

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université 08 Mai 45 de Guelma

Ecole Doctorale Nationale en Mécanique De Construction

« EDNMC »

Mémoire de Magister



70

Département de Génie Mécanique

Spécialité: Mécanique de Construction

Option: Mécanique & Maintenance Industrielle

Présenté par: Abdelhafid RAHMANE

**Etude de l'influence des séquences d'empilement sur les
fréquences propres et les amortissements modaux des plaques
composites.**

Devant le jury :

Président	Pr.	Bachir REDJEL	Université de Annaba
Rapporteur	M C.A	Abderrezak BEZAZI	Université de Guelma
Examineur	Pr.	Nouredine OUELAA	Université de Guelma
Examineur	Pr	El Abasse ADDA BEDEA	Université de sidi Belabes
Examineur	M C.A	Mohamed Cherif DJAMAA	Université de Guelma

2010

DEDICACES

*A mes parents;
A mes sœurs et mes frères;
A mes amis et camarades de promotion;
Et à Aicha.*

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu le Dr. Abderezak BEZAZI, qui m'a encadré dans ce travail pour ses conciles, sa disponibilité et son suivi attentif tous le long de la préparation de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également au Pr. Nouredine OUELA, directeur du Laboratoire de Mécanique et Structure (LMS) pour les facilités offertes dans le cadre du laboratoire et sa participation active à la réalisation de la partie expérimentale de ce travail.

Je remercie également Monsieur le Pr. Bachir REDJEL enseignant au département de Génie Civil, Université de Annaba qui ma fait le plaisir et l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

J'exprime toute ma gratitude et ma sympathie aux membres du jury Pr. Nouredine OUELA, Pr. El Abasse ADDA BEDEA et le Dr. Mohamed Cherif DJAMAA pour l'intérêt qu'ils ont montré à l'examen du contenu de ce travail.

Mes vifs remerciements s'adressent également au Dr. Mohamed Athmane YALLES, chef du département de Génie Mécanique qui ma permis de bénéficier des moyens du département.

Je remercie chaleureusement toute ma famille et particulièrement mes parents pour leur soutien et leurs encouragements.

Résumé

Le comportement dynamique est un paramètre important dont il faut tenir compte lors de la conception des structures. Dans le cas des vibrations linéaires, la détermination des paramètres modaux d'une structure, à savoir les fréquences et les déformées propres des modes de résonance ainsi que les amortissements modaux associés, permet de localiser les problèmes liés aux vibrations et de construire un modèle de comportement, servant à prédire la réponse de celle-ci aux différents types de chargements dynamiques, et ainsi à vérifier les solutions apportées pour le contrôle de ces problèmes. L'objectif fondamental de ce travail est l'étude du problème des vibrations des plaques composites stratifiés carbone/époxyde ayant différentes séquences d'empilements. L'étude permet d'obtenir les fréquences et les déformées propres ainsi que les amortissements modaux expérimentalement par l'utilisation d'un analyseur de vibrations bi-canal. Numériquement, par éléments finis à l'aide du logiciel de calcul des structures ANSYS pour confronter les résultats avec ceux obtenus par l'utilisation par le logiciel ME'ScopeVES en se servant des autospectres issus des expérimentations dans le but de déterminer les paramètres modaux des plaques composites (fréquences, déformées propres et amortissements modaux).

Mots clés : plaques composites, séquences d'empilement, fréquences propres, amortissements modaux.

Table des matières

Table des matières

Dédicace	1
Remerciements.....	2
Résumé	3
Table des matières	5
Introduction générale	9

Chapitre 01 : Etude bibliographique

1.1	Introduction.....	12
1.2	Définition des matériaux composites.....	13
	1.2.1 Applications courantes.....	13
	1.2.2 Constituants et caractéristiques générales.....	15
	1.2.3 Classification des matériaux composites.....	17
	1.2.4 Les stratifiés.....	17
1.3	Caractérisation mécanique des plaques composites.....	19
	1.3.1 Caractérisation statique des matériaux composites	19
	1.3.2 Caractérisation dynamique des matériaux composites.....	21
1.4	Analyse modale.....	24
1.5	Position du problème et techniques adoptées	25

Chapitre 02 : Détermination expérimentale et par simulation numérique des paramètres modaux

2.1	Introduction.....	28
2.2	Modèle d'une analyse modale.....	29
2.3	Instrumentation de l'analyse modale.....	32
	2.3.1 Analyseur bi-canal FFT.....	32
	2.3.2 L'instrumentation	33

2.4 Détermination des fréquences propres et des déformées propres des plaques composites ayant différentes séquences d'empilement.....	34
2.4.1 Détermination des fréquences propres et des déformées propres des plaques composites simulées par ANSYS.....	34
2.4.2 Détermination expérimentale des fréquences propres et des déformées propres des plaques stratifiés composites.....	37
2.5 Analyse des résultats.....	46
2.5.1 Les fréquences et les déformées propres des stratifiés en configuration ELLL...	47
2.5.2 Influence des séquences d'empilement en configuration ELLL.....	51
2.5.3 Les fréquences et les déformées propres des stratifiés en configuration ELEL.	52
2.5.4 Influence des séquences d'empilement en configuration ELEL.....	56
2.5.5 Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres.....	57
2.6 Détermination des amortissements modaux.....	59
2.6.1 Utilisation de ME'ScopeVES pour l'extraction des amortissements modaux....	59
2.6.2 Influence des séquences d'empilement et des conditions aux limites sur l'amortissement modal.....	61
2.6.3 Comparaison des amortissements modaux pour les deux configurations ELLL et ELEL.....	65

Chapitre 0 3: Généralités sur la théorie des stratifiés

3.1 Introduction.....	68
3.2 Champ de déformations.....	68
3.3 Champ de contraintes.....	71
3.4 Expression des résultantes, des moments et de l'équation constitutive.....	72
3.4.1 Résultantes en membrane.....	72
3.4.2 Moment de flexion et de torsion.....	73
3.5 Equation constitutive.....	74
3.6 La théorie des stratifiés.....	75
3.6.1 Relation fondamentale des plaques.....	75
3.6.2 Equilibre par rapport aux résultantes en membrane.....	76
3.6.3 Equilibre par rapport aux résultantes de cisaillement.....	77
2.6.4 Equilibre par rapport aux moments.....	78
3.6.5 Equations du mouvement d'une stratifié.....	79

3.7 Expression des conditions aux limites.....	80
3.7.1 Appui simple.....	81
3.7.2 Encastrement.....	81
3.7.3 Condition de bord libre.....	82
3.8 Formulation énergétique de la théorie des stratifiés.....	82
3.8.1 Energie de déformation d'un stratifié.....	83
3.8.2 Energie cinétique d'un stratifié.....	84
3.8.3 Travail des actions exercées sur le stratifié.....	84
3.9 Vibration de flexion des plaques minces symétriques.....	85
3.9.1 Equation du mouvement.....	85
3.9.2 Fréquences et déformées propres des plaques minces.....	86
Conclusion générale.....	88
Références bibliographiques.....	90
Annexes.	
Annexe 01.....	94
Annexe 02.....	118

Introduction Générale

Introduction générale

On s'accorde à penser, aujourd'hui, que l'utilisation des premiers matériaux par l'homme remonte à près de deux millions d'années. Après avoir été ramassée sous forme de galets, puis taillée au paléolithique, et enfin polie au néolithique, la pierre contribua, face à un univers hostile, à assurer le développement de l'espèce humaine. Avec l'emploi du bronze, il y a environ cinq mille ans, puis du fer, l'âge de la pierre s'efface pour faire place à celui des métaux. Leur apogée se situera à la fin du siècle dernier avec une contribution active à l'essor du machinisme et à l'avènement de la société industrielle.

L'élan industriel du 19^{ème} siècle et du début a, donc, pu s'effectuer à partir de matériaux lentement améliorés et dont le comportement en service pouvait être décrit par des lois, relativement simples, utilisées par les concepteurs. Le lancement de grands programmes technologiques (spatial, nucléaire, électronique, etc.) et les mutations imposées aux matériaux traditionnels par la crise de l'énergie et l'évolution du marché des matières premières ont amené au constat que les matériaux traditionnels avaient atteint leurs limites.

La recherche de performances techniques alliées au besoin d'optimisation et d'allègement a également motivé la conception et l'utilisation de matériaux spécifiques adaptés à la solution technologique des problèmes à résoudre. Ainsi se développent des matériaux renforcés à hétérogénéité des structures maîtrisés appelés *matériaux composites*, aujourd'hui, beaucoup de questions tournent autour des derniers.

La croissance rapide de leurs applications au cours de ces dernières années a fait naître beaucoup d'optimisme, mais leur avenir n'est pas assuré pour autant. Pour qu'ils deviennent performants, il faut fournir des efforts au plan de la recherche, de la technologie et de leurs coûts encore élevés pour faciliter la diffusion de la connaissance des industries de pointe.

L'un des domaines d'application des matériaux composites sont l'industrie aérospatiale et des transports terrestres et maritime. On voit apparaître de plus en plus dans les prototypes des grandes firmes (automobiles, navires, avions...) des éléments fabriqués en matériaux composites (pare-choc, élément de carrosserie, etc. ...). L'un des intérêts de ces nouveaux matériaux provient de la volonté de réduire le poids à vide des moyens de transport pour pouvoir transporter une plus grande quantité de marchandises, tout en respectant le poids total en charge autorisé.

Le comportement dynamique est un paramètre important dont il faut tenir compte lors de la conception des structures, dans le cas des vibrations linéaires la détermination des paramètres modaux à savoir les fréquences et les déformés propres, des modes de résonance ainsi que les amortissements modaux associés, permet de localiser les problèmes liés aux vibrations et de prédire la réponse de celle-ci aux différents types de chargement dynamique et ainsi de vérifier les solutions apportées pour le contrôle de ces problèmes. L'objectif fixé à ce travail était d'étudier le comportement dynamique des plaques stratifiées en différentes séquences d'empilement (multicouches) afin d'obtenir les paramètres modaux de la structure composite, numériquement par l'utilisation du logiciel ANSYS et la méthode expérimentale (ME'ScopeVES). Cet aspect nous a conduit à envisager de traiter le problème par deux approches :

- i) Méthode des éléments finis sous ANSYS ayant le but de calculer les paramètres modaux (fréquences et modes propres) des vibrations en flexion des plaques stratifiées rectangulaires soumises à deux configurations différentes de conditions aux limites sur les bords pour E1.E1 et E1.E1.E1.E1 à séquences d'empilement différentes.
- ii) Méthode expérimentale au sein de Laboratoire de Mécanique et Structures (LMS) par l'utilisation d'un banc d'essai et du logiciel ME'ScopeVES pour la visualisation et l'extraction des paramètres modaux de vibration.

Les résultats obtenus expérimentalement sont comparés avec ceux obtenus théoriquement afin de donner une bonne compréhension du comportement dynamique des matériaux composites.

Le travail est organisé en trois chapitres.

- *Le chapitre 1* est une présentation générale des composites stratifiés (multicouches) du point de vue définition, classification, principaux constituants et désignation, travaux consacrés à la caractérisation du comportement mécanique des composites et les techniques adoptées.

Le chapitre 2 est réservé pour les résolutions et les discussions du problème dynamique des stratifiés composite par l'approche expérimentale et numérique.

Le chapitre 3 est consacré à la présentation de la formulation mathématique permettant l'étude du comportement dynamique des matériaux composites.

Chapitre 01

Etude bibliographique

Etude bibliographique

1.1 Introduction

Les matériaux composites unidirectionnels rassemblent les propriétés d'un renfort fibreux et d'une matrice organique, ce qui leur confère d'excellentes performances mécaniques. De part leur bonne tenue à la fatigue statique et dynamique, leur haut degré d'amortissement des vibrations, les composites sont des matériaux idéaux dans la fabrication de nombreuses pièces mécaniques [BIL 92]. Encore ils sont plus légers que les alliages d'aluminium, et sont incomparablement meilleurs sous sollicitations cycliques surtout dans des applications aéronautiques, aérospatiales et maritimes. C'est sans doute dans les domaines des lanceurs, navettes et satellites que le problème de gain de masse est le plus crucial. Ainsi, chaque kilomètre gagné sur le lanceur représente pour la fusée Ariane E.S.A (EUR) un gain en charge payante de 30 000 Dollars. En effet, l'expérience accumulée montre que l'emploi des composites peut permettre, à performances égales, des gains de masse variant de 10% à 20%. Un bon exemple est celui du moyeu rotor d'un hélicoptère où la construction en composite carbone / kevlar/époxyde a permis d'avoir un gain de masse de 20% avec un prix de revient 60% moins cher qu'une construction classique [BEZ 03], [GAY 91]. De plus, les composites à fibres de carbone sont en voie d'acquiescer une place indispensable dans les constructions notamment aéronautiques et aérospatial [CLE 95]. Le contrôle des vibrations de telles structures est nécessaire car il pose fréquemment un problème important dans la détermination des caractéristiques dynamiques sous différentes conditions de renforcement et de configuration [MIL 08]. La première partie de ce chapitre sera consacré à donner une visualisation sur les matériaux composites et notamment leur définitions, les domaines d'utilisations industriels et leurs évolutions, les stratifiés composites et la nature de leurs matériaux constituants, les séquences d'empilement et leurs différentes désignations. Dans la deuxième partie, l'étude bibliographique récapitulera de nombreux travaux de recherche sur les comportements statique et dynamique des matériaux composites. La troisième partie de ce chapitre concernera la méthodologie expérimentale du travail et la description de la méthode

modale expérimentale utilisée pour la détermination des paramètres modaux des matériaux étudiés.

1.2 Définition des matériaux composites

Les matériaux composites sont des matériaux artificiels modernes, utilisés essentiellement pour la réalisation des pièces de hautes fiabilités. Ils sont constitués par un ou plusieurs renforts (sous forme de grains, fibres longues ou courtes) ayant de bonnes propriétés mécaniques notamment en traction (bonne résistance), arrangés dans une matrice (généralement une résine) à faible résistance mécanique. La conservation de la disposition géométrique des fibres et leur protection contre des agents extérieurs sont assurées par la matrice [CHR 86] ainsi que la transmission des efforts dus aux différentes sollicitations auxquelles est soumis le matériau. En d'autres termes, un matériau composite est un matériau formé de plusieurs constituants de natures différentes dont le nombre se réduit très souvent à deux renfort et matrice (figure 1.1). Le renfort souvent sous forme de fibres, sert au transfert de charges mécaniques, les fibres se présentent sous forme naturelle (verre, carbone,...) ou organique (kevlar, ...) et possèdent des propriétés impressionnantes dépendant de leur forme et des moyens de leur fabrication [BAH].

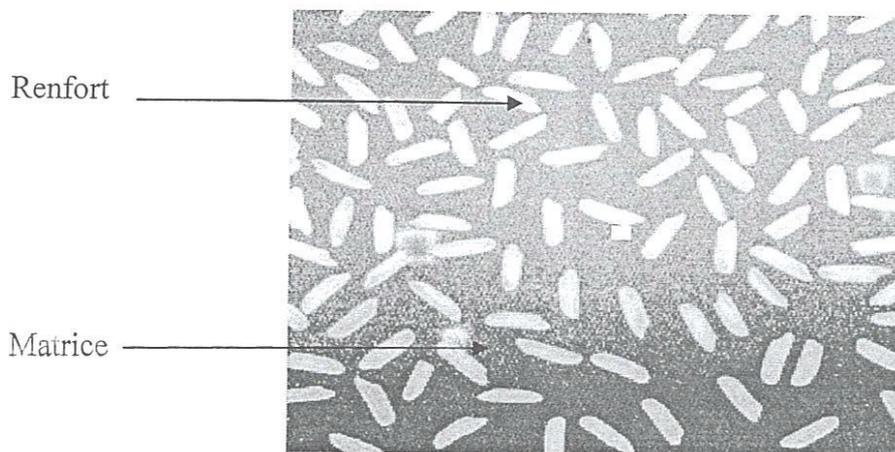


Figure 1.1 Structure d'un matériau composite

1.2.1 Applications courantes

Les matériaux composites se différencient des matériaux classiques par leurs anisotropies très prononcées, de leurs légèretés et leur inaptitude à la modification. Ils ne se corrodent pas et possèdent d'excellentes propriétés d'isolants thermiques et électriques.

Par contre, leur tenue aux impacts et aux chocs est moyenne et ils vieillissent sous l'action de l'humidité ou de la chaleur.

Les matériaux composites connaissent actuellement un développement intense dans pratiquement toutes les branches de l'industrie (Figure 1.2), par exemples:

- **Industrie aérospatiale**

En aéronautique les matériaux composites ont connus des applications courantes surtout dans la construction des pièces de structures primaires, les gouvernes et habillage extérieurs ainsi de l'intérieur de l'aéronef.

- **Industrie des transports terrestres et maritimes**

L'intégration des matériaux composites dans l'industrie de l'automobile et des transports terrestres a pu réduire substantiellement la consommation de carburant au moyen de l'économie de la masse obtenue. Les applications sont très nombreuses dans le domaine des transports, même ferroviaires, avec la fabrication de nombreux éléments de carrosserie et des boucliers amortisseurs de choc placés à l'avant des locomotives des T.G.V et qui présentent des performances supérieures en matière d'absorption d'énergie.

- **Industrie des articles de sport et de loisir**

De part leur légèreté, leur bonne tenue à la fatigue statique et dynamique et leur stabilité dimensionnelle, les composites sont des matériaux idéaux pour la fabrication et la conception de très nombreux articles de sport et de loisir tels que les skis, les raquettes de tennis, les cannes à pêche et de hockey, les planches à voiles et leurs mats, les voiliers de plaisance, les arcs, les planches à voiles et leurs mats, les instruments de musique [MIL03], [MEB 09].

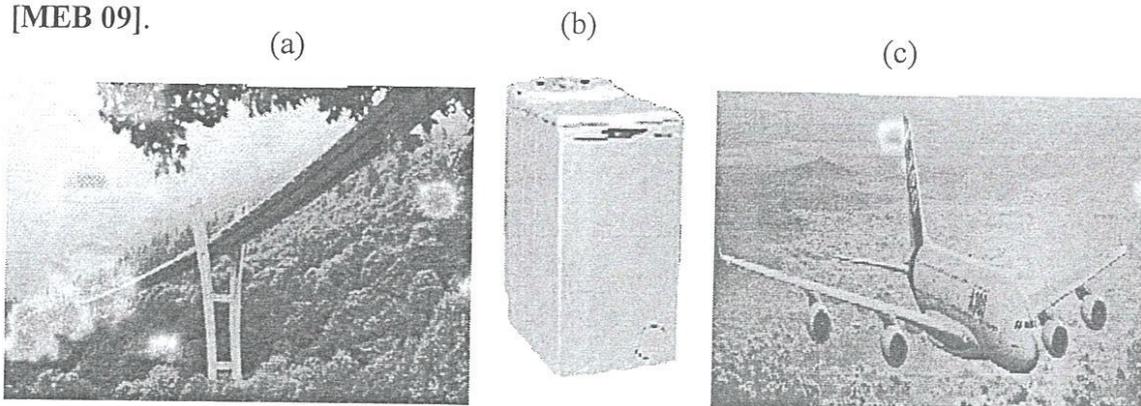


Figure 1.2 Quelques domaines d'application des matériaux composites
(a) Génie civil, (b) Electronique, (c) Aviation

1.2.2 Constituants et caractéristiques générales

Les renforts peuvent être sous différentes formes, comme par exemple en fibres longues, en fibres courtes, en sphères et même en tissu de fibre plus ou moins complexe (tissage 2D, 3D). Ainsi, de nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Cependant, nous pouvons distinguer quelques familles de composites en fonction du type de matrice et de renfort utilisés.

Du point de vue applications industrielles, les composites les plus répandus sont caractérisés généralement par une matrice polymère et des renforts sous forme de fibres longues tissées ou non. Les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits, ainsi que fibres de carbone et aramide pour les applications plus exigeantes notamment dans l'aérospatial (tableau 1.1).

Tableau 1.1 Exemples de matériaux composites, pris dans un sens large [SED 05], [BER 96]

Types de composites	Constituants	Domaines d'application
1. Composites à matrice organique		
Papier, carbone	Résine/charges/fibres cellulosiques	Imprimerie, emballage, etc.
Panneaux de particules et de fibres	Résine /copeaux de bois	Menuiserie, bâtiment ;
Toiles enduites	Résines souples/tissus	Sports, bâtiment
Matériaux d'étanchéité	Elastomères /bitume/textiles	Toiles, terrasse, etc.
Pneumatique	Caoutchouc/toile/acier	Automobile
Stratifié	Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc.	Domaines multiples
Plastiques renforcés	Résines/microsphères	Domaines multiples
2. Composites à matrice minérale		
Béton	Ciment/sable/granulats	Génie civil
Composites carbone-carbone	Carbone/fibre de carbone	Aviation, aérospatial, bio-médecine, etc.
Composite céramique	Céramique/fibres céramiques	Pièces thermomécaniques

3. Composites à matrice métallique	Aluminium/fibres de bore Aluminium /fibre de carbone	Aérospatial
4. Sandwiches { Peaux Ames	Métaux, stratifié, etc. Mousses, nids-d'abeilles, balsa, plastique renforcé, etc.	Domaines multiples

Les propriétés des matériaux composites résultent :

- Des propriétés des matériaux constituants ;
- De leur distribution géométrique ;
- De leurs interactions, etc.

Ainsi, pour accéder à la description d'un matériau composite, il sera nécessaire de spécifier :

- La nature des constituants et leurs propriétés ;
- La géométrie du renfort et sa distribution ;
- La nature de l'interface matrice-renfort.

La géométrie du renfort sera caractérisée par sa forme, sa taille, la concentration du renfort, sa disposition (son orientation), etc. Si l'ensemble de ses paramètres concourt à déterminer les propriétés du composite, les modélisations descriptives se tiendront que de certains paramètres, du fait de la complexité des phénomènes mis en jeu. Par exemple la forme du renfort sera schématiquement approchée soit par des sphères, soit par des cylindres. La concentration du renfort est habituellement mesurée par la fraction volumique (fraction en volume) ou par la fraction massique (fraction en masse) [BIL 92]. La concentration du renfort est un paramètre déterminant des propriétés du matériau composite. Pour une concentration donnée, la distribution du renfort dans le volume du composite est également un paramètre important et une distribution uniforme assurera une «homogénéité» du matériau. Dans le cas de la distribution non uniforme du renfort, la rupture du matériau sera situées dans les zones pauvres en renfort, diminuant ainsi les résistances du composite.

Dans le cas du matériau composite dont le renfort est constitué de fibres, l'orientation de ces dernières détermine l'anisotropie du matériau composite. Ces aspects constituent une des caractéristiques fondamentales des composites. La possibilité de contrôler l'anisotropie d'un produit fini par une concentration permet une fabrication adaptée aux propriétés souhaitées.

1.2.3 Classification des matériaux composites

La distinction entre les différents types de composites peut se faire selon les critères de la classification suivante [BER 96] :

- **Selon la forme des constituants**

- a) *Composites à fibres*
- b) *Composites à particules*

- **Selon la nature des constituants**

- a) *Composites à matrice organique*
- b) *Composites à matrice métallique*
- c) *Composites à matrice minérale*

- **Selon la performance et la diffusion**

- a) *Les composites à grandes diffusions*
- b) *Les composites à hautes performances*

1.2.4 Les stratifiés

Les stratifiés sont constitués par des couches successives (appelées par fois plis) de renforts (fils, stratifié, mat, tissus, etc.) imprégnés de résines (Figure 1.3).

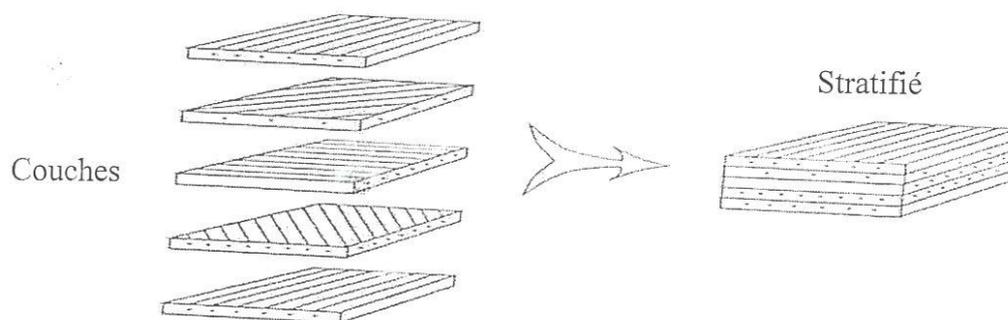


Figure 1.3 Modèle de base des stratifiés

• **Stratifié à base de fils ou de tissu unidirectionnels**

Les stratifiés, à base de fils ou de tissus unidirectionnels constituent une base auquel peut se ramener en théorie tous les autres types de stratifiés. Ces stratifiés sont constitués de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est orientée dans chaque couche (figure 1.4).

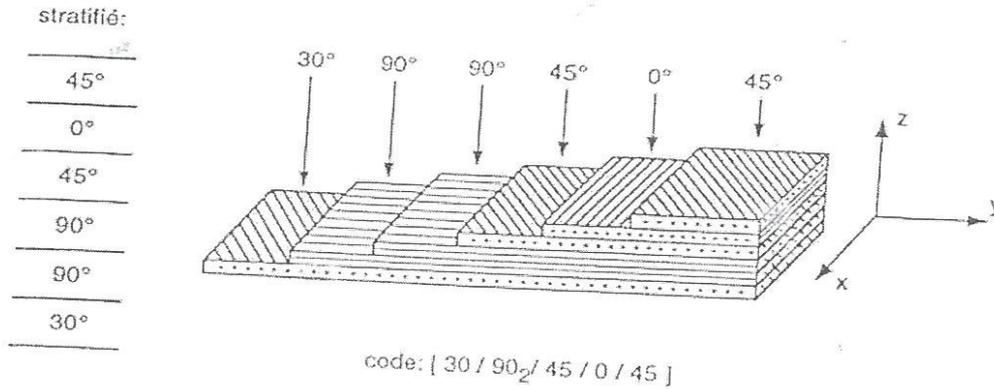


Figure 1.4 Désignation d'un stratifié [BER 96]

La désignation de ses stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant:

- Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence (l'axe x).
- Les couches successives sont séparées par (/) si leur angles sont différents.
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.
- Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre.
- Des crochets (ou parenthèses) indiquant le début et la fin du code.

La figure 1.5 montre la convention de signe des stratifiés.

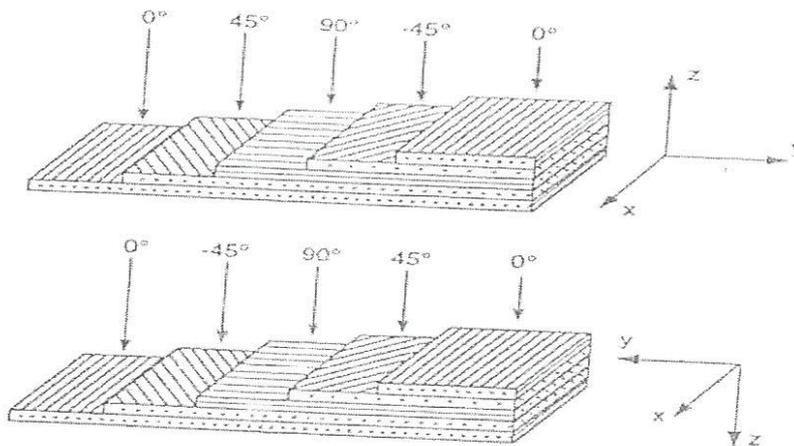


Figure 1.5 Convention de signe pour la désignation des stratifiés.

- **Stratifiés symétriques**

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est le plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite que la moitié des couches successives. Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice *S* indique que le stratifié est symétrique (tableau 1.2).

Tableau 1.2 Désignation des stratifiés symétriques

Stratifié	Désignation
90°	[90/45 ₂ /0] _S
45°	
45°	
0°	
0°	
45°	
45°	
90°	

1.3 Caractérisation mécanique des plaques composites

1.3.1 Caractérisation statique des matériaux composites

L'essai de traction uniaxiale reste le plus usuel pour la caractérisation statique. Ce type de test est bien sûr standardisé pour les matériaux composites, notamment par l'ASTM (ASTM spécification D3039) [AST 05] qui décrit à la fois la géométrie des éprouvettes, leur préparation et les conditions de test recommandées pour différentes classes de matériaux et d'orientation de fibres. Pour ce genre d'essai, deux ensembles d'échantillons de test sont nécessaires: un ensemble d'éprouvettes dont les fibres sont alignées dans le sens de la longueur du spécimen et un autre ensemble avec les fibres en direction transverse.

Parallèlement aux essais de traction uniaxiale, des tests de flexion trois ou quatre points (ASTM D0790) sont également utilisés, mais mènent généralement à des valeurs de module de Young légèrement différentes de celles obtenues en traction, de sorte qu'on les appelle en général les modules de flexion pour les distinguer de leurs équivalents en traction.

De nombreuses méthodes ont été développées pour la détermination des modules de cisaillement d'une strate. Un des tests les plus couramment employés (ASTM D3518) se base sur un spécimen stratifié à $\pm 45^\circ$ chargé en traction uniaxiale, afin de générer un état de contrainte en cisaillement dans le plan au centre de l'échantillon. Bien que très simple à

mettre en œuvre, cette méthode a tendance à surestimer le module de cisaillement G_{12} en raison des effets des contraintes inter-laminaires induites par le schéma de stratification choisi. De plus, de nombreux travaux conçus sur la détermination des coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{13} , par la modélisation de l'influence des orientations des renforts en différentes natures de stratifiés composites sur le coefficient de Poisson négatif pour des séquences d'empilement différentes telles que ST1 ($[\pm\theta_2]_s$), ST2 ($[0_2/\pm\theta]_s$), ST3 ($[90_2/\pm\theta]_s$). Les résultats obtenus par Harkati *et al.* [HAR 07] montre bien la grande influence de l'orientation des fibres ainsi que le type de renfort sur le coefficient de Poisson. Ces résultats sont illustrés sur les figures 1.6, 1.7 et 1.8.

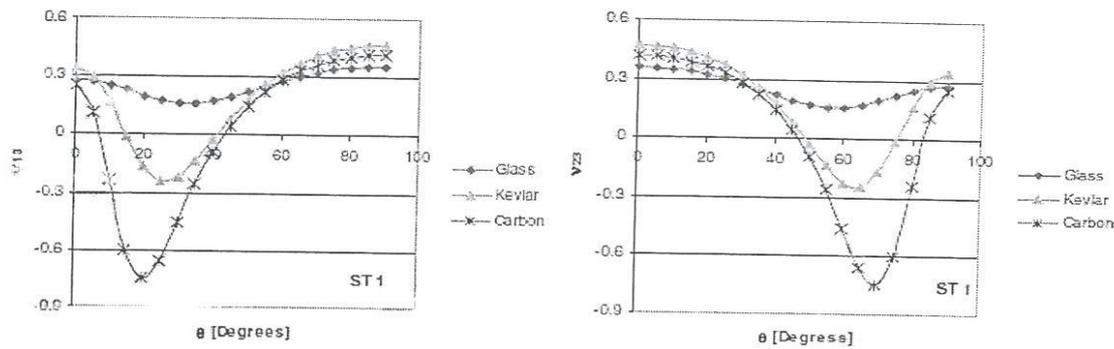


Figure 1.6 Influence du type de renforcement et de l'orientation des fibres sur les coefficients de Poisson pour les stratifiés $[\pm\theta_2]_s$, [HAR 07]

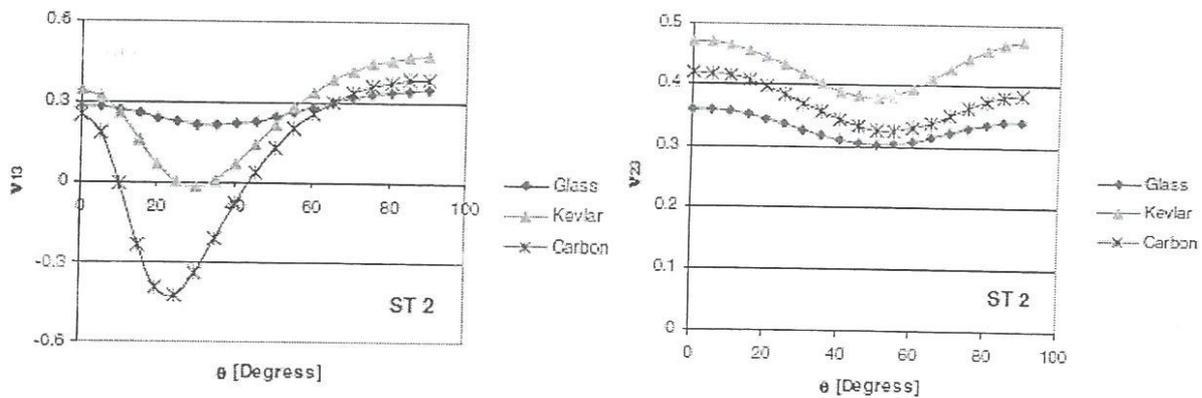


Figure 1.7 Influence du type de renforcement et de l'orientation des fibres sur les coefficients de Poisson pour les stratifiés $[0_2/\pm\theta]_s$, [HAR 07]

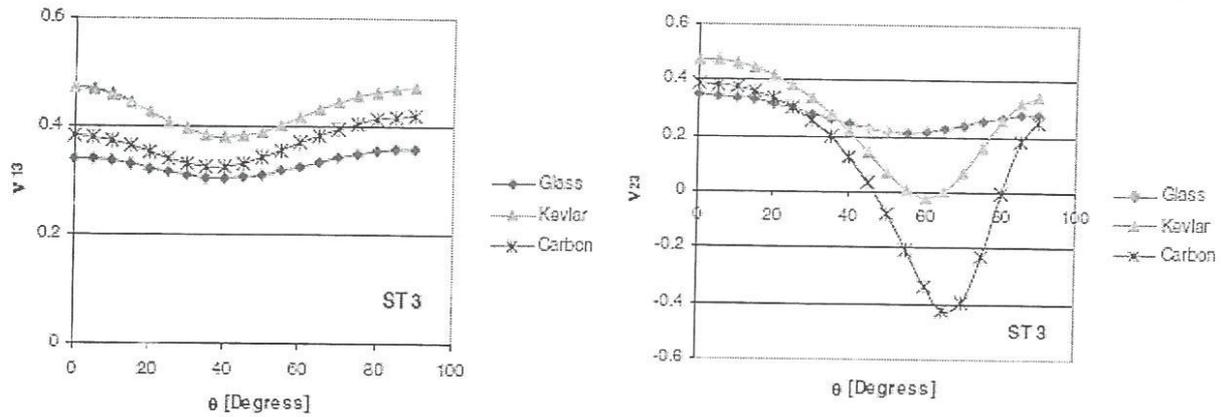


Figure 1.8 Influence du type de renforcement et de l'orientation des fibres sur les coefficients de Poisson pour les stratifiés $[90_2/\pm\theta]_s$, [HAR 07]

1.3.2 Caractérisation dynamique des matériaux composites

Les vibrations des structures mécaniques sont souvent sources des problèmes affectant le bon fonctionnement de nombreux systèmes. La plupart de ces problèmes sont liés à des phénomènes de résonance où les forces excitent plus d'un mode propre de vibration [GUE 93]. C'est le cas par exemple des cartes électroniques composant les ordinateurs embarqués au bord d'un avion ou d'un hélicoptère.

Plusieurs travaux existent dans la littérature dont leur but est la recherche des méthodes plus sophistiquées pour la détermination du comportement dynamique des matériaux composites à l'aide des spécimens de type poutre, plaque ou coque. Les tests vibratoires en flexion d'une poutre en stratifié composite soumise à une excitation transitoire ou harmonique forcée représentent un grand intérêt pour la caractérisation des matériaux et offrent en outre l'avantage d'être relativement simples à réaliser. Cependant, de telles méthodes requièrent généralement l'utilisation de plusieurs types de spécimen pour la détermination de l'ensemble des propriétés élastiques du composite et les écarts observés entre les modules de cisaillement G_{12} et le coefficient de Poisson ν_{12} identifiés et les valeurs mesurées en statique sont parfois importantes. Les éprouvettes de type plaque présentent un avantage principal par rapport aux poutres permettant l'identification de l'ensemble des propriétés constitutives E_1 , E_2 , G_{12} , G_{23} , G_{13} et ν_{12} à partir d'un échantillon unique, ce qui réduit les disséminations dues à l'emploi de plusieurs spécimens de type poutre prélevés dans le matériau à étudier [JUG 05]. Bien que cette identification soit basée sur un modèle analytique ou numérique, il est souhaitable de comparer les résultats de ces modèles avec des mesures expérimentales.

Les travaux qui régissent la dynamique des poutres et des plaques sont décrits exhaustivement dans la littérature. Dans ce cadre Jong Hee Yim [JON 99] reporte une solution analytique pour la prédiction de l'amortissement du stratifié composite. La modification de la théorie classique des stratifiés permet de développer un modèle d'amortissement basé sur le coefficient de Poisson. Le travail montre une nouvelle approche viscoélastique et la vérification des résultats obtenus est assurée par la comparaison de ces derniers avec ceux déterminés par Ni et Adam [NI 84] en différentes séquences d'empilement. Les résultats numériques sont donnés une nouvelle méthode efficace pour la prédiction de l'amortissement en fonction de différentes orientations de fibres. Adams *et al* [ADM 03] ont travaillé sur le critère d'amortissement d'un composite à matrice polymère, basé sur la théorie classique des stratifiés pour la détermination des facteurs influençant les caractéristiques dynamiques des stratifiés renforcés par des fibres à matrice plastique. Et à savoir leur rigidité et leur amortissement, et comment ces propriétés peuvent être prévues. Les résultats obtenus montrent que les facteurs effectuant l'amortissement en composites à fibres en matrice plastique peuvent être aisément prévus (séquences d'empilement, orientation des fibres, nature de déformation). Berthelot [BER 06] a présenté une analyse d'amortissement dans les matériaux composites en fibres unidirectionnelles pour des stratifiés différents. Les caractéristiques d'amortissement des stratifiés sont analysées expérimentalement par l'utilisation des essais impulsions sur des spécimens de type poutre. Les résultats obtenus sont comparés avec celui obtenu à partir de la modélisation par l'utilisation de la méthode de Ritz. La deuxième partie de ce travail présente une évaluation de l'amortissement des stratifiés de type plaque sollicitée en deux conditions aux limites. Les résultats montrent que l'influence des séquences d'empilement et l'orientation des couches sur l'amortissement modale est considérable. La contribution de Milli *et al* [MIL 07] consiste à l'analyse vibratoire libre des plaques composites en Bore/époxyde à différentes séquences d'empilement. L'étude de vibration en flexion de telles structures repose essentiellement sur la recherche des fréquences et des modes propres. L'équilibre dynamique est régi par un système d'équations aux dérivées partielles obtenues soit par une formulation directe soit par la méthode des puissances virtuelles ou encore par le principe de Hamilton. Dans le cas des stratifiés orthotropes ou lorsque les plaques sont encastées, les méthodes approximatives telles que celle de Ritz ont été appliquées. L'objectif principal de cette étude est la mise en valeur et la discussion des effets de l'angle d'orientation des fibres de renforcement et du rapport d'orthotropie du matériau. El Mahi *et al.* [ELM 08] présentent un travail basé sur la modélisation d'amortissement en stratifiés composites à fibres unidirectionnelles par un

model basé sur l'énergie dissipée en fonction des séquences d'empilement des strates. La recherche est conçue sur l'utilisation des spécimens de type poutre de longueurs 160 mm, 180 mm et 200 mm. Les résultats expérimentaux trouvés sont comparés avec ceux obtenus par la modélisation numérique. Les résultats obtenus montrent que l'amortissement en stratifiés $[0/90/90/0]_s$ et en $[0/90/45/-45]_s$ donnent des propriétés pratiquement semblables à celles des stratifiés ayant la direction des fibres de 0 et 90°, sachant que les stratifiés empilés en $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$ ont une propriétés semblables à la direction de θ . Billups *et al.* [BILL 08] comparent les différentes théories bidimensionnelles de prédiction de la capacité d'amortissement spécifique des stratifiés de type plaque à fibres composites, avec les théories d'Adams et Bacon [ADM 73], Adams et Maheri [ADM 03], Ni et Adams [NI 84] et Saravanos et Chamis [SAR 89]. Les résultats prouvent que la théorie de Saravanos et Chamis fournit l'ajustement le plus conformé aux résultats expérimentaux pour une gamme des propriétés constitutives et des orientations des couches au niveau des stratifiés. Pour certains stratifiés, la méthode de Saravanos et de Chamis semble prévoir la tendance fautive dans la variation de capacité d'amortissement spécifique (SDC) en fonction de l'angle d'orientation. Jia-Lin Tsai *et al.* [JIA 08] leurs travail consiste sur le développement d'un model analytique bidimensionnel pour la caractérisation du comportement d'amortissement en flexion à la base de l'extension de Ni-Adams. La modélisation d'amortissement est fondée la conception d'énergie de dissipation (SDC) d'un stratifié composite pour chaque cycle de vibration. Le model est validé par la comparaison d'amortissement expérimental avec celui obtenu par la méthode des éléments finis en différentes séquences. Les résultats expérimentaux comparés avec les models Ni-Adams et Adams-Maheri montrent une bonne convergence entre les données expérimentales et les résultats menés par la MEF. Fridman *et al.* [FRI 08] ont travaillé sur le comportement structural d'un stratifié composite avec des plis piézoélectrique, dont leur but est conçu sur l'étude analytique et numérique du comportement structural en type poutres. Le but principal de l'étude vise la recherche du perfectionnement de la stabilisation la structure. Les spécimens symétriques et antisymétriques sont sollicités sous différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus sont présentés par un modèle mathématique pour le contrôle actif de l'instabilité des structures stratifié piézoélectrique symétrique et antisymétrique soumis aux chargements axiaux et latéraux. L'investigation de Damisa *et al.* [DAM 08] est conçue sur la recherche de l'amortissement de vibration en présence d'une pression à l'interface des éprouvettes de type poutre. Trindade [TRI 00] présente une analyse numérique de l'amortissement des vibrations structurales obtenue par des traitements passifs, actifs et hybrides actifs-passifs. Pour cela, un modèle éléments finis de poutre sandwich est présenté,

dont leurs couches peuvent être élastiques, piézoélectriques ou viscoélastiques. La comparaison entre les performances d'amortissement des mécanismes d'action piézoélectrique par traction et par cisaillement montre que les cisaillements sont plus efficaces pour des petites amplitudes et des fréquences élevées au niveau des structures sandwich à peaux rigides et à coeur souple. De plus, il a trouvé que les traitements par revêtement, consistant à remplacer la couche externe élastique par un actionneur piézoélectrique, ne sont pas efficaces que dans le cas des couches viscoélastiques très minces.

1.4 Analyse modale

L'analyse modale expérimentale permet d'identifier les paramètres structuraux dynamiques ou les paramètres modaux d'une structure tels que les fréquences de résonance, l'amortissement et les déformées modales [BRI 99]. La réalisation d'un essai d'analyse modale nécessite généralement la mesure de la réponse vibratoire de la structure ainsi que la force d'excitation en différents points permettant ainsi le calcul de Fonction de Réponse en Fréquence (FRF). Les méthodes à référence unique appelées SISO (Single Input Single Output) ou SIMO (Single Input Multiple Outputs) mesurent respectivement une ou plusieurs réponses de la structure. Les méthodes conventionnelles d'excitation emploient généralement le pot vibrant et le marteau de choc.

Les modes propres de vibration compris dans le domaine de fréquence de fonctionnement représentent toujours une source de phénomènes potentiels.

Une propriété importante des modes de vibration est que toute réponse dynamique forcée ou libre d'une structure peut être réduite à un ensemble de modes discrets qui sont caractérisés par leurs paramètres modaux:

- La fréquence modale
- L'amortissement modal
- La déformée modale

L'analyse modale ne peut s'appliquer qu'à des systèmes linéaires dont la réponse est toujours proportionnelle à l'excitation. Cette hypothèse de linéarité se traduit, pour les mesures de réponse en fréquence, par les caractéristiques suivantes :

- *La superposition:* La fonction de réponse est indépendante du type d'excitation utilisée [GUE 93]
- *L'homogénéité:* La fonction de réponse ne dépend pas du niveau de la force d'excitation utilisée [BRU].

- **La réciprocité:** Un système linéaire présente une symétrie particulière qui fait qu'une réponse en fréquence mesurée entre deux points quelconques est indépendante [CLA 05] du fait que l'on choisisse l'un ou l'autre comme excitation ou comme réponse (théorème de MAXWELL).

Du point de vue des structures étudiées, elles sont supposées :

- **Causales:** Elles ne vibrent pas avant l'instant de l'excitation.
- **Stables:** Les vibrations disparaissent avec l'excitation.
- **Invariantes dans le temps:** les caractéristiques dynamiques restent constantes dans le temps.

1.5 Position du problème et techniques adoptées

De ce qui précède, il ressort que l'étude des matériaux composites, qui a déjà fait l'objet de nombreux travaux, est encore loin d'avoir abouti à la connaissance totale de leur comportement.

Notre travail est basé sur la méthode de caractérisation dynamique des matériaux composites qui montre l'intérêt de la recherche pour ce type d'approche, lié aux nombreux avantages qu'elles apportent, par rapport aux tests statiques traditionnels :

- Les mesures modales effectuées ne sont pas destructives ;
- Les résultats obtenus concernent l'ensemble du spécimen de test et diminuent ainsi les dispersions observées avec des échantillons de dimensions plus réduites ;
- La préparation des éprouvettes est en général minime ;
- La mesure des fréquences de résonance est très rapide ;
- Un seul test peut être utilisé pour identifier précisément la majorité des propriétés dynamique d'un stratifié composite.

Donc l'objectif principal de ce travail est de voir l'influence de la séquence d'empilement des plaques composites stratifiés sur les fréquences propres et les amortissements modaux, dans un souci de bon fonctionnement des composants des machines tournantes et afin d'éviter le phénomène de résonance qui conduit à la ruine des structures. On utilise le logiciel ME'ScopeVES pour l'extraction des fréquences et des amortissements modaux des plaques à partir des autospectres et des signaux mesurés en quelques points de la structures pour différentes séquences d'empilements. Plusieurs conditions aux limites seront

étudiées à savoir: Encastrée-Libre-Libre-Libre (E¹LLL) Encastrée-Libre-Encastrée-Libre (E¹LEL) ... etc. Les résultats des fréquences propres obtenus expérimentalement seront comparés avec ceux obtenus par simulation numérique sur ANSYS. Notre travail consiste alors à faire appel à une double stratégie pour l'analyse vibratoire des plaques orthotropes. L'utilisation d'une méthode expérimentale qui permet de donner les réponses dynamiques de la structure réelle avec un degré de précision suffisant. D'autre part une méthode numérique par l'utilisation du logiciel de calcul des structures ANSYS. Le travail est basé sur la méthode d'analyse modale qui permettra de donner les résultats souhaitable, compatible avec le but de notre travail.

Chapitre 02

**Détermination expérimentale et par simulation numérique
des paramètres modaux**

Détermination expérimentale et par simulation numérique des paramètres modaux

2.1 Introduction

Le développement extrêmement rapide des moyens de calcul numérique a permis aux chercheurs de décupler leurs possibilités de simulation notamment dans ces dernières décennies. A l'heure actuelle, les simulations numériques permettent de traiter la majorité des problèmes physiques rencontrés couramment et les modèles utilisés ne cessent pas d'évoluer. La possibilité de simuler des phénomènes toujours plus complexes entraîne toutefois inévitablement l'augmentation du nombre de grandeurs physiques nécessaires à la caractérisation des modèles numériques. Ainsi, face à l'accroissement prodigieux des moyens de simulation, les besoins de données expérimentales fiables augmentent aussi de manière exponentielle, au point qu'aujourd'hui, les techniques de mesure et de caractérisation physique sont quasiment devenues des freins pour les processus de développement de nouveaux matériaux ou produits, face à la demande croissante de données empiriques. Le coût et la complexité des méthodes de caractérisation classique, qui exigent pour la plupart la réalisation d'un test spécifique pour chaque paramètre constitutif requis, sont devenus des aspects non négligeables de l'effort de développement. Cette famille de méthodes se base sur une résolution itérative d'un problème numérique inverse, à savoir la détermination des paramètres d'entrée d'un modèle de simulation de telle sorte que les résultats simulés soient aussi proches que possible des observations empiriques. Rendues applicables par l'augmentation de la puissance de calcul disponible, ces méthodes n'en restent pas moins gourmandes en ressources, mais compensent largement ce défaut par une facilité d'expérimentation accrue et par la possibilité qu'elles offrent d'identifier plusieurs paramètres constitutifs inconnus sur la base d'un seul test, réduisant ainsi radicalement les efforts et les coûts des mesures.

Dans le domaine des matériaux composites, le nombre de propriétés constitutives recherchées est au minimum de six pour un seul matériau, ce qui nécessite habituellement un minimum de cinq essais de caractérisation classiques pour les déterminer.

En projetant le système (2.1) dans la base modale ainsi formée, il est possible de découpler les équations du système.

Le changement de base correspondant à cette projection s'écrit :

$$x(t) = \sum_{K=1}^n X_K(t) \varphi_K = \Phi X(t) \quad (2.4)$$

Nous obtenons la forme, projetée dans la base modale est donc découplée, de notre système d'équations différentielles.

$$m_K \ddot{X}_K(t) + c_K \dot{X}_K(t) + K_K X_K(t) = \varphi_K^T f(t) = F_K(t) \quad \text{pour } (K = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

Ces grandeurs correspondent à la projection dans la base modale des matrices structurelles du système.

$$m_K = \varphi_K^T M \varphi_K, \quad c_K = \varphi_K^T C \varphi_K, \quad k_K = \varphi_K^T K \varphi_K \quad (2.6)$$

La force $f(t)$ est transformée, par projection dans la base modale, en une force d'excitation modale.

$$F_K(t) = \varphi_K^T f(t)$$

En appliquant une transformation de Fourier à l'expression (2.5) et en isolant certains termes, nous obtenons une expression pour la contribution de rang k à la réponse du système.

$$X_K(j\omega) = \frac{F_K(j\omega)}{m_K(\omega_K^2 + 2j\zeta_K \omega_K \omega - \omega^2)} \quad (2.7)$$

Où ζ_K représente le facteur d'amortissement modal (amortissement relatif). En sommant les contributions de chaque mode et en projetant cette fois-ci l'expression (2.7) dans la base spatiale, nous pouvons exprimer les fonctions de transfert du système discret sous la forme:

$$h_{rS}(j\omega) = \frac{X_r(j\omega)}{F_S(j\omega)} = \sum_{K=1}^n \frac{\varphi_r^K \varphi_S^K}{m_K(\omega_K^2 + 2j\zeta_K \omega_K \omega - \omega^2)} \quad (2.8)$$

La fonction de transfert $h_{rs}(j\omega)$ représente, dans le domaine fréquentiel, la réponse du système en un point r pour une excitation de type impulsion de Dirac en un point s ou, en d'autres termes, à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. Ainsi, le système d'équations différentielles de la formulation spatiale du problème (2.1) se transforme en une matrice de fonctions de transfert $H(j\omega)$ décrivant complètement le système dynamique réel.

En retravaillant l'expression (2.8), il est possible d'écrire la matrice des fonctions de transfert $H(j\omega)$ de la façon suivante [JUG 05]:

$$H(j\omega) = \sum_{K=1}^n \frac{1}{m_K (\omega_K^2 + 2j\zeta_K \omega_K \omega - \omega^2)} (\varphi_K \otimes \varphi_K) \quad (2.9)$$

La figure 2.1 montre un maillage expérimental d'un model (plaque) et fonction de transfert

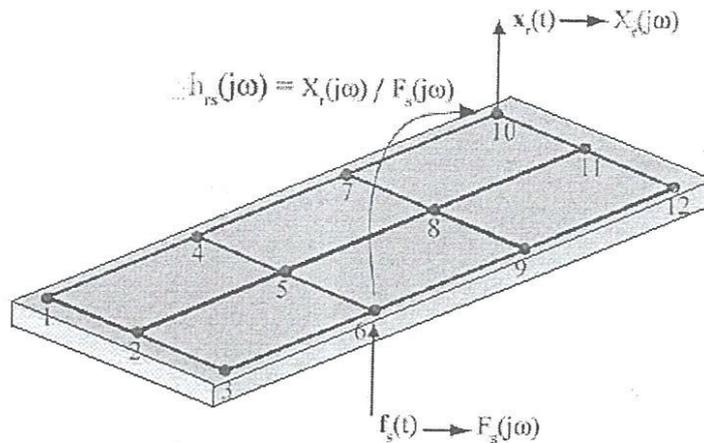


Figure 2.1 Maillage expérimental et fonctions de transfert

Un montage expérimental typique (figure 2.2) peut comporter les éléments suivants :

- Au moins une source d'excitation de la structure pouvant être soit un pot vibrant ou un marteau d'impact pour une excitation mécanique et un haut-parleur pour l'excitation acoustique.
- Au moins un capteur servant à capter le signal d'excitation de la structure. Lors d'excitations mécaniques, une cellule de charge dynamique est généralement utilisée. Dans le cas de l'excitation acoustique, une mesure de pression est réalisée à l'aide d'un ou plusieurs microphones.

- Au moins un capteur servant à capter la réponse vibratoire de la structure. Généralement un accéléromètre est utilisé pour cette tâche mais des capteurs de déplacement ou de vitesse peuvent aussi être employés.
- Chaque capteur doit être jumelé aux appareils électroniques de conditionnement, d'amplification ou de filtrage adaptés pour convertir le mouvement mécanique en un signal électrique.
- Un analyseur de signal permettant de traiter le signal temporel analogue en une information digitalisée dans le domaine fréquentiel. Les analyseurs digitaux à Transformée de Fourier Rapide (FFT) sont les plus fréquemment utilisés pour cette tâche [RIC 99].

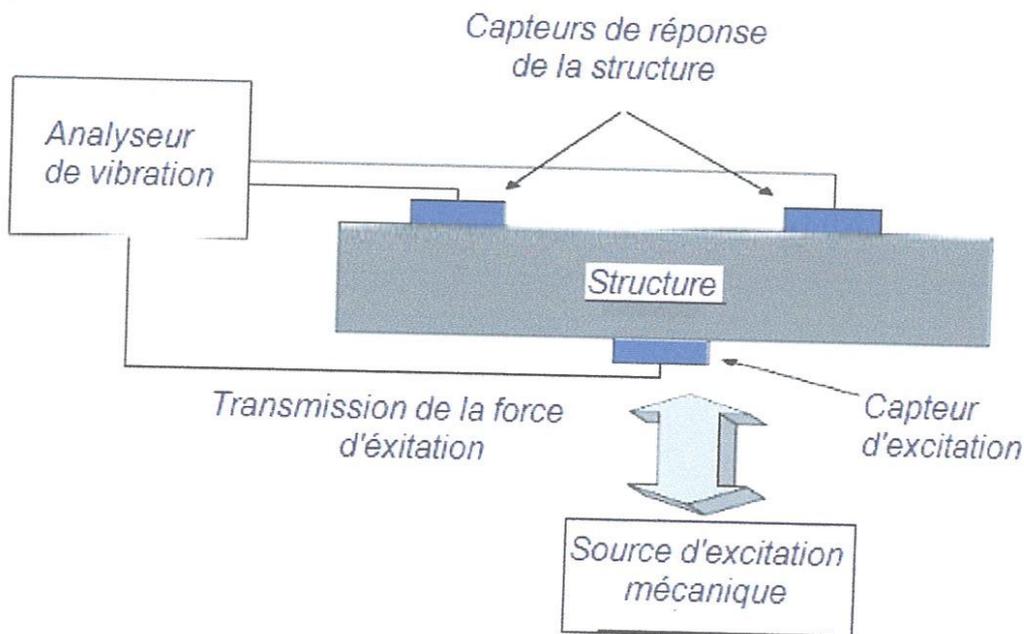


Figure 2.2 Montage typique d'analyse modale

2.3 Instrumentation de l'analyse modale

2.3.1 Analyseur bi-canal FFT

L'analyseur bi-canal F.F.T estime les spectres du système à partir des signaux analogiques d'entrée d'excitation et de réponse. Son principe de fonctionnement est suivant:

Les signaux analogiques d'entrée sont filtrés, échantillonnés et numérisés pour donner une série de M séquences numériques, ou enregistrements. Sur une durée de temps, ces enregistrements représentent les variations temporelles du signal.

La vitesse d'échantillonnage et la longueur des enregistrements déterminent la gamme de fréquence et la résolution de l'analyse par le théorème d'échantillonnage de *Shannon* qui stipule que la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure ou égale à deux fois la fréquence de coupure du signal enregistré.

Chaque enregistrement d'une séquence continue peut être multiplié (pondéré) par une fonction de fenêtre. Cette fonction pondérée les données de début et de fin de chaque enregistrement pour les adapter à l'analyse par blocs.

La séquence pondérée est transformée dans le domaine fréquentiel en spectre complexe, à l'aide de *la transformée de Fourier discrète*.

La transformée inverse donne la séquence temporelle originale. Pour estimer la densité spectrale du signal, des techniques de *moyennage* sur différents enregistrements effectués, permettent d'éliminer le bruit et d'augmenter la confiance statistique.

Un *Autospectre* est ensuite calculé en multipliant un spectre (obtenu par les moyennages successifs) par son complexe conjugué, et en moyennant un nombre de produit indépendant [GUE 93].

2.3.2 L'instrumentation

➤ Le marteau d'impact

Le marteau d'impact est construit en montant un capteur de force (cellule de charge piézo-électrique à surcircuit intégrée) à l'extrémité du marteau, et en ajoutant un élément qui contrôle la raideur à l'extrémité du capteur (embout plastique -vinyle).

Le capteur de la force est constitué d'un élément piézo-électrique, un cristal de quartz, et d'un conditionneur de signal incorporé à gain unité qui permet d'obtenir le signal résultant de la force appliquée lors de l'impact.

➤ Les accéléromètres

Pour mesurer la réponse, on utilise des accéléromètres (figure 2.3) placés en différents points de la structure étudiée. Ces accéléromètres de faible masse et d'encombrement réduit sont des capteurs piézo-électriques restant en contact avec la structure par le biais d'une couche très fine de cire d'abeille.

Leur principe de fonctionnement est simple; une masse sismique m se déplace suivant l'axe Z dont on cherche à connaître son accélération. Les accéléromètres offrent les avantages suivants :

- Une bonne linéarité jusqu'à 2500Hz environ,
- Un poids réduit de l'ordre de 2 g (avec les fils électriques),
- Une construction solide et une conception simple,
- Une faible sensibilité transversale,
- Une méthode de montage simple.

La liaison de ces accéléromètres avec le frontal d'acquisition se fait par câbles coaxiaux blindés via un amplificateur de charge. Ils peuvent introduire des bruits résultant de la charge électrique générée par le mouvement relatif des différents composants internes au câble. Aussi, lors de la phase de mesure, il faudra vérifier que le mouvement du câble ne soit pas en contact avec un objet qui vibre [OUE 07].

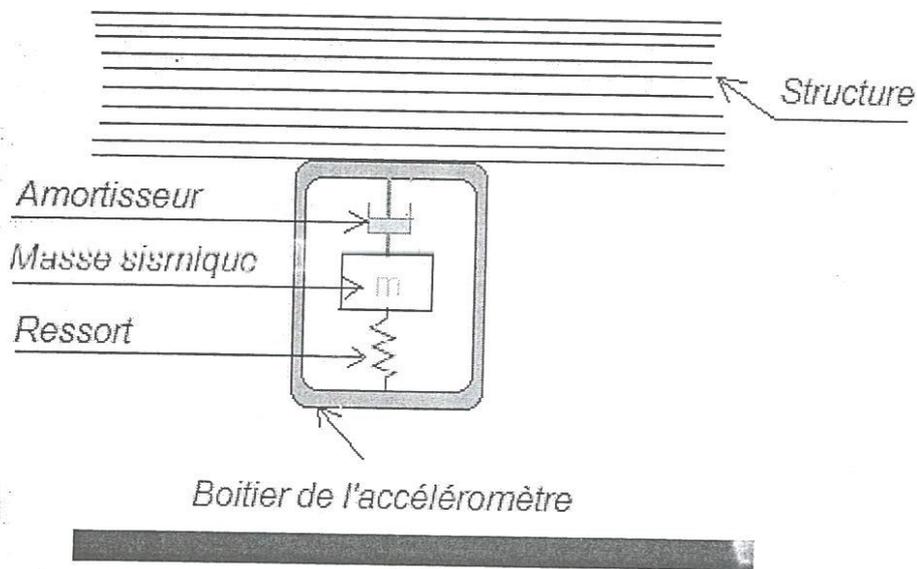


Figure 2.3 Principe de fonctionnement de l'accéléromètre

2.4 Détermination des fréquences propres et des déformées propres des plaques composites ayant différentes séquences d'empilement

2.4.1 Détermination des fréquences propres et des déformées propres des plaques composites simulées par ANSYS

- **Plaques étudiées**

Des plaques composites stratifiées de formes carrées ayant les dimensions $300\text{mm} \times 300\text{mm} \times 1\text{mm}$, constituées de 8 couches unidirectionnelles en fibre de carbone/époxyde dont l'épaisseur de chaque couche est d'environ $0,125\text{mm}$, sont utilisées (figure 2.4). La fabrication des éprouvettes a été réalisée à partir de pré-imprégnés unidirectionnels portant la désignation IM7/8552.

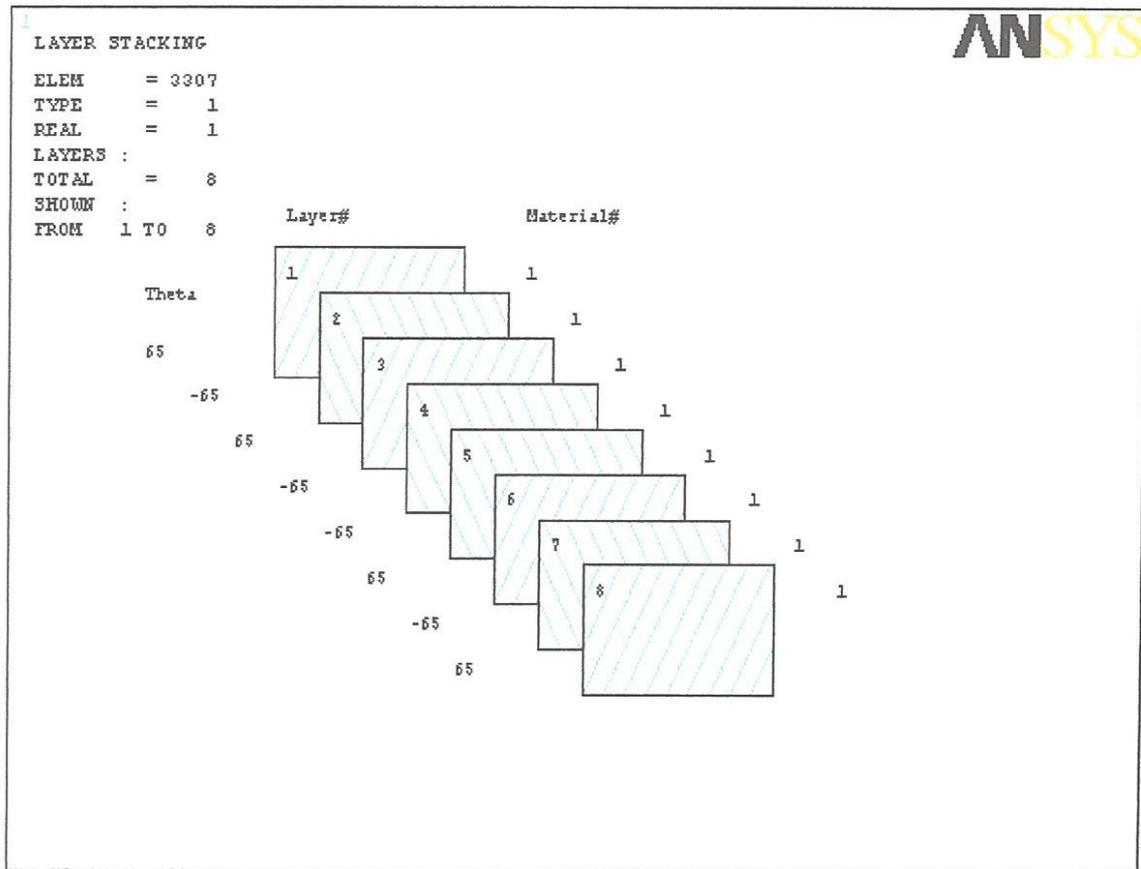


Figure 2.4 Exemple type d'un empilement des couches des plaques étudiées

Les couches de stratification sont disposées selon les séquences d'empilement suivantes (tableau 2.1).

Tableau 2.1 Séquence d'empilement des plaques

Plaques	Séquences d'empilement
ST1	$[(+70/-70)_2]_S$
ST2	$[(+65/-65)_2]_S$
ST3	$[(+60/-60)_2]_S$

Les plaques testées sont fabriquées au sein du laboratoire ACCIS «Advanced Composites Center for Innovation and Science» de l'université de Bristol en UK.

Les caractéristiques mécaniques des couches sont prises des références [HAR 09] et [LIL 06].

$$E_{11} = 164,87 \text{ Gpa};$$

$$E_{22} = E_{33} = 9,81 \text{ Gpa};$$

$$G_{12} = G_{13} = 4,8 \text{ Gpa};$$

$$G_{23} = 3,2 \text{ Gpa};$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0,31;$$

$$\nu_{32} = 0,52;$$

$$m = 145 \text{ g}.$$

La masse volumique est $\rho = 1490 \text{ Kg/m}^3$

- **Conditions aux limites et maillage utilisé sur la plaque modélisée par ANSYS**

L'élément coque SHELL 99 (figure 2.5) est utilisé pour faire le maillage et par conséquent les calculs par éléments finis en utilisant le logiciel de calcul de structures ANSYS.

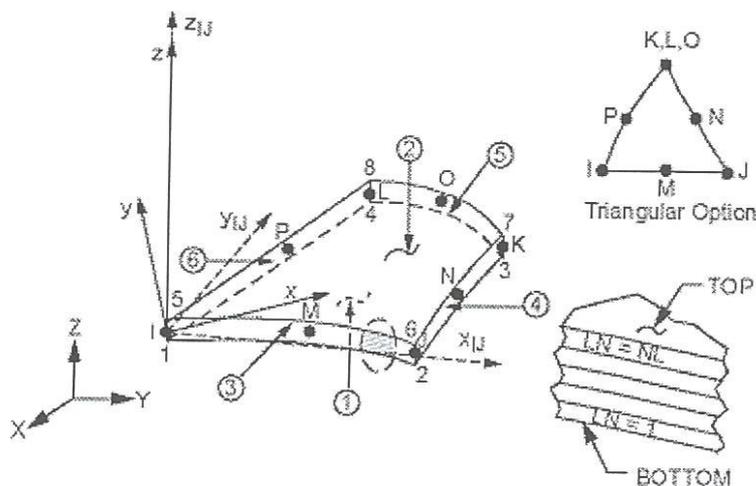


Figure.2.5 La géométrie de l'élément coque SHELL 99 [ANS 07]

L'optimisation du maillage a été effectuée pour assurer la convergence des fréquences propres, les torseurs cinématiques sont appliqués sur chaque cotés de la plaque étudiée, pour définir les conditions aux limites utilisées. La figure 2.6 représente le maillage d'une plaque encastree sur un bord et libre sur les autres bords (désignation ELLL).

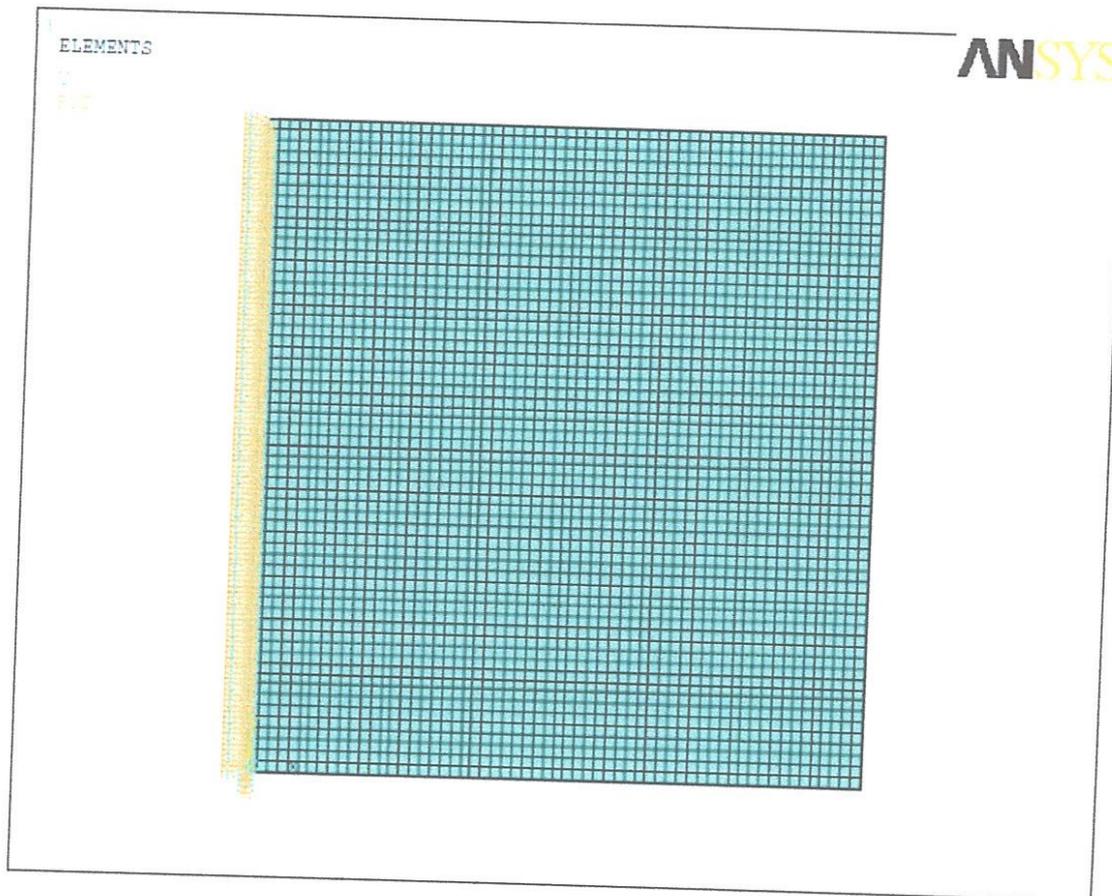


Figure 2.6 Maillage de la plaque ELLL

Les résultats de simulation sont présentés dans les figures 2.15 à 2.19 et en annexe 2.

2.4.2 Détermination expérimentale des fréquences propres et des déformées propres des plaques stratifiées composites

Les essais ont été réalisés sur un banc d'essai du laboratoire de Mécanique et Structures. Le matériel utilisé dans ces essais est composé d'un analyseur de vibration B&K 2035, d'un marteau de choc équipé d'un capteur de force de type 8002 de sensibilité 0,98 pc/N et d'un accéléromètre de 2g.

Les mesures ont été prises dans la bande de fréquence [0, 400 Hz] qui nous permet de localiser une dizaine de modes des plaques testées.

- **Préparation des plaques composite et déroulement des essais**

Pour fixer les points de mesure sur les plaques testées, nous avons effectué un maillage expérimental par une grille de points espacés de 60 mm (figure 2.7).

Durant la mesure des autospectres d'accélération, nous avons gardé le point d'excitation par marteau de choc fixe et nous avons déplacé l'accéléromètre sur tous les points de maillages pour les deux configurations de plaques ELLL et ELEL. Pour obtenir un bon encastrement des plaques, nous avons utilisé une distance de 10 mm sur chaque bord encastéré. La figure 2.7 montre le maillage expérimental utilisé pour la mesure des autospectres d'accélération sur la plaque.

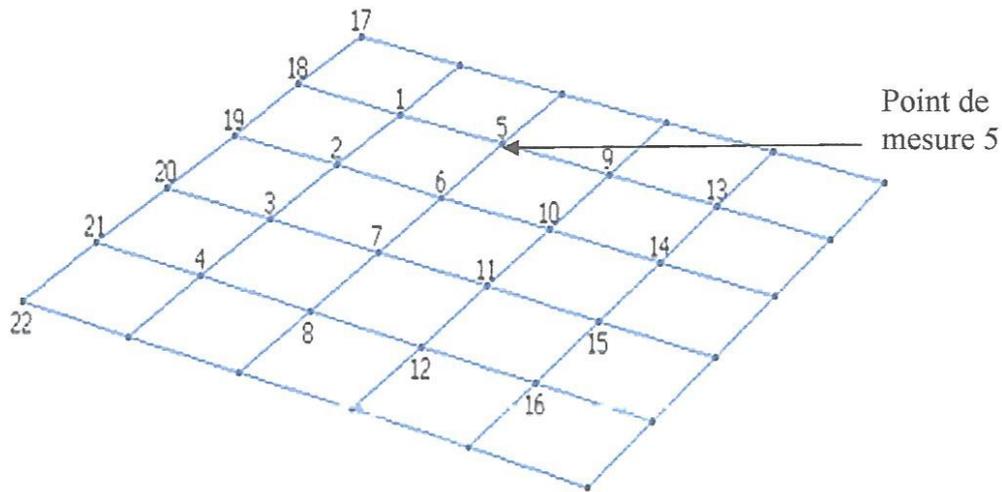
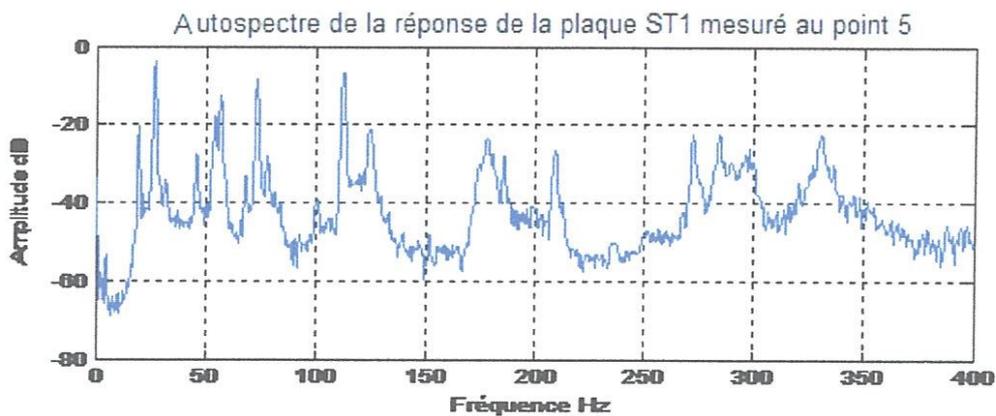


Figure 2.7 Le point de mesure 5 sur la plaque testée

Nous présentons sur les figures 2.8 et 2.9 les autospectres mesurés au point 5 sur les différentes plaques testées pour les deux configurations ELLL et ELEL. Les autres résultats de mesure des autospectres sont présentés dans l'annexe 1.



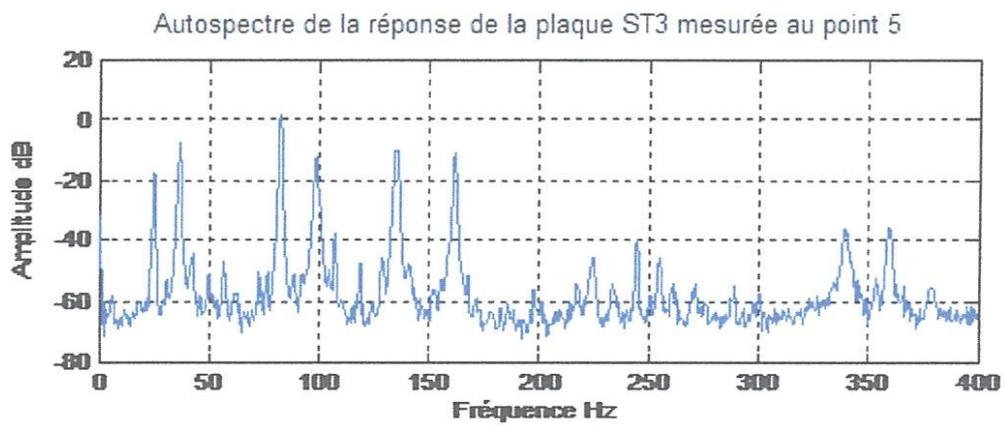
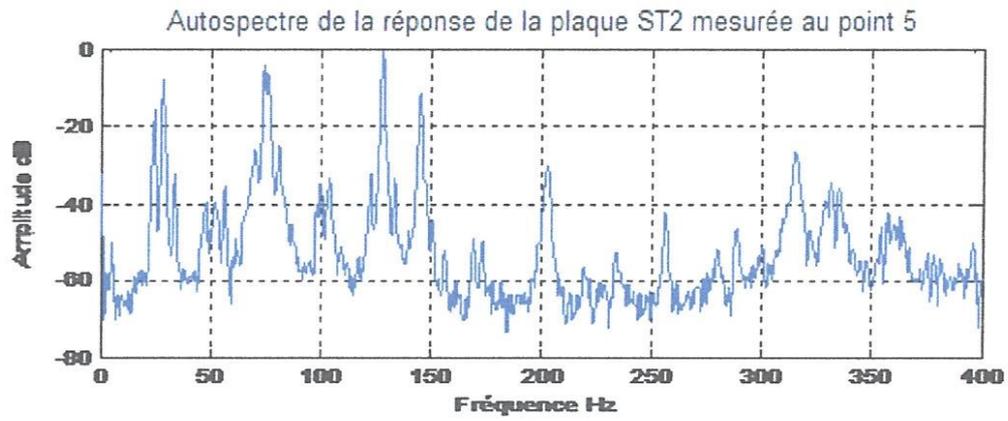
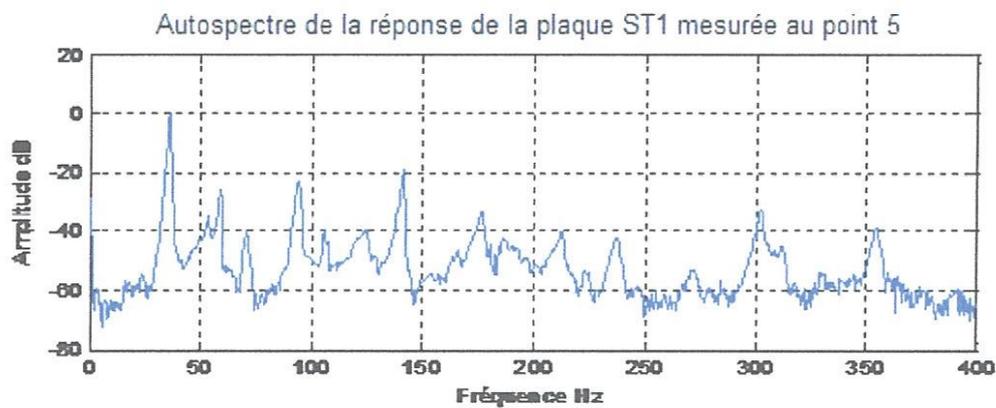


Figure 2.8 Autospectres des réponses des plaques ST1, ST2 et ST3 au point 5 pour la configuration ELLL



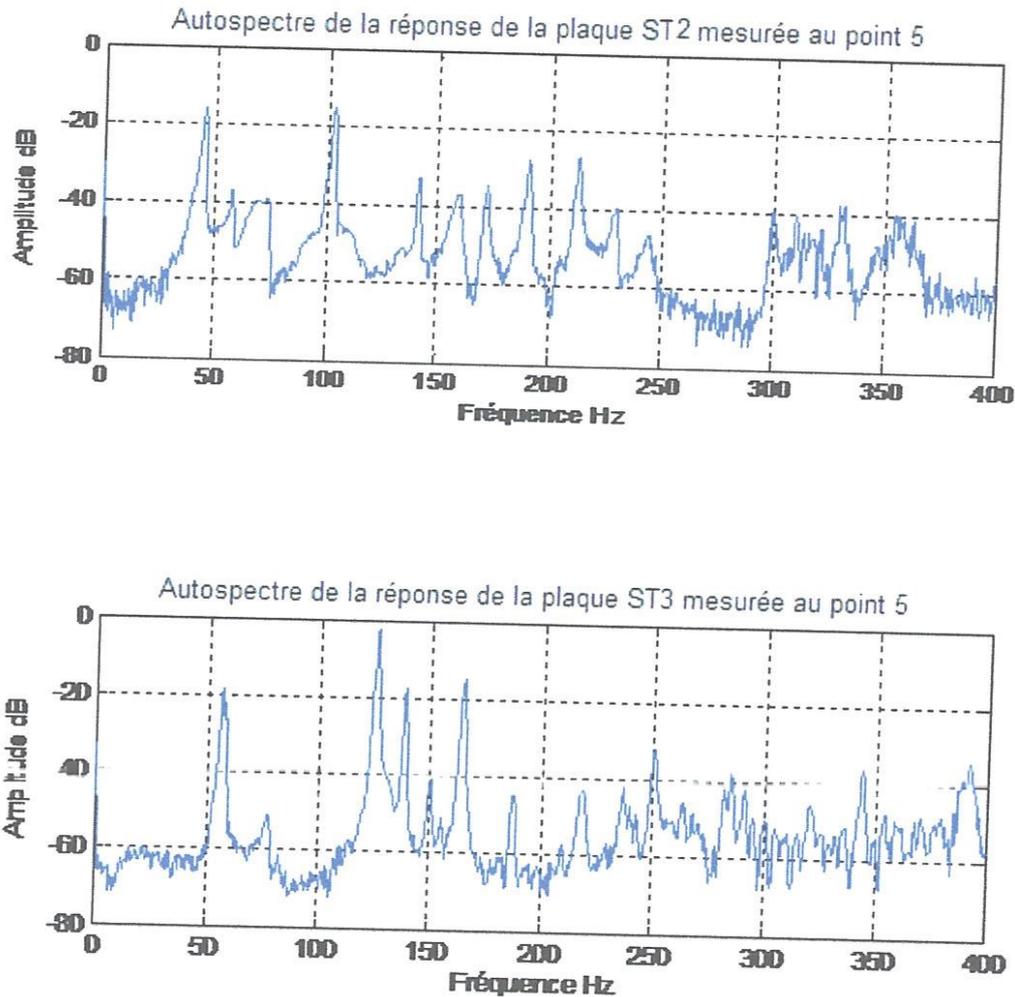


Figure 2.9 Autospectres des réponses des plaques ST1, ST2 et ST3 au point 5 pour la configuration ELLL

- **Utilisation de ME'ScopeVES pour l'extraction des fréquences propres**

Le logiciel ME'ScopeVES permet, à partir des autospectres mesurés dans différents points de la plaque, l'extraction des fréquences propres, des d'amortissements modaux et la visualisation des déformées propres des différents modes de vibration.

Pour afficher les déformées modales directement à partir d'un ensemble d'autospectres, les opérations suivantes sont nécessaires:

- **Construction d'un modèle de plaque ELLL**

Les modèles en géométrie simple tels que carrés, cubes, cercles, cylindres, sphères, etc., sont facilement construits par ME'ScopeVES par l'utilisation de l'assistant de dessin. La plaque considérée horizontale sera définie comme une grille de points espacés de 60 mm, ce qui permettra de construire 6 points dans chaque direction suivant les axes X et Y .

La numérotation des points de la plaque horizontale est nécessaire et disponible par l'utilisation de l'assistant de dessin (figure 2.10). Les numéros de 1 à 16 sont utilisés pour mettre le modèle en réponse par l'animation de ces points et les numéros 17 à 22 sont fixes (Condition d'encastrement).

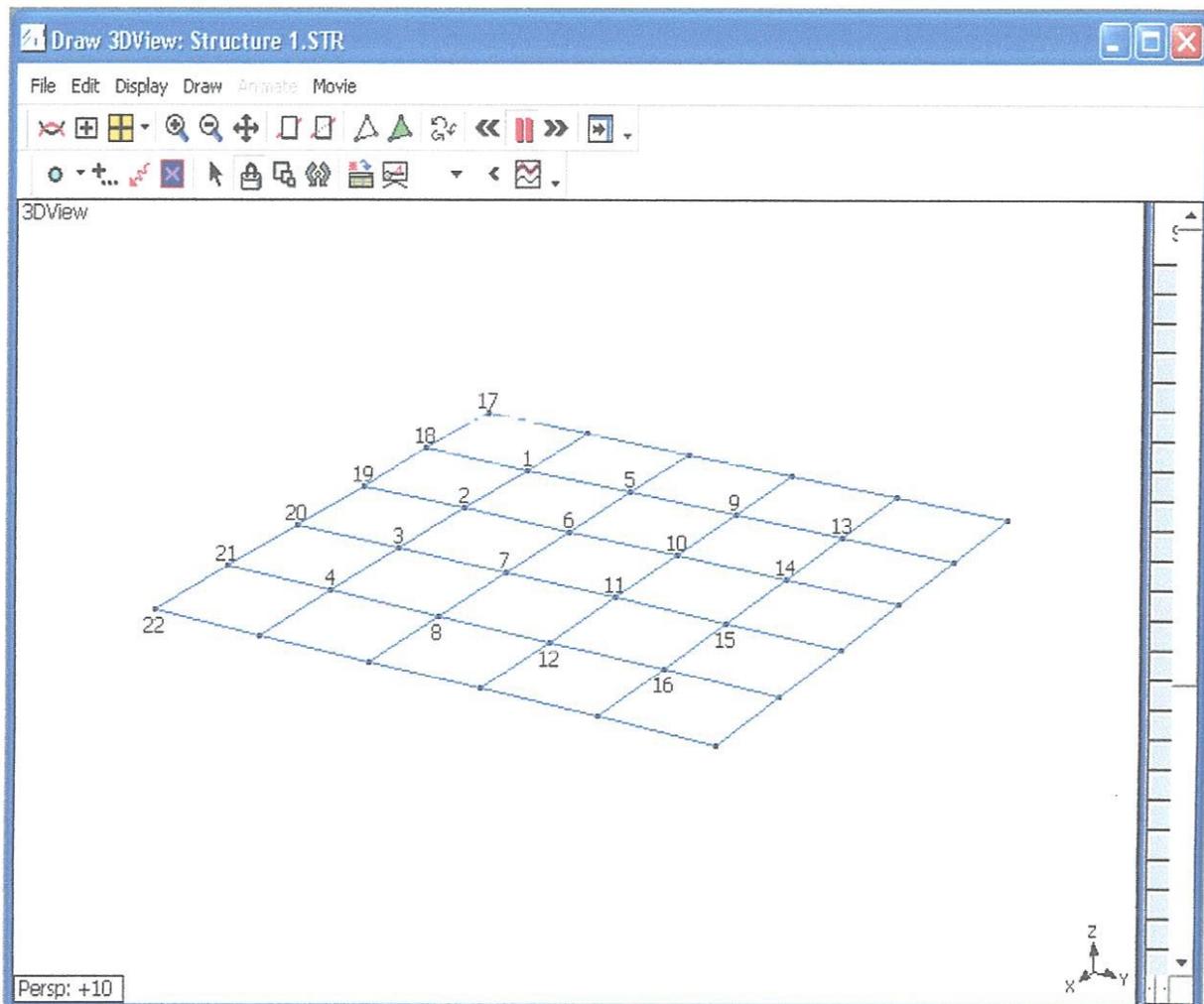


Figure 2.10 Plaque carré horizontale avec 16 points de mesure et 6 point pour les conditions d'encastrement

- **Importation des mesures expérimentales à partir d'un fichier (Data block)**

Pour afficher les 16 points construits sur le modèle plaque en animation, ME'ScopeVES nous donne la possibilité d'importer des mesures expérimentales prises sur les 16 points de mesures obtenus sur le stratifié composite (carbone/époxyde) dans un fichier de bloc de données (Data Block). En cette étape, on a le choix de changer la bande de fréquences de [0, 400Hz] pour bien estimer et localiser les fréquences propres recherchées (figure 2.11).

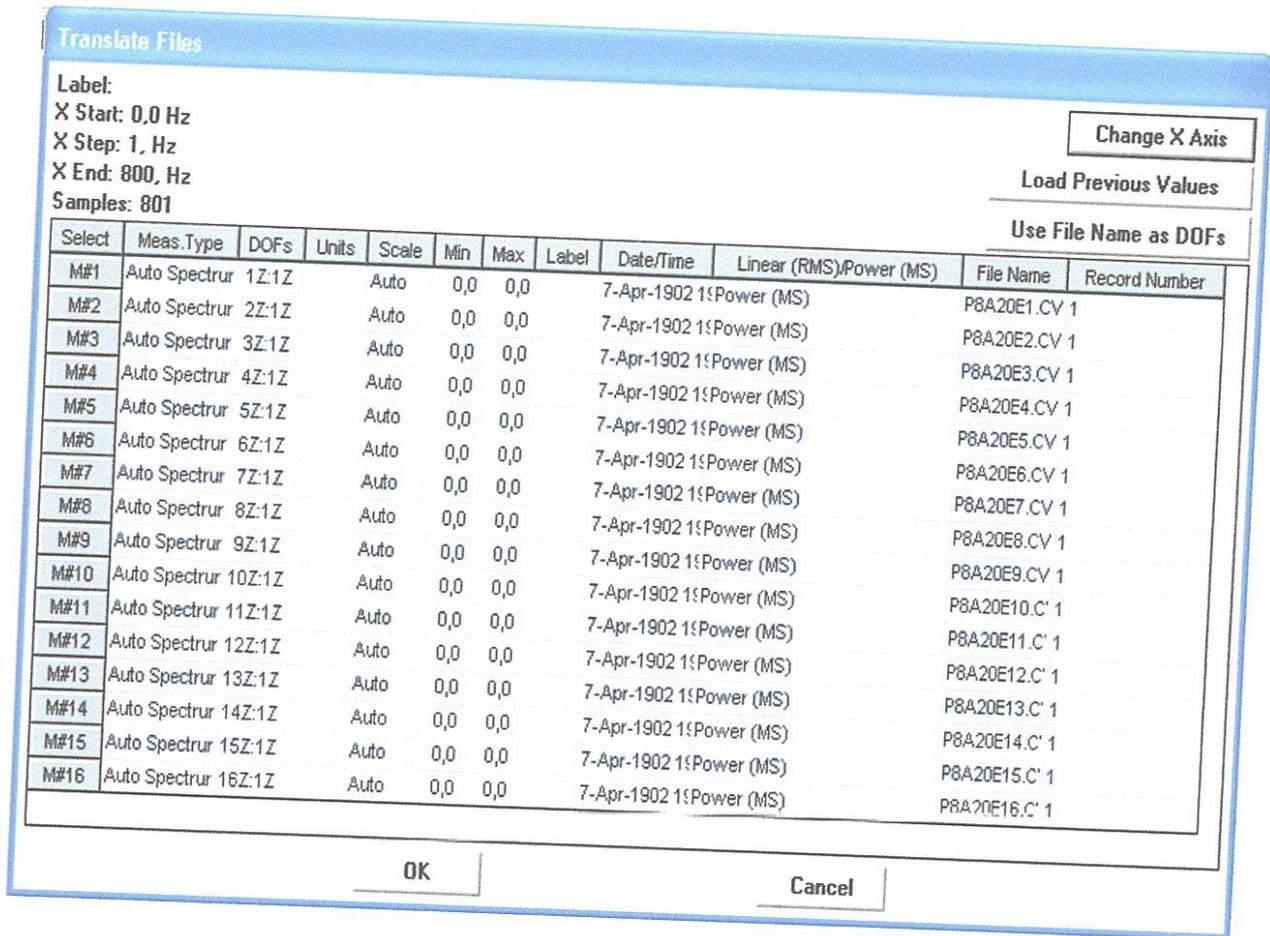


Figure 2.11 Les mesures importées en bloc de données (Data Block)

- *Affectation les mesures autospectrales aux points sur le modèle*

Chaque mesure importée dans le fichier de bloc de données (Data Block) a été simplement affectée aux 16 point sur le modèle de plaque par l'utilisation de la commande Assign measurements.

Si la réponse vibratoire de la plaque étant mesurée sur un modèle plan dans la direction Z, la réponse vibratoire est effectuée à la DOF 1Z est appelé le DOF de référence. Alors les locutions 1Z:1Z, 2Z:1Z, 3Z:1Z, ...jusqu'a 16Z:1Z sont les définitions des réponses de la plaque aux points 1, 2, 3,...jusqu'a 16 de stratifié composite plane respectivement (figure 2.11 et 2.12).

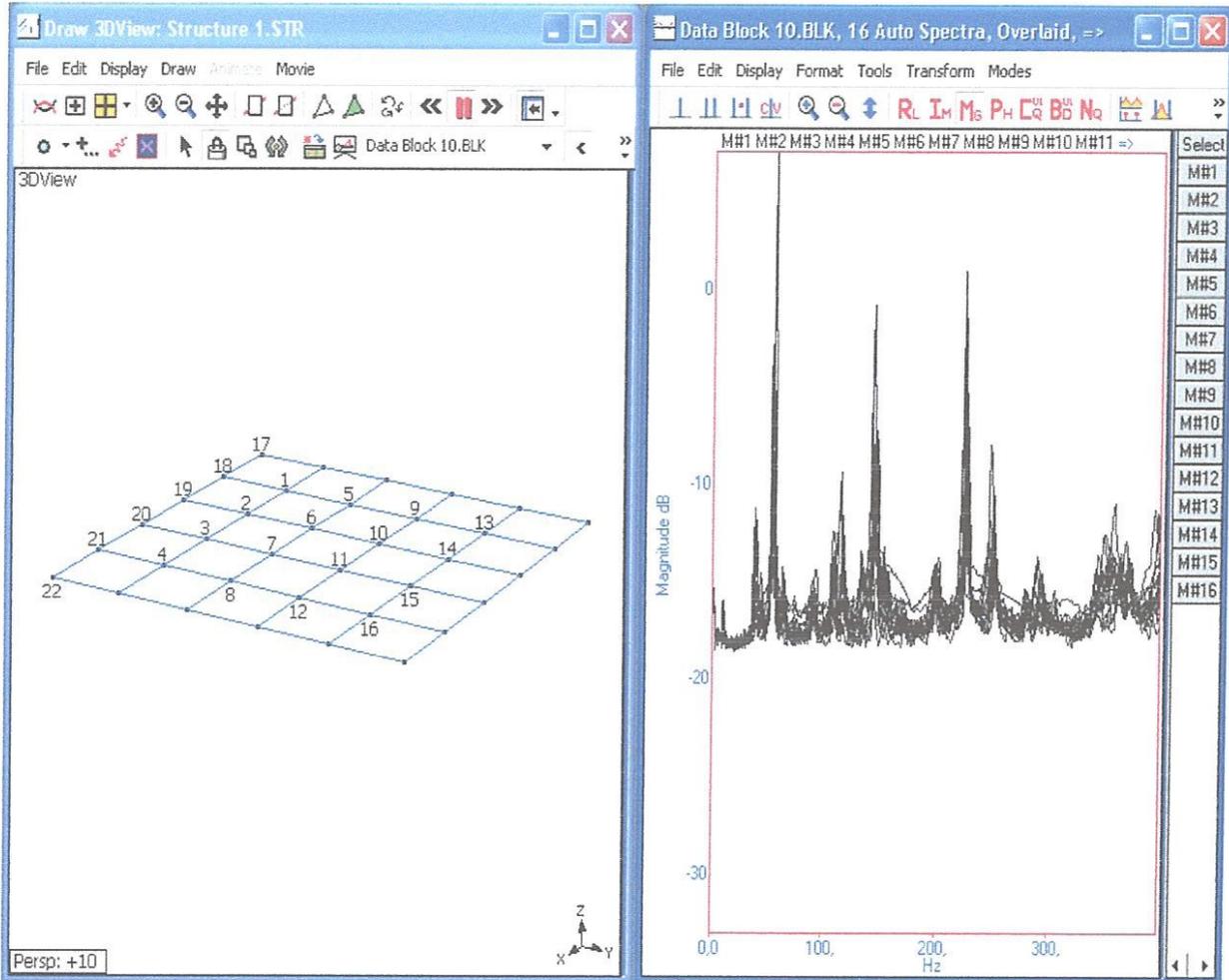


Figure 2.12 Autospectres superposés des 16 points de mesures

Chaque point sur le modèle est animé par l'utilisateur en utilisant des équations d'animations. Tous les DOFs mesurés sont animés par l'utilisation des équations d'animations calculées pour chaque point sur le modèle construit, les autres DOFs non mesurés sont soit fixés (encastés), soit animés en utilisant des équations d'animations interpolées (les points 17-22).

Les points sur le modèle de structure possèdent trois axes de mesure (DOFs) auxquels il est associé pour indiquer les directions de mesure (figure 2.13).

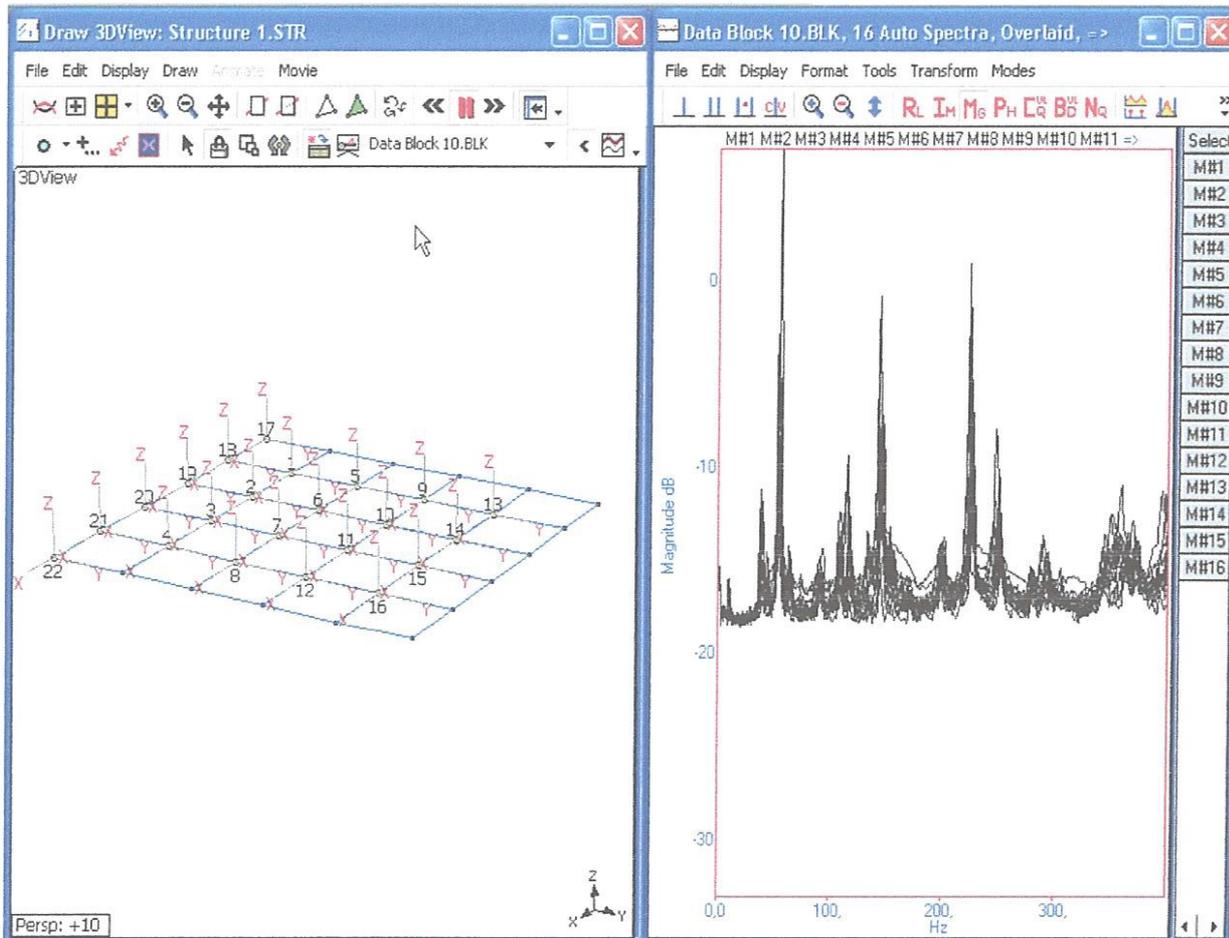


Figure 2.13 Structure plaque montrant les axes de mesures en tous points.

- Animation du modèle

Dans la section précédente, nous avons vérifié est assuré que les points sur le modèle ont été numérotés pour s'accorder aux numéros des points au niveau des directions, et les positions (DOFs) des points de mesure des autospectres, et que la direction Z de tous les axes de mesure est normale à la surface d'impact de la plaque construite par ME'ScopeVES.

Afin d'animer le modèle de la plaque à partir des données des autospectres, qui sont affectées aux points et aux directions correspondantes de ce modèle, l'ensemble des points est animé en même temps. Ce qui nous donne une représentation réelle du comportement vibratoire de la plaque composite représenté par ses déformées et fréquences propres (figure 2.14). Les résultats obtenus par ME'ScopeVES sont illustrés avec ceux obtenus par ANSYS sur les figures 2.15 à 2.19. Les résultats des déformées propres représentés sont réservés pour le stratifié ST1 en configurations ELLL et ELEL, les autres résultats des stratifiés ST2 et ST3 sont illustrées sur l'annexe 2.

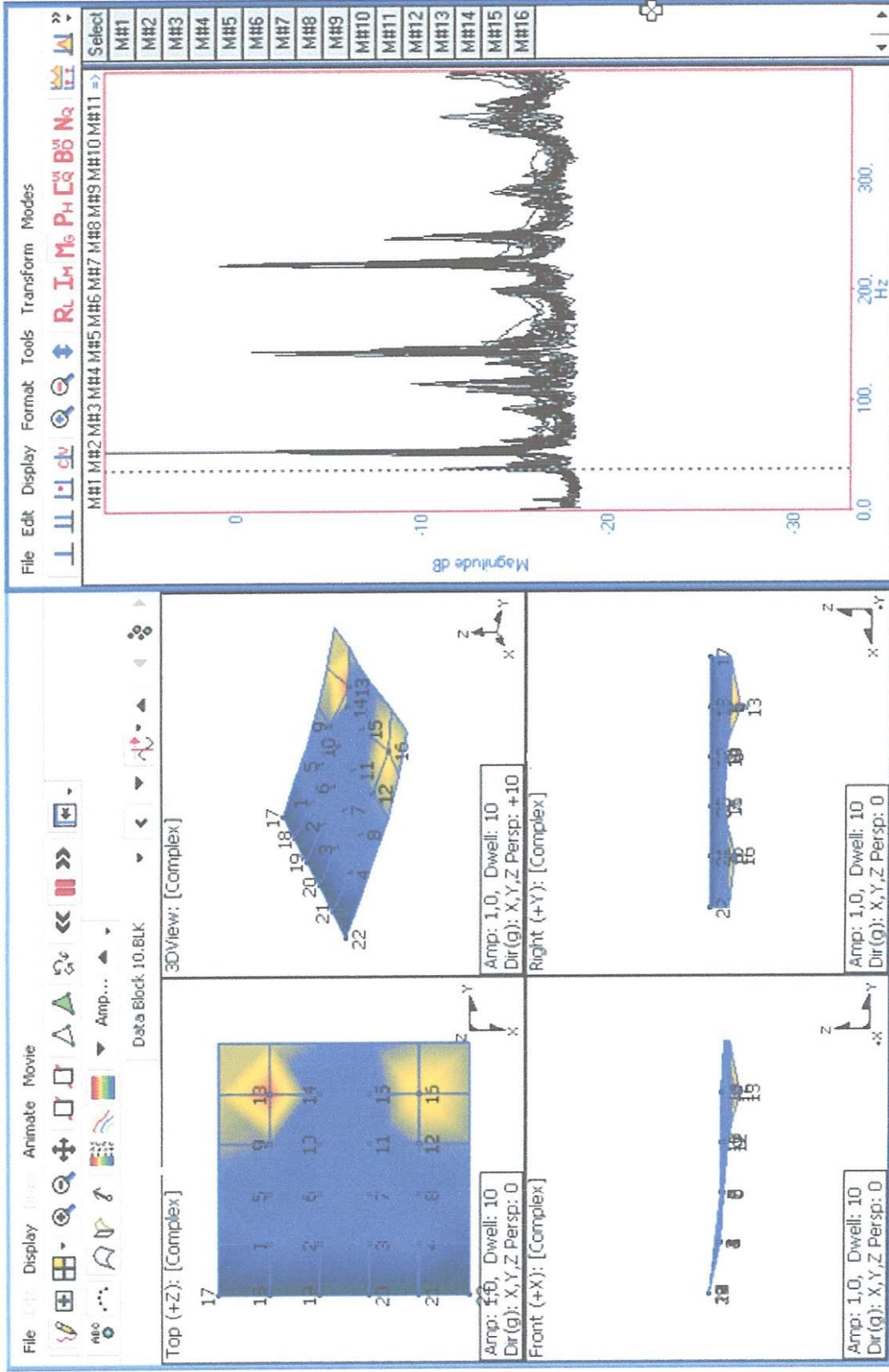


Figure 2.14 Animation sur une crête de résonance

2.5 Analyse des résultats

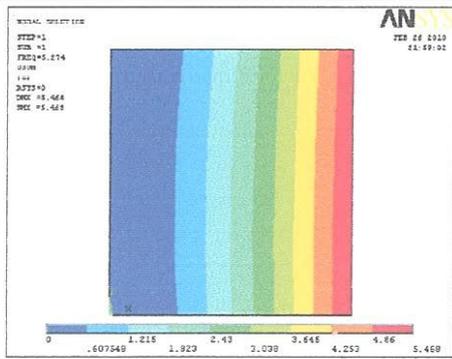
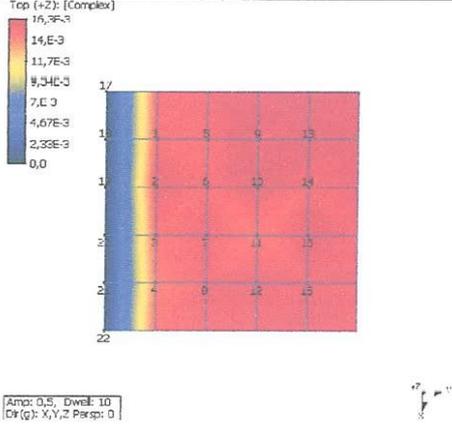
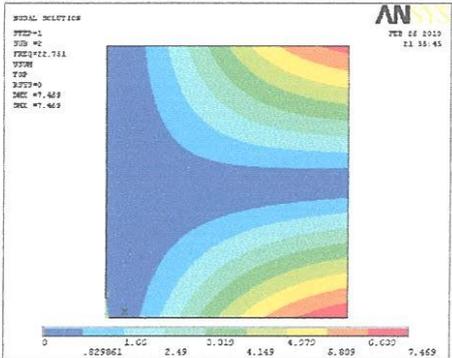
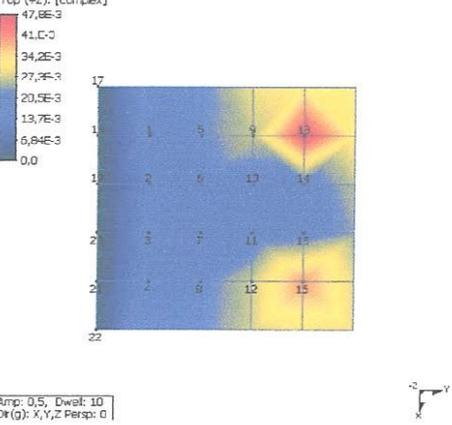
Nous avons choisi de présenter les déformées propres des différents modes en 2D, afin d'identifier les nœuds et les ventres de vibration de chaque mode et de pouvoir comparer les résultats obtenus par ME'ScopeVES avec ceux d'ANSYS (figures 2.15 à 2.19 et annexe 2).

Les principales constatations qu'on peut dégager de l'analyse de ces résultats sont:

- Les faibles erreurs qui apparaissent entre les résultats des fréquences propres obtenus par simulation numérique et ceux obtenus expérimentalement, qui sont due principalement, aux hétérogénéités présentes dans les plaques composites, qu'on ne prend pas en compte dans la simulation numérique (figures 2.16, 2.17, 2.18, 2.20, 2.21, 2.22 et tableaux 2.2 et 2.3).
- La masse du capteur peut avoir une influence sur la précision des fréquences propres mesurées, quoique, pour éviter ce problème nous avons utilisé un capteur de faible masse (2g) pour minimiser l'erreur due à la masse ajoutée par le capteur, puisque les plaques testés sont de faible épaisseur.
- Il est très difficile de comparer les déformées propres obtenus par simulation et expérimentalement vue la différence de maillage dans les deux cas. Dans le modèle expérimental construit sur ME'ScopeVES, on possède uniquement 16 points de mesure qui nécessite un maillage expérimental de (4×4), (figure 2.10), Alors que dans le modèle de simulation, la plaque est maillée par (60×60) (figure 2.6). Néanmoins, on obtient une tendance similaire pour les premiers modes (figures 2.15 à 2.19 et Annexe 2). Pour améliorer ces résultats, on devrait utiliser les équations d'approximation dans les points intermédiaires, situées entre les points de mesures sur ME'ScopeVES.
- La comparaison des fréquences propres pour les deux configurations pour les conditions aux limites ELLL et ELEL, montre bien que l'encastrement de la plaque sur les deux bords opposés, augmente sa rigidité et par conséquent ces fréquences propres augmentent par rapport à la plaque encastree sur un seul bord (figure 2.23, figure 2.24).

- L'erreur constatée entre les fréquences propres obtenues par simulation et expérimentalement augmente dans le cas de la plaque ELEL, cela s'explique par la difficulté de réaliser expérimentalement un encastrement parfait sur les deux bords, comme dans le cas ELEL nous avons deux bords encastres, donc l'erreur sur ce dernier cas est plus importante que dans le cas d'une plaque encastree sur un seul bord ELLL (figure 2.23 et 2.24).

2.5.1 Les fréquences et les déformées propres des stratifiés en configuration ELLL

Plaque composite ST1 ayant la séquence d'empilement $[(+70/-70)_2]_5$	
Fréquences propres et déformées propres obtenus par simulation par ANSYS	Fréquences propres et déformées propres expérimentales obtenus par ME'ScopeVES
 <p>Mode (1,1) $f = 5,274$ Hz</p>	 <p>Mode (1,1) $f = 5,11$ Hz</p>
 <p>Mode (1,2) $f = 22,751$ Hz</p>	 <p>Mode (1,2) $f = 22,6$ Hz</p>

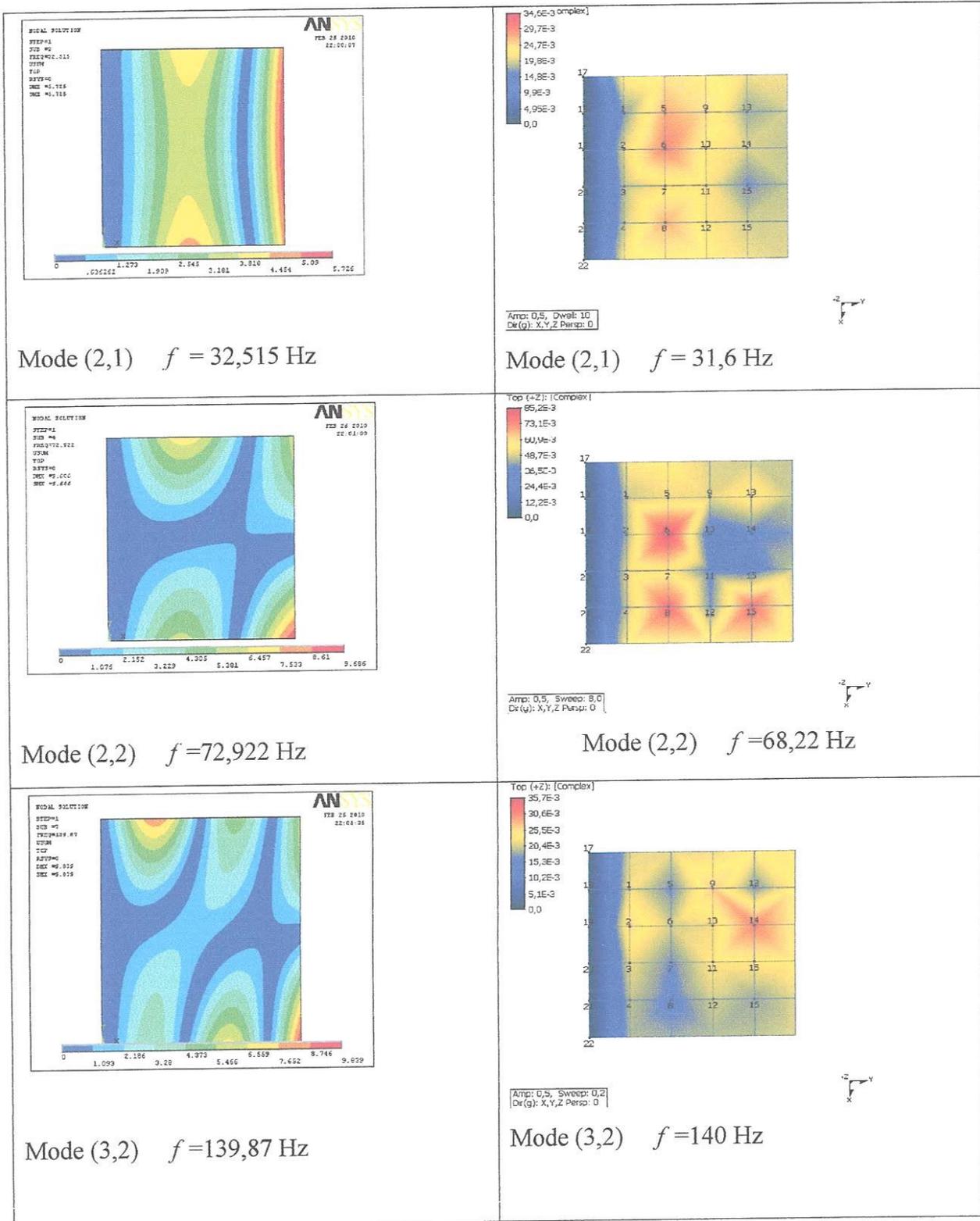


Figure 2.15 Fréquences propres et déformées propres des modes de flexion de la plaque ST1 en configuration ELLL

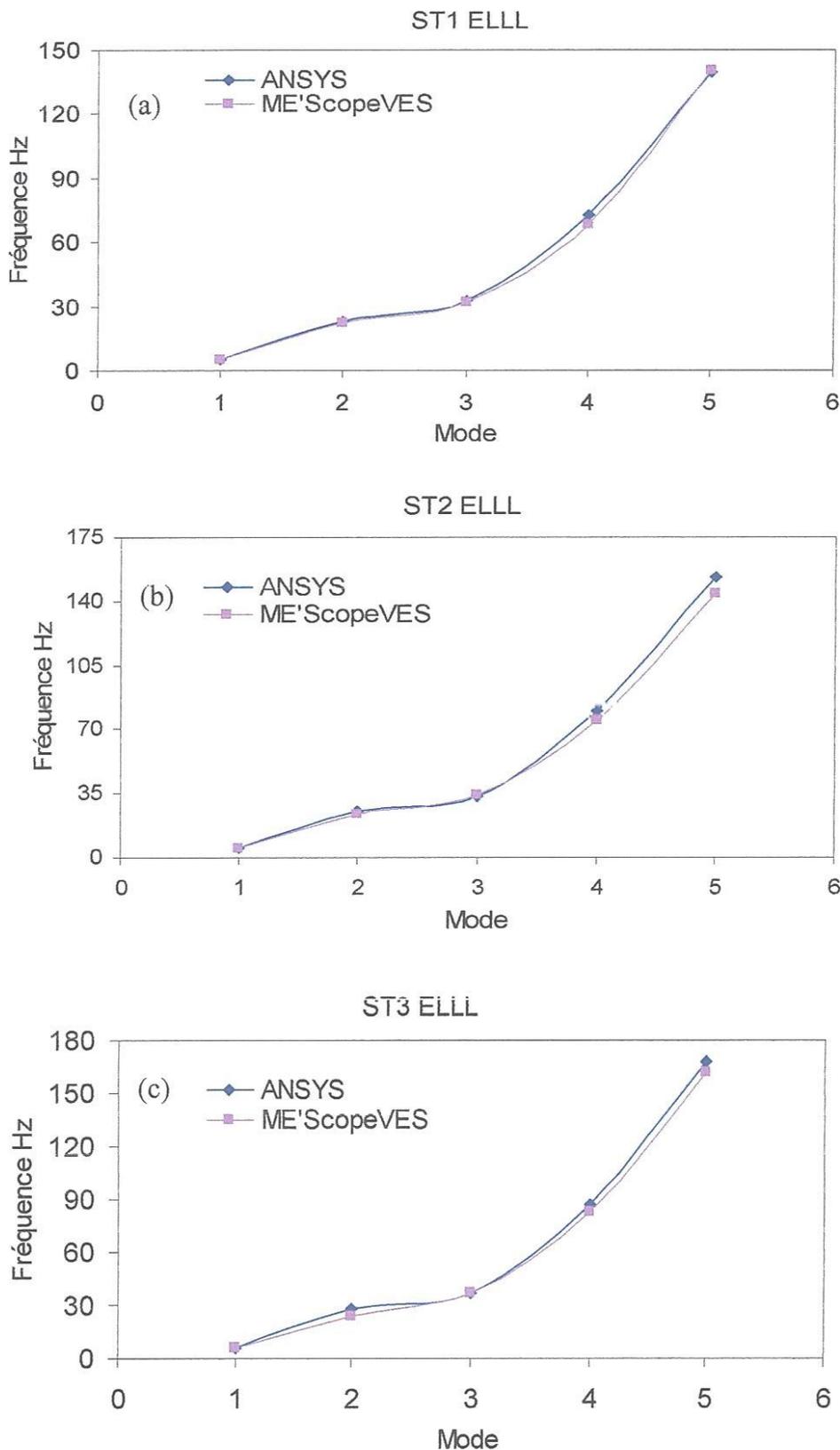


Figure 2.16 Comparaison entre les fréquences propres des plaques ELLL obtenus expérimentalement et numériquement pour les stratifiées :

(a) ST1 $[(+70/-70)_2]_S$, (b) ST2 $[(+65/-65)_2]_S$, (c) ST3 $[(+60/-60)_2]_S$

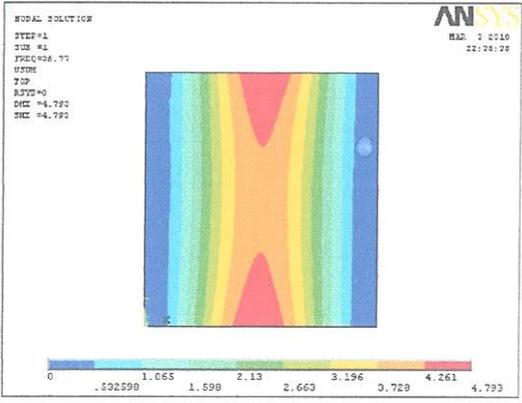
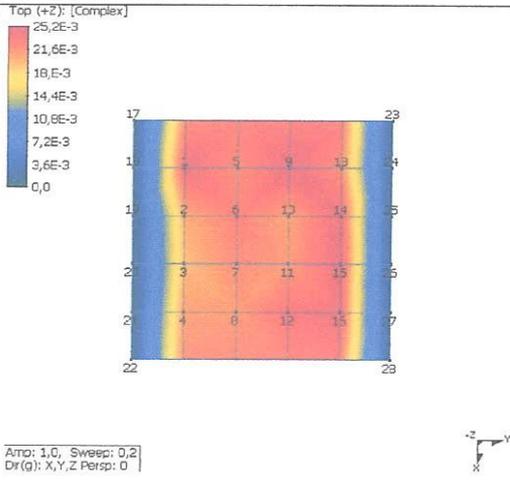
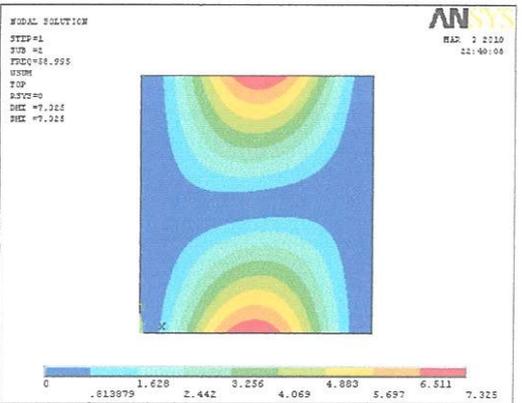
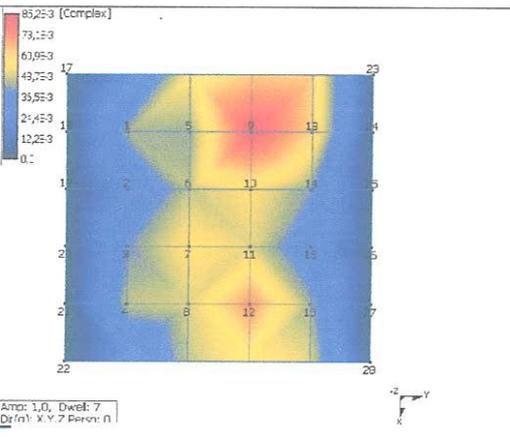
Tableau 2.2 Fréquences propres pour ST1, ST2, ST3 configuration ELLL

N°	Mode	Fréquences propres pour ST1			Fréquences propres pour ST2			Fréquences propres pour ST3		
		ANSYS	ME'Scope VES	Erreur %	ANSYS	ME'Scope VES	Erreur %	ANSYS	ME'Scope VES	Erreur %
1	(1,1)	5,274Hz	5,110 Hz	3,209	5,523Hz	5,290 Hz	4,200	6,176Hz	5,990 Hz	2,910
2	(1,2)	22,751Hz	22,600 Hz	0,668	25,491Hz	23,700 Hz	7,026	28,304Hz	24,300 Hz	14,100
3	(2,1)	32,515Hz	31,600Hz	2,814	33,626Hz	34,200 Hz	1,678	37,039Hz	36,800 Hz	0,640
4	(2,2)	72,922Hz	68,200 Hz	6,475	80,283Hz	74,500 Hz	7,203	87,037Hz	82,800 Hz	4,860
5	(3,2)	139,870Hz	140,000 Hz	0,100	152,624Hz	144,000 Hz	5,650	167,831Hz	162,000 Hz	3,400

2.5. 3 Les fréquences et les déformées propres des stratifiés en configuration ELEL

Nous présentons sur la figure 2.19 et le tableau 2.3 une comparaison entre les fréquences propres des plaques ELEL, pour les différents stratifiés, obtenues expérimentalement et numériquement.

Dans ce cas l'erreur entre les résultats expérimentales donnés par ME'ScopeVES et numériquement par ANSYS est plus élevé que dans le cas précédent des plaques ELLL.

Plaque composite ST1 ayant la séquence d'empilement $[(+70/-70)_2]_S$	
Fréquences propres et déformées propres obtenus par simulation par ANSYS	Fréquences propres et déformées propres expérimentales obtenus par ME'ScopeVES
 <p>Mode (1,1) $f = 36,77$ Hz</p>	 <p>Mode (1,1) $f = 36,2$ Hz</p>
 <p>Mode (1,2) $f = 58,995$ Hz</p>	 <p>Mode (1,2) $f = 54,5$ Hz</p>

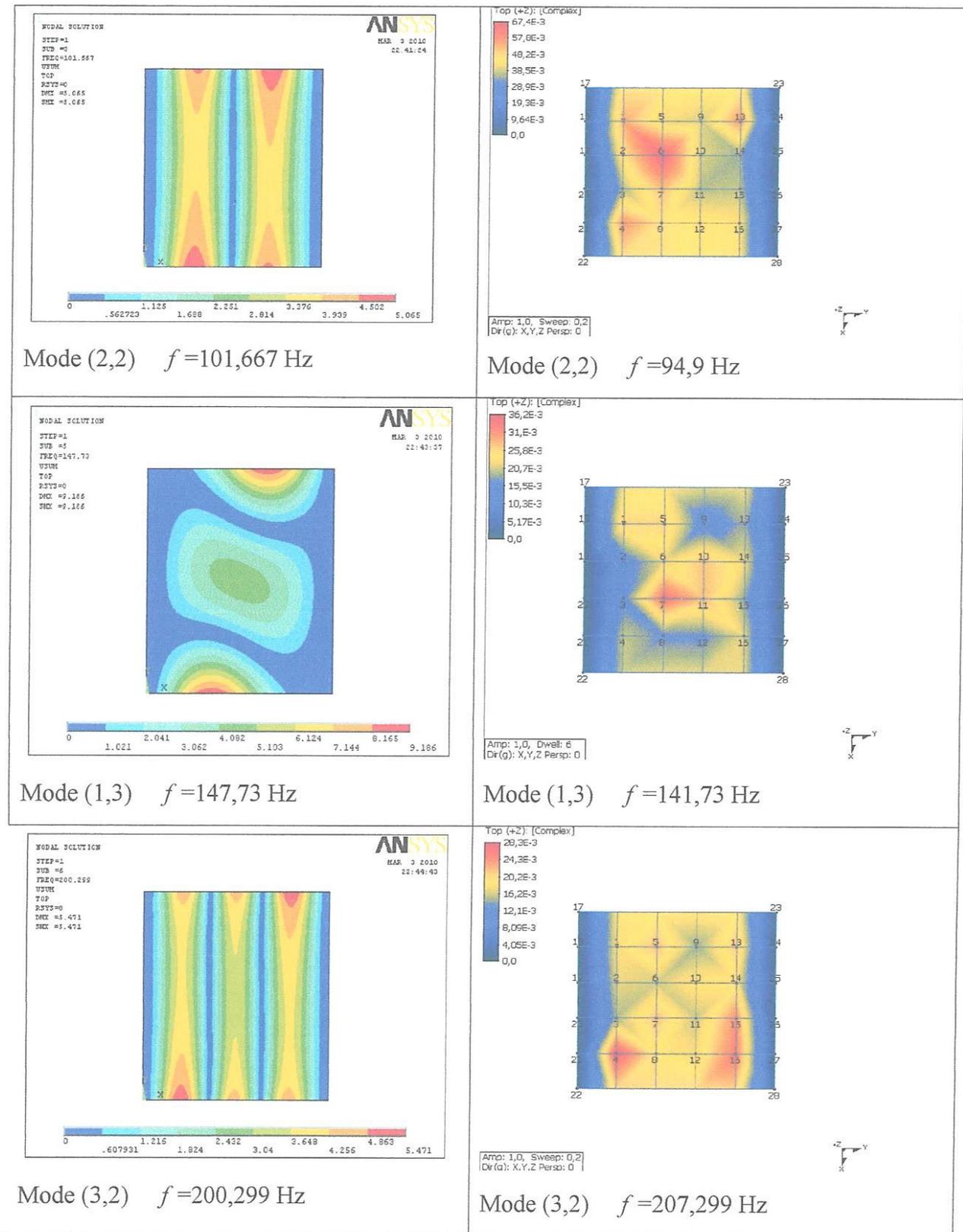


Figure 2.19 Fréquences et déformées propres des modes de flexion de la plaque $ST1 [(+70/-70)_2]_S$ en configuration ELEL

Tableau 2.3 Fréquences propres pour ST1, ST2, ST3 en configuration ELEL

N°	Mode	Fréquences propres pour ST1			Fréquences propres pour ST2			Fréquences propres pour ST3		
		ANSYS	ME'ScopeVES	Erreur %	ANSYS	ME'ScopeVES	Erreur %	ANSYS	ME'ScopeVES	Erreur %
1	(1,1)	36,770 Hz	36,200 Hz	1,155	40,330 Hz	41,8 Hz	3,516	45,700 Hz	44,400 Hz	2,844
2	(1,2)	58,995 Hz	54,500 Hz	6,602	66,461 Hz	63,1 Hz	5,057	78,163 Hz	66,460 Hz	14,900
3	(2,1)	101,667Hz	94,900 Hz	6,650	111,852Hz	105,000 Hz	6,125	126,460Hz	124,000 Hz	1,94
4	(1,3)	147,730Hz	141,000 Hz	4,555	158,216Hz	157,000 Hz	0,768	184,000Hz	182,000 Hz	1,086
5	(3,2)	200,299Hz	207,000 Hz	3,237	220,946Hz	236,000 Hz	6,378	250,000Hz	239,000 Hz	4,400

2.6 Détermination des amortissements modaux

Il est bien connu que l'identification de l'amortissement est parmi les problèmes les plus difficiles en dynamique des structures. De plus, l'amortissement provient généralement de différentes sources, et il peut être sous différentes formes de dissipation [MAR 01]. L'amortissement interne provenant de la dissipation dans le matériau, l'amortissement structural provenant du frottement entre les différentes surfaces en contact (en distinguant le cas des parties tournantes de celui des accouplements), l'amortissement hydrodynamique et aérodynamique provenant des structures vibrantes dans un liquide ou dans un gaz.

Dans cette partie du travail, on s'intéresse à la détermination de l'amortissement de plaques stratifiées fabriquées en matériau composite carbone/époxyde ayant différentes séquences d'empilement.

2.6.1 Utilisation de ME'ScopeVES pour l'extraction des amortissements modaux

Pour calculer l'amortissement modal à partir de ME'ScopeVES, il suffit d'utiliser les magnitudes des autospectres de vibration des 16 points mesurés, voir la figure 2.25.

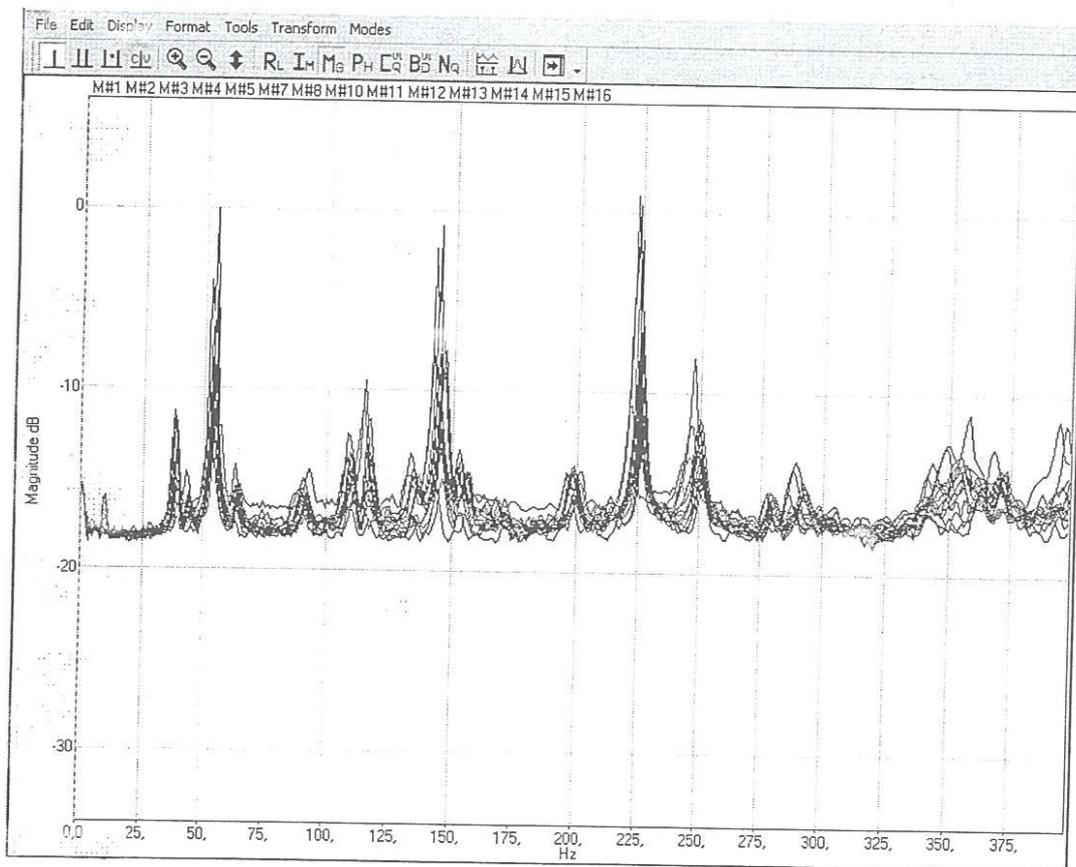


Figure 2.25 Magnitudes des autospectres correspondants aux 16 points de mesure

Tableau 2.4 Amortissements modaux des 5 premiers modes de vibration pour ST1, ST2, ST3 en configuration ELLL

N°	Mode	Fréquences propres pour ST1 par ME'ScopeVES	Amortissement % ST1	Fréquences propres pour ST2 par ME'ScopeVES	Amortissement % ST2	Fréquences propres pour ST3 par ME'ScopeVES	Amortissement % ST3
1	(1,1)	5,110 Hz	5,480	5,290 Hz	4,990	5,990 Hz	4,190
2	(1,2)	22,600 Hz	3,330	23,700 Hz	2,540	24,300 Hz	2,330
3	(2,1)	31,600Hz	2,150	34,200 Hz	1,200	36,800 Hz	0,675
4	(2,2)	68,200 Hz	1,210	74,500 Hz	0,816	82,800 Hz	0,392
5	(3,2)	140,000 Hz	0,421	144,000 Hz	0,165	162,000 Hz	0,378

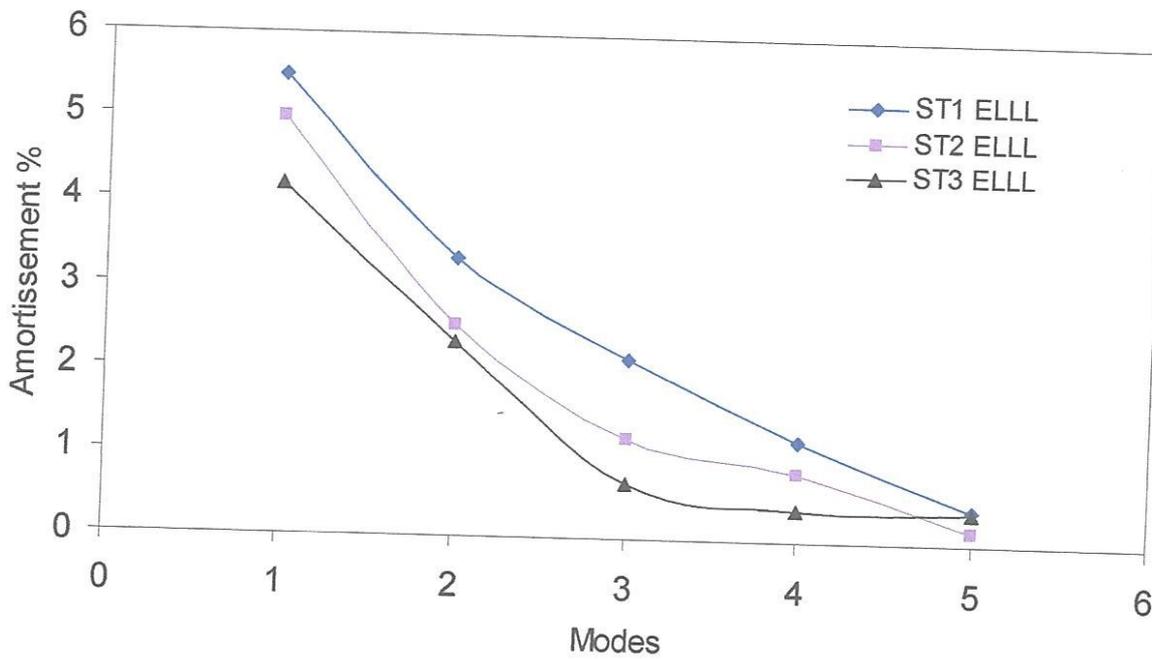


Figure 2.28 Amortissement modal pour différentes séquences d’empilement pour la configuration ELLL

Nous représentons sur le tableau 2.5 et la figure 2.29 les amortissements modaux des cinq premiers modes pour les trois stratifiés dans le cas de condition au limite ELEL. Les mêmes remarques soulevées précédemment sont confirmées dans ce cas de configuration.

Tableau 2.5 Amortissements modaux des 5 premiers modes de vibration pour ST1, ST2, ST3 en configuration ELEL

N°	Mode	Fréquences propres pour ST1 par ME'ScopeVES	Amortissement % ST1	Fréquences propres pour ST2 par ME'ScopeVES	Amortissement % ST2	Fréquences propres pour ST3 par ME'ScopeVES	Amortissement % ST2
1	(1,1)	36,200 Hz	4,670	41,8 Hz	3,730	44,400 Hz	1,230
2	(1,2)	54,500 Hz	2,650	63,1 Hz	2,160	66,460 Hz	0,700
3	(2,1)	94,900 Hz	1,290	105,000 Hz	1,470	124,000 Hz	0,472
4	(1,3)	141,000 Hz	0,468	157,000 Hz	0,482	182,000 Hz	0,390
5	(3,2)	207,000 Hz	0,125	236,000 Hz	0,189	239,000 Hz	0,311

Nous montrons sur les figures 3.13 et 3.14, l'influence des séquences d'empilements sur les fréquences propres des stratifiés ST1, ST2 et ST3 dans le cas ELLL. On constate que la diminution de l'angle que forme des fibres avec la côte encastéré de la plaque augmente sa rigidité et par conséquent ses fréquences propres.

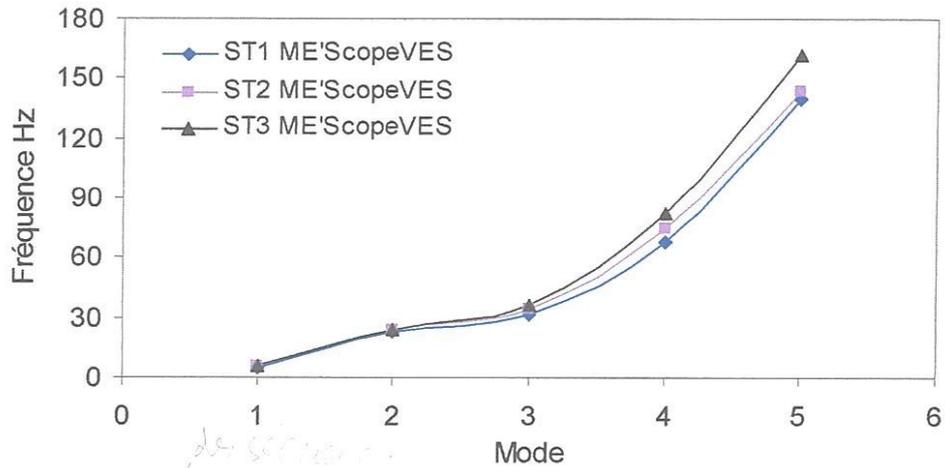


Figure 3.13 Influence d'empilement sur les fréquences propres obtenues expérimentalement, plaque ELLL

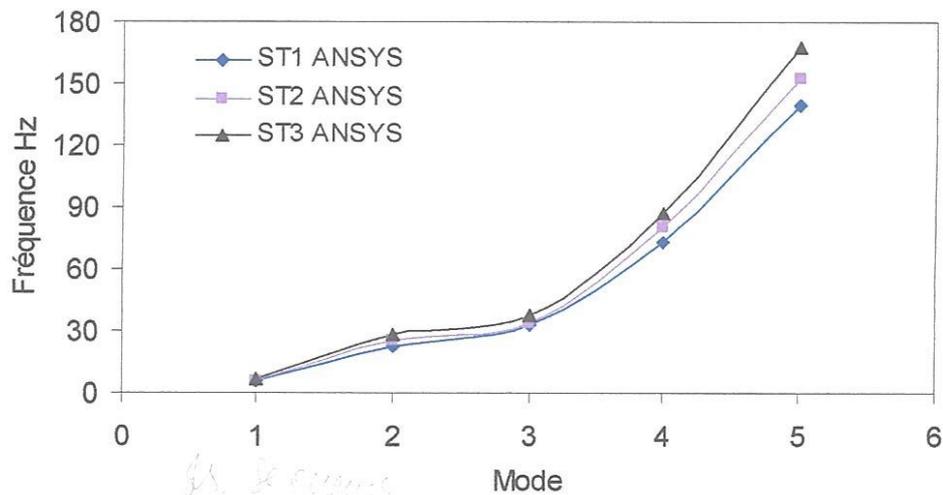


Figure 3.14 Influence d'empilement sur les fréquences propres obtenues par simulation, plaque ELLL

• Influence des séquences d'empilements

Nous présentons sur la figure 3.15 et le tableau 3.3 une comparaison entre les fréquences propres des plaques ELEM, pour les différents stratifiés, obtenues expérimentalement et numériquement.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\
 \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y
 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Où :

u, v, w sont les composantes du vecteur déplacement en un point M

u_0, v_0, w_0 sont les composantes du point M dans le plan $(0xy)$

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ sont des fonctions dépendant uniquement de x et y

Cette théorie fait l'hypothèse de négliger le cisaillement transverse dans le matériau c'est à dire :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0$$

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

En négligeant le cisaillement transverse dans (3.1), on déduit le nouveau champ de déformations comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 \varepsilon_{zz} = 0 \\
 \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{xz} = 0 \\
 \gamma_{yz} = 0
 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

On tout point M , le tenseur des déformations s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de déformations se réduit à trois composantes non nulles, peuvent être considérées comme la superposition des *déformations en membrane* (dépendant uniquement des déplacements (u_0, v_0)) et des déformations en flexion-torsion (dépendant des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M), le champ des déformations (3.2) s'écrit alors:

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^f_{xx} \\ \varepsilon^f_{yy} \\ \gamma^f_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Généralement, les déformations en flexion-torsion s'expriment suivant la relation:

$$\varepsilon_f(M) = z k(x, y).$$

Avec:

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Où la matrice $k(x, y)$ est appelée *matrice des courbures*

On a donc :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Avec

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y) & \gamma^0_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}(x, y) \\ k_x &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) & k_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) & k_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x}(x, y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.3 Champ de contraintes

La théorie des stratifiés fait l'hypothèse suivante [MIL 08]:

σ_{zz} est négligeable dans le volume de la plaque par rapport aux autres composantes. L'état de contraintes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ et de déformations $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \varepsilon_{xz}$ correspondant à l'état de contraintes planes.

Le tenseur de contraintes en un point M quelconque, est donc de la forme:

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il se réduit aux seules contraintes en membranes: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$

Le champ de contraintes, dans une couche K du stratifié, est donc le suivant;

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = Q_{11} \varepsilon_{xx} + Q_{12} \varepsilon_{yy} + Q_{16} \gamma_{xy} \\ \sigma_{yy} = Q_{12} \varepsilon_{xx} + Q_{22} \varepsilon_{yy} + Q_{26} \gamma_{xy} \\ \sigma_{xy} = Q_{16} \varepsilon_{xx} + Q_{26} \varepsilon_{yy} + Q_{66} \gamma_{xy} \\ \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xz} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = Q_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \\ \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xz} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Où Q_k est la matrice de rigidité exprimée en dehors des axes principaux de la couche k , et ses coefficients Q_{ij} sont définis comme suit:

$$Q'_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3} C'_{j3}}{C'_{33}}$$

Où les C'_{ij} ont les coefficients de rigidité de la couche k en dehors de ces axes principaux ($\sigma' = C \varepsilon'$)

D'après l'expression du champ de déformations (3.4), le champ de contraintes (3.6) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{bmatrix} + z Q'_k \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.4 Expression des résultantes, des moments et de l'équation constitutive

3.4.1 Résultantes en membrane

On considère ici un stratifié d'épaisseur h constitué de n couches d'épaisseur e_k (Figure 3.2).

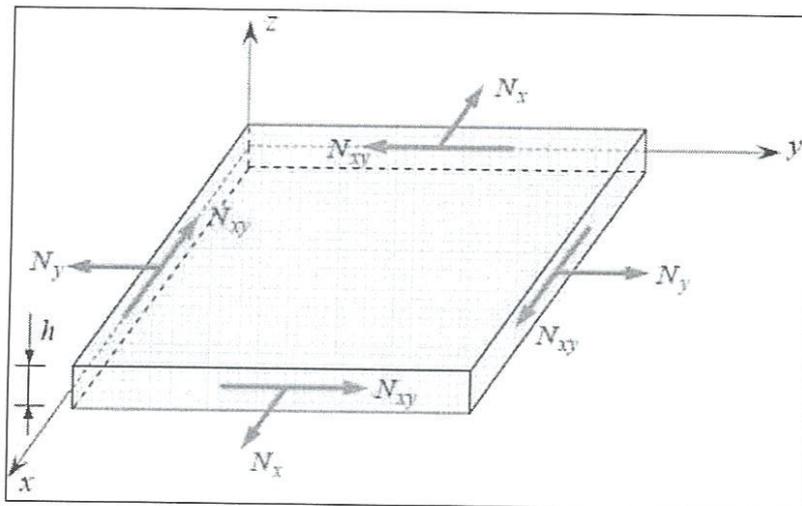


Figure 3.2 Représentation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de plaque stratifié

La surface moyenne est choisie comme plan de référence (Oxy) et l'axe oz est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche k est représentée par les cotes algébriques de sa face inférieure (h_{k-1}) de sa face supérieure (h_k) et le milieu de la couche k est identifier par sa cote z_k .

Les résultantes en membrane est de forme:

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (3.8)$$

Sur l'épaisseur du stratifié, on obtient:

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y)] dz$$

Soit après intégration:

$$N(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] k(x, y)$$

On note généralement,

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B k(x, y)$$

Avec

$$A = [A_{ij}] \text{ et } A_{ij} = \sum_{K=1}^n (Q'_{ij})_K e_k \quad (3.9)$$

$$B = [B_{ij}] \text{ et } B_{ij} = \sum_{K=1}^n (Q'_{ij})_K e_k z_K \quad (3.10)$$

Les expressions des résultantes s'écrivent donc:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.4.2 Moment de flexion et de torsion

La représentation des moments de flexion et de torsion est illustrée dans la figure 3.3.

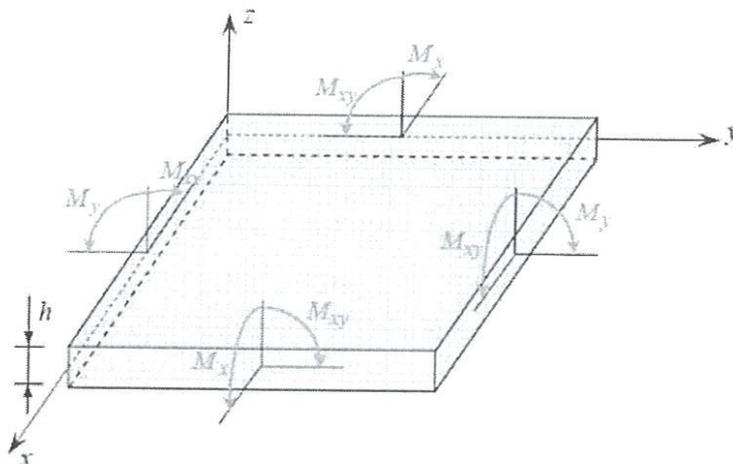


Figure 3.3 Représentation des moments de flexion et de torsion

Le champ des moments se définit comme suit :

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_k(M) dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (3.12)$$

Sur l'épaisseur du stratifié, on obtient:

$$M_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 Q''_k k(x, y)] dz$$

Soit, après intégration :

$$M_f(x, y) = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q''_k \right] k(x, y)$$

On note généralement

$$M_f(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + D k(x, y)$$

Avec :

$$D = [D_{ij}] \text{ et } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q''_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q''_{ij})_k \left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right) \quad (3.13)$$

L'expression des résultantes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.5 Equation constitutive

L'équation constitutive d'une plaque stratifié exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures, définis en (3.15) et (3.16) comme suit [3] :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

On écrit la matrice comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Avec

$$A_{ij} = \sum_{K=1}^n (Q_{ij}^1)_K e_K \quad (3.17)$$

$$B_{ij} = \sum_{K=1}^n (Q_{ij}^1)_K a_K z_K \quad (3.18)$$

$$D_{ij} = \sum_{K=1}^n (Q_{ij}^1)_K (e_K z_K^2 + \frac{e_K^3}{12}) \quad (3.19)$$

A_{ij} Matrice de rigidité de membrane

B_{ij} Matrice des coefficients de couplage

D_{ij} Matrice de rigidité en flexion

Q_{ij} Fonction de transfert

n Nombre total des plis composants

h Épaisseur du stratifié

z Est la distance entre la surface moyenne du stratifié et du milieu du K^{eme} .

Afin d'identifier les fréquences et les modes propres du matériau composite, nous devons établir les équations d'équilibre en absence de cisaillement transversal :

3.6 La théorie des stratifiés

3.6.1 Relation fondamentale des plaques

La forme élémentaire suivante donne la relation fondamentale (équation d'équilibres d'un solide élastique).

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho a_i, \quad i, j = 1, 3 \quad (3.20)$$

f_i Composante suivant i du vecteur force volumique

a_i Composante suivant i du vecteur d'accélération

3.6.2 Equilibre par rapport aux résultantes en membrane

Pour les plaques multicouches, l'intégration de l'équation suivant l'épaisseur de la plaque permet d'obtenir les relations d'équilibre relatives aux résultantes et moment [BER 96]. L'équilibre des efforts en membrane dans la direction x s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz \quad (3.21)$$

La discontinuité et la continuité des contraintes dans les couches K du stratifié s'écrit par:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \frac{\partial \sigma_{xx}^K}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \sigma_{xx}^K dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (3.22)$$

Pour les contraintes de cisaillement σ_{xy}

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \frac{\partial \sigma_{xy}^K}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \sigma_{xy}^K dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (3.23)$$

Pour les contraintes de cisaillement transversal σ_{xz}

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \frac{\partial \sigma_{xz}^K}{\partial z} dz = \sum_{K=1}^n \sigma_{xz}^K \Big|_{h_{K-1}}^{h_K} = \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (3.24)$$

Où $\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right)$ et $\sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right)$ sont les contraintes de cisaillement extérieures exercées respectivement sur les parties supérieures et inférieures de la plaque

$$\tau_{1x} = \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) \quad \text{et} \quad \tau_{2x} = \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (3.25)$$

Et la force de volume suivant x s'écrit:

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x \quad (3.26)$$

L'intégrale du second terme de l'équation (3.20) et en tenant compte du champ de déplacement permettre d'écrire :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, y, z) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 Q_x}{\partial t^2} \right) dz = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 Q_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz \quad (3.27)$$

en posant

$$(\rho_s, R) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, Z) dz \quad (3.28)$$

Alors l'équation d'équilibre en membrane, dans la direction x s'écrit:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \tau_{1x} - \tau_{2x} + F_x = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 Q_x}{\partial t^2} \quad (3.29)$$

Dans la direction y on trouve:

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \tau_{1y} - \tau_{2y} + F_y = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 Q_y}{\partial t^2} \quad (3.30)$$

3.6.3 Equilibre par rapport aux résultantes de cisaillement

Pour $i = z$:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z dz \quad (3.31)$$

On peut développer cette équation par:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad (3.32)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (3.33)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = \sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) = q \quad (3.34)$$

Où q est la différence entre les pressions exercées sur les faces de la plaque

L'équation d'équilibre devient alors :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3.35)$$

$$\text{Avec} \quad \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = F_z \quad (2.36)$$

2.6.4 Equilibre par rapport aux moments

En multipliant les deux termes d'équations d'équilibre (3.20) par z et en les intégrant dans l'épaisseur on trouve l'équation des moments en équilibre suivant x :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz \quad (2.37)$$

Sachant que:

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (2.38)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.39)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \quad (\text{Intégrale par partie}) \quad (3.40)$$

$$= \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) - Q_x \quad (3.41)$$

$$= \frac{h}{2} (\tau_{1x} - \tau_{2x}) - Q_x \quad (3.42)$$

Le moment d'inertie par rapport au plan moyen ($x0y$) de la plaque unitaire au point (x, y) :

$$I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (3.43)$$

$$\text{En posant} \quad P_x = \int_{-h/2}^{h/2} \rho f_z dz \quad (3.44)$$

Finalement l'équation devient

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} - \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial t^2} \quad (3.45)$$

La même démarche pour l'équation d'équilibre des moments le long de la direction y :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} - \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial t^2} \quad (3.46)$$

Avec:

$$P_y = \int_{-h/2}^{h/2} \rho f_y dz \quad (3.47)$$

La combinaison des trois dernières relations d'équilibre permet d'écrire une nouvelle équation du mouvement indépendante des résultantes de cisaillement:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 Q_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 Q_y}{\partial x \partial t^2} \right) \quad (3.48)$$

3.6.5 Equations du mouvement d'une stratifié

En reportant les expressions des résultants et des moments données par l'équation constitutive (2.15), on trouve:

$$\begin{cases} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ -3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{11} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ -(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \\ - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \\ - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{cases}$$

3.7 Expression des conditions aux limites

Les conditions imposées aux frontières d'une structure permettent d'aboutir à des solutions uniques d'équation du mouvement (3.49).

La figure (3.4) représente un élément de frontière repéré au point P (x, y, 0) par le système d'axes \vec{n} , normale extérieure, \vec{i} la tangente dans le plan moyen et $\vec{k} = \vec{z}$.

La déformée au point P du stratifié est caractérisée par le déplacement de ce point exprimé dans la base $(\vec{n}, \vec{i}, \vec{k})$ par ses composantes $u_{0n}(x, y), v_{0n}(x, y), w_{0n}(x, y)$ et par l'orientation de la déformée définie par $\frac{\partial w_0}{\partial n}$.

Les efforts exercés au point P sont les résultantes en membrane N_n, N_{nt} , en cisaillement Q_n , les moments de flexion M_n et de torsion M_{nt} . Les conditions imposées portent sur l'une des grandeurs de chacune des paires suivantes :

$$u_{0n}, N_n \quad u_{0t}, N_t \quad \frac{\partial w_0}{\partial n}, M_n \quad w_0, \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n \quad (3.50)$$

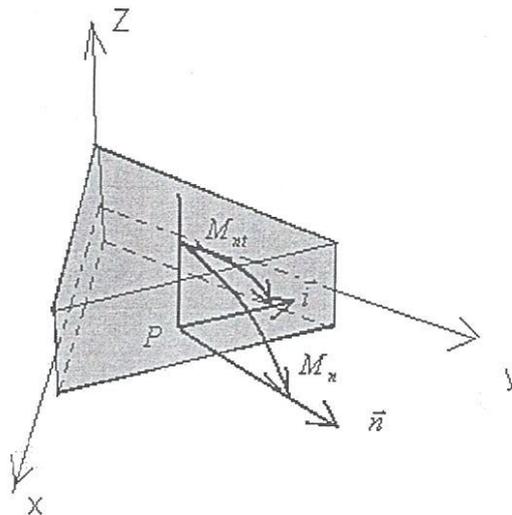


Figure 3.4 Élément de frontière de la plaque et repère associé

3.7.1 Appui simple

La figure 3.5 représente la condition d'appui simple. L'expression de cette condition est donnée par:

$$w_0 = 0 \quad M_n = 0 \quad N_{0r} = 0 \quad N_{nt} = 0 \quad (3.51)$$

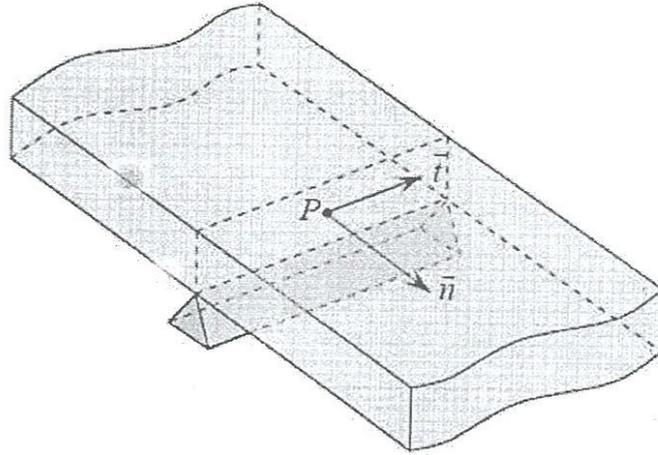


Figure 3.5 Schématisation d'un appui simple

3.7.2 Encastrement

On considérant la figure 3.6 la condition de bord encasté peut s'exprimer par :

$$w_0 = 0 \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad u_{0n} = 0, \quad u_{0t} = 0 \quad (3.52)$$

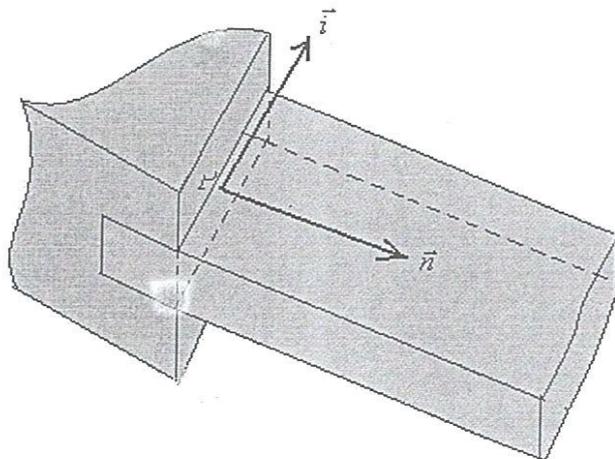


Figure 3.6 Représentation d'un encastrement

3.7.3 Condition de bord libre

Un bord libre est caractérisé par la nullité de tous les efforts et les moments:

$$N_n = N_{nt} = Q_n = M_n = M_{nt} \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0 \quad (3.53)$$

L'équilibre des moments de torsion sur un bord libre (figure 2.7) s'exprime sous la forme:

$$-M_{nt} + M_{nt} + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} dt + Q_n dt = 0 \quad (3.54)$$

Où $Q_n dt$ est le moment résultant du à l'effort de cisaillement. La résultante de cisaillement est donc reliée au moment de torsion par :

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0 \quad (3.55)$$

Est la condition de frontière de Kirchhoff. Elle exprime la contribution du moment de torsion sur le bord à l'effort tranchant total exercé sur ce dernier.

Les conditions de bord dans ce cas :

$$N_n = 0 \quad N_{nt} = 0 \quad M_n = 0 \quad \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} + Q_n = 0 \quad (3.56)$$

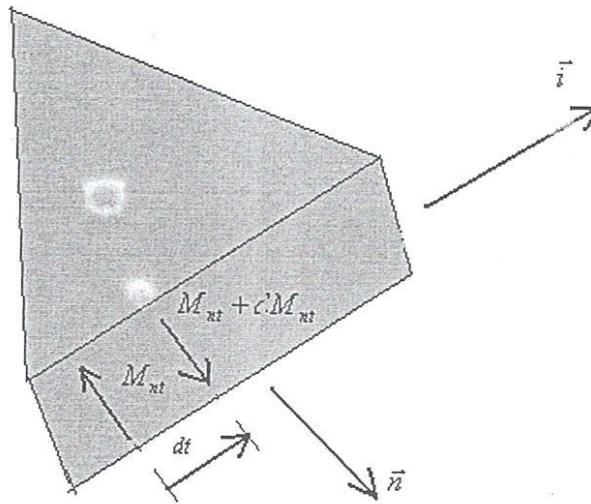


Figure 3.7 Variation du moment de torsion le long d'un bord libre

3.8 Formulation énergétique de la théorie des stratifiés

Les théorèmes énergétiques peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Cette formulation associée aux conditions aux frontières permet, dans le cadre du calcul variationnel, de développer des

méthodes de recherche des solutions approchées du comportement mécanique des stratifiés. Les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse des stratifiés par élément finis [SED 05], [BER 07].

3.8.1 Energie de déformation d'un stratifié

L'énergie de déformation d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant:

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (3.57)$$

En tenant compte des hypothèses de la théorie des stratifiés: $\sigma_{xx} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ et des relations exprimant les contraintes en fonction des déformations. L'énergie de déformation s'écrit:

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (Q_{11}^k \varepsilon_{xx}^2 + 2Q_{12}^k \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2Q_{16}^k \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} + 2Q_{26}^k \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} + Q_{22}^k \varepsilon_{yy}^2 + Q_{66}^k \gamma_{xy}^2) dx dy dz \quad (3.58)$$

Cette relation peut être exprimée en fonction des déplacements u_0 , v_0 et w_0 en substitution dans l'expression précédente les relations déformations-déplacements (3.3), (3.4) et en intégrant ensuite par rapport l'axe Z suivant l'épaisseur du stratifié, nous obtenons :

$$\begin{aligned} U_d = \frac{1}{2} \iint \left\{ A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right. \\ + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 - B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2B_{12} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ - 2B_{16} \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] - 2B_{26} \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \\ - 4B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \\ \left. + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned}$$

(3.59)

Dans le cas de stratifié symétriques, les termes B_{ij} de couplage membrane-flexion sont nuls, et l'expression (3.59) de l'énergie de déformation se réduit suivant :

$$\left. \iint \left\{ \begin{aligned} & U_d = \frac{1}{2} \iint \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & 2 \left(A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ & \left. + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} \end{aligned} \right. \quad (3.60)$$

3.8.2 Energie cinétique d'un stratifié

L'énergie cinétique d'un stratifié s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (3.61)$$

On a :

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (3.63)$$

3.8.3 Travail des actions exercées sur le stratifié

Dans le cas d'une flexion transversale, les actions exercées se réduisent aux charges traverses exercées sur les faces inférieures et supérieures du stratifié. La variation du travail de ces actions s'écrit :

$$\delta W_f = \iint \left[\sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \delta w_0 dx dy \quad (3.64)$$

3.9 Vibration de flexion des plaques minces symétriques

3.9.1 Equation du mouvement

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, les déformations de cisaillement fait l'hypothèse de négliger le cisaillement transverse dans le matériau c'est à dire :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0$$

En reportant cette égalité dans les relations (3.1), nous obtenons :

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Pour un stratifié symétrique, les termes de couplage membrane-flexion-torsion $B_{ij} = 0$ (3.10), alors l'équation 3.15 prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Avec les fonctions de courbures sont déterminées par (3.66).

$$k_x = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) \quad k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x}(x, y) \quad (3.66)$$

En posant le terme d'intégration R égale à zéro ainsi que les résultantes en cisaillement ($\gamma_{xz} = 0$ et $\gamma_{yz} = 0$) dans (3.48) vu que les déplacements du stratifié dans le plan sont découplés du déplacement transversal, l'équation 3.48 prendra la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3.67)$$

En considérant l'expression des moments (3.65) et des courbures (3.66) dans 3.67, on obtient une équation de mouvement en vibration libre suivante.

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = q \end{aligned} \quad (3.68)$$

3.9.2 Fréquences et déformées propres des plaques minces

Considérons l'équation du mouvement transversal libre du stratifié ($q = 0$). La solution vibratoire harmonique de cette équation est recherchée, par la méthode de séparation des variables d'espaces et du temps, sous la forme :

$$w_0(x, y, t) = w_0(x, y)e^{j\omega t} \quad (3.68)$$

$w_0(x, y)$: est la solution spatiale ou déformée.

En reportant cette forme dans l'équation (3.68), nous aboutissons à l'équation aux fréquences suivante :

$$\begin{aligned} -\rho_s \omega^2 w_0 + D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

La solution du problème consiste à déterminer toutes les fonctions $w_0(x, y)$ satisfaisant les conditions aux limites (déformées propres) et d'en déduire les fréquences propres correspondantes.

Par exemple, l'encastrement s'écrit en fonction du déplacement, pour le bord parallèle à la direction y par :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.70)$$

Et pour le bord parallèle à la direction de x par :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

L'absence de solution exactes pour toutes les conditions aux limites conduit à la recherche des solutions approchées, et tant que la résolution du problème étudié demande des efforts considérables, il est très appréciables peut être suivi pour un sujet de thèse de doctorat.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail a été la détermination du comportement vibratoire des plaques stratifiées composite carbone/époxyde expérimentalement et par calcul des structures sous l'effet de différentes conditions aux limites et pour trois séquences d'empilement. L'étude vise notamment les paramètres modaux à savoir les fréquences et les déformées propres et les amortissements modaux. L'approche expérimentale permet une analyse modale menée sur trois plaques pour deux configurations de conditions aux limites ELLL et ELEL. L'étude vibratoire des plaques stratifiées permet de dégager les conclusions suivantes :

- La séquence d'empilement et les conditions aux limites influencent fortement le comportement vibratoire des stratifiés composites (fréquences propres, déformées propres et amortissements modaux).
- La détermination de l'amortissement expérimentalement est difficile et contient des dispersions, à cause des difficultés liées à l'étude expérimentale, ainsi qu'au problème lié à l'impossibilité de séparer les différents types d'amortissement entre eux.
- L'analyse des résultats montre que l'amortissement modale est inversement proportionnel à la rigidité.
- La comparaison des résultats obtenus expérimentalement et par calcul de structures permet de mettre en évidence l'avantage de la rapidité de la convergence des données numérique avec ceux obtenus expérimentalement pour les premiers modes.
- La dispersion des paramètres modaux obtenus expérimentalement avec ceux obtenus théoriquement augmente avec l'augmentation du rang du mode. A cet effet, la comparaison des caractéristiques des stratifiés est effectuée sur les premiers modes de vibration qui sont les plus importants.

Références Bibliographiques

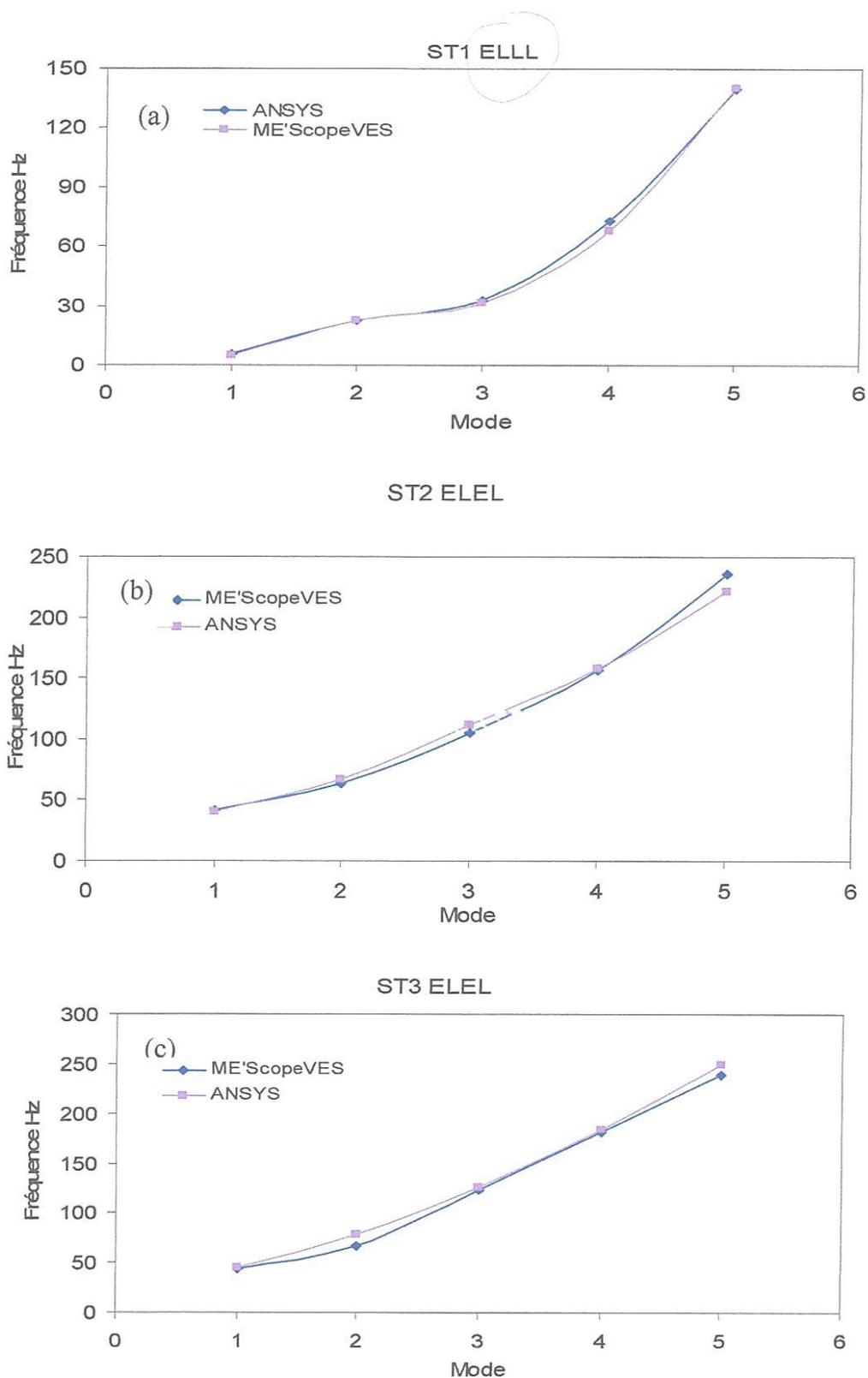


Figure 3.16 Comparaison des fréquences propres des plaques ELEL obtenues expérimentalement et numériquement pour les stratifiés:

(a) ST1 $[(+70/-70)_2]_S$, (b) ST2 $[(+65/-65)_2]_S$, (c) ST3 $[(+60/-60)_2]_S$

• Influence des séquences d'empilements

Nous montrons respectivement sur les figures 3.17 et 3.18 l'influence des séquences d'empilements sur les fréquences propres des stratifiés ST1, ST2, ST3 obtenus expérimentalement et numériquement dans le cas des conditions aux limites ELEL. Nous constatons que les séquences d'empilements influent d'une manière très importante sur les fréquences propres des stratifiés, surtout pour les modes d'ordre élevés. La diminution de l'angle d'orientations des fibres augmente la rigidité des plaques et par conséquent augmente les fréquences propres.

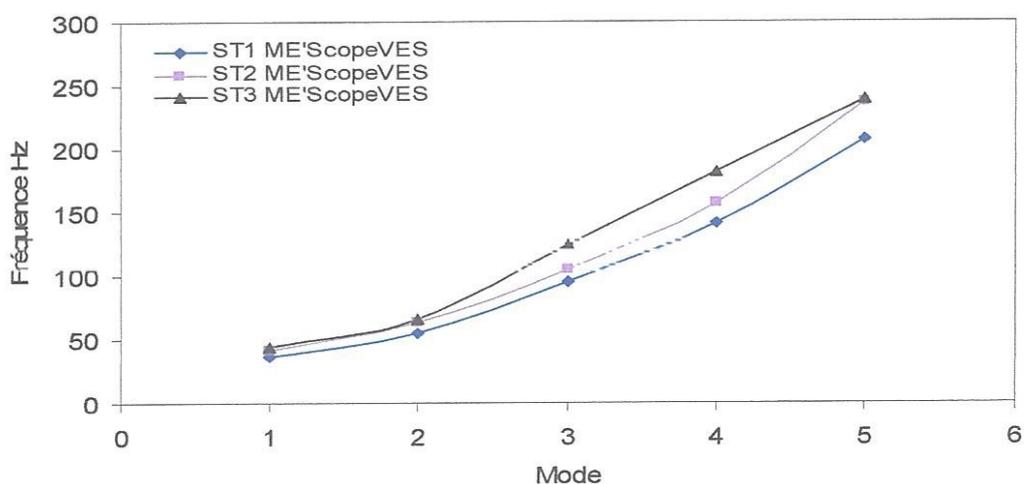


Figure 3.17 Influence d'empilement sur les fréquences propres expérimentalement en configuration ELEL

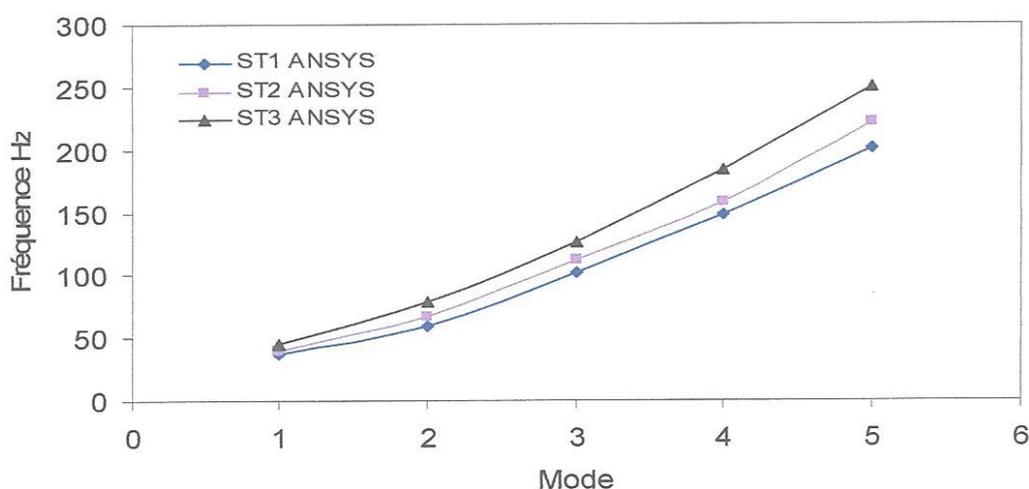


Figure 3.18 Influence d'empilement sur les fréquences propres obtenues par simulation en configuration ELEL

3.3.3 Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres

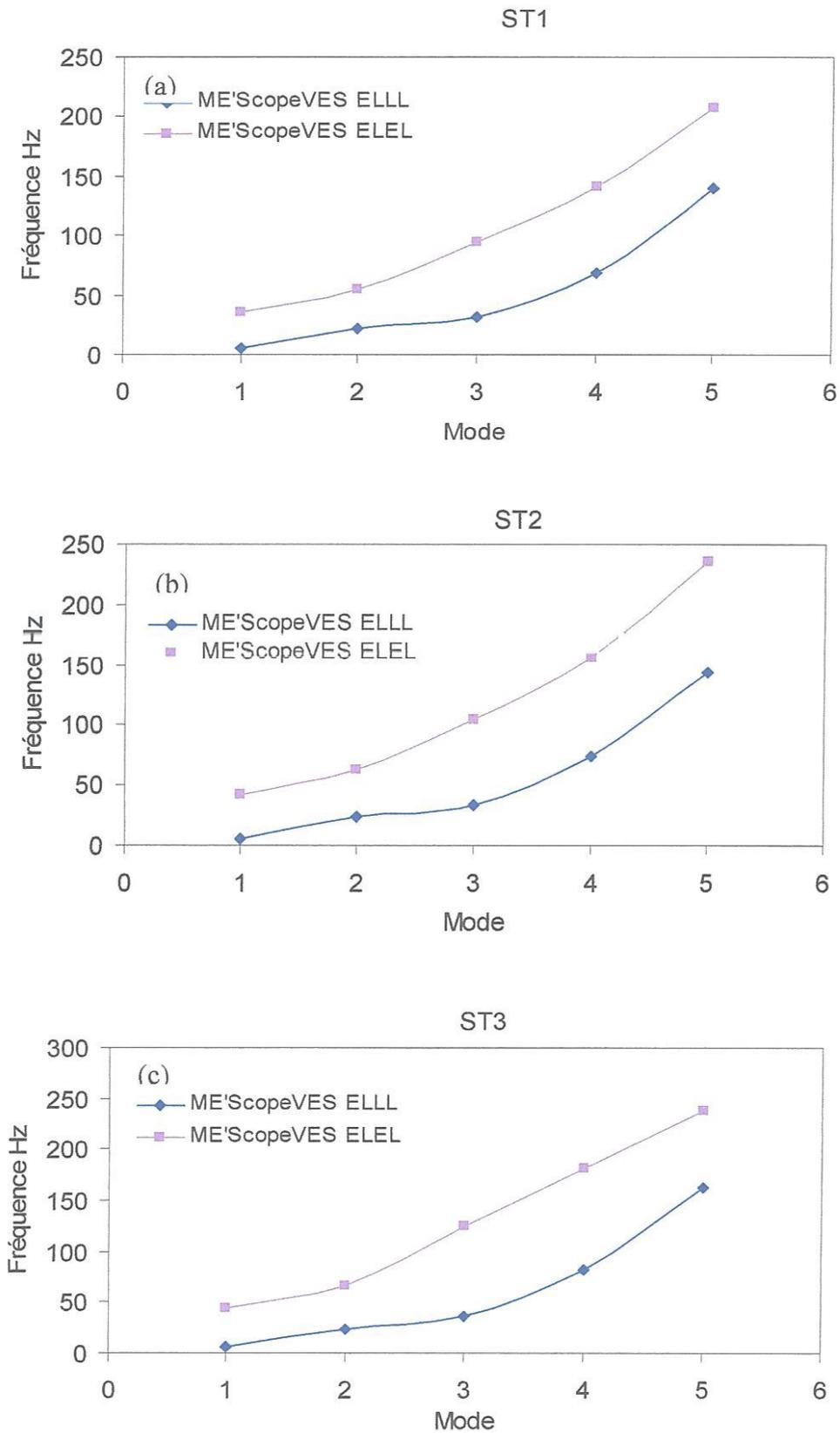


Figure 3.19 Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres obtenues expérimentalement des stratifiés:

(a) ST1 $[(+70/-70)_2]_S$, (b) ST2 $[(+65/-65)_2]_S$, (c) ST3 $[(+60/-60)_2]_S$

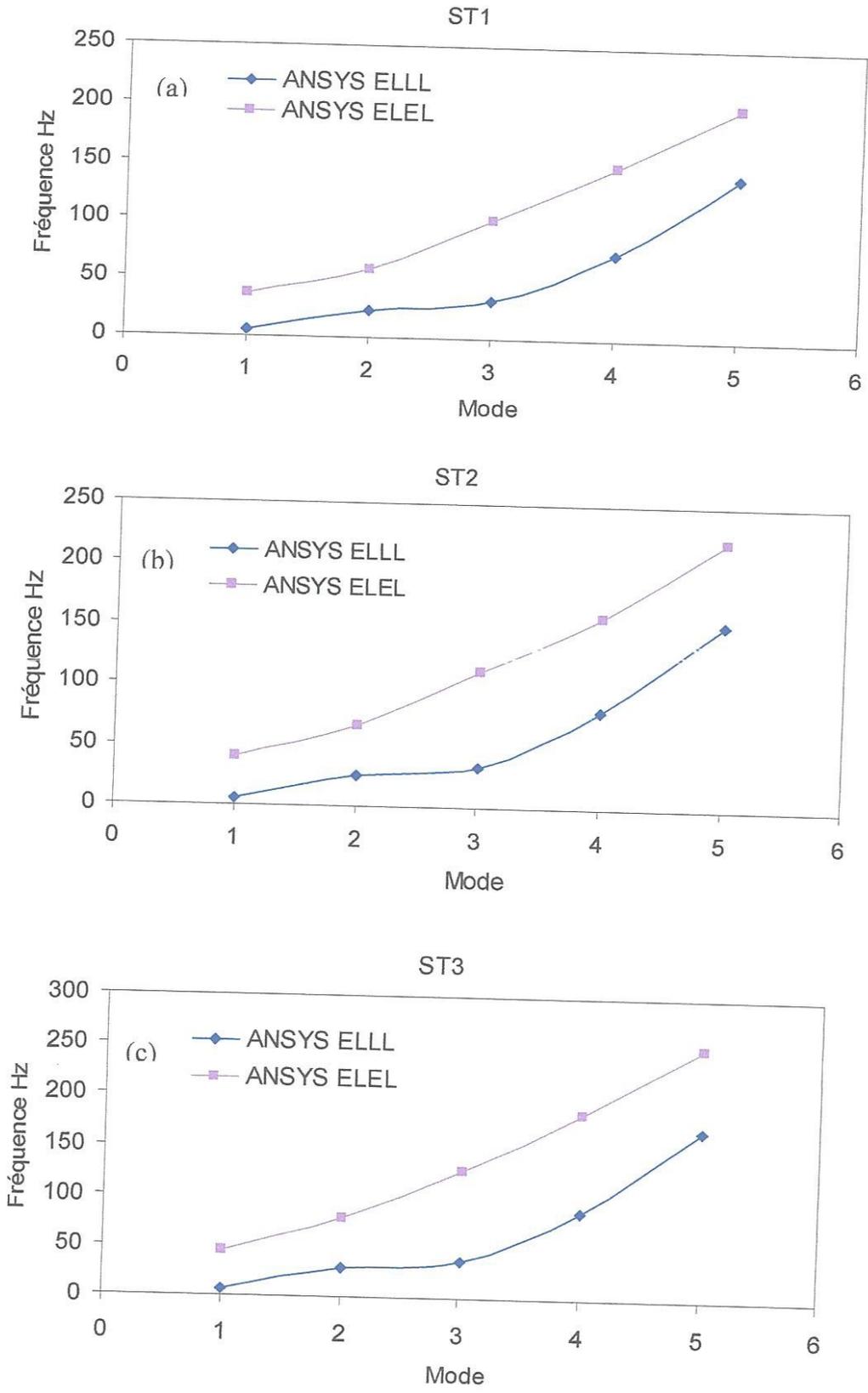


Figure 3.20 Influence des conditions aux limites sur les fréquences propres obtenues numériquement des stratifiés :

(a) ST1 $[(+70/-70)_2]_S$, (b) ST2 $[(+65/-65)_2]_S$, (c) ST3 $[(+60/-60)_2]_S$

A partir des 16 autospectres mesurés dans les différents points de maillage expérimentale des plaques, ME'ScopeVES calcul les magnitudes de ces autospectres (figure 3.21).

La superposition des magnitudes permet au logiciel ME'ScopeVES de calculer la magnitude d'un autospectre moyenné (figure 3.22). À partir duquel, ME'ScopeVES procède à l'extraction des fréquences propres des différentes modes et le calcul des leurs amortissements modaux, voir tableau 3.4 et 3.5.

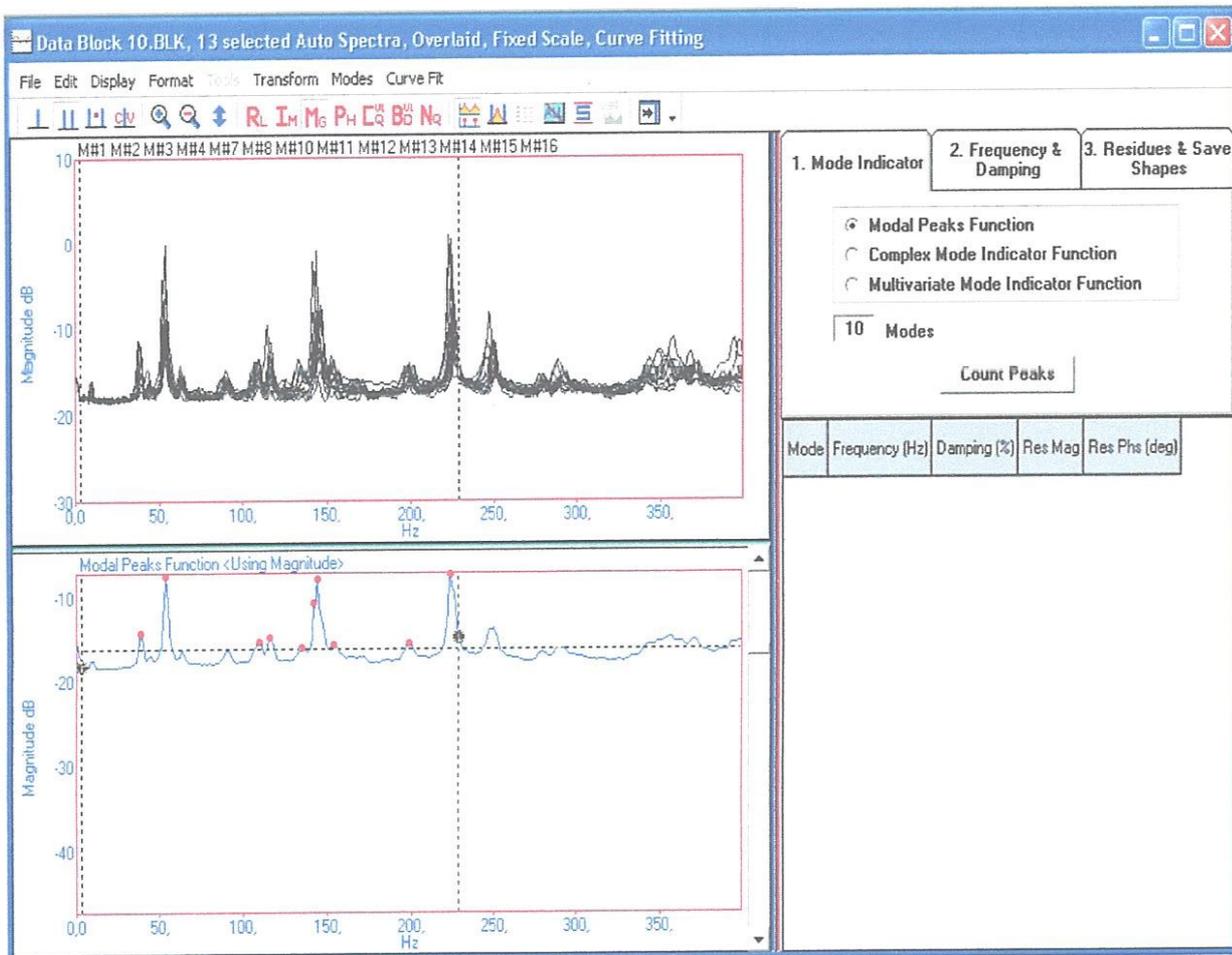


Figure 3.22 Fonction de crêtes modale montrant 10 crêtes de résonance

L'évaluation de la fréquence de chaque mode sélectionné est représentée par une ligne verticale verte sur le graphique de l'indicateur du mode (Figure 3.23). La méthode polynomiale est utilisée pour l'estimation des fréquences et des amortissements modaux pour les 5 premiers modes de toutes les mesures.

Finalement les valeurs des fréquences et des amortissements modaux de tous les modes considérés sont clairement illustrés sur droite de la fenêtre de ME⁷ Scope VES (figure 3.23).

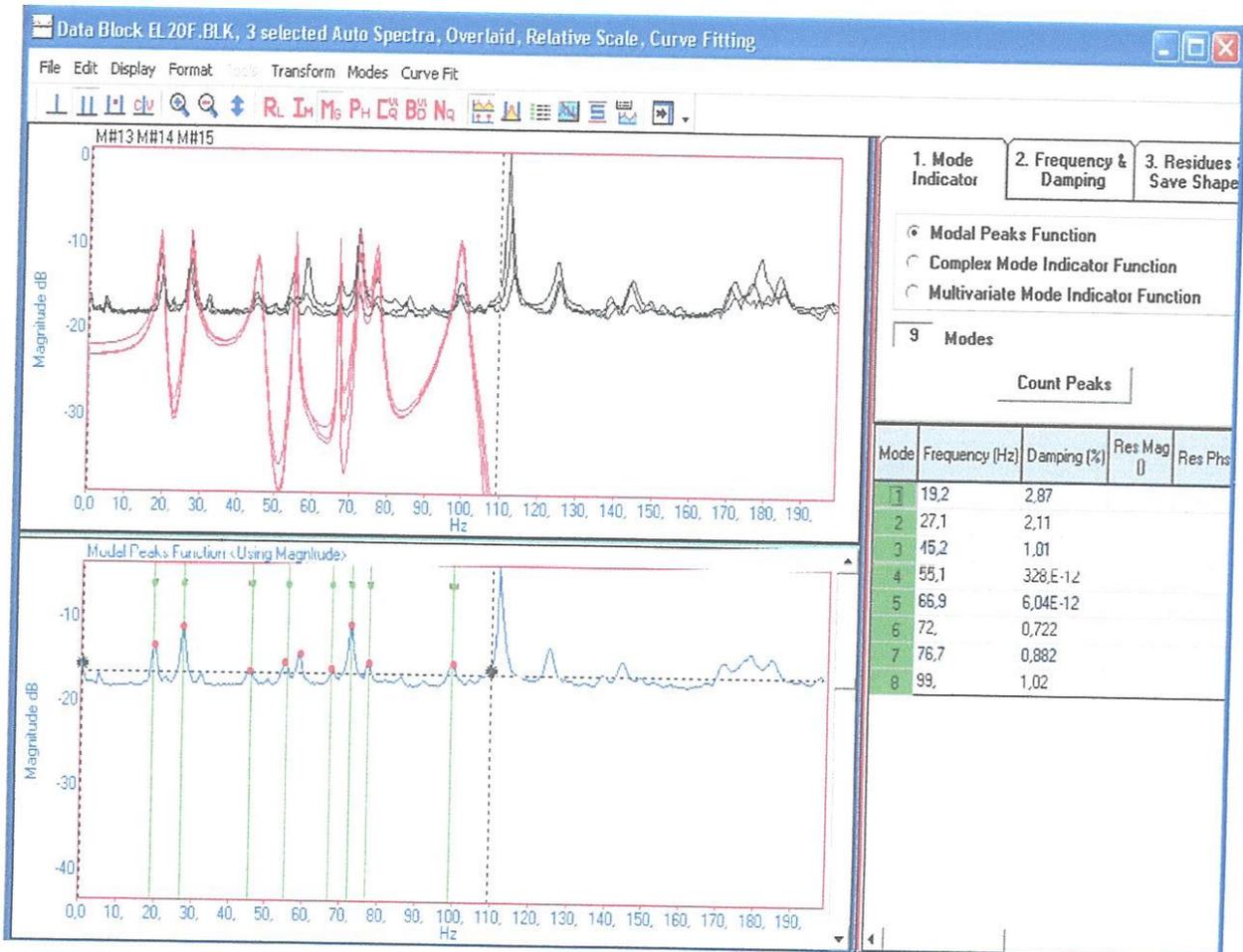


Figure 3.23 Fonction de crêtes modale montrant 10 crêtes de résonance et ces amortissements modaux

- **Influences des séquences d'empilements et des conditions aux limites sur l'amortissement modal**

Le tableau 3.4 et la figure 3.24, montrent que les amortissements modaux des cinq premiers modes des trois plaques stratifiées ST1, ST2, ST3 dans le cas des conditions aux limites ELLL, ont une tendance décroissante avec l'augmentation du rang du mode, ce résultat est confirmé par les références [CLE 05] et [SED 05]. L'analyse de ces résultats montre aussi que l'amortissement modal est inversement proportionnel à la rigidité. Le stratifié ST1 possédant la rigidité la plus faible (Fréquences propres les plus faibles par rapport ST2 et ST3) possède les amortissements modaux les plus élevés.

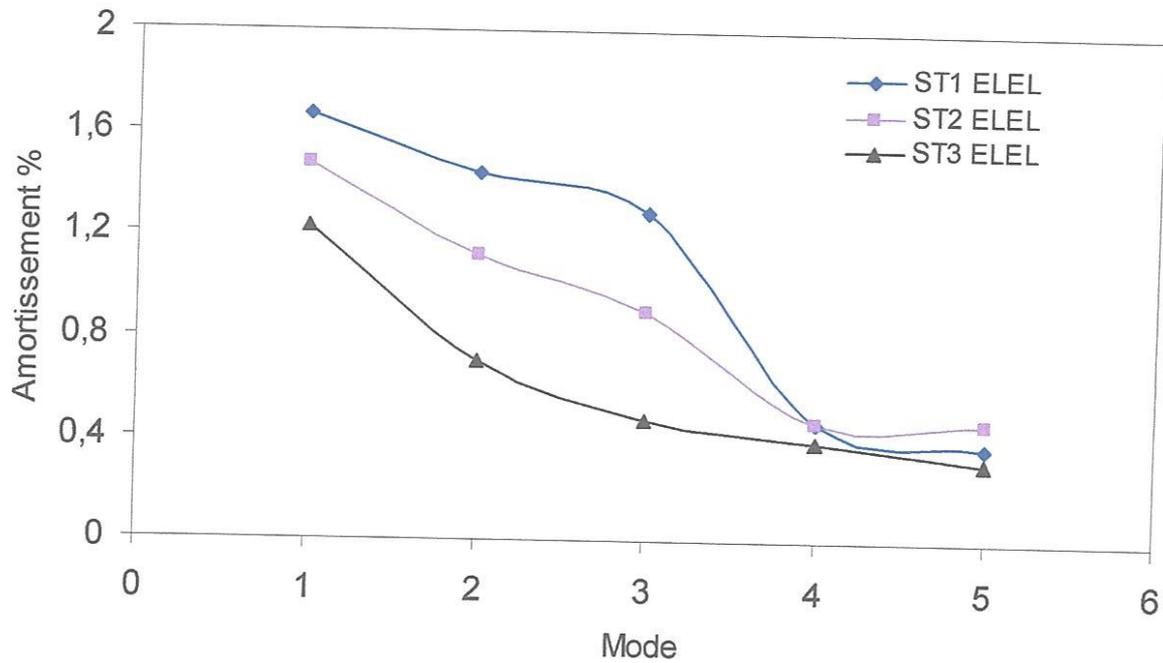


Figure 3.25 Amortissement modale pour les trois séquences d'empilement pour la configuration ELEL

Comme les plaques ayant la configuration ELEL sont plus rigides que les plaques ayant la configuration ELLL, les amortissements modaux des plaques (ELEL), sont plus faibles que ceux des plaques ELLL. On constate aussi une diminution rapide de l'amortissement modal avant la stabilisation à partir du troisième mode (Figures 3.26).

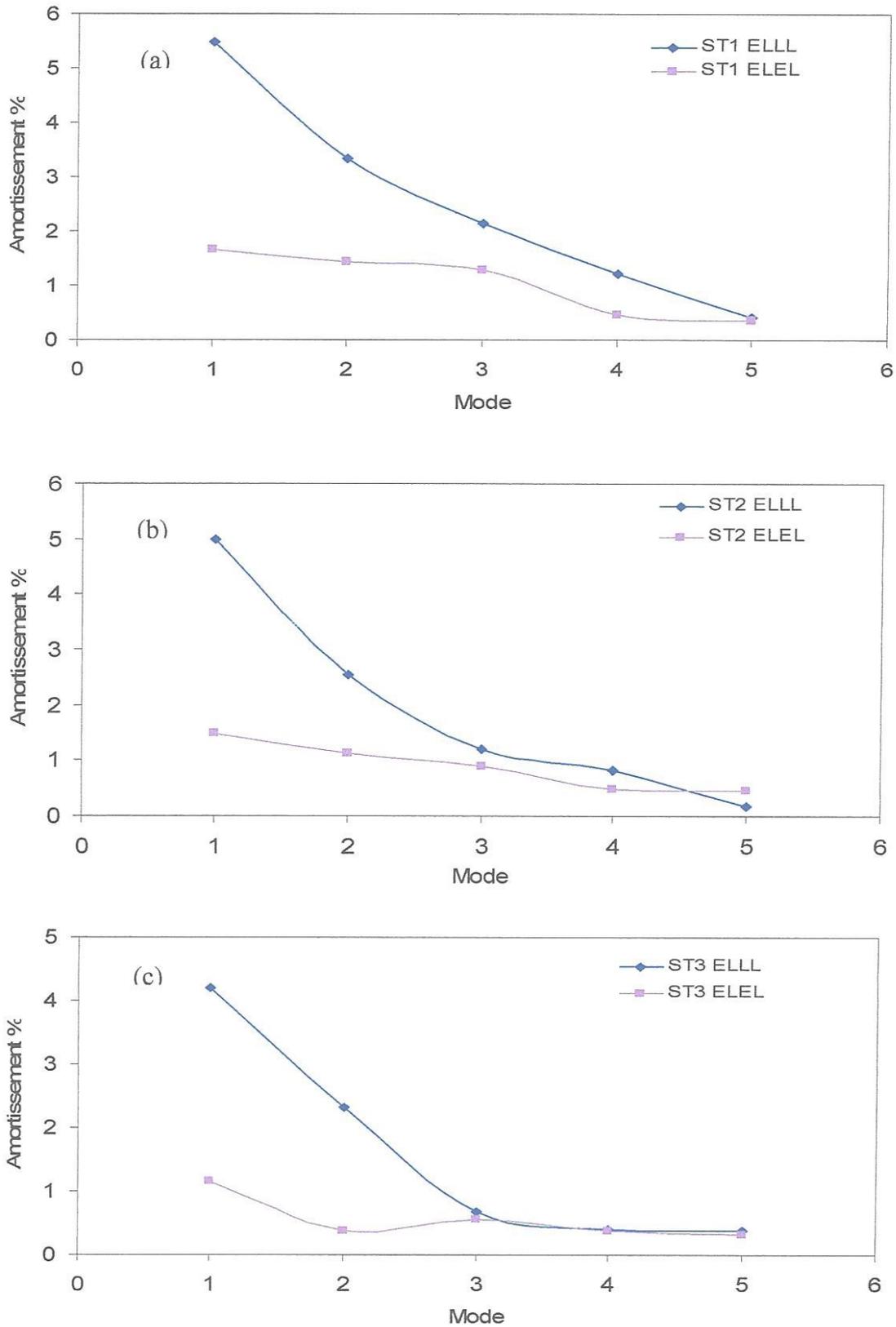


Figure 3.26 Amortissement modal pour différentes conditions aux limites pour les trois séquences d'empilements

(a) ST1 $[(+70/-70)_2]_S$, (b) ST2 $[(+65/-65)_2]_S$, (c) ST3 $[(+60/-60)_2]_S$.

Chapitre 03

Généralité sur la théorie des stratifiés

Généralités sur la théorie des stratifiés

3.1 Introduction

Pour la mise en équation du problème général de la mécanique des milieux continus, la formulation variationnelle permet de faciliter l'écriture analytique des équations du mouvement et des conditions aux limites pour les systèmes complexes. Elle permet aussi d'introduire des méthodes de calcul approché numériques ou analytiques. Dans le cas des stratifiés, la formulation directe des plaques est beaucoup plus facile, et pour une géométrie simple les conditions aux limites sont déduites de manière intuitive. Les deux approches: variationnelle ou directe ne sont pas suffisantes et il est nécessaire de développer une formulation énergétique des stratifiés pour introduire les méthodes de calcul approché.

3.2 Champ de déformations

La théorie classique des stratifiés stipule que le champ des déformations (Figure 3.1) se déduit du champ des déplacements pour une approximation du premier ordre [BER 07]

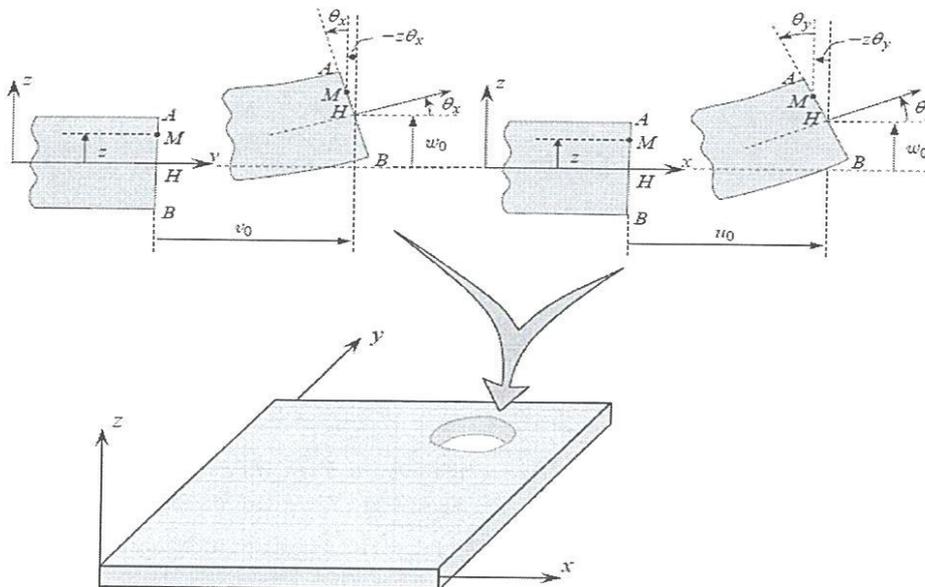


Figure 3.1 Schématisation des déformations dans le cas des théories du premier ordre

Références Bibliographiques

- [ADM 03] Adams R.D., Mahri M.R. Damping in advanced polymer-matrix composites. Journal of Alloys and Compounds, Vol. 355 (2003) 126–130.
- [ADM 73] Adams R.D., Bacon D.G.C. Effect of fibre orientation and laminate geometry on the dynamic properties of CFRP, J Compos Mater , 1973, 7:402–28.
- [ANS 07] Release 11, documentation for ANSYS, Element Reference Part I, Element Library, 2007.
- [AST 05] ASTM TOC. Space Simulation, Aerospace and Aircraft, Composite Materials Vol. 15.03, October 2005.
- [BAH] Bahlouli N. Les matériaux composites, www-ipst.u-strasb.fr/nadia/courcomp/.
- [BER 96] Berthelot J.-M Matériaux composites, Comportement Mécanique et Analyse des Structures, 3^{ème} édition, 1996.
- [BER 06] Berthelot J.-M. Damping analysis of laminated beams and plates using the Ritz method, Composite Structures, Vol. 74 (2006) 186–201.
- [BER 07] Berthelot J.-M. Mechanical Behaviour of Composite Materials and Structures, 2007.
- [BEZ 03] Bezazi A. Etude théorique et expérimentale du comportement mécanique en statique et en fatigue des matériaux composites stratifiés et sandwiches en flexion 3-point, thèses Doctorat d'état, 2003.
- [BIL 92] Biloet J.L. Introduction aux matériaux composites à hautes performances, Teknea, Lavoisier, 1992.
- [BIL 08] Billups E.K., Cavalli M.N. 2D Damping predictions of fiber composite plates, Layup effects, Composites Science and Technology, Vol. 68 (2008) 727–733.
- [BRI 99] Brian J., Mark H.R. Experimental Modal Analysis Vibrant Technology, Inc. Jamestown, California 95327, October, 1999.
- [BRU] B & K. Dual-channel Analysis Software, Type 3550; Guided Tours, Vol. 5, 4.

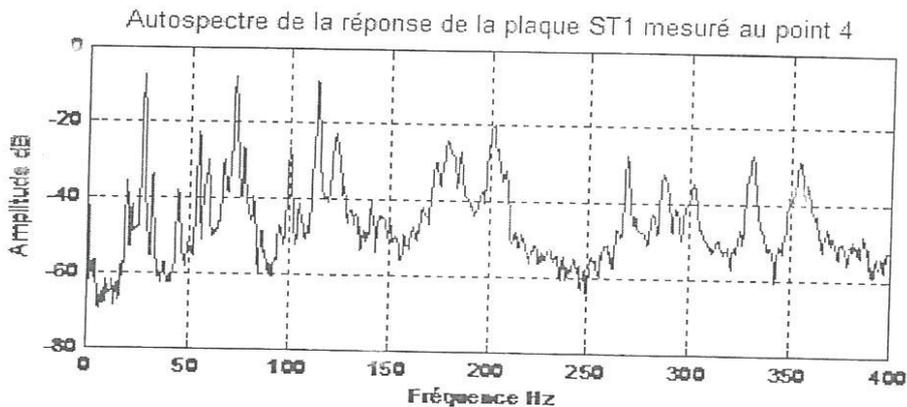
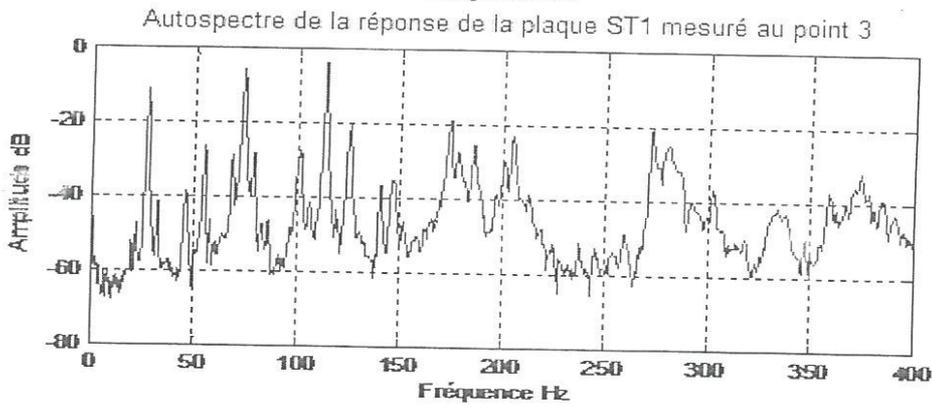
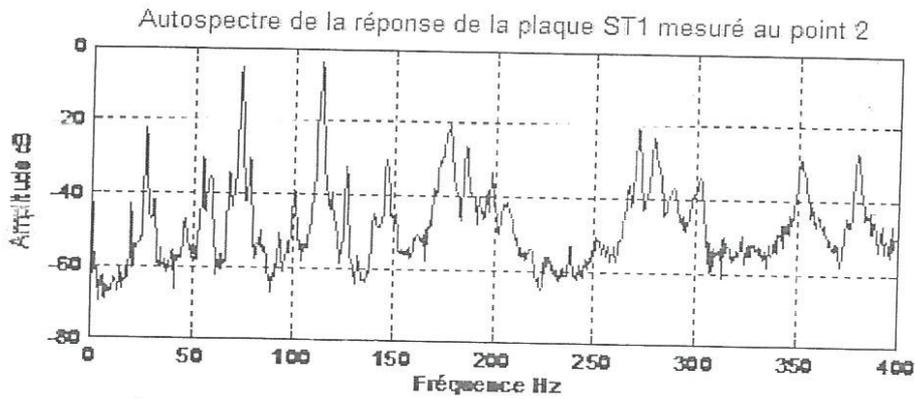
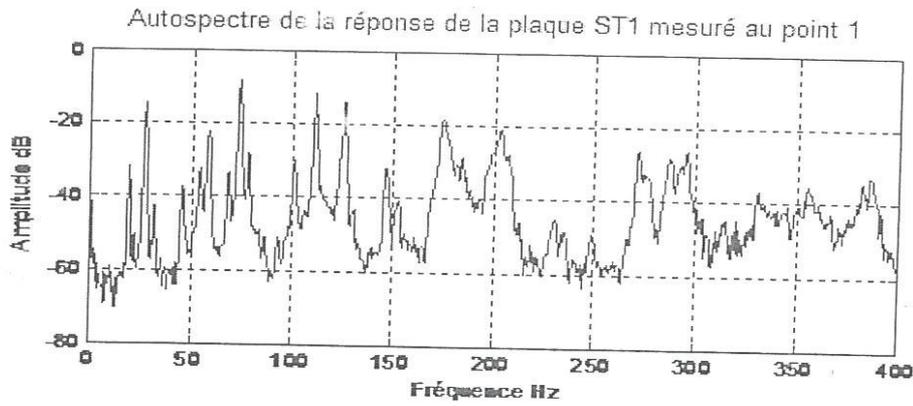
- [CHR 86] Chretien G. Les matériaux composites à matrice organique, techniques et documentations, Lavoisier, 1986.
- ^{05A} [CLA 05] Clarence W.S. Vibration and Shock; handbook; Mechanical Engineering Series, Vibration Damping, The University of British Columbia, by Taylor & Francis Group, LLC 2005.
- ^{05B} [CLA 05] Clarence W.S. Vibration and Shock, handbook; Mechanical Engineering Series, Frequency-Domain Analysis Edition Taylor and Francis 2005.
- [CLE 95] Clermont R *et al.* Technique expérimentale de visualisation d'endommagements dans un Carbone/époxyde sous sollicitations biaxiales, université de Sherbrooke Sherbrooke (Québec) CANADA J1K 2R1, Mai 1995.
- [DAM 08] DAMISA O., *et al.* Dynamic analysis of slip damping in clamped layered beams with non-uniform pressure distribution at the interface, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309 (2008) 349–374.
- [EL-M 08] El Mahi A., Assrar M., *et al.* Damping analysis of orthotropic composite materials and laminates, *Composites: Part B* 39, 1069–1076 (2008).
- [FRI 08] Fridman Y *et al.* Enhanced structural behavior of flexible laminated composite beams, *Composite Structures*, Vol. 82, (2008) 140–154.
- [GAY 91] Gay D. Matériaux composites, *Edition Hermès*, Paris, 1991.
- [GUE 93] Guedet C. Thèse de mémoire D.E.A, Mécanique Industrielle caractérisation de matériaux composites: flexion trois point, choc (Charpy), Amortissement de vibrations, Université du Maine, 1993.
- [HAR 07] Harkati E., Bezazi A., Scarpa F., Alderson K., and Alderson A. Modelling the influence of the orientation and fibre reinforcement on the Negative Poisson's ratio in composite laminates, *Phys. Status Solidi B*, Vol. 244, No 3, pp 883–892 (2007).
- [HAR 09] Harkati E., H. Bezazi A., Boukharouba W., and Scarpa F. Influence of carbon fibre on the through-the-thickness NPR behaviour of composite laminates. *Physica. Status Solidi B*, Vol. 246, No. 9, 2111–2117 (2009).
- [JIA 08] Jia LT., Chang N.R. 2-D analytical model for characterizing flexural damping responses of composite laminates, *Composite Structures*; 2008.

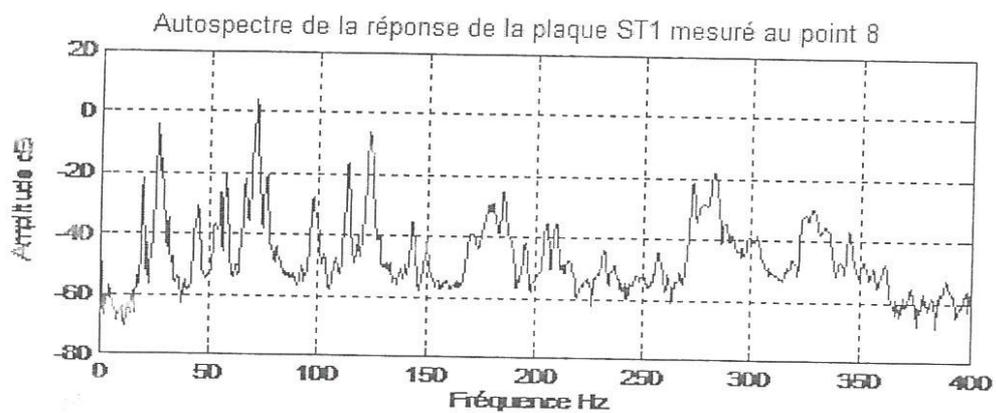
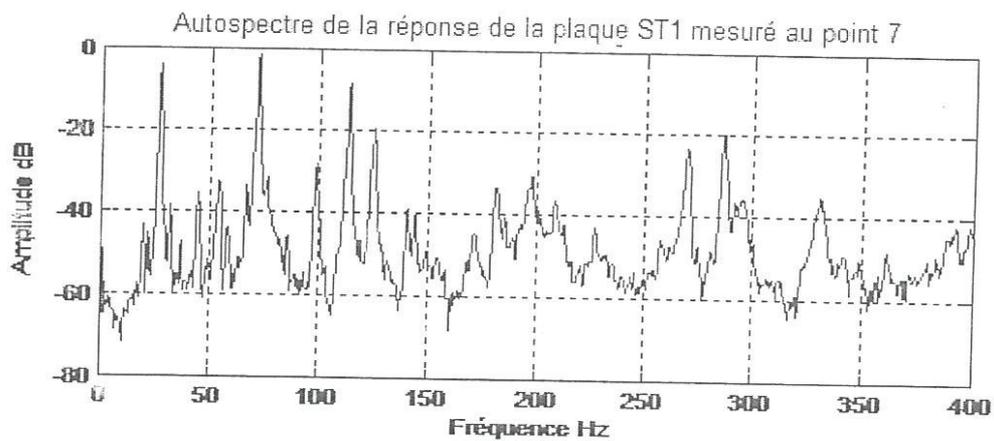
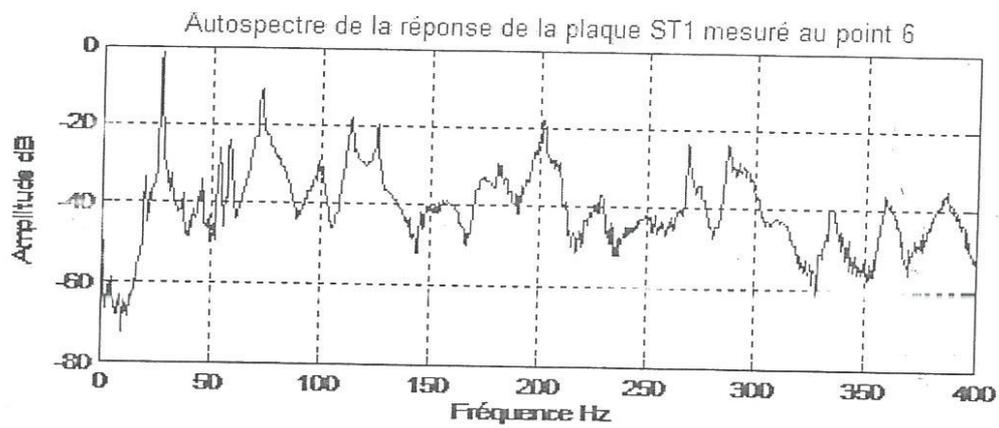
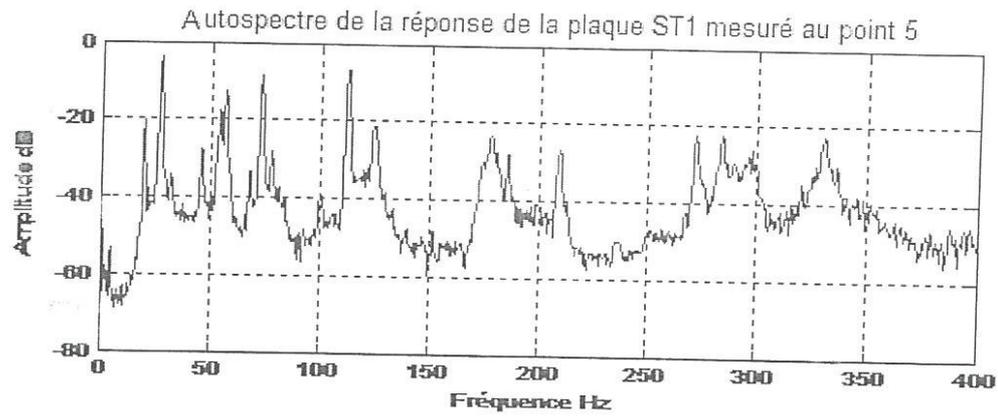
- [JON 99] **Jon H.** A damping analysis of composite laminates using the closed form expression for the basic damping of Poisson's ratio, *Composite Structures*, Vol 46 405-411 (1999).
- [JUG 05] **Cugnoni J.** Identification par recalage modal et fréquentiel des propriétés constitutives de coques, Lausanne, thèse no 3106, 2005.
- [LIL 06] **Liljedahl C.M., Crocombe A.D et al.** Damage modelling of adhesively bonded joints, *Springer Science+Business Media*, Vol 141, 147-161(2006).
- [MAR 01] **Marc T.** SYS 855 Vibroacoustique, Les Systèmes à 1 degré de liberté, Montréal, Septembre 2001.
- [MEB 09] **Mebarki A.** Analyse dynamique libre des plaques composites multicouches, option Mécanique Appliquée en engineering, 2009.
- [MIL 08] **Milli F.** Cours de Matériaux Composites, EDNMC à USTHB, juin 2008.
- [MIL 07] **Milli F et al.** Analyse du comportement vibratoire de plaques composites sous l'effet de différents paramètres de renforcement et de configuration, 18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27-31 août 2007.
- [NI 84] **Ni R.G., Adams R.D.** The damping and dynamic modulus of symmetric laminated composite beams theoretical and experimental results, *J Compos Mater* 1984,18(2), 104-21.
- [OUE 07] **Ouelaa N.** Cours et travaux pratique de module de Maintenance Conditionnelle par Analyse Vibratoires, EDMC, Université de Guelma, 2007-2008.
- [RIC 99] **Richardson M H.** Structural Dynamics Measurements, Vibrant Technology, Inc. Jamestown, CA 95327; SD 2000, April 11-16, 1999.
- [SAR 89] **Saravanos D A., Chamis C.C.** Mechanics of damping for fiber composite laminates including hygro-thermal effects, NASA TM-102329, National Aeronautics and Space Administration, Cleveland, 1989.
- [SED 05] **Seddiki S H.** Mémoire de Magister, Etude du comportement dynamique expérimentale et numérique de plaques stratifiés en composites, décembre 2005.
- [TRI 00] **Trindade M A.** Contrôle hybride Actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piezo-électriques et visco-élastiques, Juin 2000.

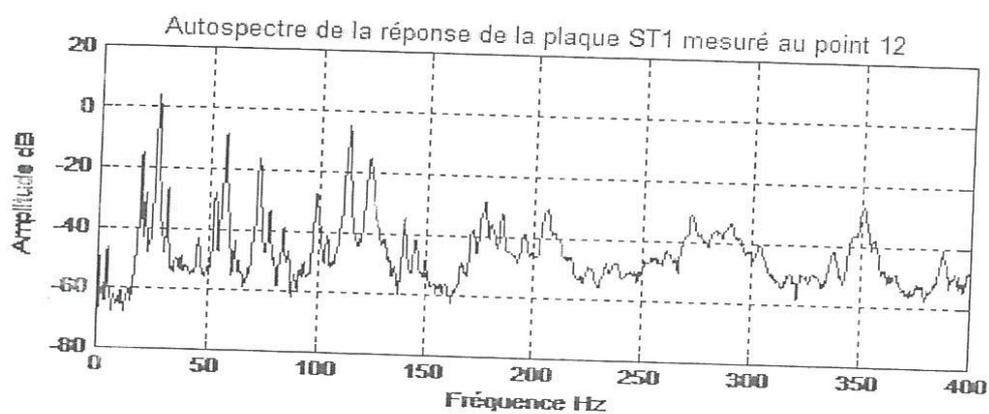
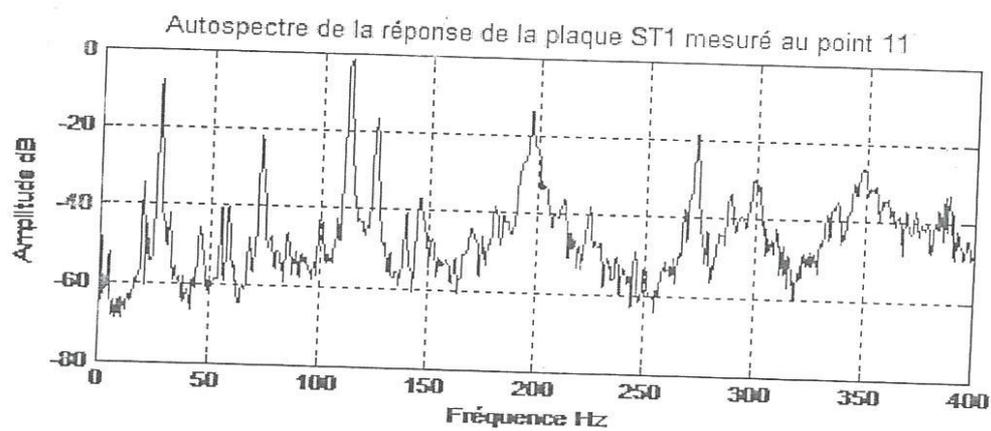
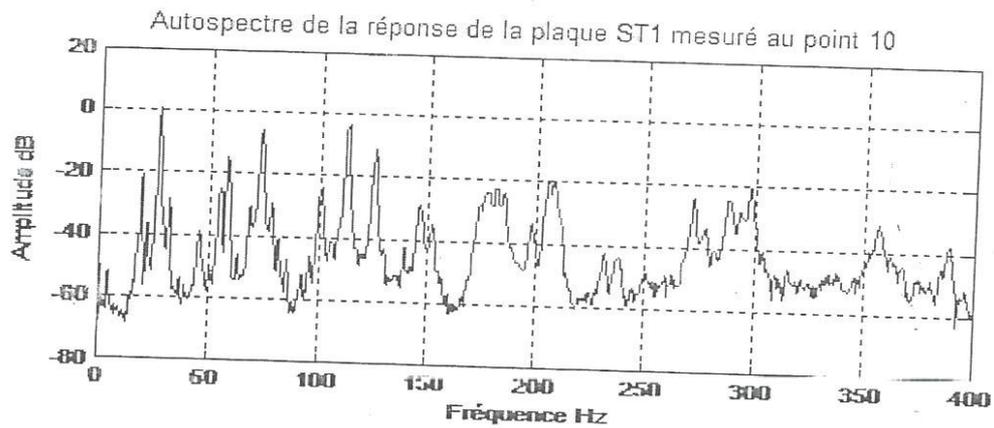
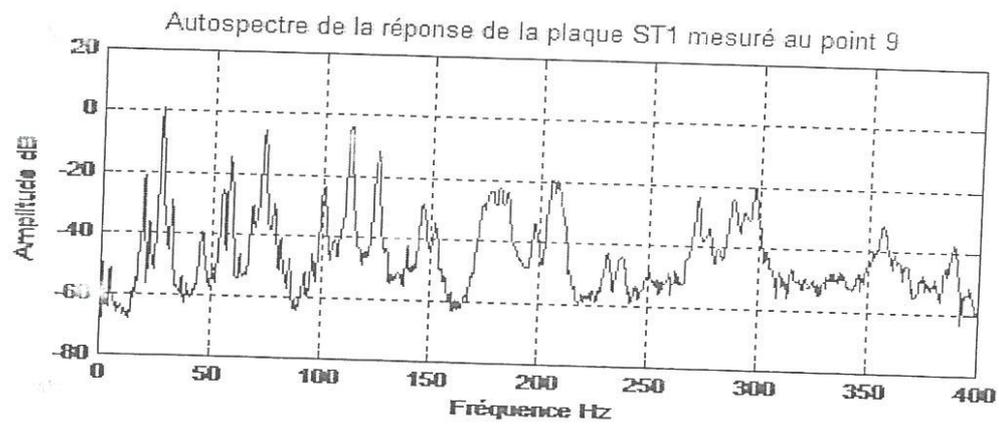
ANNEXES

Annexe 1

Autospectres des réponses des plaques ST1, ST2, ST3 mesurés aux 16 points pour les configurations ELLL et ELEL.







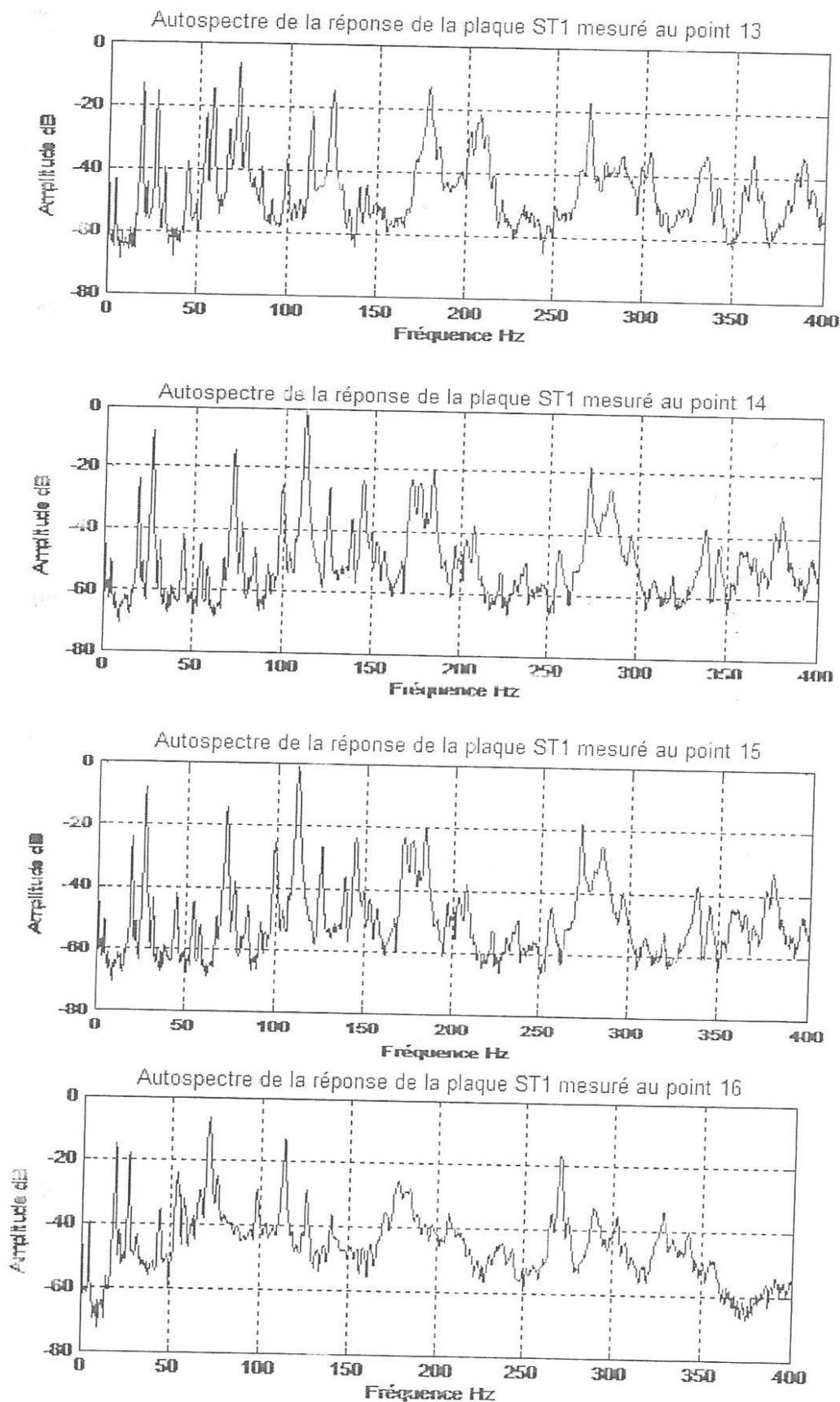
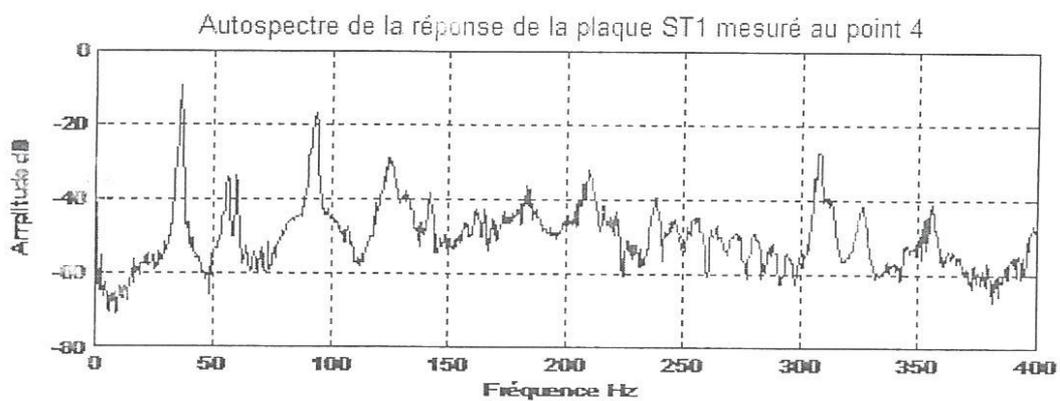
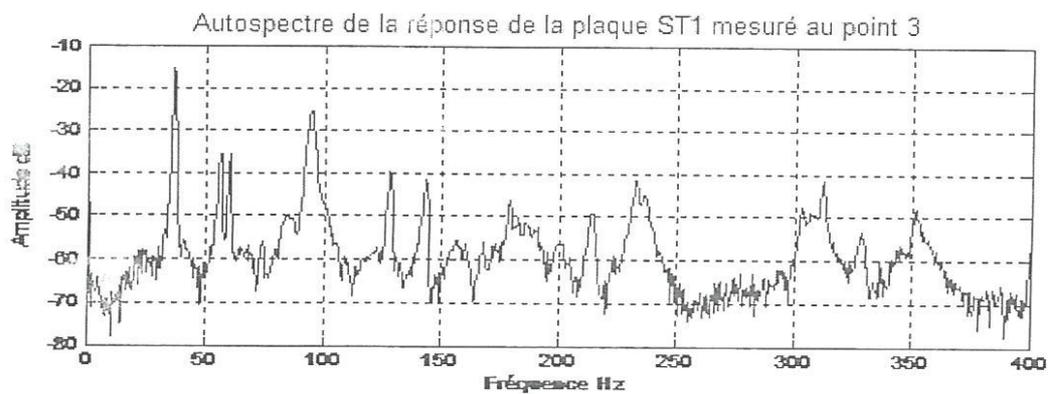
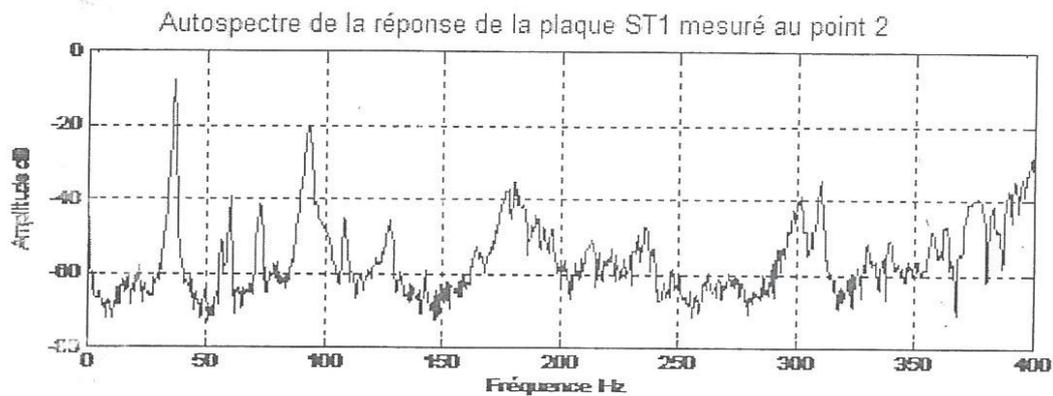
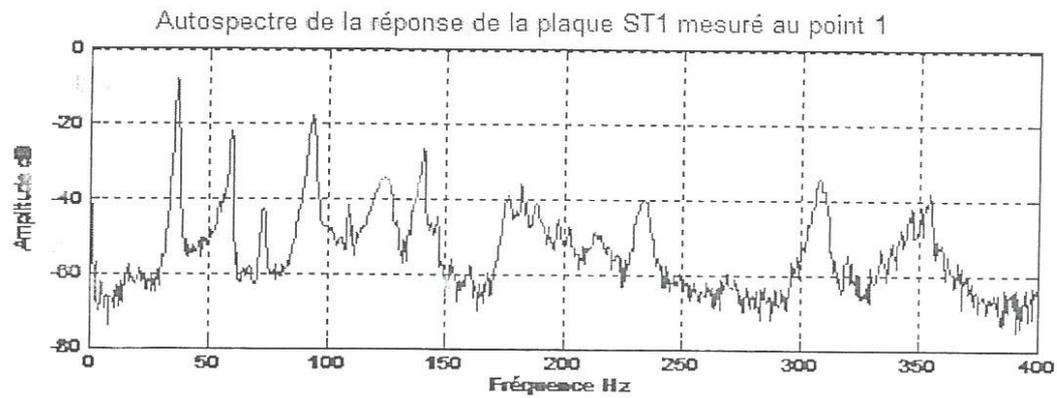
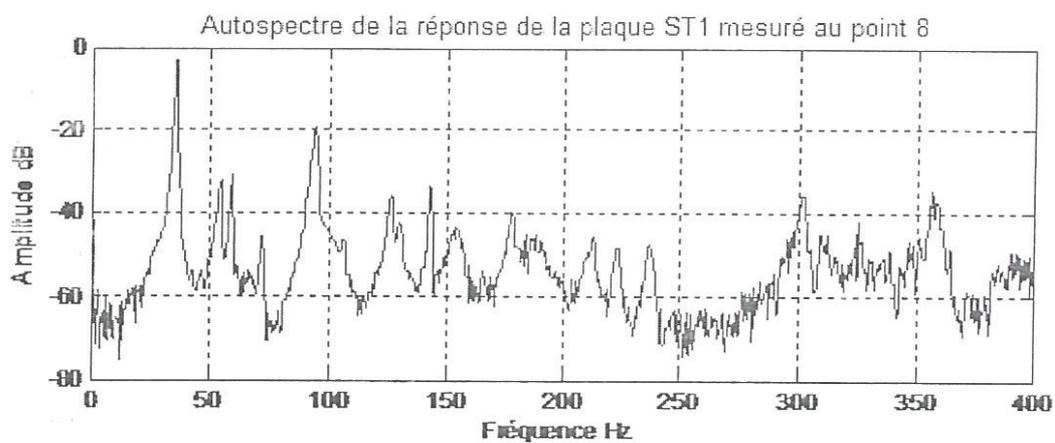
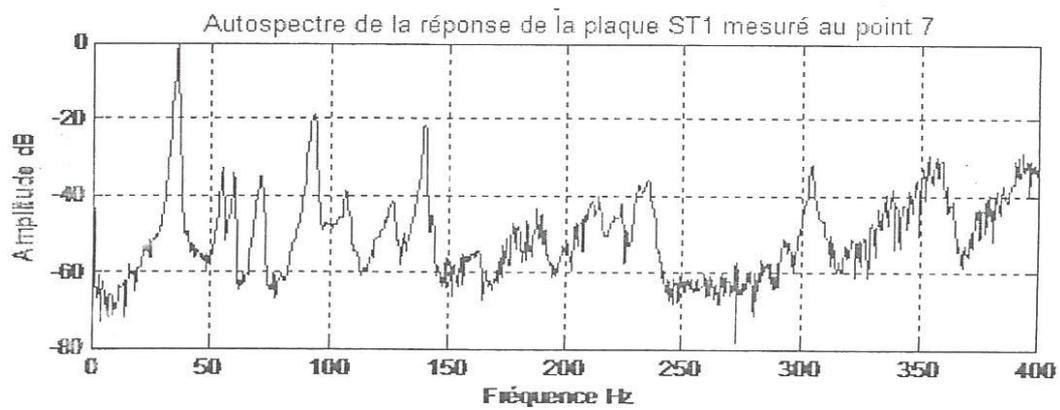
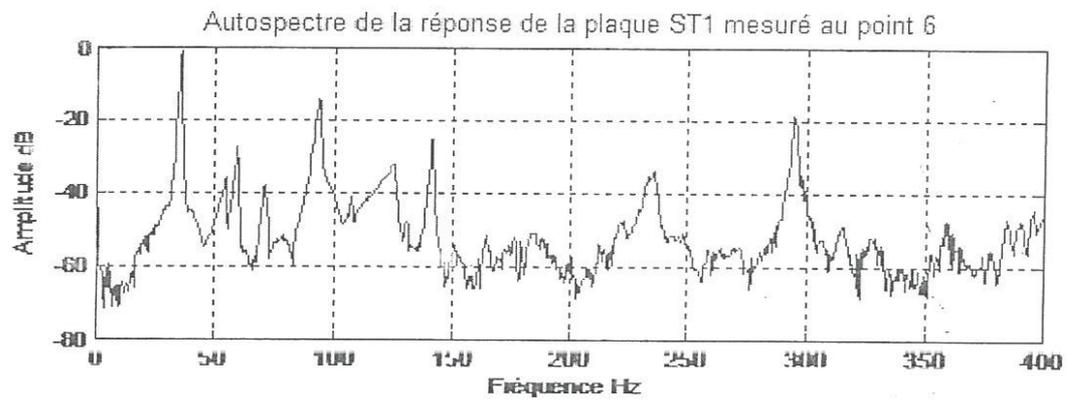
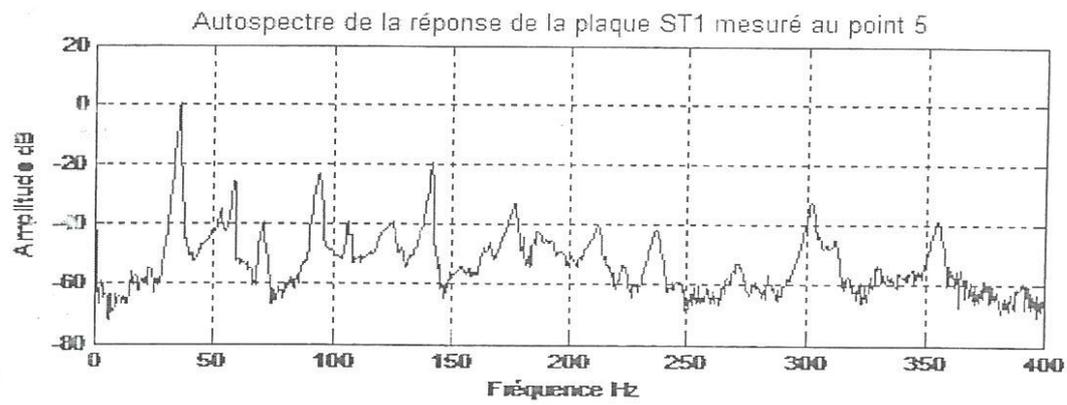
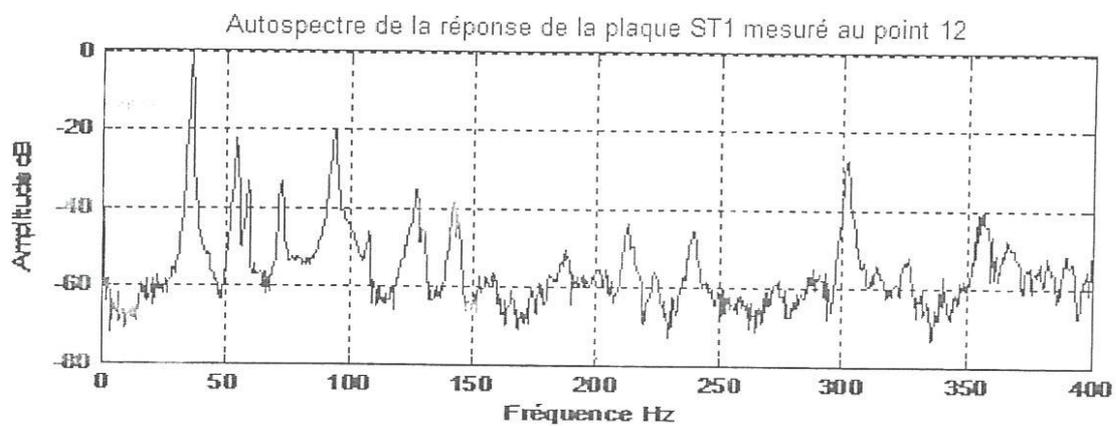
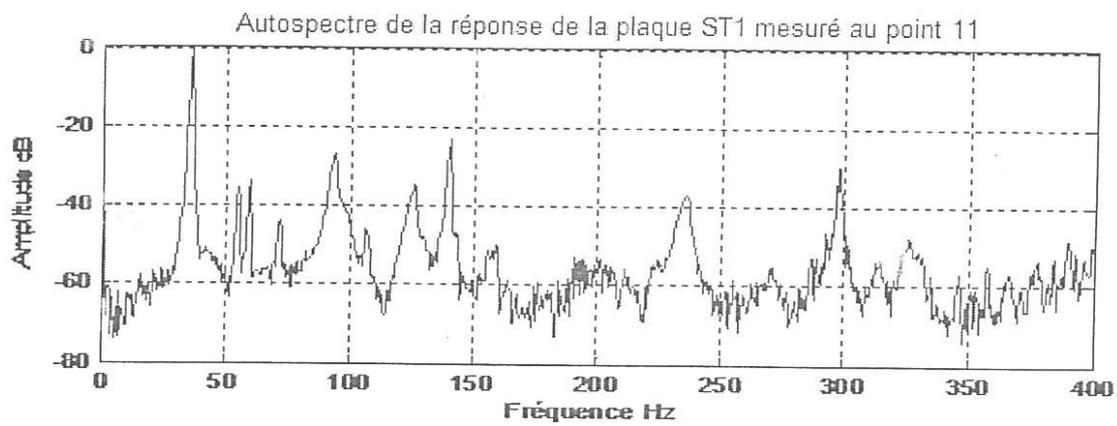
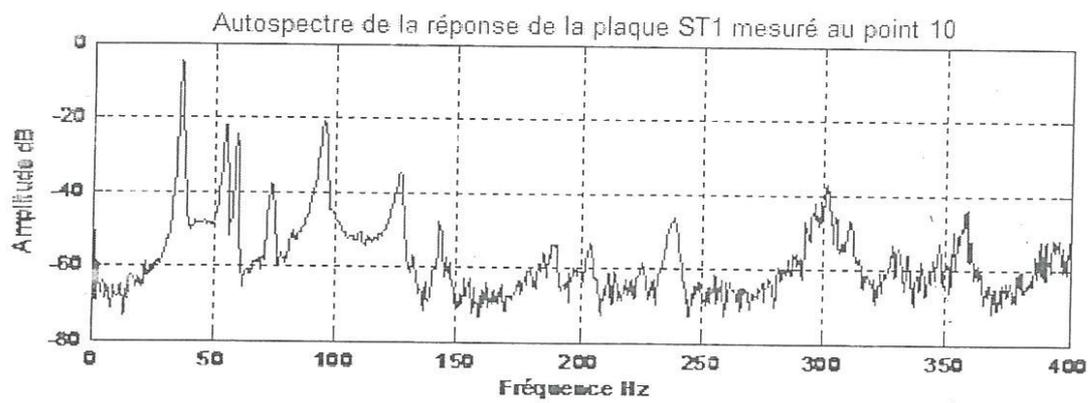
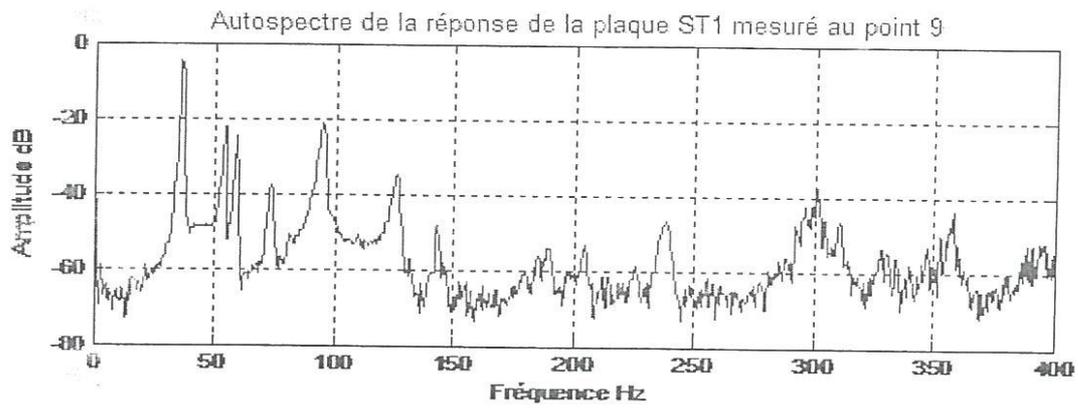


Figure 1.1 Autospectres de réponses de la plaque ST 1 mesurés aux 16 points pour la configuration ELLL.







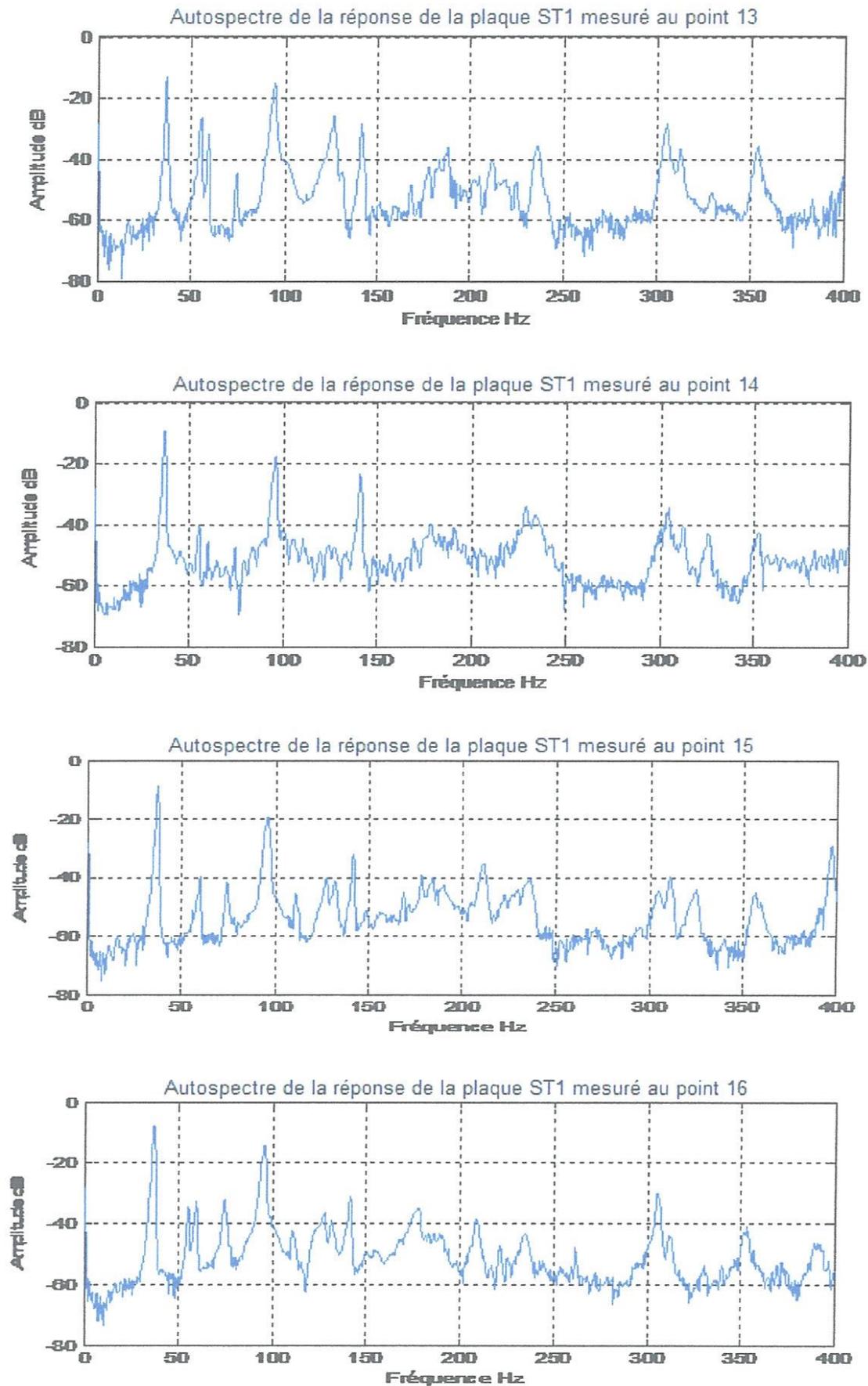
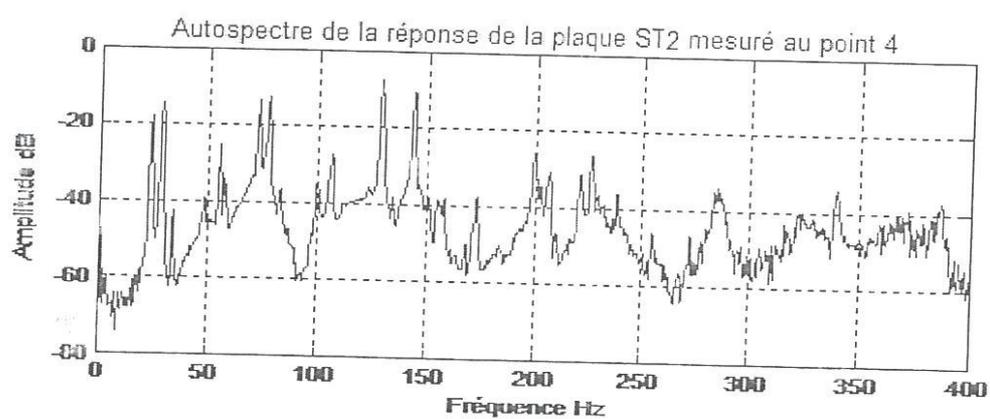
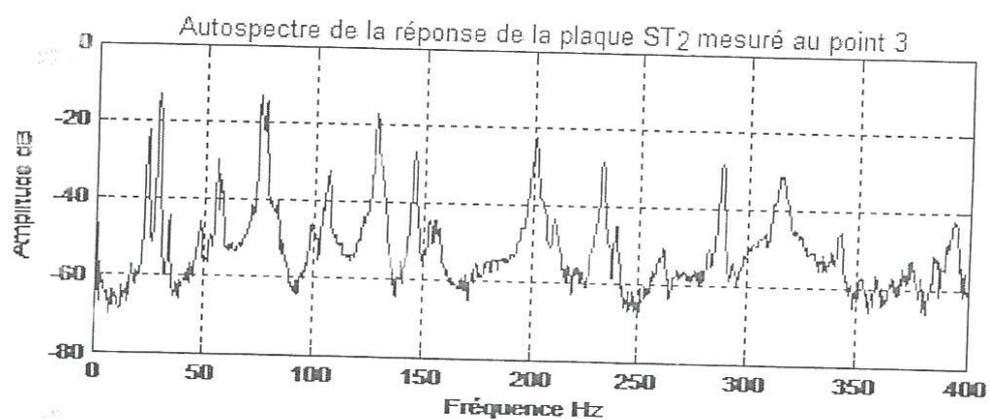
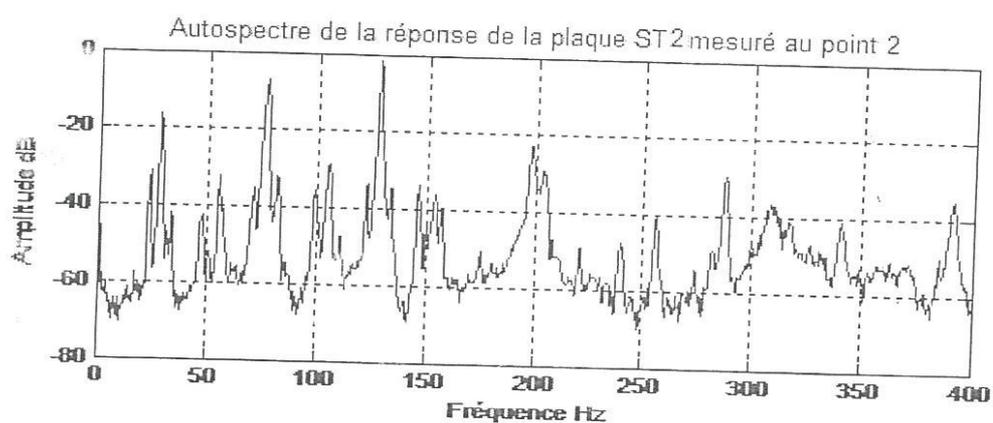
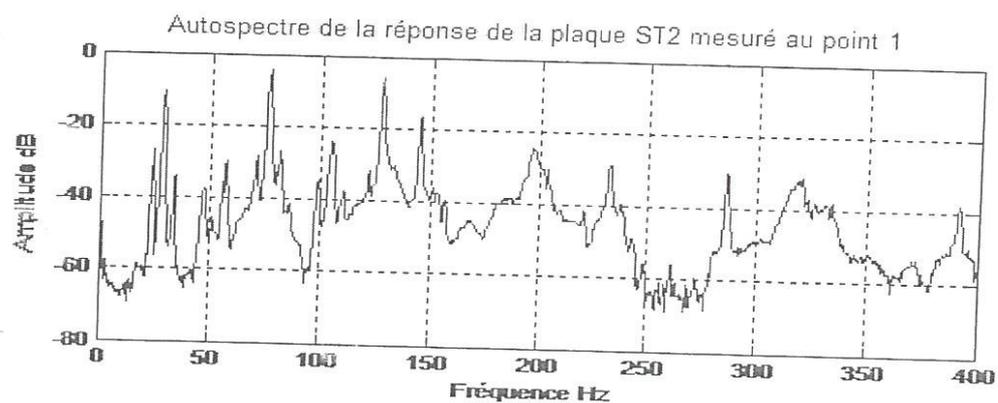
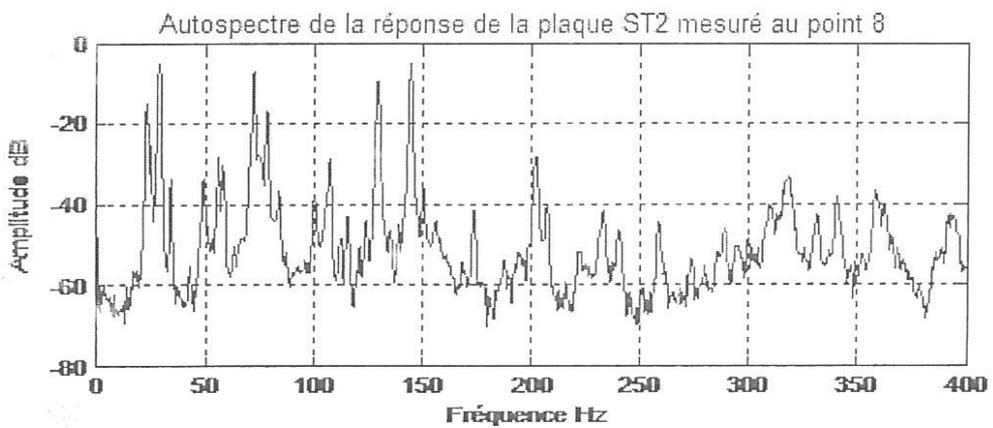
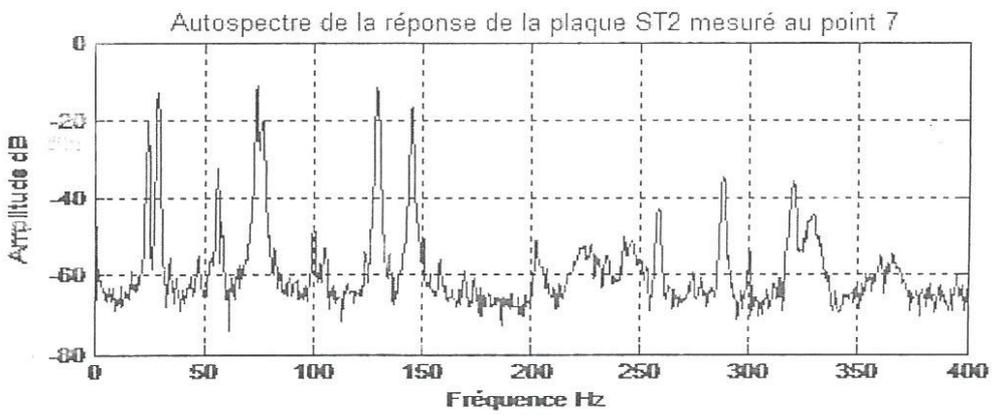
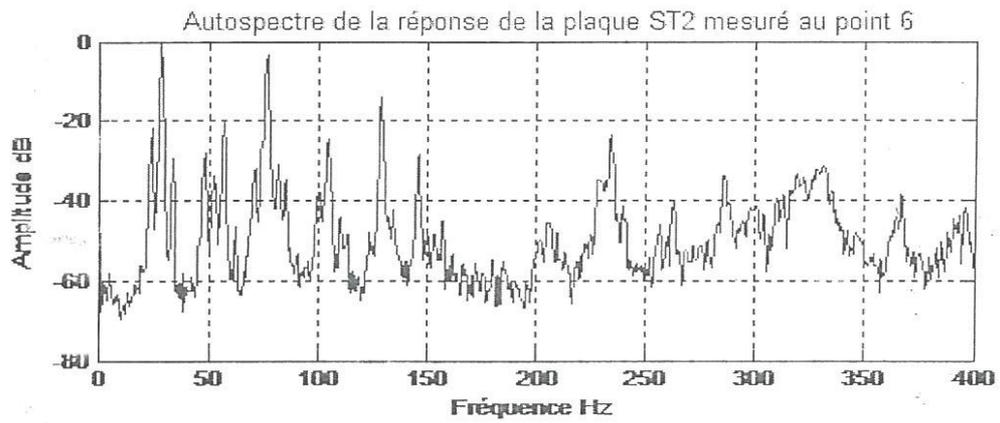
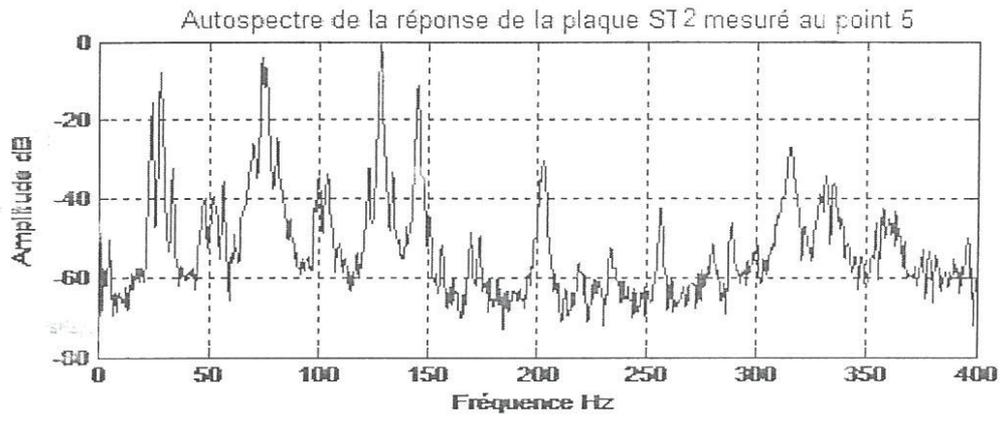
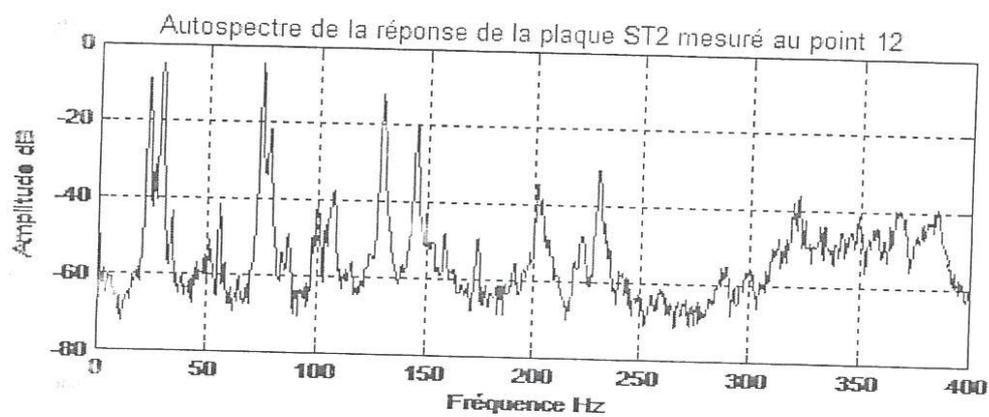
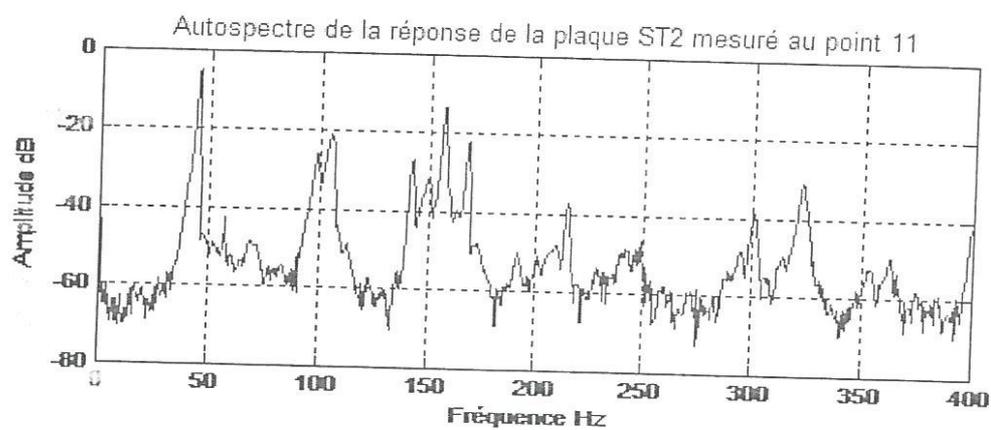
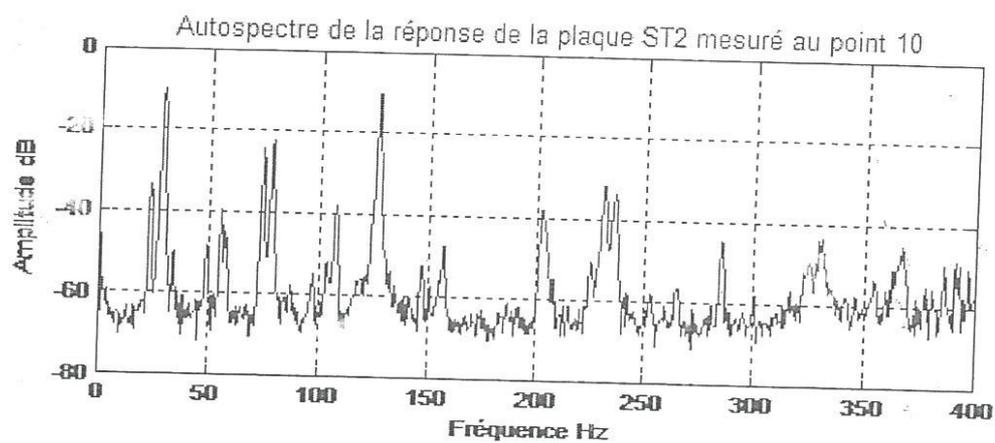
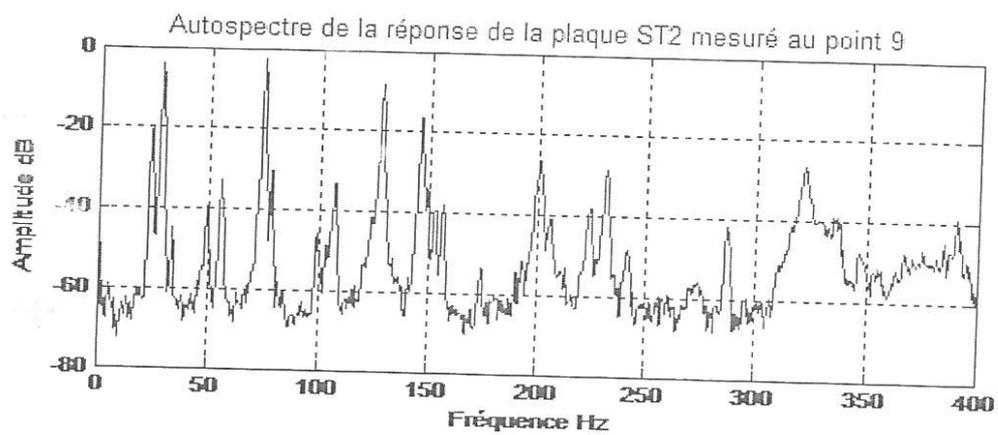


Figure 1.2 Autospectres de réponses de la plaque ST 1 mesurés aux 16 points pour la configuration ELEL.







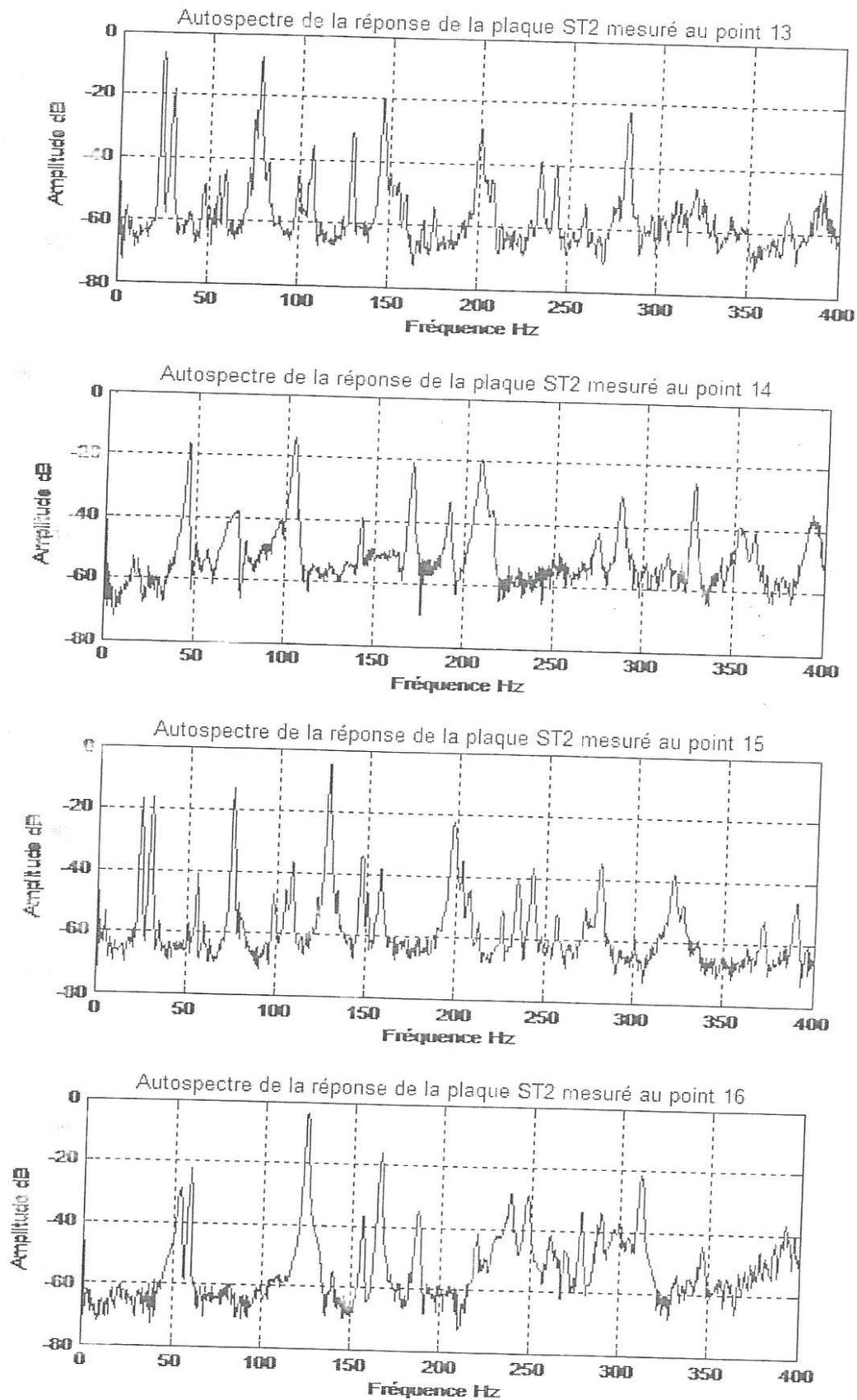
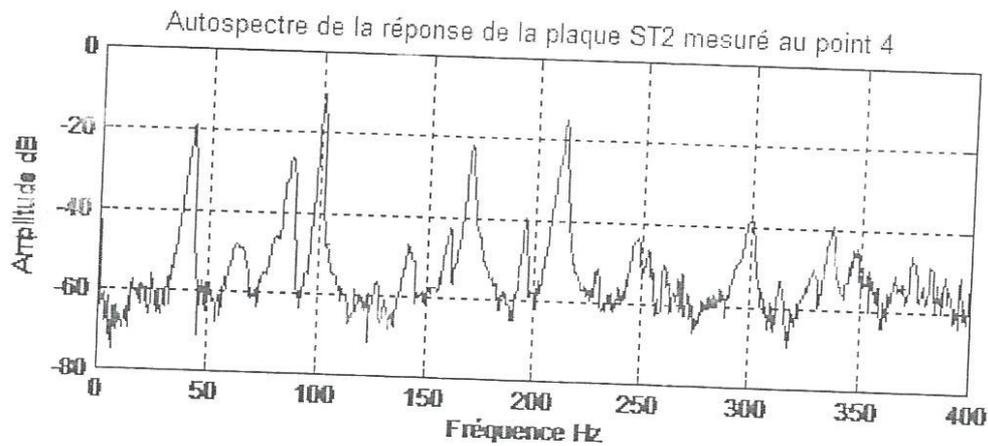
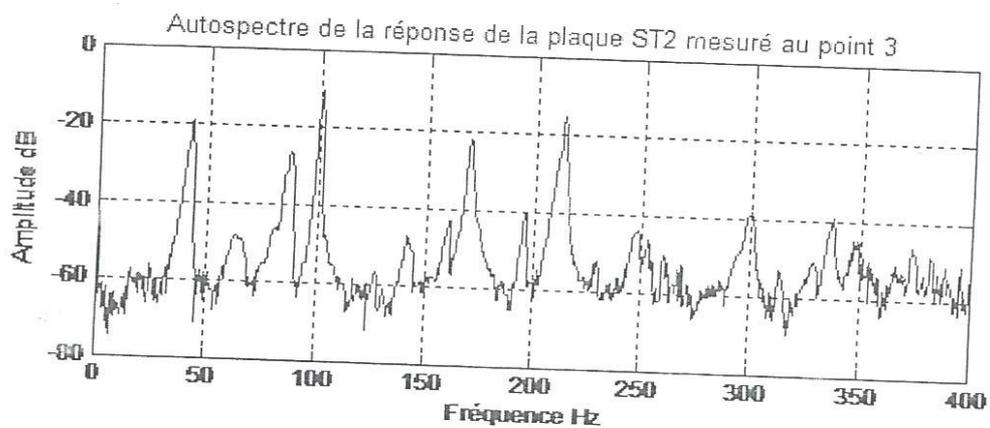
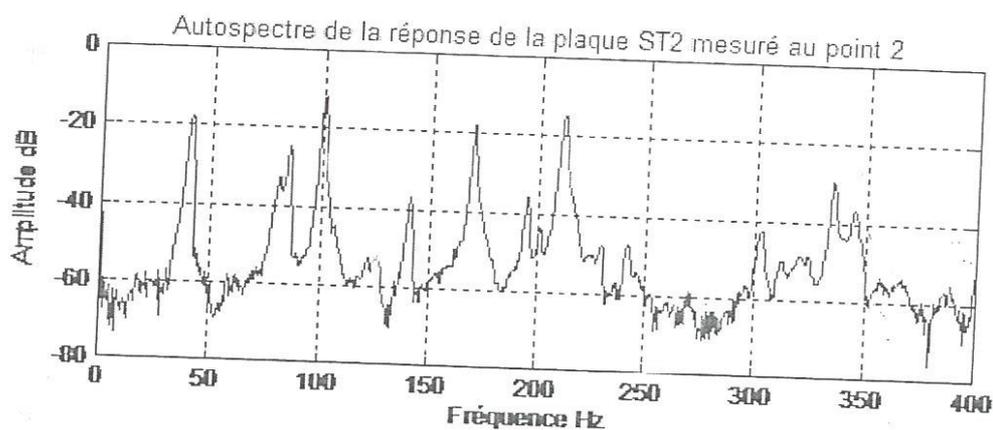
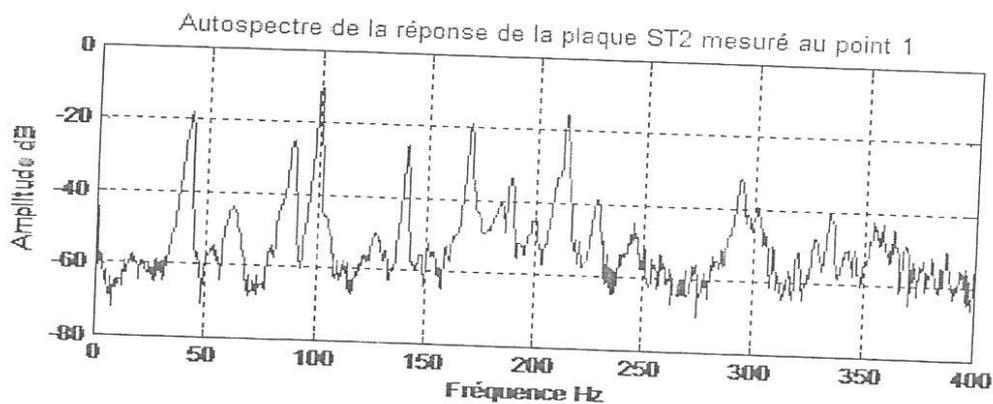
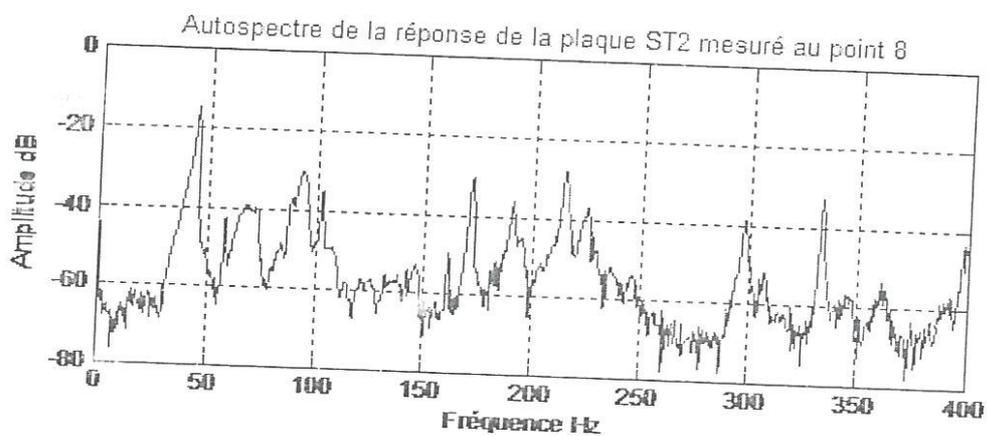
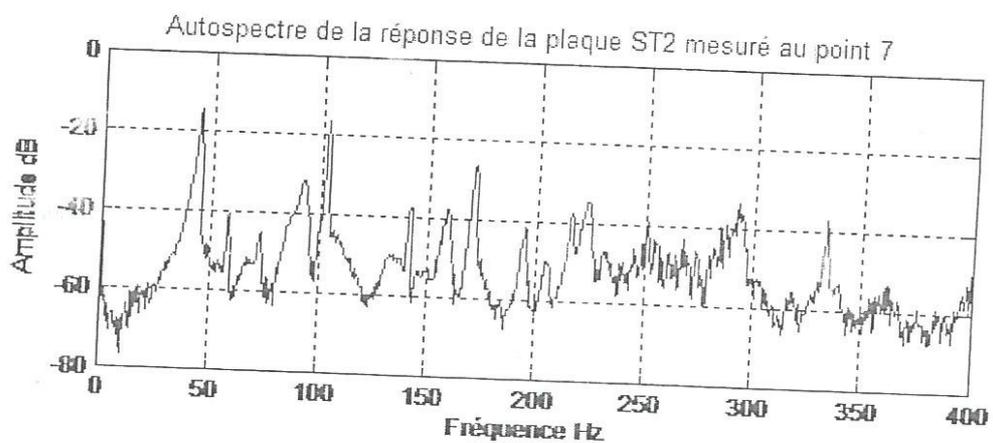
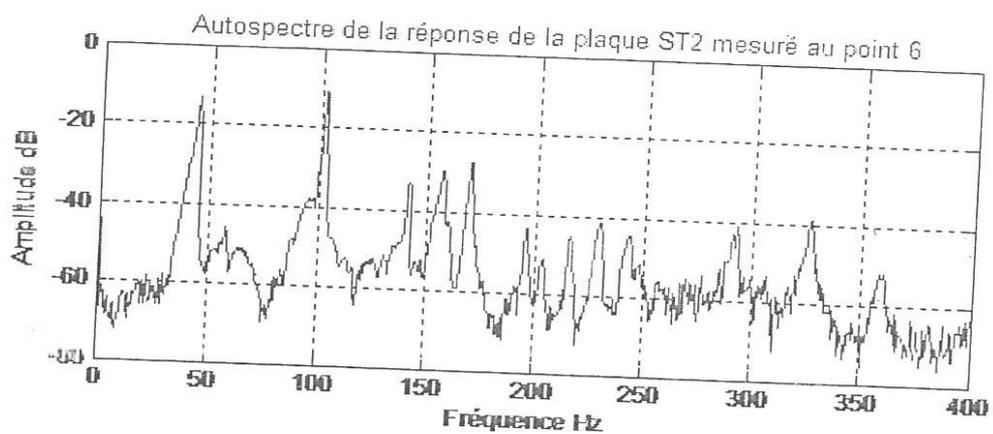
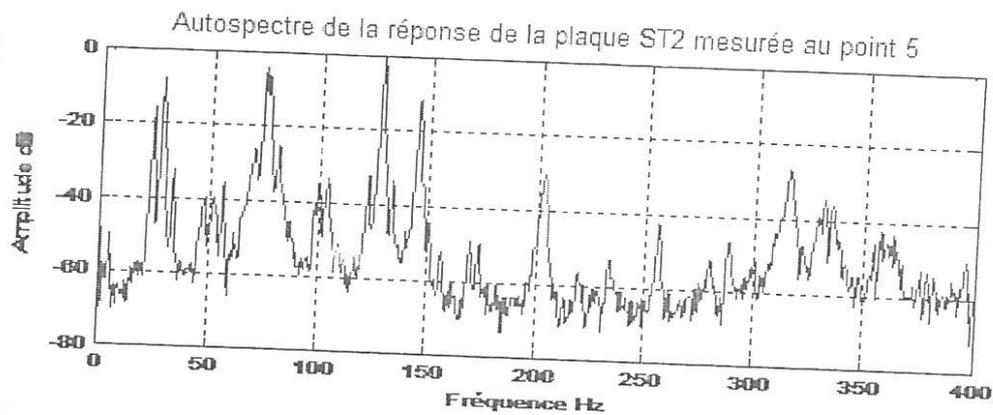
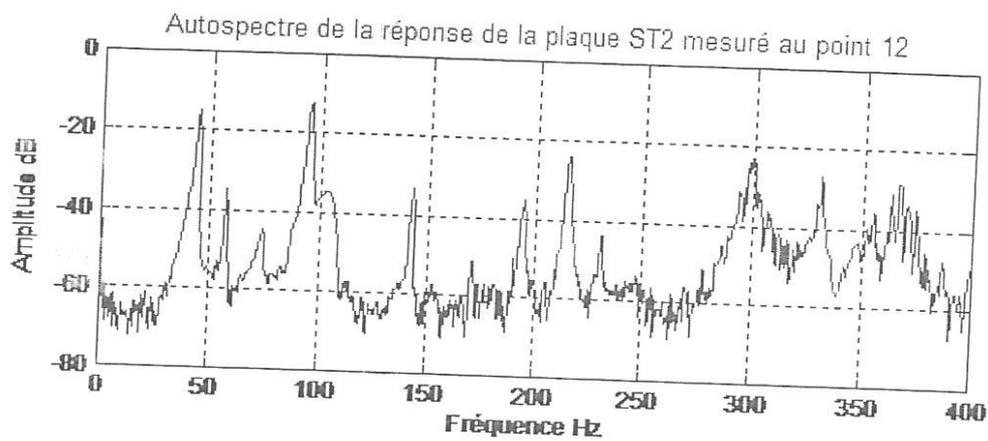
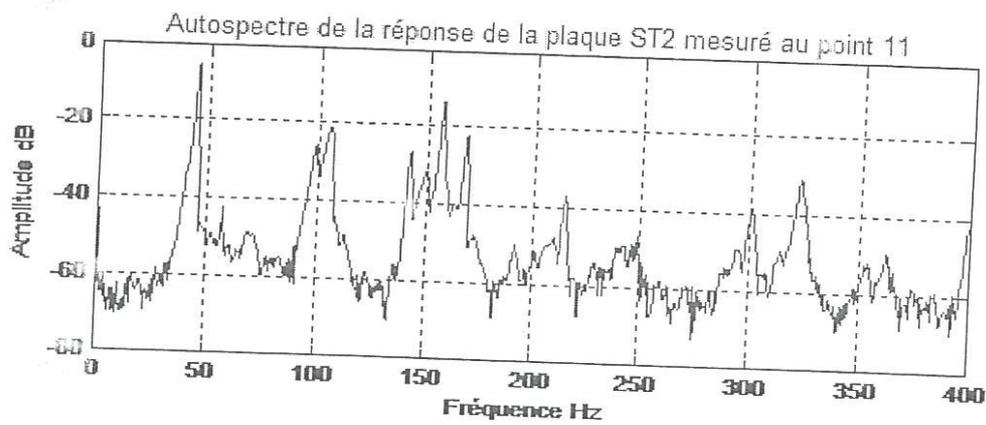
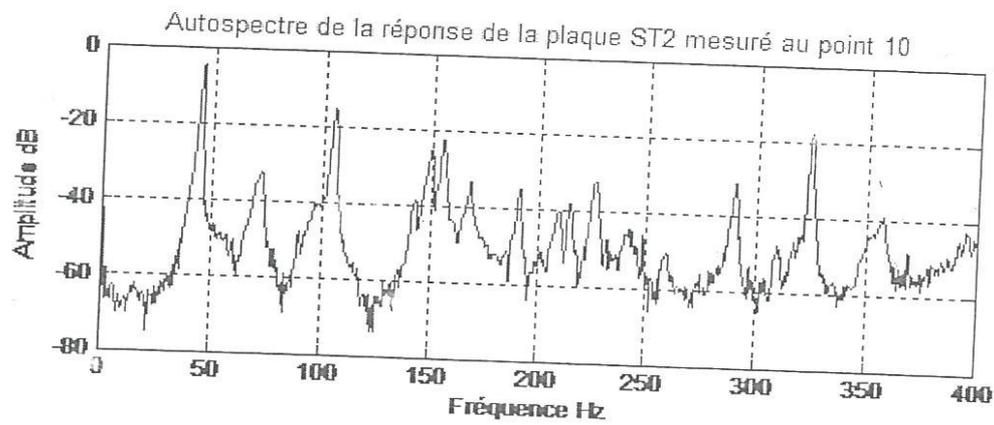
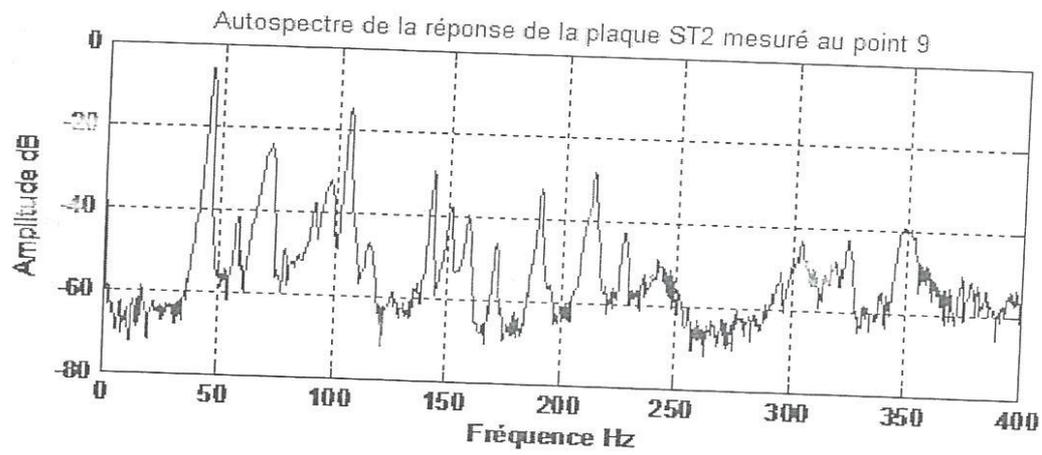


Figure 1.3 Autospectres de réponses de la plaque ST2 mesurés aux 16 points pour la configuration ELLL.







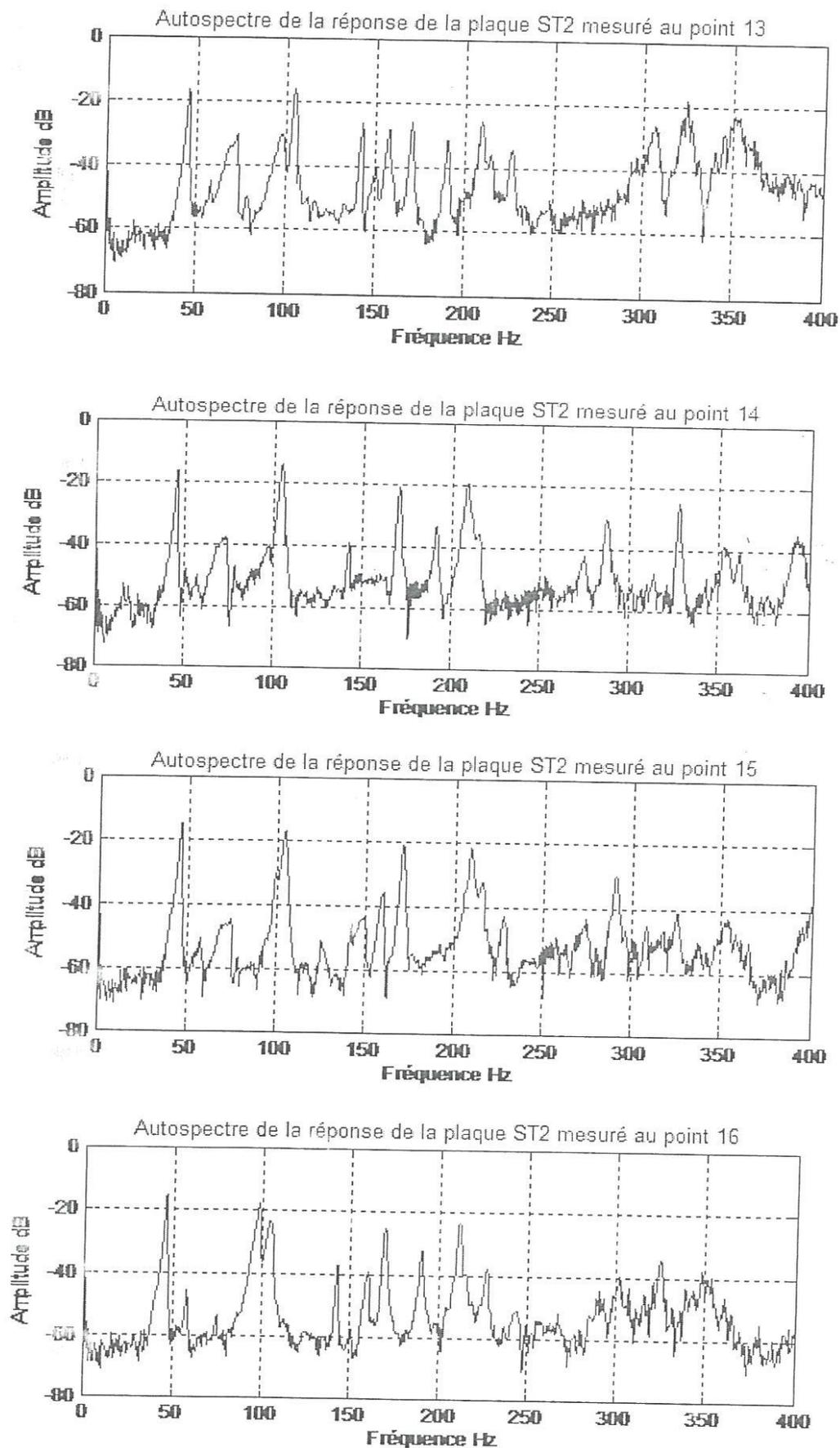
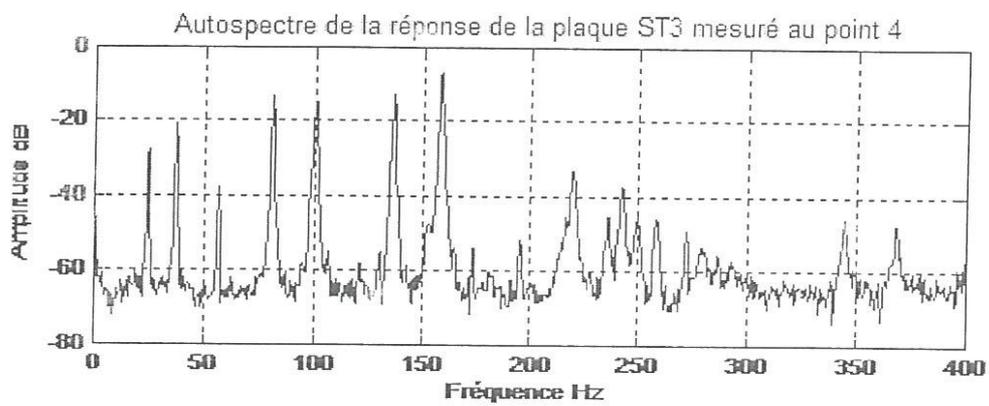
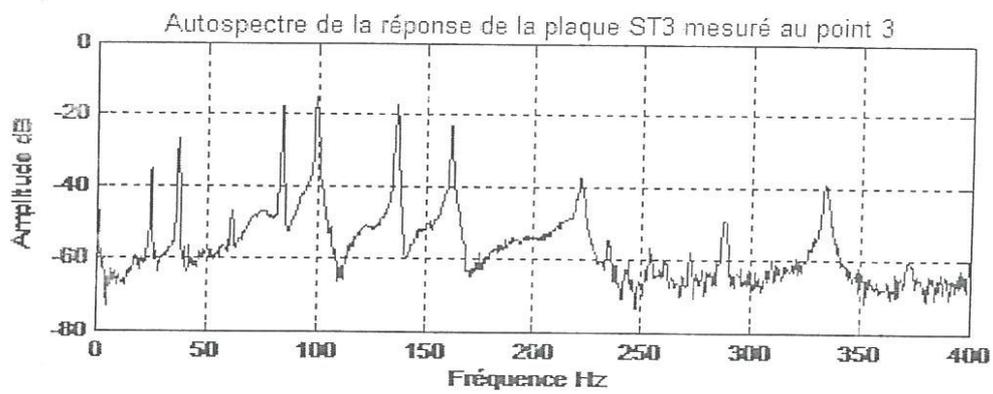
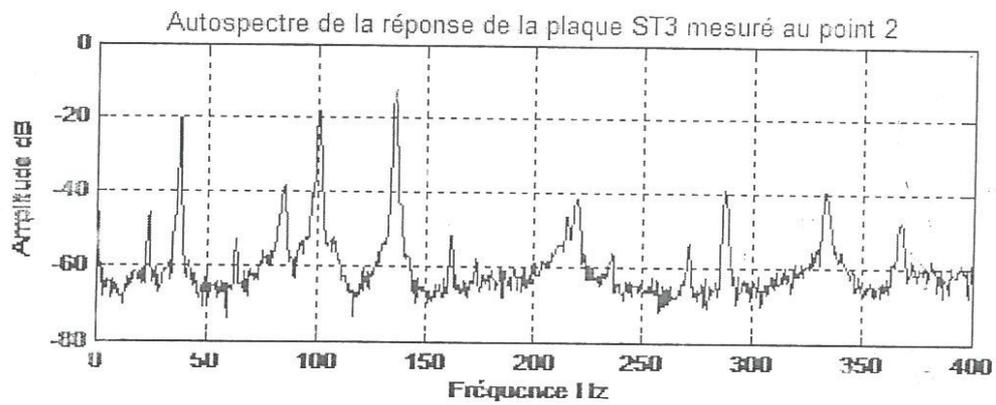
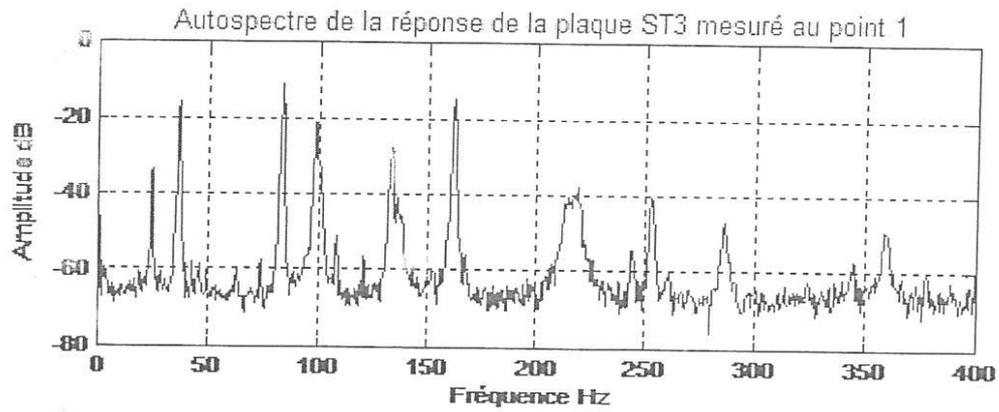
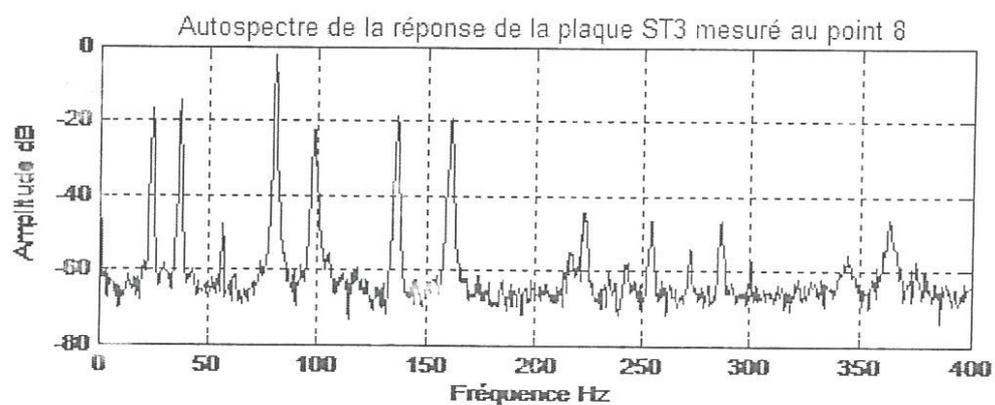
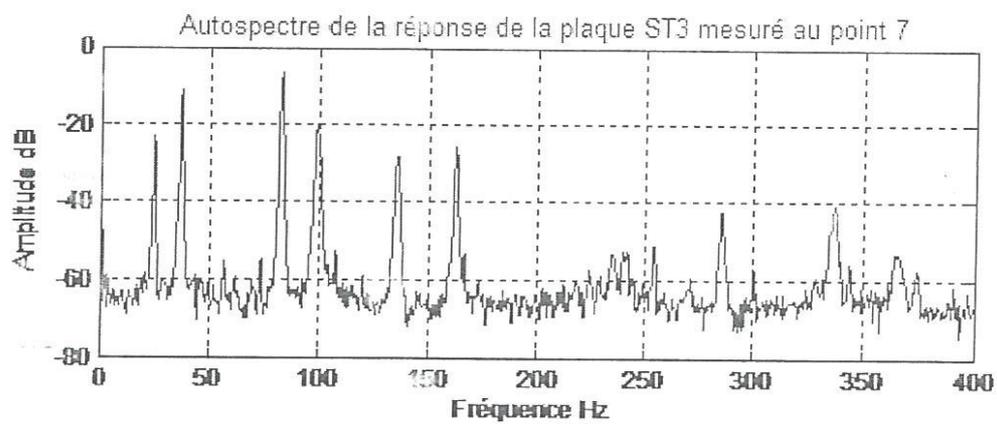
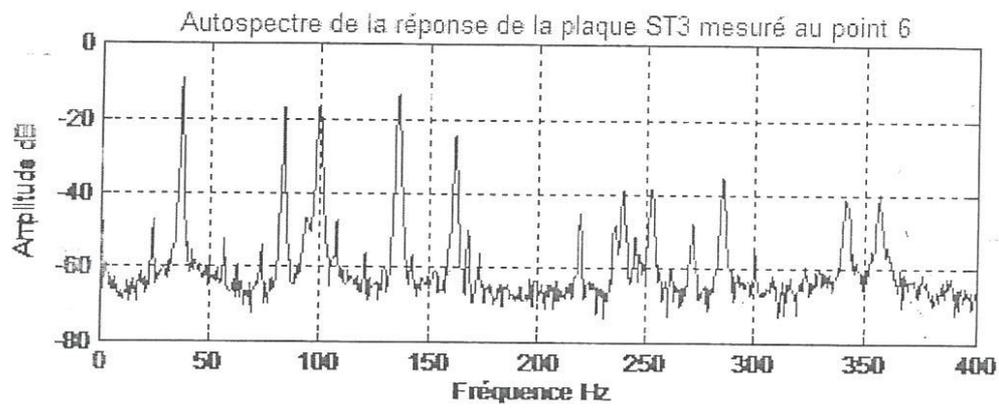
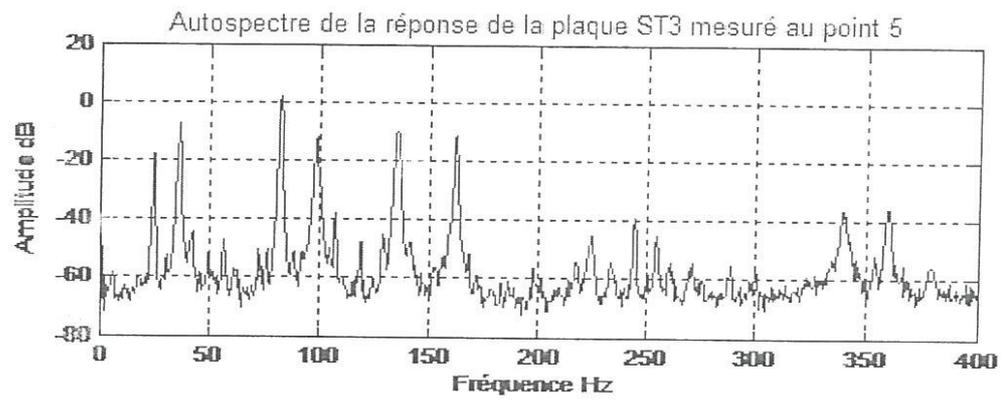
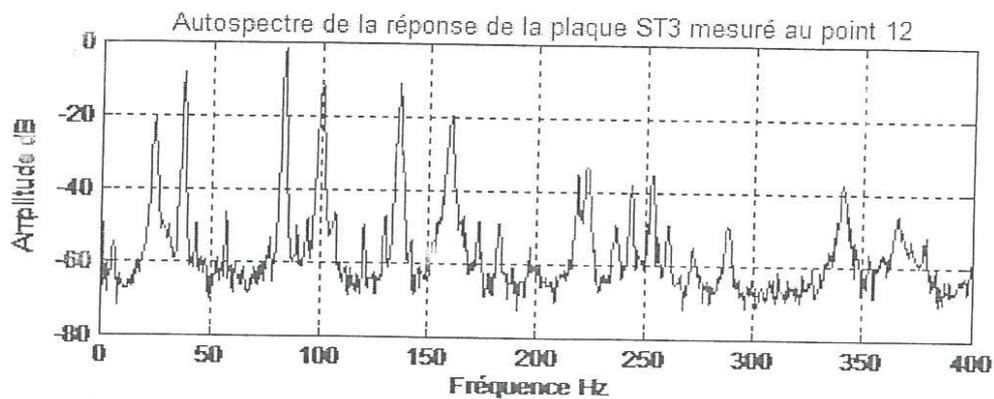
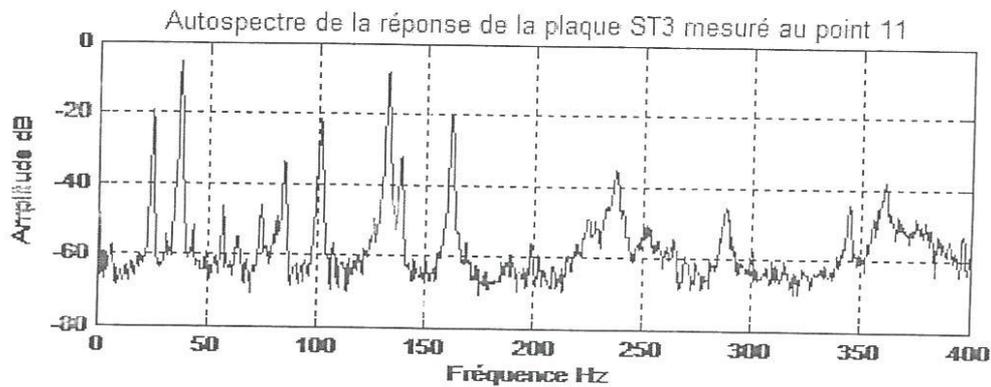
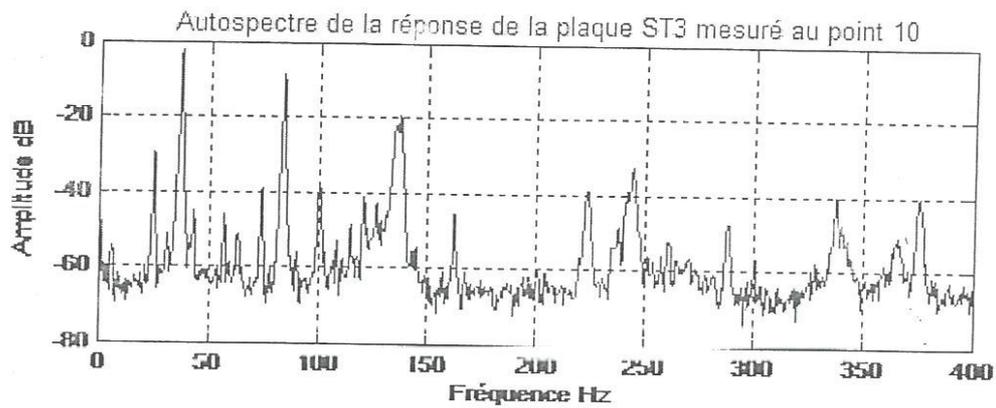
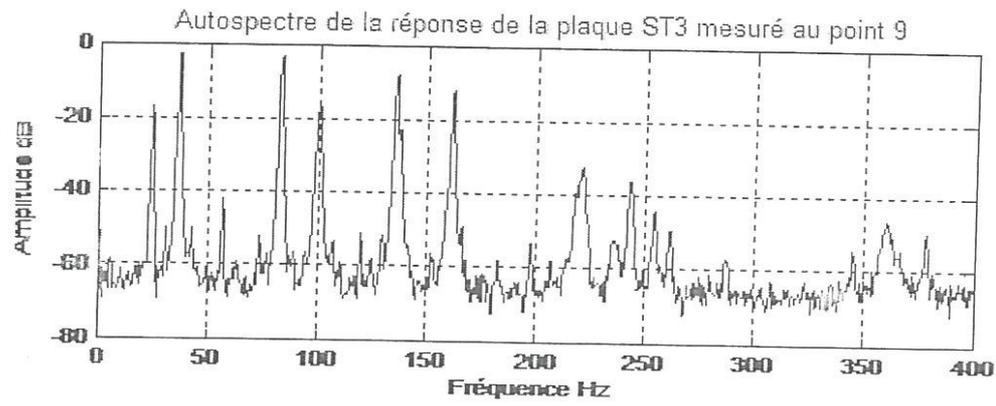


Figure 1.4 Autospectres de réponses de la plaque ST 2 mesurés aux 16 points pour la configuration ELEL.







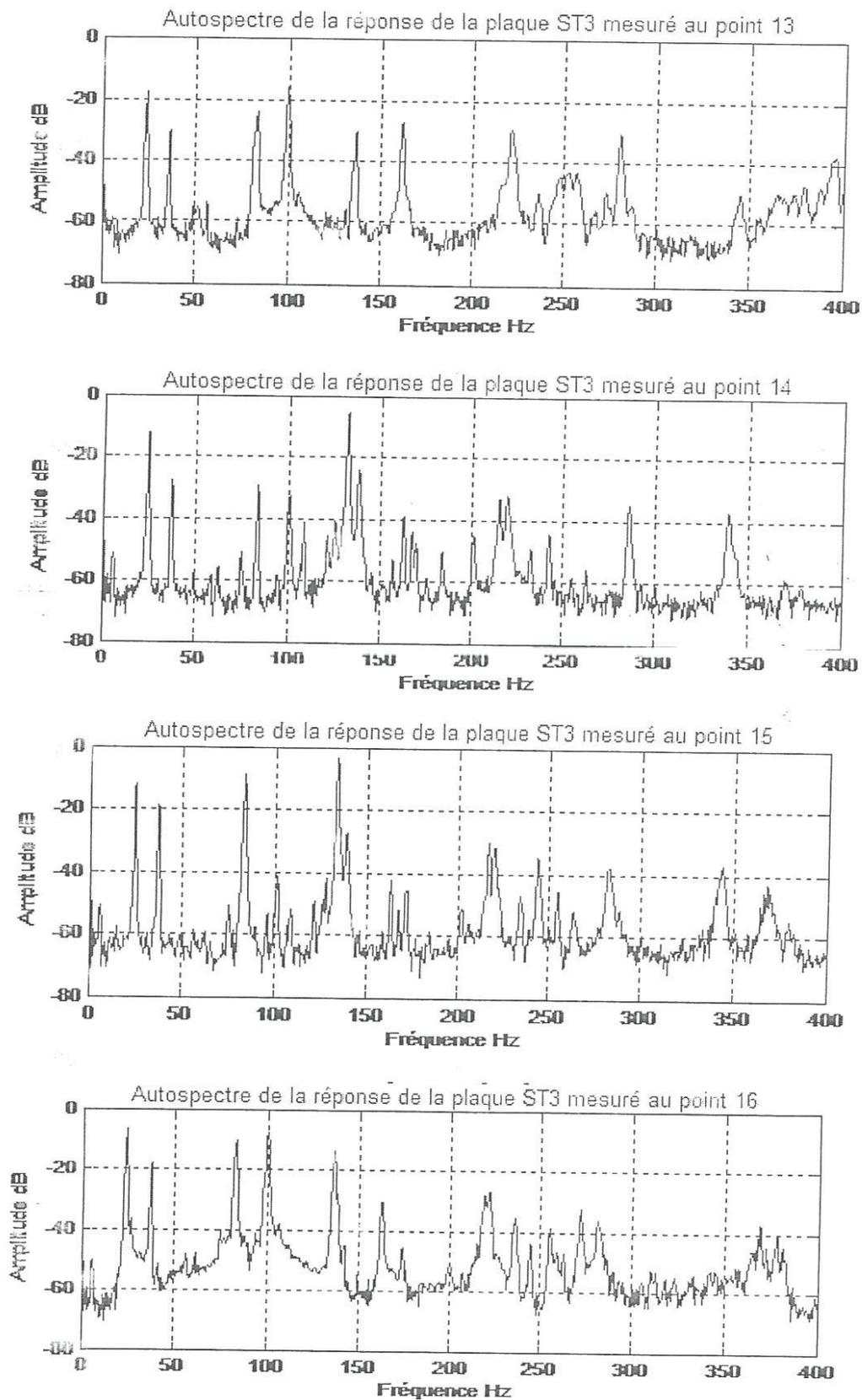
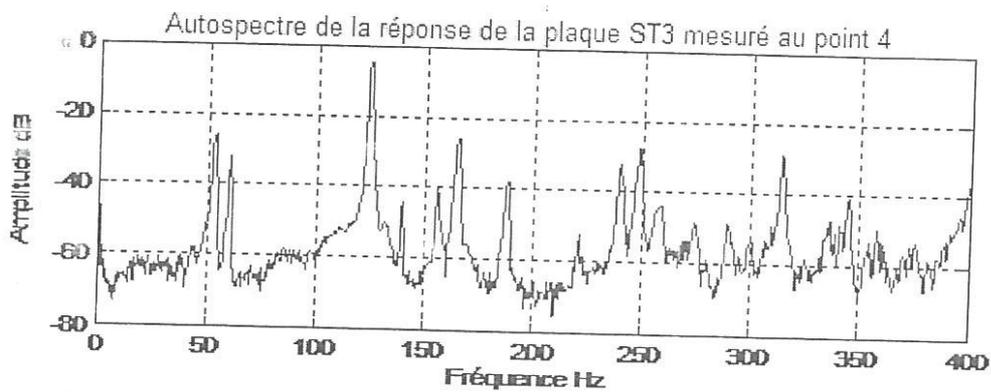
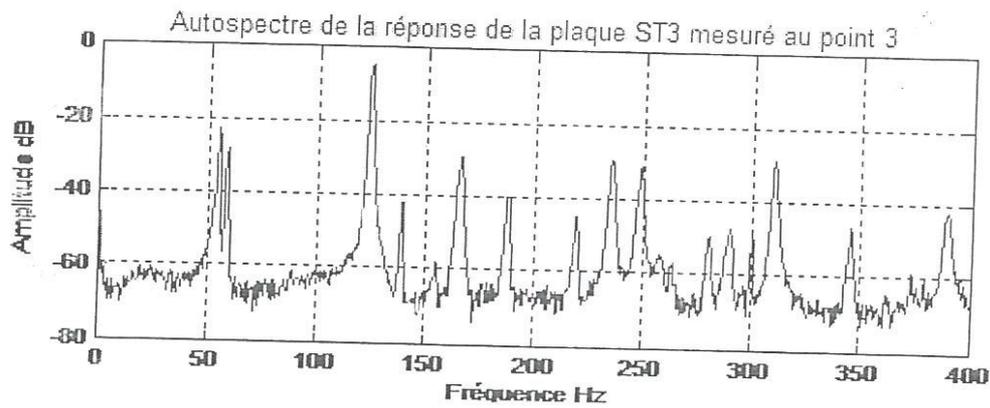
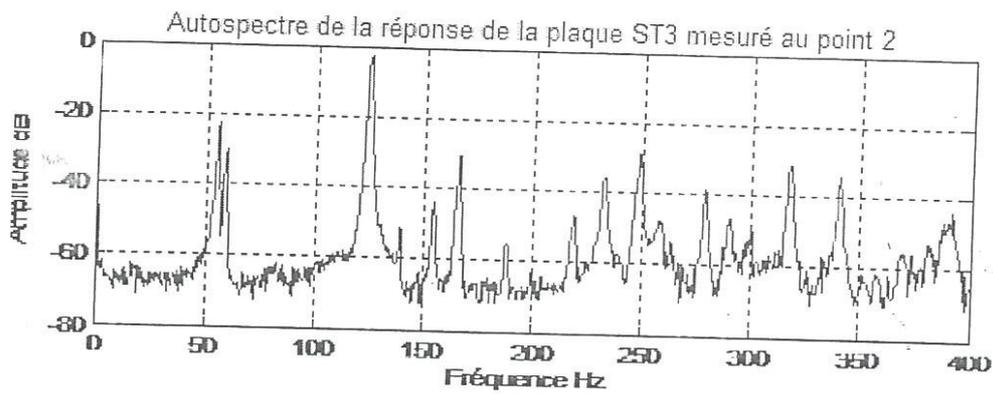
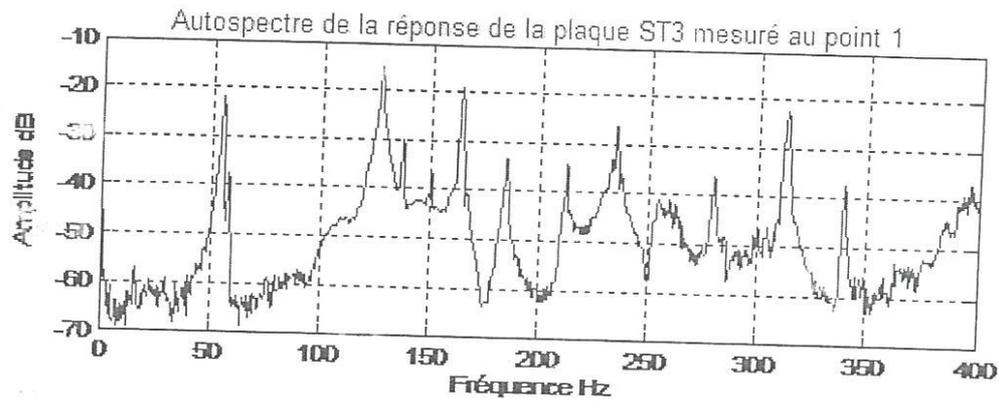
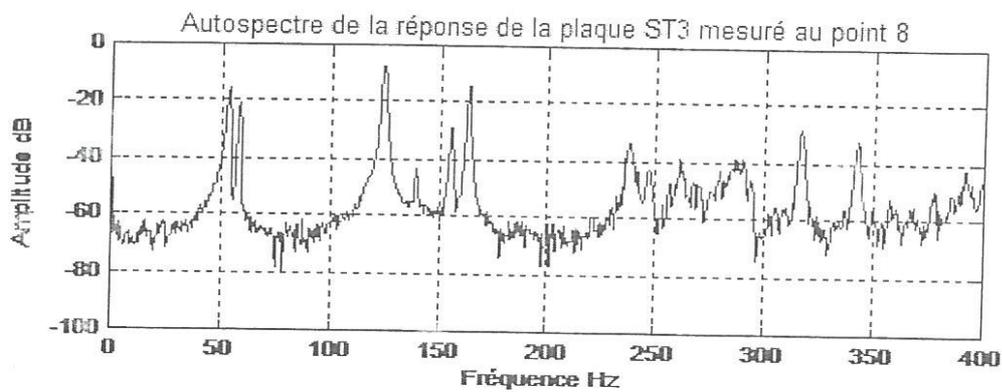
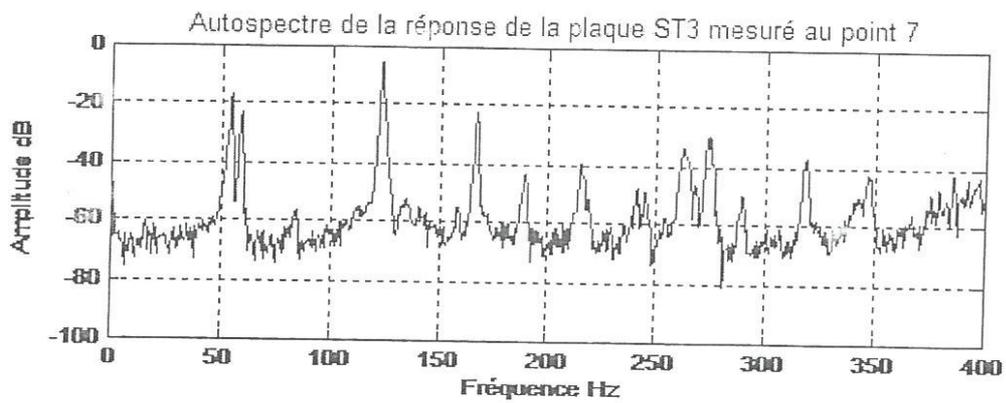
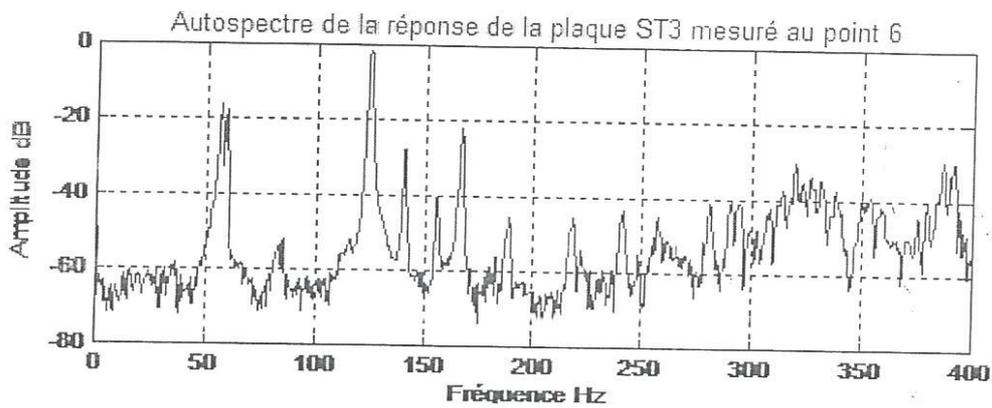
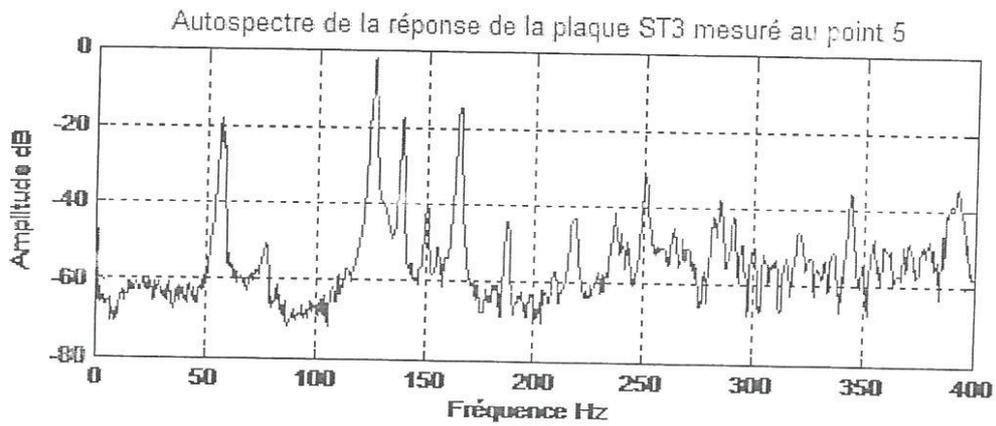
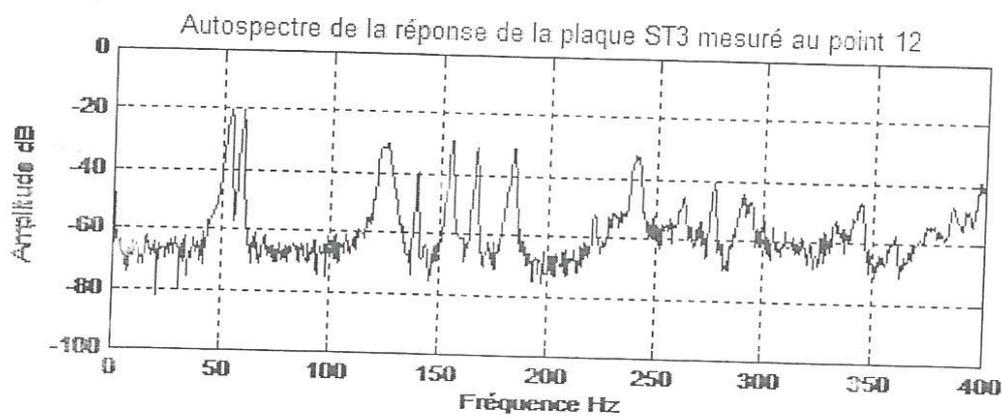
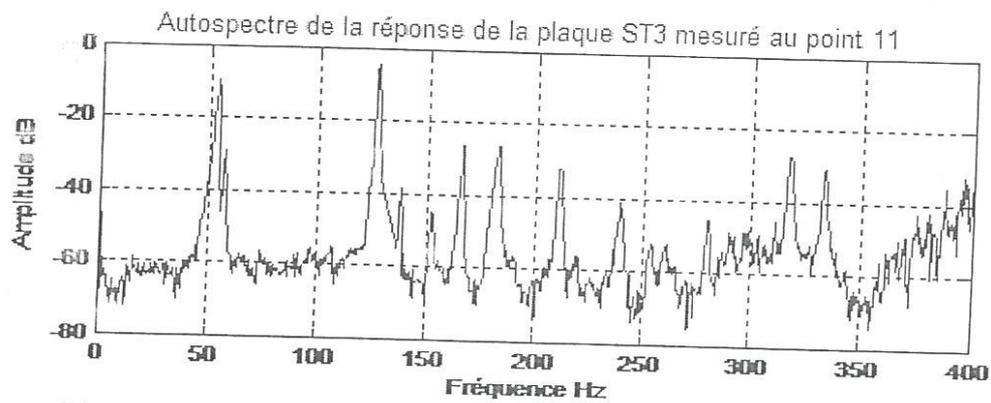
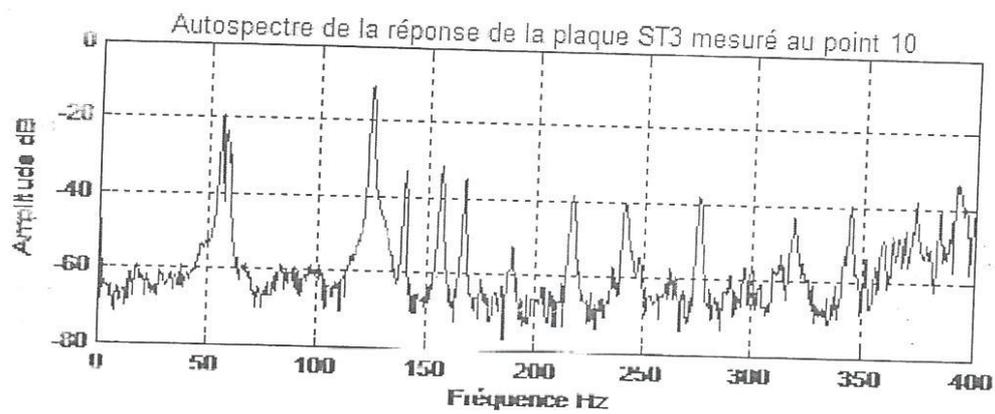
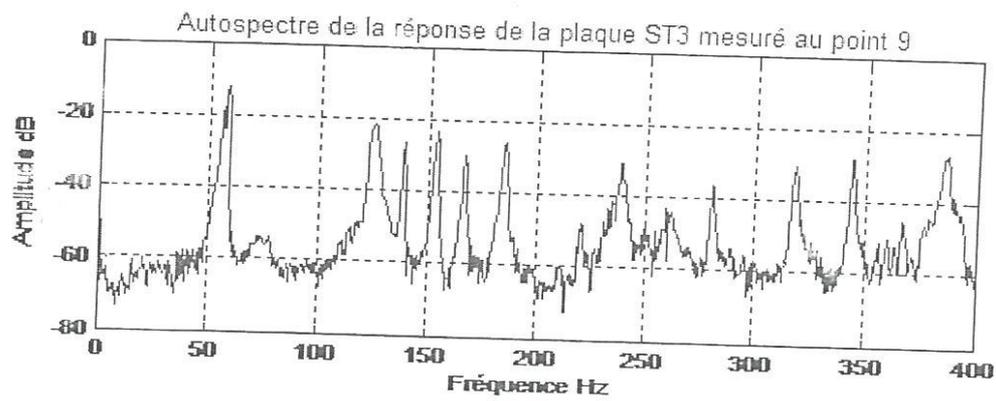


Figure 1.5 Autospectres de réponses de la plaque ST3 mesurés aux 16 points pour la configuration ELLL.







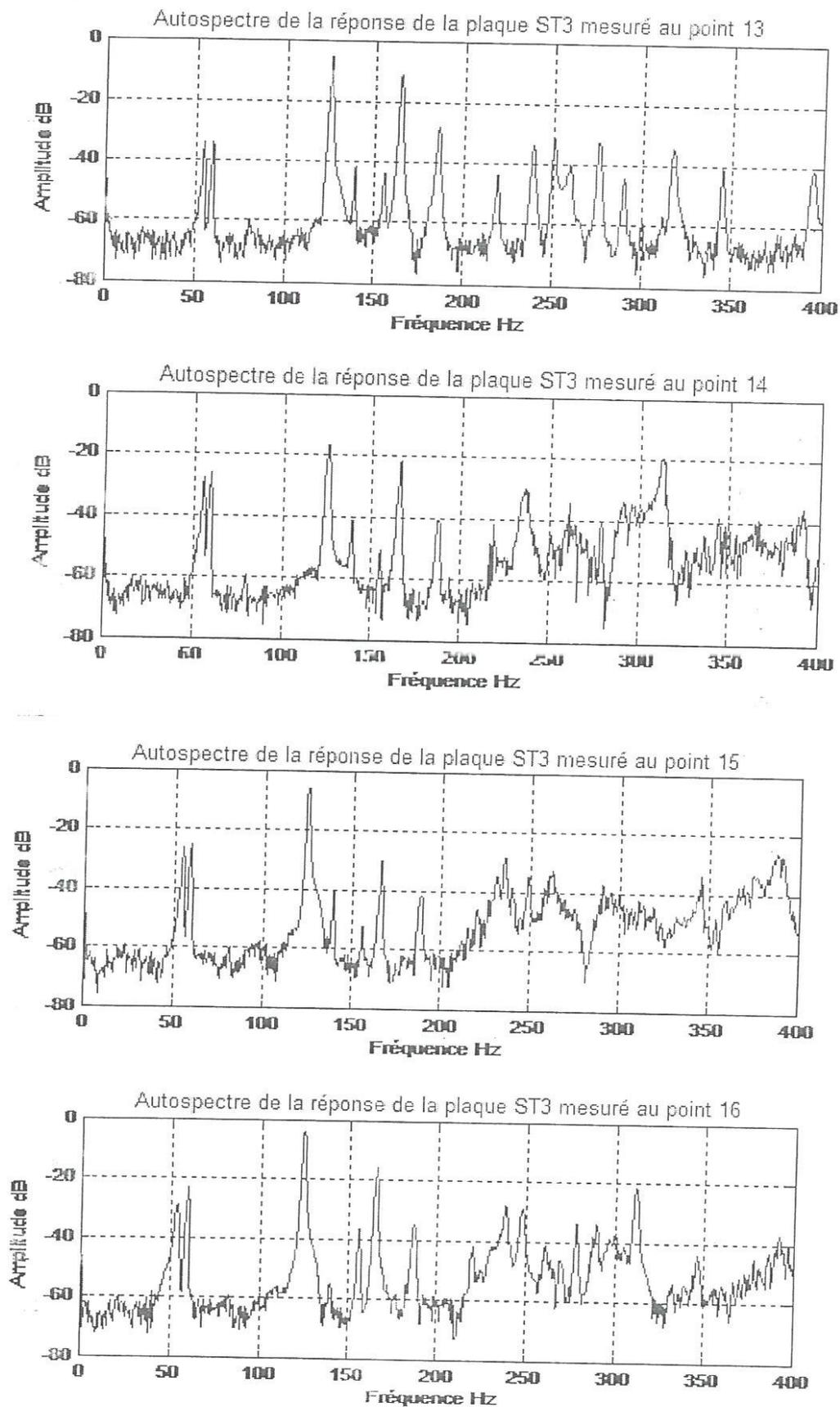


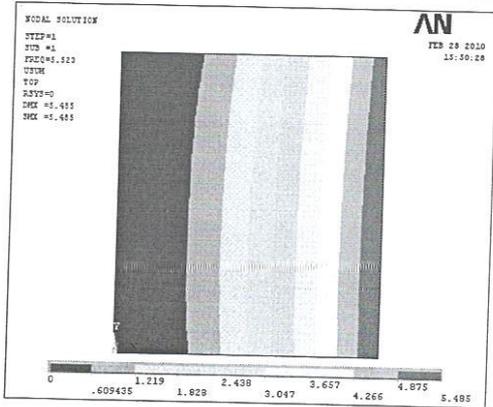
Figure 1.6 Autospectres de réponses de la plaque ST3 mesurés aux 16 points pour la configuration ELEL.

Annexe 2

Fréquences et déformées propres expérimentalement sous ME'ScopeVES et en calcul de structures sous ANSYS des plaques ST1, ST2, ST3 pour les configurations ELLL, ELEL.

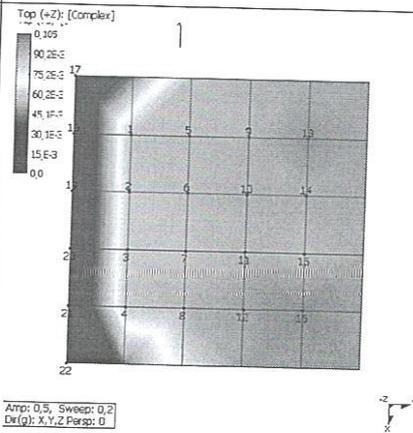
Plaque composite ST 2 ayant la séquence d'empilement $[(+65/-65)_2]_S$

Fréquences propres et déformées propres obtenus par simulation par ANSYS

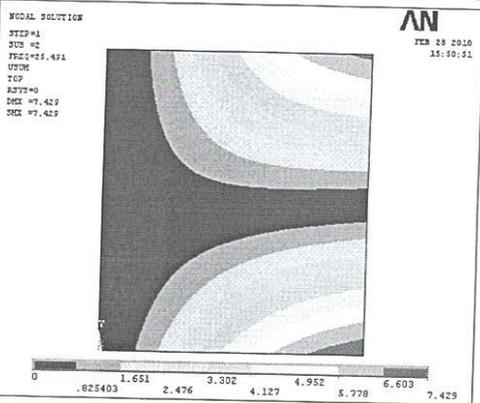


Mode (1,1) $f = 5,523$ Hz

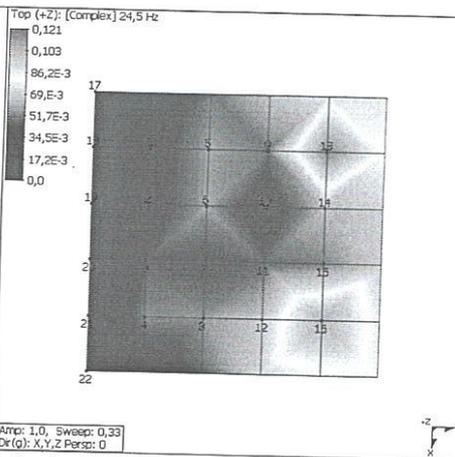
Fréquences propres et déformées propres expérimentales obtenus par ME' Scope VES



Mode (1,1) $f = 5,29$ Hz



Mode (1,2) $f = 25,491$ Hz



Mode (1,2) $f = 23,7$ Hz

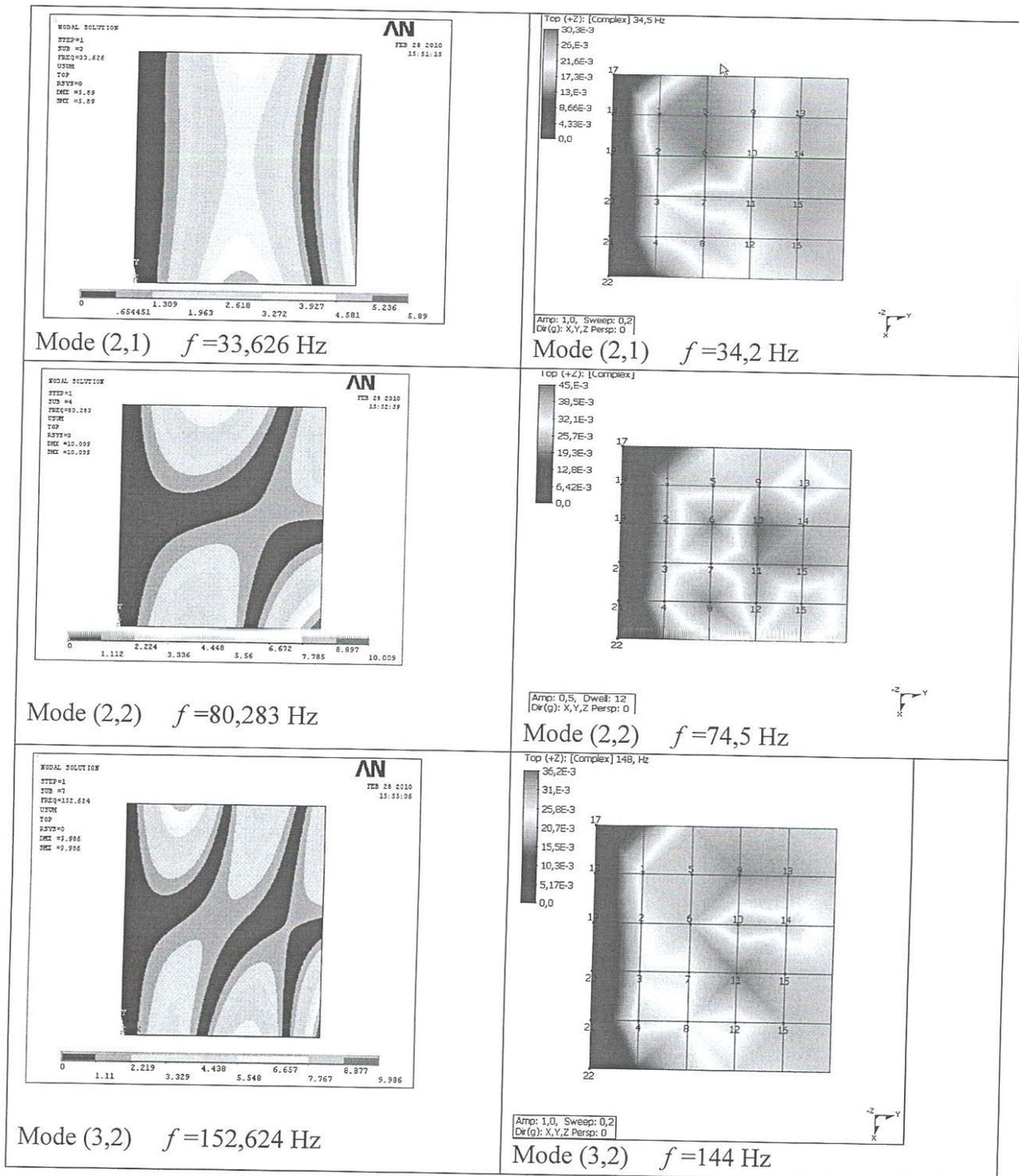
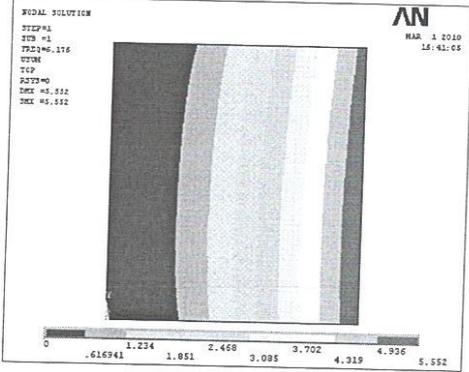


Figure 2.1 Fréquences et déformées propres des modes de flexion de la plaque ST2 $[(+65/-65)_2]_S$ en configuration ELLL.

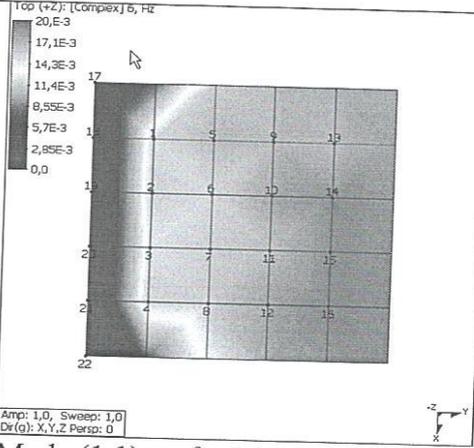
Plaque composite ST3 ayant la séquence d'empilement $[(+60/-60)_2]_S$

Fréquences propres et déformées propres
obtenus par simulation par ANSYS

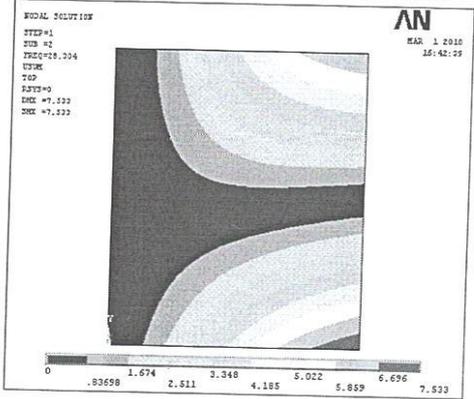
Fréquences propres et déformées propres
expérimentales obtenus par ME' Scope VES



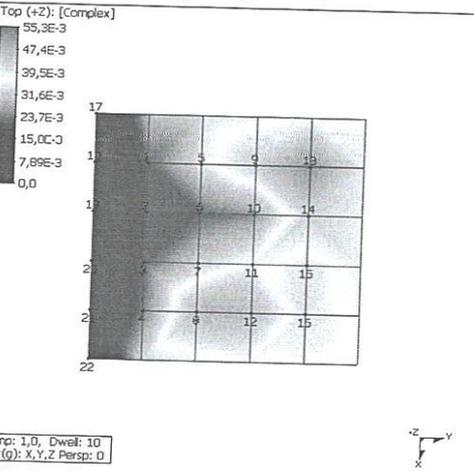
Mode (1,1) $f=6,176$ Hz



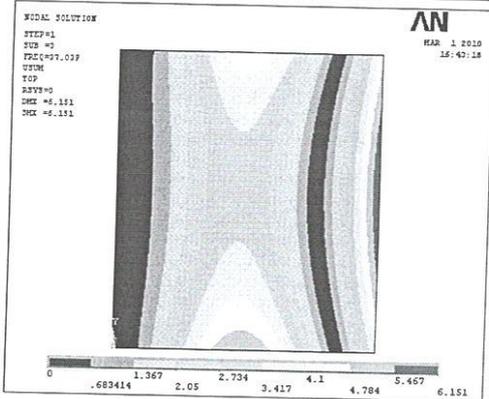
Mode (1,1) $f=5,99$ Hz



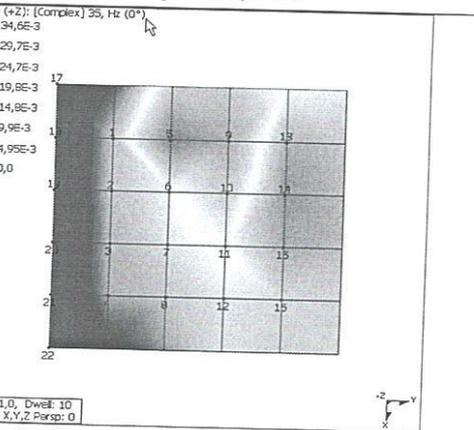
Mode (1,2) $f=28,345$ Hz



Mode (1,2) $f=24,7$ Hz



Mode (2,1) $f=37,039$ Hz



Mode (2,1) $f=36,8$ Hz

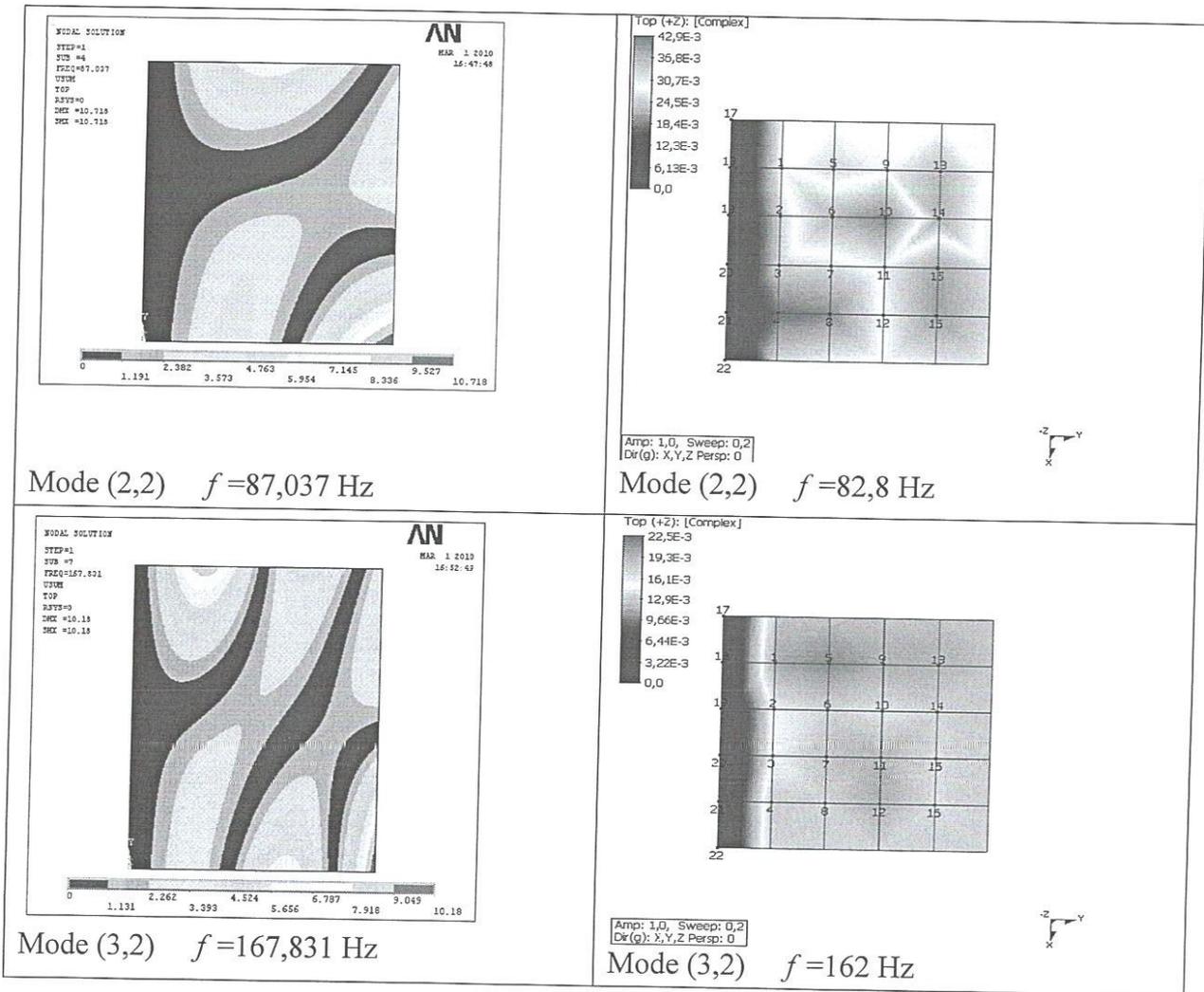
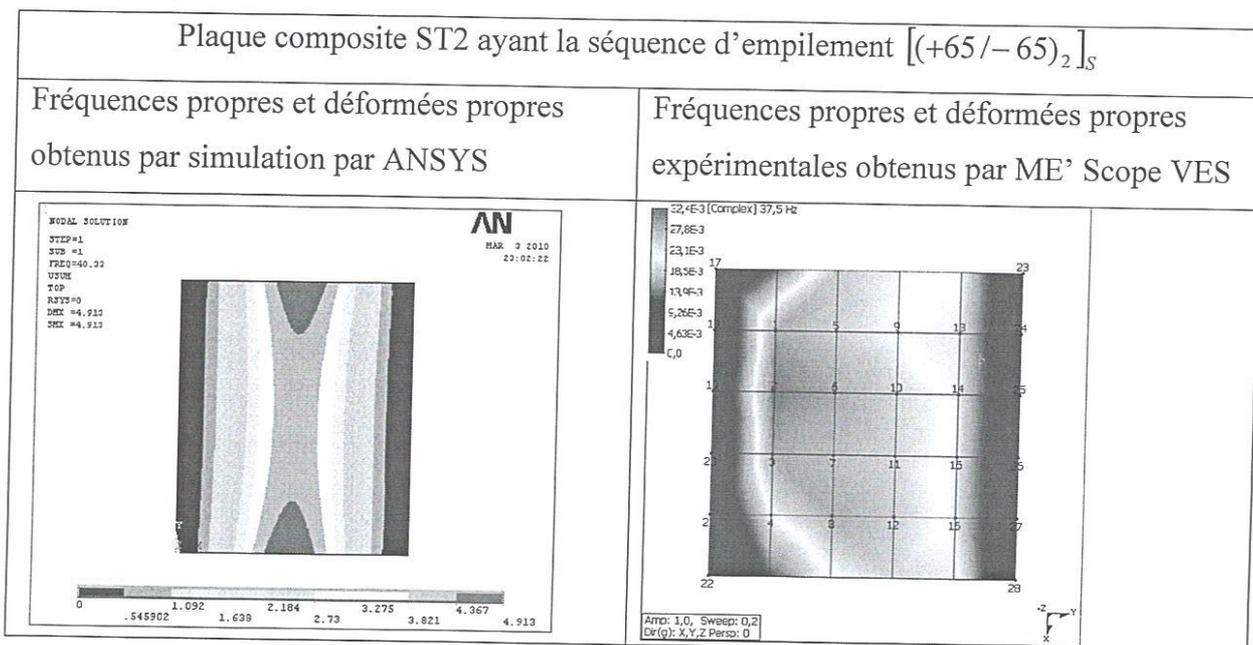
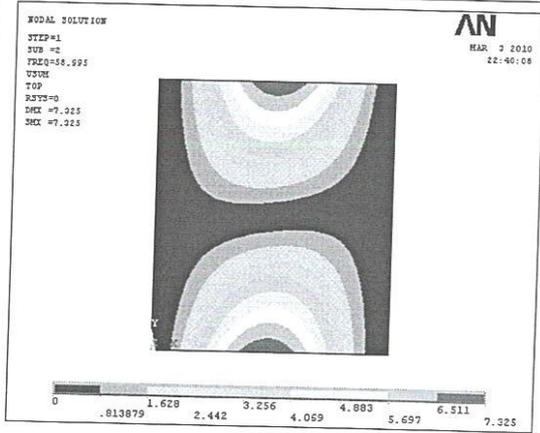


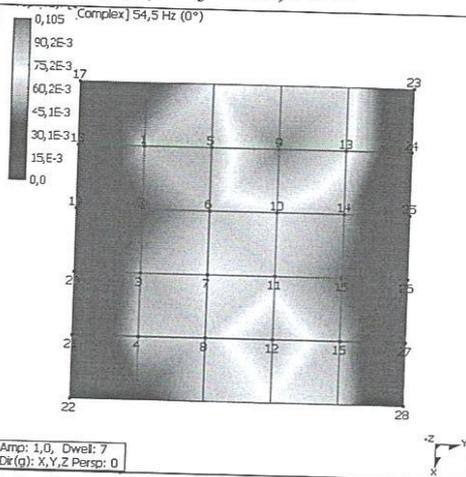
Figure 2.2 Fréquences et déformées propres des modes de flexion de la plaque ST3 $[(+60/-60)_2]_S$ en configuration ELLL.



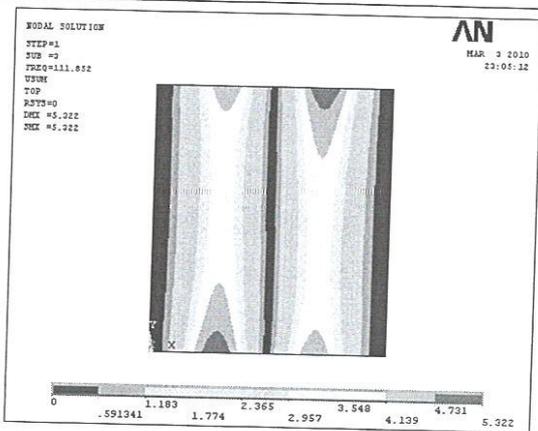
Mode (1,1) $f=40,33$ Hz



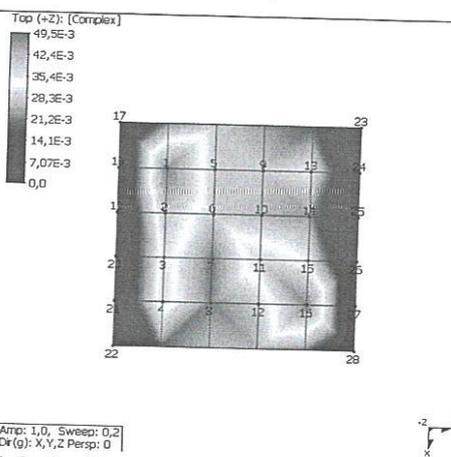
Mode (1,1) $f=41,8$ Hz



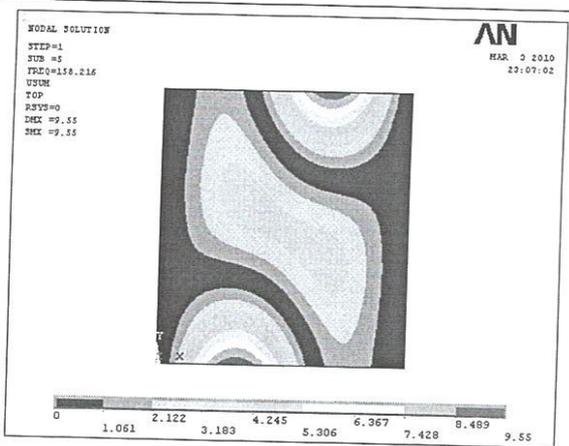
Mode (1,2) $f=66,461$ Hz



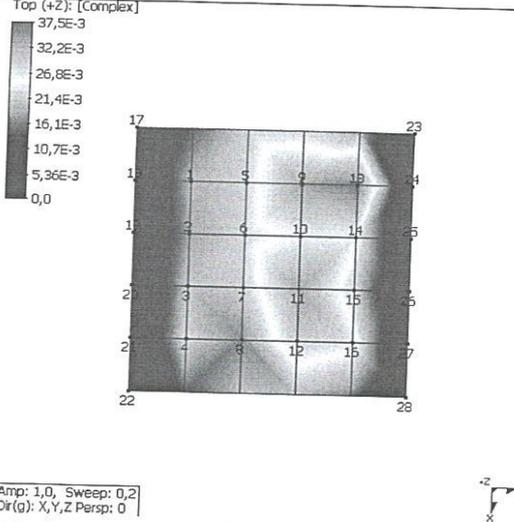
Mode (1,2) $f=73,1$ Hz



Mode (2,2) $f=111,852$ Hz



Mode (2,2) $f=105$ Hz



Mode (1,3) $f=158,216$ Hz

Mode (1,3) $f=157,216$ Hz

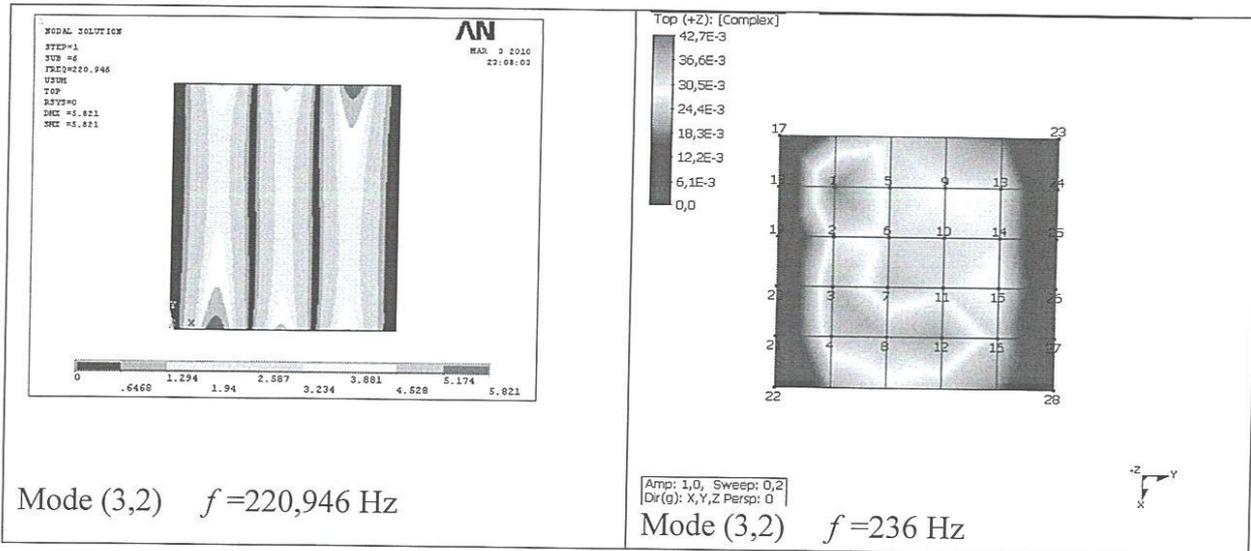
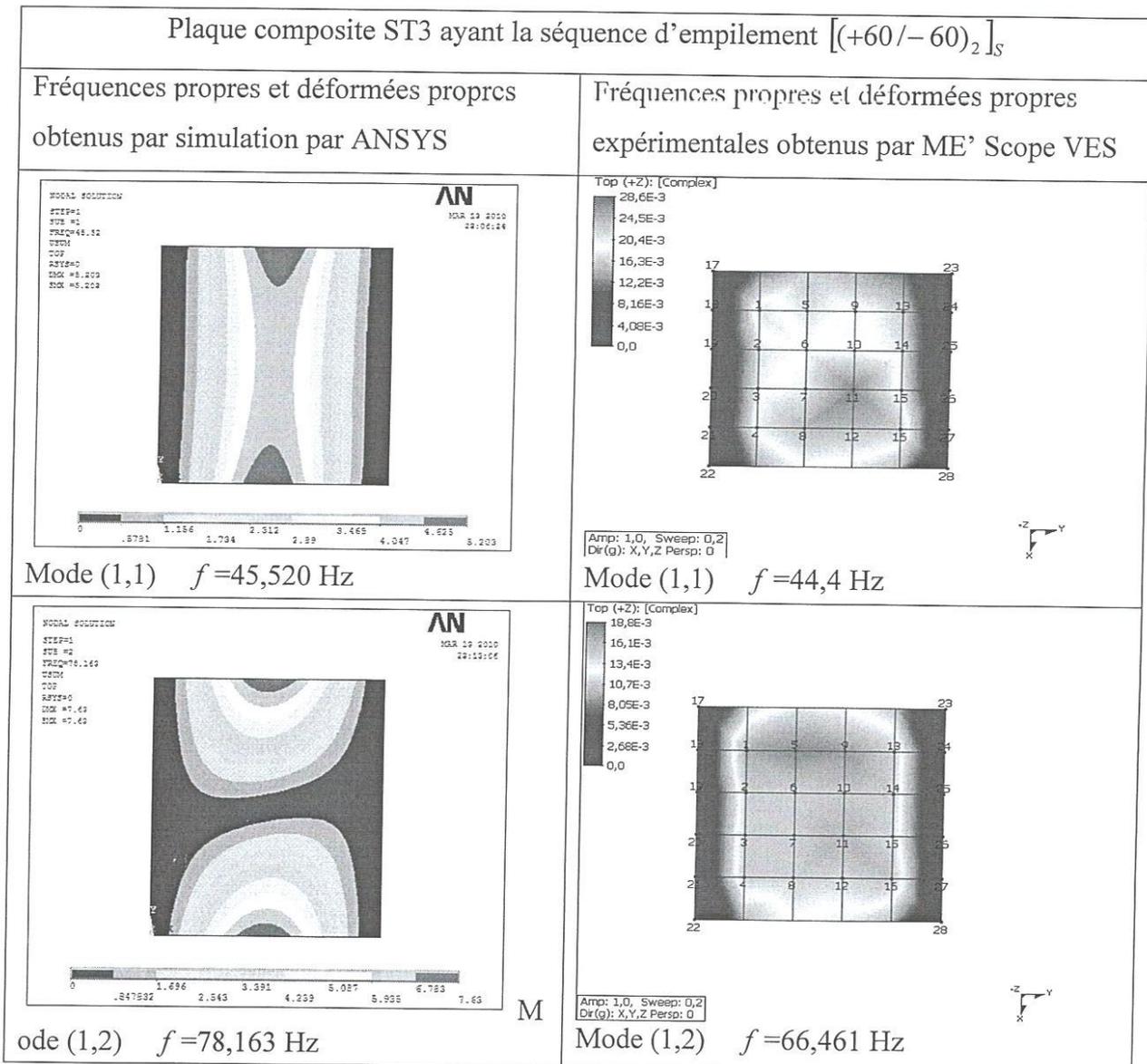


Figure 2.3 Fréquences et déformées propres des modes de flexion de la plaque ST2 $[(+65/-65)_2]_S$ en configuration ELEL.



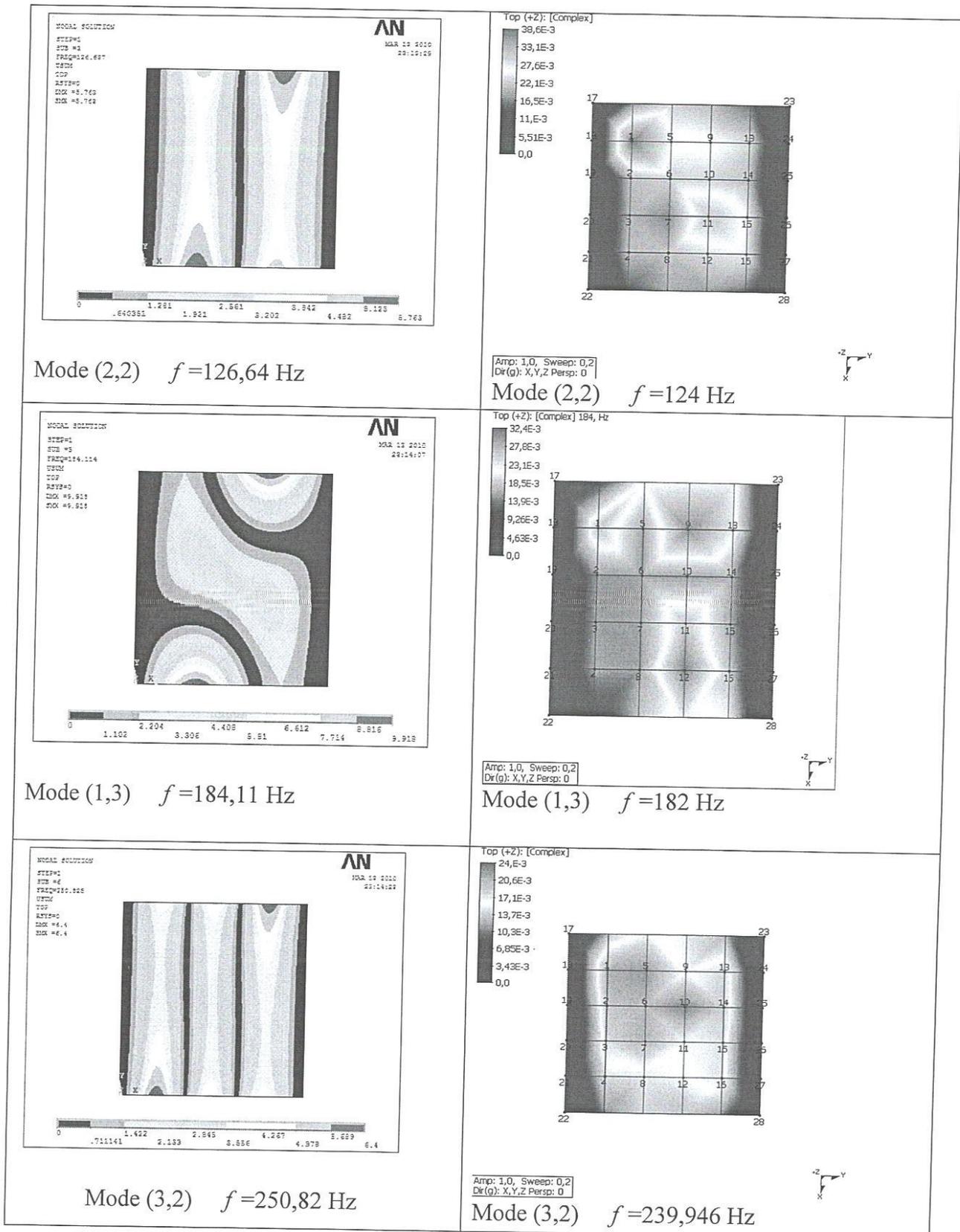


Figure 2.4 Fréquences et déformées propres des modes de flexion de la plaque ST3 $[(+60/-60)_2]_S$ en configuration ELEL.