface entre le pont et le véhicule mobile. Ces irrégularités perturbent le mouvement vertical du pont et du véhicule d'une manière importante. On peut modéliser le profil statique de la chaussée par un processus aléatoire caractérisé par une densité spectrale de puissance (DSP) qui permet de d'écrire la qualité de surface de roulement [2]:

$$r(x_i) = \sum_{k=1}^N \sqrt{4A_r \left(\frac{2\pi k}{L_c \omega_{s0}} \right)^{-2}} \frac{2\pi}{L_c} \cos(\omega_{sk} x_i + \theta_k), \quad i = 1, \dots, nf \quad (2.53)$$

nf : nombre de points de contact dalle/véhicule

Où A_r est un coefficient de rugosité spectral qui caractérise l'état de la chaussée ($m^3 / cycle$), ω_{s0} est la pulsation de discontinuité ($\omega_{s0} = 1/2\pi \text{ cycle/m}$), ω_{sk} est le nombre d'onde ($\omega_{sk} = 2\pi k / L_c \text{ cycle/m}$), L_c est la longueur d'échantillonnage en général égale à $2l$, l est la longueur du pont, N est le nombre de points de discrétisation fréquentielle, θ_k est un variable aléatoire qui varie entre 0 et 2π .

2.6 Résolution numérique des équations du mouvement

Pour résoudre les équations du mouvement couplées pont-véhicule, nous utilisons la méthode d'intégration numérique de Newmark.

À l'instant $t + \Delta t$, l'équation (2.52) s'écrit :

$$[M_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{F_g\} + \{F^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (2.54)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses respectivement sont :

$$\{Z_v\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \{\ddot{Z}_v\}_t + \beta \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (2.55)$$

$$\{\dot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t + \gamma \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} \quad (2.56)$$

γ et β sont les paramètres de stabilité de la méthode de Newmark, Δt est le pas du temps d'intégration. Remplaçons les expressions (2.55) et (2.56) dans l'équation (2.54), après factorisation on obtient :

$$[S_v] \{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} + [C_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} + [K_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{F_g\} + \{F^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (2.57)$$

Avec :

$$[S_v] = [M_v] + \gamma \Delta t [C_v] + \beta \Delta t^2 [K_v] \quad (2.58)$$

$$\{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1-\gamma)\Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (2.59)$$

$$\{Z_v^*\}_{t+\Delta t} = \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - \beta)\Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t \quad (2.60)$$

Multiplions l'équation (2.57) par $[S_v]^{-1}$, on obtient :

$$\{\ddot{Z}_v\}_{t+\Delta t} = \{P_v\}_{t+\Delta t} - [U_v] \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} - [V_v] \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} \quad (2.61)$$

Avec :

$$\{P_v\}_{t+\Delta t} = [S_v]^{-1} (\{F_g\} + \{F^{int}\}_{t+\Delta t}); [U_v] = [S_v]^{-1} [C_v]; [V_v] = [S_v]^{-1} [K_v] \quad (2.62)$$

De même, l'équation du mouvement du pont (2.5), à l'instant $t+\Delta t$ s'écrit :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} + \omega_{ij}^2 q_{ij}^{(t+\Delta t)} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (2.63)$$

En utilisant la méthode de Newmark, les déplacements et les vitesses généralisés du pont, à l'instant $t+\Delta t$ sont:

$$q_{ij}^{(t+\Delta t)} = q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + \Delta t^2 (0,5 - \beta) \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (2.64)$$

$$\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1-\gamma)\Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} + \gamma \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} \quad (2.65)$$

Remplaçons les expressions (2.64) et (2.65) dans l'équation (2.63), on obtient :

$$\ddot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} = \left(\frac{1}{M_{ij}} F_{ij}^{(t+\Delta t)} - 2\xi_{ij}\omega_{ij}\dot{q}_{ij}^{(t+\Delta t)} - \omega_{ij}^2 q_{ij}^{(t+\Delta t)} \right) / \left(1 + 2\Delta t \xi_{ij}\omega_{ij} + \beta \Delta t^2 \omega_{ij}^2 \right) \quad (2.66)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \bar{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} &= \bar{q}_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{\bar{q}}_{ij}^{(t)} + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{\bar{q}}_{ij}^{(t)} \\ \dot{\bar{q}}_{ij}^{*(t+\Delta t)} &= \dot{\bar{q}}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\bar{q}}_{ij}^{(t)} \end{aligned} \quad (2.67)$$

2.7 Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution comprend deux boucles. La première boucle est celle des pas du temps et la seconde correspond aux itérations. On calcule les déplacements et les vitesses de la dalle du pont et du véhicule, en utilisant les expressions (2.54) et (2.63). On fait une approximation des déplacements, vitesses et accélérations de la dalle et du véhicule à partir de l'itération précédente (\bar{k}), puis on calcule les forces d'interaction en chaque point de contact puis on résout l'équation de mouvement du véhicule (2.54) par la méthode de Newmark. On calcule par la suite le vecteur des forces d'interaction qui agissent sur la dalle du pont en chaque point de contact. On résout par la méthode de Newmark, l'équation modales (2.63) du pont puis on fait un test de convergence entre le déplacement vertical du pont $w^{(\bar{k}+1)}$ de l'itération ($\bar{k} + 1$) et $w^{(\bar{k})}$ de l'itération précédente :

$$\left| w^{(\bar{k}+1)}(x, y, t) - w^{(\bar{k})}(x, y, t) \right| \leq \varepsilon$$

Si cette condition est vérifiée, on calcule les paramètres dynamiques voulus, puis on passe au pas du temps suivant, Si non, on passe à l'itération suivante telle que le déplacement $w^{(\bar{k}+1)}(x, y, t)$ devient une approximation de l'itération prochaine et on refait le calcul jusqu'à la convergence.

- Lecture des données de la dalle de roulement du pont
- Lecture des données du véhicule
- Lecture des données de la chaussée

- Calcul de : $D_x, D_y, H, D_{xy}, G_{xy}, \bar{m}$
- Choix du nombre de modes: n, m
- Lecture des fréquences ω_{ij} calculées par MATHEMATICA
- Calcul des modes propres ϕ_{ij}
- Choix de la vitesse de roulement: v
- Choix du pas de temps Δt , des paramètres γ, β , et de la tolérance ε
- Calcul des matrices des masses, des rigidités et des amortissements modaux
Du pont : M_{ij}, K_{ij}, C_{ij}
- Calcul des matrices de masse, de rigidité et de l'amortissement
Du model véhicule: $[M_v], [C_v], [K_v]$
- Choix des conditions initiales pour le pont : $q_{ij}^{(0)}, \dot{q}_{ij}^{(0)}, \ddot{q}_{ij}^{(0)}$
- Choix des conditions initiales pour le véhicule : $\{Z_v\}_0, \{\dot{Z}_v\}_0, \{\ddot{Z}_v\}_0$
- Choix de cheminement du véhicule sur la dalle de roulement du pont

Pour chaque pas du temps $t = t + \Delta t$:

- Détermination de la position longitudinale du véhicule sur le pont : $x_k = v t_k$
 - Calcul du profil de la route en chaque point de contact k : r_k, r'_k
 - Approximation des déplacements, vitesses et accélérations de la dalle de roulement du pont et du véhicule à partir de l'itération précédente
- $$\begin{aligned} \{Z_v^*\}_{t+\Delta t} &= \{Z_v\}_t + \Delta t \{\dot{Z}_v\}_t + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \{\ddot{Z}_v\}_t; \quad \{\dot{Z}_v^*\}_{t+\Delta t} = \{\dot{Z}_v\}_t + (1 - \gamma) \Delta t \{\ddot{Z}_v\}_t \\ q_{ij}^{*(t+\Delta t)} &= q_{ij}^{(t)} + \Delta t \dot{q}_{ij}^{(t)} + (0,5 - \beta) \Delta t^2 \ddot{q}_{ij}^{(t)}; \quad \dot{q}_{ij}^{*(t+\Delta t)} = \dot{q}_{ij}^{(t)} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_{ij}^{(t)} \end{aligned}$$

Pour chaque itération: $\bar{k} = \bar{k} + 1$

- Calcul en chaque point de contact k : $w_k, \dot{w}_k, \dot{r}_k$
- Calcul des forces d'interaction $F_k^{int} = k_{pk} (w_k + r_k) + c_{pk} (\dot{w}_k + \dot{r}_k)$
- Calcul du vecteur $\{F^{int}\}$
- Calcul du vecteur des forces dues aux effets de la gravité : $\{F_g\}$
- Résolution (Newmark) : $[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$
- Calcul des forces d'interaction agissant sur la dalle en chaque point de contact :

$$F_{pk}^{int} = k_{pk} (w_k + r_k - z_k) + c_{pk} (\dot{w}_k + \dot{r}_k - \dot{z}_k)$$

- Résolution (Newmark) :

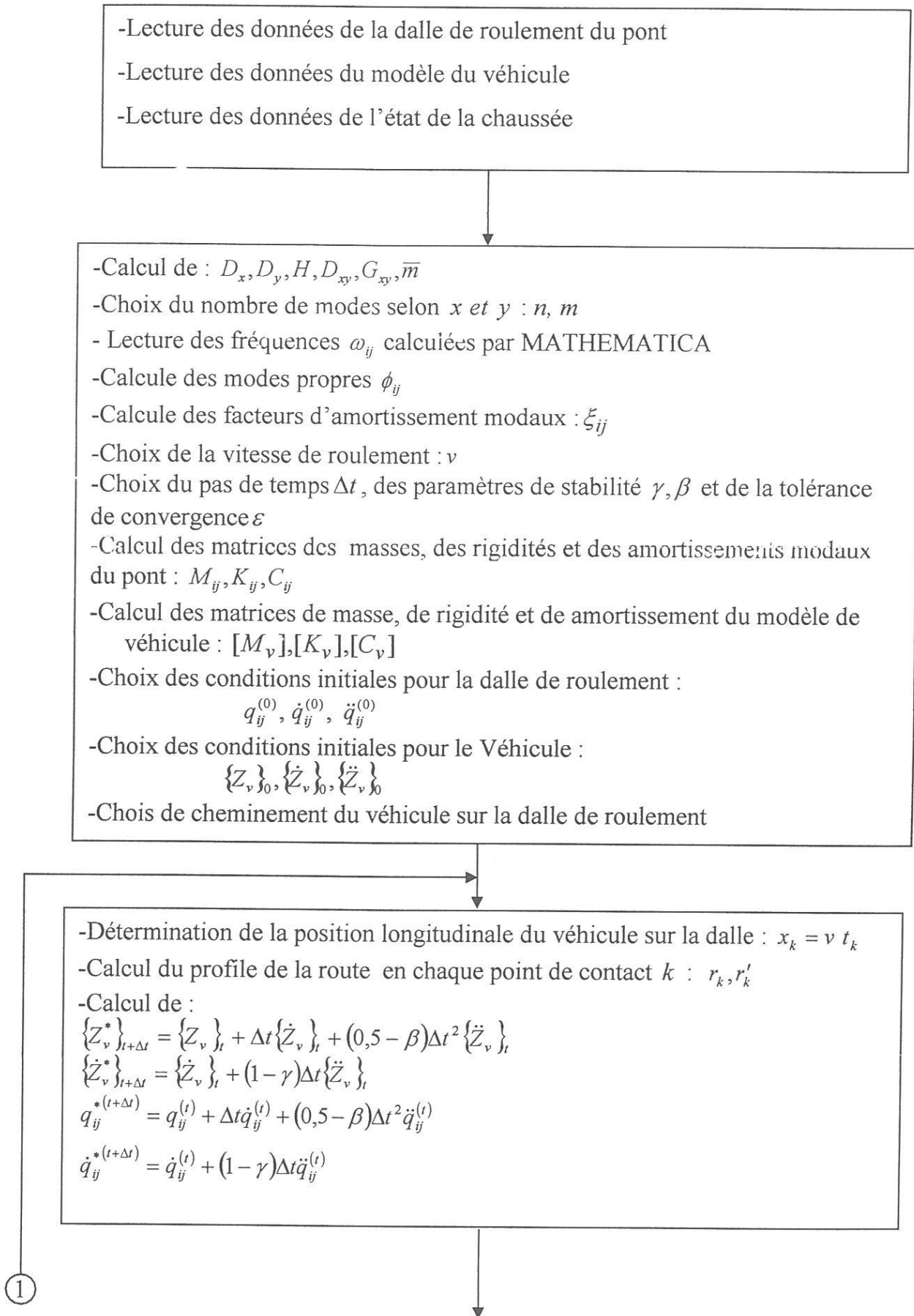
$$\ddot{q}_{ij} + 2\xi_{ij} \omega_{ij} \dot{q}_{ij} + \omega_{ij}^2 q_{ij} = \frac{1}{M_{ij}} F_{ij} \quad \text{avec} \quad F_{ij} = - \sum_{k=1}^{nf} F_{pk}^{int}(x_k, y_k) \phi_{ij}(x_k, y_k)$$

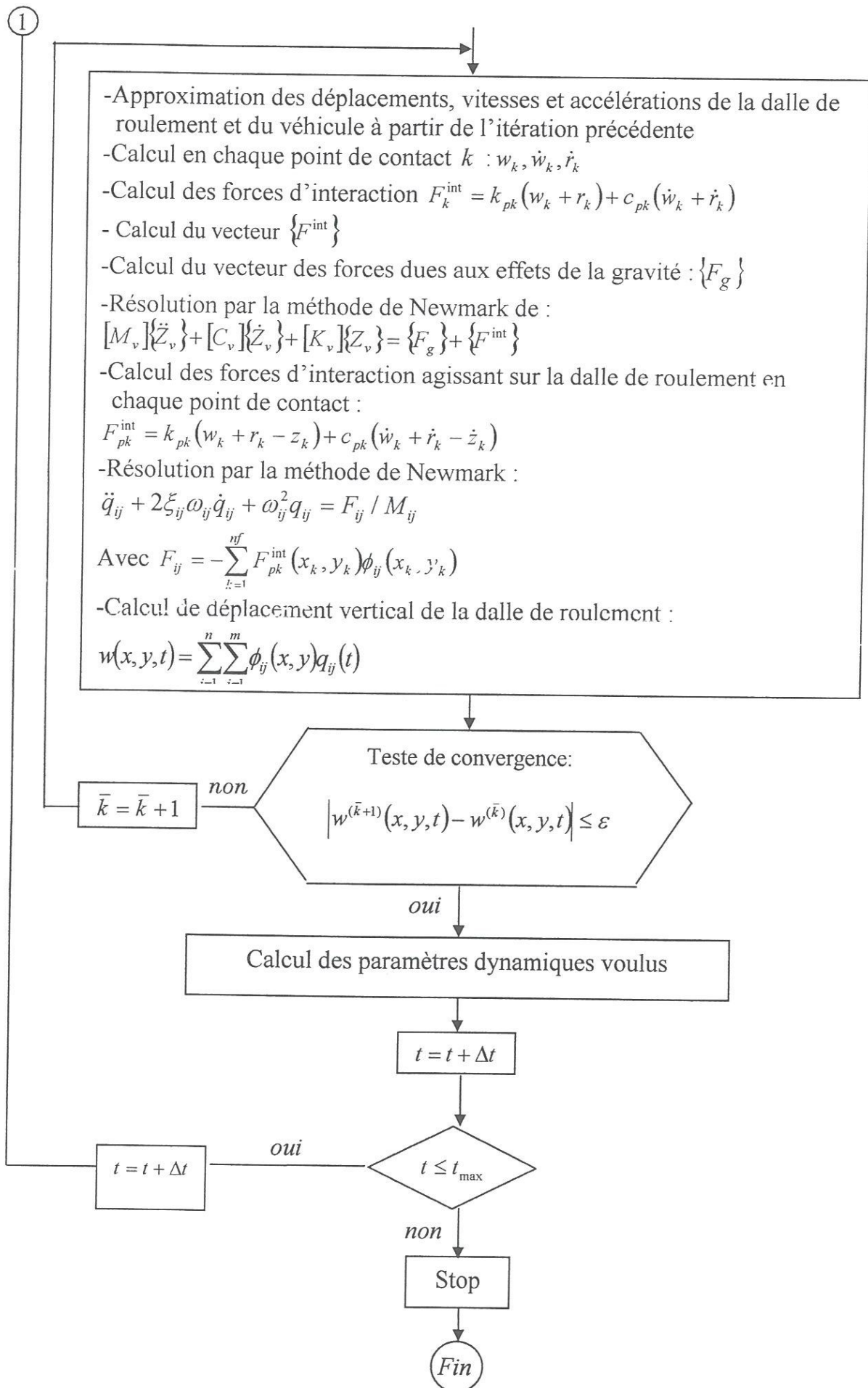
- Calcul du déplacement de la dalle de roulement : $w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(x, y) q_{ij}(t)$

- Test de convergence:

$$\text{Si non} \quad \left| w^{(\bar{k}+1)}(x, y, t) - w^{(\bar{k})}(x, y, t) \right| \leq \varepsilon \quad \text{Si oui}$$

2.8 Organigramme schématique du programme de calcul





Chapitre 3

Résultats et interprétations

3.1 Introduction

Sur la base des développements mathématiques et de la modélisation qui sont présentés dans le chapitre deux, nous avons présenté dans ce chapitre trois parties de résultats. La première partie concerne la validation des fréquences et des modes propres des dalles de roulement multi-travées. La deuxième partie concerne la validation de la réponse dynamique d'une dalle de roulement à une seule travée, sous la sollicitation d'un modèle de véhicule à sept degré de liberté. La troisième partie est une application au cas d'une dalle de roulement sollicitée par un véhicule à sept degré de liberté.

3.2 Validation des fréquences et modes propres des dalles multi-travées

Dans ce paragraphe, nous avons validé les fréquences et les modes propres calculés par la présente approche et celles calculées par le logiciel d'éléments finis ANSYS pour trois cas de dalles de roulement orthotrope qui sont :

- Une dalle de roulement à trois travées de longueurs $l = 78$ m, $l_1 = l_3 = 24$ m et $l_2 = 30$ m ;
- Une dalle de roulement à quatre travées de longueurs $l = 108$ m, $l_1 = l_4 = 24$ m et $l_2 = l_3 = 30$ m ;
- Une dalle de roulement à cinq travées de longueurs $l = 138$ m, $l_1 = l_5 = 24$ m et $l_2 = l_3 = l_4 = 30$ m ;

Les autres caractéristiques mécaniques et géométriques pour les trois cas des dalles sont les suivantes [14] :

$$b = 13.715 \text{ m}, h = 0.21157 \text{ m}, \rho = 3265.295 \text{ kg/m}^3, D_x = 2.415 \times 10^9 \text{ Nm}, D_y = 2.1807 \times 10^7 \text{ Nm}, D_{xy} = 1.1424 \times 10^8 \text{ Nm}, \nu_{xy} = 0.3, E_x = 3.0576 \times 10^{12} \text{ N/m}^2, E_y = 2.7607 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, G_{xy} = 1.4475 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Pour calculer les fréquences propres des trois cas des dalles de roulement par la présente approche, nous avons calculé tout d'abord les valeurs du paramètre de fréquences k_i (voir annexe 1), puis les valeurs du paramètre k_{li} en utilisant l'expression

(2.14) du chapitre 2. Nous avons déterminé par la suite, les racines r_{1ij} ou bien r_{2ij} de l'équation aux fréquences (2.25) en utilisant le logiciel MATHEMATICA. Finalement, les fréquences propres ω_{ij} des dalles multi-travées sont calculées par les expressions (2.17).

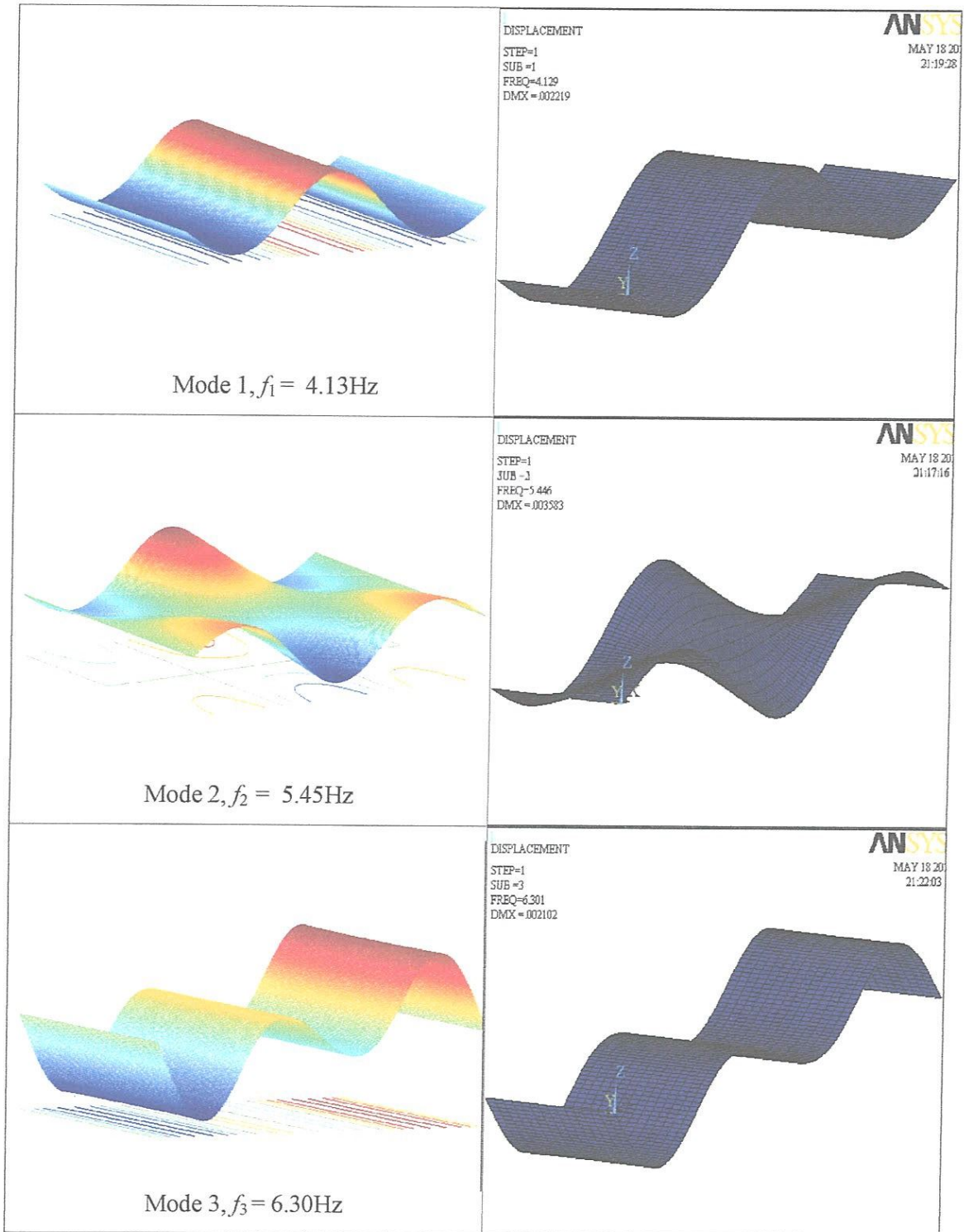
Pour calculer les fréquences et les modes propres par le logiciel d'éléments finis ANSYS, nous avons introduit tout d'abord toutes les propriétés mécaniques et géométriques pour chaque cas de dalle de roulement. Les dalles de roulement sont modélisées par la suite, par des éléments coques de type shell 63 à quatre nœuds avec six degrés de liberté par nœud. Nous avons utilisé un maillage fin de $150 \times 15 = 2250$ éléments.

Le tableau 3.1 résume la différence entre les valeurs des dix premières fréquences propres calculées par la présente approche et celles calculées par ANSYS pour les trois cas des dalles de roulement. L'analyse des résultats obtenus montre une excellente concordance pour toutes les fréquences, ce qui montre la validité de la méthode proposée pour le calcul des fréquences et modes propres des dalles multi-travées. Cependant, on constate une légère différence entre certaines fréquences des modes de torsion. Cela est dû principalement à l'influence des effets secondaires (inertie de rotation et cisaillement) négligés dans notre approche.

Tableau 3.1 : Comparaison des fréquences propres [Hz]

Mode	Dalle 3 travées			Dalle 4 travées			Dalle 5 travées		
	Ordre des fréq.	Présente étude	ANSYS	Ordre des fréq.	Présente étude	ANSYS	Ordre des fréq.	Présente Etude	ANSYS
1	1.1	4.13	4.13	1.1	3.77	3.77	1.1	3.59	3.59
2	1.2	5.45	5.45	1.2	5.09	5.09	2.1	4.49	4.49
3	2.1	6.30	6.30	2.1	5.092	5.094	1.2	4.92	4.92
4	2.2	7.58	7.58	2.2	6.45	6.32	2.2	5.74	5.74
5	3.1	7.75	7.75	3.1	6.83	6.83	3.1	5.75	5.75
6	3.2	8.78	8.78	4.1	7.66	7.66	3.2	6.92	6.90
7	1.3	9.08	9.04	3.2	8.031	8.024	4.1	7.11	7.10
8	2.3	11.26	11.27	4.2	8.66	8.65	5.1	7.61	7.61
9	3.3	11.97	12.03	1.3	8.68	8.76	4.2	8.24	8.22
10	1.4	15.07	15.08	2.3	10.19	9.86	5.2	8.59	8.58

Sur les figures 3.1, 3.2 et 3.3, nous traçons les six premiers modes propres de la dalle pour les trois cas en utilisant l'expression (2.28), puis nous comparons ces modes avec ceux obtenus par le logiciel ANSYS, une excellente concordance est observée.



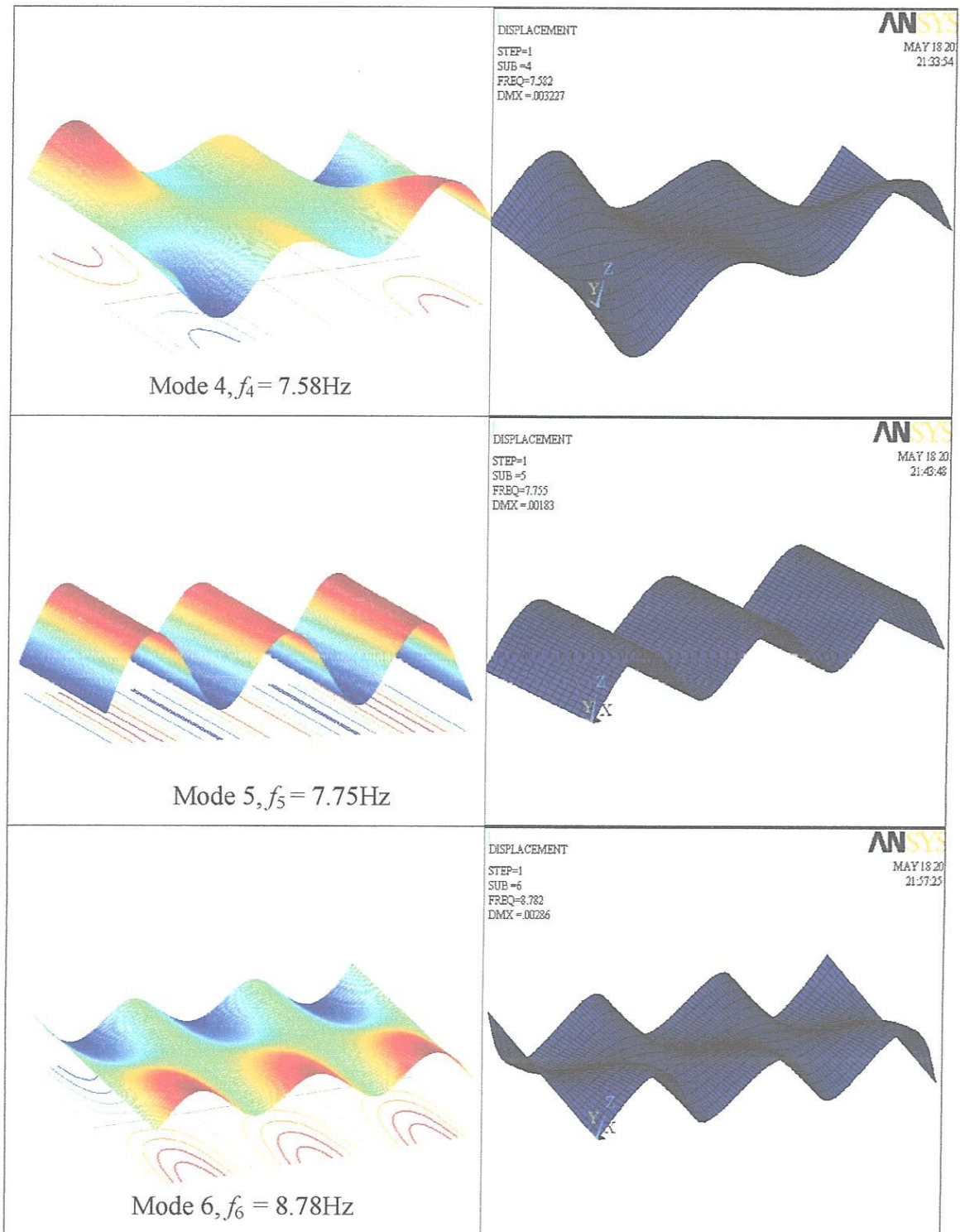
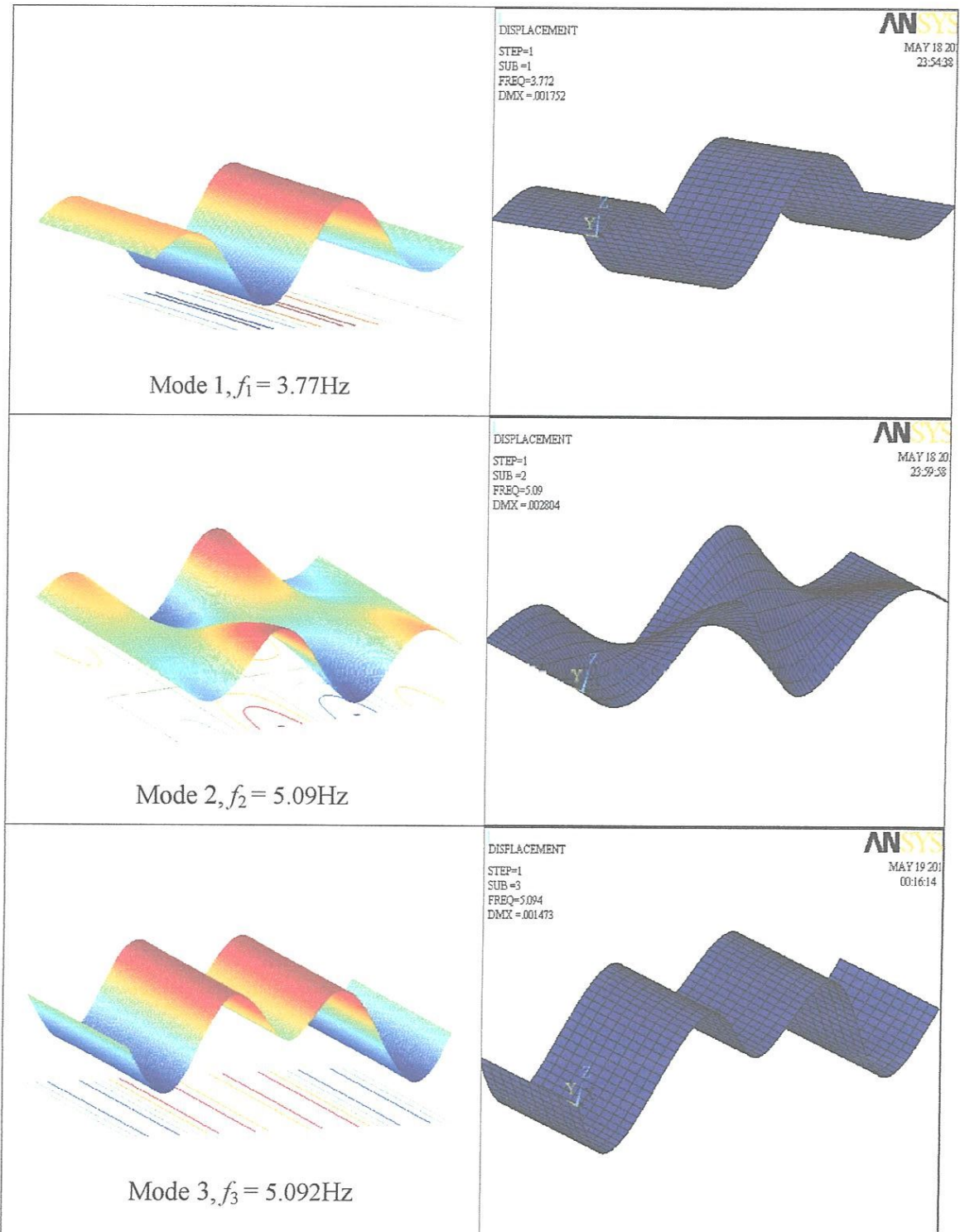


Figure 3.1 : Les six premiers modes propres de la dalle de roulement d'un pont à trois travées



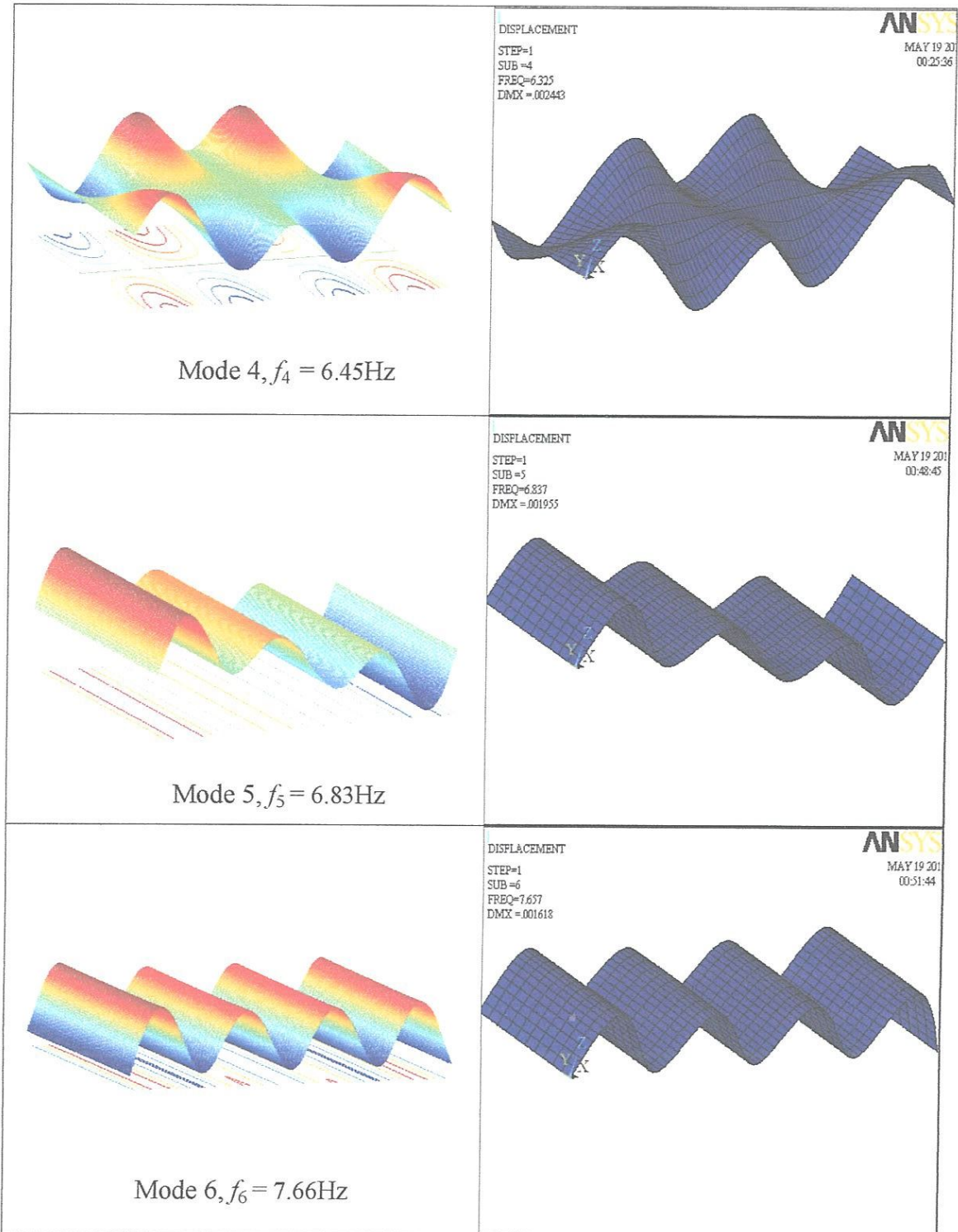
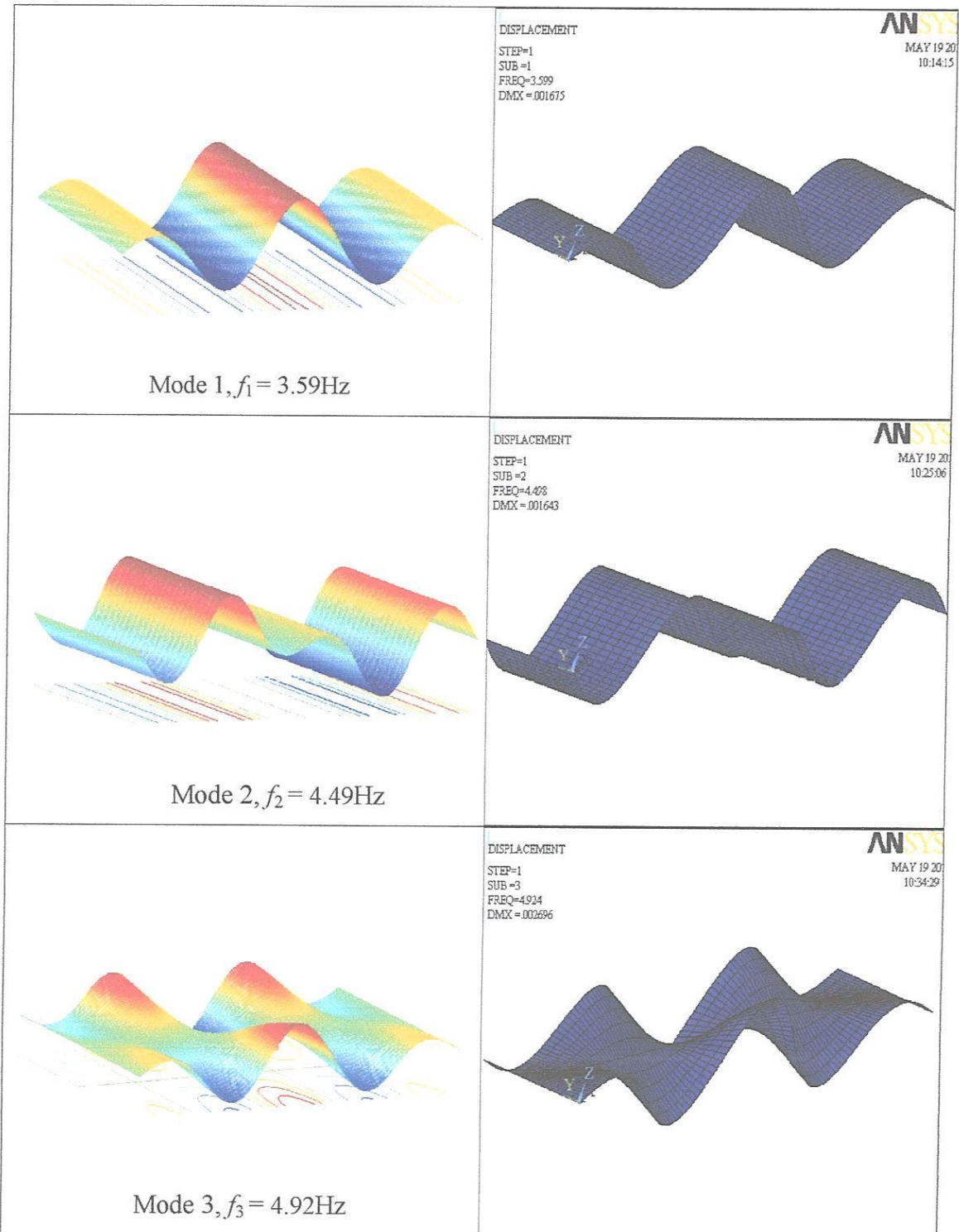


Figure 3.2 : Les six premiers modes propres de la dalle de roulement d'un pont à quatre travées



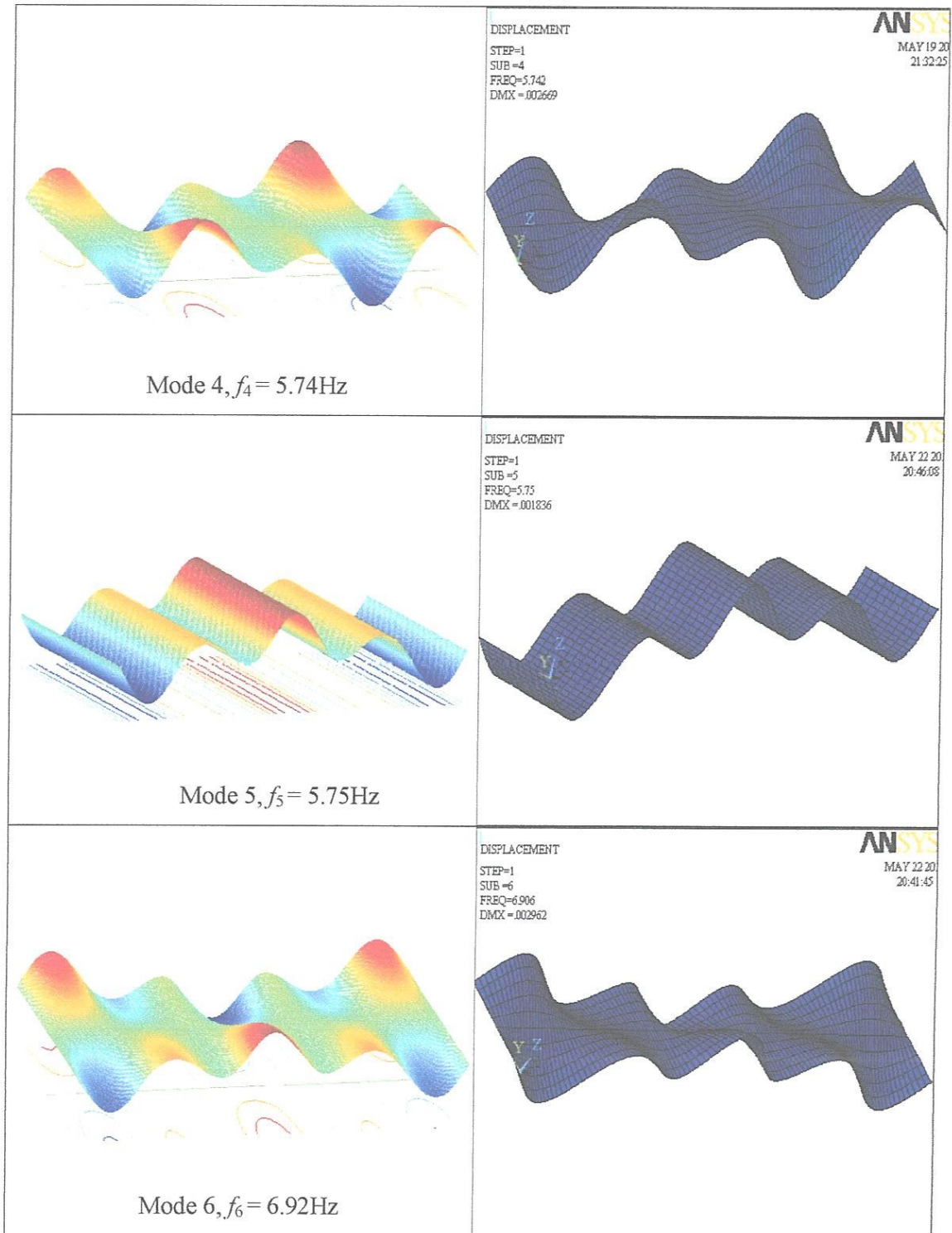


Figure 3.3 : Les six premiers modes propres de la dalle de roulement d'un pont à cinq travées

3.3 Exemple numérique de validation

Sur la base de la modélisation et de l'algorithme de résolution présentés dans le chapitre 2, nous avons élaboré un programme de calcul en langage FORTRAN qui permet la résolution numérique des équations du mouvement d'une manière découplée avec un processus de calcul itératif. Cette résolution est basée sur la méthode modale et la méthode d'intégration numérique de Newmark. Nous avons fait une validation numérique avec un exemple issu de la référence [5]. Dans cet exemple, la dalle de roulement est modélisée par une plaque isotrope à une seule travée. Pour le cas d'une dalle isotrope : $\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$, $D_x = D_y = H = Eh^3 / 12(1 - \nu^2) = D$, $D_{xy} = (1 - \nu)D / 2$ et $G_{xy} = E / 2(1 + \nu) = G$. Les données de la dalle de roulement sont les suivantes:

Données de la dalle de roulement	
Module d'élasticité :	$E = 3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Densité de masse :	$\rho = 3500 \text{ Kg/m}^3$
Rapport de Poisson :	$\nu = 0.2$
Epaisseur :	$h = 0.8 \text{ m}$
Largeur :	$b = 8 \text{ m}$
Longueur :	$l = 80 \text{ m}$

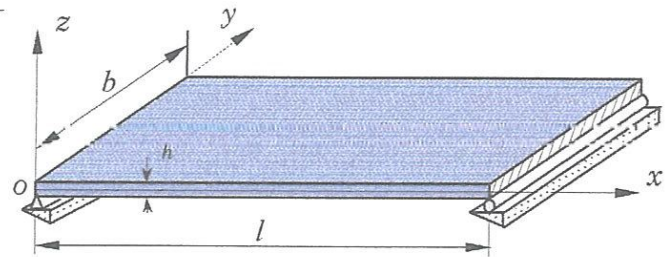
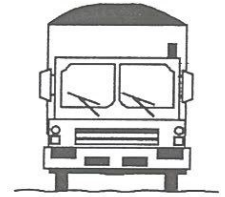
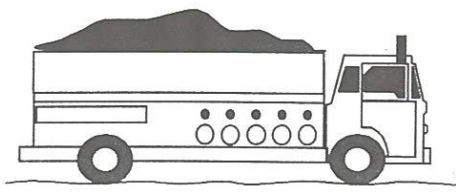


Figure 3.4 : Propriétés mécaniques et géométriques de la dalle du pont

Le véhicule est modélisé par un modèle dynamique tridimensionnel à sept degrés de liberté (voir annexe 3). Toutes les propriétés du véhicule sont les suivantes :



Donnés du véhicule à 7 degrés de liberté

Masse du bloc rigide du véhicule	:	$m_v = 1460 \text{ kg}$
Moment d'inertie de tangage	:	$I_{\theta_v} = 1516 \text{ Nms}^2$
Moment d'inertie de roulis	:	$I_{\alpha_v} = 449 \text{ Nms}^2$
Rigidité des suspensions avant	:	$k_{s1} = k_{s3} = 0.399 \times 10^6 \text{ N/m}$
Rigidité des suspensions arrière	:	$k_{s2} = k_{s4} = 0.399 \times 10^6 \text{ N/m}$
Rigidité des pneus avant	:	$k_{p1} = k_{p3} = 0.351 \times 10^6 \text{ N/m}$
Rigidité des pneus arrière	:	$k_{p2} = k_{p4} = 0.351 \times 10^6 \text{ N/m}$
Amortissement dans les suspensions avant	:	$c_{s1} = c_{s3} = 23210 \text{ Ns/m}$
Amortissement dans les suspensions arrière	:	$c_{s2} = c_{s4} = 23210 \text{ Ns/m}$
Amortissement dans les pneus avant	:	$c_{p1} = c_{p3} = 800 \text{ Ns/m}$
Amortissement dans les pneus arrière	:	$c_{p2} = c_{p4} = 800 \text{ Ns/m}$
Masse équivalente des roues avant	:	$m_1 = m_3 = 800 \text{ kg}$
Masse équivalente des roues arrière	:	$m_2 = m_4 = 710 \text{ kg}$
Distance entre l'essieu avant et arrière	:	$s_1 = 2.66 \text{ m}$
Distance entre les roues de chaque essieu	:	$s_2 = 1.5 \text{ m}$
Hauteur du centre de gravité du véhicule	:	$h = 1.2 \text{ m}$
Accélération de pesanteur	:	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$
Excentricité	:	$a_1 = 0.35, a_2 = 0.65, b_1 = b_2 = 0.5$

Figure 3.5 : Propriétés du véhicule à sept degrés de liberté

3.3.1 Validation des fréquences propres

Dans le tableau 3.2, nous avons présenté une comparaison entre les dix premières fréquences propres calculées par la présente approche avec celles calculées par le logiciel ANSYS. Les deux première fréquences propres sont comparées aussi avec celle présentées par Henchi [5]. Pour le logiciel ANSYS, nous avons utilisé un maillage fin de $80 \times 16 = 1280$ éléments coque de type shell 63. L'analyse des résultats présentés dans ce tableau montre :

- Une excellente concordance entre toutes les fréquences calculées par la présente approche avec celles calculées par ANSYS (l'erreur ne dépasse pas 0.15 %). Elle est parfaite pour certaines fréquences. Notons que les dix premiers modes sont largement suffisants pour la convergence de la réponse dynamique.
- Une divergence entre les fréquences calculées par la présente approche et celles de la référence [5]. L'auteur a utilisé un maillage grossier de $10 \times 4 = 40$ éléments, c'est-à-dire que la longueur d'un élément fini suivant x est égale à 8 m. La fréquence maximale utilisée par Henchi est 93.33 Hz. Après vérification, nous avons trouvé que la longueur d'onde $\lambda = 6.80$ m. Une condition nécessaire pour qu'un maillage en éléments finis soit convergent est que la longueur d'élément soit inférieure à $\frac{\lambda}{6} = 1.13$ m. Donc le maillage utilisé par Henchi n'est pas convergent qui se traduit dans le tableau 3.2 par une erreur très important dans leurs fréquences.

Tableau 3.2 : Comparaison des fréquences propres [Hz]

Modes	Ordre des fréq.	Fréquences propres [Hz]			Erreur [%]	
		Présente étude	ANSYS	Réf [5]	Présente étude/ANSYS	Présente étude/Réf [5]
1	1.1	0.166	0.166	0.52	0	- 213.2
2	2.1	0.664	0.664	2.16	0	- 225.3
3	3.1	1.496	1.497	--	- 0.066	--
4	1.2	2.367	2.368	--	- 0.042	--
5	4.1	2.664	2.665	--	- 0.037	--
6	5.1	4.168	4.172	--	- 0.095	--
7	2.2	4.770	4.770	--	0	--
8	6.1	6.011	6.017	--	- 0.099	--
9	3.2	7.239	7.239	--	0	--
10	7.1	8.191	8.203	--	- 0.146	--

Sur les figure 3.6 et 3.7, nous présentons une comparaison du déplacement vertical au milieu de la dalle du pont obtenu par la présente étude avec ce obtenu par la référence [5]. Le véhicule traverse la dalle du pont à une vitesse de 8 m/s. Cette comparaison montre la non concordance des résultats, cela est due à l'erreur important dans les fréquences propres de la référence [5] (voir tableau 3.2). Nous avons montré que la première fréquence propre 0.52 Hz de la référence [5], correspond à une dalle de 50 m environ et n'on pas une dalle de 80 m. Cela veut dire qu'on peut obtenir la même réponse que celle de la référence [5] mais à une vitesse inférieure à 8 m/s. Pour cela, nous avons fait plusieurs simulations et nous trouvons la même réponse à une vitesse de 2.5 m/s (voir figure 3.8).

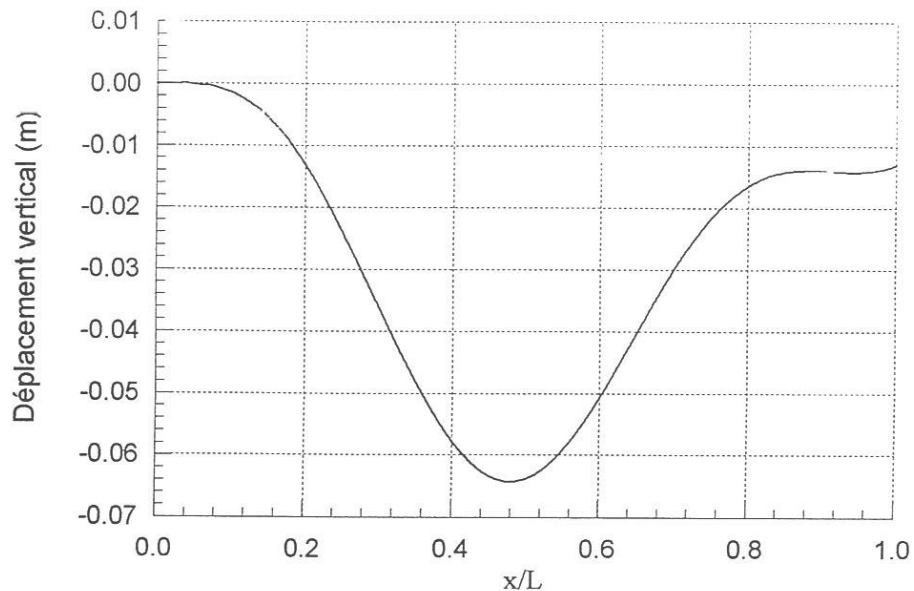


Figure 3.6 : Déplacement vertical au centre du pont en fonction de la position de l'essieu avant du véhicule, $v_x = 8$ m/s

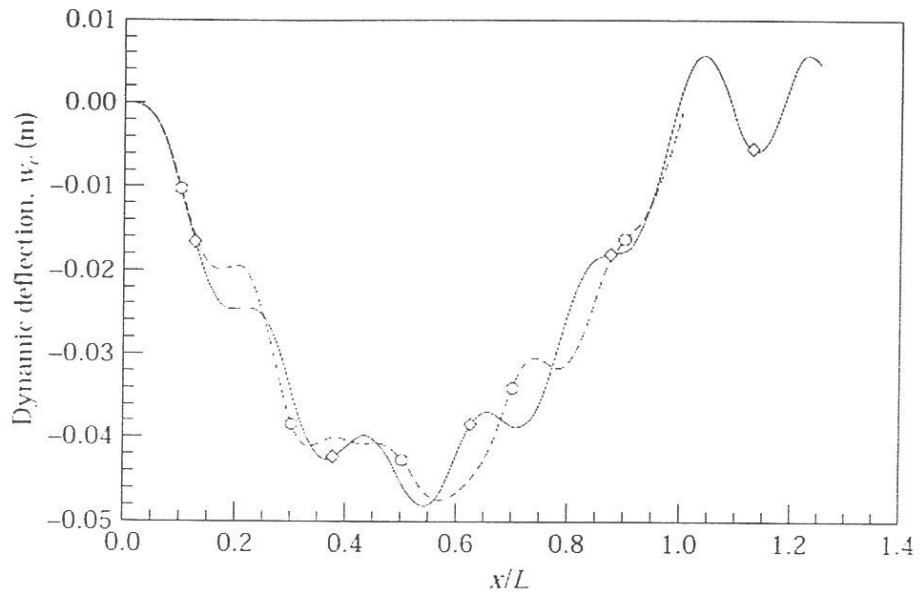


Figure 3.7 : Déplacement vertical au centre du pont en fonction de la position de l'essieu avant du véhicule, $v_x = 8$ m/s, réf. [5]

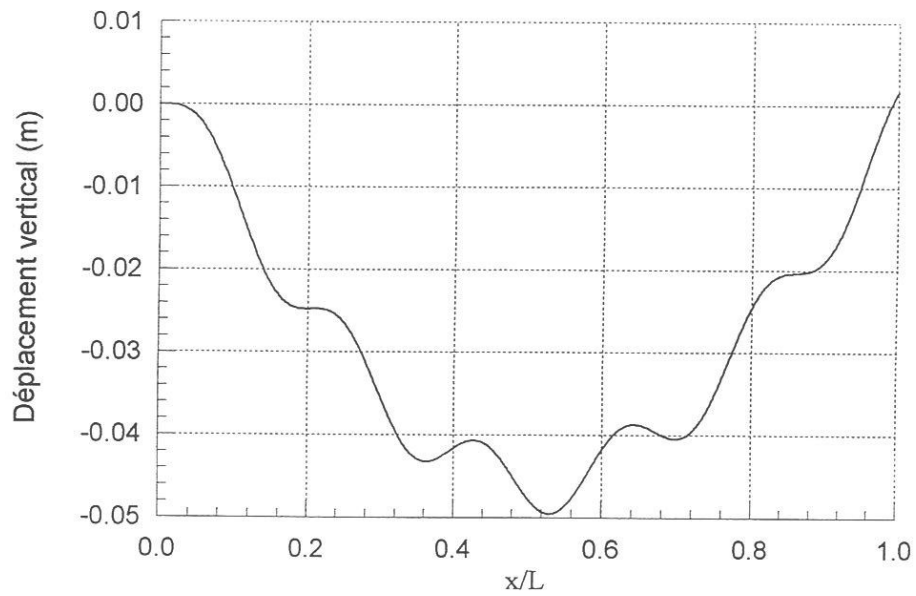


Figure 3.8 : Déplacement vertical au centre du pont en fonction de la position de l'essieu avant du véhicule, $v_x = 2.5$ m/s

Nous avons obtenu sur la figure 3.9, pour une vitesse de roulement de 6 m/s, la même réponse dynamique que celle obtenu par la référence [5] (figure 3.10) mais à une vitesse de 20 m/s.

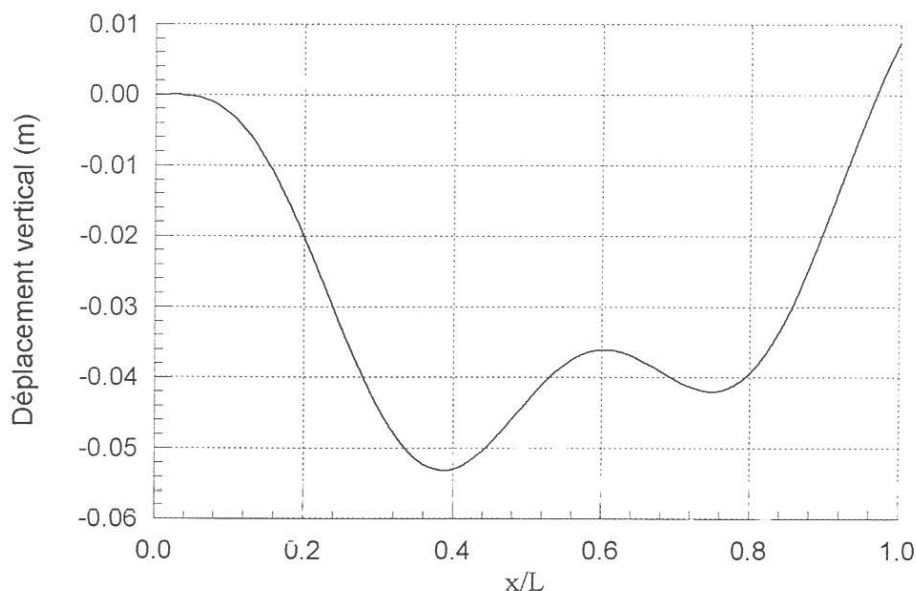


Figure 3.9 : Déplacement vertical au centre du pont en fonction de la position de l'essieu avant du véhicule, $v_x = 6$ m/s

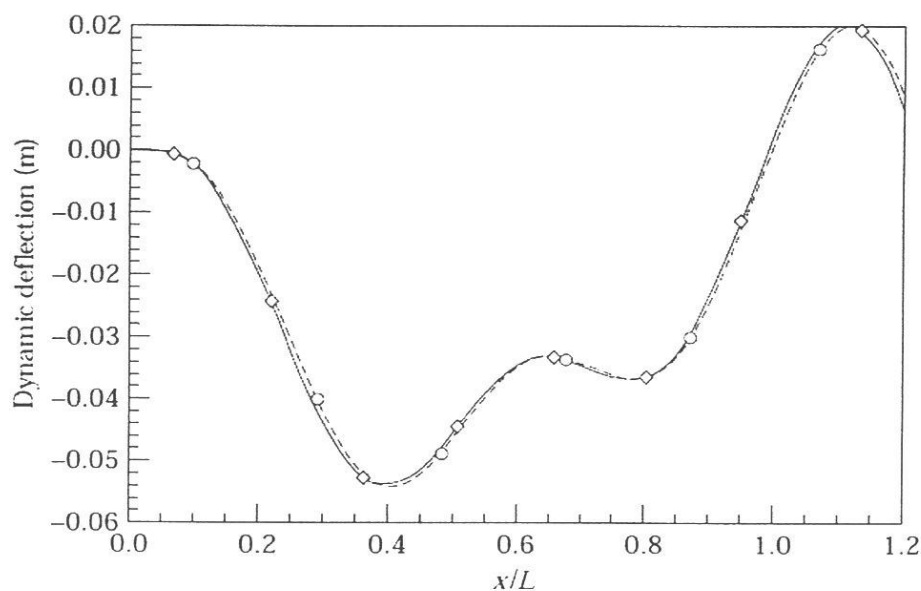


Figure 3.10 : Déplacement vertical au centre du pont en fonction de la position de l'essieu avant du véhicule, $v_x = 20$ m/s

3.4 Application au cas d'une dalle de roulement d'un pont routier

Dans cet exemple, nous étudions le comportement dynamique d'une dalle de roulement isotrope d'un pont routier à simple travée possédant les mêmes propriétés mécaniques et géométriques de l'exemple de validation précédant sauf que la longueur est égale à 40 m. La dalle est sollicitée par le même véhicule à sept degrés de liberté utilisé dans l'exemple précédant. 25 modes propres sont utilisés pour obtenir une bonne convergence de la réponse dynamique. Les cinq premières fréquences de la dalle sont les suivantes : 0.664, 2.664, 4.770, 6.011, 9.809 Hz.

3.4.1 Influence de la vitesse de roulement

La figure 3.11 montre l'influence de la vitesse de roulement du véhicule sur la réponse dynamique au centre de la dalle. Le véhicule traverse la dalle selon le cheminement centrale ($y_1 = y_2 = 3.25$ m, $y_3 = y_4 = 4.75$ m). La vitesse de roulement du véhicule est présentée sous forme d'un rapport de vitesse ($\alpha = v_x/v_{1,cr}$), où $v_{1,cr}$ est la première vitesse critique de roulement du véhicule obtenue lorsque la première fréquence de passage ($\Omega_1 = \pi v_1/l$) est égale à la première fréquence propre de la dalle ($\omega_{11} = 2\pi f_{11}$). Dans ce cas, on a montré que $v_{1,cr} = 2lf_{11}$. Lorsque la vitesse de roulement égale la première vitesse critique du passage ($v_x = v_{1,cr}$), la fréquence du passage égale deux fois la première fréquence propre de la dalle $f_1^* = 2f_{11}$. Les différents valeurs du rapport de vitesse utilisés sont $\alpha = 10^{-5}$, 0.25, 0.5, 1 et 1.5. D'après cette figure, on constate que pour une vitesse très faible ($\alpha = 10^{-5}$), la réponse dynamique au centre de la dalle tend vers la flèche statique. Avec l'augmentation de la vitesse, le déplacement vertical au centre de la dalle augmentent jusqu'à $v_x = 0.5v_{1,cr}$ ($\alpha = 0.5$) au delà de cette vitesse le déplacement diminue et se décale en amont dans le sens de roulement du véhicule.

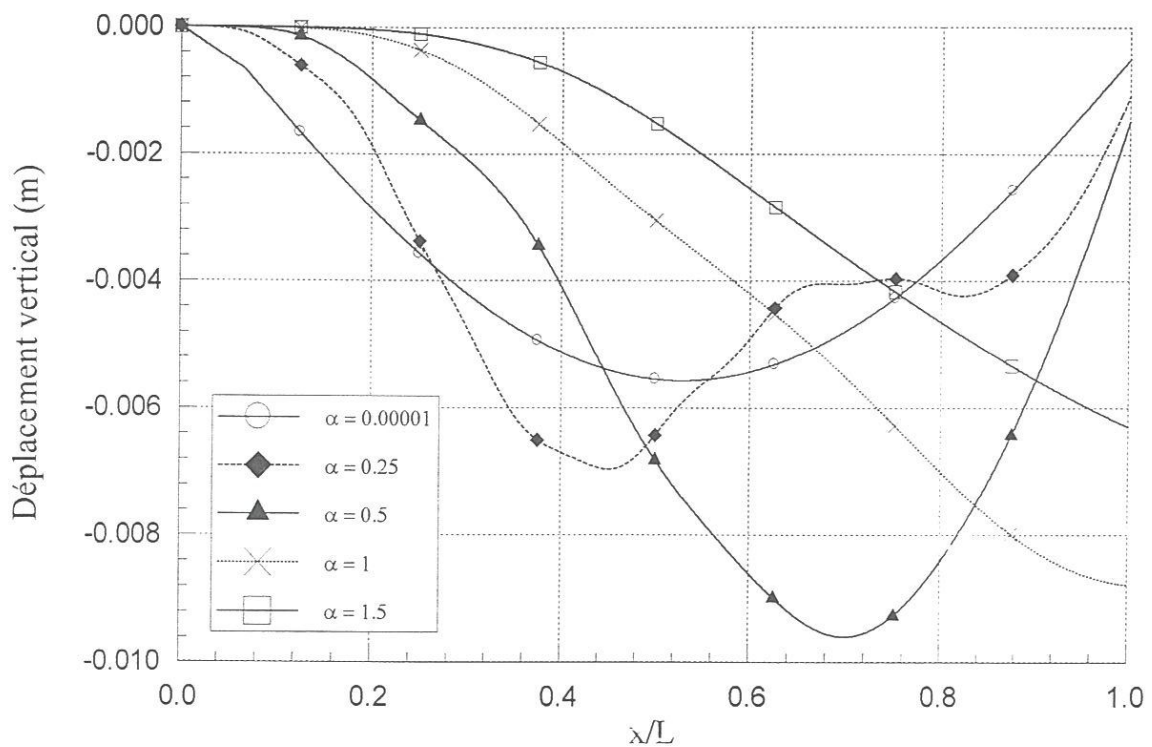


Figure 3.11: Influence de la vitesse de roulement du véhicule sur la réponse dynamique au milieu de la dalle de roulement du pont

La figure 3.12 montre la variation du facteur d'amplification dynamique (FAD) de la dalle de roulement en fonction de la vitesse de passage du véhicule. Le FAD est défini comme étant le rapport entre la réponse dynamique maximale et la réponse statique maximale dans le même point de la dalle du pont. Le facteur d'amplification dynamique est calculé à partir des déplacements verticaux au centre de la dalle. La flèche statique maximale est obtenue lorsque le véhicule traverse la dalle avec une vitesse très faible ($\alpha = 10^{-5}$). Dans ce cas, la flèche statique maximale au centre de la dalle est $W_{s\max} = 0.00565$ m. d'après cette figure on remarque que le FAD augmente avec l'augmentation de la vitesse de roulement jusqu'à la vitesse de 100 km/h ($FAD = 1.7$) puis diminue.

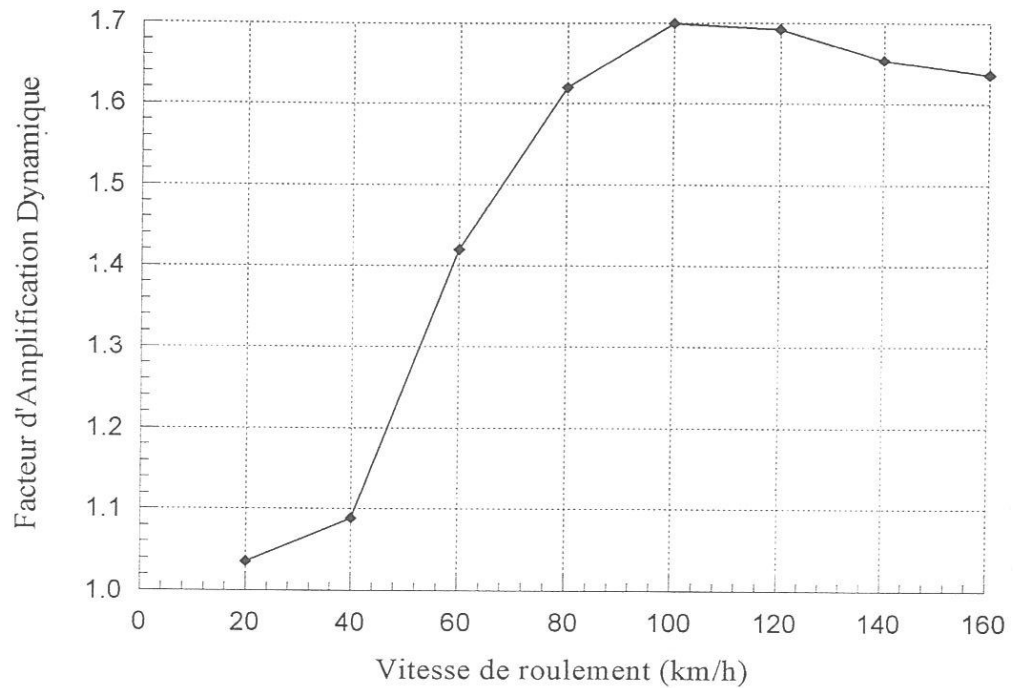


Figure 3.12 : Variation du facteur d'amplification dynamique en fonction de la vitesse de roulement du véhicule

3.4.2 Influence du profil de la chaussée

Sur la base de l'expression du profil de la route (2.53), nous présentons sur la figure 3.13, le profil aléatoire de la voie de roulement pour différentes valeurs du coefficient de rugosité spectral A_r . La génération du variable aléatoire θ_k se fait sur MATLAB. Dans le tableau 3.3, nous présentons les valeurs expérimentales de A_r en fonction de l'état de la voie de roulement [2].

Tableau 3.3: Valeurs expérimentales de A_r , selon le type de la surface du pont

État de la surface	Très bon	Bon	Moyen	Mauvais
$A_r (m^3/cycle) \times 10^{-6}$	$A_r < 5$	$5 < A_r < 20$	$20 < A_r < 80$	$80 < A_r < 256$

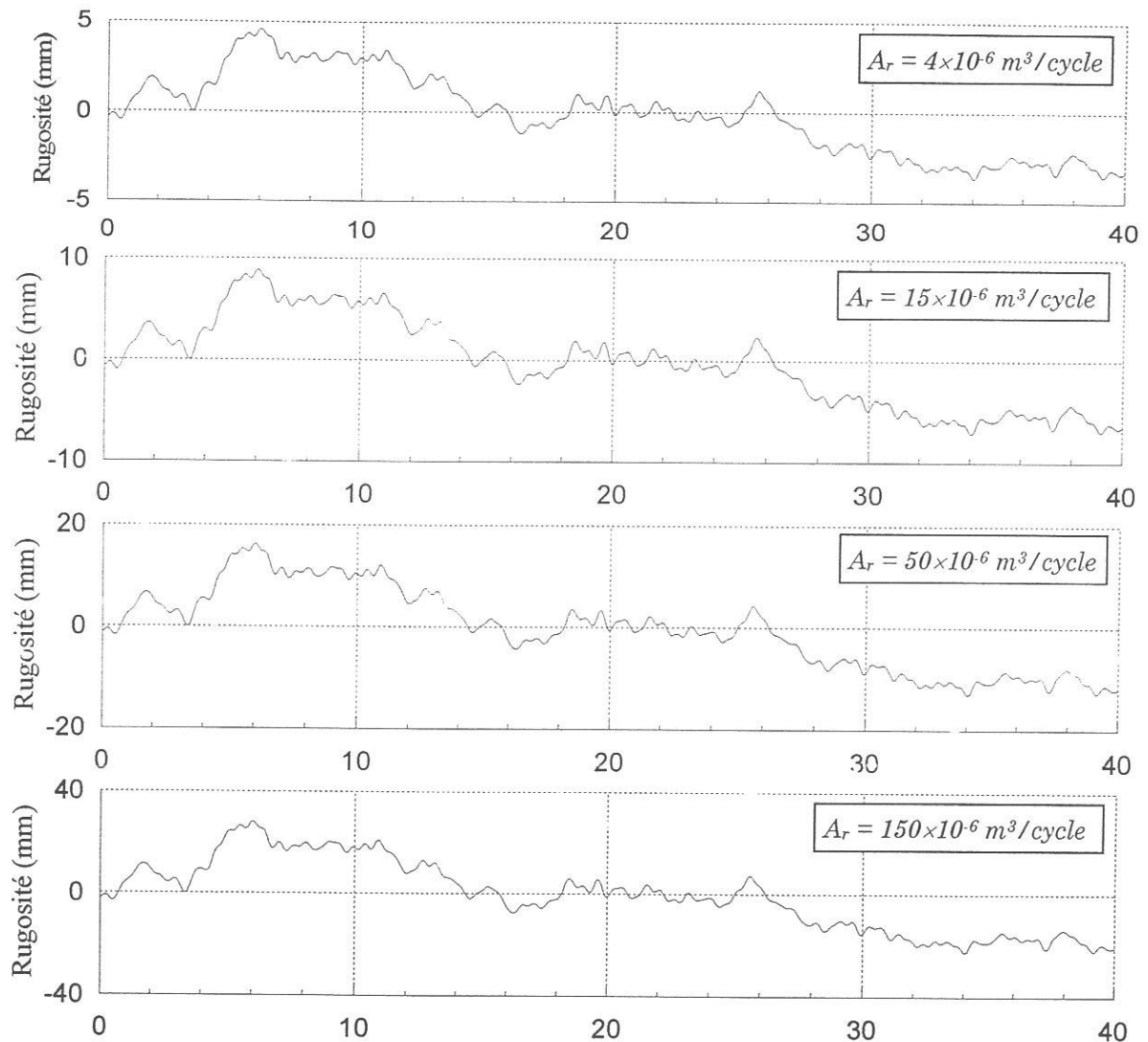


Figure 3.13 : Profil aléatoire de la voie de roulement pour différentes valeurs du coefficient de rugosité A_r

La figure 3.14 montre l'influence de l'état de la chaussée sur la force d'interaction (F_{p1}) exercée par une roue avant du véhicule sur la dalle du pont. Le véhicule roule à une vitesse de 70 km/h suivant la trajectoire centrale ($y_1 = y_2 = 3.25$ m, $y_3 = y_4 = 4.75$ m). Les constatations dégagées sont :

- l'augmentation des amplitudes de la force d'interaction avec la dégradation de l'état de la chaussée.
- les amplitudes de la force d'interaction varient en fonction de la position du véhicule autour d'une valeur moyenne (12.5kN) qui correspond à la force statique obtenue par une vitesse très faible et une chaussée parfaite (courbe en trait pointier).

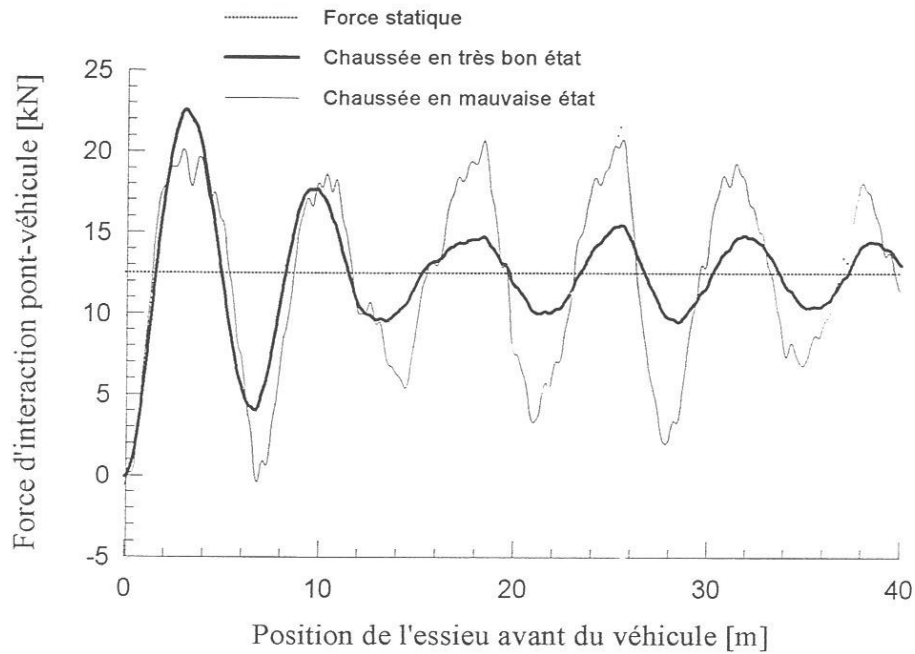


Figure 3.14: Force d'interaction exercée par une roue avant du véhicule

3.4.3 Influence de facteur d'amortissement visqueux de la dalle

La figure 3.15 montre la variation du facteur d'amplification dynamique (FAD) en fonction du facteur d'amortissement visqueux de la dalle de roulement. Le véhicule traverse la dalle à une vitesse de 100 km/h sur un chaussée en très bon état ($A_r = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{cycle}$). D'après cette figure on remarque une diminution de 20 % du facteur d'amplification dynamique pour une augmentation de 0 à 10 % du facteur d'amortissement.

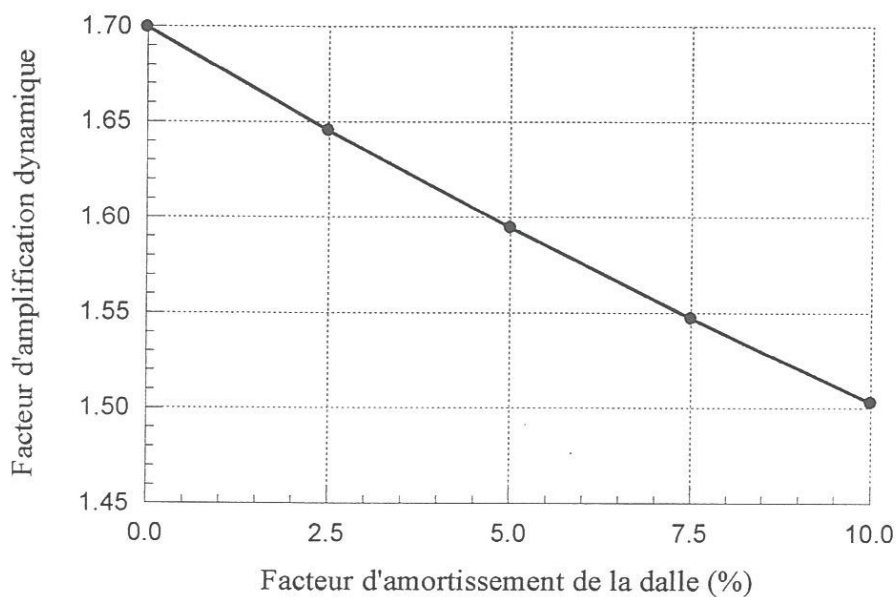


Figure 3.15 : variation du facteur d'amplification dynamique en fonction du facteur d'amortissement visqueux de la dalle

Conclusion générale

Cette étude avait pour objectif, la modélisation du comportement vibratoire d'une dalle de roulement d'un pont routier lors du passage d'un véhicule avec la prise en compte de l'interaction dynamique pont-véhicule et des irrégularités du profil de la chaussée.

Sur la base de cette modélisation, nous avons élaboré plusieurs programmes en langage FORTRAN, permettant la résolution numérique des équations du mouvement dans le cas étudié. Cette résolution est basée sur la méthode modale et l'intégration directe par la méthode de Newmark. Les fréquences et modes propres des trois exemples numériques pour les dalles orthotropes étudiées, sont présentés et validés. Deux exemples numériques pour les dalles isotropes sont présentés pour valider la réponse dynamique.

Sur la base des résultats obtenues et l'analyse de ces résultats, nous avons tiré les conclusions suivantes :

- La comparaison des résultats des fréquences obtenus montre une excellente concordance avec les résultats de la simulation numérique par ANSYS, ce qui montre la validité de notre modélisation.
- Les résultats des fréquences propres et des réponses dynamiques obtenues par la présente approche et celles présentées dans la référence [5], sont divergents.
- Le déplacement vertical au centre de la dalle est maximal pour une vitesse de roulement égale la moitié de la première vitesse critique (100km/h). Dans ce cas le facteur d'amplification dynamique est égal à 1.7.
- L'influence des différents paramètres sur le facteur d'amplification dynamique de la dalle de roulement est résumée de la manière suivante :

- Pour l'exemple étudié, le facteur d'amplification dynamique dépend de la vitesse du véhicule. Il augmente lorsque la vitesse augmente jusqu'à la vitesse de 100 km/h puis diminue.
- le facteur d'amplification dynamique dépend du facteur d'amortissement visqueux. Il peut subir un décroissement d'environ 20% pour un accroissement de 0 à 10 % du facteur d'amortissement visqueux.
- Le profil du chemin de roulement est le paramètre le plus important qui influe sur la force d'interaction.

Références bibliographiques

- [1] Broquet C., 1999, "Comportement des dalles de roulement des routes en béton sollicitées par le trafic routier", thèse PhD, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [2] Henchi. K, 1995, "Analyse dynamique des ponts par élément fini sous les sollicitation des véhicules mobiles", Thèse de doctorat, université de technologie de compiègne.
- [3] P.K., Chatterjee., T.K. Datta., C.S.Surana, 1994, "Vibration of continuous bridges under moving vehicles" *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169(5), p 619-632.
- [4] O. Coussy, M. Said, J.-P. Van Hoove, 1989, "The influence of random surface irregularities on the dynamic response of bridges under suspended moving loads", *Journal of Sound and Vibration*", Vol. 130, No 2, p 313-320.
- [5] K. Henchi., M. Fafard., M. Talbot., G. Dhatt., 1998, "An efficient algorithm for dynamic analysis of bridges under moving vehicles using a coupled modal and physical components approach" *Journal of sound and vibration*, vol. 212(4), p 663-683.
- [6] X.Q. Zhu., S.S. Law., 2002, "Practical aspects in moving load identification" *Journal of Sound and vibration*, vol. 258(1), p 123-146.
- [7] X.Q. Zhu., S.S. Law., 2002, "Dynamic load on multi-lane bridge deck from moving vehicles". *Journal of sound and Vibration*, Vol. 251(4), p 697-716.
- [8] S. Marchesiello., A. Fasana., L.Garibaldi., B.A..D. Piombo., 1999, "Dynamics of multi-span continuous straight bridges subject to multi-degrees of freedom moving vehicle excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 224(3), p 541-561.
- [9] H. Ludescher, 2003, "Berücksichtigung von dynamischen verkehrslasten beim tragsicherheitsnachweis von strassenbrücken", Thèse EPFL.

- [10] N.Yagiz., L.E.Sakman., 2006, “Vibrations of a rectangular bridge as an isotropic plate under a travelling full vehicle model”, *Journal of Vibration and Control*.
- [11] E. Esmailzadeh., N. Jalili., 2003, “Vehicle–passenger–structure interaction of uniform bridges traversed by moving vehicles”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 260, p 611–635.
- [12] M.F. Green., D. Cebon., 1994, “Dynamic response of highway bridges to heavy vehicle loads: theory and experimental validation”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 170(1), p 51-78.
- [13] K. Chompooming., M.Yener., 1995, “The influence of roadway surface irregularities and vehicle deceleration on bridge dynamics using the method of lines”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 183(4), p 567-589.
- [14] A. W, Rezaiguia. 2008, “Modélisation du comportement vibratoire et acoustique d'un pont de la chaussée lors du passage des véhicules”, Thèse doctorat, université Badji Mokhtar, Annaba.
- [15] F.T.K. Au, M.F. Wang, 2005, “Sound radiation from forced vibration of rectangular orthotropic plate under moving loads”, *Journal of sound and vibration*, vol. 281., p 1057-1075.
- [16] X.Q. Zhu., S.S. Law., 2001, “orthogonal function in moving loads identification on a multi-span bridge”, *Journal of sound and vibration*, vol. 245(2)., p 329-345.

Annexe 1

Fréquences et modes propres d'une poutre continue en appuis simples

Pour déterminer les fréquences et les modes propres exactes d'une poutre continue (multi-travées), (figure 1.1), il faut déterminer les fréquences et les modes propres pour chaque travée avec la prise en compte des conditions aux limites et de continuités aux appuis intermédiaires. L'expression du mode i pour la vibration transversale dans la travée r est :

$$\varphi_r(x_r) = A_r \sin k_r x_r + B_r \cos k_r x_r + C_r \operatorname{sh} k_r x_r + D_r \operatorname{ch} k_r x_r, \quad r=1,2,\dots,R \quad (\text{A } 1.1)$$

A_{ri}, B_{ri}, C_{ri} et D_{ri} , sont les constantes d'intégrations, elles sont fonction de la $i^{\text{ème}}$ pulsation propre ω_i de la travée r , R est le nombre de travées, k_r est un paramètre de fréquence.

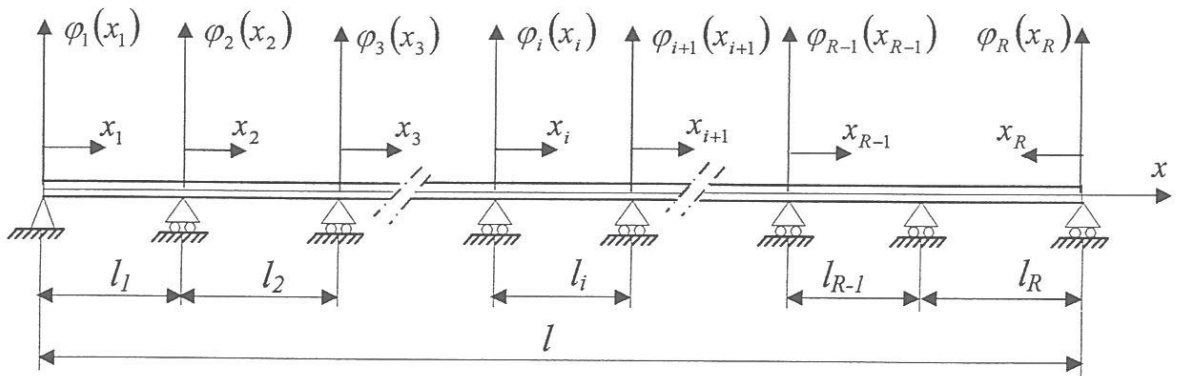


Figure 1.1: Poutre continue de R travée

Zhu et law [16], ont présenté la détermination des fréquences et modes propres des poutres multi-travées, les conditions aux limites et les conditions de continuité sont citées comme suite :

Le déplacement vertical est nul au niveau de tous les appuis, et le moment fléchissant est nul aux extrémités de la poutre (les conditions limites) :

$$\begin{aligned} \varphi_r(x_r)|_{x_r=0} = \varphi_r(x_r)|_{x_r=l_r} = 0 \quad r=1,2,\dots,R \\ \frac{d^2 \varphi_1(x_1)}{d x_1^2} \Big|_{x_1=0} = \frac{d^2 \varphi_R(x_R)}{d x_R^2} \Big|_{x_R=0} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A } 1.2.a)$$

La pente et le moment fléchissant au niveau des appuis intermédiaires sont (les conditions de continuité) :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi_r(x_r)}{dx_r} \Big|_{x_r=l_r} &= \frac{d\varphi_{r+1}(x_{r+1})}{dx_{r+1}} \Big|_{x_{r+1}=0} \\
 \frac{d^2\varphi_r(x_r)}{dx_r^2} \Big|_{x_r=l_r} &= \frac{d^2\varphi_{r+1}(x_{r+1})}{dx_{r+1}^2} \Big|_{x_{r+1}=0} \quad r = 1, 2, \dots, R-2 \\
 \frac{d\varphi_{R-1}(x_{R-1})}{dx_{R-1}} \Big|_{x_{R-1}=l_{R-1}} &= -\frac{d\varphi_R(x_R)}{dx_R} \Big|_{x_R=l_R} \\
 \frac{d^2\varphi_{R-1}(x_{R-1})}{dx_{R-1}^2} \Big|_{x_{R-1}=l_{R-1}} &= \frac{d^2\varphi_R(x_R)}{dx_R^2} \Big|_{x_R=l_R}
 \end{aligned} \tag{A1.2.b}$$

En substituant les conditions aux limites et les conditions de continuité dans l'équation (A1.1), après plusieurs simplifications, on obtient l'expression (A1.3) des modes propres :

Les modes propres

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1 \left(\sin(kx) - \frac{\sin(kl_1)}{\sinh(kl_1)} \sinh(kx) \right), & 0 \leq x \leq l_1, \\ A_r \left(\sin \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) - \frac{\sin(kl_r)}{\sinh(kl_r)} \sinh \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) \right) \\ + B_r \left(\cos \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) - \cosh \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) + \frac{\cosh(kl_r) - \cos(kl_r)}{\sinh(kl_r)} \sinh \left(k \left(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j \right) \right) \right), & \sum_{j=1}^{r-1} l_j \leq x \leq \sum_{j=1}^r l_j \quad r = 2, 3, \dots, R-1, \\ A_R \left(\sin(k(l-x)) - \frac{\sin(kl_R)}{\sinh(kl_R)} \sinh(k(l-x)) \right), & l - l_R \leq x \leq l, \end{cases} \tag{A1.3}$$

Où les paramètres $k, A_1, A_r, B_r (r = 2, 3, \dots, R-1), A_R$ déterminés par la résolution de l'équation (A1.4).

$$[F]\{A\} = 0, \tag{A1.4}$$

Où :

$$A = \{A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, A_{R-1}, B_{R-1}, A_R\}^T$$

Les éléments de la matrice F sont donnés par

$$\begin{aligned} f_{11} &= \cos(kl_1) - \theta_1 \cosh(kl_1), & f_{12} &= \theta_2 - 1, & f_{13} &= -\Phi_2, \\ f_{21} &= \sin(kl_1), & f_{23} &= -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2r-1,2(r-1)} &= \cos(kl_r) - \theta_r \cosh(kl_r), \\ f_{2r-1,2r-1} &= -\sin(kl_r) - \sinh(kl_r) + \Phi_r \cosh(kl_r), \\ f_{2r-1,2r} &= \theta_{r+1} - 1, \\ f_{2r-1,2r+1} &= -\Phi_{r+1}, & r &= 2, 3, \dots, R-2, \text{ pour } R > 3 \\ f_{2r,2(r-1)} &= -\sin(kl_r) - \theta_r \sinh(kl_r), \\ f_{2r,2r-1} &= -\cos(kl_r) - \cosh(kl_r) + \Phi_r \sinh(kl_r), \\ f_{2r,2r+1} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2R-3,2(R-2)} &= -\cos(kl_{R-1}) + \theta_{R-1} \cosh(kl_{R-1}), \\ f_{2R-3,2R-3} &= \sin(kl_{R-1}) + \sinh(kl_{R-1}) - \Phi_{R-1} \cosh(kl_{R-1}), \\ f_{2R-3,2(R-1)} &= \theta_R \cosh(kl_R) - \cos(kl_R), \\ f_{2(R-1),2(R-2)} &= \sin(kl_{R-1}) + \theta_{R-1} \sinh(kl_{R-1}), \\ f_{2(R-1),2R-3} &= \cos(kl_{R-1}) + \cosh(kl_{R-1}) - \Phi_{R-1} \sinh(kl_{R-1}), \\ f_{2(R-1),2(R-1)} &= -2 \sin(kl_R), \end{aligned}$$

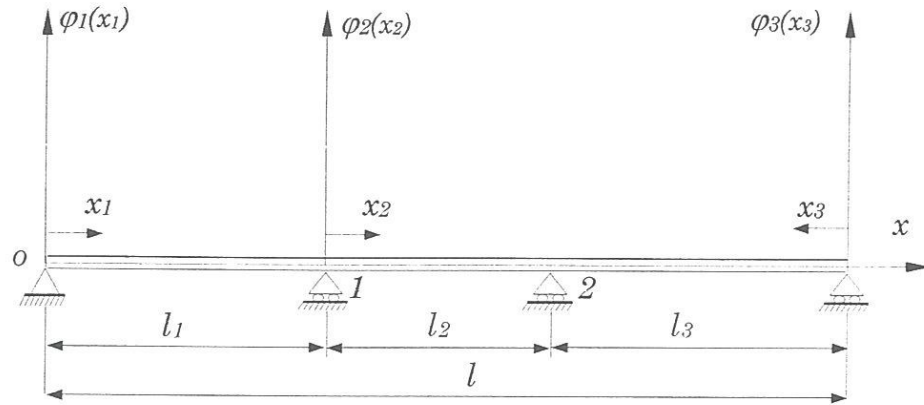
Où :

$$\theta_r = \frac{\sin(kl_r)}{\sinh(kl_r)}, \quad \Phi_r = \frac{\cosh(kl_r) - \cos(kl_r)}{\sinh(kl_r)} \quad r = 1, 2, \dots, R$$

et les autres éléments f_{ij} égaux à zéro

Cas d'une poutre à trois travées (R = 3)

Considérons le cas d'une poutre à trois travées (figure 1.2), possédant les mêmes propriétés suivantes : module d'Young, masse par unité de longueur et moment d'inertie polaire.


Figure 1.2: Poutre continue avec 2 appuis intermédiaires simples

Les modes propres de chaque travée r sont (on omet l'indice i) :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1(\sin kx - \theta_1 \operatorname{sh} kx), & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_2(\sin k(x-l_1) - \theta_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) + B_2(\cos k(x-l_1) \\ \quad - \operatorname{ch} k(x-l_1) + \Phi_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_3(\sin k(l-x) - \theta_3 \operatorname{sh} k(l-x)), & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l \end{cases} \quad (\text{A1.5})$$

Avec :

$$\theta_r = \frac{\sin k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 1, 2, 3 \quad \Phi_2 = \frac{\operatorname{ch} k l_2 - \cos k l_2}{\operatorname{sh} k l_2}$$

k, A_1, A_2, B_2, A_3 déterminés par la résolution du système d'équations (A1.4).

Où :

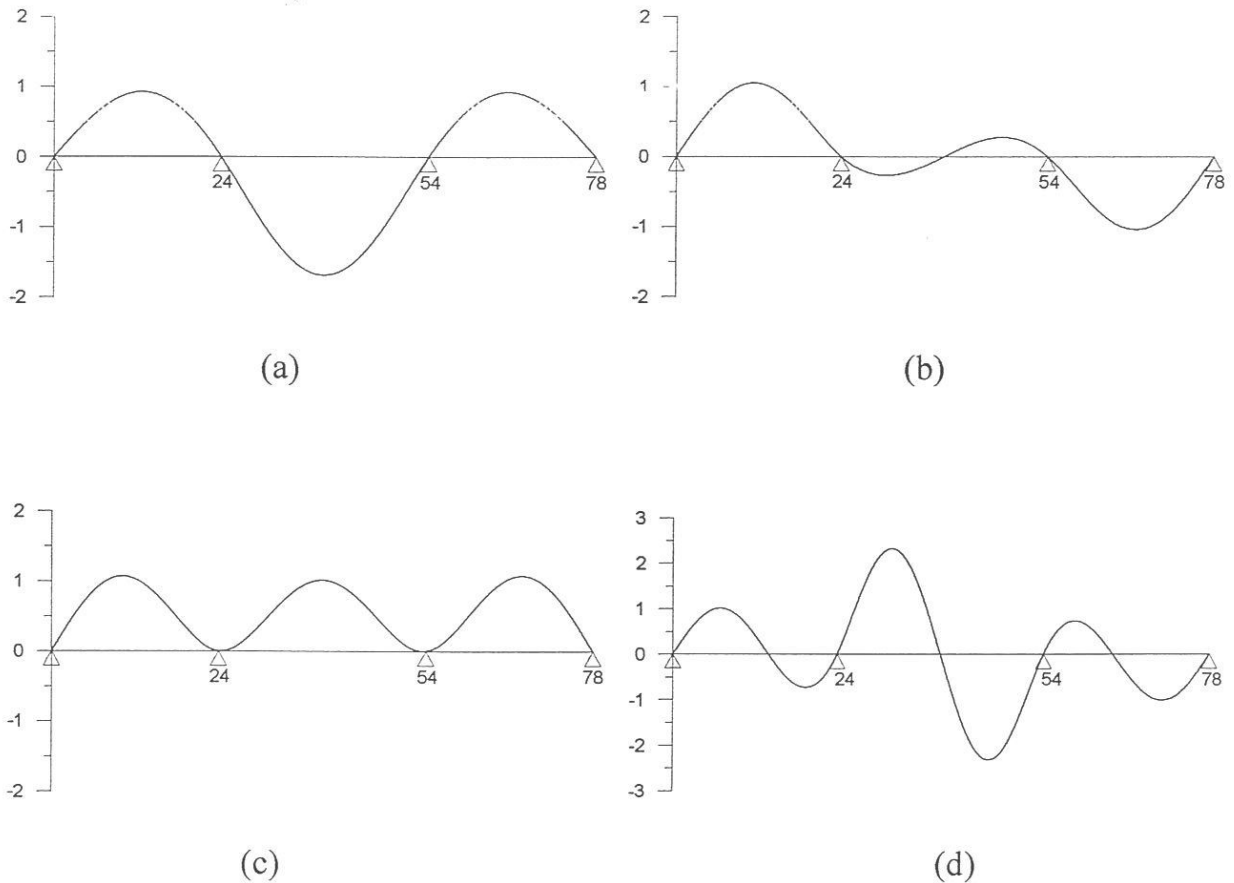
$$A = \{A_1, A_2, B_2, A_3\}^T$$

$$[F] = \begin{bmatrix} \cos(kl_1) - \theta_1 \operatorname{cosh}(kl_1) & \theta_2 - 1 & -\Phi_2 & 0 \\ \sin(kl_1) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\cos(kl_2) + \theta_2 \operatorname{cosh}(kl_2) & \sin(kl_2) + \operatorname{sinh}(kl_2) & -\cos(kl_3) + \theta_3 \operatorname{cosh}(kl_3) \\ 0 & \sin(kl_2) + \theta_2 \operatorname{sinh}(kl_2) & -\Phi_2 \operatorname{cosh}(kl_2) & -2 \sin(kl_3) \end{bmatrix}$$

L'équation aux fréquences

$$\begin{aligned}
 & 2(\coth(k_i l_1) \sin(k_i l_1) \sin(k_i l_2) + \coth(k_i l_2) \sin(k_i l_1) \sin(k_i l_2) \\
 & - \sin(k_i(l_1 + l_2))) (\cos(k_i l_3) - \coth(k_i l_3) \sin(k_i l_3)) \\
 & + \sin(k_i l_3) (2 \cos(k_i l_1) \cos(k_i l_2) + 3 \operatorname{csc} h(k_i l_2) \sin(k_i l_1) \\
 & + \coth(k_i l_2) (-4 \cos(k_i l_2) \sin(k_i l_1) + \operatorname{cosh}(k_i l_2) \sin(k_i l_1)) \\
 & - 2 \cos(k_i l_1) \sin(k_i l_2) - 2 \operatorname{cosh}(k_i l_1) \sin(k_i l_1) (\cos(k_i l_2) \\
 & - \coth(k_i l_2) \sin(k_i l_2)) - \sin(k_i l_1) \sinh(k_i l_2))
 \end{aligned} \tag{A1.6}$$

Le logiciel Mathématica permet de déterminer les racines k_i de l'équation aux fréquences (1.7). Considérons une poutre de longueur $l = 78$ m à trois travées illégales de longueurs $l_1 = l_3 = 24$ m, $l_2 = 30$. Les six premiers modes propres de la poutre à trois travées sont présentés sur la figure 1.3.



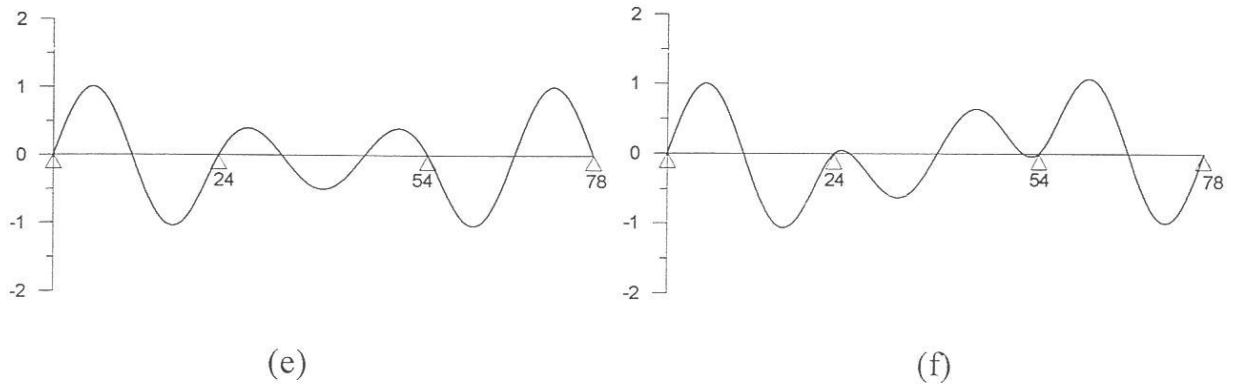


Figure 1.3: Les six premiers modes propres de la poutre à trois travées, modes: (a) 1, $k_1=0.1178$; (b) 2, $k_2=0.1455$; (c) 3, $k_3=0.1614$; (d) 4, $k_4=0.2304$; (e) 5, $k_5=0.2736$; (f) 6, $k_6=0.2857$

Cas d'une poutre à quatre travées (R=4)

Comme l'exemple précédent, on prenant le cas d'une poutre à quatre travées dont les propriétés mécaniques sont les mêmes dans chaque travée. Considérons la poutre de longueur $l = 108$ m à quatre travées illégales de longueurs $l_1 = l_4 = 24$ m, $l_2 = l_3 = 30$. Les modes propres de chaque travée r sont (figure 1.4) :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1(\sin kx - \theta_1 \operatorname{sh} kx), & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_2(\sin k(x-l_1) - \theta_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) + B_2(\cos k(x-l_1) \\ \quad - \operatorname{ch} k(x-l_1) + \Phi_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)), & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_3(\sin k(x-(l_1+l_2)) - \theta_3 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2))) + B_3(\cos k(x-(l_1+l_2)) \\ \quad - \operatorname{ch} k(x-(l_1+l_2)) + \Phi_3 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2))), & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3 \\ A_4(\sin k(l-x) - \theta_4 \operatorname{sh} k(l-x)), & \text{pour } l_1 + l_2 + l_3 \leq x \leq l \end{cases} \quad (\text{A1.7})$$

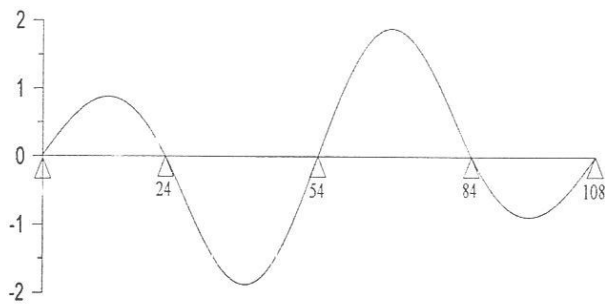
$$\theta_r = \frac{\sin k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad \Phi_r = \frac{\operatorname{ch} k l_r - \cos k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 2, 3$$

$k, A_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4$ déterminés par la résolution du système d'équations (A1.4).

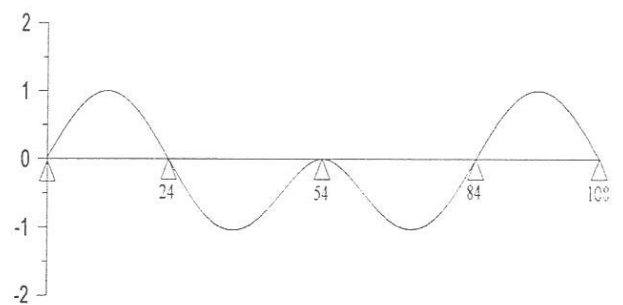
Où :

$$A = \{A_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4\}^T$$

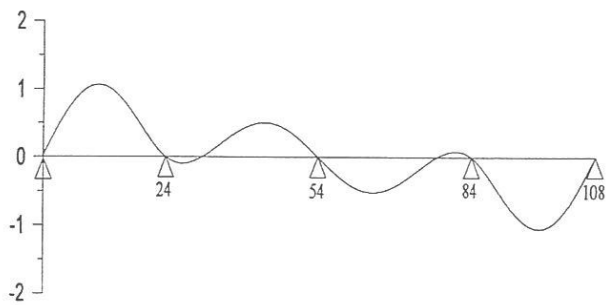
$$[F] = \begin{bmatrix} \cos(kl_1) - \theta_1 \operatorname{ch}(kl_1) & \theta_2 - 1 & -\Phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(kl_1) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kl_2) - \theta_2 \operatorname{ch}(kl_2) & -\sin(kl_2) - \operatorname{sh}(kl_2) & \theta_3 - 1 & -\Phi_3 & 0 \\ 0 & -\sin(kl_2) - \theta_2 \operatorname{sh}(kl_2) & +\Phi_2 \operatorname{ch}(kl_2) & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(kl_2) - \operatorname{ch}(kl_2) & -\cos(kl_3) + \theta_3 \operatorname{ch}(kl_3) & \sin(kl_3) + \operatorname{sh}(kl_3) & -\cos(kl_4) + \theta_4 \operatorname{ch}(kl_4) \\ 0 & 0 & +\Phi_2 \operatorname{sh}(kl_2) & \sin(kl_3) + \theta_3 \operatorname{sh}(kl_3) & -\Phi_3 \operatorname{ch}(kl_3) & -2 \sin(kl_4) \end{bmatrix}$$



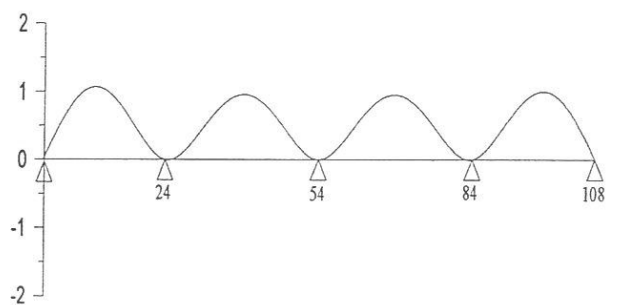
(a)



(b)



(c)



(d)

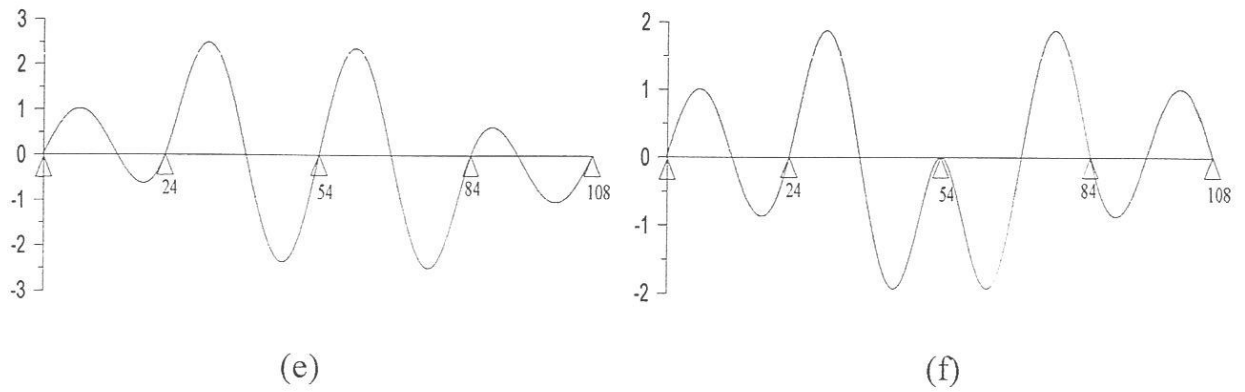


Figure 1.4: Les six premiers modes propres de la poutre à quatre travées, modes: (a) 1, $k_1=0.1126$; (b) 2, $k_2=0.1308$; (c) 3, $k_3=0.1516$; (d) 4, $k_4=0.1605$; (e) 5, $k_5=0.2213$; (f) 6, $k_6=0.2435$.

Cas d'une poutre à cinq travées (R = 5)

On prenant le cas d'une poutre à cinq travées dont les propriétés mécaniques sont les mêmes dans chaque travée. Considérons la poutre de longueur $l = 138$ m à cinq travées illégales de longueurs $l_1 = l_5 = 24$ m, $l_2 = l_3 = l_4 = 30$. Les modes propres de chaque travée r sont (figure 1.5) :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1(\sin kx - \theta_1 \operatorname{sh} kx), & \text{pour } 0 \leq x \leq l_1 \\ A_2(\sin k(x-l_1) - \theta_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)) + B_2(\cos k(x-l_1) - \operatorname{ch} k(x-l_1) + \Phi_2 \operatorname{sh} k(x-l_1)), & \text{pour } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \\ A_3(\sin k(x-(l_1+l_2)) - \theta_3 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2))) + B_3(\cos k(x-(l_1+l_2)) - \operatorname{ch} k(x-(l_1+l_2)) + \Phi_3 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2))), & \text{pour } l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3 \\ A_4(\sin k(x-(l_1+l_2+l_3)) - \theta_4 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2+l_3))) + B_4(\cos k(x-(l_1+l_2+l_3)) - \operatorname{ch} k(x-(l_1+l_2+l_3)) + \Phi_4 \operatorname{sh} k(x-(l_1+l_2+l_3))), & \text{pour } l_1 + l_2 + l_3 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \\ A_5(\sin k(l-x) - \theta_5 \operatorname{sh} k(l-x)), & \text{pour } l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \leq x \leq l \end{cases} \quad (A1.8)$$

$$\theta_r = \frac{\sin k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \Phi_r = \frac{\operatorname{ch} k l_r - \cos k l_r}{\operatorname{sh} k l_r}, \quad r = 2, 3, 4$$

$k, A_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5$ déterminés par la résolution du système d'équations (A1.4).

Où :

$$A = \{A_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5\}^T$$

$$[F] = \begin{bmatrix} \cos(kl_1) - \theta_1 \operatorname{ch}(kl_1) & \theta_2 - 1 & -\Phi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(kl_1) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kl_2) - \theta_2 \operatorname{ch}(kl_2) & -\sin(kl_2) - \operatorname{sh}(kl_2) & \theta_3 - 1 & -\Phi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & + \Phi_2 \operatorname{ch}(kl_2) & + \Phi_2 \operatorname{ch}(kl_2) & & & & & & \\ 0 & -\sin(kl_2) - \theta_2 \operatorname{sh}(kl_2) & -\cos(kl_2) - \operatorname{ch}(kl_2) & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & + \Phi_2 \operatorname{sh}(kl_2) & + \Phi_2 \operatorname{sh}(kl_2) & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cos(kl_3) - \theta_3 \operatorname{ch}(kl_3) & -\sin(kl_3) - \operatorname{sh}(kl_3) & \theta_4 - 1 & -\Phi_4 & 0 & 0 \\ & & & + \Phi_3 \operatorname{ch}(kl_3) & + \Phi_3 \operatorname{ch}(kl_3) & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(kl_3) - \theta_3 \operatorname{sh}(kl_3) & -\cos(kl_3) - \operatorname{ch}(kl_3) & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & + \Phi_3 \operatorname{sh}(kl_3) & + \Phi_3 \operatorname{sh}(kl_3) & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(kl_4) + \theta_4 \operatorname{ch}(kl_4) & \sin(kl_4) + \operatorname{sh}(kl_4) & -\cos(kl_5) + \theta_5 \operatorname{ch}(kl_5) \\ & & & & & -\Phi_4 \operatorname{ch}(kl_4) & -\Phi_4 \operatorname{ch}(kl_4) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(kl_4) + \theta_4 \operatorname{sh}(kl_4) & \cos(kl_4) + \operatorname{ch}(kl_4) & -2 \sin(kl_5) \\ & & & & & -\Phi_4 \operatorname{sh}(kl_4) & -\Phi_4 \operatorname{sh}(kl_4) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{bmatrix}$$

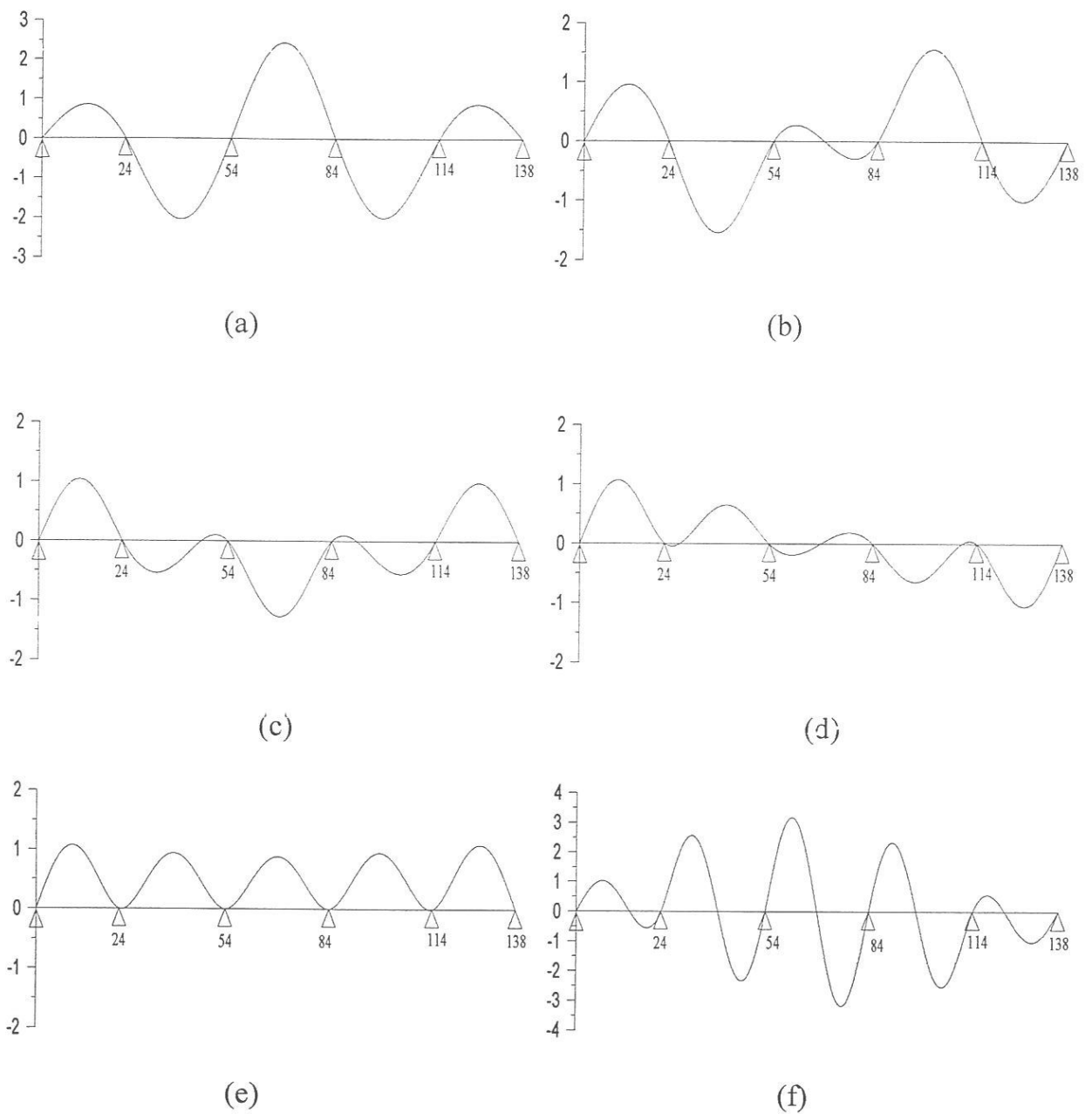


Figure 1.5: Les six premiers modes propres de la poutre à cinq travées, modes: (a) 1, $k_1=0.1099$; (b) 2, $k_2=0.1229$; (c) 3, $k_3=0.1390$; (d) 4, $k_4=0.1546$; (e) 5, $k_5=0.1600$; (f) 6, $k_6=0.2170$.

Annexe 2

Complément des intégrales du chapitre 2

Calcul des masses modales du pont

Les masses modales du pont sont exprimées par :

$$M_{ij} = \bar{m} \iint_s \phi_{ij}^2(x, y) dx dy$$

Avec :

$$\phi_{ij}(x, y) = \varphi_i(x) h_{ij}(y)$$

Donc .

$$M_{ij} = \bar{m} \int_0^l \varphi_i^2(x) dx \int_0^b h_{ij}^2 dy$$

Calcul de l'intégrale: $\int_0^l \varphi_i^2(x) dx$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l \varphi_i^2(x) dx \\ &= \int_0^{l_1} \varphi_i^2(x) dx + \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \varphi_i^2(x) dx + \int_{l-l_R}^l \varphi_i^2(x) dx \quad r = 2, 3, \dots, R-1 \end{aligned}$$

En tenant compte des expressions des modes propres suivante x , on obtient :

$$I_1 = A_{1i}^2 \int_0^{l_1} \sin^2 k_i x dx = A_{1i}^2 \left(\frac{l_1}{2} - \frac{1}{4k_i} \sin 2k_i l_1 \right)$$

$$I_2 = -2A_{1i}^2 \theta_1 \int_0^{l_1} \sin k_i x \operatorname{sh} k_i x dx = -\frac{A_{1i}^2}{k_i} \theta_1 (\sin k_i l_1 \operatorname{ch} k_i l_1 - \cos k_i l_1 \operatorname{sh} k_i l_1)$$

$$I_3 = A_{1i}^2 \theta_1^2 \int_0^{l_1} \operatorname{sh}^2 x dx = \frac{A_{1i}^2}{4} \theta_1^2 \left(\frac{1}{k_i} \operatorname{sh} 2k_i l_1 - 2l_1 \right)$$

$$I_4 = A_{ri}^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \sin^2 k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = A_{ri}^2 \left(\frac{l_r}{2} - \frac{1}{4k_i} \sin 2k_i l_r \right)$$

$$I_5 = -2A_{ri}^2 \theta_r \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \sin k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) \operatorname{sh} k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = -\frac{A_{ri}^2}{k_i} \theta_r (\sin k_i l_r \operatorname{ch} k_i l_r - \cos k_i l_r \operatorname{sh} k_i l_r)$$

$$I_6 = A_{ri}^2 \theta_r^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \operatorname{sh}^2 k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{A_{ri}^2}{4k_i} \theta_r^2 (\operatorname{sh} 2k_i l_r - 2k_i l_r)$$

$$I_7 = B_{ri}^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \cos^2 k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = B_{ri}^2 \left(\frac{l_r}{2} + \frac{1}{4k_i} \sin 2k_i l_r \right)$$

$$I_8 = B_{ri}^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \operatorname{ch}^2 k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{B_{ri}^2}{4k_i} (\operatorname{sh} 2k_i l_r + 2k_i l_r)$$

$$I_9 = -2B_{ri}^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \cos k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) \operatorname{ch} k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = -\frac{B_{ri}^2}{k_i} (\cos k_i l_r \operatorname{sh} k_i l_r + \sin k_i l_r \operatorname{ch} k_i l_r)$$

$$I_{10} = 2\Phi_r B_{ri}^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \cos k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) \operatorname{sh} k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{A_{ri}^2}{k_i} \Phi_r (\cos k_i l_r \operatorname{ch} k_i l_r + \sin k_i l_r \operatorname{sh} k_i l_r - 1)$$

$$I_{11} = 2B_{ri}^2 \Phi_r \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \operatorname{sh} k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) \operatorname{ch} k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{B_{ri}^2}{k_i} \Phi_r (\operatorname{ch}^2 k_i l_r - 1)$$

$$I_{12} = B_{ri}^2 \Phi_r^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \operatorname{sh}^2 k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{B_{ri}^2}{4k_i} \Phi_r^2 (\operatorname{sh} 2k_i l_r - 2k_i l_r)$$

$$I_{13} = 2A_{ri}B_{ri} \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \sin k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) \cos k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{A_{ri}B_{ri}}{k_i} \sin^2 k_i l_r$$

$$I_{14} = -2A_{ri}B_{ri} \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \sin k(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) \operatorname{ch} k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = -\frac{A_{ri}B_{ri}}{k_i} (\sin k_i l_r \operatorname{sh} k_i l_r - \cos k_i l_r \operatorname{ch} k_i l_r + 1)$$

$$I_{15} = -2A_{ri}B_{ri}\theta_r \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \operatorname{sh} k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) \cos k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = -\frac{A_{ri}B_{ri}}{k_i} (\cos k_i l_r \operatorname{ch} k_i l_r + \sin k_i l_r \operatorname{sh} k_i l_r - 1)$$

$$I_{16} = 2A_{ri}B_{ri}\theta_r \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \operatorname{sh} k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) \operatorname{ch} k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{A_{ri}B_{ri}}{k_i} \theta_r (\operatorname{ch}^2 k_i l_r - 1)$$

$$I_{17} = 2A_{ri}B_{ri}\Phi_r \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \sin k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) \operatorname{sh} k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{A_{ri}B_{ri}}{k_i} \Phi_r (\sin k_i l_r \operatorname{ch} k_i l_r - \cos k_i l_r \operatorname{sh} k_i l_r)$$

$$I_{18} = -2A_{ri}B_{ri}\theta_r \Phi_r \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \operatorname{sh}^2 k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = -\frac{A_{ri}B_{ri}}{2k_i} \theta_r \Phi_r (\operatorname{sh} 2k_i l_r - 2k_i l_r)$$

$$I_{19} = A_{Ri}^2 \int_{l-l_R}^l \sin^2 k_i(l-x) dx = A_{Ri}^2 \left(\frac{l_R}{2} - \frac{1}{4k_i} \sin 2k_i l_R \right)$$

$$I_{20} = -2A_{Ri}^2 \theta_R \int_{l-l_R}^l \sin k_i(l-x) \operatorname{sh} k_i(l-x) dx = -\frac{A_{Ri}^2}{k_i} \theta_R (\sin k_i l_R \operatorname{ch} k_i l_R - \cos k_i l_R \operatorname{sh} k_i l_R)$$

$$I_{21} = A_{Ri}^2 \theta_R^2 \int_{l-l_R}^l \operatorname{sh}^2 k_i(l-x) dx = \frac{A_{Ri}^2}{4k_i} \theta_R^2 (\operatorname{sh} 2k_i l_R - 2k_i l_R)$$

$$\theta_r = \frac{\sin(kl_r)}{\sinh(kl_r)}, \quad \Phi_r = \frac{\cosh(kl_r) - \cos(kl_r)}{\sinh(kl_r)} \quad (r = 1, 2, \dots, R)$$

Finalement, on obtient :

$$I = \sum_{k=1}^{21} I_k$$

Calcul de l'intégrale: $\int_0^b h_{ij}^2(y) dy$

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^b h_{ij}^2(y) dy \\
 &= \int_0^b (\sin r_2 y + D_{ij} \cos r_2 y + E_{ij} \sinh r_1 y + F_{ij} \cosh r_1 y)^2 dy \\
 &= \int_0^b (\sin^2 r_2 y + D_{ij}^2 \cos^2 r_2 y + E_{ij}^2 \sinh^2 r_1 y + F_{ij}^2 \cosh^2 r_1 y + 2D_{ij} \sin r_2 y \cos r_2 y \\
 &\quad + 2E_{ij} \sin r_2 y \sinh r_1 y + 2F_{ij} \sin r_2 y \cosh r_1 y + 2D_{ij} E_{ij} \cos r_2 y \sinh r_1 y + 2D_{ij} F_{ij} \cos r_2 y \cosh r_1 y \\
 &\quad + 2E_{ij} F_{ij} \sinh r_1 y \cosh r_1 y) dy
 \end{aligned}$$

Notons :

$$J_1 = \int_0^b \sin^2 r_2 y dy = \frac{b}{2} - \frac{1}{4r_2} \sin 2r_2 b$$

$$J_2 = D_{ij}^2 \int_0^b \cos^2 r_2 y dy = D_{ij}^2 \left(\frac{b}{2} + \frac{1}{4r_2} \sin 2r_2 b \right)$$

$$J_3 = E_{ij}^2 \int_0^b \sinh^2 r_1 y dy = \frac{E_{ij}^2}{4r_1} (sh 2r_1 b - 2r_1 b)$$

$$J_4 = F_{ij}^2 \int_0^b \cosh^2 r_1 y dy = \frac{F_{ij}^2}{4r_1} (sh 2r_1 + 2r_1 b)$$

$$J_5 = 2D_{ij} \int_0^b \sin r_2 y \cos r_2 y dy = \frac{D_{ij}}{r_2} \sin^2 r_2 b$$

$$J_6 = 2E_{ij} \int_0^b \sin r_2 y \sinh r_1 y dy = \frac{2E_{ij}}{r_1^2 + r_2^2} (r_1 \sin r_2 b \operatorname{ch} r_1 b - r_2 \cos r_2 b \operatorname{sh} r_1 b)$$

$$J_7 = 2F_{ij} \int_0^b \sin r_2 y \cosh r_1 y dy = \frac{2F_{ij}}{r_1^2 + r_2^2} (r_1 \sin r_2 b \operatorname{sh} r_1 b - r_2 \cos r_2 b \operatorname{ch} r_1 b + r_2)$$

$$J_8 = 2D_{ij} E_{ij} \int_0^b \cos r_2 y \sinh r_1 y dy = \frac{2E_{ij} D_{ij}}{r_1^2 + r_2^2} (r_1 \cos r_2 b \operatorname{ch} r_1 b + r_2 \sin r_2 b \operatorname{sh} r_1 b - r_1)$$

$$J_9 = 2D_{ij} F_{ij} \int_0^b \cos r_2 y \cosh r_1 y dy = \frac{2F_{ij} D_{ij}}{r_1^2 + r_2^2} (r_1 \cos r_2 b \operatorname{sh} r_1 b + r_2 \sin r_2 b \operatorname{ch} r_1 b)$$

$$J_{10} = 2E_{ij}F_{ij} \int_0^b shr_1 y chr_1 y dy = \frac{E_{ij}F_{ij}}{r_1} (ch^2 r_1 b - 1)$$

On obtient alors :

$$J = \int_0^b h_{ij}^2 y dy = \sum_{l=1}^{10} J_l$$

Finalement, les masses modales du pont sont exprimées par:

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{21} \sum_{l=1}^{10} I_k J_l$$

Calcul de l'intégrale : $\int_0^l \varphi_i(x) \varphi_i''(x) dx$

$$\begin{aligned} I' &= \int_0^l \varphi_i(x) \varphi_i''(x) dx \\ &= \int_0^{l_1} \varphi_i \varphi_i''(x) dx + \int_{\sum_{j=1}^r l_j} \varphi_i \varphi_i''(x) dx + \int_{l+l_R}^l \varphi_i \varphi_i''(x) dx \quad r = 2, 3, \dots, R-1 \end{aligned}$$

Notons :

$$I'_1 = k_i^2 A_{li}^2 \int_0^{l_1} \sin^2 k_i x dx = A_{li}^2 \left(\frac{l_1}{2} - \frac{1}{4k_i} \sin 2k_i l_1 \right)$$

$$I'_2 = -k_i^2 A_{li}^2 \theta_1^2 \int_0^{l_1} sh^2 x dx = -\frac{A_{li}^2}{4k_i} \theta_1^2 (sh 2k_i l_1 - 2k_i l_1)$$

$$I'_3 = k_i^2 A_{ri}^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \sin^2 k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = A_{ri}^2 \left(\frac{l_2}{2} - \frac{1}{4k_i} \sin 2k_i l_r \right)$$

$$I'_4 = -k_i^2 A_r^2 \theta_r^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} sh^2 k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{A_r^2 \theta_r^2}{4k_i} (sh 2k_i l_r - 2k_i l_r)$$

$$I'_5 = 2k_i^2 A_r B_r \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \sin k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) \cos k_i (x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{A_r B_r}{k_i} \sin^2 k_i l_r$$

$$I'_6 = -2k_i^2 A_r B_r \theta_r \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} shk_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) chk_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = -\frac{A_r B_r}{k_i} \theta_r (ch^2 k_i l_r - 1)$$

$$I'_7 = -2k_i^2 A_r B_r \theta_r \Phi_r \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} sh^2 k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = -\frac{A_r B_r}{2k_i} \theta_r \Phi_r (sh2k_i l_r - 2k_i l_r)$$

$$I'_8 = k_i^2 B_{ri}^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} \cos^2 k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx + B_{ri}^2 \left(\frac{l_r}{2} + \frac{1}{4k_i} \sin 2k_i l_r \right)$$

$$I'_9 = -k_i^2 B_{ri}^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} ch^2 k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = -\frac{B_{ri}^2}{4k_i} (sh2k_i l_r + 2k_i l_r)$$

$$I'_{10} = -k_i^2 B_{ri}^2 \Phi_r^2 \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} sh^2 k_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = -\frac{B_{ri}^2}{4k_i} \Phi_r^2 (sh2k_i l_r - 2k_i l_r)$$

$$I'_{11} = 2k_i^2 B_{ri}^2 \Phi_r \int_{\sum_{j=1}^{r-1} l_j}^{\sum_{j=1}^r l_j} shk_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) chk_i(x - \sum_{j=1}^{r-1} l_j) dx = \frac{B_{ri}^2}{k_i} \Phi_r (ch^2 k_i l_r - 1)$$

$$I'_{12} = k_i^2 A_{Ri}^2 \int_{l-l_R}^l \sin^2 k_i(l-x) dx = A_{Ri}^2 \left(\frac{l_R}{2} - \frac{1}{4k_i} \sin 2k_i l_R \right)$$

$$I'_{13} = -k_i^2 A_{Ri}^2 \theta_R^2 \int_{l-l_R}^l sh^2 k_i(l-x) dx = -\frac{A_{Ri}^2}{4k_i} \theta_R^2 (sh2k_i l_R - 2k_i l_R)$$

$$\theta_r = \frac{\sin(kl_r)}{\sinh(kl_r)}, \quad \Phi_r = \frac{\cosh(kl_r) - \cos(kl_r)}{\sinh(kl_r)} \quad (r = 1, 2, \dots, R)$$

Finalement, on obtient :

$$I' = \sum_{m=1}^{13} I'_m$$

Annexe 3

Equations du mouvement de différents modèles de véhicules

3.1 Véhicule bidimensionnels

3.1.1 Modèle à 4 D.D.L [1]

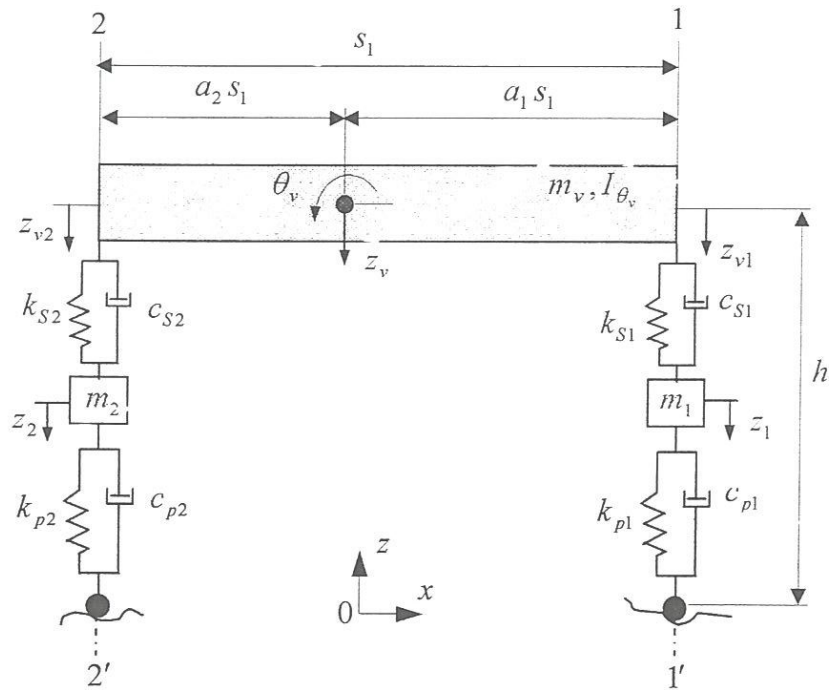


Figure 3.1 : Modèle bidimensionnel du véhicule à 4 D.D.L

$$\{Z_v\} = \{z_1, z_2, z_{v1}, z_{v2}\}^T$$

$$\begin{cases} \theta_v = \frac{z_{v2} - z_{v1}}{s_1} \\ z_v = a_1 z_{v2} + a_2 z_{v1} \end{cases}$$

Equation générale du mouvement : $[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$

Matrice de masse

$$[M_v] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_v \left(a_2^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right) + \frac{I_{\theta_v}}{s_1^2} & m_v \left(a_1 a_2 - \frac{h^2}{s_1^2} \right) - \frac{I_{\theta_v}}{s_1^2} \\ 0 & 0 & m_v \left(a_1 a_2 - \frac{h^2}{s_1^2} \right) - \frac{I_{\theta_v}}{s_1^2} & m_v \left(a_1 a_2 - \frac{h^2}{s_1^2} \right) - \frac{I_{\theta_v}}{s_1^2} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{p1} & 0 & -k_{s1} & 0 \\ & k_{s2} + k_{p2} & 0 & -k_{s2} \\ & & k_{s1} & 0 \\ sym & & & k_{s2} \end{bmatrix}$$

Matrice d'amortissement

$$[C_v] = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{p1} & 0 & -c_{s1} & 0 \\ & c_{s2} + c_{p2} & 0 & -c_{s2} \\ & & c_{s1} & 0 \\ sym & & & c_{s2} \end{bmatrix}$$

Vecteur force

$$\{F_g\} = \begin{Bmatrix} -m_1 g \\ -m_2 g \\ -a_2 m_v g + m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -a_1 m_v g - m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \end{Bmatrix}$$

$$\{F^{int}\} = \begin{Bmatrix} k_{p1} [w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p2} [w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.1.2 Modèle à 5 D.D.L [1]

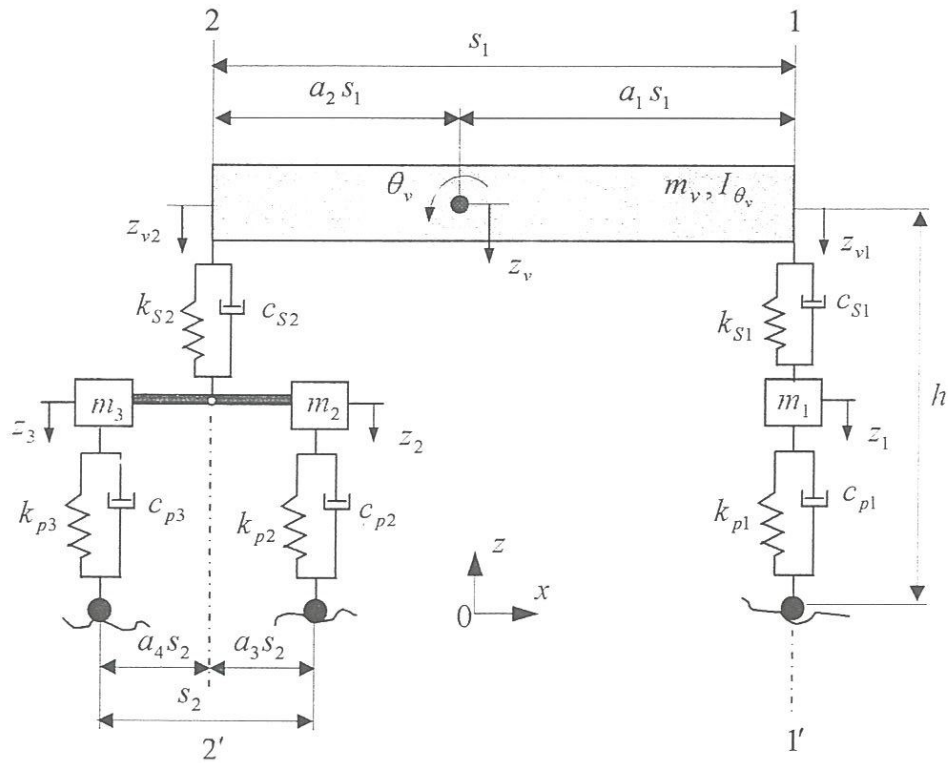


Figure 3.2 : Modèle bidimensionnel du véhicule à 5 D.D.L

$$\{Z_v\} = \{z_1, z_2, z_3, z_{v1}, z_{v2}\}^T$$

$$\begin{cases} \theta_v = \frac{z_{v2} - z_{v1}}{s_1} \\ z_v = a_1 z_{v2} + a_2 z_{v1} \end{cases}$$

Equation générale du mouvement : $[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$

Matrice de masse

$$[M_v] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & m_3 & 0 & 0 \\ & & & m_v \left(a_2^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right) + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} & m_v \left(a_1 a_2 - \frac{h^2}{s_1^2} \right) - \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \\ sym & & & & m_v \left(a_1^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right) + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{p1} & 0 & 0 & -k_{s1} & 0 \\ & k_{s2}a_4^2 + k_{p2} & k_{s2}a_3a_4 & 0 & -k_{s2}a_4 \\ & & k_{s2}a_3^2 + k_{p3} & 0 & -k_{s2}a_3 \\ & & & k_{s1} & 0 \\ \text{sym} & & & & k_{s2} \end{bmatrix}$$

Matrice d'amortissement

$$[C_v] = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{p1} & 0 & 0 & -c_{s1} & 0 \\ & c_{s2}a_4^2 + c_{p2} & c_{s2}a_3a_4 & 0 & -c_{s2}a_4 \\ & & c_{s2}a_3^2 + c_{p3} & 0 & -c_{s2}a_3 \\ & & & c_{s1} & 0 \\ \text{sym} & & & & c_{s2} \end{bmatrix}$$

Vecteur force

$$\{F_g\} = \begin{Bmatrix} -m_1g \\ -m_2g \\ -m_3g \\ -a_2m_vg + m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -a_1m_vg - m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \end{Bmatrix}$$

$$\{F^{int}\} = \begin{Bmatrix} k_{p1}[w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p2}[w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p3}[w(x_3, y_3, t) + r(x_3, y_3)] + c_{p3} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_3, y_3, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_3, y=y_3} \dot{x}_1 \right] \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.1.3 Modèle à 6 D.D.L [1]

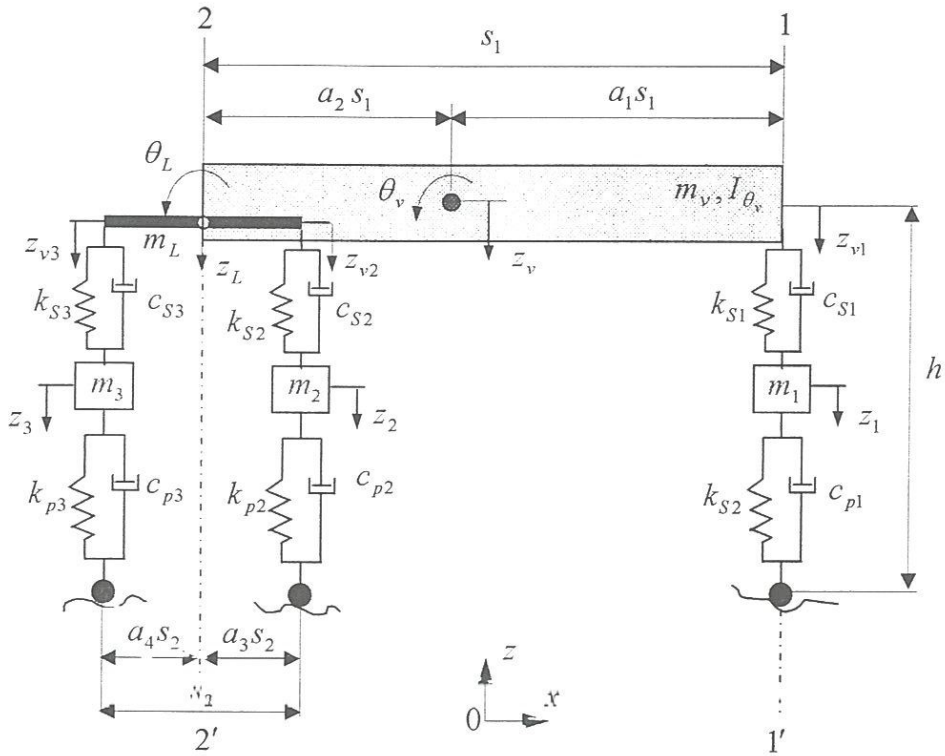


Figure 3.3 : Modèle bidimensionnel du véhicule à 6 D.D.L

$$\{Z_v\} = \{z_1, z_2, z_3, z_{v1}, z_{v2}, z_{v3}\}^T$$

$$\begin{cases} \theta_L = \frac{z_{v3} - z_{v2}}{s_2} \\ z_L = a_3 z_{v3} + a_4 z_{v2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_v = \frac{a_3 z_{v3} + a_4 z_{v2} - z_{v1}}{s_1} \\ z_v = a_1 a_3 z_{v3} + a_1 a_4 z_{v2} + a_2 z_{v1} \end{cases}$$

Equation générale du mouvement : $[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$

Matrice de masse

$$[M_v] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & m_v a_2^2 + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} & m_v a_1 a_2 a_4 - \frac{a_4}{s_1^2} I_{\theta v} & m_v a_1 a_2 a_3 - \frac{a_3}{s_1^2} I_{\theta v} \\ & & & + (m_v + m_L) \frac{h^2}{s_1^2} & - (m_v + m_L) \frac{a_4 h^2}{s_1^2} & - (m_v + m_L) \frac{a_3 h^2}{s_1^2} \\ & & & & m_v a_1^2 a_4^2 + m_L a_4^2 + \frac{a_4^2}{s_1^2} I_{\theta v} & m_v a_1^2 a_3 a_4 + m_L a_3 a_4 - \frac{I_{\theta L}}{s_2^2} \\ & & & & + (m_v + m_L) \frac{a_4^2 h^2}{s_1^2} + \frac{I_{\theta L}}{s_2^2} & + (m_v + m_L) \frac{a_3 a_4 h^2}{s_1^2} + \frac{a_3 a_4}{s_1^2} I_{\theta v} \\ sym & & & & & m_v a_1^2 a_3^2 + m_L a_3^2 + \frac{a_3^2}{s_1^2} I_{\theta v} \\ & & & & & + (m_v + m_L) \frac{a_3^2 h^2}{s_1^2} + \frac{I_{\theta L}}{s_2^2} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{p1} & 0 & 0 & -k_{s1} & 0 & 0 \\ & k_{s2} + k_{p2} & 0 & 0 & -k_{s2} & 0 \\ & & k_{s3} + k_{p3} & 0 & 0 & -k_{s3} \\ & & & k_{s1} & 0 & 0 \\ & & & & k_{s2} & 0 \\ sym & & & & & k_{s3} \end{bmatrix}$$

Matrice d'amortissement

$$[C_v] = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{p1} & 0 & 0 & -c_{s1} & 0 & 0 \\ & c_{s2} + c_{p2} & 0 & 0 & -c_{s2} & 0 \\ & & c_{s3} + c_{p3} & 0 & 0 & -c_{s3} \\ & & & c_{s1} & 0 & 0 \\ & & & & c_{s2} & 0 \\ sym & & & & & c_{s3} \end{bmatrix}$$

Vecteur force

$$\{F_g\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1 g \\ -m_2 g \\ -m_3 g \\ -a_2 m_v g + (m_v + m_L) \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -a_1 a_4 m_v g - a_4 m_L g - (m_v + m_L) \frac{a_4 h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -a_1 a_3 m_v g - a_3 m_L g - (m_v + m_L) \frac{a_3 h}{s_1} \ddot{x}_1 \end{array} \right\}$$

$$\{F^{int}\} = \left\{ \begin{array}{l} k_{p1} [w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p2} [w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p3} [w(x_3, y_3, t) + r(x_3, y_3)] + c_{p3} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_3, y_3, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_3, y=y_3} \dot{x}_1 \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

3.2 Véhicule tridimensionnels

3.2.1 Modèle à 7 D.D.L [2]

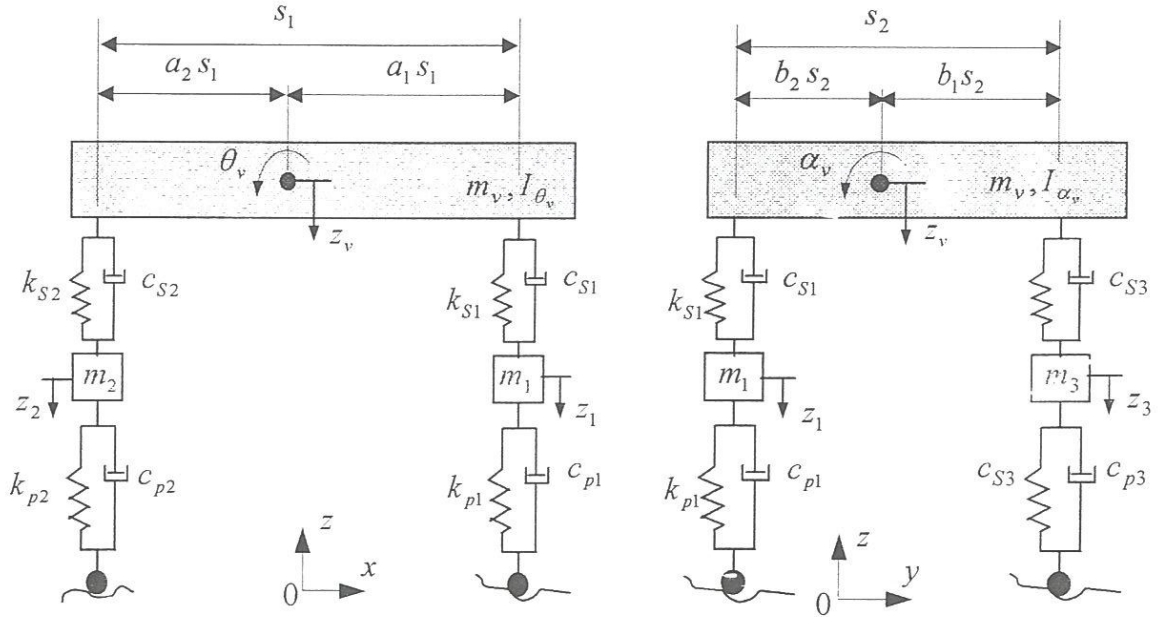


Figure 3.4 : Modèle tridimensionnel du véhicule à 7 D.D.L

$$\{Z_v\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_{v1}, z_{v2}, z_{v3}\}^T$$

$$\begin{cases} \theta_v = \frac{z_{v2} - z_{v1}}{s_1} & ; \alpha_v = \frac{z_{v2} - z_{v4}}{s_2} \\ z_v = a_2 z_{v1} + (a_1 - b_2) z_{v2} + b_2 z_{v4} \end{cases}$$

Equation générale du mouvement : $[M_v]\{\ddot{Z}_v\} + [C_v]\{\dot{Z}_v\} + [K_v]\{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$

Matrice de masse

$$[M_v] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_v \left(a_2^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right) + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} & m_v \left[a_1 a_2 - a_2 b_2 - \frac{h^2}{s_1^2} \right] - \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} & m_v a_2 b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_v \left[(a_1 - b_2)^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right] + \frac{I_{\theta v}}{s_1^2} + \frac{I_{\alpha v}}{s_2^2} & m_v \left[a_1 b_2 - b_2^2 \right] - \frac{I_{\alpha v}}{s_2^2} \\ \text{sym} & & & & & & m_v b_2^2 + \frac{I_{\alpha v}}{s_2^2} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité :

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{p1} & 0 & 0 & 0 & -k_{s1} & 0 & 0 \\ & k_{s2} + k_{p2} & 0 & 0 & 0 & -k_{s2} & 0 \\ & & k_{s3} + k_{p3} & 0 & -k_{s3} & k_{s3} & -k_{s3} \\ & & & k_{s4} + k_{p4} & 0 & 0 & -k_{s4} \\ & & & & k_{s1} + k_{s3} & -k_{s3} & k_{s3} \\ & & & & & k_{s2} + k_{s3} & -k_{s3} \\ sym & & & & & & k_{s3} + k_{s4} \end{bmatrix}$$

Matrice d'amortissement :

$$[C_v] = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{p1} & 0 & 0 & 0 & -c_{s1} & 0 & 0 \\ & c_{s2} + c_{p2} & 0 & 0 & 0 & -c_{s2} & 0 \\ & & c_{s3} + c_{p3} & 0 & -c_{s3} & c_{s3} & -c_{s3} \\ & & & c_{s4} + c_{p4} & 0 & 0 & -c_{s4} \\ & & & & c_{e1} + c_{s3} & -c_{s3} & c_{s3} \\ & & & & & c_{s2} + c_{s3} & -c_{s3} \\ sym & & & & & & c_{s3} + c_{\tau 4} \end{bmatrix}$$

Vecteur de force

$$\{F_g\} = \begin{Bmatrix} -m_1 g \\ -m_2 g \\ -m_3 g \\ -m_4 g \\ -a_2 m_v g + m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -(a_1 - b_2) m_v g - m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -b_2 m_v g \end{Bmatrix}$$

$$\{F^{int}\} = \begin{Bmatrix} k_{p1} [w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p2} [w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p3} [w(x_3, y_3, t) + r(x_3, y_3)] + c_{p3} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_3, y_3, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_3, y=y_3} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p4} [w(x_4, y_4, t) + r(x_4, y_4)] + c_{p4} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_4, y_4, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_4, y=y_4} \dot{x}_1 \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.2.2 Modèle à 9 D.D.L [1]

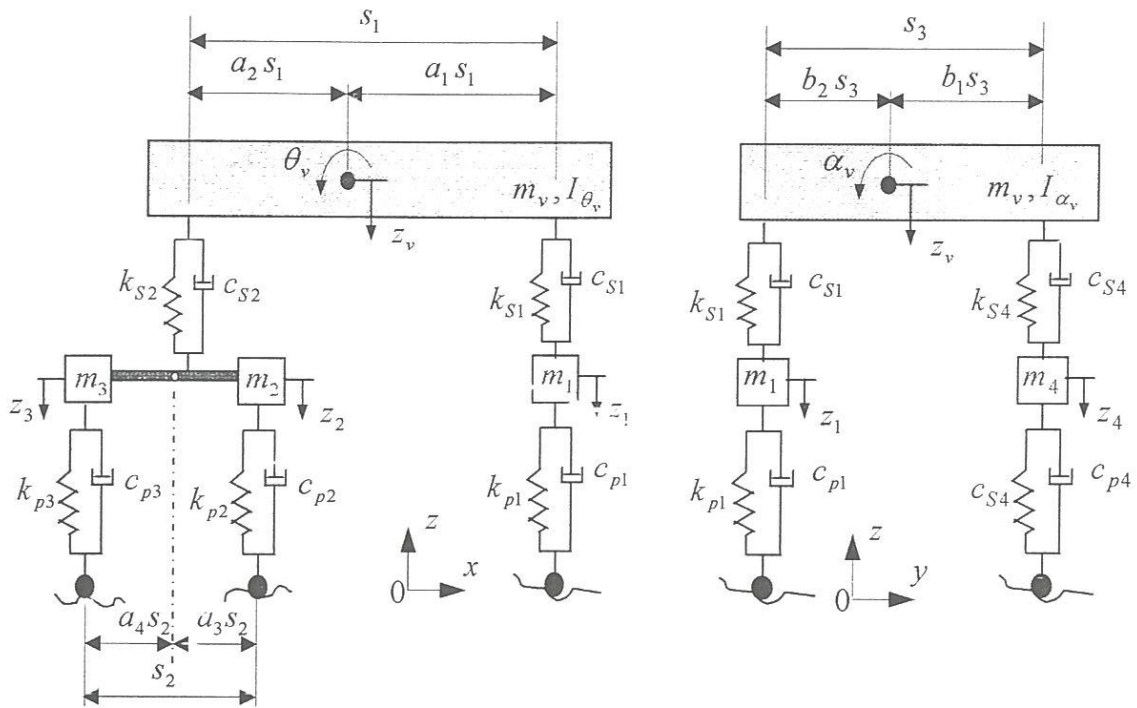


Figure 3.5 : Modèle tridimensionnel du véhicule à 9 D.D.L

$$\{Z_v\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_{v1}, z_{v2}, z_{v3}\}^T$$

$$\begin{cases} \theta_v = \frac{z_{v2} - z_{v1}}{s_1} & ; \alpha_v = \frac{z_{v2} - z_{v4}}{s_2} \\ z_v = a_2 z_{v1} + (a_1 - b_2) z_{v2} + b_2 z_{v4} \end{cases}$$

Equation générale du mouvement : $[M_v]\{\ddot{Z}\} + [C_v]\{\dot{Z}\} + [K_v]\{Z\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$

Matrice de masse

$$[M_v] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & m_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & m_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & m_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & m_v \left(a_2^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right) + \frac{I_{\theta_v}}{s_1^2} & m_v \left[a_1 a_2 - a_2 b_2 - \frac{h^2}{s_1^2} \right] - \frac{I_{\theta_v}}{s_1^2} & m_v a_2 b_2 & \\ & & & & & & & m_v \left[(a_1 - b_2)^2 + \frac{h^2}{s_1^2} \right] + \frac{I_{\theta_v}}{s_1^2} + \frac{I_{\alpha_v}}{s_3^2} & m_v \left[a_1 b_2 - b_2^2 \right] - \frac{I_{\alpha_v}}{s_3^2} & \\ sym & & & & & & & & & m_v b_2^2 + \frac{I_{\alpha_v}}{s_3^2} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité :

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s1} & 0 & 0 \\ & k_{s2} a_4^2 + k_{p2} & k_{s2} a_3 a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s2} a_4 & 0 \\ & & k_{s2} a_3^2 + k_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s2} a_3 & 0 \\ & & & k_{s3} + k_{p4} & 0 & 0 & -k_{s3} & k_{s3} & -k_{s3} \\ & & & & k_{s4} a_4^2 + k_{p5} & k_{s4} a_3 a_4 & 0 & 0 & -k_{s4} a_4 \\ & & & & & k_{s4} a_3^2 + k_{p6} & 0 & 0 & -k_{s4} a_3 \\ & & & & & & k_{s1} + k_{s3} & -k_{s3} & k_{s3} \\ & & & & & & & k_{s2} + k_{s3} & -k_{s3} \\ sym & & & & & & & & k_{s3} + k_{s4} \end{bmatrix}$$

Matrice d'amortissement :

$$[C_v] = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s1} & 0 & 0 \\ & c_{s2} a_4^2 + c_{p2} & c_{s2} a_3 a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s2} a_4 & 0 \\ & & c_{s2} a_3^2 + c_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s2} a_3 & 0 \\ & & & c_{s3} + c_{p4} & 0 & 0 & -c_{s3} & c_{s3} & -c_{s3} \\ & & & & c_{s4} a_4^2 + c_{p5} & c_{s4} a_3 a_4 & 0 & 0 & -c_{s4} a_4 \\ & & & & & c_{s4} a_3^2 + c_{p6} & 0 & 0 & -c_{s4} a_3 \\ & & & & & & c_{s1} + c_{s3} & -c_{s3} & c_{s3} \\ & & & & & & & c_{s2} + c_{s3} & -c_{s3} \\ sym & & & & & & & & c_{s3} + c_{s4} \end{bmatrix}$$

Vecteur de force :

$$\{F_g\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1g \\ -m_2g \\ -m_3g \\ -m_4g \\ -m_5g \\ -m_6g \\ -a_2m_vg + m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -(a_1 - b_2)m_vg - m_v \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -b_2m_vg \end{array} \right\}$$

$$\{F^{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} k_{p1} [w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p2} [w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p3} [w(x_3, y_3, t) + r(x_3, y_3)] + c_{p3} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_3, y_3, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_3, y=y_3} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p4} [w(x_4, y_4, t) + r(x_4, y_4)] + c_{p4} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_4, y_4, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_4, y=y_4} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p5} [w(x_5, y_5, t) + r(x_5, y_5)] + c_{p5} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_5, y_5, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_5, y=y_5} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p6} [w(x_6, y_6, t) + r(x_6, y_6)] + c_{p6} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_6, y_6, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_6, y=y_6} \dot{x}_1 \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

3.2.3 Modèle à 11 D.D.L [1]

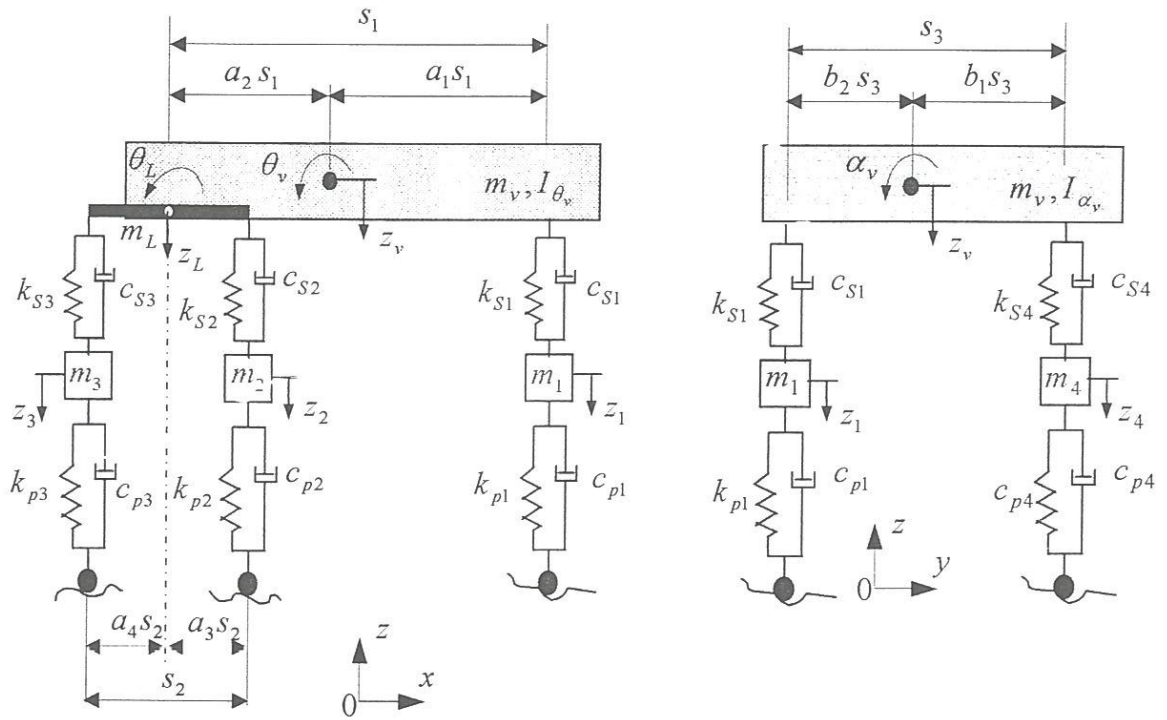


Figure 3.6 : Modèle tridimensionnel du véhicule à 11 D.D.L

$$\{Z_v\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_{v1}, z_{v2}, z_{v3}, z_{v4}, z_{v5}\}^T$$

$$\theta_{L1} = \frac{z_{v3} - z_{v2}}{s_2}$$

$$\theta_{L2} = \frac{z_{v6} - z_{v5}}{s_2}$$

$$\theta_v = \frac{a_3 z_{v3} + a_4 z_{v2} - z_{v1}}{s_1}$$

$$\alpha_v = \frac{z_{L1} - z_{L2}}{s_2} = \frac{a_3 z_{v3} + a_4 z_{v2} - a_3 z_{v6} - a_4 z_{v5}}{s_2}$$

$$z_v = a_2 z_{v1} + a_4 (a_1 - b_2) z_{v2} + a_3 (a_1 - b_2) z_{v3} + a_4 b_2 z_{v5} + a_3 b_2 z_{v6}$$

Equation générale du mouvement : $[M_v] \{\ddot{Z}_v\} + [C_v] \{\dot{Z}_v\} + [K_v] \{Z_v\} = \{F_g\} + \{F^{int}\}$

Vecteur de force :

$$\{F_g\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \\ -m_2 g \\ -m_3 g \\ -m_4 g \\ -m_5 g \\ -m_6 g \\ -a_2 m_v g + (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -a_4 (a_1 - b_2) m_v g - a_4 m_{L1} g - (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_4 h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -a_3 (a_1 - b_2) m_v g - a_3 m_{L1} g - (m_v + m_{L1} + m_{L2}) \frac{a_3 h}{s_1} \ddot{x}_1 \\ -a_4 b_2 m_v g - a_4 m_{L2} g \\ -a_3 b_2 m_v g - a_3 m_{L2} g \end{array} \right\}$$

$$\{F^{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} k_{p1} [w(x_1, y_1, t) + r(x_1, y_1)] + c_{p1} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_1, y_1, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_1, y=y_1} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p2} [w(x_2, y_2, t) + r(x_2, y_2)] + c_{p2} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_2, y_2, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_2, y=y_2} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p3} [w(x_3, y_3, t) + r(x_3, y_3)] + c_{p3} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_3, y_3, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_3, y=y_3} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p4} [w(x_4, y_4, t) + r(x_4, y_4)] + c_{p4} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_4, y_4, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_4, y=y_4} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p5} [w(x_5, y_5, t) + r(x_5, y_5)] + c_{p5} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_5, y_5, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_5, y=y_5} \dot{x}_1 \right] \\ k_{p6} [w(x_6, y_6, t) + r(x_6, y_6)] + c_{p6} \left[\frac{\partial w}{\partial t}(x_6, y_6, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x=x_6, y=y_6} \dot{x}_1 \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Matrice de rigidité :

$$[K_v] = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{s2} + k_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s2} & 0 & 0 & 0 \\ k_{s3} + k_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s3} & 0 & 0 \\ k_{s4} + k_{p4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s4} & k_{s4}a_4 & k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & k_{s4}a_3 \\ k_{s5} + k_{p5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s5} & 0 \\ k_{s6} + k_{p6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s6} \\ k_{s1} + k_{s4} & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & k_{s4}a_4 & k_{s4}a_3 & k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & k_{s4}a_3 \\ k_{s2} + k_{s4}a_4^2 & k_{s4}a_4 & k_{s4}a_3a_4 & k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 \\ k_{s3} + k_{s4}a_3^2 & k_{s4}a_4 & k_{s4}a_3 & k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 \\ k_{s5} + k_{s4}a_4^2 & k_{s4}a_4 & k_{s4}a_3 & k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 \\ k_{s6} + k_{s4}a_3^2 & k_{s4}a_4 & k_{s4}a_3 & k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 & -k_{s4}a_3 & -k_{s4}a_4 \end{bmatrix}$$

sym

Matrice d'amortissement :

$$[C_v] = \begin{bmatrix} c_{s1} + c_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{s2} + c_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s2} & 0 & 0 & 0 \\ c_{s3} + c_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s3} & 0 & 0 \\ c_{s4} + c_{p4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{s4} & c_{s4}a_4 & c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & c_{s4}a_3 \\ c_{s5} + c_{p5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s5} & 0 \\ c_{s6} + c_{p6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{s6} \\ c_{s1} + c_{s4} & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & c_{s4}a_4 & c_{s4}a_3 & c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & c_{s4}a_3 \\ c_{s2} + c_{s4}a_4^2 & c_{s4}a_4 & c_{s4}a_3a_4 & c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 \\ c_{s3} + c_{s4}a_3^2 & c_{s4}a_4 & c_{s4}a_3 & c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 \\ c_{s5} + c_{s4}a_4^2 & c_{s4}a_4 & c_{s4}a_3 & c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 \\ c_{s6} + c_{s4}a_3^2 & c_{s4}a_4 & c_{s4}a_3 & c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 & -c_{s4}a_3 & -c_{s4}a_4 \end{bmatrix}$$

sym

