

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



## Thèse de Doctorat

Présentée à l'Université de Guelma  
Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénierie

Département de : **Génie Mécanique**  
Spécialité : **Mécanique**

Présenté par : **BOUCHERIT Hamid**

---

**Thème : ANALYSE STATIQUE ET DYNAMIQUE DES PALIERS  
COMPLIANTS LUBRIFIES PAR DES FLUIDES NON NEWTONIENS**

---

### JURY

Président :	N. OUELAA	Pr. Université de Guelma
Encadreur :	M. LAHMAR	Pr. Université de Guelma
Examineurs :	A. HAIAHEM	Pr. Université d'Annaba
	B. NECIB	Pr. Université de Constantine
	B. BOU-SAÏD	Maître de Conférences (HDR) INSA de Lyon
	S. GUENFOUD	Maître de Conférences Université de Guelma

---

**2008**

---

## AVANT-PROPOS

---

*Cette étude a été réalisée au sein du Laboratoire de Mécanique et des Structures (LMS), département de Génie Mécanique, faculté des Sciences et Sciences de l'ingénieur, Université de Guelma et finalisée au sein de Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA) France, dans le cadre d'une formation de longue durée.*

*Je tiens à exprimer tous mes remerciements et ma vive gratitude à mon directeur de thèse Monsieur le Professeur M. LAMAR, pour m'avoir permis d'entreprendre et de mener à bien cette recherche, et ma très vive gratitude pour l'intérêt avec lequel il a suivi ces travaux.*

*Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait Monsieur N. OUELAË, Professeur au département de Génie Mécanique, des Sciences et Sciences de l'ingénieur, de l'Université de Guelma, en acceptant de présider le jury de soutenance de cette thèse de doctorat.*

*Il m'est très agréable de remercier Monsieur A. HAJIAHEM, Professeur au département de Génie Mécanique de l'Université de Annaba, qui a accepté de faire une lecture préalable de mon travail et qui m'a fait l'honneur d'être un membre du jury.*

*Il m'est particulièrement agréable de remercier Monsieur B. NECCEB, Professeur au département de Génie Mécanique de l'Université de Constantine, d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Je tiens surtout à exprimer ma plus profonde gratitude à Monsieur B. BOU-SAÏD, Maître de Conférences (HDR), Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA), France, de m'avoir permis de découvrir la lubrification en m'acceptant au sein de Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA), qui m'a conduit à finaliser cette étude, et d'avoir accepté de juger ce travail.*

*Je remercie vivement Monsieur S. GUENFOUD, Maître de Conférences au département de Génie Mécanique, Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénieur de l'Université de Guelma, pour l'intérêt qu'il porte à ce travail en acceptant de faire partie du jury de ce mémoire.*

*Mes remerciements s'adressent également à tout le personnel du département de Génie Mécanique de l'Université de Guelma et de Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, INSA de Lyon en particulier à Messieurs A. BOUARIÇA.*

*Enfin, je remercie chaleureusement tous les membres de ma famille qui eux aussi ont eu à me supporter et m'ont encouragé afin que je mène à bien ce travail surtout ma Mère et ma Femme.*

## RESUME

Ce travail est consacré à l'étude théorique du comportement statique et dynamique des paliers hydrodynamiques compliants et mésalignés lubrifiés par des huiles additivées dont le comportement rhéologique est non newtonien. Le modèle de fluide utilisé est celui de V. K. Stokes qui prend en considération les effets de couples de contraintes dus à la présence des additifs dans les huiles lubrifiantes. L'écoulement du lubrifiant dans le palier est décrit par une équation aux dérivées partielles elliptique non linéaire appelée équation de Reynolds modifiée. Cette dernière est obtenue à partir d'une analyse dimensionnelle des équations de mouvement des fluides à couples de contraintes en utilisant les hypothèses simplificatrices de la lubrification par films minces.

La solution du problème d'interaction fluide-structure, fortement non linéaire, dans ces paliers fonctionnant en conditions sévères est obtenue numériquement à l'aide d'un processus itératif.

L'étude paramétrique effectuée a permis de montrer que la présence des additifs a des effets non négligeables sur le comportement des paliers surtout pour les grandes valeurs du paramètre des couples de contraintes ; c'est-à-dire dans le cas des polymères de longues chaînes moléculaires. D'autre part, la compliance de la structure du palier et le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier doivent être considérés afin de mieux prédire les performances statiques et dynamiques de ce type de supports.

### Mots clés :

- Tribologie
- Rhéologie
- Lubrification hydrodynamique
- Interaction fluide-structure
- Paliers hydrodynamiques compliants
- Stabilité dynamique
- Modèle Couche Elastique Mince
- Fluides non newtoniens à couples de contraintes
- Mésalignement

## Title

# Steady-State and Dynamic analyses of Compliant Journal Bearing lubricated by Non-Newtonian Fluids

## SUMMARY

Theoretical and numerical work developed as part of this thesis is dedicated to the study of the static and dynamic behavior of compliant journal bearings lubricated by couple stress fluids taking into account the defect of misalignment of the shaft in a bearing. The model fluid used is that of V. K. Stokes which takes into account the effects of couple stress due to the presence of additives in lubricating oils. The flow of the lubricant in the journal bearing is described by a partial derivative equation nonlinear elliptic called modified Reynolds equation. The modified Reynolds equation is obtained from a dimensional analysis of the equation of the fluids with couples stress by using the simplifying assumptions of lubrication by thin films.

The resolution of the fluid-structure interaction problem in the hydrodynamic bearings running in sever conditions is obtained numerically using an iterative process allowed to put in an obvious place the influence of the molecular chains length of viscosity improvers additives (VI) on static and dynamic performances of compliant journal bearings lubricated by couple stress fluids. Performed parametric study showed that the presence of the additives (VI) has non negligible effects on the static and dynamic behavior of bearings especially for high values of the couple stress parameter ; that is to say in the case of an important presence of polymers characterized by long molecular chains.

Elastic distortions of thin surface layers due to the hydrodynamic pressure of the lubricating film and the defect of misalignment of the bearing must be considered in parametric study to predict better static and dynamic performances of compliant journal bearings.

## Key words

- Hydrodynamic lubrication
- Tribology
- Fluid–structure interaction
- Hydrodynamic journal bearing
- Rheology of lubricants
- Thin layer theory
- Misalignment
- Linear stability

## تحليل الساكن و الديناميكي للمعامل المرنة مشحمة بسوائل غير نيوتونية

### ملخص

العمل النظري و العددي المنشأ في إطار هذه الرسالة يهتم بدراسة التصرف الساكن و الديناميكي للمعامل المرنة لمشحمة بسوائل ذات عزوم الاجتهادات أو سوائل ذات زوائد و بأخذ بعين الاعتبار محيوبة توازي العمود داخل الحامل يعمل في نظام هيدروديناميكي. نوع السائل المستعمل هو سائل فيكاستوكس الذي يأخذ بعين الاعتبار تأثيرات عزوم الاجتهادات المنشأ من الزوائد زيوت التشحيم. سيلان هذا السائل داخل الحامل يوصف بعادلة رينولدز التي تتصل عليها من طريق تحليل قياسي لمعادلات الحركة لسوائل ذات عزوم الاجتهادات باستعمال فرضيات تشحيم بسمك رقيق. إن حل مسألة تزاوج سائل- صلب في المعامل الهيدروديناميكية المستعملة تحت شروط صعبة تتصل عليها عددياً عن طريق الحساب الدوري.

الدراسة المعلمة بينت عند حضور زوائد اللزوجة عند ها تأثيرات ليمن إهمالها عند دراسة تصرف الساكن و لديناميكي الحامل خاصة عند قيم كبيرة لعزوم الاجتهادات بمعنى في حالة حضور هام لزوائد مميزة بطول سلاسل الدرية.

التشوهات لينة لكساءات رقيقة لسطح نتيجة من الضغط الهيدروديناميكي لشريط التشحيم و محيوبة التوازي العمود داخل الحامل يجب أخذها بعين الاعتبار عند الدراسة المعلمة حتى نتنبأ أحسن بخصائص الساكنة و الديناميكية للمعامل المرنة.

### الكلمات المفتاحية

التشحيم الهيدروديناميكي

المعامل الهيدروديناميكية

تفاعل سائل- صلب

نموذج الطبقة الرقيقة

طبيعة الزيوت التشحيم

تبلوجيا (علم الاحتكاك)

توازن الحركي

تعايش سائل صلب

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	1
<b>CHAPITRE I</b>	
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES PALIERS HYDRODYNAMIQUES LUBRIFIES PAR DES FLUIDES À COUPLE DE CONTRAINTES (FLUIDES ADDITIVES)	4
<b>CHAPITRE II</b>	
LOIS DE COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DES FLUIDES LUBRIFIANTS ET EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE	16
<b>CHAPITRE III</b>	
ÉTUDE COMPARATIVE D'UN PALIER LONG LUBRIFIE PAR DIFFERENTS FLUIDES POLYMERIQUES (ADDITIVES)	46
<b>CHAPITRE IV</b>	
COMPORTEMENT DYNAMIQUE LINEAIRE D'UN PALIER COMPLIANT LUBRIFIE PAR FLUIDE A COUPLES DE CONTRAINTES	56
<b>CHAPITRE V</b>	
ANALYSE DYNAMIQUE NON LINEAIRE D'UN PALIER COMPLIANT LUBRIFIE PAR FLUIDE A COUPLES DE CONTRAINTES	94
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	111
<b>ANNEXE a</b>	115
<b>ANNEXE b</b>	117
<b>ANNEXE c</b>	122
<b>ANNEXE d</b>	125
<b>ANNEXE e</b>	130
<b>ANNEXE f</b>	132
<b>ANNEXE j</b>	134
<b>ANNEXE g</b>	135
<b>ANNEXE h</b>	138
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	148
<b>PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES</b>	152
<b>Liste des illustrations</b>	156
<b>TABLE DES MATIERES</b>	159

## INTRODUCTION GENERALE

La lubrification hydrodynamique est une partie importante de la tribologie. Elle concerne les contacts lubrifiés pour lesquelles un fluide est intercalé entre deux corps solides en mouvement relatif. Le frottement et l'usure entre ces deux solides formant le contact ne peuvent pas être contrôlés ou évalués sans une étude approfondie de l'écoulement des fluides lubrifiants dans le contact, afin d'améliorer le rendement des systèmes mécaniques, minimiser les pertes d'énergie et augmenter la durée de vie de ces mécanismes.

En lubrification hydrodynamique, le film lubrifiant sépare totalement les surfaces en présence, ce qui suppose que les aspérités et les défauts de surfaces ont des dimensions inférieures à l'épaisseur du film lubrifiant.

Les lubrifiants liquides et semi-solides telles que les huiles minérales et les graisses sont largement utilisées dans le graissage des systèmes mécaniques (paliers, butées, roulements, engrenages, etc.). Dans la plupart de ces systèmes mécaniques, le pouvoir lubrifiant intrinsèque d'une huile minérale n'est pas suffisant, des produits chimiques de synthèse ou dopes appelés aussi additifs, sont donc mélangés à l'huile de base pour en augmenter les performances et répondre à une demande d'efficacité accrue.

Ces additifs, qui entrent dans la composition des huiles moteurs et certaines huiles industrielles, sont des composés de structures chimiques très variées (polymères solubles, etc.) incorporés aux huiles de base afin de modifier leurs propriétés, par exemple procurer une certaine élasticité au lubrifiant.

Des études expérimentales ont montré que les huiles contenant des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) à longues chaînes moléculaires (fluides polymériques) ont un comportement rhéologique viscoélastique (fluide non newtonien) et leur viscosité diminue quand le taux de cisaillement augmente. Ainsi, leur écoulement ne peut être décrit par la théorie des milieux continus classique qui néglige la taille des particules fluides en mouvement.

Dans la littérature, il existe plusieurs théories permettant de décrire l'écoulement de ces fluides dits à rhéologie complexe. Parmi ces théories, celle de Vijay Kumar Stokes est la plus simple et la plus utilisée car elle permet de tenir compte de la taille des particules fluides en

mouvement et des couples de contraintes et de volume dus à la présence des additifs. L'application de cette théorie à l'étude des écoulements en film mince a permis de dériver une nouvelle forme de l'équation de Reynolds (équation de base de la lubrification hydrodynamique), dite équation de Reynolds modifiée.

Dans la présente étude, le lubrifiant est assimilé à un fluide incompressible à couples de contraintes pour lequel seuls les moments de contraintes qui s'ajoutent aux forces de surface (forces de pression et de frottement visqueux) sont pris en considération.

Les développements technologiques imposent des conditions de fonctionnement des paliers fluides de plus en plus sévères : les vitesses de rotation, les puissances et les charges prennent des valeurs de plus en plus grandes. Ainsi, le rôle des paliers dans le comportement de la ligne d'arbre des machines tournantes doit être considéré avec le plus grand soin.

Ce travail représente une étape vers une meilleure connaissance théorique du comportement statique et dynamique des paliers fluides compliants ; on tient compte dans cette étude des effets non newtoniens et des effets de déformations élastiques du revêtement de surface du palier dus au champ de pression hydrodynamique engendré dans le film lubrifiant (régime élastohydrodynamique). Le Modèle Couche Élastique Mince (MCEM) est utilisé pour la prise en considération de l'effet des déformations élastiques du revêtement de surface dans l'étude paramétrique après une validation de ce modèle avec la méthode des éléments finis en 3D. Par comparaison à la méthode des éléments finis, l'avantage principal du MCEM est l'économie du temps de calcul (CPU) très court pour obtenir des déformations élastiques du revêtement de surface. Cette étude a conduit à la mise au point des programmes de calcul, qui sont efficaces aussi bien en temps de calcul qu'en précision.

L'étude effectuée est présentée en cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, une étude bibliographique est présentée pour essayer de situer l'intérêt de notre contribution par rapport à ce qui a été fait dans le domaine de la lubrification hydrodynamique des paliers fluides (état de l'art). Les travaux effectués sur l'influence de la rhéologie des huiles additivées (fluide polymérique) et l'élasticité du revêtement des surfaces

sur les performances statiques et dynamiques des paliers fluides, ainsi que l'influence du mésalignement de l'arbre dans le palier sont présentés de façon succincte.

Le deuxième chapitre est réservé à l'étude bibliographique sur les différentes lois rhéologiques permettant de décrire le comportement rhéologique des huiles additivées appelées aussi fluides polymériques ou viscoélastiques, la présentation des équations de base de la lubrification hydrodynamique par des fluides non newtoniens en régime d'écoulement isotherme et laminaire, ainsi que les hypothèses simplificatrices et les conditions aux limites prenant en considération le phénomène de rupture du film (cavitation).

Dans le troisième chapitre, la complexité de l'écoulement des huiles additivées ou huiles polymériques (viscoélastiques) considérées comme des fluides à rhéologie complexe nous a amené de simplifier le problème dans le cas du palier fluide. La validation du modèle de fluide à couples de contraintes nous a conduit d'effectuer une étude comparative dans le d'un palier long lubrifié par des fluides obéissant à différents modèles rhéologiques (newtonien, Maxwell, FENE-P et à couples de contraintes)

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du comportement dynamique linéaire d'un palier compliant lubrifié par fluide à couple des contraintes en considérant l'hypothèse des petits déplacements de l'arbre au voisinage de la position d'équilibre. Cette hypothèse permet de modéliser le film lubrifiant par huit coefficients dynamiques à savoir quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement. La connaissance de ces coefficients permet d'étudier la stabilité dynamique du système rotor-paliers.

Cependant, cette étude s'avère insuffisante lorsque le palier fonctionne dans une zone instable, dans ces conditions, une étude non-linéaire doit être envisagée. Cette dernière consiste à résoudre simultanément les équations de la dynamique décrivant le mouvement de l'arbre dans le palier fluide et l'équation de Reynolds modifiée pour chaque pas de temps.

Le cinquième chapitre est dévolu à l'étude paramétrique de l'influence du paramètre de couple des contraintes sur le comportement dynamique non linéaire d'un palier compliant lubrifié par un fluide additivé.

Enfin, une conclusion générale sera présentée pour rappeler l'essentiel des résultats obtenus ainsi que l'intérêt de notre contribution. Les prolongements possibles de la présente étude seront également proposés.

## **CHAPITRE I**

**ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES PALIERS  
HYDRODYNAMIQUES LUBRIFIES PAR DES FLUIDES  
À COUPLE DE CONTRAINTES (FLUIDES ADDITIVES)**

## 1. INTRODUCTION

Les paliers hydrodynamiques ont pour objectif de supporter une charge radiale. Ces organes de support et de guidage en rotation sont de plus en plus utilisés dans les machines tournantes contemporaines. Ainsi, la connaissance des caractéristiques de ces paliers est indispensable pour la conception de ces machines tournantes. Malgré la simplicité de leur conception, les paliers fluides soumis à des charges importantes ne sont pas faciles à modéliser, leur comportement étant fonction de nombreux paramètres, en particulier la rhéologie des huiles lubrifiantes, l'élasticité des revêtements de surface des solides et les défauts de fonctionnement comme le mésalignement. De plus, l'évolution technologique, traduite par l'amélioration et la recherche continue des performances optimales de systèmes mécaniques, impose un fonctionnement dans des conditions de plus en plus sévères (charge, vitesse de rotation, etc.). Ceci a conduit les motoristes et les pétroliers à ajouter de nombreux additifs (polymères solubles, etc.) ou dopes tels que les additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) au lubrifiant de base afin d'améliorer les performances de ce dernier.

Ces additifs sont des polymères (macromolécules) incorporés aux huiles de base afin de modifier leurs propriétés, par exemple procurer une certaine élasticité à l'huile lubrifiante. Ces additifs se caractérisent par de longues chaînes moléculaires pouvant être un million de fois le diamètre d'une molécule d'eau et ont un comportement rhéologique complexe. Ainsi, leur écoulement ne peut être décrit par la théorie des milieux continus classique qui néglige la taille des particules fluides en mouvement. Un certain nombre de théories ont été développées pour expliquer le comportement particulier des huiles contenant des additifs (polymères) [1, 2, 3]. Parmi ces théories, la théorie de Vijay Kumar Stokes, de mise en œuvre simple, permet de tenir compte des effets polaires dus à la présence des couples de contraintes et couples de forces de volume en plus des forces de surface et de volume.

Un fluide à couples de contraintes est caractérisé par deux constantes  $\mu$  et  $\eta$ , tandis qu'un seul paramètre  $\mu$  est nécessaire pour caractériser un fluide incompressible newtonien qui est le coefficient de viscosité dynamique. La nouvelle constante physique  $\eta$  est due à la présence des couples de contraintes dans le fluide.

Dans la littérature, les effets de couples de contraintes sur le comportement des paliers fluides sont étudiés en définissant un paramètre de couple des contraintes  $\left(\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}\right)$ , qui représente physiquement la longueur de la chaîne moléculaire des additifs (polymères).

La revue bibliographique a pour but de rappeler les principaux travaux publiés dans la littérature concernant l'analyse du comportement des paliers fluides et plus particulièrement des paliers lubrifiés par des fluides à couples de contraintes en régime isotherme.

Dans un premier temps, on va évoquer les études présentant l'influence du paramètre de couple des contraintes sur le comportement statique et dynamique des paliers fluides en régime isotherme. Par la suite, on s'intéressera à l'étude de l'influence des déformations élastiques du revêtement de surface et les défauts de mésalignement sur les performances statiques et dynamiques de paliers lubrifiés par un fluide additivé.

## **2. FLUIDES A COUPLES DE CONTRAINTES OU FLUIDE POLAIRE**

Dans les deux dernières décennies, l'étude de l'influence du paramètre de couple des contraintes sur les performances statiques et dynamiques linéaires ou non linéaires des paliers fluides a fait l'objet de plusieurs travaux tant théoriques qu'expérimentaux. On va présenter dans ce qui suit un rappel des principaux travaux effectués.

En 1988, dans un travail expérimental, Olivor [4] a montré que la présence des polymères dissous dans les lubrifiants entraîne une augmentation de la capacité de charge du film lubrifiant et une diminution du coefficient de frottement d'un palier court lubrifié par fluide additivé.

Dans la même année, R. S. Gupta et L. G. Sharma [5], ont étudié théoriquement l'influence du paramètre des couples de contraintes et la vitesse de rotation de l'arbre sur les caractéristiques statiques d'une butée hydrostatique, le travail basé sur la théorie des milieux continus de V. K. Stokes pour prédire les équations du mouvement d'un fluide additivé (polaire). Les résultats montrent que l'existence des couples de contraintes dans le film lubrifiant permet d'augmenter la capacité de charge du palier et de diminuer le débit de fuite du lubrifiant même pour des petites valeurs du paramètre des couples de contraintes.

En 1991, Bujurke et Naduvianamani [6], présentent une forme modifiée de l'équation de Reynolds basée sur la théorie des milieux continus de V. K. Stokes, dans le cas d'un palier fluide poreux. Ils étudient numériquement l'influence de quelques paramètres sur les performances statiques de palier poreux court. L'équation de Reynolds a été intégrée analytiquement pour obtenir le champ de pression dans le film lubrifiant. Les résultats ont montré que l'utilisation des fluides à couples de contraintes ou fluides additivés dans la lubrification des paliers poreux augmente sensiblement la capacité de charge et diminue considérablement le nombre de frottement comparativement au fluide newtonien.

A partir de la théorie des milieux continus de V. K. Stokes (Micro Continuum Theory), J. R. Lin [7], a dérivé une nouvelle forme d'équation de Reynolds, dite équation de Reynolds modifiée. Il a montré que l'effet des couples de contraintes n'est pas négligeable dans l'étude des caractéristiques statiques d'un palier court lubrifié par un fluide polaire. Par comparaison au fluide newtonien, le fluide à couples de contraintes augmente sensiblement la capacité de charge et diminue l'angle de calage et le coefficient de frottement du palier.

Une année plus tard, J. R. Lin [8] présente une étude numérique basée sur la théorie des milieux continus de V. K. Stokes pour prendre en considération les effets polaires dus aux additifs. L'étude paramétrique d'un palier long partiel, montre que l'existence des additifs dans le film lubrifiant permet d'améliorer considérablement les performances statiques du palier fluide comparativement au palier lubrifié par fluide newtonien.

Dans d'autres travaux, J. R. Lin [9, 10] a montré l'influence des couples de contraintes dans le film d'huile sur les caractéristiques d'un palier lisse et d'un palier à film amortisseur de longueur finie. L'équation de Reynolds modifiée est résolue numériquement à l'aide de la méthode itérative du gradient conjugué (conjugate gradient method) pour obtenir le champ de pression dans le film lubrifiant. Les résultats théoriques ont prouvé que la présence des couples de contraintes dans le lubrifiant fournit une augmentation considérable du champ de pression dans le film et une diminution de l'angle de calage et du coefficient de frottement ainsi qu'une augmentation de la réponse de l'action du film lubrifiant comparativement au fluide newtonien.

En 1999, J. R. Lin [11] s'intéresse à l'étude des effets combinés du paramètre des couples de contraintes et de la compressibilité du fluide sur les caractéristiques statiques et dynamiques d'une butée hydrostatique. Selon les résultats obtenus, l'effet du paramètre des couples de contraintes améliore les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement de la butée et diminue le débit de fuite d'écoulement du fluide. La compressibilité du fluide n'a pas d'effets significatifs sur les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement.

En 2000, dans un autre travail théorique, le même auteur [12] a analysé l'influence du paramètre des couples de contraintes sur le comportement dynamique linéaire d'un palier hydrodynamique court. Les résultats théoriques montrent que le palier lubrifié par un fluide à couples de contraintes est plus stable que le palier lubrifié par fluide newtonien (non polaire). La présence des additifs de longue chaîne moléculaire dans le film lubrifiant permet d'améliorer sensiblement la stabilité du système rotor-paliers.

En 2001, H. B. Naduvinamani et al [13], ont étudié l'influence du paramètre des couples de contraintes sur le comportement statique et dynamique d'un palier court à film amortisseur. Par comparaison au fluide newtonien, le fluide à couples de contraintes ou fluide polaire permet d'améliorer la capacité de charge du palier. Sous une charge cyclique extérieure, le fluide à couples de contraintes diminue la vitesse de déplacement du centre de l'arbre dans le palier fluide et augmente l'épaisseur minimale du film lubrifiant.

En 2002, H. B. Naduvinamani et al [14], s'intéressent aussi à l'étude de l'influence du paramètre des couples de contraintes et de la rugosité de surface sur les caractéristiques statiques d'un palier court poreux lubrifié par fluides polaires. La théorie des milieux continus de V. K. Stokes et le modèle stochastique de Christensen sont utilisés pour tenir compte à la fois des effets polaires dus aux additifs et de la rugosité des surfaces. Les résultats numériques montrent que l'effet de la rugosité est plus significatif dans le cas du palier lubrifié par fluide additivé.

En 2003, Hsiu-Lu Chiang et al [15] présentent, dans une étude théorique, les effets combinés du paramètre des couples de contraintes et de la rugosité de surface sur les performances statiques d'un palier fluide de longueur finie fonctionnant en régime hydrodynamique. La théorie des milieux continus de V. K. Stokes et le modèle stochastique de Christensen sont utilisés pour prédire respectivement les effets polaires des additifs et la rugosité de surface du palier fluide. L'équation de Reynolds est résolue à l'aide de la méthode itérative du gradient conjugué pour obtenir le champ de pression dans le film lubrifiant. Les résultats théoriques montrent que les effets de couples de contraintes et la rugosité de surface ne sont pas négligeables dans l'analyse statique d'un palier fluide. Par comparaison au palier lisse lubrifié par fluide newtonien, le paramètre des couples des contraintes et la rugosité de surface améliorent sensiblement le champ de pression dans le film lubrifiant et diminuent le coefficient de frottement et l'angle de calage du palier fluide.

En 2004, Nan-Yan Ma et al [16], proposent une étude théorique de l'influence du paramètre des couples de contraintes sur les caractéristiques statiques d'un palier fluide lubrifié par fluide dopé par des additifs, fonctionnant en régime hydrodynamique. L'équation de Reynolds modifiée est résolue en utilisant la méthode des différences finies centrées et les conditions limites de Reynolds. L'existence des additifs dans le fluide lubrifiant donne une augmentation importante du champ de pression dans le film lubrifiant et de l'angle de calage et une diminution du coefficient de frottement du palier fluide, surtout pour des grandes valeurs de l'excentricité relative et du paramètre des couples de contraintes.

Dans la même année, H.-L. Chiang et al [17] ont analysé l'influence du paramètre des couples de contraintes et de la rugosité des surfaces sur le comportement dynamique linéaire d'un palier court lubrifié par un fluide additivé. La théorie des milieux continus de V. K. Stokes et le modèle stochastique de Christensen sont utilisés dans la dérivation de l'équation de Reynolds modifiée. Le champ de pression est calculé analytiquement en se basant sur la théorie du palier court. L'étude paramétrique montre que les effets combinés de la rhéologie du lubrifiant et de la rugosité de surface ne sont pas négligeables dans l'étude du comportement dynamique linéaire d'un palier fluide. Les effets combinés du paramètre de couple des contraintes et de la rugosité de surface longitudinale augmentent les coefficients dynamiques surtout les coefficients de raideur pour des grandes valeurs de l'excentricité relative de fonctionnement du palier. Pour des petites perturbations, le palier rugueux lubrifié par un fluide additivé est plus stable qu'un palier lisse lubrifié par un fluide newtonien.

En 2005, Won-Hsion et al [18] ont présenté dans un travail théorique une étude du comportement dynamique linéaire d'un palier long lubrifié par fluide à couples de contraintes (fluide à rhéologie complexe), basé sur la théorie dynamique linéaire (petits déplacements du centre de l'arbre dans le palier pour prédire la stabilité du palier fluide). Par comparaison au fluide newtonien, le fluide à couples de contraintes permet d'augmenter les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement même pour des valeurs modérées de l'excentricité relative de fonctionnement, c'est-à-dire lorsque le palier est soumis à des charges modérées. Pour des petites perturbations, un palier lubrifié avec un fluide à couples de contraintes est plus stable qu'un palier lubrifié par fluide newtonien.

En 2006, dans un autre travail numérique, N.B. Naduvinamani et A. Siddangouda [19] s'intéressent à l'analyse des effets combinés du paramètre des couples de contraintes et de la rugosité de surface sur les performances statiques d'une butée poreuse à patins rectangulaires à coin d'huile fonctionnant en régime de lubrification hydrodynamique. Les résultats numériques prouvent que l'existence des couples de contraintes dans le film lubrifiant augmente la capacité de charge et diminue le coefficient de frottement d'une butée poreuse rugueuse comparativement à une butée poreuse lisse.

En 2007, Cai-Wan Chang-Jian et Chao-Kuang Chen [20], présentent une analyse théorique du comportement dynamique d'un rotor flexible supporté par deux paliers courts hydrodynamiques lubrifiés par un fluide à couples de contraintes. Les résultats numériques obtenus montrent que l'existence des additifs de longue chaîne moléculaire dans le film lubrifiant permet de diminuer largement les amplitudes de vibration et d'augmenter la stabilité du système rotor-paliers.

Plus récemment, Cheng-Ying et Cai-Wan Chang-Jian [21] présentent une étude théorique du comportement dynamique non linéaire d'un rotor flexible supporté par des paliers fluides lubrifiés par fluide à couples de contraintes fonctionnant en régime turbulent. Les équations du mouvement sont résolues en utilisant la méthode de Runge-Kutta. Ces auteurs montrent que le paramètre des couples de contraintes affecte sensiblement le mouvement dynamique du centre de l'arbre dans le palier. L'existence des additifs de longue chaîne moléculaire dans le lubrifiant améliore de façon significative la stabilité du système rotor-paliers même si l'écoulement du lubrifiant est turbulent.

Tous ces travaux ont été réalisés en régime hydrodynamique et isotherme qui ne tient pas compte de l'effet des déformations élastiques du revêtement de surface du palier dues au champ de pression hydrodynamique.

### 2.1. Régime Elastohydrodynamique (EHD)

Les déformations élastiques dues au champ de pression ou encore déformations mécaniques ne sont à considérer que dans les cas de paliers très sollicités et/ou le cas des revêtements de surface constitués de matériaux à faible module d'élasticité. Dans ces conditions, une approche EHD devient nécessaire pour mieux prédire le comportement du palier.

En 2003, J. Bouyer [22] présente, une excellente revue bibliographique sur les effets de déformations élastiques du revêtement de surface et les défauts de mésalignement de l'arbre dans les paliers fluides hydrodynamiques. Il ressort de cette étude que les effets de déformations élastiques et des défauts de mésalignement doivent être pris en considération dans les simulations numériques de paliers fonctionnant en conditions sévères. Dans ce qui suit, on ne s'intéresse, qu'aux travaux réalisés dans le cas des paliers lubrifiés par fluides à couples de contraintes en régime isotherme.

En 1997, N. C. Das [23] a étudié théoriquement en utilisant la théorie de la lubrification elastohydrodynamique, l'influence du paramètre des couples de contraintes du fluide lubrifiant et des déformations élastiques de surface sur les performances d'un contact cylindre-plan. Le modèle de Barus est utilisé pour la prise en considération de la variation de la viscosité du fluide lubrifiant avec la pression de contact. Les résultats numériques montrent que l'existence des additifs dans le lubrifiant permet d'augmenter le pic de pression dans le contact et l'épaisseur minimale du film lubrifiant. Les déformations élastiques de surface diminuent sensiblement le pic de pression dans le contact.

En 1999, Mokhiamer et al [24] présentent une étude théorique des performances statiques d'un palier fluide revêtu. Les déformations élastiques du revêtement de surface du palier dues à la pression hydrodynamique sont calculées en utilisant un modèle simplifié de l'élasticité (Modèle Couche Elastique Mince) qui suppose que la déformation à l'interface fluide-structure est proportionnelle à la pression hydrodynamique. Les résultats ont montré que l'existence des couples de contraintes dans le fluide lubrifiant entraîne :

- une augmentation de la pression hydrodynamique dans le film lubrifiant et la capacité de charge du palier ;
- une diminution de l'angle de calage, du nombre de frottement et du débit de fuite.

D'autre part, les résultats montrent que les effets des déformations élastiques du revêtement ne sont pas négligeables dans l'étude des caractéristiques statiques d'un palier fluide surtout pour des grandes valeurs de l'excentricité relative de fonctionnement. Les déformations élastiques du revêtement de surface du palier permettent de diminuer considérablement la capacité de charge du palier fluide.

En 2001, A. A. Esharkawy et L. II. Guedouar [25] ont étudié l'influence du paramètre des couples de contraintes et des déformations élastiques du revêtement de surface sur le champ de pression d'un palier de longueur finie lubrifié par un fluide additivé. Le champ de pression dans le film lubrifiant est obtenu à partir d'une expérience tandis que les déformations élastiques de l'interface fluide-structure sont calculées à partir du MCEM. Un algorithme de résolution du problème inverse est utilisé pour prédire la valeur de l'excentricité relative de fonctionnement du palier et la valeur du paramètre des couples de contraintes. Ces auteurs montrent que l'existence des couples de contraintes dans le fluide lubrifiant permet d'augmenter le pic de pression dans le film surtout pour des additifs de longue chaîne moléculaire. A excentricité imposée les déformations élastiques du revêtement de surface diminuent le pic de pression.

En 2003, V. P. Sukumaran Nair et K. Prabhakaran Nair [26] présentent une étude numérique de l'influence des déformations élastiques de surface et de la concentration des additifs sur les caractéristiques statiques d'un palier circulaire lubrifié par fluide micropolaire. La méthode des éléments finis (2D) est utilisée pour résoudre l'équation de Reynolds modifiée, afin d'obtenir le champ de pression dans le film d'huile. Les déformations élastiques de surface du palier sont calculées en utilisant la méthode des éléments finis (3D). L'étude paramétrique montre que l'augmentation de la concentration des additifs dans le film lubrifiant et les déformations élastiques de surface du palier sont indispensables dans le calcul des caractéristiques statiques du palier fluide. La capacité de charge et les déformations élastiques

augmentent avec l'augmentation de la concentration des additifs dans le film lubrifiant. La capacité de charge, le débit de fuite, l'angle de calage et le coefficient de frottement diminuent avec les grandes valeurs des déformations élastiques de surface du palier fluide.

Une année plus tard, en 2004, K. Prabhakaran Nair et al [27], s'intéressent à l'étude de l'influence des déformations élastiques de surface et de la concentration des additifs dans le film lubrifiant sur le comportement statique et dynamique linéaire d'un palier à deux lobes lubrifié par fluide micropolaire. La méthode des éléments finis est utilisée pour calculer le champ de pression dans le film et les déformations élastiques de surface du palier. Les résultats numériques montrent que l'augmentation de la concentration des additifs conduit à une augmentation de la capacité de charge, de la déformation élastique de surface et de la vitesse critique et une diminution de la pulsation de fouettement (whirl) surtout pour des grandes valeurs de l'excentricité relative du palier. La déformation élastique permet de diminuer la capacité de charge, le débit de fuite, l'angle de calage et le coefficient de frottement et d'augmenter la stabilité du système surtout dans le cas du fluide non newtonien.

En 2004, A. A. Elsharkawy [28], mène une étude des performances statiques d'un palier compliant (palier déformable) lubrifié par fluide polymérique ou fluide additivé (polaire). La théorie des milieux continus de V. K. Stokes et le Modèle Couche Elastique Mince sont utilisés pour tenir compte des effets polaires des additifs et des déformations élastiques du revêtement de surface du palier. Les résultats numériques montrent que l'existence des couples de contraintes dans le lubrifiant permet d'améliorer la portance hydrodynamique du palier et de diminuer le coefficient de frottement et le débit de fuite. Les déformations élastiques du revêtement entraînent une diminution de la portance hydrodynamique du palier fluide.

M. Lahmar [29], a trouvé en 2005 à travers une analyse élastohydrodynamique d'un palier multi-couches lubrifié par fluide à couples de contraintes, que la présence des couples de contraintes dans le lubrifiant pour des grandes valeurs de l'excentricité relative statique conduit à :

- une augmentation du pic de pression dans le film lubrifiant et de la capacité de charge du palier ;
- une diminution de l'angle de calage statique et du nombre de frottement ;
- les valeurs des coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement augmentent avec le paramètre de couple des contraintes ;

- la plage de stabilité augmente avec l'augmentation des valeurs du paramètre des couples de contraintes.

Les déformations élastiques du revêtement de surface entraînent une diminution de la portance hydrodynamique du palier et du pic de pression.

Récemment, A. A. Elsharkawy et L. H. Guedouar [30], dans un travail numérique, ont étudié l'influence de l'état de surface sur les performances statiques d'un palier compliant lubrifié par un fluide à couples des contraintes. Les déformations élastiques sont calculées en utilisant le Modèle Couche Élastique Mince. L'algorithme d'Elrod est utilisé pour définir la zone de cavitation. L'étude paramétrique menée a montré que l'état de surface, la rhéologie du film d'huile et les déformations élastiques de surface doivent être pris en considération dans l'analyse du comportement statique des paliers fluides.

Dans la même année, A. Chapkov [31] présente une étude des contacts ElastoHydroDynamiques (EHD) entre des surfaces rugueuses ou lisses, lubrifiées avec un fluide dont le comportement peut être considéré comme newtonien ou à l'aide de fluides non newtoniens contenant des polymères. La solution du problème EHD repose sur la résolution simultanée de trois équations : l'équation de Reynolds, l'équation des déformations élastiques et l'équation de l'équilibre de la charge. L'équation de Reynolds qui gouverne l'écoulement des films minces entre deux parois est résolue en utilisant la méthode Multigrilles et les techniques de l'intégration rapide pour le calcul de l'intégrale de la déformation élastique. L'étude paramétrique montre que l'utilisation d'huile contenant des polymères dans des applications EHD présente deux avantages : de faibles pertes par frottement visqueux et une stabilité de l'épaisseur du film sur une gamme étendue de température.

La prise en considération des déformations élastiques des revêtements de surface dues au champ de pression est d'une grande importance aussi bien dans l'étude statique que dynamique des paliers fluides fonctionnant dans des conditions sévères (forte charge, vitesse élevée, fluide additivé, etc.). Ces déformations deviennent non négligeables lorsque les revêtements sont constitués de matériaux à faible module d'élasticité tels que les élastomères, etc. ou lorsque le palier présente des défauts de mésalignement.

## 2.2. Défaut de mésalignement

Depuis plus de cinquante années, le mésalignement dans les paliers fluides, fût un phénomène de plus en plus étudié tant théoriquement qu'expérimentalement surtout pour des paliers lubrifiés par des fluides newtoniens. Comme il a été mentionné précédemment, J.

Bouyer [22], présente en 2003, une excellente revue bibliographique sur les défauts de mésalignement de l'arbre dans les paliers fonctionnant en régimes statique et dynamique. Il a mis en évidence à travers une étude expérimentale la nécessité de prendre en considération les défauts de mésalignement dans les simulations numériques de paliers. On se limite dans ce qui suit aux travaux réalisés dans le cas des paliers rigides ou compliants lubrifiés par des fluides à couples de contraintes fonctionnant en régime isotherme.

Comme les travaux sur les effets combinés de la rhéologie des fluides et les défauts de mésalignement de l'arbre sur le comportement statique ou dynamique des paliers sont rares dans la littérature, on cite dans un premier temps le travail numérique de S. Das et al [32]. Ces auteurs présentent en 2001, une étude numérique des effets de mésalignement de l'arbre sur les caractéristiques statiques d'un palier lubrifié par fluide additivé (micropolaire). Deux types de mésalignement sont analysés ; horizontal et vertical. L'équation de Reynolds modifiée est résolue à l'aide de la méthode itérative de Gauss-Seidel. Les résultats numériques montrent que l'existence des polymères dans le film lubrifiant permet :

- d'améliorer la capacité de charge du palier surtout dans le cas mésaligné ;
- d'augmenter le moment de mésalignement du palier comparativement au fluide non additivé (newtonien) ;
- de diminuer le coefficient de frottement du palier surtout dans le cas mésaligné.

En 2003, Jun sun et Gui Changlin [33] s'intéressent à l'étude numérique de l'influence des effets combinés de mésalignement et de déformations élastiques de surface sur les performances statiques d'un palier fluide. Ils ont montré la nécessité de prise en compte des défauts de mésalignement de l'arbre et des déformations élastiques de surface dans l'analyse du comportement statique d'un palier fluide. L'étude paramétrique montre :

- une augmentation du pic de pression avec l'angle de mésalignement. Ce pic est déplacé vers l'une des extrémités du palier où l'épaisseur du film lubrifiant est minimale ;
- le moment de mésalignement augmente avec l'augmentation de l'angle de mésalignement surtout pour des grandes valeurs de l'excentricité relative de fonctionnement du palier.

Ces auteurs montraient par ailleurs que le débit de fuite et l'angle de calage sont peu influencés par le défaut de mésalignement.

Une année plus tard, A. M. El-Butch et N. M. Ashour [34] ont présenté une analyse mixte des effets de mésalignement de l'arbre et des déformations élastiques de surface sur les performances dynamiques d'un palier à trois patins oscillants. L'équation de Reynolds est résolue en utilisant la méthode des différences finies centrées pour obtenir le champ de

pression dans le film d'huile et les déformations élastiques calculées par la méthode des éléments finis (2D). Les auteurs aboutissent aux résultats numériques suivants :

- le mésalignement de l'arbre diminue l'épaisseur minimale du film d'huile et augmente la valeur maximale du pic de pression dans le film lubrifiant surtout dans le cas du palier indéformable ;
- les déformations élastiques améliorent la valeur minimale d'épaisseur du film d'huile.

En 2005, Yansong Wang et al [35], ont étudié les effets combinés de défauts de mésalignement de l'arbre et des déformations élastiques de surface du palier sur les performances statiques d'une butée fluide. Deux types de mésalignement horizontal et vertical sont considérés. Les résultats théoriques montrent que :

- les déformations élastiques diminuent la portance hydrodynamique de butée surtout dans le cas mésaligné ;
- la capacité de charge diminue avec l'angle de mésalignement notamment pour les grandes valeurs de cet angle.

Lorsque le palier fonctionne à des grandes valeurs de l'excentricité relative, les déformations élastiques de surface deviennent importantes et ne peuvent pas être négligées ou ignorées.

Récemment, A. Kabouya et al [36] présentent une étude théorique du comportement statique et dynamique linéaire d'un palier lisse indéformable lubrifié par des huiles additivées en considérant le défaut de mésalignement de l'arbre. L'étude paramétrique menée a permis de montrer que la présence des additifs dans les lubrifiants a une influence non négligeable sur les performances statiques et dynamiques linéaires des paliers lisses surtout pour les grandes valeurs du paramètre des couples de contraintes. Par comparaison aux huiles newtoniennes, les huiles additivées permettent :

- une augmentation importante de la portance hydrodynamique et du pic de pression statique dans le film lubrifiant surtout dans le cas du palier mésaligné ;
- une diminution de l'angle de calage et des pertes par frottement dans le contact ;
- une augmentation de la vitesse critique du palier ;
- une réduction de la zone d'instabilité ;
- une atténuation significative des amplitudes de vibrations dues à la présence de balourd.

Comparé au cas aligné, le cas mésaligné présente pour une même valeur d'excentricité relative :

- une augmentation de la capacité de charge du palier et de l'angle de calage
- une réduction du nombre de frottement et de la zone de stabilité.

A travers cette brève étude bibliographique, on peut conclure que les déformations élastiques de surface du palier dues aux pressions hydrodynamiques dans le film d'huile et les défauts de mésalignement de l'arbre dans le palier doivent être considérés dans l'analyse du comportement statique et dynamique (linéaire et non linéaire) d'un palier lubrifié par un fluide additivé.

### 3. CONCLUSION

Les nombreuses études effectuées sur le comportement statique et dynamique des paliers fluides, dont on a donné un bref aperçu, ont mis en évidence la nécessité d'utiliser des fluides additivés ou fluides à couples de contraintes (fluides additifs) dans la lubrification hydrodynamique des paliers fluides soumis à des conditions sévères. En outre, les déformations élastiques de surface du palier dues au champ de pression hydrodynamique dans le film lubrifiant et les défauts de mésalignement de l'arbre dans le palier doivent aussi être considérées afin de mieux prédire les performances statiques et dynamiques des paliers fluides.

Dans le présent travail, on s'intéresse à l'étude du comportement statique et dynamique linéaire ou non linéaire d'un palier compliant (déformable) lubrifié par fluide à couples de contraintes en tenant compte du défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier fonctionnant en régime isotherme. Dans la première partie, on va présenter une étude comparative entre un fluide à couples de contraintes et des fluides ayant la même échelle d'observation (Macro et Micro-Macro) dans la lubrification hydrodynamique d'un palier fluide.

A la fin, une étude paramétrique complète, permettra de mettre en évidence l'influence de la longueur des chaînes moléculaires des additifs de viscosité ( $\ell$ ) sur les performances statiques (portance hydrodynamique, angle de calage, débit de fuite, puissance dissipée et champ des vitesses moyennes, moment de mésalignement), dynamiques linéaires (coefficients dynamiques, masse critique et fréquence de fouettement) non linéaire (pression maximale dans le film, épaisseur minimale de film et trajectoire du centre de l'arbre dans le palier) d'un palier compliant lubrifié par fluide non newtonien à couple des contraintes fonctionnant en régime isotherme et une validation du Modèle Couche Elastique Mince avec la méthode des éléments finis (3D).

## **CHAPITRE II**

**LOIS DE COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE  
DES FLUIDES LUBRIFIANTS ET EQUATIONS DE BASE  
DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE**

intervenir que la viscosité dynamique ( $\mu$ ) donnant une relation rhéologique linéaire entre les contraintes de cisaillement et les gradients de vitesses, en lubrification et plus particulièrement en film mince (figure II-1) où seulement les contraintes de cisaillement  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{zy}$  sont prises en compte, les lois constitutives d'un fluide newtonien s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \tau_{zy} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

Où :

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide lubrifiant

$u$  et  $w$  : composantes du vecteur vitesse d'écoulement d'une particule fluide selon les axes  $x$  et  $z$

$\tau_{xy}$  et  $\tau_{zy}$  : contraintes de cisaillement visqueuses.

Dans le cas général, pour un fluide newtonien, la relation qui lie le tenseur de contraintes ( $\sigma_{ij}$ ) au tenseur de taux de déformation ( $D_{ij}$ ) s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \Theta) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (\text{II-2})$$

Avec,

$p$  : pression statique

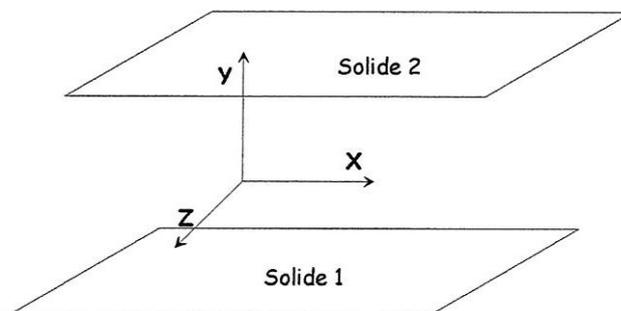
$D_{ij}$  : tenseur de taux de déformation ( $D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ )

$\Theta$  : taux de dilatation cubique ( $\Theta = D_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ )

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker

$\lambda$  et  $\mu$  : coefficients de Navier.

Pour un fluide incompressible ( $\Theta = 0$ ), le second coefficient de viscosité  $\lambda$  n'intervient plus.



**Fig.II-1:** Schéma du contact

La présence des polymères (macromolécules) rend le comportement rhéologique des huiles lubrifiantes non newtonien, ainsi leur écoulement ne peut par être décrit par la théorie des milieux continus classique qui néglige la taille des particules fluides. Les fluides polymériques (additifs) sont des fluides viscoélastiques présentant un caractère visqueux dû au solvant et un caractère élastique dû aux polymères (additifs).

### 2.1. Suspension de particules sphériques solides : effet de la concentration

La méthode la plus simple pour décrire la structure macroscopique d'un fluide polymérique ou fluide additivé est de voir celui-ci comme une suspension de particules rigides de forme sphères dans un solvant newtonien, la loi de comportement rhéologique du fluide newtonien (II-1) reste la même seulement la valeur de la viscosité dynamique du fluide change ; il s'agit de la théorie des suspensions diluées [37] dont les prémices remontent à 1906 avec les résultats d'Einstein, qui furent ensuite largement repris et modifiés, les plus simples et les plus utilisés sont :

#### a) *Modèle d'Einstein*

Les travaux d'Einstein en rhéologie portent sur les suspensions très diluées de sphères rigides, de concentration volumique ( $\Phi$ ), dans un solvant newtonien de viscosité dynamique ( $\mu_s$ ). Il propose la formule, valable pour tout type d'écoulement du fluide :

$$\frac{\mu}{\mu_s} = 1 + 2.5 * \Phi \quad (\text{II-3})$$

Où :

$\frac{\mu}{\mu_s}$  : viscosité relative moyenne de la suspension de particules solides

$\mu$  : viscosité du fluide additivé.

#### b) *Modèle de Batchelor et Green*

En 1972, Batchelor et Green, ajoutent à la formule d'Einstein un terme quadratique, pour tenir compte du mouvement brownien des particules, la formule (II-3) devient :

$$\frac{\mu}{\mu_s} = 1 + 2.5 * \Phi + 6.2 * \Phi^2 \quad (\text{II-4})$$

#### c) *Modèle de Ball et Richmond*

En 1980, Ball et Richmond modifient le modèle de Batchelor et Green, en faisant intervenir une concentration maximale admissible ( $\Phi_m \approx 0.64$  pour des sphères dans le solvant) :

$$\frac{\mu}{\mu_s} = \left( 1 - \frac{\Phi}{\Phi_m} \right)^{-2.5 * \Phi_m} \quad (\text{II-5})$$

**d) Modèle de Phan-Thien et Pham**

Phan-Thien et Pham, en 1987 proposent une expression plus complexe de la viscosité du fluide qui est donnée par la formule suivante :

$$\frac{\mu}{\mu_s} = (1 - \Phi)^{-2.5} \quad (\text{II-6})$$

**2.2. Modèle de Maxwell généralisé (approche Macro)**

Le modèle macroscopique de base généralisé des fluides viscoélastiques (polymériques) le plus utilisé en film mince, est le modèle de Maxwell généralisé (figure II-2), qui a la forme générale suivante [38, 39] :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = A \frac{d\tau_{xy}}{dt} + \tau_{xy} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = A \frac{d\tau_{zy}}{dt} + \tau_{zy} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \end{cases} \quad (\text{II-7})$$

Avec :

$A = 0$ , quand on ne tient pas compte de la partie élastique du fluide lubrifiant

$A = 1/G$ , quand la partie élastique du fluide lubrifiant est prise en compte dans le modèle rhéologique

$G$  : module de cisaillement du fluide lubrifiant

$\tau_e$  : contrainte de cisaillement équivalente définie à l'aide du critère de Von Mises [38, 39] :

$$\tau_e = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ji}}$$

Dans notre cas, seulement les contraintes de cisaillement sont considérés alors la contrainte équivalente s'exprime par [38, 39]:  $\tau_e = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2}$

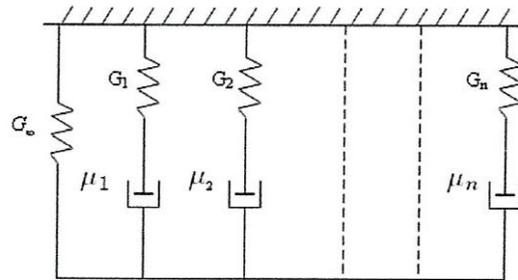
$F(\tau_e)$  : fonction linéaire ou non linéaire exprimant la forme du terme visqueux, viscoélastique linéaire ou non linéaire utilisé par le modèle rhéologique pouvant prendre différents formes dans la littérature ; pour le modèle newtonien par exemple, on a :  $A = 0$  et  $\frac{F(\tau_e)}{\tau_e} = \frac{1}{\mu}$

La dérivée  $\frac{d\tau_{ij}}{dt}$  peut se mettre sous différentes formes suivant que l'on tient compte de la rotation créée par le mouvement ou d'une distorsion possible. Trois formes peuvent être envisagées (annexe a) [38, 39] :

- la dérivée intrinsèque
- la dérivée de Jauman
- la dérivée d'Oldroyd

Afin de permettre une utilisation directe du modèle de Maxwell, pour des applications pratiques, on remplace la dérivée  $\frac{d\tau_{ij}}{dt}$  par l'une de ses dérivées ne faisant pas intervenir la variable de temps.

Il est à noter que l'application du module de cisaillement ( $G$ ) dans le modèle de loi rhéologique de comportement viscoélastique signifie physiquement la variation simultanée de la configuration et du volume de la structure du fluide.

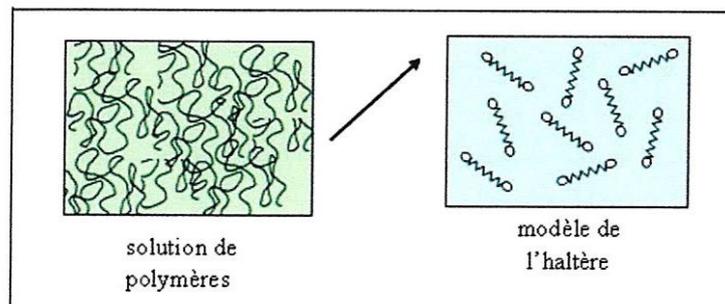


**Fig.II-2:** *Modèle de Maxwell généralisé*

### 2.3. Modèle de l'Haltère (approche Micro-Macro)

La modélisation du comportement de la molécule au sein du solvant permet de quantifier l'influence des effets viscoélastiques du fluide. L'utilisation de modèles rhéologiques basés sur une description détaillée de la macromolécule (Micro-Macro) dans la solution du solvant restreint cependant les développements analytiques lorsque la macromolécule n'est plus à l'équilibre. Le modèle de l'Haltère qui simplifie à l'extrême la macromolécule permet par contre de poursuivre ces développements et d'analyser la cinétique de la macromolécule.

Ce modèle est amplement développé par Bird et al [40, 41, 42]. La théorie de l'altère consiste à modéliser les molécules de polymères (additifs) par des systèmes billes-ressort appelés haltères (figure II-3). Le comportement visqueux est modélisé par l'action du frottement sur les billes, tandis que le ressort permet d'introduire l'élasticité du fluide en représentant les interactions entre molécules et les enchevêtrements de polymères.



**Fig.II-3:** *Modèle de l'altère*

Afin de diminuer la complexité des calculs, la théorie des haltères s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- l'écoulement du solvant est considéré homogène ;
- la concentration en macromolécules est uniforme au sein du mélange ;
- la distribution des vitesses de bille suit une distribution Maxwellienne. Cette distribution a été développée à l'origine pour définir la distribution des vitesses de molécules dans un gaz parfait ;
- l'inertie des billes est négligée.

Le tenseur de contraintes totales peut être calculé en sommant les contributions respectives du solvant ( $\sigma_{(s)ij}$ ) et des polymères ( $\sigma_{(p)ij}$ ) :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{(s)ij} + \sigma_{(p)ij} = -\mu_s \dot{\gamma}_{ij} + \sigma_{(p)ij} \quad (\text{II-8})$$

$i, j = 1, 2, 3$

Avec :

$\mu_s$  : viscosité du solvant

$\dot{\gamma}_{ij}$  : tenseur des taux de cisaillement

#### - *Modèle de FENE dumbbell modifié (FENE-P)*

Le modèle de FENE dumbbell modifié présente l'avantage de permettre une mise en équation complète de la loi rhéologique sans le calcul de la fonction de distribution des haltères dans le solvant qui s'exprime par (**annexe b**) [43]:

$$Z(\text{tr}(\overline{\sigma}_{(p)}))\sigma_{(p)ij} + \lambda_H \frac{\delta \sigma_{(p)ij}}{\delta t} - \lambda_H (\sigma_{(p)ij} - nkT\delta_{ij}) \frac{D \ln Z}{Dt} = -nkT\lambda_H \dot{\gamma}_{ij} \quad (\text{II-9})$$

Où, l'opérateur  $Z$ , est défini par la formule suivante :  $Z(\text{tr}(\sigma_{(p)})) = 1 + \frac{3}{b} \left[ 1 - \frac{\text{tr}(\overline{\sigma}_{(p)})}{3nkT} \right]$

Avec :  $b = HR_0^2 / kT$

$H$  : constante de raideur Hookéenne du connecteur

$R_0$  : constante désignant l'extension limite acceptable de l'haltère

$\lambda_H$  : constante de temps

$n$  : nombre volumique des haltères dans le solvant

$k$  : constante de Boltzman

$T$  : température du fluide

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker

$\frac{\delta()}{\delta}$  : opérateur qui spécifie la dérivée codeformationnelle contravariante [40].

La solution du système d'équations (II-9) permet d'obtenir les contraintes de cisaillement des polymères solubles dans le fluide.

## 2.4. Fluide à couples de contraintes ou fluide polaire (approche Micro-Macro)

La quasi-totalité des huiles utilisées pour le graissage des machines tournantes contiennent des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI). Ces additifs de longues chaînes

moléculaires (polymères), utilisés dans le but d'améliorer les performances des huiles lubrifiantes, entraînent une modification du comportement rhéologique de ces huiles (fluide non newtonien). D'après la théorie Milieux Continus de Vijay Kumar Stokes (Micro Continuum Theory) [1], la loi de comportement rhéologique de ce type de fluide dit à rhéologie complexe ou encore fluide polaire s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2}e_{ijk} M_{rk,r} \quad (\text{II-10})$$

Avec :  $M_{ij} = \frac{1}{3}M_{nn}\delta_{ij} + 4\eta K_{ij}$

$\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes non symétrique

$M_{rk}$  : tenseur des couples de contraintes

$e_{ijk}$  : tenseur de permutation d'ordre trois

$K_{ij}$  : tenseur du taux de rotation

$\mu$  : coefficient de viscosité dont la dimension est  $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$

$\eta$  : constante physique due à la présence des couples de contraintes ou additifs de viscosité (VI) dans le fluide, dont la dimension est  $[\eta] = MLT^{-1}$ .

### 3. EQUATIONS DE BASE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDES NEWTONIEN ET VISCOELASTIQUE NON NEWTONIEN

Les équations générales de la lubrification hydrodynamique ou hydrostatique permettent, compte tenu des conditions géométriques et cinématiques de contact, de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince et en particulier sa portance. Elles sont déduites des équations de la mécanique des milieux continus, appliquées à des fluides newtonien et viscoélastique ou polymériques (non newtoniens).

Les équations qui décrivent le comportement des fluides newtonien et non newtonien (viscoélastique) sont établies à partir :

- des principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus (lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement)
- régime d'écoulement isotherme en tout point du fluide la température constante.

#### 3.1. Equation de conservation de la masse

La loi fondamentale de la mécanique classique concernant la conservation de la masse, traduit le fait que la masse d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante. Cette équation peut être décrite par sa forme différentielle suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-11})$$

Avec :

$\rho$  : masse volumique du fluide.

Pour un fluide incompressible, la masse volumique reste constante, l'équation de continuité (II-11) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-12})$$

### 3.2. Equations de mouvement du fluide

Pour établir les équations de mouvement en film mince, on prend en compte les hypothèses suivantes :

- le milieu est continu ;
- le régime est permanent ;
- les forces de masse et de volume sont négligeables devant les forces de pression et de la viscosité ;
- l'épaisseur du film est très petite par rapport aux autres dimensions du contact.

Les équations de mouvement s'écrivent dans le cas d'un fluide newtonien ou d'un fluide viscoélastique [39] comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

La deuxième équation du système montre que la pression dans le fluide est indépendante de la variable (y), soit  $p = p(x, z)$ .

Le régime d'écoulement étant isotherme, on ne tient donc pas compte de l'équation de conservation d'énergie.

### 3.3. Dérivation de l'équation de Reynolds pour un fluide newtonien

L'équation de Reynolds est obtenue à partir de l'intégration de l'équation de continuité (II-12) à travers l'épaisseur du film (figure II-3) et la loi de comportement rhéologique (II-1), elle s'écrit sous la forme suivante [44] :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [h(U_1 + U_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [h(W_1 + W_2)] + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II-14})$$

L'équation (II-14) est l'équation de base de la lubrification hydrodynamique par fluide newtonien écrite pour un écoulement bidimensionnel (2D) en régime laminaire. Dans cette équation :

$p(x, z, t)$  : champ de pression dans le film

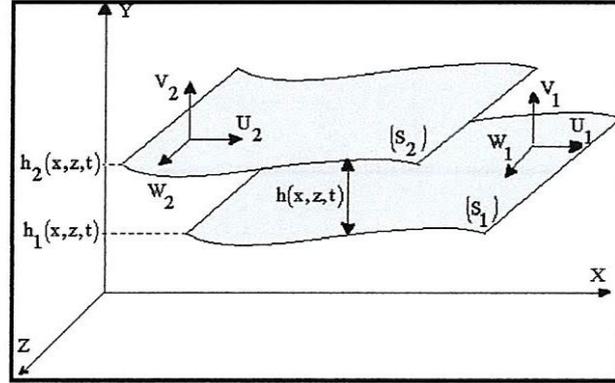
$h(x, z, t)$  : épaisseur du film

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide

$t$  : temps

$U_1$  et  $U_2$  : vitesses de parois de contact ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) selon l'axe  $x$

$W_1$  et  $W_2$  : vitesses de parois de contact ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) selon l'axe  $z$ .



**Fig.II-4:** Géométrie et cinématique du contact.

### 3.4. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide viscoélastique : modèle Maxwell

Pour ce type de fluide, l'équation de Reynolds modifiée vient de l'intégration de l'équation de continuité (II-12) à travers l'épaisseur du film (figure II-4) et la loi de comportement rhéologique (II-7). Dans l'annexe c, on montre que cette équation est de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ G_m \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G_m \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} [U_2(R_2 - F_m) + U_1 F_m] + \frac{\partial}{\partial z} [W_2(R_2 - F_m) + W_1 F_m] - \quad (\text{II-15})$$

$$U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + V_2 - \left( \frac{\partial L_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{mz}}{\partial z} \right)$$

Avec :

$U_1, V_1$  et  $W_1$  : vitesses de la paroi de contact ( $S_1$ ) selon les trois directions ;

$U_2, V_2$  et  $W_2$  : vitesses de la paroi de contact ( $S_2$ ) selon les trois directions ;

$L_{mx}$  et  $L_{mz}$  : termes représentant l'élasticité du fluide ;

$h_1$  et  $h_2$  : hauteurs des surfaces de contacts ;

$$R_2 = h_2 - h_1 = h$$

$$F_m = \frac{1}{J_{m2}} \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} y dy$$

$$G_m = \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} y^2 dy - I_{m2} F_m$$

$$L_{mx} = \int_0^h A \frac{d\tau_{xy}}{dt} y dy - K_{mx2} F_m$$

$$L_{mz} = \int_0^h A \frac{d\tau_{zy}}{dt} y dy - K_{mz2} F_m$$

$$I_{m2} = \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} y dy$$

$$J_{m2} = \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} dy$$

$$K_{mx2} = \int_0^h A \frac{d\tau_{xy}}{dt} dy$$

$$K_{mz2} = \int_0^h A \frac{d\tau_{zy}}{dt} dy$$

### 3.5. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide viscoélastique : modèle FENE-P

Pour un fluide viscolélastique (polymérique), la loi rhéologique du modèle FENE-P (II-8) en film mince (figure II-4) devient :

$$\tau_{xy} = -\mu_s \dot{\gamma}_{xy} + \tau_{(p)xy} \quad (\text{II-16})$$

$$\tau_{zy} = -\mu_s \dot{\gamma}_{zy} + \tau_{(p)zy} \quad (\text{II-17})$$

Avec, les gradients de vitesses qui sont :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II-18})$$

En substituant ces expressions dans les équations de mouvement (II-13), on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\mu_s \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{(p)xy} \right) \quad (\text{II-19})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\mu_s \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{(p)zy} \right) \quad (\text{II-20})$$

- Une première intégration suivant l'épaisseur du film permet d'avoir les gradients de vitesses du fluide à travers l'épaisseur du film (figure II-4) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\mu_s} \frac{\partial p}{\partial x} y + \frac{1}{\mu_s} \tau_{(p)xy} + \frac{1}{\mu_s} C_{x1}(x,z) \quad (\text{II-21})$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\mu_s} \frac{\partial p}{\partial z} y + \frac{1}{\mu_s} \tau_{(p)zy} + \frac{1}{\mu_s} C_{z1}(x,z) \quad (\text{II-22})$$

$C_{x1}$  et  $C_{z1}$  sont des constantes d'intégration indépendantes de  $y$ .

- Une deuxième intégration suivant l'épaisseur du film permet d'accéder aux expressions des composantes du champ de vitesses :

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} I + K_x + C_{x1}(x,z)J + C_{x2}(x,z) \quad (\text{II-23})$$

$$w = \frac{\partial p}{\partial z} I + K_z + C_{z1}(x,z)J + C_{z2}(x,z) \quad (\text{II-24})$$

$C_{x2}$  et  $C_{z2}$  sont des constantes d'intégration indépendantes de  $y$ .

$$\text{Avec : } I = - \int_{h_1}^y \frac{1}{\mu_s} y dy$$

$$K_x = \int_{h_1}^y \frac{\tau_{(p)xy}}{\mu_s} dy$$

$$K_z = \int_{h_1}^y \frac{\tau_{(p)zy}}{\mu_s} dy$$

$$J = - \int_{h_1}^y \frac{1}{\mu_s} dy$$

Pour :

$$y = h_1, \text{ on a : } I = K_x = K_z = J = 0$$

$$y = h_2 : I_2 = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\mu_s} y dy, K_{x2} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\tau_{(p)xy}}{\mu_s} dy, K_{z2} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\tau_{(p)zy}}{\mu_s} dy \text{ et } J_2 = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\mu_s} dy$$

Les quatre constantes d'intégration  $C_{x1}$ ,  $C_{z1}$ ,  $C_{x2}$  et  $C_{z2}$  sont calculées en tenant compte des conditions aux limites sur le champs de vitesses (figure II-4).

### 3.5.1. Conditions aux limites sur les vitesses

On suppose que les particules du fluide adhèrent parfaitement aux surfaces de parois du contact ; autrement dit, le glissement des particules le long des parois de contact est négligé.

On a alors :

$$\text{Pour : } y = h_1, \text{ on a : } u = U_1, v = 0 \text{ et } w = W_1$$

$$y = h_2 : u = U_2, v = V_2 = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \text{ et } w = W_2 \quad (\text{II-25})$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} C_{x1}(x,z) = \frac{U_2 - U_1}{J_2} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{I_2}{J_2} - \frac{K_{x2}}{J_2} \\ C_{z1}(x,z) = \frac{W_2 - W_1}{J_2} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{I_2}{J_2} - \frac{K_{z2}}{J_2} \\ C_{x2} = C_{z2} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-26})$$

Avec ces expressions de constantes, les vitesses d'écoulement du fluide s'écrivent :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial p}{\partial x} \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + (U_2 - U_1 - K_{x2}) \frac{J}{J_2} + K_x + U_1 \\ w = \frac{\partial p}{\partial z} \left( I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + (W_2 - W_1 - K_{z2}) \frac{J}{J_2} + K_z + W_1 \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

Les expressions des gradients de vitesses sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\mu_s} \frac{\partial p}{\partial x} \left( y - \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{1}{\mu_s} \left( \frac{U_2 - U_1}{J_2} - \frac{K_{x2}}{J_2} \right) + \frac{\tau_{(p)xy}}{\mu_s} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\mu_s} \frac{\partial p}{\partial z} \left( y - \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{1}{\mu_s} \left( \frac{W_2 - W_1}{J_2} - \frac{K_{z2}}{J_2} \right) + \frac{\tau_{(p)zy}}{\mu_s} \end{cases} \quad (\text{II-28})$$

- L'intégration de l'équation de continuité (II-12) à travers l'épaisseur du film (figure II-4) :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (\text{II-29})$$

Avec :

$$\begin{cases} I_1 = \int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ I_2 = \int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial v}{\partial y} dy = [v]_{h_1}^{h_2} = V_2 = \frac{dh}{dt} \\ I_3 = \int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial w}{\partial z} dy \end{cases}$$

Le calcul des intégrales  $I_1$  et  $I_3$  s'effectue à l'aide du théorème de Leibnitz :

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial x_i} dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{h_1}^{h_2} F(x,y,z,t) dy - F(x,h_2,z,t) \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x,h_1,z,t) \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \quad (\text{II-30})$$

$i = 1, 2, 3$

Donc :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} u dy - U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \\ I_2 = V_2 = \frac{dh}{dt} \\ I_3 = \frac{\partial}{\partial z} \int_{h_1}^{h_2} w dy - W_2 \frac{\partial h_2}{\partial z} + W_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II-31})$$

Les intégrales  $\int_{h_1}^{h_2} u dy$  et  $\int_{h_1}^{h_2} w dy$  sont calculées par parties, on obtient :

$$\begin{cases} \int_{h_1}^{h_2} u dy = U_2(h_2 - h_1) - \int_{h_1}^{h_2} (y - h_1) \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ \int_{h_1}^{h_2} w dy = W_2(h_2 - h_1) - \int_{h_1}^{h_2} (y - h_1) \frac{\partial w}{\partial y} dy \end{cases} \quad (\text{II-32})$$

En remplaçant  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  par leurs expressions dans l'équation (II-29), on obtient l'équation de la mécanique des film minces viscoélastiques (modèle FENE-P) qu'on appelle l'équation de Reynolds modifiée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( G_p \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G_p \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (U_2(R_2 - F) + U_1 F) - U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + V_2 + \\ \frac{\partial}{\partial z} (W_2(R_2 - F) + W_1 F) - W_2 \frac{\partial h_2}{\partial z} + W_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} &- \left( \frac{\partial L_{px}}{\partial x} + \frac{\partial L_{pz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-33})$$

Où :  $R_2 = h_2 - h_1 = h$

$$L_{px} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\tau_{(p)xy}}{\mu_s} y dy - K_{11} \cdot F$$

$$L_{pz} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\tau_{(p)zy}}{\mu_s} y dy - K_{22} \cdot F$$

$$F = -\frac{1}{J_2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\mu_s} y dy$$

$$G_p = -\int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{\mu_s} y^2 dy - I_2 \cdot F$$

Dans cette équation :

$p(x, z, t)$  : pression dans le film

$h(x, z, t)$  : épaisseur du film

$\mu_s$  : viscosité dynamique du solvant

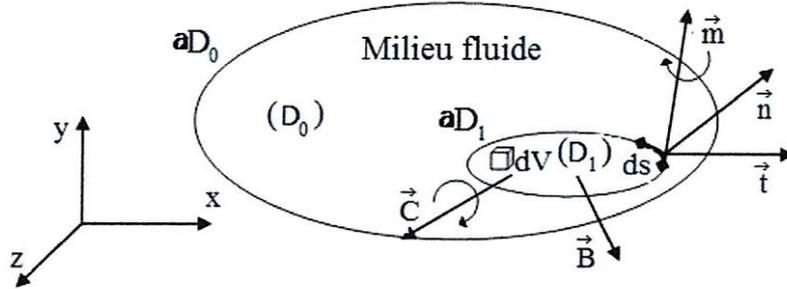
$L_{px}$  et  $L_{pz}$  : termes représentant l'élasticité du fluide lubrifiant

### 3.6. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée pour fluides à couples de contraintes ou fluides polaires

En se basant sur la théorie des Milieux Continus de Vijay Kumar Stokes [1], les équations de mouvement d'un fluide incompressible à couples de contraintes sont :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\rho \vec{C}) + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} - \eta \vec{\nabla}^4 \vec{V} \quad (\text{II-34})$$

Où, les vecteurs  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{C}$  représentent respectivement le champ de vitesse d'écoulement d'une particule fluide, la force de volume par unité de masse et le couple de volume par unité de masse (figure II-5).



**Fig.II-5:** Schématisation des efforts de surface et de volume agissant sur un élément de fluide polaire

En négligeant les forces de volume et les couples de volume, les équations du mouvement (II-34) s'écrivent en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right) - 2\eta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \quad (\text{II-35-a})$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \right) - 2\eta \left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \quad (\text{II-35-b})$$

$$\rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \eta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right) - 2\eta \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial z^2} \right) \quad (\text{II-35-c})$$

Où :  $p$  est la pression,  $\rho$  et  $\mu$  sont respectivement la masse volumique et le coefficient de viscosité du fluide et  $\eta$  est une constante physique qui représente l'effet des couples de contraintes dans le fluide.

En tenant compte des hypothèses de la lubrification en film mince [45], les équations de mouvement du fluide (II-35) se réduisent à (annexe d) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \end{array} \right. \quad (II - 36a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (II - 36b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \end{array} \right. \quad (II - 36c)$$

La deuxième équation du système montre que la pression dans le fluide est indépendante de la variable (y),  $p = p(x, z)$ .

Ces équations auxquelles s'ajoute l'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible (II-12) permettent de connaître formellement, et après intégration, le champ de vitesse, la pression et les contraintes de cisaillement dans le film lubrifiant.

### 3.6.1. Expression du champ de vitesses d'écoulement de fluide à couples des contraintes

On peut écrire l'équation (II-36.a) sous la forme suivante :

$$\eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (II-37)$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre quatre à coefficients constants, la solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière.

a) *Solution homogène :*

On suppose :  $t = \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\text{L'équation (II-37) devient : } \eta t^4 + \mu t^2 = 0 \quad (II-38)$$

Ses racines sont :  $t = 0$  est racine double

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} \quad \text{et} \quad t = -\sqrt{\frac{\mu}{\eta}} \quad \text{sont des racines simples}$$

La solution générale de l'équation (II-38) :

$$u_G(y) = A_0 + A_1 y + C_1 e^{\sqrt{\frac{\mu}{\eta}} y} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\eta}} y} \quad (II-39)$$

Avec,  $A_0, A_1, C_1, C_2$  qui appartiennent à  $\mathfrak{R}$ .

On a :  $\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} = \frac{1}{\ell}$ , on remplace dans l'équation (II-39) qui devient :

$$u_G(y) = A_0 + A_1 y + C_1 e^{\left(\frac{y}{\ell}\right)} + C_2 e^{-\left(\frac{y}{\ell}\right)} \quad (II-40)$$

C'est la solution homogène

b) *Solution particulière*

On suppose un polynôme d'ordre deux :  $u_p = ay^2 + by + c$  (II-41)

$$\text{Donc, } \begin{cases} \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} = 2a \\ \frac{\partial^4 u_p}{\partial y^4} = 0 \end{cases}$$

En remplaçant U par  $U_p$  dans l'équation (II-37), on obtient :  $\eta \times 0 - \mu(2a) = -\frac{\partial p}{\partial x}$

$$\text{Donc, } a = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Et comme, il n'y a aucune condition sur b et c, on choisit de prendre :  $b = c = 0$

On remplace ces constantes dans le polynôme (II-41), on obtient :

$$u_p = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2$$

Enfin la solution générale de l'équation (II-37) est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$u = u_G + u_p = A_0 + A_1 y + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 e^{\frac{y}{\ell}} + C_2 e^{-\frac{y}{\ell}}$$

D'où:

$$u(x, y, z) = A_0 + A_1 y + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + B_1 \cosh\left(\frac{y}{\ell}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{y}{\ell}\right) \quad (\text{II-42})$$

Avec,  $A_0, A_1, B_1$  et  $B_2$  sont des constantes dans  $\mathfrak{R}$ .

Et,  $B_1 = C_1 + C_2$ ,  $B_2 = C_1 - C_2$

$$\text{Où : } C_1 e^{\frac{y}{\ell}} + C_2 e^{-\frac{y}{\ell}} = B_1 \left( \frac{e^{\frac{y}{\ell}} + e^{-\frac{y}{\ell}}}{2} \right) + B_2 \left( \frac{e^{\frac{y}{\ell}} - e^{-\frac{y}{\ell}}}{2} \right)$$

$$\text{Donc, } C_1 e^{\frac{y}{\ell}} + C_2 e^{-\frac{y}{\ell}} = \frac{B_1}{2} e^{\frac{y}{\ell}} + \frac{B_1}{2} e^{-\frac{y}{\ell}} + \frac{B_2}{2} e^{\frac{y}{\ell}} - \frac{B_2}{2} e^{-\frac{y}{\ell}}$$

$$\begin{array}{l} \text{Et, } B_1 + B_2 = 2C_1 \\ B_1 - B_2 = 2C_2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} B_1 = C_1 + C_2 \\ B_2 = C_1 - C_2 \end{array}$$

Pour l'équation (II-36.c), on trouve la solution générale de la même manière :

$$w(x, y, z) = A'_0 + A'_1 y + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + B'_1 \cosh\left(\frac{y}{\ell}\right) + B'_2 \sinh\left(\frac{y}{\ell}\right) \quad (\text{II-43})$$

Donc les solutions générales des équations (II-36.a) et (II-36.c) sont :

$$u(x, y, z) = \underbrace{A_0 + A_1 y + B_1 \cosh\left(\frac{y}{\ell}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{y}{\ell}\right)}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) y^2}_{\text{solution particulière}} \quad (\text{II-44-a})$$

$$w(x, y, z) = \underbrace{A'_0 + A'_1 y + B'_1 \cosh\left(\frac{y}{\ell}\right) + B'_2 \sinh\left(\frac{y}{\ell}\right)}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) y^2}_{\text{solution particulière}} \quad (\text{II-44-b})$$

L'identification des constantes d'intégration nécessite l'utilisation des conditions aux limites sur la vitesse (ou condition de non glissement) ; en choisissant de fixer l'origine du système d'axes confondue avec la paroi 1 (figure II-6) ce qui impose à la vitesse de cette paroi 1, selon  $y$  d'être nulle (théorie de Reynolds : paroi inférieure ( $S_1$ ) confondue avec le plan du référentiel ( $0, x, z$ )) [1]. Dans ce cas, les conditions aux limites sur les s'écrivent :

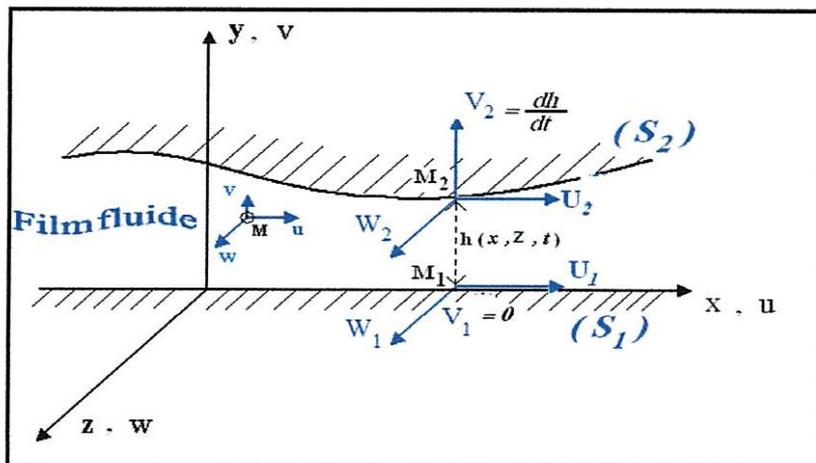
$$\text{Pour, } y = 0 : u(x, 0, z) = U_1, \quad w(x, 0, z) = W_1 \quad (\text{II-45.a})$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0 \quad (\text{II-45.b})$$

$$\text{Pour, } y = h : u(x, h, z) = U_2, \quad w(x, h, z) = W_2 \quad (\text{II-45.c})$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=h} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=h} = 0 \quad (\text{II-45.d})$$

La condition (II-45-c) est due au non glissement entre le fluide et les parois de contact et les conditions (II-45-b) et (II-45-d) sont dues à l'absence des couples de contraintes au niveau des parois.



**Fig.II-6:** L'origine du système d'axes confondue avec la paroi 1

Compte tenu des conditions limites (II-45), le champ de vitesse d'une particule fluide polaire peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{y}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left[ y^2 - yh + 2\ell^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right] \right] \\ w = W_1 + (W_2 - W_1) \frac{y}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \left[ y^2 - yh + 2\ell^2 \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2\ell}\right)} \right] \right] \end{array} \right. \quad (\text{II-46})$$

Avec,  $\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$  est le paramètre des couples de contraintes ou la longueur de la chaîne

moléculaire des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) dont la dimension est  $[\ell]=L$ .

L'intégration de l'équation de continuité (II-12) à travers l'épaisseur du film (figure II-6) donne :

$$\int_0^{h(x,z,t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy = \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial v}{\partial y} dy + \int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial w}{\partial z} dy = 0 \quad (\text{II-47})$$

En utilisant la formule de Leibnitz (II-30), qui permet d'invertir l'opérateur de dérivation avec le symbole d'intégration, on obtient :

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dy + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dy = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy}_{I_1} - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy}_{I_2} - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + V_2 = 0 \quad (\text{II-48})$$

L'intégration de  $I_1$  et  $I_2$  sont calculées par parties :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \left( \frac{U_2 + U_1}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left[ 1 - 12 \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \left[ 1 - 2 \frac{\ell}{h} \tanh\left(\frac{h}{2\ell}\right) \right] \right] \right] \\ I_2 = \left( \frac{W_2 + W_1}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \left[ 1 - 12 \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \left[ 1 - 2 \frac{\ell}{h} \tanh\left(\frac{h}{2\ell}\right) \right] \right] \right] \end{array} \right. \quad (\text{II-49})$$

En remplaçant les expressions  $I_1$  et  $I_2$  dans l'équation (II-48), on obtient :

$$\left( \frac{U_2 + U_1}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} h^3 \left[ 1 - 12 \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \left[ 1 - 2 \frac{\ell}{h} \tanh\left(\frac{h}{2\ell}\right) \right] \right] \right] - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \left( \frac{W_2 + W_1}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} h^3 \left[ 1 - 12 \left( \frac{\ell}{h} \right)^2 \left[ 1 - 2 \frac{\ell}{h} \tanh\left(\frac{h}{2\ell}\right) \right] \right] \right] - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + V_2 = 0 \quad (\text{II-50})$$

Pour un fluide à couples des contraintes (polymérique) et isovisqueux ( $\mu$  ne dépend pas de la pression) l'équation (II-50) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( h^3 - 12\ell^2 h + 24\ell^3 \tanh\left(\frac{h}{2\ell}\right) \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( h^3 - 12\ell^2 h + 24\ell^3 \tanh\left(\frac{h}{2\ell}\right) \right) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6\mu \left( (U_2 + U_1) \frac{\partial h}{\partial x} - 2U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + (W_2 + W_1) \frac{\partial h}{\partial x} - 2W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + 2V_2 \right) \quad (\text{II-51})$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ G(h, \ell) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G(h, \ell) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6\mu \left( (U_2 + U_1) \frac{\partial h}{\partial x} - 2U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + (W_2 + W_1) \frac{\partial h}{\partial x} - 2U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - 2W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + 2V_2 \right) \quad (\text{II-52})$$

Avec :  $G(h, \ell) = h^3 - 12\ell^2 h + 24\ell^3 \tanh\left(\frac{h}{2\ell}\right)$

C'est l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide à couples de contraintes ou fluide polaire.

Où :

$p(x, z, t)$  : pression dans le film

$h(x, z, t)$  : épaisseur du film

$t$  : temps

$\mu$  : constante de viscosité du fluide

$\ell$  : paramètre des couples de contraintes

### 3.7. Action du fluide sur les parois du contact

L'action de contact  $\vec{t}$ , appelée vecteur contrainte, en un point  $M$  de la surface (paroi) de contact, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal  $\vec{n}$  (figure II-5) :

$$\vec{t}(M, \vec{n}) = \sum_{i=1}^3 t_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij}^{(M)} n_j^{(M)} \vec{x}_i \quad (\text{II-53})$$

$n_j$  représente les composantes du vecteur normal en  $M$  orienté de la surface vers le fluide (normale extérieure).

Par exemple dans le cas de l'écoulement d'un fluide newtonien et sous les hypothèses de la mécanique des films minces visqueux, la matrice représentative du tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma_{ij}(M)] = \begin{bmatrix} -p & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -p & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{zy} & -p \end{bmatrix} \quad (\text{II-54})$$

Les éléments de réduction en un point  $c$  quelconque du torseur des actions de contact du fluide sur la surface (S) du contact seront donc :

- *Résultante* :  $\vec{R} = \iint_{(S)} \vec{t}(M, \vec{n}) dS$  (II-55)

- *Moment en (c)* :  $\vec{M}(c) = \iint_{(S)} c\vec{M} \wedge \vec{t}(M, \vec{n}) dS$  (II-56)

Lorsque la surface (S) est un plan admettant  $\vec{y}$  comme normal, l'intégration du champ de pression sur la surface permet de calculer la charge extérieure (W) que le contact peut supporter :

$$W = \int \int_{(S)} p dS \quad (\text{II-57})$$

Tandis que l'intégration des contraintes de cisaillement permet de déterminer les composantes selon les axes x et z de la force tangentielle exercée par le fluide sur la paroi (frottement) :

$$\begin{cases} F_x = \iint_{(S)} \tau_{xy} \Big|_{y=h_1 \text{ ou } h_2} dS \\ F_z = \iint_{(S)} \tau_{zy} \Big|_{y=h_1 \text{ ou } h_2} dS \end{cases} \quad (\text{II-58})$$

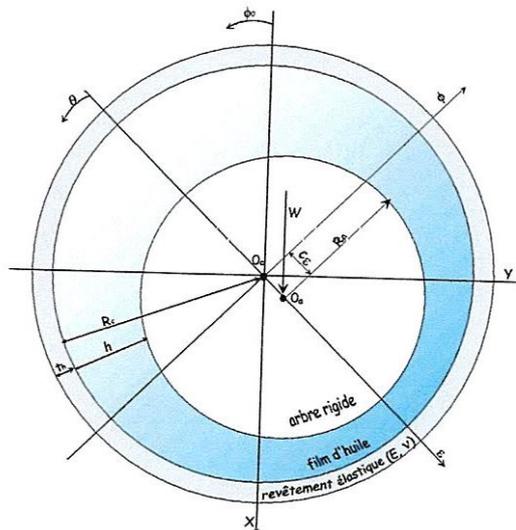
#### 4. EXPRESSIONS DES EQUATIONS DE REYNOLDS MODIFIEES DANS LE CAS D'UN PALIER LISSE LUBRIFIE PAR FLUIDES POLYMERIQUES OU ADDITIVES (NON NEWTONIENS)

Les paliers lisses ont pour objectif principal de supporter une charge radiale. Ces organes de support et de guidage en rotation sont de plus en plus utilisés dans les machines tournantes et alternatives.

Dans un palier où l'arbre est muni d'un mouvement de rotation ( $\omega$ ) dans un coussinet fixe (figure II-7), le jeu radial (C) étant très petit devant le rayon ( $R_c$ ) du coussinet ou l'arbre ( $R_a$ ), on peut négliger la courbure du film et développer le palier suivant sa direction circonférentielle ( $\theta$ ). Dans ces conditions, la surface du coussinet est confondue avec le plan (o, x, z) du référentiel (figure II-8).



a) Photographie d'un palier lisse avec une rainure circonférentielle totale

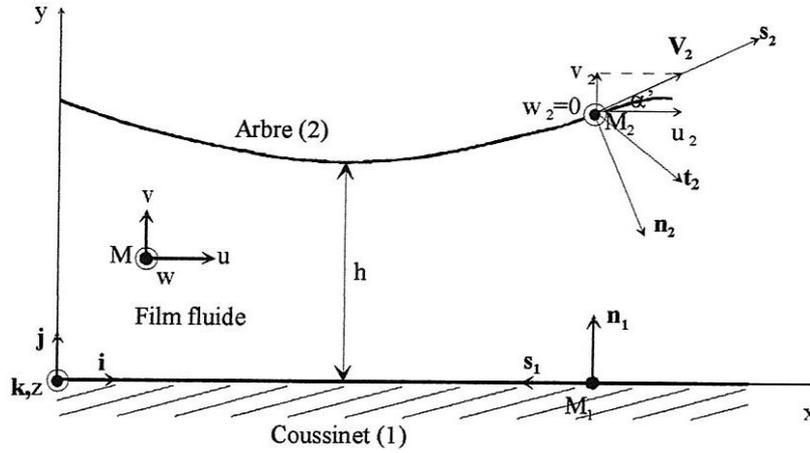


c) section droite d'un palier lisse

**Fig.II-7:** Schéma d'un Palier lisse.

Les conditions cinématiques relatives aux surfaces de contact (figure II-8) sont :

$$\begin{cases} U_1 = V_1 = W_1 = 0 & (\text{coussinet fixe}) \\ W_2 = 0 & (\text{vitesse de l'arbre selon l'axe } z) \end{cases} \quad (\text{II-59})$$



**Fig. II-8:** Section droite du palier développé.

Les expressions de composantes  $U_2$  et  $V_2$  (suivant les directions  $x$  et  $y$ ) du vecteur vitesse  $\vec{V}_2$  d'un point  $M_2$  appartient à la surface de l'arbre sont données comme suit (**annexe e**) :

$$\begin{cases} U_2 = \omega R + C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta - \frac{\partial h}{\partial x} (C\dot{\varepsilon} \cos \theta + C\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta) \\ V_2 = \omega R \frac{\partial h}{\partial x} + C\dot{\varepsilon} \cos \theta + C\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta + \frac{\partial h}{\partial x} (C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta) \end{cases} \quad (\text{II-60})$$

Avec :

$R \approx R_a \approx R_c$  : rayon du palier

$\theta$  : coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur la ligne des centres du palier

$\omega$  : vitesse angulaire de l'arbre

$\varepsilon$  : excentricité relative de palier,  $\varepsilon = \left(\frac{e}{C}\right)$

$e$  : excentricité du palier

$\phi$  : angle de calage du palier.

On remplace les expressions (II-59) et (II-60) dans l'équation (II-52), on obtient l'équation de Reynolds modifiée dans le cas d'un palier lisse lubrifié par fluide à couples de contraintes et isovisqueux fonctionnant en régime hydrodynamique :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ G(h, \ell) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G(h, \ell) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II-61})$$

Avec :  $\frac{\partial h}{\partial t} = C(\dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon\dot{\phi} \sin \theta)$  et  $x = R\theta$ .

Dans le cas du palier lubrifié par fluide viscoélastique (modèle FENE-P) et isovisqueux, l'équation de Reynolds modifiée (II-33) devient :

$$\frac{\partial}{R^2 \partial \theta} \left( -h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu_s \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu_s \frac{\partial h}{\partial t} - 12\mu_s \left( \frac{\partial L_{px}}{R \partial \theta} + \frac{\partial L_{pz}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-62})$$

Avec :  $I_2 = -\int_0^h \frac{1}{\mu_s} y dy = -\frac{1}{2\mu_s} h^2$ ,  $J_2 = -\int_0^h \frac{1}{\mu_s} dy = -\frac{1}{\mu_s} h$ ,  $F = -\frac{1}{J_1} \int_0^h \frac{1}{\mu_s} y dy = \frac{h}{2}$ ,

$$G_p = -\int_0^h \frac{1}{\mu_s} y^2 dy - I_2 \cdot F = -\frac{h^3}{12\mu_s}$$
,  $K_{x2} = \frac{1}{\mu_s} \int_0^h \tau_{(p)xy} dy$ ,  $K_{z2} = \frac{1}{\mu_s} \int_0^h \tau_{(p)zy} dy$ 

$$L_{px} = \frac{1}{\mu_s} \int_0^h \tau_{(p)xy} y dy - \frac{h}{2\mu_s} \int_0^h \tau_{(p)xy} dy$$
 et  $L_{pz} = \frac{1}{\mu_s} \int_0^h \tau_{(p)zy} y dy - \frac{h}{2\mu_s} \int_0^h \tau_{(p)zy} dy$

Dans le cas du palier lubrifié par fluide viscoélastique modèle de Maxwell et isovisqueux, l'équation de Reynolds modifiée (II-15) devient :

$$\frac{\partial}{R \partial \theta} \left[ G_m \frac{\partial P}{R \partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G_m \frac{\partial P}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{R \partial \theta} [U_2 (R_2 - F_m)] - U_2 \frac{\partial h}{R \partial \theta} + V_2 - \left( \frac{\partial L_{mx}}{R \partial \theta} + \frac{\partial L_{mz}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-63})$$

Avec :  $F_m = \frac{1}{J_{m2}} \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} y dy$ ,  $G_m = \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} y^2 dy - I_{m2} F_m$ ,  $L_{mx} = \int_0^h A \frac{d\tau_{xy}}{dt} y dy - K_{mx2} F_m$ ,

$$L_{mz} = \int_0^h A \frac{d\tau_{zy}}{dt} y dy - K_{mz2} F_m$$

$F(\tau_e)$  : fonction linéaire ou non linéaire exprimant la forme du terme visqueux, viscoélastique linéaire ou non linéaire

Les hypothèses formulées pour la mise en place de l'équation de Reynolds modifiée sont :

- *Le milieu est continu* : l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film ;
- *L'écoulement est laminaire* ;
- *Les forces de volume et les couples de volume sont négligeables* ;
- *Les forces d'inertie dans le fluide sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression* : ceci est vérifié dans le cas des films minces tant que l'écoulement est laminaire ;
- *Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact* : ainsi, sur les parois, la vitesse du fluide est égale à celle des parois ;
- *La courbure générale du film est négligée*, on peut démontrer qu'en film mince, dans un palier par exemple, l'effet de courbure est du second ordre ;
- *La vitesse d'une des parois du contact est toujours tangente à cette paroi* : ce qui permet de placer le système d'axe (O, x, z) sur la paroi (S<sub>1</sub>) où  $h_1 = 0$  et  $h_2 = h(x, y, t)$  (figure II-8) ;

- La viscosité du fluide ne varie pas selon l'épaisseur du contact ;
- La masse volumique du fluide est constante ;
- L'épaisseur du film est très faible devant la largeur et la longueur du contact, le rapport entre ces grandeurs doit être de l'ordre de  $10^{-3}$ . C'est l'hypothèse fondamentale de la lubrification hydrodynamique.

#### 4.1. Equations géométriques du film lubrifiant

##### 4.1.1. Cas du palier aligné

Dans le cas du palier aligné lisse et rigide (figure II-7), l'équation géométrique définie en chaque point et à chaque instant l'épaisseur du film lubrifiant est donnée par [44] :

$$h(\theta, t) = C(1 + \varepsilon(t)\cos\theta) \quad (\text{II-64})$$

La prise en considération des déformations élastiques du revêtement de l'alésage conduit à la modification de l'équation géométrique du film (figure II-7). Pour un palier compliant ou déformable, dans le cas où le Modèle Couche Élastique Mince est utilisé l'expression de l'épaisseur du film d'huile (II-64) devient [46] :

$$h(\theta) = C(1 + \varepsilon \cos\theta) + U_r \quad (\text{II-65})$$

Où,  $U_r$  est le déplacement radial défini par :  $U_r = L_0 \times P$

Avec :  $p$  est la pression hydrodynamique engendrée dans le film lubrifiant et  $L_0$  est l'opérateur de compliance qui s'exprime comme suit :  $L_0 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu) t_h}{(1 - \nu) E}$

où :  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson de la couche élastique mince représentant le revêtement du palier et  $t_h$  étant l'épaisseur du revêtement de surface du palier (figure II-7).

**Remarque** : Notons que l'hypothèse de Modèle Couche Élastique Mince (MCEM) permet de déduire un modèle de calcul rapide du champ de déplacement radial. L'épaisseur de la couche élastique mince du revêtement est très petite devant le rayon du palier et ce modèle est suffisant pour la prise en considération des effets de déformations élastiques dans le calcul des performances statiques et dynamiques du palier fluide.

##### 4.1.2. Cas du palier mésaligné

Dans le cas du palier mésaligné, les axes du coussinet et de l'arbre ne sont plus parallèles (figure II-9). Dans ces conditions, l'expression de l'épaisseur du film d'huile est donnée par [45] :

$$h = C \left( 1 + \varepsilon \cos \theta + \delta \frac{z}{L} \cos(\theta - \beta) \right) \quad (\text{II-66})$$

où :  $\delta = \frac{d}{C}$  est le mésalignement relatif,  $\beta$  l'angle de mésalignement,  $d$  est l'amplitude de mésalignement caractérisée par le module de la projection de l'axe  $C_1C_2$  de l'arbre sur la section médiane et  $L$  est la longueur du palier.

Le domaine de variation de ces paramètres est :  $0 \leq \delta < \delta_m$  et  $-180^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$

$\delta_m$  représente la valeur maximale que peut prendre  $\delta$  pour une excentricité et un angle de mésalignement fixés dont l'expression est :

$$\delta_m = 2 \left( \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta} - \varepsilon |\cos \beta| \right) \quad (\text{II-67})$$

La valeur de  $\delta_m$  est toujours comprise entre 0 et 2.

$D_m$  est le degré du mésalignement défini par  $D_m = \frac{\delta}{\delta_m}$  dont la valeur est comprise entre 0 et 1

La symétrie du palier par rapport au plan défini par la section médiane permet de réduire l'intervalle de variation de  $\beta$  à  $\pm 90^\circ$ .

La prise en considération des déformations élastiques du revêtement de l'alésage conduit à la modification de l'équation géométrique du film. Pour un palier compliant mésaligné et dans le cas où le Modèle Couche Elastique Mince est utilisé l'expression de l'épaisseur du film d'huile (II-66) devient :

$$h = C \left( 1 + \varepsilon \cos \theta + \delta \frac{z}{L} \cos(\theta - \beta) \right) + U_r \quad (\text{II-68})$$

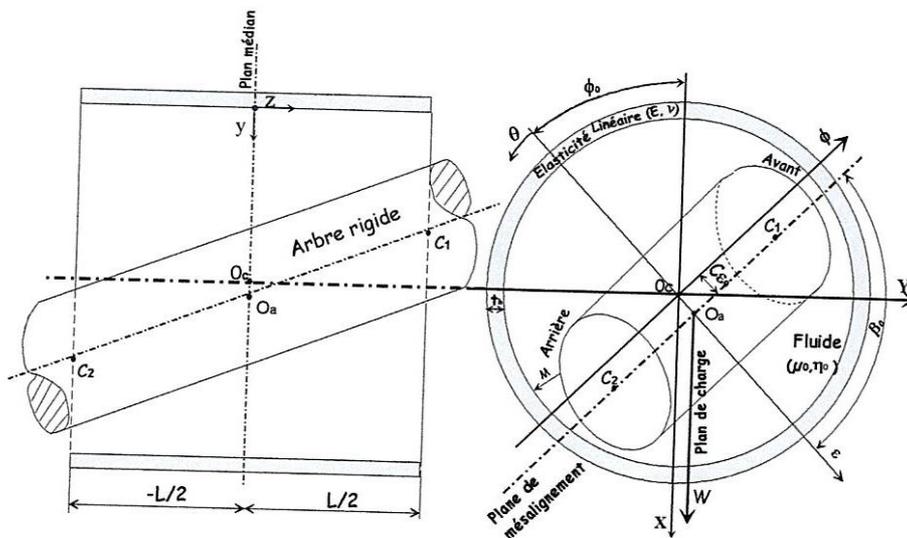


Fig.II-9: configuration d'un palier mésaligné

## 4.2. Conditions aux limites sur la pression

Pour résoudre l'équation de Reynolds modifiée afin de déterminer le champ de pression, il est nécessaire d'appliquer des conditions aux limites particulières sur la pression, qui permettront de simuler au plus près la réalité. Le champ de pression dans le film lubrifiant doit satisfaire à l'équation de Reynolds modifiée et aux conditions aux limites sur la pression, ces conditions peuvent être classées en trois catégories :

- conditions liées à l'alimentation du palier (rainure, alvéole, orifice d'alimentation)
- conditions liées à l'environnement dans lequel fonctionne le palier (pression atmosphérique, etc.)
- conditions liées à l'écoulement du fluide dans le palier (film complet, film rompu).

### 4.2.1. Conditions liées à l'alimentation et à l'environnement

Dans notre étude, on s'intéresse à un palier lisse de longueur finie alimenté par une rainure axiale, on a donc :

$p = p_{\text{alimentation}}$  , dans la rainure d'alimentation du palier

$p = p_{\text{atmosphérique}}$  , aux extrémités ( $z = \pm \frac{L}{2}$ ) du palier (II-69)

L est la longueur du palier

La pression de référence ( $p_a$ ) est la pression atmosphérique.

### 4.2.2. Conditions liées à l'écoulement du fluide lubrifiant

On note que dans un palier la géométrie du film est convergente puis divergente, il peut y avoir rupture du film (cavitation) dans l'espace divergent lorsque la pression devient inférieure à la pression atmosphérique. Les conditions limites relatives à cette situation sont :

#### a) Conditions de Gümbel ou de demi-Sommerfeld

Gümbel impose entre  $\theta = \pi$  et  $\theta = 2\pi$ , l'annulation des termes de pression négatifs (figure II-10.a). Il est à noter que ces conditions entraînent en  $\theta = \pi$  une discontinuité dans l'écoulement et ne permettent pas de vérifier la conservation du débit entre les zones active et inactive du palier :

$$\begin{cases} p(\theta = 0, z) = 0 \\ p(\theta = \pi, z) = 0 \\ p(\theta, z) = 0 \quad \text{si} \quad \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \quad (\text{II-70})$$

Cette solution est fréquemment employée pour les paliers courts car elle permet d'obtenir des résultats proches de ceux obtenus expérimentalement.

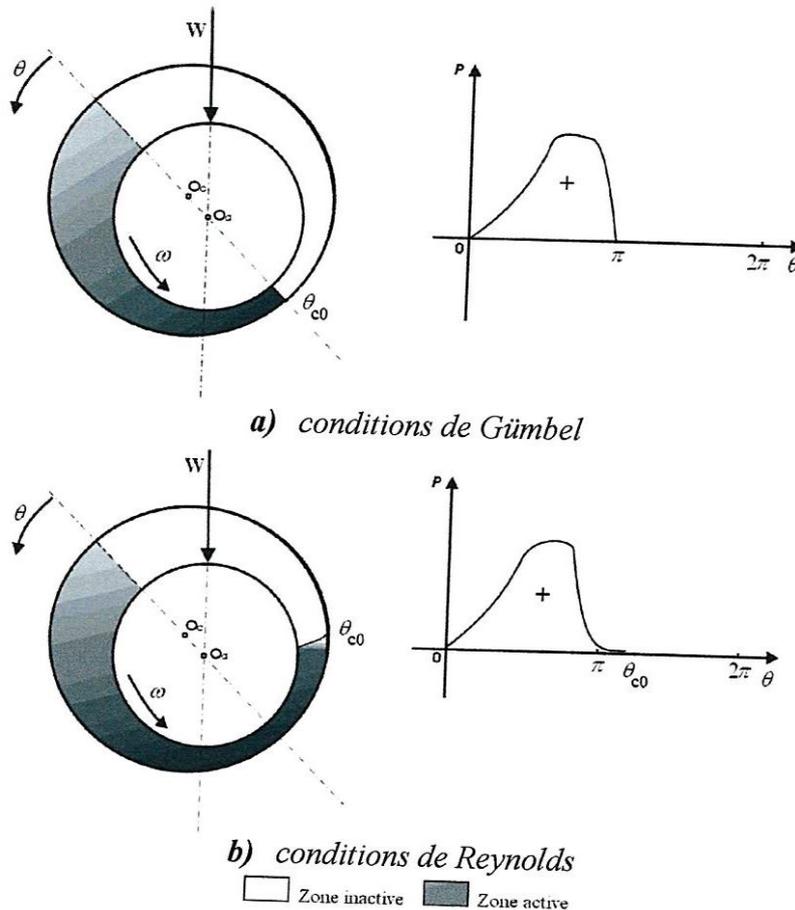
**b) Conditions de Reynolds ou de Swift-Stieber [47, 48]**

Ces conditions respectent la continuité du débit et la rupture du film. Elles supposent que pour une abscisse inconnue  $\theta_{c0}$ , la pression et le gradient de pression s'annulent (figure II-10.b) :

$$\begin{cases} p(\theta = 0, z) = 0 \\ p(\theta = \theta_{c0}, z) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_{c0}, z) = \frac{\partial p}{\partial z}(\theta = \theta_{c0}, z) = 0 \\ p(\theta, z) = 0 \quad \text{si } \theta_{c0} \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{II-71})$$

Cependant, ces conditions ne respectent pas les phénomènes de reformation du film, et leur utilisation nécessite la détermination d'une inconnue supplémentaire  $\theta_{c0}$  qui est l'angle de cavitation. Ainsi,  $\theta = \theta_{c0}$  délimite une frontière inconnue entre les zones actives et inactives du film lubrifiant :

- la zone active se caractérise par une pression positive dans le film
- dans la zone inactive, l'écoulement est en fait un mélange d'air et de lubrifiant et la pression dans cette région est voisine de la pression de vapeur saturante du fluide, pression très proche de la pression atmosphérique.



**Fig.II-10: Conditions aux limites liées à l'écoulement du lubrifiant dans le cas d'un film rompu**

## 5. ECRITURE DES DIFFERENTES EQUATIONS EN VARIABLES SANS DIMENSION

Pour les traitements numériques, il est recommandé de réécrire toutes les équations de la lubrification hydrodynamique en variables sans dimension. L'adimensionnement pour but de diminuer le nombre de paramètres physiques en utilisant des paramètres composés sans dimension. Dans ce cas, l'ordre des paramètres est de un, ce qui améliore la précision numérique et facilite l'interprétation des résultats obtenus. Dans le cas d'un palier fluide, on pose :  $\theta = \frac{x}{R}$ ,  $\tilde{z} = \frac{z}{L}$ ,  $\tilde{h} = \frac{h}{C}$ ,  $\tilde{t} = \omega t$ ,  $\tilde{\ell} = \frac{\ell}{C}$  et  $\tilde{p} = \frac{P}{\mu\omega\left(\frac{R}{C}\right)^2}$ .

En remplaçant les variables réduites dans l'équation de Reynolds modifiée (II-61) pour un fluide à couples des contraintes, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right] + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left[\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right] = 6\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\theta} + 12\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}} \quad (\text{II-72})$$

Avec :  $\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) = \tilde{h}^3 - 12\tilde{\ell}^2\tilde{h} + 24\tilde{\ell}^3 \tanh\left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{\ell}}\right)$

Pour un fluide newtonien ( $\tilde{\ell} = 0$ ) :  $\tilde{G} = \tilde{h}^3$

L'équation de Reynolds modifiée (II-62), pour un fluide viscoélastique (modèle FENE-P) devient :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right) + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(-\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right) = 6\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\theta} + 12\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}} - 12\left(\frac{\partial\tilde{L}_{px}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tilde{L}_{pz}}{\partial\tilde{z}}\right) \quad (\text{II-73})$$

Avec :  $\tilde{L}_{px} = \left(\frac{1}{\omega RC}\right)L_{px}$  et  $\tilde{L}_{pz} = \left(\frac{1}{\omega LC}\right)L_{pz}$

Pour un fluide viscoélastique linéaire (modèle Maxwell), on a :  $A = 1/G$  et  $\frac{F(\tau_e)}{\tau_e} = \frac{1}{\mu} = \text{cts.}$

Equation de Reynolds modifiée adimensionnée (II-63) devient :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right) + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\left(\tilde{h}^3\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right) = 6\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\theta} + 12\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{t}} - \left(\frac{\mu\omega}{G}\right)\left(\frac{\partial\tilde{L}_{mx}}{\partial\theta} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial\tilde{L}_{mz}}{\partial\tilde{z}}\right) \quad (\text{II-74})$$

Avec :  $\tilde{L}_{mx} = \tilde{h}^3\left(\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial\theta^2}\right)$  et  $\tilde{L}_{mz} = \tilde{h}^3\left(\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial\theta\partial\tilde{z}}\right)$

- Pour un modèle de Maxwell viscoélastique non linéaire (type Ree-Eyring [38]), on a :

$$A = 1/G \text{ et } \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} = \left(\frac{1}{\mu}\right) \left(\frac{\tau_0}{\tau_e}\right) \sinh\left(\frac{\tau_e}{\tau_0}\right)$$

L'équation de Reynolds modifiée adimensionnée (II-63) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left( \frac{\tau_0}{\tau_e} \right) \left( \text{sh}(\tau_e / \tau_0) \right) \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \left( \frac{\tau_0}{\tau_e} \right) \left( \sinh(\tau_e / \tau_0) \right) \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right) = \\ \left( 6 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} + 12 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} - \left( \frac{\mu \omega}{G} \right) \left( \frac{\partial \tilde{L}_{mx}}{\partial \theta} + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial \tilde{L}_{mz}}{\partial \tilde{z}} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II-75})$$

Avec :  $\tau_0$  et  $\mu$  sont des constantes

$\tau_0$  : contrainte de cisaillement de référence

$\tau_e$  : contrainte de cisaillement équivalente définie à l'aide du critère de Von Mises.

### 5.1. Equation géométrique adimensionnée

Dans le cas du palier aligné, l'expression de l'épaisseur du film adimensionnée (II-65) devient :

$$\tilde{h} = 1 + \varepsilon \cos \theta + \tilde{U}_r \quad (\text{II-76})$$

Avec,  $\tilde{U}_r$  déplacement radial adimensionné défini par :

$$\tilde{U}_r = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \times \tilde{C}_d \times \tilde{t}_h \times \tilde{p} \quad (\text{II-77})$$

$$\text{Et, } \tilde{C}_d = \frac{\mu \omega (R/C)^3}{E}$$

où :  $\tilde{t}_h = t_h / R$  est l'épaisseur relative de la couche élastique mince de revêtement du palier et  $\tilde{C}_d$  est le coefficient de déformation élastique.

D'après l'expression de  $\tilde{C}_d$ , on remarque que le coefficient de déformation est nul lorsque le module d'élasticité du matériau tend vers l'infini (couche rigide).

Pour un palier compliant mésaligné et lorsque le Modèle Couche Elastique Mince est utilisé, l'expression de l'épaisseur du film d'huile adimensionnée (II-68) devient :

$$\tilde{h} = 1 + \varepsilon \cos \theta + \delta \tilde{z} \cos(\theta - \beta) + \tilde{U}_r \quad (\text{II-78})$$

## 6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a rappelé les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus écrites pour un fluide incompressible dont le comportement peut être newtonien ou non newtonien (fluide polymérique).

L'utilisation des hypothèses d'un écoulement de films minces permet de simplifier les équations de mouvement. L'intégration de ces équations permet d'obtenir le champ des vitesses de l'écoulement. La procédure de dérivation de l'équation de Reynolds modifiée dans le cas des fluides polymériques (additivés) est identique à celle utilisée par Osborne Reynolds [44] pour la dérivation de l'équation de Reynolds classique dans le cas de fluides newtoniens. La détermination des équations géométriques du film permet de définir en chaque point et à chaque instant l'épaisseur du film lubrifiant dans le palier. Le Modèle de la Couche Élastique Mince (MCEM) permet de calculer le déplacement radial avec une précision suffisante lorsque l'épaisseur relative du revêtement est très faible devant un. La rupture du film (phénomène de cavitation) est prise en considération par l'utilisation soit des conditions aux limites de Gumbel ou celles de Swift–Stieber qui seront utilisées pour le calcul du champ de pression dans le film en régime de fonctionnement hydrodynamique. Ces conditions permettent d'avoir des résultats théoriques qui sont très proches de ceux obtenus expérimentalement. La transformation en variables sans dimension des équations de la lubrification hydrodynamique est nécessaire pour les traitements numériques.

Dans le chapitre suivant, une étude comparative sera envisagée dans le cas d'un palier hydrodynamique lubrifié par différents types de fluides permettant de valider à l'échelle Macro et Micro-Macro le modèle des fluides à couples de contraintes.

## **CHAPITRE III**

**ÉTUDE COMPARATIVE D'UN PALIER LONG LUBRIFIÉ  
PAR DIFFÉRENTS FLUIDES POLYMERIQUES (ADDITIVES)**

## 1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on va présenter dans un premier temps une comparaison à l'échelle Macro des résultats obtenus pour un palier long indéformable lubrifié par fluides à couples de contraintes avec ceux obtenus pour des fluides polymériques ou viscoélastiques (modèles de Maxwell : linéaire et non linéaire).

Dans un deuxième temps, on présente une comparaison à l'échelle Micro-Macro du même palier lubrifié par un fluide à couples de contraintes avec un palier lubrifié par un fluide viscoélastique (modèle FENE-P) (Finitely Extensible Nonlinear Elastic Dumbbell).

Pour un palier infiniment long lubrifié par un fluide newtonien ou fluide non newtonien (fluide polymérique), le gradient de pression axial est très faible devant le gradient de pression circonférentiel ( $\frac{\partial p}{\partial z} \ll \frac{\partial p}{\partial \theta}$ ), ce qui permet de réécrire les équations de Reynolds modifiées (II-72 à II-75) sous les formes suivantes, en régime permanent et pour un fluide isovisqueux :

- l'équation de Reynolds modifiée en variables réduites pour un fluide à couples des contraintes (II-72) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right] = 6 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} \quad (\text{III-1})$$

Avec :  $\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) = \tilde{h}^3 - 12\tilde{\ell}^2\tilde{h} + 24\tilde{\ell}^3 \tanh\left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{\ell}}\right)$

- on rappelle que pour un fluide newtonien :  $\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) = \tilde{h}^3$

- Pour un fluide viscoélastique (modèle FENE-P), l'équation de Reynolds modifiée écrite en variables adimensionnées (II-73) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) = 6 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} - 12 \left( \frac{\partial \tilde{L}_{px}}{\partial \theta} \right) \quad (\text{III-2})$$

Avec :  $\tilde{L}_{px} = \left( \frac{1}{\omega RC} \right) L_{px}$  et  $L_{px} = \frac{1}{\mu_s} \int_0^h \tau_{(p)xy} y dy - \frac{h}{2\mu_s} \int_0^h \tau_{(p)xy} dy$

- Pour un modèle de Maxwell viscoélastique linéaire, l'équation de Reynolds modifiée adimensionnée (II-74) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) = 6 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} - \left( \frac{\mu \omega}{G} \right) \left( \frac{\partial \tilde{L}_{mx}}{\partial \theta} \right) \quad (\text{III-3})$$

$$\text{Avec : } \tilde{L}_{mx} = \tilde{h}^3 \left( \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2} \right)$$

- Pour le modèle de Maxwell viscoélastique non linéaire (type Ree-Eyring), l'équation de Reynolds modifiée en variables réduites (II-75) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left( \frac{\tau_0}{\tau_e} \right) \sinh(\tau_e / \tau_0) \left( \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right) \right) = \left( 6 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} - \left( \frac{\mu \omega}{G} \right) \left( \frac{\partial \tilde{L}_{mx}}{\partial \theta} \right) \right) \quad (\text{III-4})$$

Où,  $\tau_e$  est la contrainte de cisaillement équivalente qui peut être égale à la valeur moyenne de la contrainte de cisaillement ( $\tau_{xy}$ ) dans le film lubrifiant. La non linéarité de type Ree-Eyring dépend de la valeur de la contrainte de cisaillement adimensionnée  $\left( \frac{\tau_e}{\tau_0} \right)$  [49].

La détermination du champ de pression statique dans le film lubrifiant permet de calculer les composantes de la portance hydrodynamique adimensionnée, ainsi que l'angle de calage comme suit :

$$\tilde{W}_0 = \left( \tilde{F}_\varepsilon^2 + \tilde{F}_\phi^2 \right)^{1/2} \quad (\text{III-5})$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left( - \frac{\tilde{F}_\phi}{\tilde{F}_\varepsilon} \right) \quad (\text{III-6})$$

$$\text{Où : } \tilde{F}_\varepsilon = \frac{F_\varepsilon}{\mu \omega \left( \frac{R^2}{C^2} \right)} = \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \cos \theta d\theta \quad \text{et} \quad \tilde{F}_\phi = \frac{F_\phi}{\mu \omega \left( \frac{R^2}{C^2} \right)} = \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0 \sin \theta d\theta$$

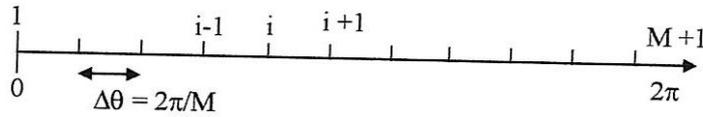
$\tilde{F}_\varepsilon$  et  $\tilde{F}_\phi$  : composantes de la portance hydrodynamique adimensionnée dans le repère intermédiaire ( $O_c, \vec{\varepsilon}, \vec{\phi}, \vec{z}$ ) (figure II-7).

## 2. RESOLUTION DES EQUATIONS DE REYNOLDS MODIFIEES

Les équations de Reynolds modifiées (III-1 à III-4) sont des équations aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique. Les géométries souvent complexes des paliers ainsi que les conditions limites ne permettent pas toujours d'envisager une résolution analytique de cette équation sauf dans le cas des hypothèses de paliers infiniment courts ( $L/D \rightarrow 0$ ) et des paliers infiniment longs ( $L/D \rightarrow \infty$ ) et lubrifiés par un fluide newtonien. Les méthodes actuelles utilisées sont des méthodes numériques, telles que les différences finies

(MDF) , les éléments finis (MEF), les éléments de frontières (BEM) ou la méthode des volumes finis (VF).

La méthode de discrétisation retenue dans notre comparaison est celle des différences finies centrées unidimensionnelle (1D). Dans cette méthode simple, à mettre en œuvre pour des géométries de film et d'alimentation régulières, le maillage du palier ne se fait que selon sa direction circonférentielle ( $\theta$ ), la pression aux nœuds du maillage est l'inconnue nodale, les dérivées partielles de la pression sont évaluées en un point ( $i$ ) du maillage en fonction des valeurs de la pression aux points environnants (figure III-1).



**Fig.III-1:** *Discrétisation par la méthode des différences finies de la circonférence du palier.*

La circonférence du palier est divisée en M intervalles d'amplitude angulaire :  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{M}$

L'utilisation des différences finies centrées permet d'évaluer les dérivées circonférentielles de la pression ( $\tilde{p}$ ) comme suit :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta}\right)_i \approx \frac{\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1}}{2\Delta\theta} \\ \left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2}\right)_i \approx \frac{\tilde{p}_{i+1} - 2\tilde{p}_i + \tilde{p}_{i-1}}{(\Delta\theta)^2} \end{cases} \quad (\text{III-7})$$

En remplaçant les expressions (III-7) dans l'équation de Reynolds modifiée (III-1) pour un fluide à couples de contraintes, on obtient le système suivant :

$$a_i \tilde{p}_{i+1} + b_i \tilde{p}_{i-1} - c_i = \tilde{p}_i \quad (\text{III-8})$$

Où :

$$\begin{cases} a_i = \left[ \frac{1}{2\Delta\theta} \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta}\right)_i + \frac{\tilde{G}_i}{(\Delta\theta)^2} \right] \frac{1}{d_i} \\ b_i = \left[ -\frac{1}{2\Delta\theta} \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta}\right)_i + \frac{\tilde{G}_i}{(\Delta\theta)^2} \right] \frac{1}{d_i} \\ c_i = \left( 6 \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta}\right)_i \right) \frac{1}{d_i} \\ d_i = 2 \frac{\tilde{G}_i}{(\Delta\theta)^2} \end{cases} \quad (\text{III-9})$$

- Pour un fluide newtonien :  $\tilde{G}_i \approx \tilde{h}_i^3$  (dans tous les coefficients de discrétisation ( $a_i$ ,  $b_i$  et  $d_i$ , (III-9)).

- Pour un fluide viscoélastique (modèle Maxwell linéaire) :  $\tilde{G}_i \approx \tilde{h}_i^3$  (dans les coefficients  $a_i$ ,

$b_i$  et  $d_i$ , (III-9)) et  $c_i = \left( 6 \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} \right)_i - \left( \frac{\mu \omega}{G} \right) \left( \frac{\partial \tilde{L}_{mx}}{\partial \theta} \right)_i \right) \frac{1}{d_i}$

- Pour un fluide viscoélastique (modèle Maxwell non linéaire) :

$\tilde{G}_i = \left( \frac{\tau_0}{\tau_e} \right) \sinh(\tau_e / \tau_0) \times \tilde{h}_i^3$  (dans les coefficients  $a_i$  et  $b_i$ )

et,  $c_i = \left( 6 \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} \right)_i - \left( \frac{\mu \omega}{G} \right) \left( \frac{\partial \tilde{L}_{mx}}{\partial \theta} \right)_i \right) \frac{1}{d_i}$

avec :  $d_i = 2 \frac{\left( \frac{\tau_0}{\tau_e} \right) \sinh(\tau_e / \tau_0) \times \tilde{h}_i^3}{(\Delta \theta)^2}$

- Pour un fluide viscoélastique (modèle FENE-P) :  $\tilde{G}_i$  devient égal à  $\tilde{h}_i^3$  dans les coefficients

$a_i$ ,  $b_i$ ,  $d_i$ , (III-9) et  $c_i = - \left( 6 \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} \right)_i - 12 \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} \right)_i \right) \frac{1}{d_i}$

## 2.1. Résolution du système d'équations

La méthode de résolution du système d'équations (III-8) dépend des conditions aux limites appliquées. Dans le cas des conditions aux limites de Gumbel, la résolution matricielle est effectuée par une méthode directe ou itérative mais avec élimination des pressions inférieures à zéro.

Dans le cas d'application des conditions aux limites de Reynolds qui tiennent compte de la rupture du film dans la région divergente du palier, on peut satisfaire ces conditions par un processus itératif au cours duquel on impose à la pression d'être positive ; c'est à dire pendant les calculs les termes de pression négatifs sont annulés.

La méthode proposée est celle de Gauss-Seidel avec coefficient de sur relaxation. En appliquant l'algorithme de Gauss-Seidel, le système d'équations (III-8) devient (annexe j):

$$\tilde{p}_i^{(k+1)} = (1 - \Omega) \tilde{p}_i^{(k)} + \Omega \left[ a_i \tilde{p}_{i+1}^{(k)} + b_i \tilde{p}_{i-1}^{(k+1)} - e_i \right] \quad (\text{III-10})$$

Où :

$\Omega$  est le coefficient de sur-relaxation dont la valeur est entre un et deux, et k est le numéro d'itération.

### 3. ETUDE PARAMETRIQUE

Cette étude consiste

d'une part, à réaliser une première comparaison à l'échelle Macro du champ de pression hydrodynamique statique adimensionné engendré dans le film lubrifiant, de la portance hydrodynamique adimensionnée et de l'angle de calage d'un palier rigide infiniment long lubrifié par un fluide à couples de contraintes avec le même palier lubrifié par un fluide newtonien et un fluide viscoélastique (modèles de Maxwell linéaire et non linéaire). Les caractéristiques géométriques et les conditions de fonctionnement du palier sont reportées dans les tableaux III-1 et III-2.

D'autre part, une deuxième comparaison Micro-Macro des caractéristiques statiques d'un palier (champ de pression hydrodynamique statique, portance hydrodynamique et angle de calage du palier) lubrifié par un fluide à couples des contraintes avec celles d'un palier utilisant un fluide viscoélastique (modèle FENE-P) comme lubrifiant, dont les caractéristiques géométriques et les conditions de fonctionnement sont données dans les mêmes tableaux III-1 et III-3.

**Tableau III-1:** *Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du palier*

<b>Caractéristiques géométriques</b>	
- Rayon de l'arbre, R	0.025 m
- Jeu radial, C	$50 \times 10^{-6}$ m
<b>Conditions de fonctionnement</b>	
- Vitesse angulaire de l'arbre, $\omega$	$66 \times \pi$ rad/s

**Tableau II-2:** *Les propriétés physiques du lubrifiant (Modèle Maxwell) [39]*

<b>Propriétés du lubrifiant</b>	
- Viscosité dynamique du fluide, $\mu$	0.009 Pa.s
- Masse volumique, $\rho$	970 kg/m <sup>3</sup>
- Contraintes de cisaillement de référence, $\tau_0$	1.5 MPa
- Module de cisaillement, G	800 Pa

Les propriétés physiques du lubrifiant (Modèle PENE-P) sont reportées dans le tableau III-3 suivant [40] :

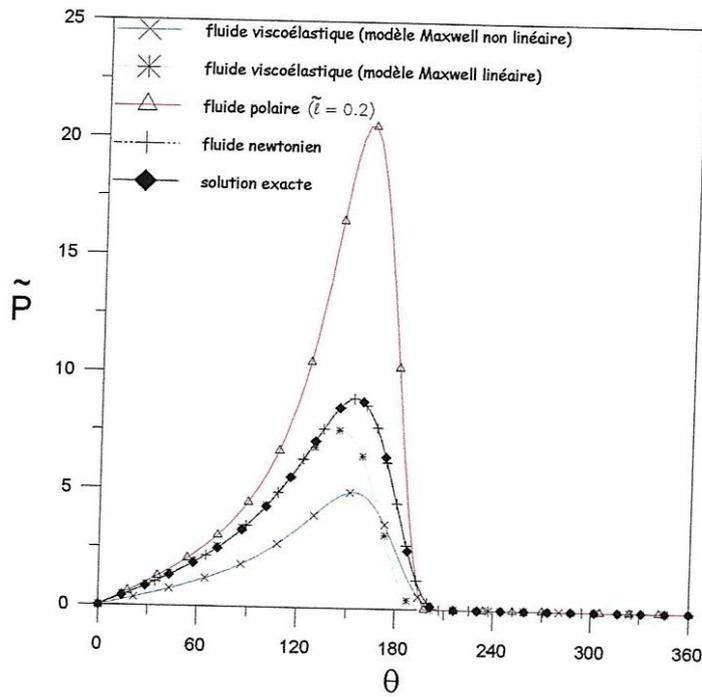
Tableau III-3 : Propriétés physiques du lubrifiant (Modèle FENE-P).

**Propriétés du lubrifiant**

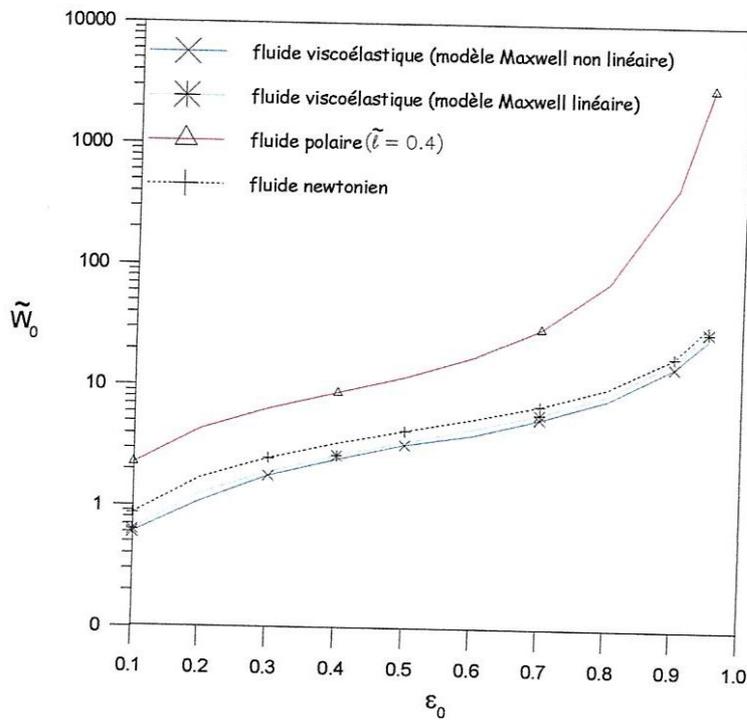
- Viscosité dynamique du solvant, $\mu_s$	0.0012 Pa.s
- Viscosité dynamique du fluide à faible taux de cisaillement, $\mu_0$	0.050 Pa.s
- Masse volumique, $\rho$	1050 kg/m <sup>3</sup>
- Pourcentage de polymères dans le solvant, n	45%
- Constante adimensionnée, b	50
- Constante de Boltzman,	$37 \times 10^{-4}$ Pa.°K <sup>-1</sup>
- Température du fluide polymérique, T	310 °K
- Constante du temps, $\lambda_H$	0,1 s

Les figures III-2 à III-4 présentent une comparaison ou une validation à l'échelle Macroscopique du champ de pression hydrodynamique statique adimensionné, la portance hydrodynamique et l'angle de calage d'un palier infiniment long indéformable lubrifié par un fluide à couples de contraintes avec le même palier lubrifié par un fluide newtonien et un fluide viscoélastique modèle de Maxwell linéaire ou non linéaire (type Ree-Eyring).

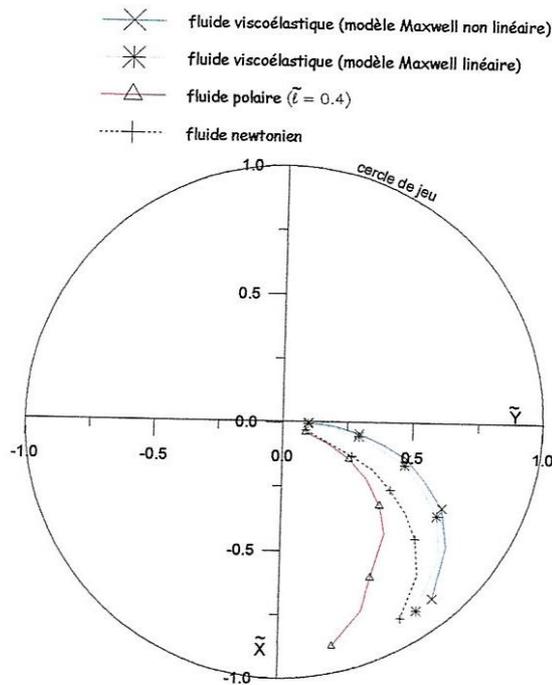
Ces figures montrent que l'existence des couples de contraintes dans le lubrifiant permet d'augmenter de façon significative le pic de pression dans le film lubrifiant et la portance hydrodynamique du palier et de diminuer l'angle de calage du palier par comparaison au fluide newtonien et au fluide viscoélastique linéaire ou non linéaire. Pour le palier lubrifié par un fluide viscoélastique, on constate une diminution du pic de pression dans le film et de la portance hydrodynamique et une augmentation de l'angle de calage du palier surtout pour un fluide viscoélastique non linéaire. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que l'élasticité du lubrifiant oppose une certaine résistance à l'écoulement du fluide lubrifiant.



**Fig.III-2:** Comparaison du champ de pression hydrodynamique statique adimensionnée dans le palier pour différents fluides lubrifiants ( $\epsilon_0 = 0.7$ )



**Fig.III-3:** Variations de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différents fluides lubrifiants



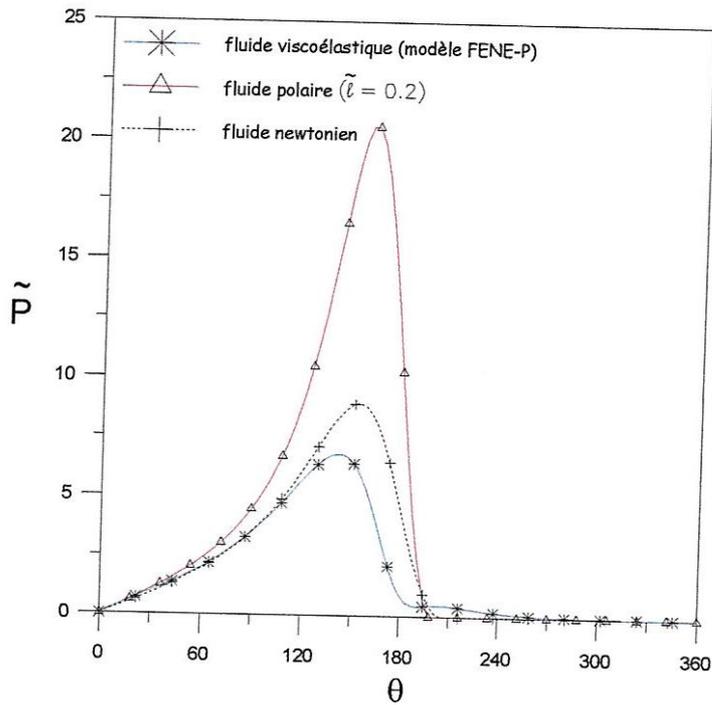
**Fig.III-4:** Variations de l'angle de calage statique en fonction de l'excentricité relative statique pour différents fluides lubrifiants

Les figures III-5 à III-7 présentent une validation à l'échelle Macro-Macro du champ de pression hydrodynamique statique adimensionné, la portance hydrodynamique et l'angle de calage d'un palier indéformable infiniment long lubrifié par un fluide à couples de contraintes avec le même palier lubrifié par un fluide newtonien et un fluide viscoélastique (modèle FENE-P).

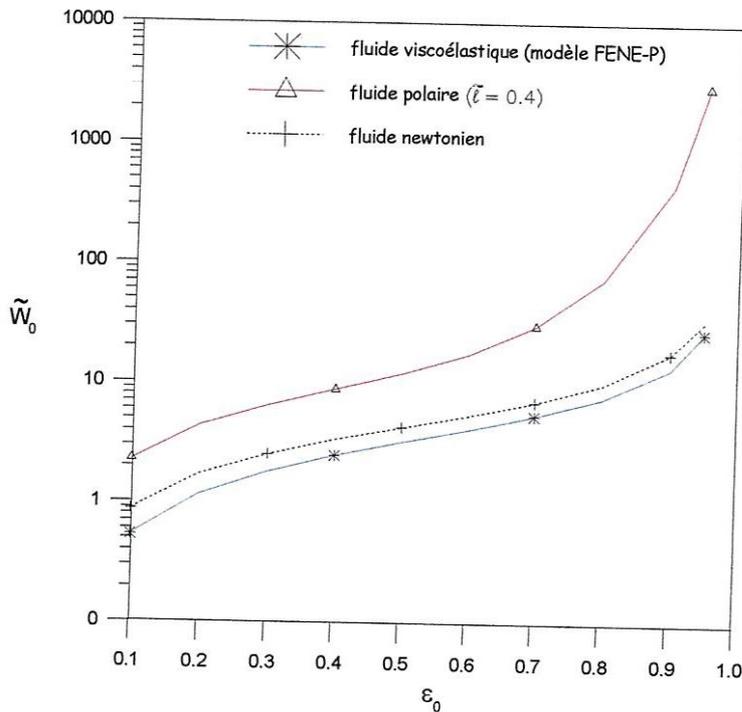
Les figures III-5 à III-7 montrent aussi que l'existence des couples de contraintes dans le lubrifiant permet d'augmenter le pic de pression dans le film lubrifiant et la portance hydrodynamique du palier et de diminuer l'angle de calage du palier par comparaison au fluide viscoélastique (Modèle FENE-P), et une diminution du pic de pression et de la portance hydrodynamique et une augmentation de l'angle de calage du palier lubrifié par un fluide viscoélastique (modèle FENE-P) comparativement au fluide newtonien.

On peut conclure que la présence des couples de contraintes dans les huiles permet d'améliorer de façon importante la capacité de charge et d'augmenter le pic de pression du palier et l'élasticité du lubrifiant permet de diminuer la capacité de charge et le pic de pression du palier fluide.

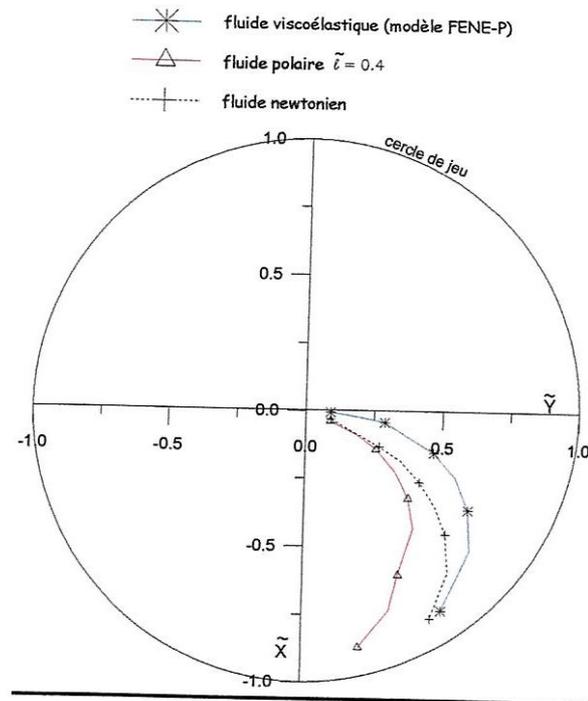
Ces comparaisons montrent l'importance de l'utilisation des huiles lubrifiantes à couples de contraintes (fluide avec des additifs améliorant l'indice de viscosité VI) dans la lubrification hydrodynamique des paliers fluides.



**Fig.III-5:** Comparaison du champ de pression adimensionné dans le palier pour différents fluides lubrifiants ( $\epsilon_0 = 0.7$ ).



**Fig.III-6:** Variations de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différents fluides lubrifiants.



**Fig.III-7:** Variations de l'angle de calage statique en fonction de l'excentricité relative statique pour différents fluides lubrifiants

#### 4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a présenté une comparaison des caractéristiques statiques telles que, le champ de pression hydrodynamique dans le film lubrifiant, la portance hydrodynamique et l'angle de calage du palier rigide infiniment long lubrifié par fluide à couples de contraintes avec le même palier lubrifié par un fluide newtonien et un fluide viscoélastique (polymérique) : modèle de Maxwell (linéaire et non linéaire) et modèle FENE-P. Cette validation montre l'importance des huiles lubrifiantes dopées en additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) (fluide à couples de contraintes) dans la lubrification hydrodynamique des paliers fluides.

Dans ce qui suit, on va présenter une étude complète, d'un palier compliant hydrodynamique lubrifié par un fluide à couples de contraintes. On mettra en évidence l'influence de la longueur des chaînes moléculaires ( $\tilde{\ell}$ ) des additifs sur les performances statiques (portance hydrodynamique, angle de calage, débit de fuite, puissance dissipée et les distributions des vitesses moyennes d'écoulement à travers l'épaisseur du film), les performances dynamiques (coefficients dynamiques, masse critique et la fréquence de fouettement) et les performances dynamiques non linéaires (pression maximale dans le film, épaisseur minimale du film, trajectoires décrites par le centre de l'arbre dans le palier) en tenant compte le défaut du mésalignement de l'arbre dans le palier.

## **CHAPITRE IV**

### **COMPORTEMENT DYNAMIQUE LINEAIRE D'UN PALIER COMPLIANT LUBRIFIE PAR FLUIDE A COUPLES DE CONTRAINTES**

## 1. INTRODUCTION

Les rotors de machines tournantes, telles que les turbines utilisées dans les centrales électriques, comportent des lignes d'arbres caractérisées par des conditions de fonctionnement de plus en plus sévères. Un grand nombre de ces lignes d'arbres repose sur des paliers fluides. La connaissance du comportement dynamique et en particulier les caractéristiques de raideur et d'amortissement de ces appuis est indispensable pour l'analyse du comportement vibratoire de ces machines. L'analyse dynamique d'une ligne d'arbre, dans le cas des petits mouvements, peut comporter deux étapes :

- une analyse statique permettant de définir la position d'équilibre de l'arbre dans le palier pour une charge statique imposée ;
- une analyse dynamique du comportement linéarisé de la ligne d'arbre autour de sa position d'équilibre statique.

Cette analyse linéaire permet de :

- de modéliser le film lubrifiant par huit coefficients dynamiques à savoir quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement ;
- d'établir les cartes de stabilité d'un palier fluide ;
- d'étudier la réponse linéaire d'un palier à une excitation dynamique synchrone de faible amplitude (balourd résiduel par exemple).

Dans ce chapitre, on va étudier l'influence de la longueur des chaînes moléculaires des additifs de viscosité incorporés dans les huiles lubrifiantes sur le comportement dynamique linéaire des paliers fluides. La méthode de perturbation est utilisée pour calculer les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement : l'équation des écoulements en film mince ou l'équation de Reynolds modifiée écrite pour un palier hydrodynamique lubrifié par fluide à couples de contraintes est transformée en un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre.

La résolution de ce système permet de déterminer le champ de pression hydrodynamique statique ( $p_0$ ) correspondant à la position d'équilibre statique du centre de l'arbre dans le palier fluide et les répartitions de pressions dynamiques complexes ( $p_e$  et  $p_\phi$ ) dues au mouvement vibratoire de faible amplitude de l'arbre autour de cette position.

La connaissance de la répartition de la pression hydrodynamique statique du film permet de calculer les performances statiques du système (arbre et coussinet), tels que la portance hydrodynamique, l'angle de calage, la puissance dissipée, le moment de mésalignement, le champ des vitesses moyennes de l'écoulement ainsi que le débit de fuite à l'extrémité du palier.

La connaissance des pressions dynamiques permet de calculer les huit coefficients dynamiques du palier à savoir quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement. La connaissance de ces coefficients dynamiques permet :

- d'analyser la stabilité d'une position d'équilibre, en utilisant le critère de Lund pour définir les cartes de stabilité du système rotor-palier ;
- d'étudier la réponse du palier à une excitation dynamique.

## 2. APPLICATION DE LA METHODE DE PERTURBATION

Lorsque l'arbre est soumis à des vibrations harmoniques de faibles amplitudes avec une fréquence d'excitation relative ( $\gamma$ ) au voisinage de la position d'équilibre statique ( $O_{a0}$ ) définie par l'excentricité relative statique ( $\varepsilon_0$ ) et l'angle de calage statique ( $\phi_0$ ) (figure IV-1), l'excentricité relative et l'angle de calage instantanés peuvent être exprimés par [44]:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 e^{i\gamma\tilde{t}} \\ \phi = \phi_0 + \phi_1 e^{i\gamma\tilde{t}} \end{cases} \quad (IV-1)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Où :  $\gamma = \nu^*/\omega$  est la fréquence d'excitation relative,  $\varepsilon_1$  et  $\phi_1$  sont respectivement les amplitudes de perturbation de l'excentricité de fonctionnement et de l'angle de calage, tels que

$$\left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right| \ll 1 \text{ et } \left| \frac{\phi_1}{\phi_0} \right| \ll 1.$$

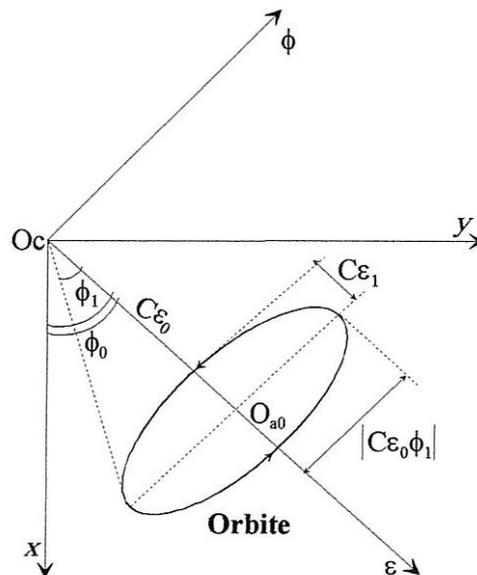


Fig.IV-1: Systèmes d'axes et notations

Le mouvement du centre de l'arbre engendre une perturbation du champ de pression, ce mouvement étant de faible amplitude, la pression dans le film et l'épaisseur du film correspondants peuvent être exprimées en variables réduites comme suit :

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + (\varepsilon_1 \tilde{p}_\varepsilon + \varepsilon_0 \phi_1 \tilde{p}_\phi) e^{i\gamma\tau} \quad (IV-2)$$

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 e^{i\gamma\tau} \quad (IV-3)$$

Avec :  $\tilde{h}_1 = \varepsilon_1 \cos\theta + \varepsilon_0 \phi_1 \sin\theta$ ,  $\tilde{p}_\varepsilon = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varepsilon}$  et  $\tilde{p}_\phi = \frac{\partial \tilde{p}}{\varepsilon_0 \partial \phi}$

$\tilde{h}_0$  est l'épaisseur du film adimensionnée correspondant à la position d'équilibre statique ( $\varepsilon_0, \phi_0$ ),  $\tilde{h}_1$  est l'amplitude du déplacement du centre de l'arbre dû à la vibration.

$\tilde{p}_0$  est le champ de pression adimensionné hydrodynamique statique,  $\tilde{p}_\varepsilon$  et  $\tilde{p}_\phi$  sont des pressions dynamiques complexes dues aux déplacements du centre de l'arbre dans les directions de la ligne des centres et sa normale.

En remplaçant les équations (IV-2) et (IV-3) dans l'équation de Reynolds modifiée normalisée (III-72) et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on obtient le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

**a) Equation aux dérivées partielles d'ordre zéro :**

$$\Re(\tilde{p}_0) = 6 \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \quad (IV-4)$$

**b) Equations aux dérivées partielles d'ordre un :**

$$\Re(\tilde{p}_\varepsilon) + 3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \cos\theta \right) + 3 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \cos\theta \right) = -6 \sin\theta + 12i\gamma \cos\theta \quad (IV-5)$$

$$\Re(\tilde{p}_\phi) + 3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \sin\theta \right) + 3 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \sin\theta \right) = 6 \cos\theta + 12i\gamma \sin\theta \quad (IV-6)$$

Avec :  $\Re(\circ) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tilde{G}_0(\tilde{h}_0, \tilde{\ell}) \frac{\partial(\circ)}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \tilde{G}_0(\tilde{h}_0, \tilde{\ell}) \frac{\partial(\circ)}{\partial \tilde{z}} \right)$

Et,  $\tilde{G}_0(\tilde{h}_0, \tilde{\ell}) = \tilde{h}_0^3 - 12\tilde{h}_0 \tilde{\ell}^2 + 24\tilde{\ell}^3 \tanh\left(\frac{\tilde{h}_0}{2\tilde{\ell}}\right)$

### 3. ETUDE STATIQUE DU PALIER

La détermination de la répartition du champ de pression hydrodynamique statique dans le film lubrifiant ( $\tilde{p}_0$ ) pour une position statique de l'arbre dans le palier permet de déterminer les

performances statiques du palier, tels que la portance hydrodynamique, l'angle de calage, la puissance dissipée, le moment de mésalignement, le débit volumique moyen de fuite ainsi que les vitesses moyennes d'écoulement du fluide lubrifiant.

### 3.1. Portance hydrodynamique et angle de calage du palier

L'intégration du champ de pression à la surface du coussinet permet de déterminer les composantes de la portance hydrodynamique et l'angle de calage. Dans le repère intermédiaire  $(O_a, \vec{\varepsilon}, \vec{\phi}, \vec{z})$ , les composantes de la portance s'expriment par :

$$\begin{cases} F_\varepsilon = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p_0(\theta, z) \cos \theta R d\theta dz \\ F_\phi = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p_0(\theta, z) \sin \theta R d\theta dz \end{cases} \quad (IV-7)$$

En variables réduites, les équations (IV-7) deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{F}_\varepsilon = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0(\theta, \tilde{z}) \cos \theta d\theta d\tilde{z} \\ \tilde{F}_\phi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0(\theta, \tilde{z}) \sin \theta d\theta d\tilde{z} \end{cases} \quad (IV-8)$$

$$\text{Avec : } (\tilde{F}_\varepsilon, \tilde{F}_\phi) = \frac{(F_\varepsilon, F_\phi)}{\mu \omega R L \left(\frac{R}{C}\right)^2}$$

De ces deux relations, on peut déterminer les valeurs de la charge portante hydrodynamique adimensionnée  $(\tilde{W}_0)$  et de l'angle de calage  $(\phi_0)$  du palier fluide, comme suit :

$$\tilde{W}_0 = (\tilde{F}_\varepsilon^2 + \tilde{F}_\phi^2)^{1/2} \quad (IV-9)$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left( -\frac{\tilde{F}_\phi}{\tilde{F}_\varepsilon} \right) \quad (IV-10)$$

### 3.2. Puissance dissipée

La puissance dissipée est calculée à partir de l'intégration de la fonction de dissipation visqueuse  $(\Phi_0)$  :

$$\mathcal{P}_o = \iiint_V \Phi_0 dx dy dz \quad (IV-11)$$

Avec :  $\Phi_0 = \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \ell^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \right]$  et  $V = [0, 2\pi R] \times [0, h_0] \times [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  est le volume occupé par le fluide.

Après intégration par rapport à  $y$ , l'expression de la puissance dissipée devient :

$$\mathcal{P}_o = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{G_0(h_0, \ell)}{12\mu} \left( \left( \frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\mu(\omega R)^2}{h_0} \right] R d\theta dz \quad (IV-12)$$

Soit en variables sans dimension :

$$\tilde{\mathcal{P}}_o = \left( \frac{C}{\mu \omega^2 R^3 L} \right) \mathcal{P}_o = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \frac{\tilde{G}_0}{12} \left( \left( \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left( \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right) + \frac{1}{\tilde{h}_0} \right] d\theta d\tilde{z} \quad (IV-13)$$

### 3.3. Couple de frottement

D'après la relation (II-56), le couple de frottement est obtenu par intégration des contraintes de cisaillement à la surface de l'arbre ou du coussinet :

$$C_{n,\theta} = R \int_S [\tau_{xy}]_{y=0,h} dS \quad (IV-14)$$

Pour un fluide à couples de contraintes en écoulement laminaire, l'expression des contraintes de cisaillement est donnée par :

$$\begin{cases} \tau_{xy}|_{y=h_0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h_0} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{y=h_0} = \mu \left( \frac{\omega R}{h_0} + \frac{1}{2\mu R} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \left( h_0 - 2\ell \tanh \left( \frac{h_0}{2\ell} \right) \right) \right) \\ \tau_{xy}|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{y=0} = \mu \left( \frac{\omega R}{h_0} - \frac{1}{2\mu R} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \left( h_0 - 2\ell \tanh \left( \frac{h_0}{2\ell} \right) \right) \right) \end{cases} \quad (IV-15)$$

On remarque que les contraintes de cisaillement au niveau des parois s'expriment de la même manière que pour les fluides newtoniens, car les couples de contraintes au niveau des parois sont nuls [1].

Les couples de frottement sur l'arbre ( $C_a$ ) et sur le coussinet ( $C_c$ ) s'écrivent :

- couple de frottement sur l'arbre ( $y = h_0$ ) :

$$C_a = R^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \mu \left( \frac{\omega R}{h_0} + \frac{1}{2\mu R} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \left( h_0 - 2\ell \tanh \left( \frac{h_0}{2\ell} \right) \right) \right) d\theta dz \quad (IV-16)$$

- couple de frottement sur le coussinet ( $y = 0$ ) :

$$C_c = R^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \mu \left( \frac{\omega R}{h_0} - \frac{1}{2\mu R} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \left( h_0 - 2\ell \tanh \left( \frac{h_0}{2\ell} \right) \right) \right) d\theta dz \quad (IV-17)$$

En variables sans dimension, les équations (IV-16) et (IV-17) deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{C}_a = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\tilde{h}_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \left( \tilde{h}_0 - 2\tilde{\ell} \tanh \left( \frac{\tilde{h}_0}{2\tilde{\ell}} \right) \right) \right) d\theta d\tilde{z} \\ \tilde{C}_c = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\tilde{h}_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \left( \tilde{h}_0 - 2\tilde{\ell} \tanh \left( \frac{\tilde{h}_0}{2\tilde{\ell}} \right) \right) \right) d\theta d\tilde{z} \end{cases} \quad (IV-18)$$

$$\text{Avec, } (\tilde{C}_a, \tilde{C}_c) = \left( \frac{C}{\mu\omega R^3 L} \right) (C_a, C_c)$$

- les nombres de frottement sur l'arbre et le coussinet se calculent par les relations suivantes :

$$f_a = \frac{\tilde{C}_a}{\tilde{W}_0} \text{ et } f_c = \frac{\tilde{C}_c}{\tilde{W}_0} \quad (IV-19)$$

### 3.4. Moment de mésalignement

Soit  $\psi$  l'angle que fait le moment des forces de pression ( $\bar{M}$ ) avec la ligne des centres (Oy) (figure II-9), les composantes du vecteur moment des forces de pression s'écrivent :

$$\begin{cases} M_\varepsilon = M \sin \psi = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} z p_0(\theta, z) \cos \theta R dz d\theta \\ M_\phi = M \cos \psi = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} z p_0(\theta, z) \sin \theta R dz d\theta \end{cases} \quad (IV-20)$$

Soit en variables réduites, les équations (IV-20) deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{M}_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{z} \tilde{p}_0(\theta, \tilde{z}) \cos \theta d\tilde{z} d\theta \\ \tilde{M}_\phi = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{z} \tilde{p}_0(\theta, \tilde{z}) \sin \theta d\tilde{z} d\theta \end{cases} \quad (IV-21)$$

- Le moment de mésalignement adimensionné est :

$$\tilde{M}_0 = \sqrt{(\tilde{M}_\varepsilon)^2 + (\tilde{M}_\phi)^2} \quad (IV-22)$$

$$\text{Avec : } \tilde{M}_0 = \frac{M_0}{\mu\omega R L^2 \left( \frac{R}{C} \right)^2}$$

### 3.5. Les vitesses moyennes de l'écoulement et le débit moyen volumique

Les vitesses moyennes de l'écoulement de fluide sont données par l'expression suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\text{moy}} = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} u dy = \frac{\omega R}{2} - \frac{h_0^2}{12\mu} \frac{\partial p_0}{R \partial \theta} + \frac{\ell^2}{\mu} \frac{\partial p_0}{R \partial \theta} \left( 1 - \frac{2\ell}{h_0} \tanh\left(\frac{h_0}{2\ell}\right) \right) \\ \mathbf{w}_{\text{moy}} = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} w dy = -\frac{h_0^2}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\ell^2}{\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z} \left( 1 - \frac{2\ell}{h_0} \tanh\left(\frac{h_0}{2\ell}\right) \right) \end{cases} \quad (\text{IV-23})$$

Les vitesses moyennes d'écoulement adimensionnées s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{moy}} = \frac{\mathbf{u}_{\text{moy}}}{\omega R} = \frac{1}{2} - \frac{\tilde{h}_0^2}{12} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} + \tilde{\ell}^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \left( 1 - \frac{2\tilde{\ell}}{\tilde{h}_0} \tanh\left(\frac{\tilde{h}_0}{2\tilde{\ell}}\right) \right) \\ \tilde{\mathbf{w}}_{\text{moy}} = \frac{L \mathbf{w}_{\text{moy}}}{\omega R^2} = -\frac{\tilde{h}_0^2}{12} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial z} + \tilde{\ell}^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial z} \left( 1 - \frac{2\tilde{\ell}}{\tilde{h}_0} \tanh\left(\frac{\tilde{h}_0}{2\tilde{\ell}}\right) \right) \end{cases} \quad (\text{IV-24})$$

- Le débit moyen volumique total adimensionné est donné par :

$$\tilde{Q}_{\text{moy}} = |\tilde{Q}_+| + |\tilde{Q}_-| \quad (\text{IV-25})$$

Avec :

$$\begin{cases} \tilde{Q}_+ = \int_0^{2\pi} [\tilde{h} \tilde{w}_{\text{moy}}]_{\tilde{z}=1/2} d\theta \\ \tilde{Q}_- = \int_0^{2\pi} [\tilde{h} \tilde{w}_{\text{moy}}]_{\tilde{z}=-1/2} d\theta \end{cases} \quad (\text{IV-26})$$

$\tilde{Q}_+$  et  $\tilde{Q}_-$  sont les débits moyens volumiques adimensionnés à chaque extrémité du palier ( $\tilde{z} = \pm 1/2$ ).

## 4. ETUDE DYNAMIQUE LINEAIRE DU PALIER

### 4.1. Coefficients de raideur et d'amortissement

La connaissance de la distribution des champs de pressions dynamiques complexes  $\tilde{p}_\varepsilon$  et  $\tilde{p}_\phi$  permet de déterminer les coefficients de raideur et d'amortissement sans dimension du film lubrifiant, dans le repère intermédiaire lié à la ligne des centres ( $O_c, \varepsilon, \phi$ ). Les expressions des coefficients dynamiques adimensionnés s'expriment comme suit [44]:

$$\begin{bmatrix} Z_{\varepsilon\varepsilon} & Z_{\varepsilon\phi} \\ Z_{\phi\varepsilon} & Z_{\phi\phi} \end{bmatrix}^T = - \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_\varepsilon \\ \tilde{p}_\phi \end{Bmatrix} \langle \cos\theta : \sin\theta \rangle d\theta d\tilde{z} \quad (\text{IV-27})$$

Avec :  $Z_{\varepsilon\phi} = A_{\varepsilon\phi} + i\gamma B_{\varepsilon\phi}$  sont les impédances complexes du palier.

Tel que,  $A_{ij} = \frac{a_{ij}}{\mu\omega L(R/C)^3}$  et  $B_{ij} = \frac{b_{ij}}{\mu L(R/C)^3}$

$a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont les coefficients de raideur et d'amortissement du film lubrifiant.

Le changement du système de coordonnées permet d'exprimer les coefficients de raideur et d'amortissement sans dimension dans le repère fixe ( $O_c, X, Y$ ) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\varepsilon\varepsilon} & A_{\varepsilon\phi} \\ A_{\phi\varepsilon} & A_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & \sin \phi_0 \\ -\sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{\varepsilon\varepsilon} & B_{\varepsilon\phi} \\ B_{\phi\varepsilon} & B_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & \sin \phi_0 \\ -\sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (IV-28)$$

#### 4.2. Système en vibration libre : paramètres de stabilité (fréquence de fouettement et masse critique)

L'influence des paliers sur le comportement vibratoire d'une ligne d'arbre fut pressentie, puis identifiée par Newkirk au cours des années 1924-1925 [50]. Il mit en évidence l'existence d'une vibration qui apparaissait lorsque la vitesse critique persistait à une fréquence sensiblement constante lorsque la vitesse de rotation augmentait. Elle fut appelée "fouettement" ou sous le vocable anglo-saxon whirl. Depuis, la publication des travaux de Newkirk, des études effectuées sur des rotors rigides confirmèrent le rôle parfois déstabilisant des paliers lisses. Ces études ont permis d'observer qu'au delà d'une certaine vitesse de fonctionnement, l'arbre fouettait à l'intérieur du palier avec une fréquence proche de la moitié de la fréquence de rotation d'où l'appellation "phénomène de demi-fréquence" ou "half whirl frequency". En 1947, Hagg [51] montra théoriquement comment un palier long non chargé ( $\varepsilon = 0$ ) était initiateur d'une vibration auto-entretenu due à l'existence du film lubrifiant. Les paliers hydrodynamiques peuvent constituer une source d'instabilités pour la ligne d'arbre qu'ils supportent due à la présence du film lubrifiant. Il est donc nécessaire d'étudier leur stabilité de fonctionnement. Différents critères de stabilité ont été proposés, le plus utilisé est celui de Routh-Hurwitz [52].

L'étude de stabilité est effectuée dans le cas d'un rotor rigide de masse  $2M$  supporté horizontalement par deux paliers lisses compliants identiques lubrifiés avec fluides à couples de contraintes. Dans le système de coordonnées ( $O_c, X, Y$ ), les équations linéarisées du mouvement libre du rotor en variables sans dimension s'écrivent [52]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{m} & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}'' \\ \tilde{Y}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV-29)$$

$$\text{Avec : } \tilde{m} = \frac{M\omega^2 C}{W_0}$$

où :  $X$  et  $Y$  sont les composantes dans le repère fixe du déplacement du centre de l'arbre à partir de la position d'équilibre statique ( $O_{a0}$ ).

La solution du système d'équations (IV-29) est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_a \\ \tilde{Y}_a \end{Bmatrix} e^{\lambda \tau} \quad (\text{IV-30})$$

Où,  $\tilde{X}_a$  et  $\tilde{Y}_a$  sont les amplitudes du mouvement et  $\lambda = \xi + i\gamma$  est une valeur propre complexe,  $\xi$  est l'amortissement structural.

Le signe du coefficient  $\xi$  permet de définir la stabilité du régime de fonctionnement de l'arbre.

Lorsque :

- $\xi < 0$ , le régime est stable
- $\xi > 0$ , le régime est instable

A la limite de la stabilité  $\xi = 0$ , le mouvement est purement harmonique ( $\lambda = i\gamma$ ).

La substitution de l'équation (IV-30) dans l'équation (IV-29) donne :

$$\begin{bmatrix} A_{xx} + \lambda B_{xx} + \tilde{m}\lambda^2 & A_{xy} + \lambda B_{xy} \\ A_{yx} + \lambda B_{yx} & A_{yy} + \lambda B_{yy} + \tilde{m}\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-31})$$

Au seuil de la stabilité ( $\xi = 0$ ), l'équation (IV-31) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A_{xx} + i\gamma B_{xx} - \tilde{m}\gamma^2 & A_{xy} + i\gamma B_{xy} \\ A_{yx} + i\gamma B_{yx} & A_{yy} + i\gamma B_{yy} - \tilde{m}\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-32})$$

La solution non triviale de l'état permanent est obtenue en annulant le déterminant des coefficients de la matrice, conduit aux équations couplées suivantes :

$$\tilde{m}_c \gamma_c^2 = \frac{A_{xx} B_{yy} + A_{yy} B_{xx} - A_{yx} B_{xy}}{B_{xx} + B_{yy}} \quad (\text{IV-33})$$

$$\gamma_c^2 = \frac{(A_{xx} - \tilde{m}_c \gamma_c^2)(A_{yy} - \tilde{m}_c \gamma_c^2) - A_{yx} A_{xy}}{B_{xx} B_{yy} - B_{xy} B_{yx}} \quad (\text{IV-34})$$

A partir de ces deux équations (IV-33 et IV-34), on peut calculer à l'aide d'un processus itératif les paramètres de stabilité sans dimension, la masse critique ( $\tilde{m}_c$ ) et la fréquence de fouettement ( $\gamma_c$ ).

Si le coefficient  $\gamma_c^2$  est inférieur de zéro, ceci entraîne que le palier est stable

Si le coefficient  $\gamma_c^2$  est supérieur de zéro, alors on peut calculer la masse critique ( $\tilde{m}_c$ ) du rotor.

Pour une masse de l'arbre inférieure à la masse critique, le palier est stable. A l'inverse, pour une masse de l'arbre supérieure à la masse critique, le palier est instable.

La vitesse angulaire critique sans dimension du rotor est calculée par :

$$\tilde{\omega}_c = \omega_c \sqrt{\frac{\tilde{m}_c C}{W_0}} = \sqrt{\tilde{m}_c} \quad (\text{IV-35})$$

### 4.3. Système en vibrations forcées : réponse à un balourd résiduel

La trajectoire du centre de l'arbre prédite par l'approche linéaire est toujours de forme elliptique pour un balourd de faible excentricité ( $e_b$ ). Celle-ci est obtenue à partir de la résolution du système d'équations différentielles suivant (annexe g) :

$$\begin{bmatrix} \tilde{m} & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}'' \\ \tilde{Y}'' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \tilde{m}\varepsilon_b \begin{Bmatrix} \cos \tilde{t} \\ \sin \tilde{t} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-36})$$

Avec :  $\tilde{m} = \frac{M\omega^2 C}{W_0}$ ,  $\tilde{t} = \omega t$ ,  $\tilde{X} = \frac{X}{C}$ ,  $\tilde{Y} = \frac{Y}{C}$ ,  $\tilde{X}' = \frac{X'}{C\omega}$ ,  $\tilde{Y}' = \frac{Y'}{C\omega}$ ,  $(\tilde{X}'', \tilde{Y}'') = \frac{(X'', Y'')}{C\omega^2}$  et

$$\varepsilon_b = \frac{e_b}{C} .$$

## 5. SCHEMA DE RESOLUTION DU PROBLEME D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

### 5.1. Solution statique du problème d'interaction fluide-structure

Dans le cas d'un palier compliant lubrifié avec un fluide à couples de contraintes, l'équation de Reynolds modifiée d'ordre zéro (IV-4) est discrétisée par la méthode des différences finies centrée (2D). Le système d'équations algébriques obtenu après discrétisation est résolu à l'aide d'un processus itératif. Le processus de résolution est comme suit :

- 1- Lecture des données :  $\varepsilon_0, R/L, \tilde{\ell}, \tilde{t}_h, \tilde{C}_d, D_m, \beta_0, \nu, N_\theta, N_z$ , facteurs de relaxation, critères de convergence et le nombre maximal
- 2- Calcul de l'épaisseur de film adimensionnée dans le cas indéformable ( $\tilde{h}_0$ ) à partir des équations (II-79) et (II-67)
- 3- Initialiser le compteur d'itération  $n$  à 0
- 4- Initialiser le champ de pression statique adimensionné,  $\tilde{p}_0^{(n)} = 0$  et l'épaisseur de film adimensionnée,  $\tilde{h}^{(n)} = \tilde{h}_0$
- 5- calcul du champ de pression hydrodynamique statique adimensionné,  $\tilde{p}_0^{(n+1)}$  par résolution de l'équation de Reynolds modifiée d'ordre zéro (IV-4) à l'aide de la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sous-relaxation
- 6- calcul de l'épaisseur de film (palier compliant) :  $\tilde{h}^{(n+1)} = \tilde{h}_0 + \tilde{L}_0 \left( (1 - \Omega) \tilde{p}_0^{(n)} + \Omega \tilde{p}_0^{(n+1)} \right)$ , où,  $\Omega$  est le coefficient de sous-relaxation dont la valeur est comprise entre 0 et 1.

- 7- vérifier le critère de convergence :  $\frac{1}{N} \sum_{i,j} \left| \frac{\tilde{p}_{0ij}^{(n+1)} - \tilde{p}_{0ij}^{(n)}}{\tilde{p}_{0ij}^{(n+1)}} \right| \leq 10^{-5}$ , où N est le nombre total de nœuds pour lesquels la pression est positive, si la convergence n'est pas atteinte, incrémenter le nombre d'itération de 1 et revenir à l'étape 5.
- 8- si la convergence est atteinte, calculer les performances statiques adimensionnées du palier fluide à partir des équations (IV-9, IV-10, IV-13, IV-22, IV-24 et IV-26)
- 9- Codage de la région active du palier dans laquelle la pression statique  $\tilde{p}_0$  est positive pour la définition du domaine d'intégration des équations différentielles d'ordre un (IV-5 et IV-6).

## 5.2. Méthode de résolution en régime dynamique

Les calculs des performances dynamiques linéaires dues à de faibles amplitudes de perturbation sont effectués en supposant que la déformation de la structure (revêtement élastique mince) dans les conditions dynamiques reste petite. La solution statique du problème d'interaction fluide-structure obtenue après la déformation élastique du revêtement mince est prise en compte pour calculer les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement. Le processus de calcul du problème dynamique linéaire est décrit comme suit :

- 1- donner une valeur initiale de la fréquence relative (par exemple  $\gamma = 1$ )
- 2- résoudre les équations aux dérivées partielles d'ordre un (IV-5) et (IV-6) sur la région active du film pour obtenir des pressions dynamiques complexes adimensionnées ( $\tilde{p}_e$  et  $\tilde{p}_\phi$ ) par la méthode des sur-relaxations successive (SOR). Le critère d'arrêt des processus est similaire à celui utilisé pour le calcul du champ de pression hydrodynamique statique ( $\tilde{p}_0$ ).
- 3- calcul des coefficients dynamiques du palier (IV-27).
- 4- calcul des paramètres de stabilité du système ( $\gamma_c$ ) et ( $\tilde{m}_c$ ) à partir des deux équations (IV-33) et (IV-34).
- 5- Comparer la valeur estimée initialement  $\gamma$  avec la valeur calculée  $\gamma_c$ . Si le test  $\left| \frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c} \right| \leq 10^{-4}$  n'est pas satisfait, on pose  $\gamma = \gamma_c$  et retour à l'étape 2. Une valeur négative de  $\gamma_c^2$  signifie que la position de fonctionnement définie en coordonnées polaires ( $\varepsilon_0, \phi_0$ ) est stable.

## 6. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Pour valider le programme de calcul développé pour l'étude du comportement dynamique linéaire de palier compliant lubrifié en tenant compte de l'effet de misalignement

de l'arbre dans le palier, il est nécessaire de faire une comparaison des résultats obtenus à partir de la présente étude avec ceux disponibles dans la littérature. Les caractéristiques statiques adimensionnées présentés dans le tableau IV-1, tels que la pression maximale ( $\tilde{p}_{\max}$ ), la portance hydrodynamique ( $\tilde{W}_0$ ) et le débit volumique moyen total ( $\tilde{Q}_0$ ) ont été calculés pour quatre valeurs du degré de mésalignement ( $D_m = 0.2, 0.4, 0.8$  et  $0.95$ ) et un angle de mésalignement statique ( $\beta_0 = -90^\circ$ ) pour une excentricité relative statique ( $\varepsilon_0 = 0,8$ ), d'un palier rigide mésaligné de longueur finie ( $R/L=0.5$ ), lubrifié avec un fluide newtonien ( $\tilde{\ell}=0$ ). Comme il est montré, dans le tableau IV-1, les résultats obtenus sont en bonne concordance avec ceux publiés par Nicolas [46].

**Tableau IV-1:** Comparaison des performances statiques adimensionnées d'un palier mésaligné de longueur finie ( $R/L = 0.5$ ) lubrifié par fluide newtonien.

$D_m$	$\tilde{W}_0$	$\tilde{p}_{0\max}$	$\tilde{Q}_0$	
0.2	<b>0.191</b>	<b>0.928</b>	<b>0.791</b>	(1)
	0.190	0.928	0.788	(2)
	0.52	0.0	0.37	(3)
0.4	<b>0.195</b>	<b>0.928</b>	<b>0.795</b>	(1)
	0.194	0.925	0.792	(2)
	0.51	0.32	0.37	(3)
0.8	<b>0.225</b>	<b>1.254</b>	<b>0.816</b>	(1)
	0.223	1.247	0.812	(2)
	0.88	0.55	0.49	(3)
0.95	<b>0.266</b>	<b>3.25</b>	<b>0.823</b>	(1)
	0.258	3.11	0.822	(2)
	3.0	4.3	0.12	(3)

- Avec : (1) résultats de référence [45]  
 (2) résultats de travail présenté  
 (3) l'écart en les deux résultats en (%).

## 6.1. Etude paramétrique

L'étude paramétrique menée dans ce travail permet de mettre en évidence l'influence de la longueur de la chaîne moléculaire des additifs de viscosité (polymères) ( $\tilde{\ell}$ ) sur les performances statiques (portance hydrodynamique, angle de calage, puissance dissipée, moment de mésalignement, débit moyen volumique à chaque extrémité du palier ainsi que les vitesses moyennes d'écoulement de fluide lubrifiant) et les caractéristiques dynamiques linéaires (coefficients dynamiques, masse critique et la fréquence de fouettement) d'un palier

compliant de longueur finie lubrifié avec un fluide à couples de contraintes (non newtonien) en tenant compte de l'effet de mésalignement de l'arbre dans le palier.

Les calculs des performances dynamiques linéaires dues à des faibles amplitudes de perturbation sont effectués en supposant que le changement de la déformation de structure (revêtement élastique mince) dans les conditions dynamiques est très faible.

Pour tenir compte des effets des déformations élastiques du revêtement de surface mince d'épaisseur relative  $\tilde{t}_h=0.02$ , les calculs ont été effectués pour un coefficient de déformation adimensionné ( $\tilde{C}_d= 2.0$ ) correspondant à un matériau compressible (polyamide). Les différentes données de cette étude sont reportées dans le tableau IV-2.

Pour mettre en évidence les effets du défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier fluide, les résultats graphiques seront présentés pour un palier compliant aligné ( $D_m = 0.0$ ) et un palier compliant mésaligné, en considérant deux types de mésalignement, les plus significatifs caractérisés par les paramètres suivants : première type de mésalignement ( $D_m = 0.80, \beta = 0^\circ$ ), et deuxième de mésalignement ( $D_m = 0.80, \beta = -90^\circ$ ).

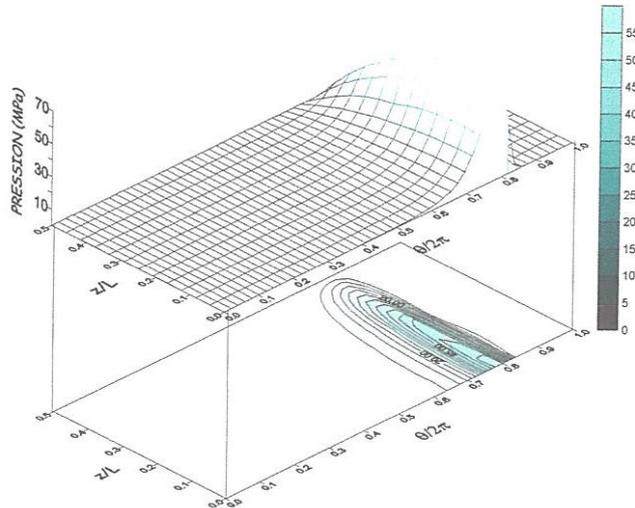
**Tableau IV-2:** Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement

<b>Caractéristiques géométriques</b>	
- Diamètre du palier, L	$50 \times 10^{-3}$ m
- Rayon de l'arbre, R	$25 \times 10^{-3}$ m
- Jeu radial, C	$35 \times 10^{-6}$ m
<b>Conditions de fonctionnement</b>	
- Masse du rotor affectée au palier, M	$2 \times$ kg
- Vitesse angulaire de l'arbre, $\omega$	$200 \times \pi$ rad/s
<b>Propriétés du lubrifiant, ISO VG 32 à 40°C</b>	
- Viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique, $\mu_0$	0.027 Pa.s
- Masse volumique, $\rho$	870 kg/m <sup>3</sup>
<b>Caractéristiques élastiques et géométriques du revêtement de surface</b>	
- Module d'Young du matériau, E	3GPa
- Coefficient de Poisson, $\nu$	0.36
- Epaisseur du revêtement mince, $t_h$	$5 \times 10^{-4}$ m

### 6.1.1. Validation du Modèle Couche Elastique Mince (MCEM)

Pour valider le Modèle Couche Elastique Mince (MCEM) dans le cas d'une couche cylindrique de longueur finie, on a développé un programme de calcul de structure par éléments finis tridimensionnels (3D), l'élément fini choisi est l'élément hexaédrique tri-linéaire à huit nœuds [annexe h]. Le champ de pression appliqué sur la surface interne du tube cylindrique est calculé à partir de la résolution de l'équation de Reynolds modifiée d'ordre zéro

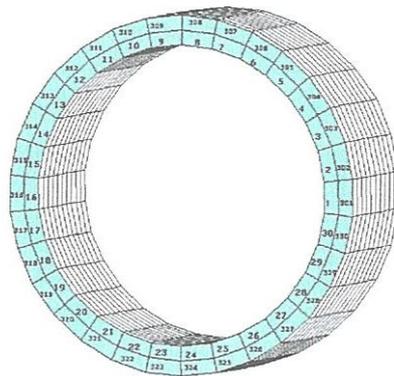
(IV-4) pour un fluide newtonien ( $\tilde{\ell} = 0$ ) par la méthode des différences finies centrées (2D), dans le cas d'un palier rigide hydrodynamique de longueur finie ( $L/D=1$ ), fonctionnant à une excentricité relative statique  $\varepsilon_0 = 0.90$ , (figure IV-2).



**Fig.IV-2:** Champ de pression hydrodynamique calculé dans le demi-palier.

La couche élastique est maillée suivant les trois directions de l'espace ( $r, \theta, z$ ) avec des pas réguliers. Les caractéristiques du maillage (figure IV-3) sont :

- nombre d'éléments suivant la direction radiale égale deux
- nombre d'éléments suivant la direction circonférentielle égale trente
- nombre d'éléments suivant la direction axiale ( $z$ ) dix.



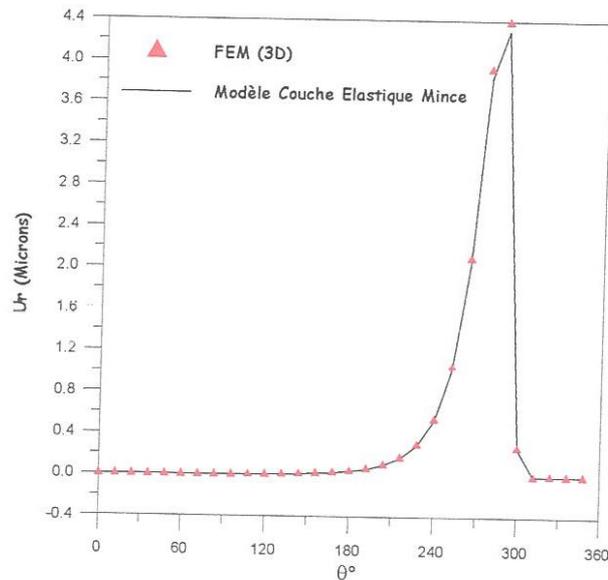
**Fig.IV-3:** Représentation du maillage du demi-palier par éléments hexaédriques à 8 nœuds.

Dans la figures IV-4, on compare le champ de déplacement radial calculé dans la section médiane du palier pour deux valeurs de l'épaisseur  $t_h=0.5$  mm et 1 mm et un matériau compressibles ( $E=3$ GPa,  $\nu = 0.36$ ) correspondant aux caractéristiques élastiques du polyamide.

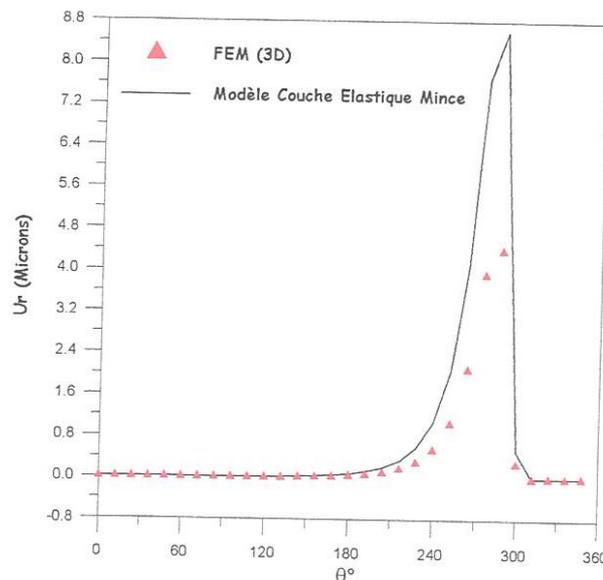
Les résultats obtenus montrent une bonne concordance entre les valeurs du déplacement calculées par le Modèle Couche Elastique Mince (**MCEM**) et la méthode d'éléments finis (3D)

dans le cas de la couche ayant une faible épaisseur ( $t_h=0.5$  mm) (figure IV-4.a). On remarque que lorsque l'épaisseur de la couche augmente, l'écart maximal entre les déplacements calculés par les deux modèles (MEF (3D) et MCEM) devient important (figure IV-4.b). Dans ces conditions, le MCEM est mis en défaut.

Par comparaison à la méthode des éléments finis, l'avantage principal MCEM est la réduction importante du temps de calcul (CPU) requis pour calculer les déformations élastiques du revêtement. Il est suffisant pour la prise en considération des effets de déformations élastiques du revêtement de surface sur les performances statiques et dynamiques d'un palier fluide.



a)  $t_h=0.5$  mm



b)  $t_h=1$  mm

**Fig.IV-4:** Variations circonférentielles du champ de déplacement radial dans le plan médian du palier constitué d'un matériau compressible ( $E = 3$  GPa,  $\nu = 0.36$ ).

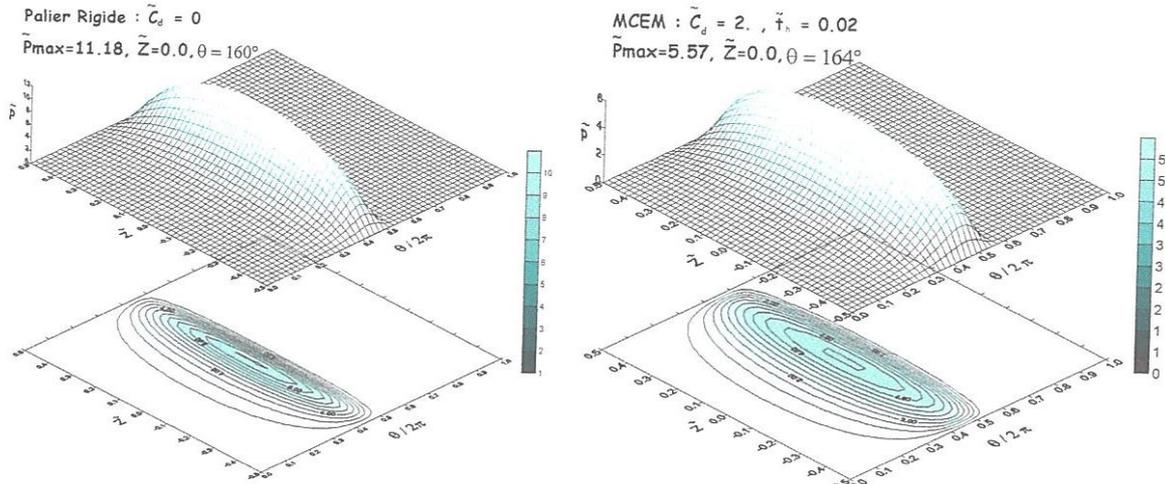
### 6.1.2. Effets des déformations élastiques du revêtement sur la distribution de la pression

Les figures IV-5 et IV-6 présentent les distributions de pression statique adimensionnée en (3D) dans le film lubrifiant d'un palier lubrifié avec un fluide newtonien ( $\tilde{\ell} = 0.0$ ) et un fluide à couples de contraintes ( $\tilde{\ell} = 0.4$ ) (non newtonien), pour une excentricité relative statique imposée ( $\varepsilon_0 = 0.80$ ). Les résultats sont présentés pour un palier rigide ( $\tilde{C}_d = 0.0$ ) et un palier revêtu d'une couche mince élastique en polyamide ( $\tilde{C}_d = 2.0$  et  $\tilde{t}_h = 0.02$ ) dans le cas aligné ( $D_m = 0$ ) et mésaligné ( $D_m = 0.80$ ,  $\beta_0 = 0^\circ$ ) et ( $D_m = 0.80$ ,  $\beta_0 = -90^\circ$ ).

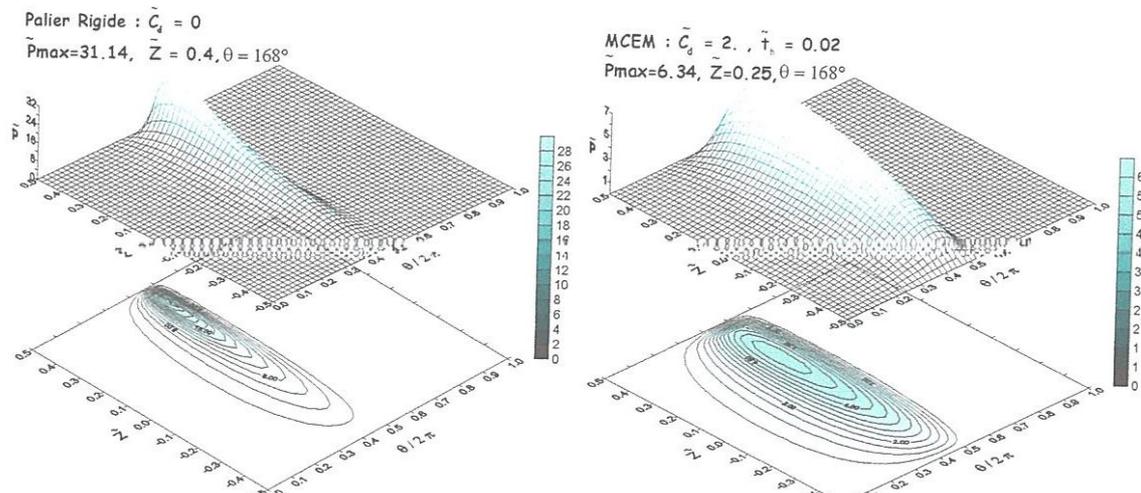
On observe une diminution très importante du pic de pression dans le film lubrifiant due à l'effet de déformation élastique du revêtement dans le cas du palier mésaligné lubrifié avec un fluide non-newtonien ( $\tilde{\ell} = 0.4$ ) (figure IV-6.b).

Les résultats montrent que les déformations élastiques du revêtement dues à la pression hydrodynamique statique doivent être considérées dans le calcul des performances statiques et dynamiques des paliers.

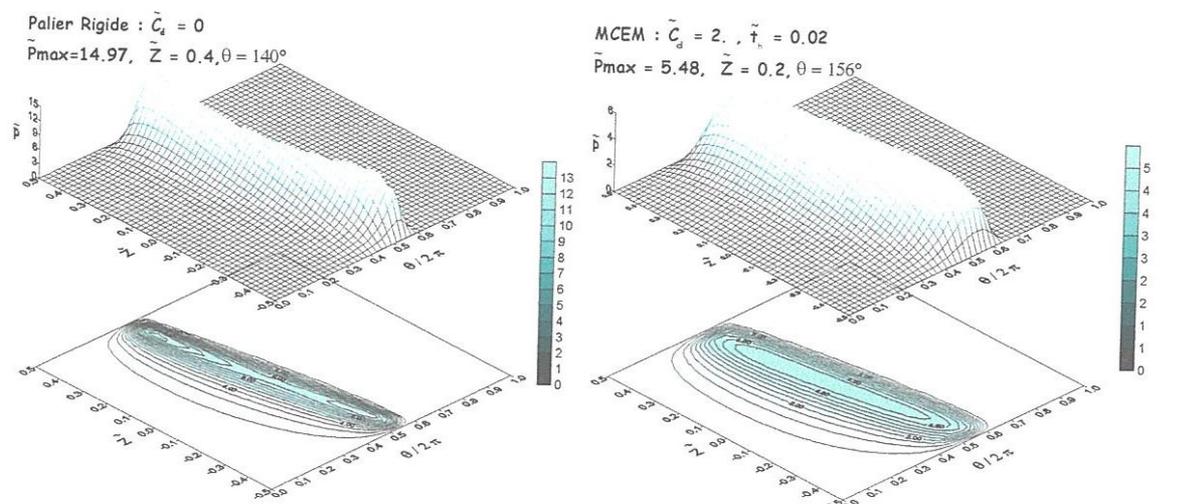
En outre, le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier conduit à une augmentation significative du pic de pression dans le film lubrifiant (figure IV-6.b). Son emplacement se déplace vers une des extrémités du palier. Le défaut de mésalignement conduit à une augmentation de la valeur maximale de pression dans le film lubrifiant, mais dans certains cas modifie de manière significative le champ de pression dans le film lubrifiant (figure IV-5.c et IV-6.c).



a) palier aligné :  $D_m = 0$



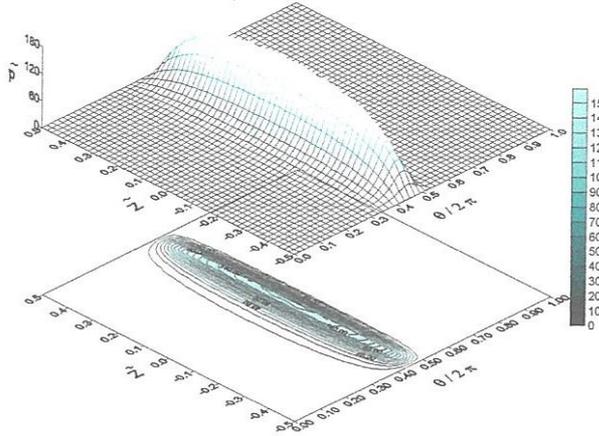
b) palier mésaligné :  $D_m = 0.8$  et  $\beta_0 = 0^\circ$



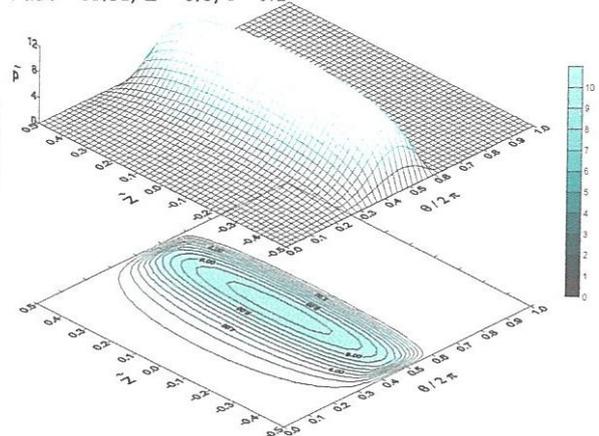
c) palier mésaligné :  $D_m = 0.8$  et  $\beta_0 = -90^\circ$

**Fig.IV-5:** Présentation du champ de pression statique adimensionné ( $\tilde{\ell} = 0.0$  et  $\varepsilon_0 = 0.80$ )

Palier Rigide :  $\bar{C}_d = 0.0$   
 $\bar{P}_{max} = 170.59, \bar{Z} = 0.0, \theta = 168^\circ$

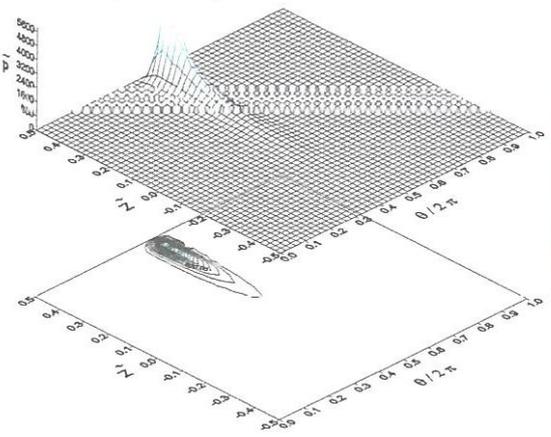


MCEM :  $\bar{C}_d = 2.0, \bar{f}_h = 0.02$   
 $\bar{P}_{max} = 11.52, \bar{Z} = 0.0, \theta = 172^\circ$

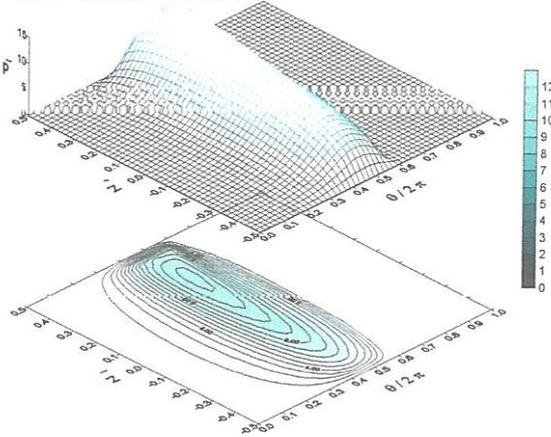


a) cas aligné :  $D_m = 0$

Palier Rigide :  $\bar{C}_d = 0$   
 $\bar{P}_{max} = 5604, \bar{Z} = 0.45, \theta = 172^\circ$

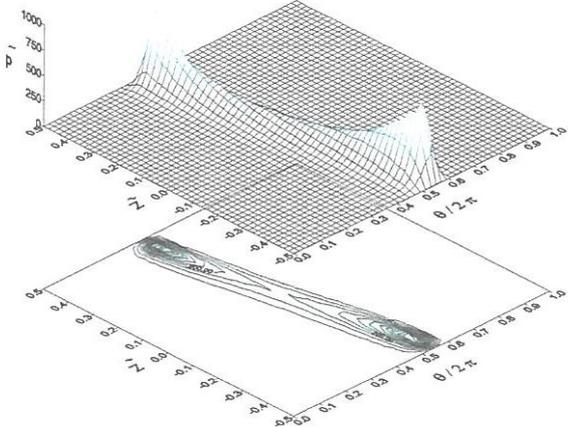


MCEM :  $\bar{C}_d = 2.0, \bar{f}_h = 0.02$   
 $\bar{P}_{max} = 13.35, \bar{Z} = 0.3, \theta = 176^\circ$

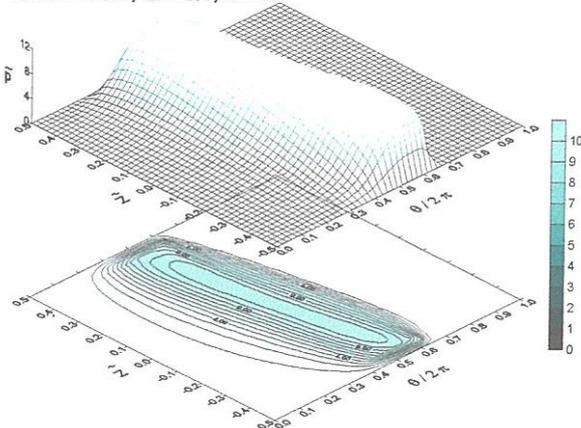


b) cas mésaligné :  $D_m = 0.8$  et  $\beta_0 = 0^\circ$

Palier Rigide :  $\bar{C}_d = 0$   
 $\bar{P}_{max} = 911.46, \bar{Z} = 0.45, \theta = 144^\circ$



MCEM :  $\bar{C}_d = 2.0, \bar{f}_h = 0.02$   
 $\bar{P}_{max} = 11.83, \bar{Z} = 0.2, \theta = 160^\circ$



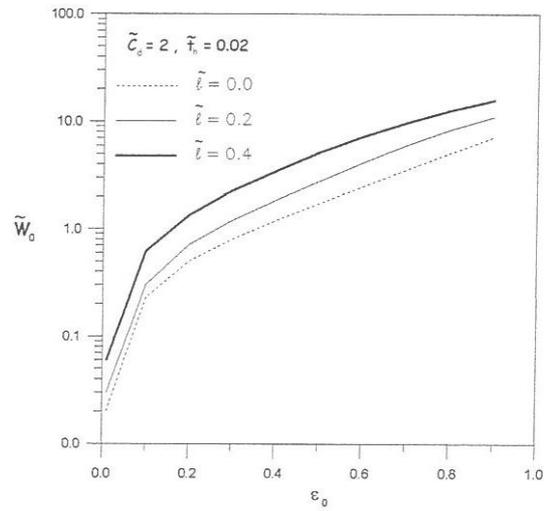
c) cas mésaligné :  $D_m = 0.8$  et  $\beta_0 = -90^\circ$

Fig.IV-6: Présentation de champ de pression statique adimensionné ( $\bar{\ell} = 0.4$  et  $\varepsilon_0 = 0.80$ )

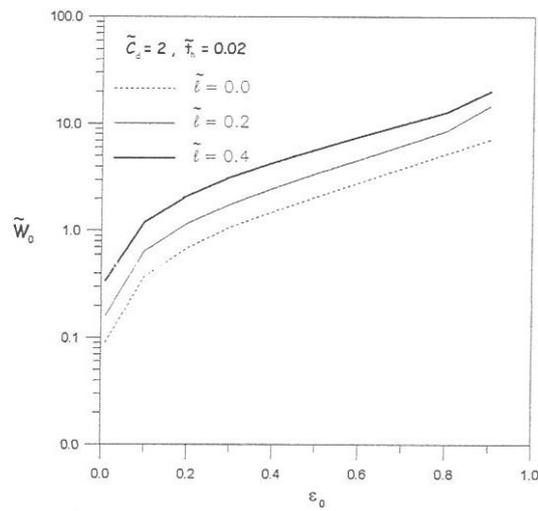
### 6.1.3. Etude des effets du paramètre des couples de contraintes et du défaut de mésalignement de l'arbre sur les performances statiques et dynamiques linéaires du palier

Les performances statiques et dynamiques linéaires ont été obtenues pour une excentricité relative statique ( $\varepsilon_0$ ) variant de 0.01 à 0.90 et différentes valeurs de paramètre de couples de contraintes adimensionné  $\tilde{\ell} = 0.0$  (fluide newtonien), 0.2 et 0.4. Les résultats seront présentés dans le cas des paliers munis d'un revêtement compliant (polyamide) dont les caractéristiques sont ( $\tilde{C}_d = 2.0$  et  $\tilde{t}_h = 0.02$ ), fonctionnant dans le cas aligné ( $D_m = 0.0$ ) et mésaligné ( $D_m = 0.80$ ,  $\beta = 0^\circ$ ) et ( $D_m = 0.80$ ,  $\beta_0 = -90^\circ$ ).

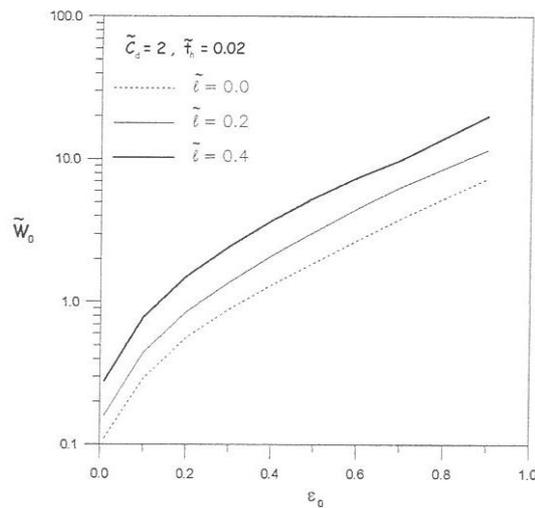
La figure IV-7 présente les variations de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique et différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ) dans le cas d'un palier compliant aligné ( $D_m = 0.0$ ) et d'un palier compliant mésaligné. On observe une augmentation significative de la portance hydrodynamique adimensionnée du palier avec le paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ) surtout pour des grandes valeurs d'excentricité relative statique ( $\varepsilon_0$ ). On peut conclure qu'un palier lubrifié avec un fluide à couples de contraintes (non newtonien) permet d'augmenter la capacité de charge du palier par comparaison au fluide newtonien. Pour les mêmes valeurs du paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ) et d'excentricité relative statique, de même le mésalignement permet d'augmenter la portance hydrodynamique du palier.



a) cas aligné :  $Dm=0$



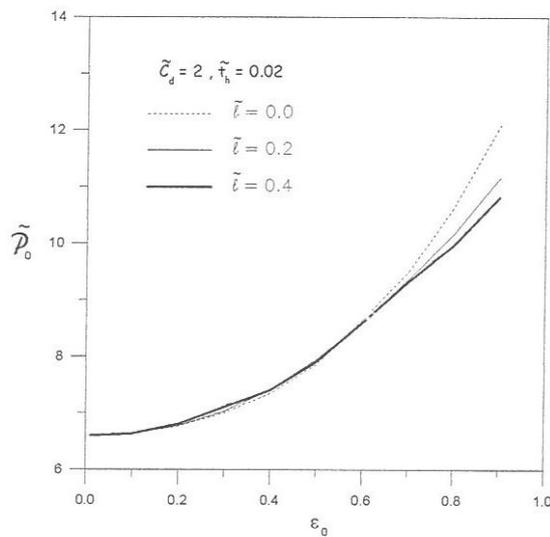
b) cas mésaligné :  $Dm=0.8$  et  $\beta_0=0^\circ$



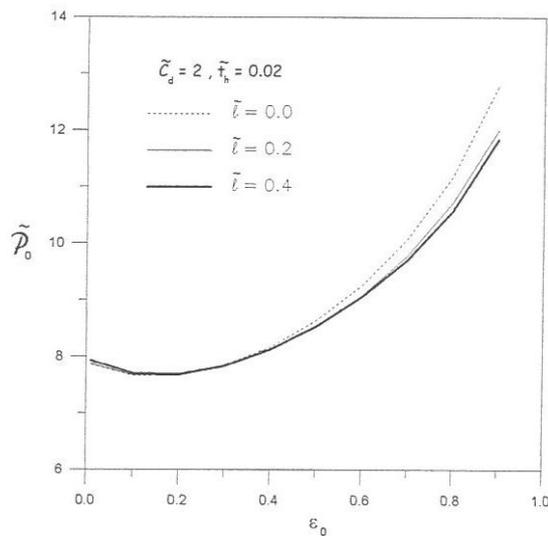
c) cas mésaligné :  $Dm=0.8$  et  $\beta_0=-90^\circ$

**Fig.IV-7:** Variations de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.

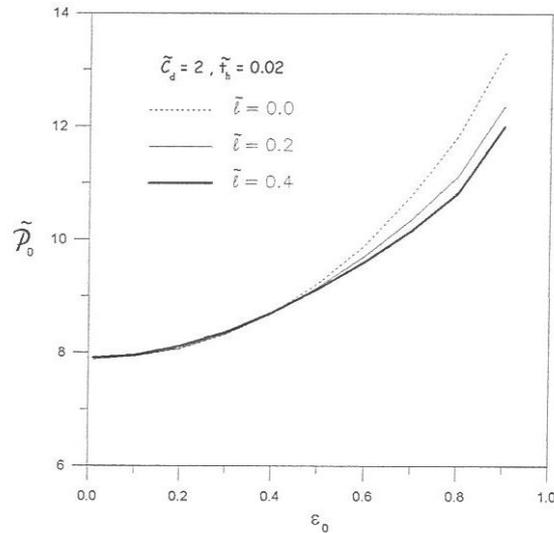
Les variations de la puissance dissipée adimensionnée dans le film lubrifiant en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ) dans les deux cas de palier compliant étudié (mésaligné et aligné) sont présentées sur la figure IV-8. Comme montre la figure, l'effet du paramètre des couples de contraintes conduit à une diminution de la puissance dissipée dans le film lubrifiant pour des grandes valeurs de l'excentricité relative statique. Le fluide à couples de contraintes permet de réduire sensiblement les pertes par frottement dans le film lubrifiant surtout dans le cas où le palier est fortement chargé. Pour les mêmes valeurs de ( $\tilde{\ell}$ ), le mésalignement conduit à une faible augmentation de la puissance dissipée dans le film lubrifiant pour des grandes valeurs de l'excentricité relative statique.



a) cas aligné :  $Dm=0$



b) cas mésaligné :  $Dm=0.8$  et  $\beta_0=0^\circ$



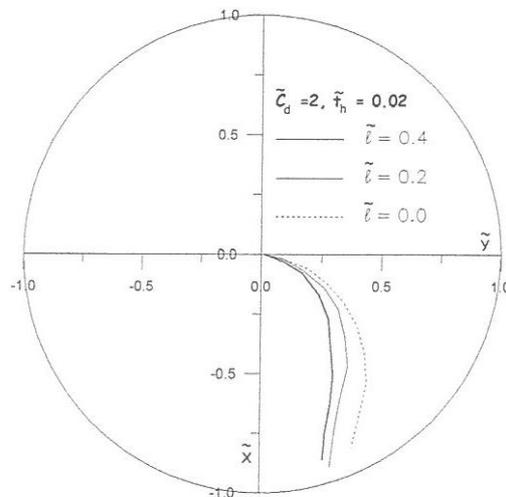
c) cas mésaligné :  $D_m=0.8$  et  $\beta_0=-90^\circ$

**Fig.IV-8:** Variations de la puissance dissipée adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.

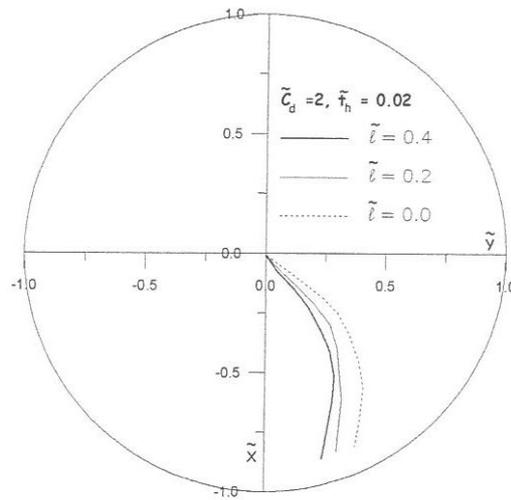
Les variations de l'angle de calage statique du palier en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs du paramètre de couple de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ) sont présentés sur la figure IV-9. Les résultats présentés pour les deux types de palier compliants étudiés : cas aligné ( $D_m = 0.0$ ) et cas mésaligné ( $D_m = 0.80$ ,  $\beta = 0^\circ$ ) et ( $D_m = 0.80$ ,  $\beta_0 = -90^\circ$ ).

On constate que la valeur de l'angle de calage diminue avec la longueur relative de la chaîne moléculaire des additifs de viscosité ( $\tilde{\ell}$ ).

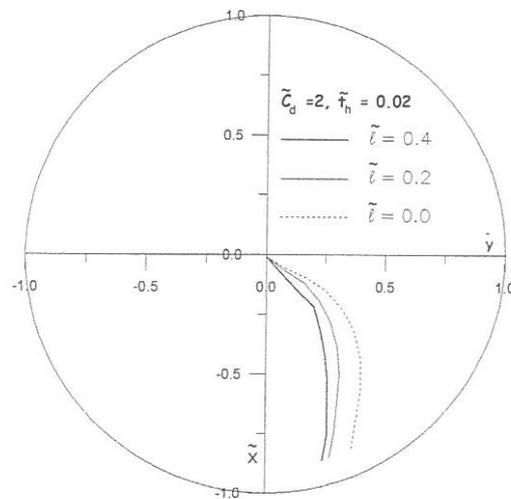
Le mésalignement de l'arbre dans le palier conduit à une faible diminution de la valeur de l'angle de calage statique.



a) cas aligné :  $D_m = 0$



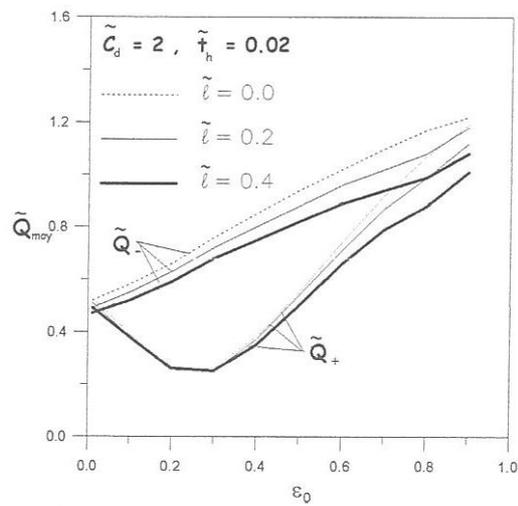
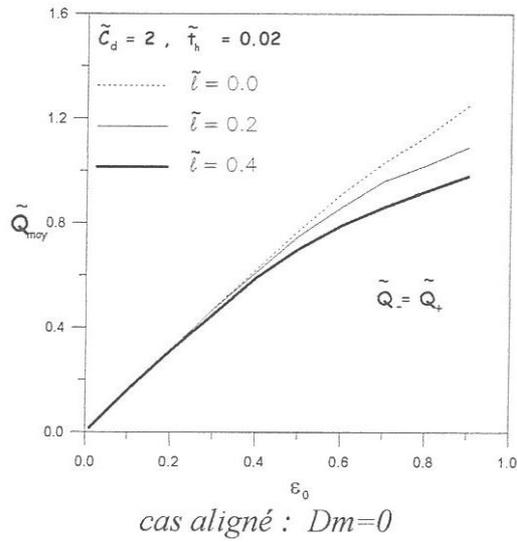
b) cas mésaligné :  $Dm = 0.8$  et  $\beta_0 = 0^\circ$



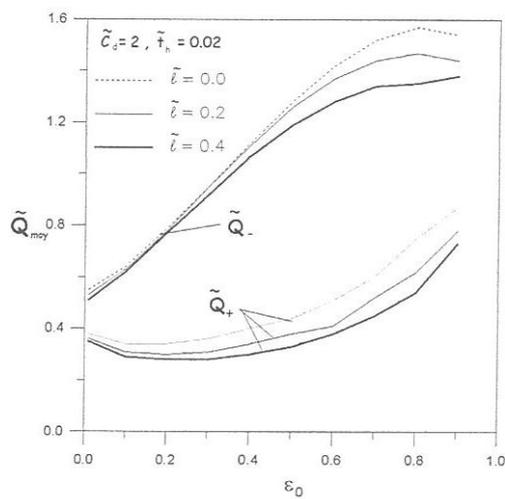
c) cas mésaligné :  $Dm = 0.8$  et  $\beta_0 = -90^\circ$

**Fig.IV-9:** Variations de l'angle de calage statique en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.

La figure IV-10 présente les variations de débits volumiques moyens d'écoulement à chaque extrémité du palier en fonction de l'excentricité relative statique et différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ), pour les deux types de palier compliants étudiés. Le débit de fuite diminue avec l'augmentation de la valeur de  $\tilde{\ell}$  pour les grandes valeurs de l'excentricité relative statique. Pour les mêmes valeurs de  $\tilde{\ell}$ , le débit volumique moyen est le même aux deux extrémités du palier aligné (IV-10.a), mais dans le cas mésaligné, celui-ci devient très différent aux deux extrémités du palier (IV-10.b et IV-10.c). Le débit de fuite moyen du palier a été calculé à partir des vitesses moyennes de l'écoulement du lubrifiant (figure IV-11).



a) *cas mésaligné :  $Dm=0.8$  et  $\beta_0=0^\circ$*

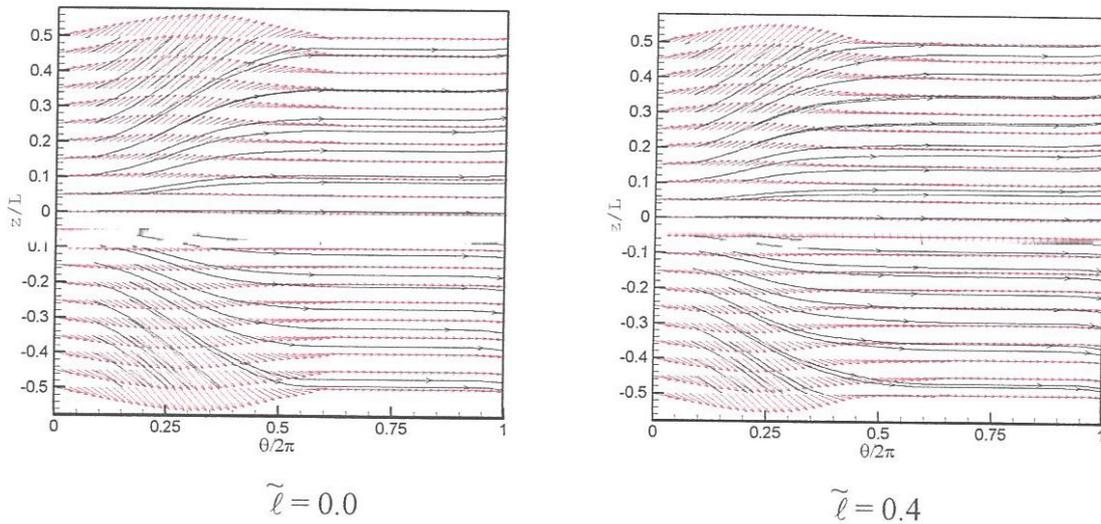


c) *cas mésaligné :  $Dm=0.8$  et  $\beta_0=-90^\circ$*

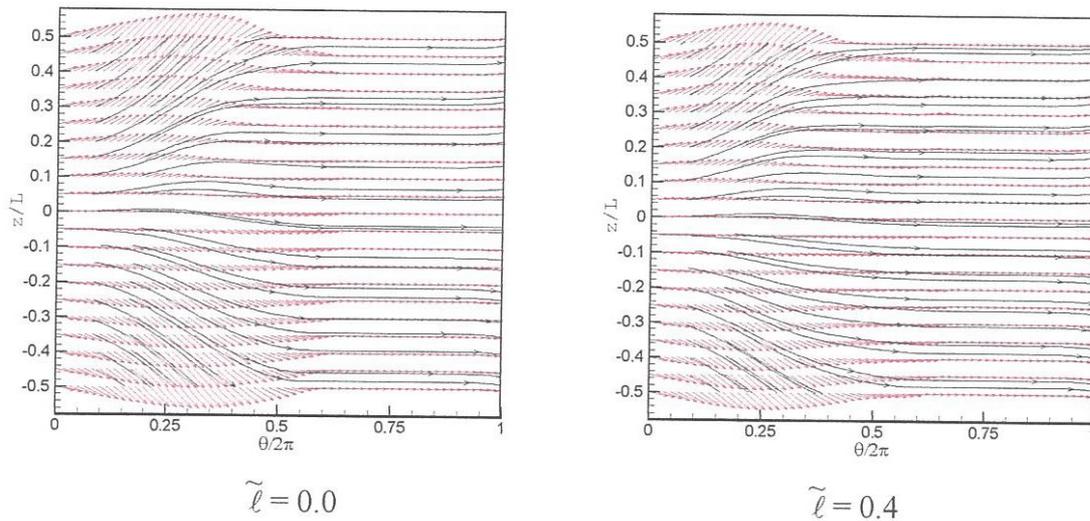
**Fig.IV-10:** *Variations du débit de fuite moyen adimensionné en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.*

Les répartitions du champ de vitesses moyennes et les lignes de courant de l'écoulement du film lubrifiant pour une excentricité relative statique  $\varepsilon_0 = 0.8$  et deux valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{\ell} = 0.0$  (fluide newtonien) et  $\tilde{\ell} = 0.4$  (fluide polaire non newtonien), sont présentées sur la figure IV-11. Les résultats présentés correspondent aux paliers compliants aligné et mésaligné.

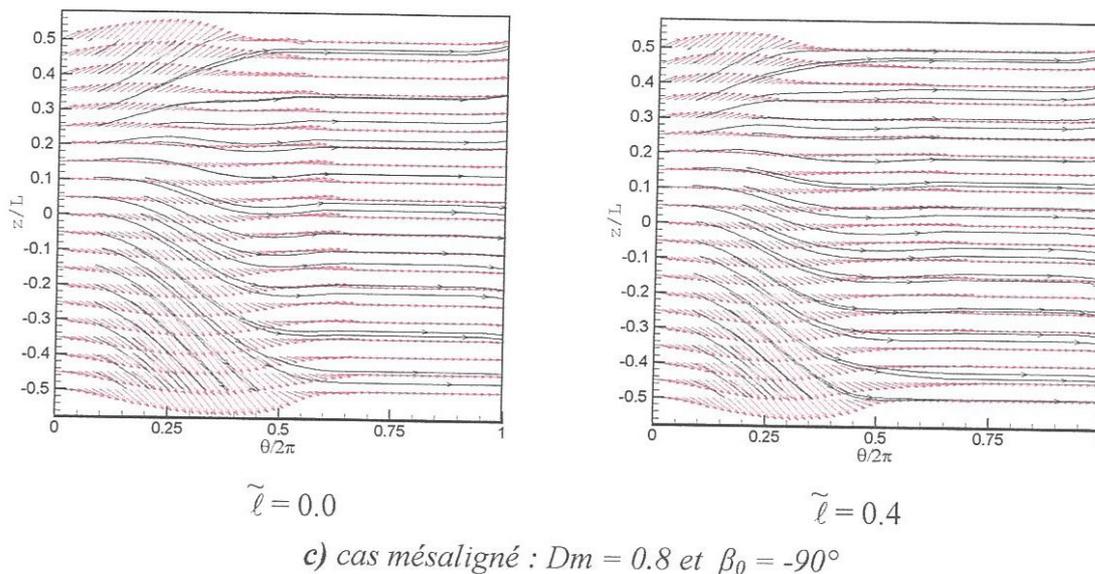
On constate que la longueur des chaines moléculaires des additifs ( $\tilde{\ell}$ ) a des effets remarquables sur la distribution des vitesses moyennes d'écoulement du fluide lubrifiant et les lignes de courant de l'écoulement. D'autre part, le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier a des effets remarquables sur la distribution des vitesses moyennes en particulier les lignes de courant de l'écoulement (IV-11.a et IV-11.c).



a) cas aligné :  $Dm = 0$



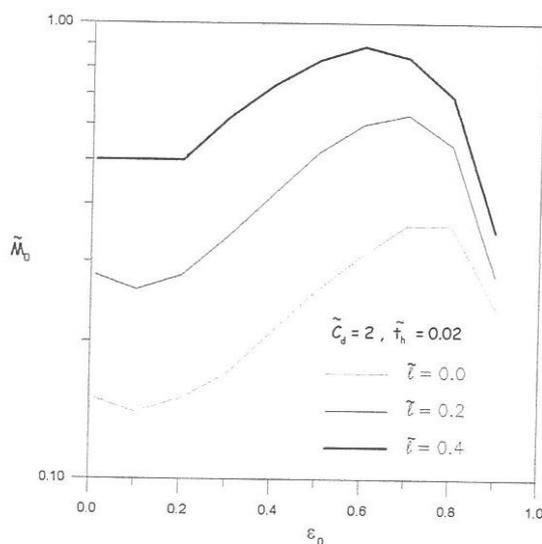
b) cas mésaligné :  $Dm = 0.8$  et  $\beta_0 = 0^\circ$



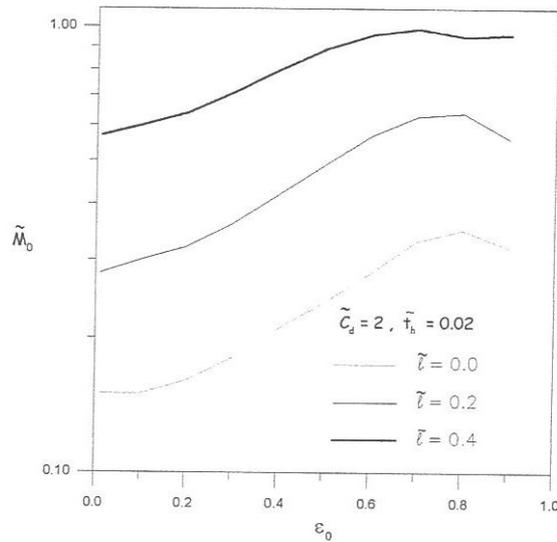
**Fig.IV-11:** Répartitions de vitesses moyennes d'écoulement et lignes de courant dans le film lubrifiant pour une excentricité relative statique  $\varepsilon_0 = 0.80$ .

La figure IV-12 présente les variations du moment de mésalignement adimensionné en fonction de l'excentricité relative statique et différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ) pour les deux types de mésalignement étudiés, à savoir ( $D_m = 0.8, \beta_0 = 0^\circ$ ) et ( $D_m = 0.8, \beta_0 = -90^\circ$ ). Pour les mêmes valeurs de l'excentricité relative statique, le moment de mésalignement adimensionné augmente avec le paramètre des couples de contraintes.

En outre, pour les grandes valeurs de l'excentricité relative le moment de mésalignement diminue à cause de l'effet des déformations élastiques du revêtement qui deviennent importantes.



a) cas mésaligné :  $D_m = 0.8$  et  $\beta_0 = 0^\circ$



**b) cas mésaligné :  $D_m = 0.8$  et  $\beta_0 = -90^\circ$**

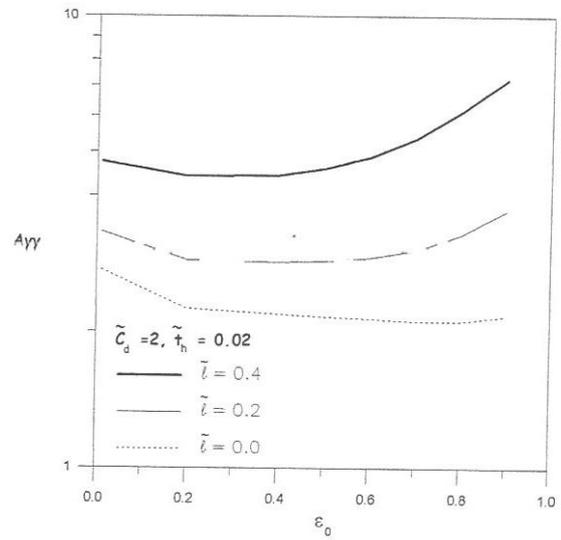
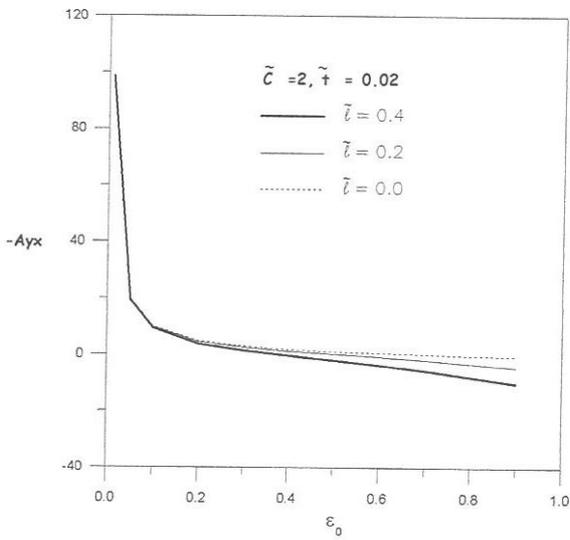
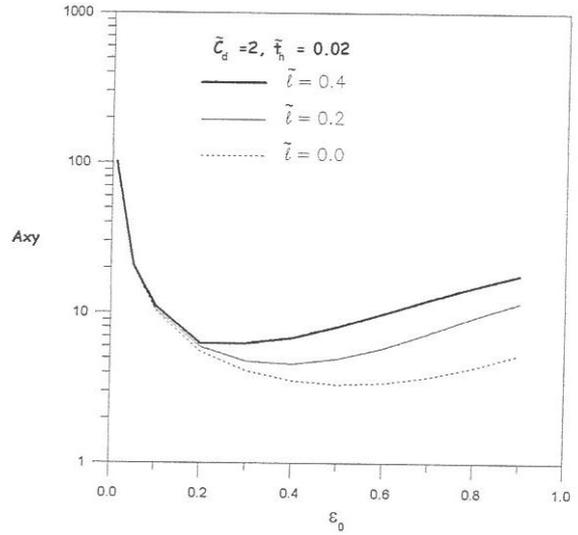
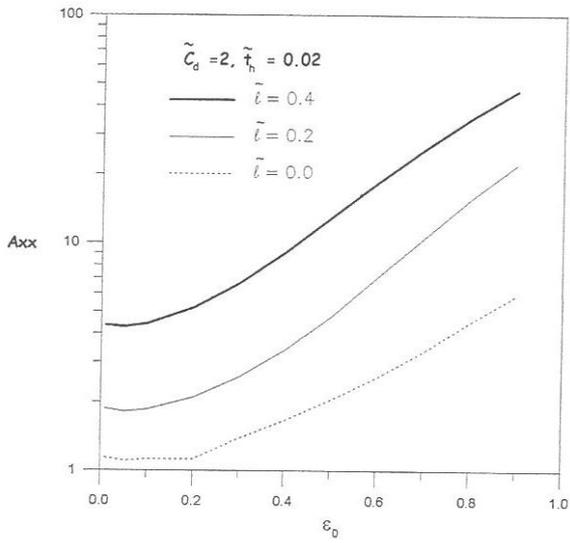
**Fig.IV-12:** Variations du moment de mésalignement adimensionné en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.

Les variations des coefficients de raideur et d'amortissement du système rotor-paliers avec le paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ) et l'excentricité relative statique sont présentées sur les figures IV-13 et IV-14. Cette fois-ci les résultats sont présentés pour deux types de palier compliant : palier aligné ( $D_m = 0.0$ ) et paliers mésalignés ( $D_m = 0.6, \beta_0 = 0^\circ$ ) et ( $D_m = 0.6, \beta_0 = -90^\circ$ ).

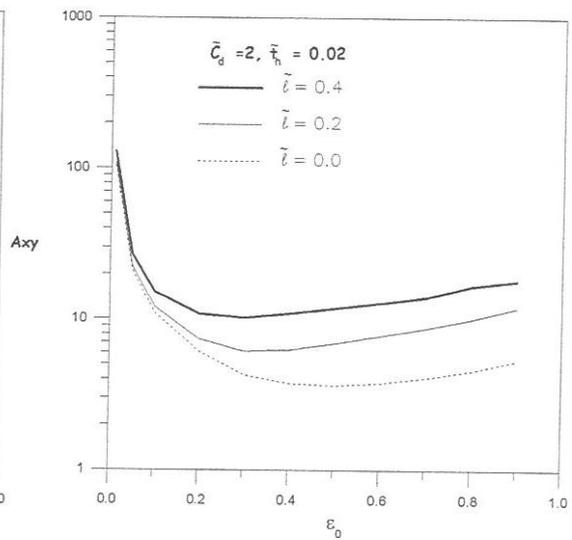
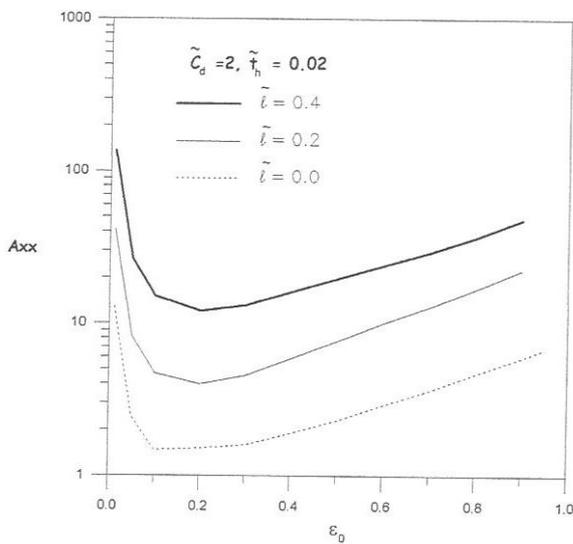
Ces figures montrent les effets combinés de la présence des couples de contraintes dans le fluide lubrifiant et le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier permettent d'améliorer de façon significative les coefficients dynamiques du système rotor-paliers.

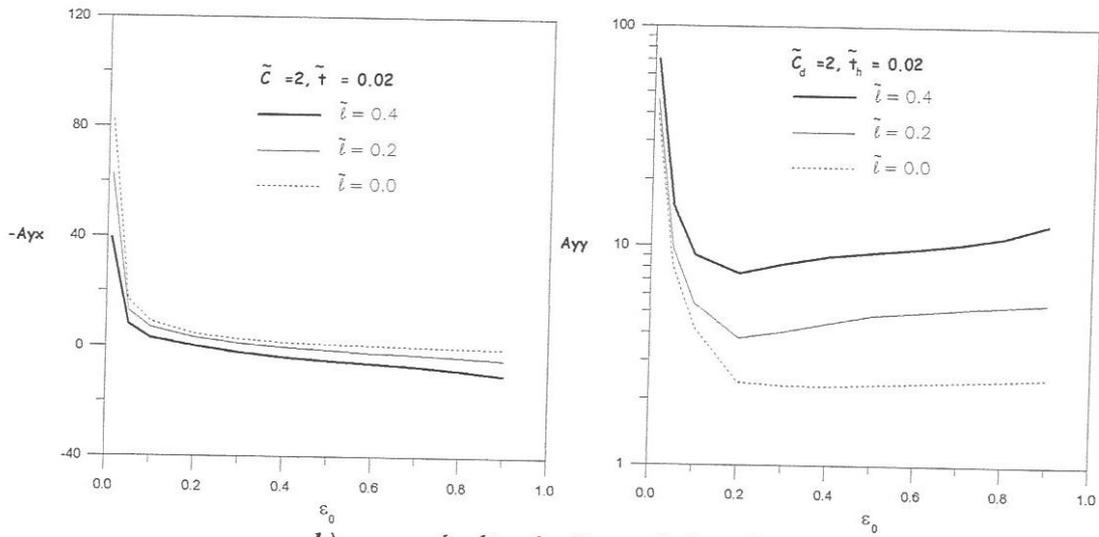
D'autre part, un changement de signe du coefficient de raideur croisé ( $A_{yx}$ ) a une importance vis-à-vis de l'analyse de la stabilité dynamique du système. Ceci permet de connaître la valeur de l'excentricité relative pour laquelle le système devient stable.

La connaissance des coefficients dynamiques est indispensable pour l'étude de stabilité du système rotor-paliers et la réponse du palier à une excitation dynamique.

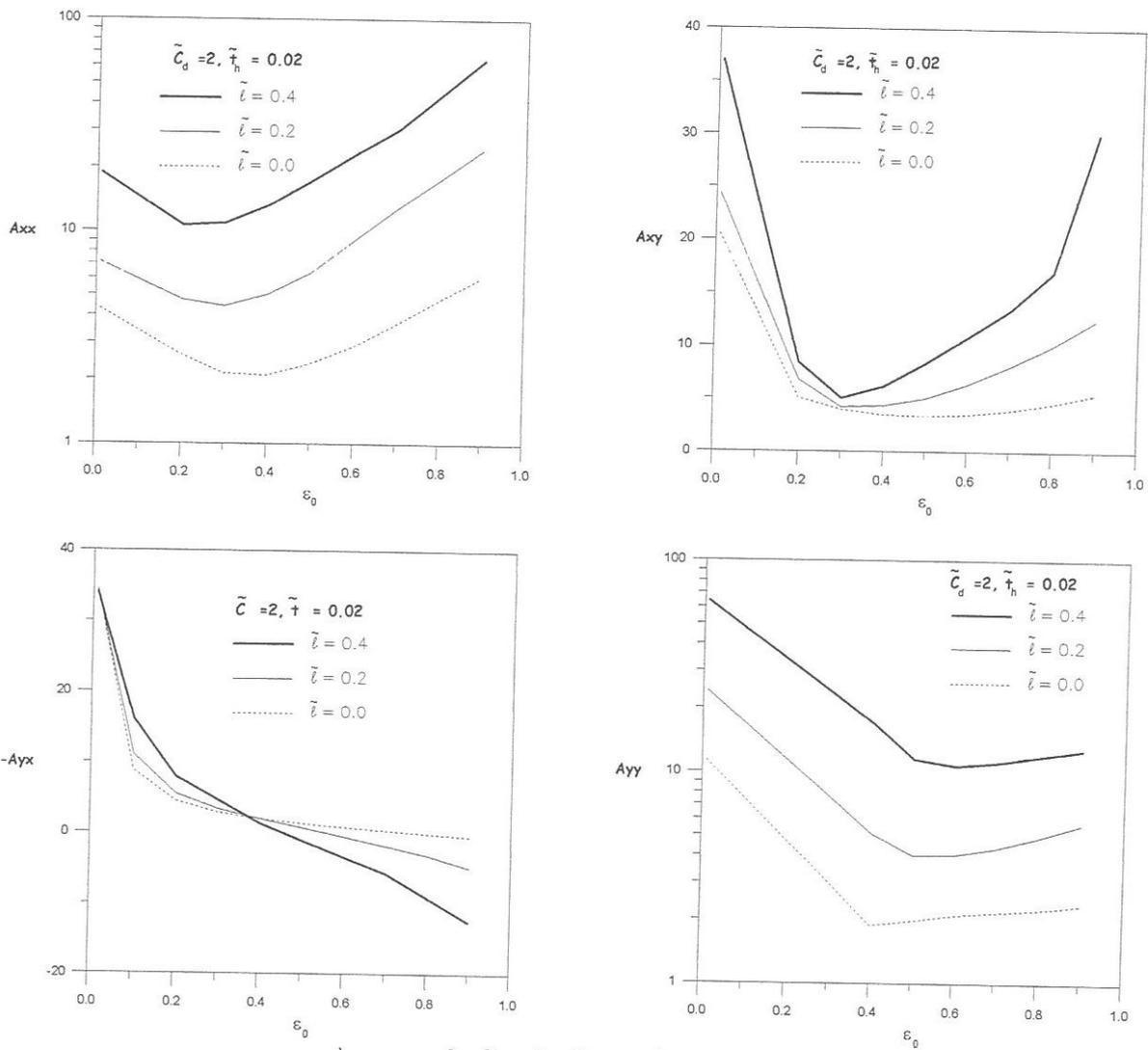


a) cas aligné :  $Dm = 0$



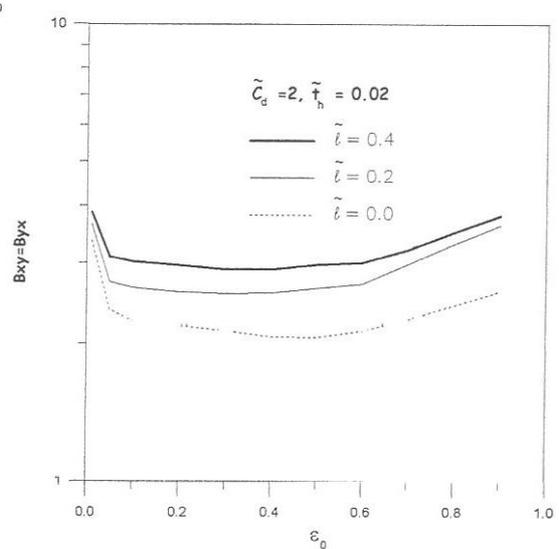
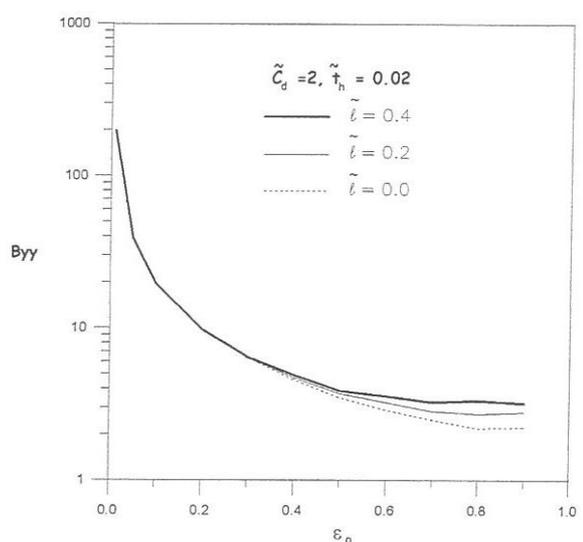
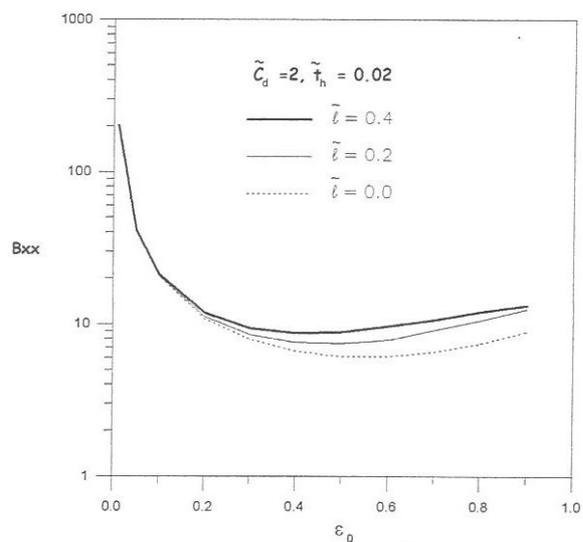


b) cas mésaligné :  $Dm = 0.6$  et  $\beta_0 = 0^\circ$

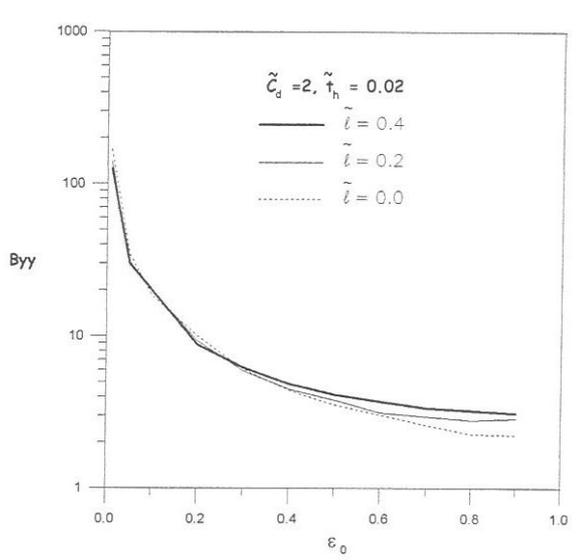
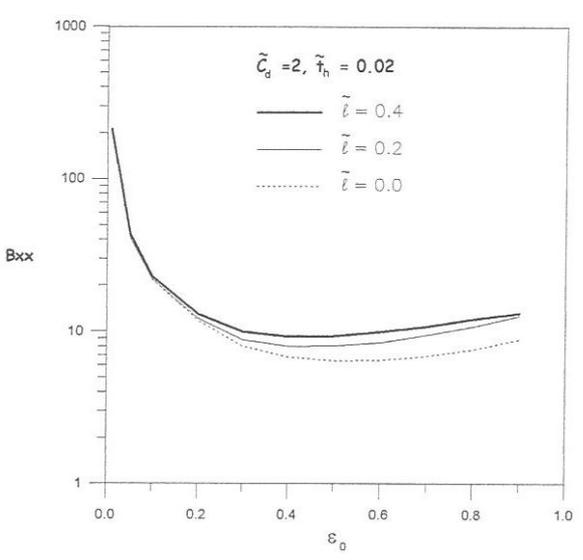


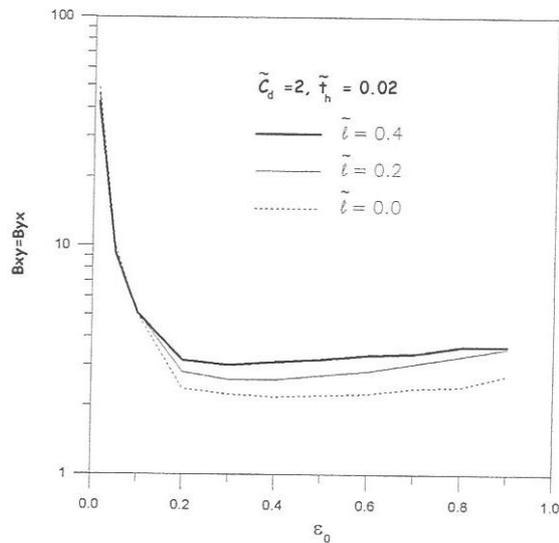
c) cas mésaligné :  $Dm = 0.6$  et  $\beta_0 = -90^\circ$

**Fig.IV-13:** Variations de coefficients de raideur adimensionnés en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.

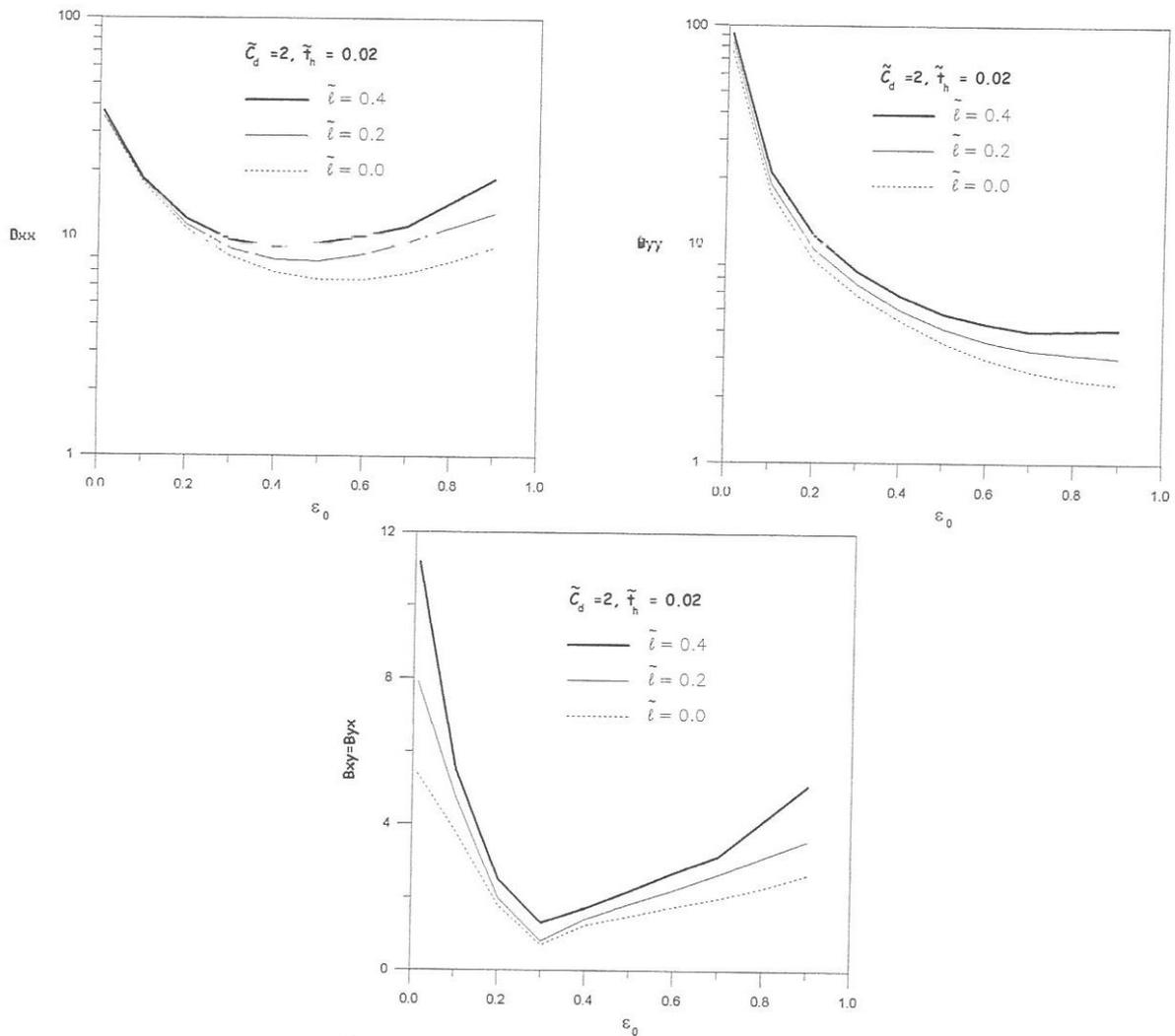


a) cas aligné :  $Dm = 0$





b) cas mésaligné :  $Dm = 0.6$  et  $\beta_0 = 0^\circ$

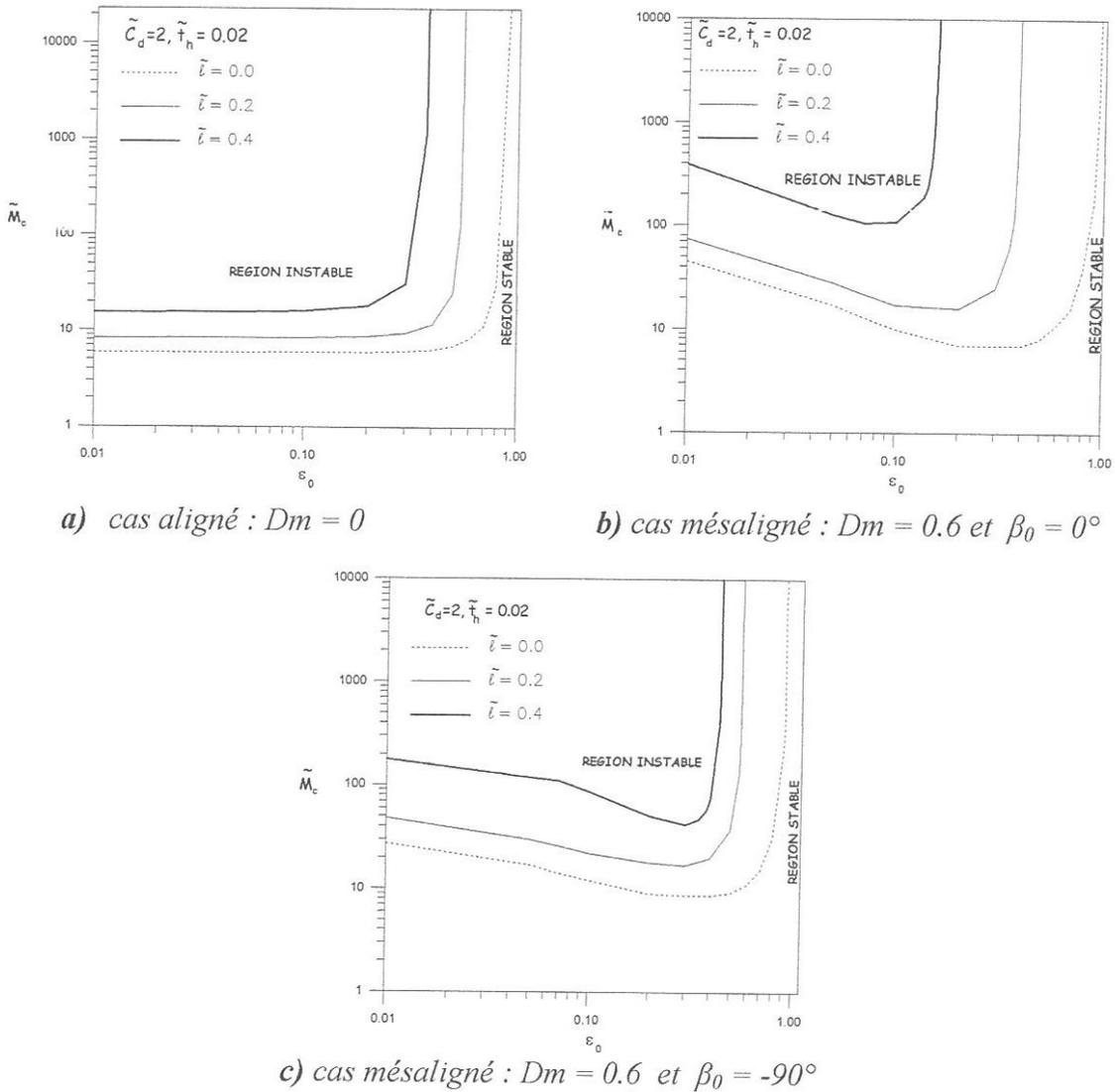


c) cas mésaligné :  $Dm = 0.6$  et  $\beta_0 = -90^\circ$

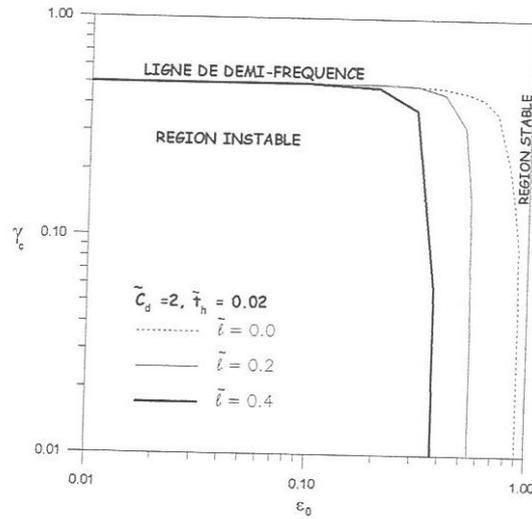
**Fig.IV-14:** Variations de coefficients d'amortissement adimensionnés en Fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.

A partir des huit coefficients dynamiques obtenus, les cartes de stabilité du système rotor-palier sont déterminées et tracées. Les figures IV-15 et IV-16 présentent les variations de la masse critique et de la fréquence de fouettement en fonction de l'excentricité relative pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ).

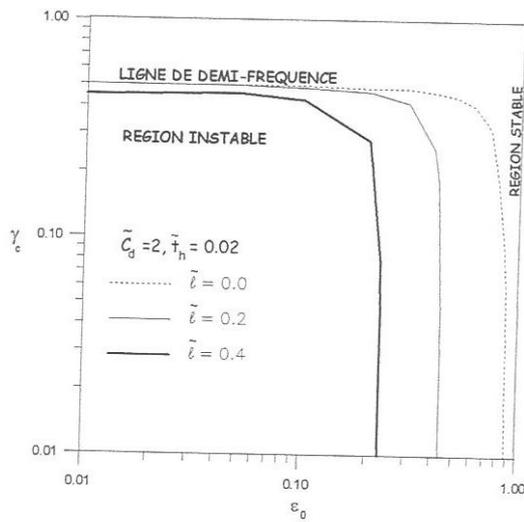
Les résultats sont présentés pour deux types de palier compliants étudiés : palier aligné ( $D_m = 0$ ) et paliers mésalignés ( $D_m = 0.6, \beta_0 = 0^\circ$ ) et ( $D_m = 0.6, \beta_0 = -90^\circ$ ). Les figures montrent que la présence des couples de contraintes dans le lubrifiant (additifs) augmente sensiblement la stabilité du système rotor-palier. Cette stabilité est d'autant plus importante que la longueur de la chaîne moléculaire est grande. En outre, le mésalignement de l'arbre dans le palier pour les mêmes valeurs de  $\tilde{\ell}$  et de l'excentricité relative, améliore la stabilité du système (IV-15.b et IV-15.c). En conséquence, le palier lubrifié par fluide à couples de contraintes même lorsqu'il est peu chargé est plus stable que celui lubrifié par un fluide non additivé (newtonien).



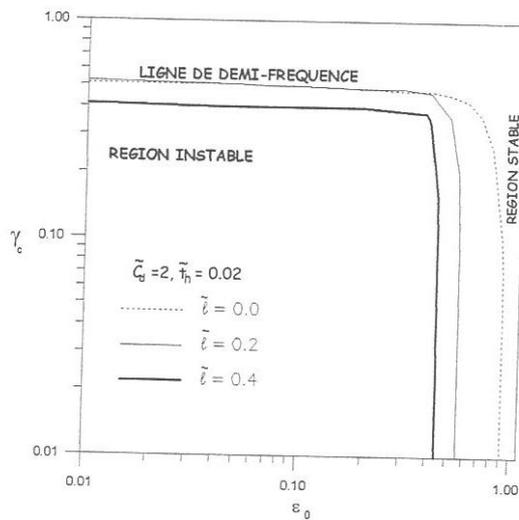
**Fig.IV-15:** Variations de la masse critique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.



a) cas aligné :  $Dm = 0$



b) cas mésaligné :  $Dm = 0.6$  et  $\beta_0 = 0^\circ$



c) cas mésaligné :  $Dm = 0.6$  et  $\beta_0 = -90^\circ$

**Fig.IV-16:** Variations de la fréquence de fouettement adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.

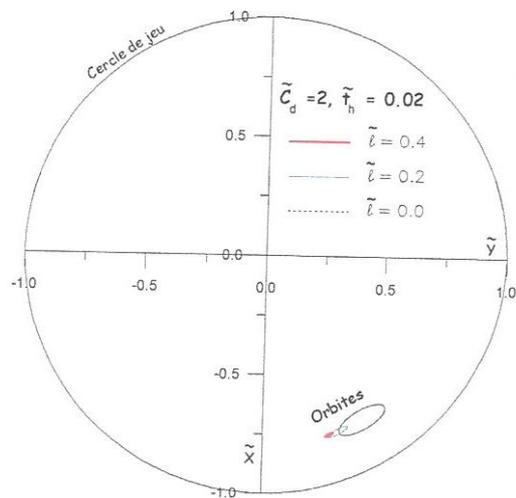
#### 6.1.4. Effets du paramètre des couples de contraintes sur la réponse dynamique du palier

Sur les figures IV-17 et IV-18, on compare les trajectoires du centre de l'arbre dans le palier et les variations des déplacements du centre de l'arbre au cours du temps calculées par la théorie linéaire d'un palier compliant ( $\tilde{C}_d = 2.$ ) aligné ( $D_m = 0$ ) et d'un palier compliant mésaligné ( $D_m = 0.8, \beta_0 = 0^\circ$ ) et ( $D_m = 0.8, \beta_0 = -90^\circ$ ), soumis à une charge statique et un balourd (rotor déséquilibré). Les orbites linéaires sont obtenues par une intégration analytique du système d'équations différentielles (IV-35) pour une masse sans dimension ( $\tilde{m} = 1.5$ ) et une faible excentricité relative de balourd ( $\varepsilon_b = 0.1$ ) correspondant à 10% du jeu radial du palier, pour rester dans le cadre de la théorie linéaire [44].

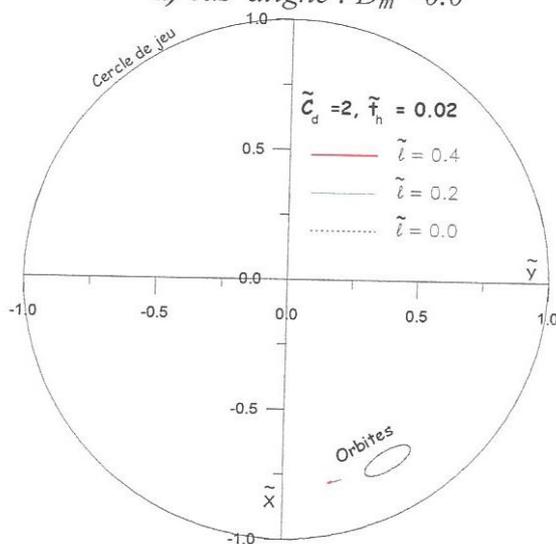
Les résultats montrent que l'existence des additifs (macromolécules) dans le film lubrifiant diminue largement la taille des orbites décrites par le centre de l'arbre dans la section médiane du palier surtout pour les grandes valeurs des chaînes moléculaires ( $\tilde{\ell} = 0.4$ ) et cas le palier mésaligné (IV-17.b et c).

D'autre part, l'existence des additifs dans le fluide lubrifiant entraîne un mouvement vibratoire de faible amplitude (figure IV-18), la diminution des amplitudes de vibrations permet d'éviter le contact destructif métal-métal entre l'arbre et le coussinet. Par comparaison au fluide newtonien, cette diminution atteindra environ de 90 % (figure 18-c).

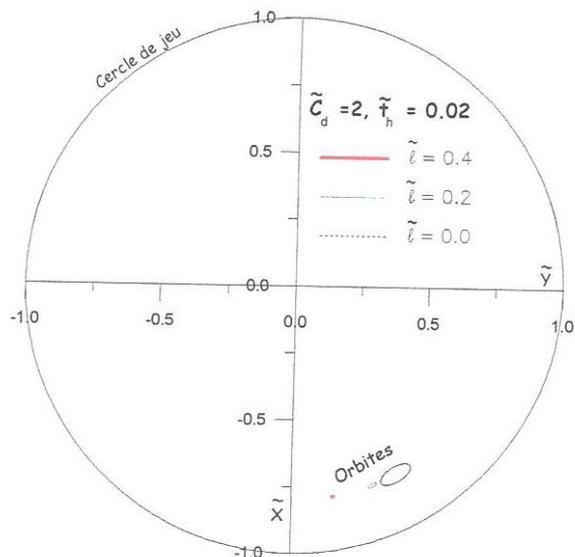
Il est bien connu que l'application de la théorie linéaire est limitée au cas des excitations dynamiques de faibles amplitudes (balourd résiduel) ou petits déplacements du centre de l'arbre dans le palier [44]. Pour étudier l'influence du paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ) sur la réponse du palier soumis à des charges dynamiques importantes l'approche non linéaire doit être appliquée. Dans le chapitre suivant cette approche sera appliquée pour l'étude du comportement dynamique non linéaire du palier.



a) cas aligné :  $D_m = 0.0$

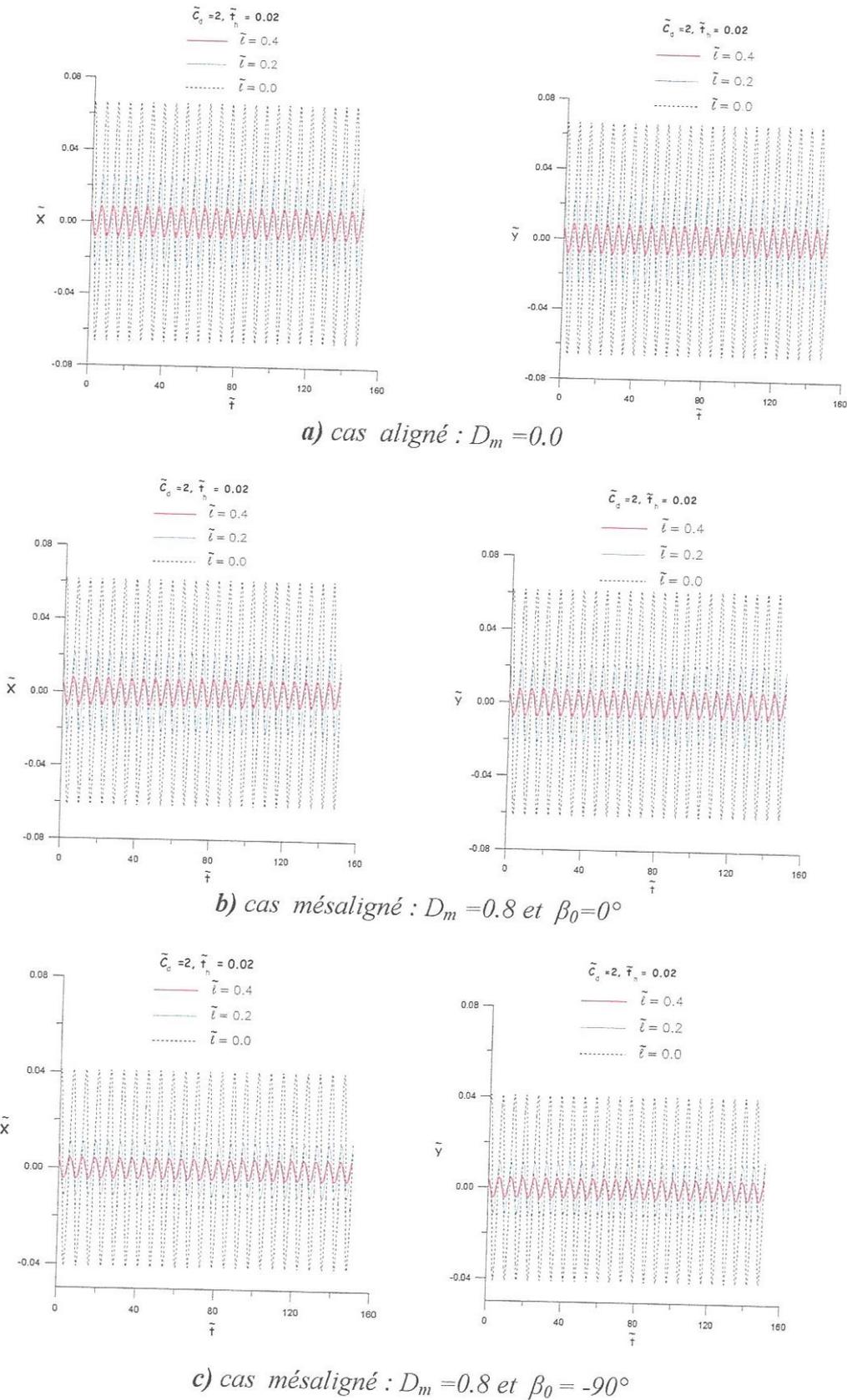


b) cas mésaligné :  $D_m = 0.8$  et  $\beta_0 = 0^\circ$



c) cas mésaligné :  $D_m = 0.8$  et  $\beta_0 = -90^\circ$

**Fig.IV-17:** Comparaison des orbites linéaires du centre de l'arbre pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.



**Fig.IV-18:** Variations des déplacements adimensionnés du centre de l'arbre en fonction du temps sans dimension pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement.

## 7. CONCLUSION

Après présentation des équations du problème dynamique linéaire et validation du programme de calcul développé, on a étudié, les effets de la longueur des chaînes moléculaires des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) sur les performances statiques et dynamiques linéaires d'un palier compliant en tenant compte de l'effet de mésalignement de l'arbre dans le palier. Le problème d'interaction fluide-structure est résolu numériquement par des processus itératifs. Selon les résultats obtenus, des conclusions peuvent être tirées comme suit :

- l'hypothèse d'une couche élastique mince permet d'utiliser le MCEM pour calculer rapidement et avec une précision suffisante le champ de déplacement radial à l'interface fluide-revêtement
- les déformations élastiques du revêtement de surface dues aux pressions hydrodynamiques de film lubrifiant doivent être considérées dans le calcul des performances statiques et dynamiques des paliers fluides
- le pic de pression et la portance hydrodynamique augmentent avec le paramètre des couples de contraintes pour les grandes valeurs de l'excentricité relative statique surtout dans le cas d'un palier mésaligné
- la puissance dissipée dans le film, l'angle de calage et le débit de fuite diminuent avec le paramètre des couples de contraintes pour les grandes valeurs de l'excentricité relative statique
- le paramètre des couples de contraintes et le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier fluide a des effets non négligeables sur la distribution des vitesses moyennes en particulier les lignes de courant de l'écoulement du film lubrifiant
- pour des valeurs de l'excentricité relative statique modérées le moment de mésalignement augmente avec le paramètre des couples de contraintes
- le moment de mésalignement diminue avec les grandes valeurs de l'excentricité relative, à cause des effets des déformations élastiques du revêtement de surface du palier qui deviennent importante
- le paramètre des couples de contraintes et le mésalignement de l'arbre dans le palier permettent d'améliorer les coefficients de raideur et d'amortissement
- la plage de stabilité du palier augmente sensiblement avec le paramètre des couples de contraintes surtout dans le cas d'un palier mésaligné même pour des faibles valeurs de l'excentricité relative. Autrement dit, le palier lubrifié par fluide à couples de contraintes peu chargé est plus stable qu'un même palier lubrifié par un fluide non additivé (newtonien)
- l'existence du mésalignement de l'arbre dans le palier ne peut être négligée pour la prédiction des performances statiques et dynamiques des paliers

- l'existence des additifs (macromolécules) dans le film lubrifiant diminue largement la taille des orbites décrites par le centre de l'arbre dans le palier surtout pour les grandes valeurs des chaînes moléculaires et pour un palier présentant un défaut de mésalignement
- l'existence des additifs dans le fluide lubrifiant permet de réduire les amplitudes de vibration dues à un balourd ce qui évite le contact destructif métal-métal entre l'arbre et le coussinet.

## **CHAPITRE V**

### **ANALYSE DYNAMIQUE NON LINEAIRE D'UN PALIER COMPLIANT LUBRIFIE PAR FLUIDE A COUPLES DE CONTRAINTES**

## 1. INTRODUCTION

Le rôle du palier fluide dans l'analyse dynamique d'une ligne d'arbre de machines tournantes est caractérisé par les forces hydrodynamiques engendrées par le champ de pression dans le film lubrifiant, celles-ci étant obtenues par intégration du champ de pression calculé à partir de l'équation de Reynolds modifiée écrite en régime dynamique. Ces forces sont des fonctions non linéaires de la position et de la vitesse du centre de l'arbre.

L'hypothèse des petits déplacements au voisinage de la position d'équilibre ne permet pas de prévoir le comportement d'une ligne d'arbre au delà du seuil de stabilité ou sous l'effet de fortes charges dynamiques. Dans ces conditions, il est alors nécessaire de résoudre simultanément l'équation de Reynolds modifiée en régime dynamique et les équations du mouvement de l'arbre dans le palier.

Pour cette étude, on a utilisé un modèle d'arbre simplifié de masse  $2M$  en supposant celui-ci indéformable, supporté symétriquement par deux paliers compliants identiques lubrifiés avec un fluide contenant des additifs de viscosité (figure V-1).

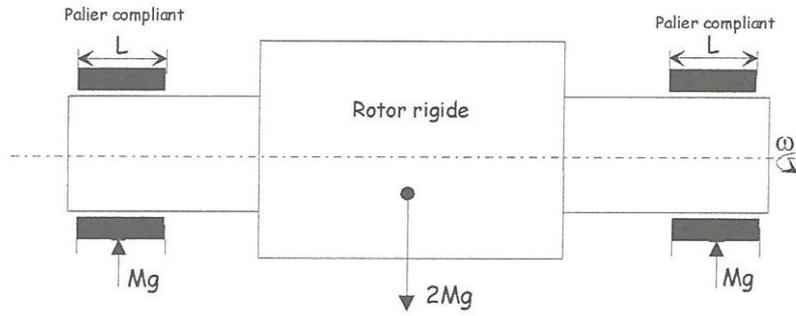
A chaque palier est attribuée une masse  $M$  du rotor, les types de charges agissant sur l'arbre sont :

- charge statique représentée par le poids du rotor affecté au palier ( $W_0 = Mg$ )
- charge dynamique représentée par la force due au balourd (excitation dynamique synchrone) caractérisée par l'excentricité ( $e_b$ ), dont le module est  $\left| \vec{W}_b \right| = Me_b \omega^2$  (figure V-2)
- l'action du fluide lubrifiant sur l'arbre représentée par les composantes  $F_x$  et  $F_y$
- les forces d'inertie  $Mx''$  et  $My''$
- les composants  $W_x$  et  $W_y$  d'une excitation dynamique extérieure ( $\vec{W}(t)$ ).

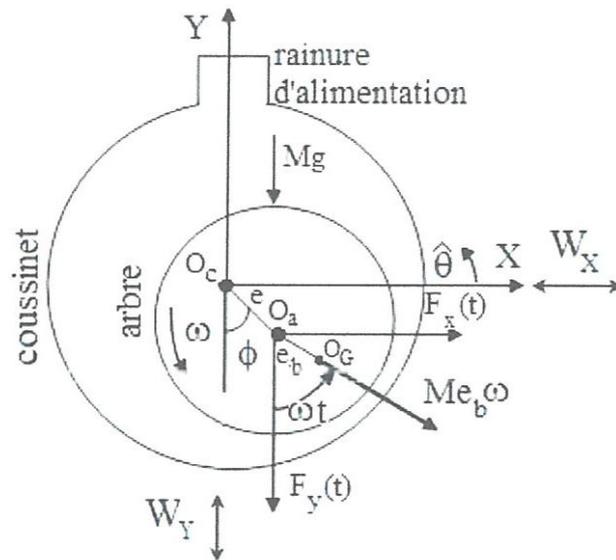
$(O_c, \vec{x}, \vec{y})$  représente le repère fixe lié au coussinet tel que  $\vec{O_c y}$  soit parallèle à la charge statique ( $W_0$ ) (figure V-2).

$O_a$  est le centre géométrique de l'arbre repéré soit par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  soit par ses coordonnées polaires  $(\varepsilon, \phi)$ .

Dans cette étude, il est plus commode d'utiliser les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  que les coordonnées polaires  $(\varepsilon, \phi)$  car les équations du mouvement sont plus simples à écrire.



**Fig.V-1:** Schéma du système rotor – palier pour l'analyse dynamique non linéaire



**Fig.V-2:** Section droite du palier et bilan des forces statique et dynamique agissant sur l'arbre.

## 2. EQUATIONS DU PROBLEME DYNAMIQUE NON LINEAIRE

### 2.1. Equation de Reynolds modifiée en variables sans dimension

En régime hydrodynamique l'équation de Reynolds modifiée pour un palier lubrifié par fluide à couples de contraintes en variables réduites s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left[ \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \hat{\theta}} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[ \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right] = 6 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \hat{\theta}} + 12 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} \quad (\text{V-1})$$

$$\text{Avec : } \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) = \tilde{h}^3 - 12\tilde{\ell}^2\tilde{h} + 24\tilde{\ell}^3 \tanh\left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{\ell}}\right)$$

$$\text{Où, } \hat{\theta} = \frac{x}{R}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{R}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{C}, \quad \tilde{t} = \omega t, \quad \tilde{\ell} = \frac{\ell}{C} \quad \text{et} \quad \tilde{p} = \frac{p}{\mu\omega \left(\frac{R}{C}\right)^2}$$

$\hat{\theta}$  est la coordonnée angulaire dont l'origine est située sur l'axe horizontal  $O_c x$ .

$\tilde{h}$  est l'épaisseur du film adimensionnée. Pour un palier mésaligné l'expression du film d'huile adimensionnée en coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  est donnée par [44] (figure V-3) :

$$\tilde{h} = \left[ 1 - \tilde{x} \cos \hat{\theta} - \tilde{y} \sin \hat{\theta} + \tilde{z} \left( \frac{R}{C} \right) (\delta_h \cos \hat{\theta} - \delta_v \sin \hat{\theta}) \right] \quad (V-2)$$

Avec :

$\delta_v$  et  $\delta_h$  : paramètres de mésalignement adimensionnés.

Si,  $\delta_v = 0$  et  $\delta_h \neq 0$  : il s'agit d'un mésalignement horizontal de l'arbre dans le plan perpendiculaire au plan contenant le vecteur charge (figure V-3.a).

Si,  $\delta_v \neq 0$  et  $\delta_h = 0$  : il s'agit d'un mésalignement vertical de l'arbre dans le plan axial contenant le vecteur charge (figure V-3.b)

Dans la présente étude, les deux paramètres du mésalignement  $\delta_v$  et  $\delta_h$  sont supposés constants. Par conséquent, les vitesses de mésalignement  $\dot{\delta}_v$  et  $\dot{\delta}_h$  sont nulles.

Si on connaît les composantes du déplacement du centre de l'arbre  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  dans la section médiane du palier, on peut calculer les déplacements aux deux extrémités du palier par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_g = \tilde{y} - \frac{L \times \text{tg}(\delta_v)}{2C} \\ \tilde{y}_d = \tilde{y} + \frac{L \times \text{tg}(\delta_v)}{2C} \\ \tilde{x}_g = \tilde{x} - \frac{L \times \text{tg}(\delta_h)}{2C} \\ \tilde{x}_d = \tilde{x} + \frac{L \times \text{tg}(\delta_h)}{2C} \end{array} \right. \quad (V-3)$$

Avec :

$(\tilde{x}_d, \tilde{y}_d)$  : déplacement du centre de l'arbre dans la section droite du palier

$(\tilde{x}_g, \tilde{y}_g)$  : déplacement du centre de l'arbre dans la section gauche du palier

Pour un palier compliant mésaligné et dans le cas où le Modèle Couche Elastique Mince (MCEM), l'expression de l'épaisseur du film d'huile adimensionnée (V-2) devient :

$$\tilde{h} = \left[ 1 - \tilde{x} \cos \hat{\theta} - \tilde{y} \sin \hat{\theta} + \tilde{z} \left( \frac{R}{C} \right) (\delta_h \cos \hat{\theta} - \delta_v \sin \hat{\theta}) \right] + \tilde{U}_r \quad (V-4)$$

Avec :

$\tilde{U}_r = U_r / C$  : déplacement radial adimensionné

La connaissance à un instant donné de  $\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{x}}{dt}, \frac{d\tilde{y}}{dt}$  permet de calculer  $\tilde{h}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}$  et de rechercher le champ de pression qui, une fois intégré, donne les valeurs des composantes de la portance hydrodynamique adimensionnées ( $\tilde{F}_x, \tilde{F}_y$ ) dans le repère fixe lié au coussinet :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_x(\tilde{t}) \\ \tilde{F}_y(\tilde{t}) \end{Bmatrix} = \int_{-L/D}^{L/D} \int_0^{2\pi} \tilde{p}(\hat{\theta}, \tilde{z}, \tilde{t}) \begin{Bmatrix} \cos \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} \end{Bmatrix} d\hat{\theta} d\tilde{z} \quad (V-5)$$

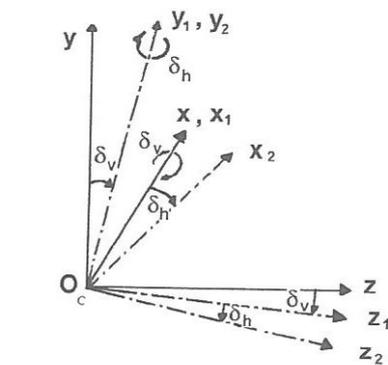
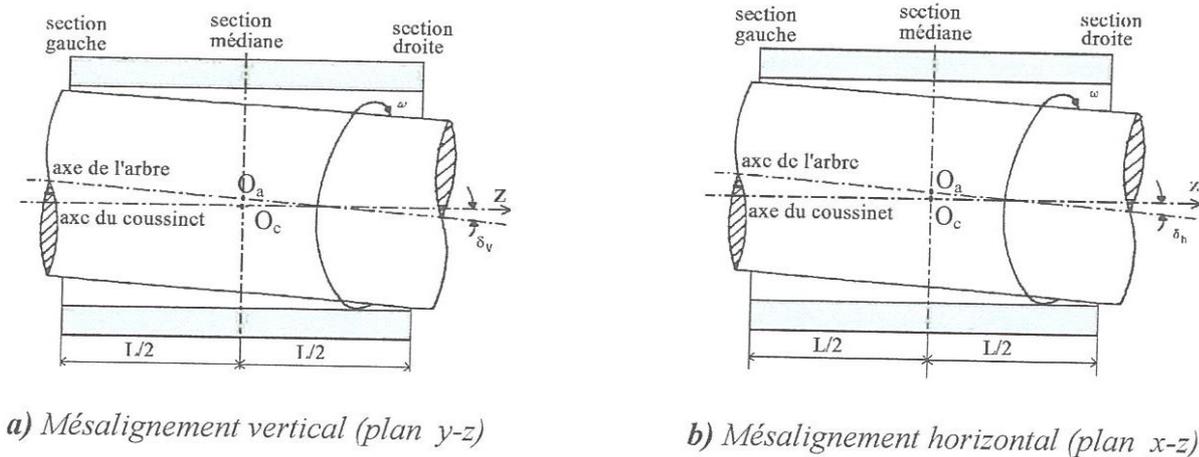


Fig.V-4: Configuration géométrique d'un palier mésaligné

## 2.2. Equations du mouvement de l'arbre

L'application du principe fondamental de la dynamique au mouvement de l'arbre permet d'écrire :

$$\overline{Mg} + \overline{F}(t) + \overline{W}_b(t) + \overline{W}(t) = M\overline{\ddot{y}} \quad (V-6)$$

Dans le cas d'absence d'une excitation dynamique extérieure ( $\overline{W}(t)=0$ ), la projection de l'équation (V-6) sur les axes  $\overline{O_c x}$  et  $\overline{O_c y}$  donne :

$$\begin{cases} M\ddot{x} = F_x(x, y, x', y') + Me_b\omega^2 \sin(\omega t) \\ M\ddot{y} = F_y(x, y, x', y') - Mg - Me_b\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases} \quad (V-7)$$

- *Equations de mouvement en variables sans dimension :*

En divisant les équations (V-7) par  $(Mc\nu^{*2})$  les équations de mouvement deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{x}'' = \alpha_2 \tilde{F}_x + \frac{\varepsilon_b}{\gamma^2} \sin(\tilde{t}) \\ \tilde{y}'' = -\alpha_1 + \alpha_2 \tilde{F}_y - \frac{\varepsilon_b}{\gamma^2} \cos(\tilde{t}) \end{cases} \quad (V-8)$$

avec:  $\gamma = \frac{\nu^*}{\omega}$ ,  $\varepsilon_b = \frac{e_b}{C}$ ,  $\alpha_1 = \frac{g}{C\nu^{*2}}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\mu\omega L}{M\nu^{*2}} \left(\frac{R}{C}\right)^3$  et  $(\tilde{F}_x, \tilde{F}_y) = \frac{(F_x, F_y)}{\mu\omega RL \left(\frac{R}{C}\right)^2}$

Comme le balourd est une excitation dynamique synchrone, on a,  $\gamma = 1$  ( $\gamma$  étant la fréquence la fréquence d'excitation relative).

Les équations (V-8) constituent un système de deux équations différentielles du second ordre.

### 3. RESOLUTION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT : Détermination de la réponse du palier

Le système différentiel (V-8) peut être résolu par une méthode d'intégration explicite d'Euler qui peut se présenter de la façon suivante:

$$\begin{cases} \tilde{x}'(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \tilde{x}'(\tilde{t}) + \tilde{x}''(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{x}'(\tilde{t} + \Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} \end{cases} \quad (V-9)$$

Et des équations similaires pour la vitesse et le déplacement suivant Y.

Le processus de calcul est le suivant :

- A l'instant  $\tilde{t}$ , pour une position  $\tilde{x}(\tilde{t})$  et  $\tilde{y}(\tilde{t})$  et des vitesses  $\tilde{x}'(\tilde{t})$  et  $\tilde{y}'(\tilde{t})$  données, on résout l'équation de Reynolds modifiée (V-1), et l'on en déduit les forces  $\tilde{F}_x(\tilde{t})$  et  $\tilde{F}_y(\tilde{t})$  (V-5).
- Le système différentiel (V-8) permet alors de calculer les composantes de l'accélération  $\tilde{x}''(\tilde{t})$  et  $\tilde{y}''(\tilde{t})$ .

c) La vitesse et la position à l'instant  $(\tilde{t} + \Delta \tilde{t})$  sont déterminées à partir du système d'équations (V-9), le processus de calcul est alors repris en (a).

Il faut souligner que le problème de l'intégration numérique est assez délicat, le choix du pas de temps est important. En effet, des pas trop petits entraînent un temps de calcul important alors que des pas plus grands rendent le processus divergent.

La valeur  $\Delta \tilde{t}$  est fonction de la nature du problème étudié, en général comprise entre  $\left(\frac{2\pi}{200}\right)$

et  $\left(\frac{2\pi}{50}\right)$ , pour la réponse à un balourd par exemple, il est difficile de le prévoir a priori.

Pour valider le choix du pas de temps, il faut vérifier à ce que l'excentricité instantanée  $\left(\varepsilon = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}\right)$  soit inférieur à l'unité.

Pour tous les calculs, on supposera que l'effet de la dissipation dynamique due au mouvement orbital de l'arbre sur la viscosité du lubrifiant est négligeable.

#### 4. ETUDE PARAMETRIQUE

L'étude paramétrique menée dans ce chapitre permet de mettre en évidence l'influence de la longueur relative de la chaîne moléculaire des additifs améliorant l'indice de viscosité ( $\tilde{\ell}$ ) sur les performances hydrodynamiques, telles que les variations de l'épaisseur minimale du film en fonction du temps afin d'éviter le contact métal-métal, ainsi que les trajectoires décrites par le centre de l'arbre d'un palier compliant de longueur finie lubrifié avec un fluide à couples de contraintes en tenant compte de l'effet de mésalignement de l'arbre dans le palier ; pour cela deux types de mésalignement sont considérés : un mésalignement horizontal ( $\delta_h = 8 \times 10^{-4}$  rad et  $\delta_v = 0$ ) et un mésalignement vertical ( $\delta_h = 0$  et  $\delta_v = 8 \times 10^{-4}$  rad).

Le calcul des trajectoires a été effectué pour deux vitesses de rotation de l'arbre, 3000 et 6000 rpm qui correspondent respectivement à des nombres de Reynolds moyens,  $R_m \approx 9$  et  $R_m \approx 18$  pour une excentricité relative du balourd  $\varepsilon_b = 0.0$  et  $0.2$ .

Dans tous les calculs, le pas de temps sans dimension choisi dans le schéma d'Euler est  $\Delta \tilde{t} = 2\pi/75$ .

Le temps adimensionné qui a été fixé pour l'arrêt des calculs est  $\tilde{t}_{\text{limite}} = 200$  correspondant à:

- $t_{\text{limite}} = 2/\pi$  secondes pour,  $N = 3000$  rpm
- $t_{\text{limite}} = 1/\pi$  secondes pour,  $N = 6000$  rpm.

Correspondant chacun à 32 révolutions de l'arbre.

Pour tenir compte des effets de déformations élastiques du revêtement de surface du palier, les calculs s'effectuent pour un coefficient de déformation adimensionné ( $\tilde{C}_d = 2.0$ ) correspondant à un matériau compressible (polyamide) et une épaisseur relative du revêtement mince élastique de surface du palier ( $\tilde{t}_h = 0.02$ ). Les caractéristiques géométriques, les conditions de fonctionnement, les propriétés physiques du lubrifiant et les caractéristiques élastiques et géométriques du revêtement de surface du palier sont données dans le tableau IV-2.

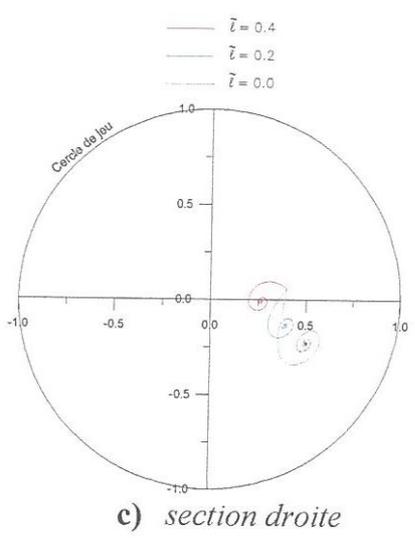
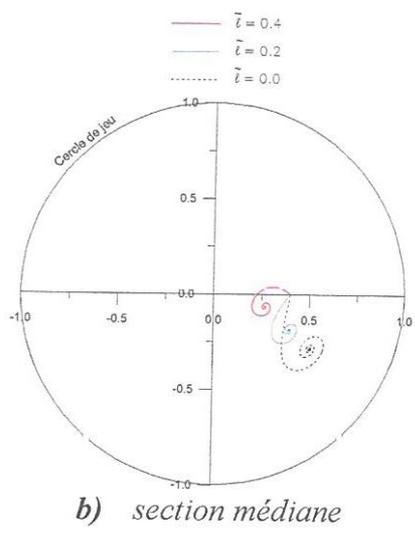
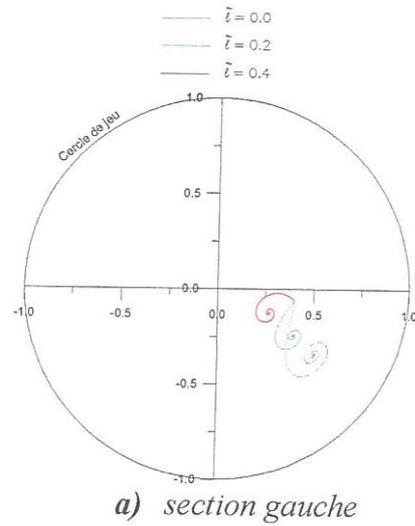
#### 4.1. Résultats et discussion

##### a) Trajectoires du centre de l'arbre dans le palier

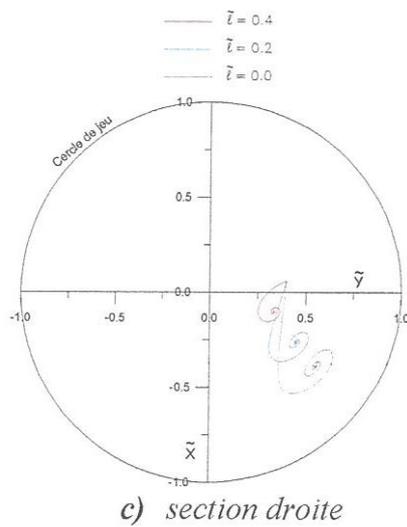
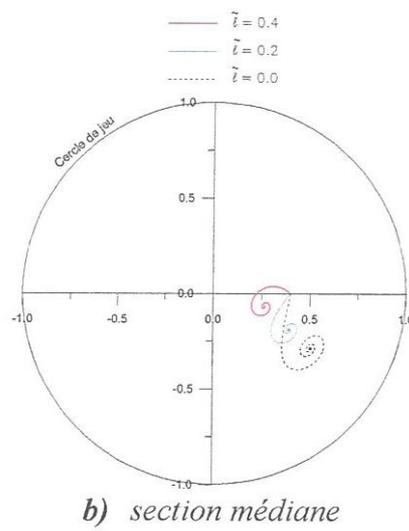
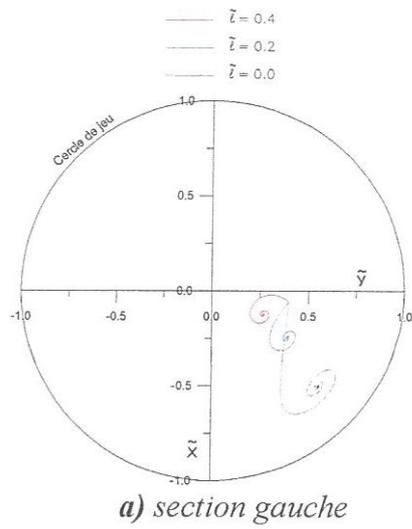
Les Figures V-5 à V-8 montrent les trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier (droite, médiane et gauche) dans le cas d'un mésalignement horizontal (figures V-6 et V-8) et d'un mésalignement vertical (figures V-5 et V-7) pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell} = 0.4, 0.2$  et  $0.0$  (newtonien)) et deux vitesses de rotation de l'arbre ( $N = 6000$  rpm et  $3000$  rpm) correspondant à 32 révolutions de l'arbre.

Les résultats montrent clairement que l'existence des additifs de viscosité (macromolécules) diminue la taille des orbites décrites par le centre de l'arbre dans le palier surtout pour les grandes valeurs du paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell} = 0.4$ ) et cela pour une vitesse de fonctionnement  $N = 6000$  rpm.

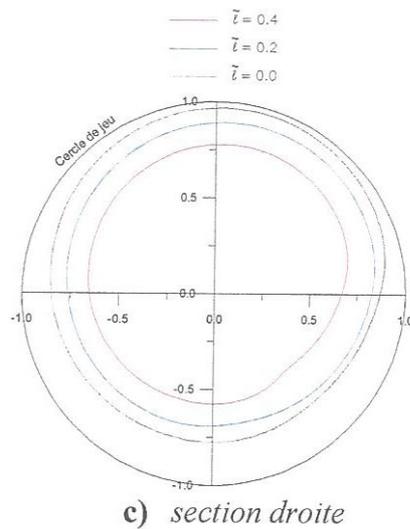
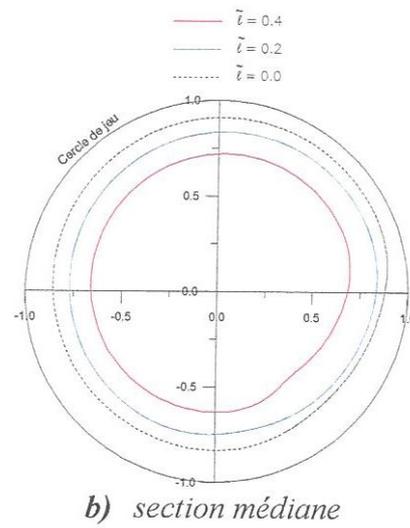
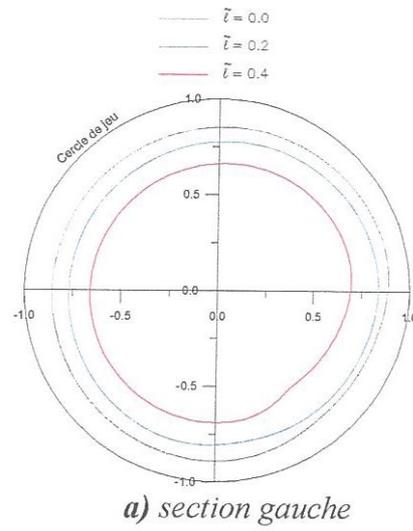
Dans les deux cas de mésalignement, les trajectoires calculées pour une vitesse de rotation  $N = 3000$  rpm montrent que le centre de l'arbre s'approche graduellement de la position d'équilibre statique ( $O_{a0}$ ) dans les trois sections du palier, alors que celles calculées pour une vitesse de rotation  $N = 6000$  rpm montrent que le centre de l'arbre décrit, en régime établi, une orbite circulaire proche du cercle de jeu dans l'une des extrémités du palier (figures V-7.c et V-8.c) dues aux effets de pression générée dans le film lubrifiant qui est plus importante, ce comportement traduit une position orbitalement stable au sens de la dynamique non linéaire. Le rapprochement du centre de l'arbre du cercle de jeu constitue un danger car il pourrait provoquer un contact métal-métal entre les surfaces de l'arbre et du coussinet.



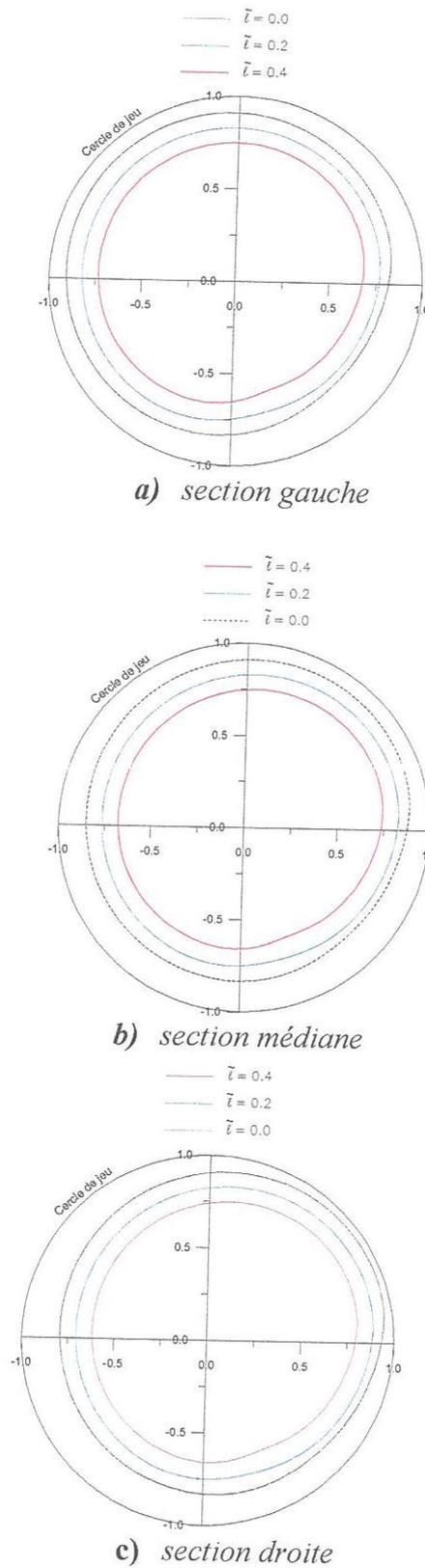
**Fig.V.5:** Trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier  
 ( $\delta_h = 0, \delta_v = 8 \times 10^{-4} \text{ rad}$ ) ( $N=3000 \text{ rpm}, \varepsilon_b = 0.0$ )



**Fig.V.6:** Trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier  
 ( $\delta_h = 8 \times 10^{-4}$  rad,  $\delta_v = 0$ ) ( $N = 3000$  rpm,  $\varepsilon_b = 0.0$ ).



**Fig.V.7:** Trajectoires du centre de l'arbre en régime établi calculées dans les trois sections du palier ( $\delta_h = 0$ ,  $\delta_v = 8 \times 10^{-4}$  rad) ( $N=6000$  rpm,  $\varepsilon_b = 0.2$ ).

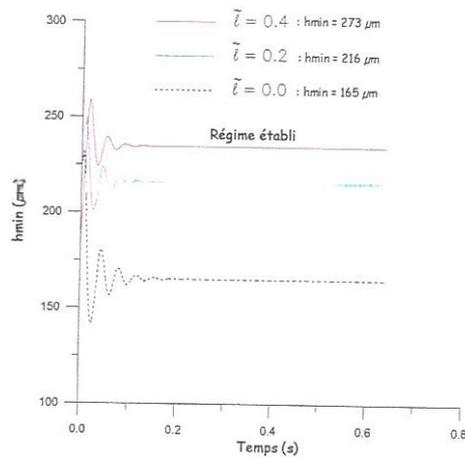


**Fig.V.8:** Trajectoires du centre de l'arbre en régime établi calculées dans les trois sections du palier ( $\delta_h = 8 \times 10^{-4}$  rad,  $\delta_v = 0$ ) ( $N = 6000$  rpm,  $\epsilon_b = 0.2$ ).

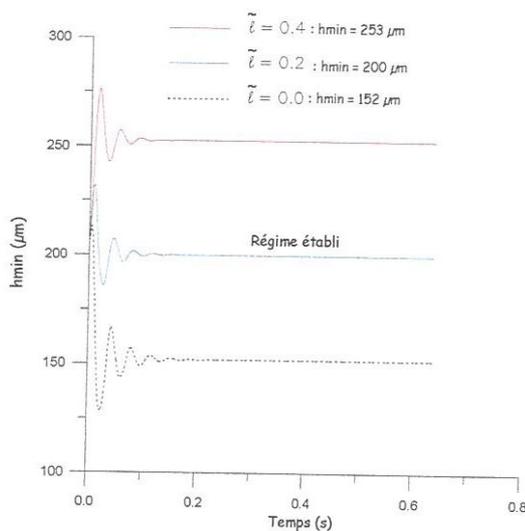
### b) Hauteurs minimales du film

Les variations de la hauteur minimale du film en fonction du temps dans les trois sections du palier pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes sont représentées sur les figures V-9 à V-12. Les figures montrent une augmentation importante de l'épaisseur du film avec le paramètre des couples de contraintes. Il convient de noter que l'augmentation de l'épaisseur minimale du film au cours du fonctionnement diminue considérablement les risques de grippage et d'avaries par rupture du film d'huile. Il faut noter aussi que l'épaisseur minimale du film est un paramètre important dans la conception d'un palier hydrodynamique.

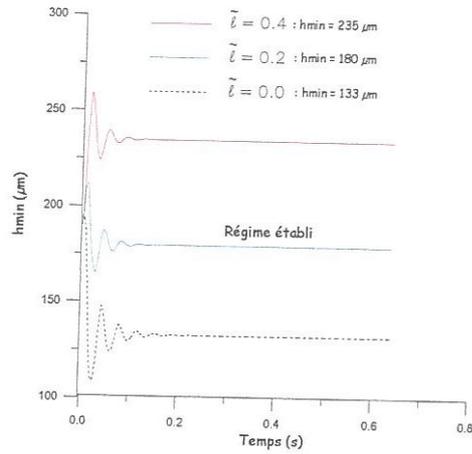
Le mésalignement conduit à une valeur minimale de l'épaisseur du film dans l'une des extrémités du palier (figure V-11.c et V-12.a).



a) section gauche

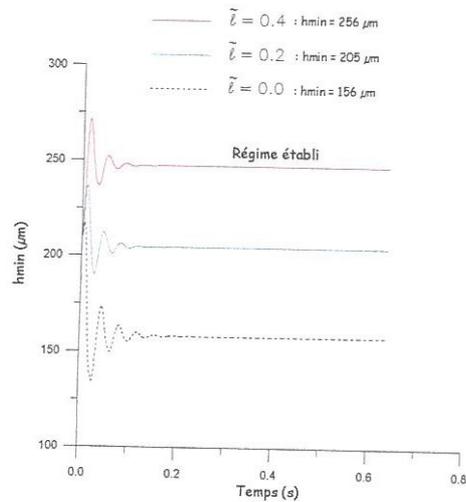


b) section médiane

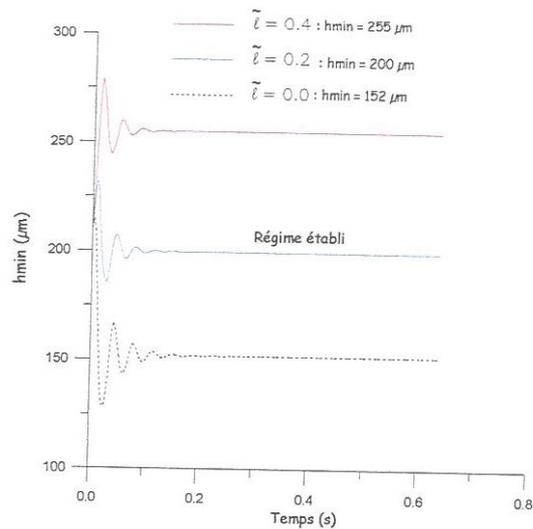


c) section droite

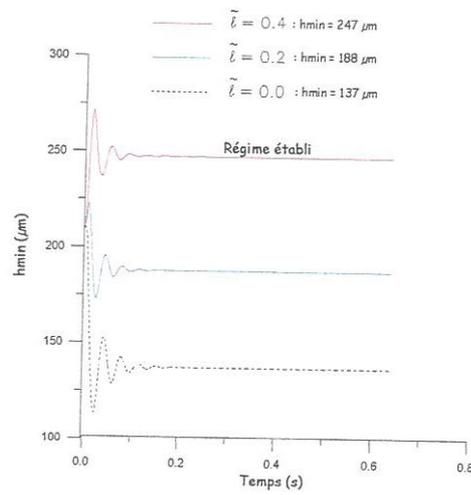
**Fig.V.9:** Variations de la hauteur minimale du film dans les trois sections du palier en fonction du temps ( $\delta_h = 8 \times 10^{-4}$  rad,  $\delta_v = 0$ ) ( $N = 3000$  rpm,  $\varepsilon_b = 0.0$ ).



a) section gauche

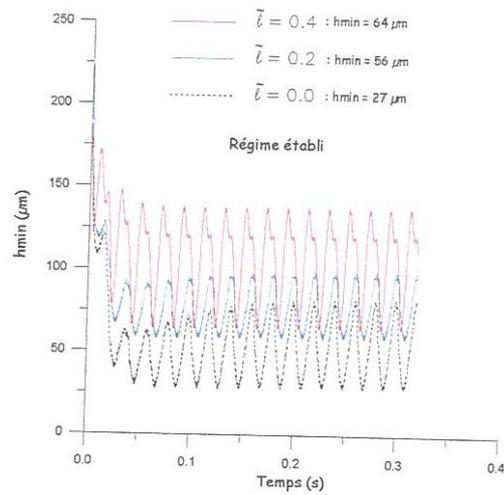


*b) section médiane*

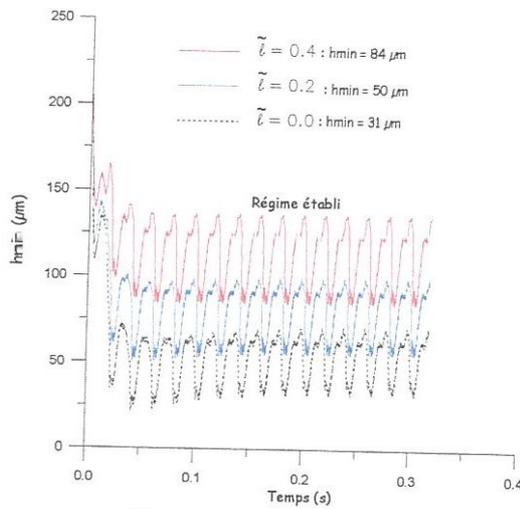


*c) section droite*

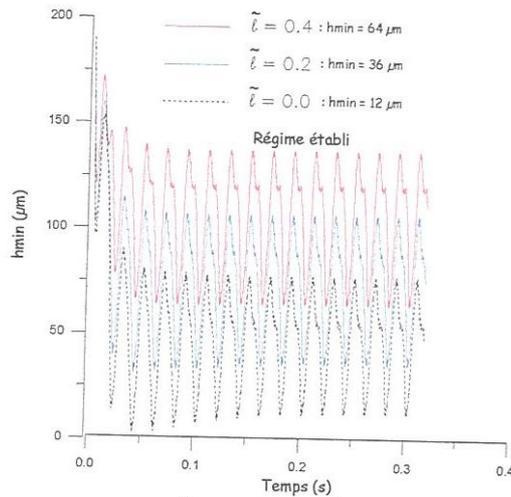
**Fig.V.10:** Variations de la hauteur minimale du film dans les trois sections du palier en fonction du temps ( $\delta_h = 0$ ,  $\delta_v = 8 \times 10^{-4}$  rad) ( $N = 3000$  rpm,  $\varepsilon_b = 0.0$ ).



a) section gauche

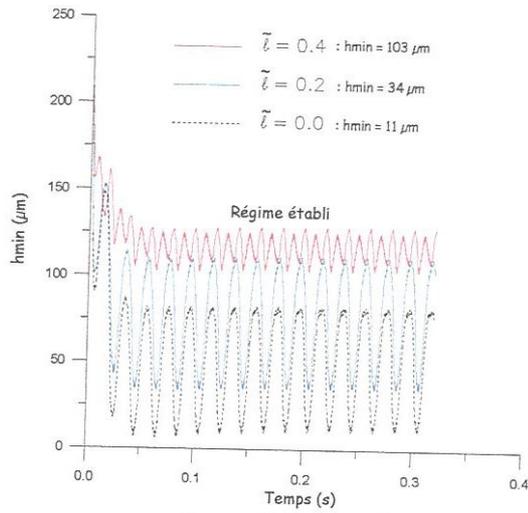


b) section médiane

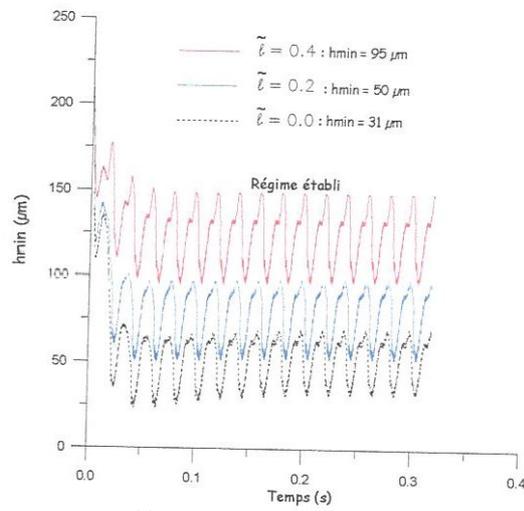


c) section droite

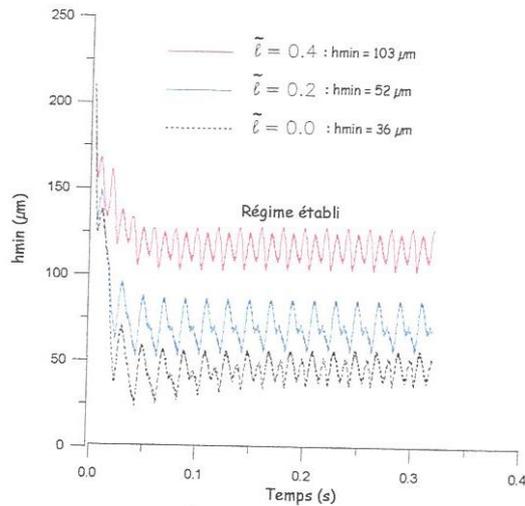
**Fig.V.11:** Variations de la hauteur minimale du film dans les trois sections du palier en fonction du temps ( $\delta_h = 8 \times 10^{-4}$  rad,  $\delta_v = 0$ ) ( $N = 6000$  rpm,  $\epsilon_b = 0.2$ ).



a) section gauche



b) section médiane



c) section droite

**Fig.V.12:** Variations de la hauteur minimale du film dans les trois sections du palier en fonction du temps ( $\delta_h=0$ ,  $\delta_v=8 \times 10^{-4}$  rad) ( $N=6000, \epsilon_b=0.2$ ).

## 5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a présenté dans un premier temps les équations du problème dynamique non linéaire d'un palier compliant lubrifié avec un fluide à couples de contraintes dont le comportement est non newtonien.

Dans un deuxième temps, on a étudié l'influence de la présence des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) dans le lubrifiant sur les performances hydrodynamiques, telles que les variations de l'épaisseur minimale du film en fonction du temps afin d'éviter le contact métal-métal, ainsi que les trajectoires décrites par le centre de l'arbre d'un palier compliant de longueur finie lubrifié avec un fluide à couples de contraintes en tenant compte de l'effet de mésalignement de l'arbre dans le palier.

L'étude paramétrique effectuée a montré que la présence des additifs de viscosité a des effets non négligeables sur le comportement dynamique non linéaire du palier, surtout pour les grandes valeurs du paramètre des couples de contraintes ; c'est-à-dire dans le cas d'une présence importante de polymères caractérisés par de longues chaînes moléculaires. Par comparaison aux huiles non additivées (newtoniennes), les huiles contenant des additifs de viscosité entraînent une diminution considérable du déplacement du centre de l'arbre dans le palier et une augmentation importante de l'épaisseur minimale du film. Il convient de souligner que ce résultat est d'un intérêt technologique certain. En effet, l'augmentation de l'épaisseur minimale du film au cours du fonctionnement diminue les risques de grippage et d'avaries par rupture du film d'huile. Le mésalignement a des effets non négligeables sur le comportement dynamique non linéaire des palier fluides. Il faut noter également que la prédiction de l'épaisseur du film lubrifiant est indispensable dans la conception d'un palier hydrodynamique.

## **CONCLUSION GENERALE**

## CONCLUSION GENERALE

Les paliers hydrodynamiques tels que les paliers lisses sont largement utilisés pour le guidage en rotation des lignes d'arbre de machines tournantes et alternatives modernes (groupes turboalternateur, compresseur, moteur à combustion interne, etc.). Ainsi, la connaissance des caractéristiques de ces paliers est indispensable pour la conception des machines tournantes. Malgré la simplicité de leur conception, les paliers fluides soumis à des charges importantes ne sont pas faciles à modéliser, leur comportement étant fonction de nombreux paramètres, en particulier la rhéologie des huiles lubrifiantes, l'élasticité des revêtements de surface de solides et les défauts de fonctionnement comme le mésalignement.

L'évolution technologique traduite par l'amélioration et la recherche continue des performances optimales de systèmes mécaniques, impose un fonctionnement dans des conditions de plus en plus sévères dues à l'augmentation des charges et des vitesses de rotation. Ceci a conduit les motoristes et les pétroliers à ajouter de nombreux additifs (polymères solubles, etc.) ou dopes tels que les additifs améliorants l'indice de viscosité (VI) au lubrifiant de base afin d'améliorer les performances de ce dernier. Ces additifs sont des polymères (macromolécules) incorporés aux huiles de base afin de modifier leurs propriétés, par exemple procurer une certaine élasticité au lubrifiant. Ils sont caractérisés par de longues chaînes moléculaires pouvant être un million de fois le diamètre d'une molécule d'eau et ont un comportement rhéologique complexe. Ainsi, l'écoulement ne peut être décrit par la théorie des milieux continus qui néglige la taille des particules fluides en mouvement. Un certain nombre de théories ont été développées pour expliquer le comportement particulier des huiles contenant des additifs (polymères) ; parmi ces théories, la théorie de Vijay Kumar Stokes est la plus simple et la plus utilisée car elle permet de tenir compte de la taille des particules fluides en mouvement, des couples de contraintes et de volume dus à la présence des additifs.

Notre travail a pour but essentiel la mise en évidence de l'influence de la longueur des chaînes moléculaires des additifs améliorant l'indice de viscosité sur les performances statiques, dynamiques linéaires et non linéaires des paliers compliants (déformables) lubrifiés par des fluides à couples de contraintes (non newtoniens) en tenant compte des défauts de mésalignement de l'arbre dans le palier fonctionnant en régime hydrodynamique et isotherme.

Ce travail représente une étape vers une meilleure connaissance théorique et numérique du comportement statique et dynamique des paliers fluides compliants mésalignés. Le travail comporte trois parties.

La première partie concerne une comparaison à l'échelle Macro et Micro des caractéristiques statiques telles que, le champ de pression hydrodynamique dans le film lubrifiant, la portance hydrodynamique et l'angle de calage d'un palier rigide infiniment long lubrifié par fluide à couples de contraintes avec ceux d'un palier lubrifié par un fluide newtonien et des fluides viscoélastiques (additivés) ; modèle Maxwell (linéaire et non linéaire) et Modèle FENE-P. Cette validation soit à l'échelle Macro ou Micro-Macro montre l'importance des huiles lubrifiantes dopées en additifs améliorant l'indice de viscosité (VI) dans la lubrification hydrodynamique des paliers fluides.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'étude du comportement linéaire des paliers compliant lubrifiés par un fluide à couples de contraintes en tenant compte des défauts de mésalignement de l'arbre. La méthode de perturbation est utilisée pour calculer les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement : l'équation des écoulements en film mince ou l'équation de Reynolds modifiée écrite pour un palier hydrodynamique lubrifié par un fluide à couples de contraintes est transformée en un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre. La résolution de ce système permet de déterminer le champ de pression hydrodynamique statique correspondant à la position d'équilibre statique du centre de l'arbre dans le palier et les répartitions de pressions dynamiques complexes dues au mouvement vibratoire de faible amplitude de l'arbre autour de cette position.

La connaissance de la répartition de la pression hydrodynamique statique du film permet de calculer les performances statiques du système (arbre et coussinet) et la connaissance des pressions dynamiques permet de calculer les huit coefficients dynamiques du palier à savoir quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement. La connaissance de ces coefficients dynamiques permet d'analyser la stabilité d'une position d'équilibre, en utilisant le critère de Lund pour définir les cartes de stabilité de ce palier. Selon les résultats obtenus, des conclusions peuvent être tirées comme suit :

- l'hypothèse d'une couche élastique mince permet d'utiliser le MCEM pour calculer rapidement le champ de déplacement radial à l'interface fluide-revêtement. Ce modèle a été adopté pour la prise en considération des effets de déformations élastiques sur les performances statiques et dynamiques des paliers fluides ;
- les déformations élastiques des revêtements de surface dues aux pressions hydrodynamiques engendrées dans le film lubrifiant doivent être considérées dans le calcul des performances statiques et dynamiques des paliers fluides ;
- le pic de pression et la portance hydrodynamique augmentent avec le paramètre des couples de contraintes ; c'est-à-dire pour les polymères caractérisés par de longues

- chaînes moléculaires pour les grandes valeurs de l'excentricité relative statique surtout et le cas de la présence d'un défaut de mésalignement ;
- la puissance dissipée dans le film, l'angle de calage et le débit de fuite diminuent avec le paramètre des couples de contraintes pour les grandes valeurs de l'excentricité relative statique ;
  - le paramètre des couples de contraintes et le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier fluide a des effets non négligeables sur la distribution des vitesses moyennes en particulier les lignes de courant de l'écoulement du lubrifiant ;
  - pour des valeurs de l'excentricité relative statique modérées le moment de mésalignement augmente avec le paramètre des couples de contraintes ;
  - le moment de mésalignement diminue avec les grandes valeurs de l'excentricité relative, ceci est dû à l'effet de déformation élastique du revêtement qui devient importante ;
  - le paramètre des couples de contraintes et le défaut de mésalignement permettent d'améliorer les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement ;
  - la plage de stabilité augmente sensiblement avec le paramètre des couples de contraintes surtout dans le cas d'un palier mésaligné même pour des faibles valeurs de l'excentricité relative. En conséquence, le palier lubrifié par fluide à couples de contraintes peu chargé est plus stable qu'un même palier lubrifié par un fluide non additif (newtonien) ;
  - la présence des additifs dans le film lubrifiant diminue largement la taille des orbites décrites par le centre de l'arbre dans le palier surtout pour les grandes valeurs des chaînes moléculaires et pour un palier mésaligné ;
  - l'existence des additifs dans le fluide lubrifiant entraîne un mouvement vibratoire de faible amplitude, l'atténuation des amplitudes de vibration évite le contact destructif métal-métal entre l'arbre et le coussinet.

La théorie linéaire n'est utilisée que pour des petits déplacements du centre de l'arbre dans le palier. La troisième partie de ce travail est réservée à l'étude dynamique non linéaire du palier permettant de mettre en évidence l'influence du paramètre des couples de contraintes ( $\tilde{\ell}$ ) sur la réponse dynamique du palier. Cette étude permet de modéliser plus finement le comportement dynamique du palier car la théorie linéaire basée sur la modélisation du film par huit coefficients dynamiques se limite seulement aux petits déplacements du centre de l'arbre dans le palier.

L'étude paramétrique effectuée a montré que la présence des additifs de viscosité a des effets non négligeables sur le comportement dynamique non linéaire du palier surtout pour les grandes valeurs du paramètre des couples de contraintes ; c'est-à-dire dans le cas d'une présence importante de polymères caractérisés par de longues chaînes moléculaires. Par

comparaison aux huiles non additivées (newtoniens), les huiles contenant des additifs de viscosité entraînent une diminution considérable du déplacement du centre de l'arbre dans le palier et une augmentation importante de l'épaisseur minimale du film. L'augmentation de l'épaisseur minimale du film au cours du fonctionnement diminue les risques de grippage et d'avaries par rupture du film d'huile. Le mésalignement a des effets non négligeables sur le comportement dynamique non linéaire des paliers fluides. Il faut noter que l'épaisseur du film lubrifiant constitue un paramètre important dans la conception d'un palier hydrodynamique.

Les programmes de calcul développés et les résultats obtenus au cours de cette étude présentent d'un point de vue technologique un intérêt certain, car ils permettent d'apporter aux constructeurs des informations utiles sur l'influence de la rhéologie des huiles lubrifiants, les déformations élastiques du revêtement de surface et le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier. Il nous semble que les objectifs fixés ont été atteints.

Les prolongements possibles de cette étude sont :

- comparaison Macro et Micro-Macro en 2D de fluide à couples de contraintes
- prise en considération des effets thermiques
- résolution du problème d'interaction fluide-solide en régime dynamique : approche linéaire et non linéaire
- modélisation plus rigoureuse des phénomènes de cavitation
- comparaison des modèles rhéologiques et confrontation avec l'expérimentation.

## ANNEXES

## ANNEXE a

### *DIFFERENTES EXPRESSIONS DE LA DERIVEE* $\frac{d\tau_{ij}}{dt}$

Dans le modèle rhéologique viscoélastique de type maxwell, l'expression de la dérivée de la contrainte de cisaillement par rapport au temps peut se mettre sous différentes formes selon que l'on tient compte de la rotation créée par le fluide ou d'une distorsion possible. Les expressions possibles sont les suivantes [38, 39]:

- la dérivée de JAUMAN
- la dérivée d'OLDROYD
- la dérivée intrinsèque.

#### - Dérivée de JAUMAN

L'effet de rotation ( $\omega$ ) est pris en compte dans l'expression de la dérivée de JAUMAN. Elle est utilisée quand les contraintes sont référencées à un repère fixe. Cette dérivée est définie par l'expression générale suivante :

$$\frac{d\tau_{ij}}{dt} = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} + u_m \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_m} + \omega_{im} \tau_{mj} + \omega_{jm} \tau_{im} \quad (\text{a-1})$$

$$\text{Avec : } \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

$u_i$  : composante du vecteur vitesse suivant la direction  $i$ .

En développant cette expression pour la contraintes  $\tau_{xy}$  par exemple, en tenant compte des hypothèses concernant les films minces et en supposant le régime permanent, la dérivée se met sous la forme suivante :

$$\frac{d\tau_{xy}}{dt} = u \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + w \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z} + \omega_{xx} \tau_{xy} + \omega_{xy} \tau_{yy} + \omega_{xz} \tau_{zy} + \omega_{yx} \tau_{xx} + \omega_{yy} \tau_{xy} + \omega_{yz} \tau_{xz} \quad (\text{a-2})$$

$$\text{Avec : } \omega_{ii} = 0, \tau_{ii} \approx 0 \text{ et } \tau_{xz} = 0$$

Donc :

$$\frac{d\tau_{xy}}{dt} = u \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + w \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tau_{zy} \quad (\text{a-3})$$

Pour l'autre contrainte de cisaillement  $\tau_{zy}$ , la dérivée de JAUMAN est obtenue de la même manière :

$$\frac{d\tau_{zy}}{dt} = u \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial x} + v \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + w \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tau_{xy} \quad (\text{a-4})$$

### - Dérivée d' OLDROYD

Si les déformations dans le fluides sont grandes, la dérivée de JAUMAN est insuffisante et doit contenir des termes supplémentaires, la dérivée d'OLDROYD est alors utilisée. Elle a comme expression générale :

$$\frac{d\tau_{ij}}{dt} = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} + u_m \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_m} + \omega_{im} \tau_{mj} + \omega_{jm} \tau_{im} + D_{im} \tau_{mj} + D_{mj} \tau_{im} \quad (\text{a-5})$$

Pour la contrainte  $\tau_{xy}$ , la dérivée d'OLDROYD s'écrit :

$$\frac{d\tau_{xy}}{dt} = u \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + w \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tau_{zy} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tau_{xy} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tau_{zy} \quad (\text{a-6})$$

D'où :

$$\frac{d\tau_{xy}}{dt} = u \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + w \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tau_{xy} + \frac{\partial w}{\partial x} \tau_{zy} \quad (\text{a-7})$$

Il en est de même pour la contrainte  $\tau_{zy}$  :

$$\frac{d\tau_{zy}}{dt} = u \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial x} + v \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + w \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tau_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z} \tau_{xy} \quad (\text{a-8})$$

### - Dérivée intrinsèque

Si les déformations élastiques du lubrifiant sont relativement petites, la dérivée peut être approchée par la dérivée intrinsèque qui se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\tau_{xy}}{dt} = u \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + w \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z} \\ \frac{d\tau_{zy}}{dt} = u \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial x} + v \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + w \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{a-10})$$

## ANNAXE b

### MODELE DE L'HALTERE (approche Micro-Macro)

La modélisation du comportement de la molécule au sein du solvant permet de quantifier l'influence des effets de viscoélasticité du fluide. L'utilisation de modèles rhéologiques basés sur une description détaillée de la macromolécule (Micro-Macro) dans la solution de solvant restreint cependant les développements analytiques lorsque la macromolécule n'est plus à l'équilibre. Le modèle de l'Haltère qui simplifie à l'extrême la macromolécule permet par contre de poursuivre ces développements et d'analyser la cinétique de la macromolécule.

Ce modèle est amplement développé par Bird et al [40, 41, 42]. La théorie de l'haltère consiste à modéliser les molécules de polymères (additifs) par des systèmes billes-ressort appelés haltères (figure b-1). Le comportement visqueux est modélisé par l'action du frottement sur les billes, tandis que le ressort permet d'introduire l'élasticité du fluide en représentant les interactions entre molécules et les enchevêtrements des polymères.

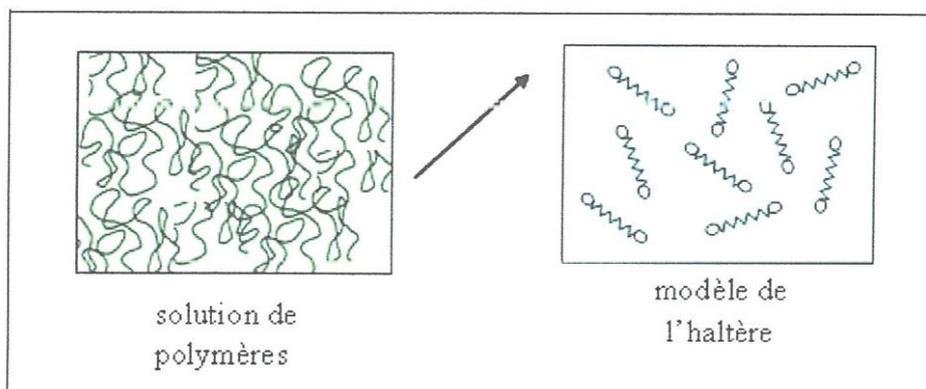


Fig.b-1: Modèle de l'Haltère

Afin de diminuer la complexité des calculs, la théorie des haltères s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- l'écoulement du solvant est considéré homogène
- la concentration en macromolécule est uniforme au sein du mélange
- la distribution des vitesses de billes suit une distribution Maxwellienne. Cette distribution a été développée à l'origine pour définir la distribution des vitesses de molécules dans un gaz parfait
- L'inertie des billes est négligée.

#### -Modèle de FENE dumbbell (Finitely Extensible Nonlinear Elastic dumbbell)

Bird et al, décrivent le modèle de FENE dumbbell (figure b-2) ; l'haltère consiste en deux billes de rayon  $r_0$ , et de coefficient de frottement solvant-billes, ( $\zeta = 6\pi\mu_s r_0$ ), connectées par un ressort, dont la force de raideur est donnée par la formule suivante :

$$\vec{F}^c = \frac{H\vec{R}}{1 - R^2/R_0^2} \quad (b-1)$$

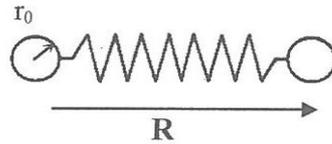
Où :

$\mu_s$  : viscosité du solvant

$\vec{R}$  : vecteur extrémité de la macromolécule

H : constante de raideur Hookéenne

$R_0$  : constante désigne l'extension limite acceptable de l'altère.



**Fig.b-2:** Modèle de l'altère FENE dumbbell

Le modèle fait intervenir une analyse probabiliste de la répartition des haltères dans le solvant. Il faut en effet résoudre l'équation de diffusion pour la fonction de distribution  $\psi(\vec{R}, t)$  [41] :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \left( \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \cdot \left\{ [\bar{k} \cdot \vec{R}] \psi - \frac{2kT}{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{R}} - \frac{2}{\zeta} \vec{F}^c \psi \right\} \right) \quad (b-2)$$

Où :

k : constante de Boltzman

T : température du fluide

$\bar{k}$  : tenseur de trace nulle qui décrit le champ de vitesse du solvant :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\bar{k} \cdot \vec{r}]$

avec :  $\vec{r}$  est le vecteur position et  $\vec{v}_0$  est une constante.

Une fois la fonction de distribution ( $\psi(\vec{R}, t)$ ) trouvée pour un champ de vitesse donné, le

tenseur de contraintes peut être calculé en sommant les contributions respectives du solvant ( $\bar{\sigma}_s$ ) et des polymères ( $\bar{\sigma}_p$ ) :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{(s)ij} + \sigma_{(p)ij} = -\mu_s \dot{\gamma}_{ij} + \sigma_{(p)ij} \quad (b-3)$$

Où :

$\dot{\gamma}_{ij}$  : tenseur des taux de cisaillement.

La contrainte générée par les polymères est donnée par l'une de ces deux expressions suivantes :

- Forme de Kramer :

$$\sigma_{(p)ij} = -n \langle \vec{R} \vec{F}^c \rangle + nkT \delta_{ij} \quad (b-4)$$

- Forme de Giesekus :

$$\sigma_{(p)ij} = (n\zeta/4) \langle \vec{R} \vec{R} \rangle_{(*)} \quad (b-5)$$

Avec : n est le nombre volumique des haltères dans le solvant,  $\delta_{ij}$  est la matrice unité, l'indice (\*) indique une dérivée codeformationnelle contravariante, et  $\langle \rangle$  est la valeur moyenne formée à partir de la fonction de distribution  $\psi$ .

Bird et al indiquent que la résolution de l'équation (b-2) est pratiquement impossible, même pour des écoulements simples, et que par conséquent, on ne peut pas obtenir une équation d'état complète (loi rhéologique) avec ce modèle. Ils proposent alors une modification du modèle de FENE dumbbell [43].

#### - *Modèle de FENE dumbbell modifié (FENE-P)*

Le modèle de FENE dumbbell modifié [43] présente l'avantage de permettre une mise en équation complète de la loi rhéologique sans le calcul nécessaire de la fonction de distribution des haltères. La force de raideur du ressort s'exprime par :

$$\vec{F}^c = \frac{H \vec{R}}{1 - \langle R^2 / R_0^2 \rangle} \quad (b-6)$$

On remplace le rapport  $R^2 / R_0^2$  par  $\langle R^2 / R_0^2 \rangle$ , sa valeur moyennée par rapport à la fonction de distribution ( $\psi$ ) appropriée au champ de vitesse locale instantané.

La configuration définie par  $R_0$  désigne l'extension limite acceptable de l'hatère. Le quotient  $\langle R^2 / R_0^2 \rangle$  est relié à une fonction tensorielle. On a donc :

$$\langle R^2 / R_0^2 \rangle = 1 - \frac{1}{Z(\text{tr}(\overline{\sigma}_p))} \quad (b-7)$$

Avec, l'opérateur Z défini par la formule suivante :

$$Z(\text{tr}(\overline{\sigma}_p)) = 1 + \frac{3}{b} \left[ 1 - \frac{\text{tr}(\overline{\sigma}_p)}{3nkT} \right] \quad (b-8)$$

Et,  $b = HR_0^2 / kT$

Alors,  $\vec{F}^c = HZ \vec{R}$

L'équation (b-4) de Kramer devient :

$$\sigma_{(p)ij} = -nHZ \langle \vec{R} \vec{R} \rangle + nkTI \quad (b-9)$$

On élimine  $\langle \vec{R} \vec{R} \rangle$  en combinant les équations (b-5) et (b-9), et on obtient l'équation constitutive ou l'équation de comportement rhéologique du fluide polymérique [40] :

$$Z(\text{tr}(\overline{\sigma}_p))\sigma_{(p)ij} + \lambda_H \frac{\delta \sigma_{(p)ij}}{\delta t} - \lambda_H (\sigma_{(p)ij} - nkT\delta_{ij}) \frac{D \ln Z}{Dt} = -nkT\lambda_H \dot{\gamma}_{ij} \quad (\text{b-10})$$

Avec :

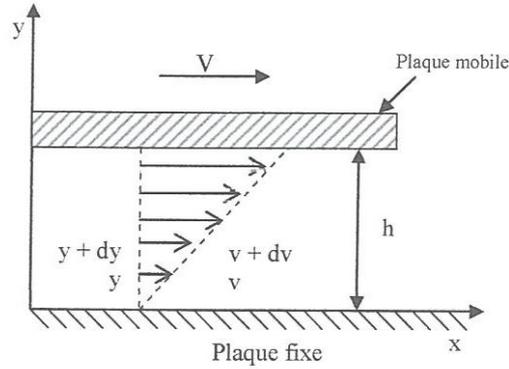
$\lambda_H$  : constante de temps ( $\lambda_H = \zeta/4H$ )

$\frac{\delta()}{\delta}$  : opérateur spécifiant la dérivée codeformationnelle contravariante [40].

La solution du système des équations (b-10) permet d'obtenir le tenseur des contraintes de cisaillement des polymères ( $\tau_p$ ) solubles dans le fluide.

- Pour un écoulement en cisaillement simple (figure b-3), le champ de vitesses d'écoulement de fluide est comme suit :

$$v_x = \dot{\gamma}(t) * y, \quad v_y = 0 \quad \text{et} \quad v_z = 0 \quad (\text{b-11})$$



**Fig.b-3:** Distribution des vitesses dans un écoulement laminaire en cisaillement simple (couette).

Le système des équations (b-10) devient [43] :

$$Z \begin{bmatrix} \sigma_{(p)xx} & \tau_{(p)xy} & 0 \\ \tau_{(p)yx} & \sigma_{(p)yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(p)zz} \end{bmatrix} + \lambda_H \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \sigma_{(p)xx} & \tau_{(p)xy} & 0 \\ \tau_{(p)yx} & \sigma_{(p)yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(p)zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\tau_{(p)yx} & \sigma_{(p)yy} & 0 \\ \sigma_{(p)yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\gamma} \right\} - \lambda_H \begin{bmatrix} \sigma_{(p)xx} - nkT & \tau_{(p)xy} & 0 \\ \tau_{(p)yx} & \sigma_{(p)yy} - nkT & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(p)zz} - nkT \end{bmatrix} \frac{D \ln Z}{Dt} = -nkT\lambda_H \dot{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{b-12})$$

Pour un écoulement permanent, le taux de cisaillement ( $\dot{\gamma}$ ) est constante en fonction de temps. Pour cet écoulement [43], on obtient :

$$\sigma_{(p)yy} = \sigma_{(p)zz} = 0$$

$$Z = 1 + (3/b) \left[ 1 - (\sigma_{(p)xx} / 3nkT) \right] \quad (\text{b-13})$$

et

$$\begin{cases} Z\sigma_{p_{xx}} = 2\lambda_H \tau_{(p)_{xy}} \dot{\gamma} \\ Z\tau_{(p)_{yx}} = -nkT\lambda_H \dot{\gamma} \end{cases} \quad (\text{b-14})$$

A partir de ces équations, on peut obtenir :

$$-\chi = 6\delta^2 \quad (\text{b-15})$$

$$\delta^3 + [(B+1)/6B]\delta + (A/18B) = 0 \quad (\text{b-16})$$

Avec :

$$\begin{cases} \chi = (\sigma_{(p)_{xx}} / 3nkT)^2 \\ \delta = \tau_{(p)_{xy}} / 3nkT \\ A = \lambda_H \dot{\gamma} \\ B = 3/b \end{cases}$$

La solution de l'équation (b-16) est :

$$\delta = (-C_1 + C_2)^{1/3} - (C_1 + C_2)^{1/3} \quad (\text{b-17})$$

Où :

$$\begin{cases} C_1 = (A/36B) \\ C_2 = \{C_1^2 + [(B+1)/18B]^3\}^{1/2} \end{cases} \quad (\text{b-18})$$

$$\text{Donc : } \tau_{(p)_{xy}} = (3nkT) [(-C_1 + C_2)^{1/3} - (C_1 + C_2)^{1/3}] \quad (\text{b-19})$$

A partir de l'équation (b-16) et l'équation (b-17), pour un taux de cisaillement faible, on peut obtenir :

$$\mu_0 - \mu_s = nkT\lambda_H b / (b+3) \quad (\text{b-20})$$

avec :

$\mu_0$  : viscosité de fluide à taux de cisaillement faible

le paramètre adimensionné (b) varie de 10 à 1000 [40, 41].

## ANNEXE c

### *DERIVATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS MODIFIEE : MODELE MAXWELL (FLUIDE VISCOELASTIQUE)*

On part des équations de mouvement (II-13) écrites pour un écoulement en film mince (figure c-1) suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \end{cases} \quad (c-1)$$

Et des lois de comportement rhéologique (II-7) :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} - A \frac{d\tau_{xy}}{dt} \right) \frac{\tau_e}{F(\tau_e)} \\ \tau_{zy} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - A \frac{d\tau_{zy}}{dt} \right) \frac{\tau_e}{F(\tau_e)} \end{cases} \quad (c-2)$$

En remplaçant les expressions des contraintes de cisaillement extraites des expressions des équations de comportement rhéologique dans les équations d'équilibre (c-1), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\tau_e}{F(\tau_e)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - A \frac{d\tau_{xy}}{dt} \right) \right] \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\tau_e}{F(\tau_e)} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - A \frac{d\tau_{zy}}{dt} \right) \right] \end{cases} \quad (c-3)$$

Une première intégration permet d'avoir les gradients de vitesses à travers l'épaisseur du film :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \frac{\partial p}{\partial x} y + A \frac{d\tau_{xy}}{dt} + C_{u1}(x,z) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \frac{\partial p}{\partial z} y + A \frac{d\tau_{zy}}{dt} + C_{w1}(x,z) \end{cases} \quad (c-4)$$

Avec,  $C_{u1}(x,z)$  et  $C_{w1}(x,z)$  sont des constantes d'intégrations indépendantes de  $y$ .

Une deuxième intégration donnera les composantes de champ de vitesses  $u$  et  $w$  :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial p}{\partial x} I_m + K_{mx} + C_{u1} J_m + C_{u2}(x,y) \\ w = \frac{\partial p}{\partial z} I_m + K_{mz} + C_{w1} J_m + C_{w2}(x,y) \end{cases} \quad (c-5)$$

Les expressions des termes  $I_m$ ,  $K_m$  et  $J_m$  sont notées comme suit :

$$I_m = \int_0^y \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} y dy, \quad J_m = \int_0^y \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} dy, \quad K_{mx} = \int_0^y A \frac{d\tau_{xy}}{dt} dy \quad \text{et} \quad K_{mz} = \int_0^y A \frac{d\tau_{zy}}{dt} dy$$

$C_{u2}(x,z)$  et  $C_{v2}(x,z)$  sont des constantes d'intégrations indépendantes de  $y$ .

Les conditions aux limites sur le champ de vitesses sont obtenues en supposant qu'il n'y a pas de glissement du lubrifiant sur les parois :

$$\begin{aligned} \text{Pour : } y = h_1 &\rightarrow u = U_1, v = V_1, w = W_1 \\ y = h_2 &\rightarrow u = U_2, v = V_2, w = W_2 \end{aligned}$$

Ainsi, les quatre constantes d'intégration peuvent être déterminées :

$$\begin{cases} C_{u1} = \frac{U_1 - U_2}{J_{m2}} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{I_{m2}}{J_{m2}} - \frac{K_{mx}}{J_{m2}} \\ C_{v1} = \frac{V_1 - V_2}{J_{m2}} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{I_{m2}}{J_{m2}} - \frac{K_{mz}}{J_{m2}} \\ C_{u2}(x,z) = 0 \\ C_{v2}(x,z) = 0 \end{cases} \quad (\text{c-6})$$

Avec les expressions de ces conditions, les composantes du champ de vitesses s'écrivent :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial p}{\partial x} \left( I_m - J_m \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + (U_2 - U_1 - K_{mx}) \frac{I_{m2}}{J_{m2}} + K_{mx} + U_1 \\ w = \frac{\partial p}{\partial z} \left( I_m - J_m \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + (W_2 - W_1 - K_{mz}) \frac{I_{m2}}{J_{m2}} + K_{mz} + W_1 \end{cases} \quad (\text{c-7})$$

Et leurs gradients suivant l'épaisseur du film :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \frac{\partial p}{\partial x} \left( y - \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \left( \frac{U_2 - U_1}{J_{m2}} - \frac{K_{mx}}{J_{m2}} \right) + A \frac{d\tau_{xy}}{dt} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \frac{\partial p}{\partial z} \left( y - \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \left( \frac{W_2 - W_1}{J_{m2}} - \frac{K_{mz}}{J_{m2}} \right) + A \frac{d\tau_{zy}}{dt} \end{cases} \quad (\text{c-8})$$

L'intégration de l'équation de continuité (II-12) à travers l'épaisseur du film :

$$\int_{h_1}^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy = 0 \quad (\text{c-9})$$

permet d'avoir accès à la troisième composante des vitesses :

$$v = - \int_{h_1}^y \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy + V_1 \quad (\text{c-10})$$

En  $y = h_2$ , cette relation devient :

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial w}{\partial z} dy = V_1 - V_2 \quad (\text{c-11})$$

Le calcul des intégrales de l'équation (c-11) s'effectue à l'aide du théorème de Leibnitz :

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial x_i} dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{h_1}^{h_2} F(x,y,z,t) dy - F(x,h_2,z,t) \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x,h_1,z,t) \frac{\partial h_1}{\partial x_i}$$

$i = 1, 2, 3$

Donc, l'équation (c-11) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{h_1}^{h_2} w dy = V_1 - V_2 + U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} - U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h_2}{\partial z} - W_1 \frac{\partial h_1}{\partial z}$$

Les intégrales de  $\int_{h_1}^{h_2} u dy$  et  $\int_{h_1}^{h_2} w dy$  sont calculées par parties, soit :

$$\int_{h_1}^{h_2} u dy = U_2(h_2 - h_1) - \int_{h_1}^{h_2} (y - h_1) \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\int_{h_1}^{h_2} w dy = W_2(h_2 - h_1) - \int_{h_1}^{h_2} (y - h_1) \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

En remplaçant les dernières expressions des gradients de vitesses dans l'équation ci-dessus, on obtient l'équation de Reynolds modifiée pour les fluides viscoélastiques de Maxwell :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ G_m \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G_m \frac{\partial P}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} [U_2(R_2 - F_m) + U_1 F_m] + \frac{\partial}{\partial z} [W_2(R_2 - F_m) + W_1 F_m] - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + V_2 - \left( \frac{\partial L_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{mz}}{\partial z} \right) \quad (c-12)$$

Avec :

$U_1, V_1$  et  $W_1$  : vitesses de la paroi de contact ( $S_1$ ) selon les trois directions (figure c.1)

$U_2, V_2$  et  $W_2$  : vitesses de la paroi de contact ( $S_2$ ) selon les trois directions

$L_{mx}$  et  $L_{mz}$  : termes représentant l'élasticité du fluide lubrifiant

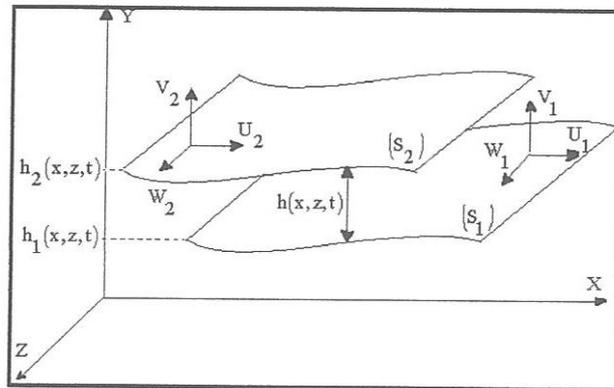
$h_1$  et  $h_2$  : équations des surfaces ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ).

$R_2 = h_2 - h_1 = h$

$$F_m = \frac{1}{J_{m2}} \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} y dy, \quad G_m = \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} y^2 dy - I_{m2} F_m, \quad J_{m2} = \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} dy, \quad K_{mx2} = \int_0^h A \frac{d\tau_{xy}}{dt} dy$$

$$L_{mx} = \int_0^h A \frac{d\tau_{xy}}{dt} y dy - K_{mx2} F_m, \quad L_{mz} = \int_0^h A \frac{d\tau_{zy}}{dt} y dy - K_{mz2} F_m, \quad I_{m2} = \int_0^h \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} y dy,$$

$$K_{mz2} = \int_0^h A \frac{d\tau_{zy}}{dt} dy.$$



**Fig.c-1:** Géométrie et cinématique du contact.

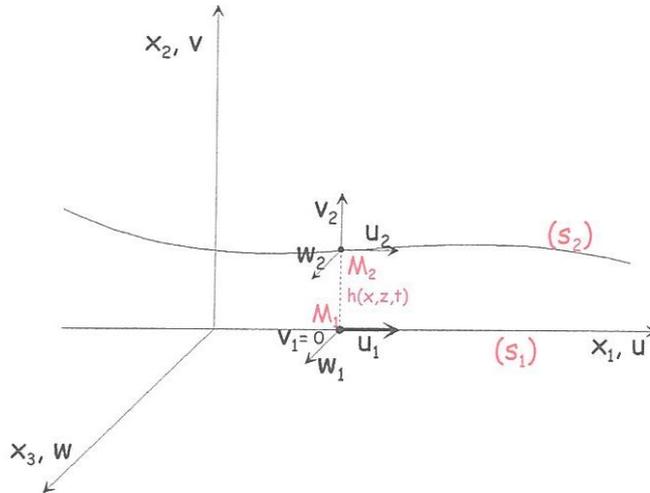
## ANNEXE d

### *ANALYSE DIMENSIONNELLE DES EQUATIONS DE MOUVEMENT POUR UN ÉCOULEMENT EN FILM MINCE*

En mécanique des films minces, la dimension suivant l'épaisseur du film  $(O, \bar{x}_2)$  est très faible par rapport aux deux autres dimensions (longueur et largeur du contact (figure d-1). Ce qui permet de déterminer l'ordre de grandeur des différents termes dans l'équation (II-35). Pour cela, on pose :  $\tilde{X}_1 = \frac{X_1}{L}$ ,  $\tilde{X}_2 = \frac{X_2}{h}$ ,  $\tilde{X}_3 = \frac{X_3}{L}$ ,  $\tilde{u}_1 = \frac{U_1}{V}$ ,  $\tilde{u}_2 = \frac{U_2 L}{Vh}$ ,  $\tilde{u}_3 = \frac{U_3}{V}$ ,  $\tilde{t} = \frac{tV}{L}$ ,  $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$ ,  $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}$ ,  $\tilde{\ell}_0 = \frac{\ell_0}{h}$  et  $\varepsilon = \frac{h}{L}$ .

Dans ces expressions, L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes  $(O, \bar{x}_1)$  et  $(O, \bar{x}_3)$ , h et  $\frac{Vh}{L}$  celles suivant  $(O, \bar{x}_2)$ ,  $\frac{L}{V}$ ,  $\mu_0$ ,  $\rho_0$  et  $\eta_0$  définissent l'ordre de grandeur du temps, coefficient de viscosité, de la masse volumique et le paramètre de couples de contraintes à la température de référence ( $T_0$ ).

En régime de lubrification hydrodynamique, V est la vitesse caractéristique d'une des parois du contact.



**Fig.d-1:** Schéma d'un écoulement en film mince ( $h/L \ll 1$ ).

Compte tenu de ces changements de variables :

- Pour  $i = 1$ , l'équation (II-35) devient :

$$\begin{aligned}
& \tilde{\rho}\rho_0\tilde{U}_jV\frac{V}{L}\left(\frac{\partial\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_j}\right) = -\frac{1}{L}\left(\frac{\partial p}{\partial\tilde{X}_1}\right) + \tilde{\mu}\mu_0\left[\frac{V}{L^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2}\right) + \frac{V}{h^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^2}\right) + \frac{V}{L^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_3^2}\right)\right] \\
& - \tilde{\eta}\eta_0\left[\frac{V}{L^4}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^4}\right) + \frac{V}{h^4}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^4}\right) + \frac{V}{L^4}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_3^4}\right)\right] - \\
& 2\tilde{\eta}\eta_0\left[\frac{V}{L^2h^2}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2\partial\tilde{X}_2^2}\right) + \frac{V}{L^4}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2\partial\tilde{X}_3^2}\right) + \frac{V}{L^2h^2}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^2\partial\tilde{X}_3^2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{d-1}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{\rho}\rho_0V^2}{L}\tilde{U}_j\left(\frac{\partial\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_j}\right) - \frac{\tilde{\mu}\mu_0V}{L^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2} + \frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_3^2}\right) - \frac{\tilde{\mu}\mu_0V}{h^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^2}\right) - \frac{\eta_0\tilde{\eta}V}{L^4}\left[\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^4} + \frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_3^4}\right] \\
& - \frac{\eta_0\tilde{\eta}V}{h^4}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^4}\right) - \frac{2\eta_0\tilde{\eta}V}{L^2h^2}\left[\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2\partial\tilde{X}_2^2} + \frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^2\partial\tilde{X}_3^2}\right] - \frac{2\eta_0\tilde{\eta}V}{L^4}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2\partial\tilde{X}_3^2}\right) = -\frac{1}{L}\left(\frac{\partial p}{\partial\tilde{X}_1}\right)
\end{aligned} \tag{d-2}$$

L'équation (d-2) multipliée par  $h^2$  donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{\rho}\rho_0Vh^2}{\mu_0L}\tilde{U}_j\left(\frac{\partial\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_j}\right) - \frac{\tilde{\mu}h^2}{L^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2} + \frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_3^2}\right) - \frac{\tilde{\mu}h^2}{h^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^2}\right) - \frac{\tilde{\eta}\eta_0h^2}{\mu_0L^4}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^4} + \frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_3^4}\right) - \frac{\tilde{\eta}\eta_0h^2}{\mu_0h^4}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^4}\right) \\
& - \frac{2\tilde{\eta}\eta_0}{L^2\mu_0}\left[\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2\partial\tilde{X}_2^2} + \frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^2\partial\tilde{X}_3^2}\right] - \frac{2\tilde{\eta}\eta_0h^2}{\mu_0L^4}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2\partial\tilde{X}_3^2}\right) = -\frac{h^2}{LV\mu_0}\left(\frac{\partial p}{\partial\tilde{X}_1}\right)
\end{aligned} \tag{d-3}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
& R_h\varepsilon\tilde{\rho}\left(\tilde{U}_j\frac{\partial\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_j}\right) - \tilde{\mu}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2} + \frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_3^2}\right) - \tilde{\mu}\left(\frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^2}\right) - \frac{\tilde{\eta}\ell_0^2\varepsilon^2}{L^2}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^4} + \frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_3^4}\right) - \frac{\tilde{\eta}\ell_0^2}{h^2}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^4}\right) \\
& - \frac{2\tilde{\eta}\ell_0^2}{L^2}\left[\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2\partial\tilde{X}_2^2} + \frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^2\partial\tilde{X}_3^2}\right] - \frac{2\tilde{\eta}\ell_0^2}{L^2}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2\partial\tilde{X}_3^2}\right) = -\frac{h^2}{LV\mu_0}\left(\frac{\partial p}{\partial\tilde{X}_1}\right)
\end{aligned} \tag{d-4}$$

Avec :

$R_h = \frac{\rho_0Vh}{\mu_0}$  : nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur d'écoulement du fluide

$\varepsilon = \frac{h}{L}$  : paramètre d'échelle qui en mécanique des films minces visqueux, de l'ordre de  $10^{-3}$ .

En négligeant les termes multipliés par  $\varepsilon^2$ , l'équation (d-4) devient :

$$-\tilde{\rho}R_h\varepsilon\left(\tilde{U}_j\frac{\partial\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_j}\right) + \tilde{\mu}\left(\frac{\partial^2\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^2}\right) + \frac{\tilde{\eta}\ell_0^2}{h^2}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^4}\right) + 2\frac{\tilde{\eta}\ell_0^2}{L^2}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2\partial\tilde{X}_2^2} + \frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_2^2\partial\tilde{X}_3^2}\right) + 2\frac{\tilde{\eta}\ell_0^2}{L^2}\left(\frac{\partial^4\tilde{U}_1}{\partial\tilde{X}_1^2\partial\tilde{X}_3^2}\right)$$

$$= \frac{h^2}{LV\mu_0} \left( \frac{\partial p}{\partial \tilde{X}_1} \right) \quad (d-5)$$

$\ell_0$  étant le paramètre de couple des contraintes

L'équation (d-5) devient :

$$\begin{aligned} & -\tilde{\rho}R_h\varepsilon \left( \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_1} \right) + \tilde{\mu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_2^2} \right) + \tilde{\ell}_0^2 \tilde{\eta} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_2^4} \right) + 2\tilde{\ell}_0^2 \tilde{\eta} \frac{h^2}{L^2} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_1^2 \partial \tilde{X}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_2^2 \partial \tilde{X}_3^2} \right) \\ & 2\tilde{\ell}_0^2 \tilde{\eta} \frac{h^2}{L^2} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_1^2 \partial \tilde{X}_3^2} \right) = -\frac{h^2}{LV\mu_0} \left( \frac{\partial p}{\partial \tilde{X}_1} \right) \end{aligned} \quad (d-6)$$

Avec :  $\tilde{p} = \frac{h^2 p}{LV\mu_0}$ , l'équation (d-6) devient :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}_1} &= -\tilde{\rho}R_h\varepsilon \left( \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_1} \right) + \tilde{\mu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_2^2} \right) + \tilde{\ell}_0^2 \tilde{\eta} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_2^4} \right) + \\ & \left[ 2\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_2^2 \partial \tilde{X}_1^2} + 2\frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_2^2 \partial \tilde{X}_3^2} \right] \frac{\tilde{\ell}_0^2 \tilde{\eta} h^2}{L^2} + \gamma \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_1^2 \partial \tilde{X}_3^2} \right) \frac{\tilde{\ell}_0^2 \tilde{\eta} h^2}{L^2} \end{aligned} \quad (d-7)$$

- Pour  $i = 1, 3$ , l'équation (d-7) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}_i} &= -\tilde{\rho}R_h\varepsilon \left( \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_j} \right) + \tilde{\ell}_0^2 \tilde{\eta} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_2^4} \right) + \tilde{\mu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_2^2} \right) + \\ & 2 \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_1^2 \partial \tilde{X}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_2^2 \partial \tilde{X}_3^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_1^2 \partial \tilde{X}_3^2} \right) \frac{\tilde{\ell}_0^2 \tilde{\eta} h^2}{L^2} \end{aligned} \quad (d-8)$$

Pour  $i = 2$  l'équation (II-35) donne :

$$\begin{aligned} \rho_0 \tilde{\rho} U_j V \frac{Vh}{L} \left( \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_j} \right) &= -\frac{1}{h} \left( \frac{\partial p}{\partial \tilde{X}_2} \right) + \tilde{\mu} \mu_0 \left[ \frac{hV}{LL^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1^2} \right) + \frac{hV}{Lh^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_2^2} \right) + \frac{hV}{LL^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_3^2} \right) \right] \\ & - \eta_0 \tilde{\eta} \left[ \frac{hV}{LL^4} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1^4} \right) + \frac{hV}{Lh^4} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_2^4} \right) + \frac{hV}{LL^4} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_3^4} \right) \right] - \\ & 2\eta_0 \tilde{\eta} \left[ \frac{hV}{LL^2 h^2} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1^2 \partial \tilde{X}_2^2} \right) + \frac{hV}{LL^4} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1^2 \partial \tilde{X}_3^2} \right) + \frac{hV}{LL^2 h^2} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_1}{\partial \tilde{X}_2^2 \partial \tilde{X}_3^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (d-9)$$

$$\text{Avec : } \frac{hV\rho}{L} \left( \frac{V}{L} \tilde{U}_1 \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1} + \frac{V}{L} \tilde{U}_3 \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_3} + \frac{hV}{Lh} \tilde{U}_2 \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_2} \right) = \frac{hV\rho}{L} \frac{V}{L} \left( \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_j} \right)$$

On multiplie l'équation (d-9) par  $\left(\frac{h^3}{VL\mu_0}\right)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{hV\rho_0 h^3}{\mu_0 L^3} \left( \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_j} \right) &= -\frac{h^2}{L\mu_0 V} \left( \frac{\partial p}{\partial \tilde{X}_2} \right) + \frac{\tilde{\mu} h^4}{L^4} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_3^2} \right) - \frac{\tilde{\eta} \eta_0 h^4}{\mu_0 L^6} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_3^4} \right) \\ &+ \frac{\tilde{\mu} h^2}{L^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_2^2} \right) - \frac{\tilde{\eta} \eta_0}{\mu_0 L^2} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_2^4} \right) - 2 \frac{\tilde{\eta} \eta_0 h^2}{\mu_0 L^4} \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1^2 \partial \tilde{X}_2^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_2^2 \partial \tilde{X}_3^2} \right) \end{aligned} \quad (d-10)$$

Avec :  $\ell_0^2 = \frac{\eta_0}{\mu_0}$ , l'équation (d-10) devient :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \varepsilon^3 R \left( \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_j} \right) &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}_2} + \tilde{\mu} \varepsilon^4 \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_3^2} \right) - \tilde{\eta} \tilde{\ell}_0^2 \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_2^4} \right) \\ &- \tilde{\eta} \tilde{\ell}_0^2 \varepsilon^4 \left( \frac{h^2}{L^2} \right) \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_3^4} \right) - \tilde{\mu} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_2^2} \right) - \tilde{\eta} \tilde{\ell}_0^2 \varepsilon^2 \left( \frac{h^2}{L^2} \right) \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_1^2 \partial \tilde{X}_1^2} + \frac{\partial^4 \tilde{U}_2}{\partial \tilde{X}_2^2 \partial \tilde{X}_3^2} \right) \end{aligned} \quad (d-11)$$

Tant que :  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^4$  et  $\frac{h^2}{L^2}$  sont d'ordre zéro, donc l'équation (d-11) devient égale zéro :

$$-\left( \frac{\partial p}{\partial \tilde{X}_2} \right) = 0 \quad (d-12)$$

Compte tenu de ces changements des variables l'équation (II-35) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}_i} = \tilde{\mu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_2^2} \right) - \tilde{\eta} \tilde{\ell}_0^2 \left( \frac{\partial^4 \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_2^4} \right) - \varepsilon \tilde{\rho} R_h \left( \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_j} \right) \\ \left( \frac{\partial p}{\partial \tilde{X}_2} \right) = 0 \end{cases} \quad (d-13)$$

Avec :  $i = 1, 3$  et  $j = 1, 2, 3$

Les termes en  $\varepsilon$  ou termes d'inertie de l'équation (d-13) seront négligeable devant les termes de viscosité, quand  $\varepsilon R_h$  est inférieure à l'unité. Si, pour hypothèse, on néglige les forces d'inertie, le système d'équations (d-13) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}_i} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_2^2} - \tilde{\eta} \tilde{\ell}_0^2 \frac{\partial^4 \tilde{U}_i}{\partial \tilde{X}_2^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{X}_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{d-14})$$

Pour,  $i = 1,3$

En revenant aux variables dimensionnées les équations de mouvement (d-14) s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial X_1} = \mu_0 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial X_2^2} \right) - \eta_0 \left( \frac{\partial^4 U_1}{\partial X_2^4} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial X_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial X_3} = \mu_0 \left( \frac{\partial^2 U_3}{\partial X_2^2} \right) - \eta_0 \left( \frac{\partial^4 U_3}{\partial X_2^4} \right) \end{cases} \quad (\text{d-15})$$

La deuxième équation du système montre que la pression dans le film est indépendante de  $X_2$ .

## ANNEXE e

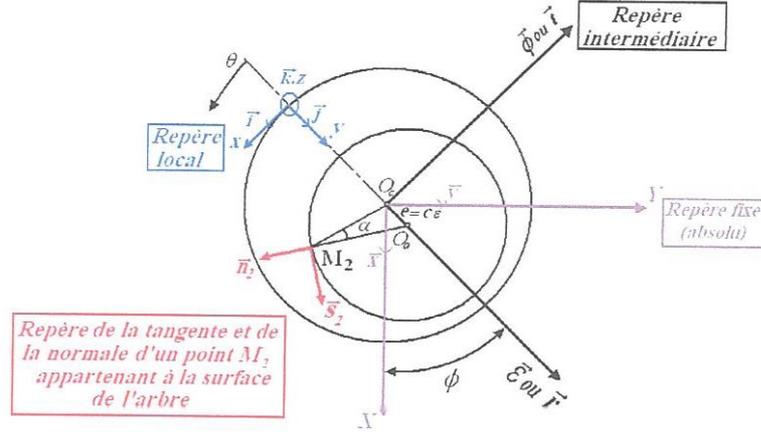
### EXPRESSION DES COMPOSANTES DE LA VITESSE DE SURFACE DE L'ARBRE :

$U_2$  et  $V_2$

Soient  $U_2$  et  $V_2$  les composantes (suivant les directions  $x$  et  $y$ ) du vecteur vitesse  $\vec{V}_2$  d'un point  $M_2$  appartenant à la surface de l'arbre ( $S_2$ ) (figure e-1), tel que :

$$\vec{V}_2 = \vec{V}(M_2) = \vec{V}(O_a) + \overline{M_2 O_a} \wedge \vec{\omega}_a \quad (e-1)$$

Où,  $\vec{V}(O_a)$  est la vitesse du centre de l'arbre et  $\vec{\omega}_a$  le vecteur rotation.



**Fig.e-1:** Systèmes d'axes et notations

Dans le repère  $(\vec{\varepsilon}, \vec{\phi}, \vec{z})$ , on a :

$$\vec{V}(O_a) = \dot{\varepsilon} \vec{\varepsilon} + \varepsilon \dot{\phi} \vec{\phi} = C \dot{\varepsilon} \vec{\varepsilon} + C \varepsilon \dot{\phi} \vec{\phi}$$

Dans le repère  $(\vec{n}_2, \vec{s}_2, \vec{z})$ , on peut écrire:

$$\overline{M_2 O_a} = -R \vec{n}_2$$

- Expression de  $(\vec{\varepsilon}, \vec{\phi}, \vec{z})$  en fonction de  $(\vec{n}_2, \vec{s}_2, \vec{z})$

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon} = -\vec{n}_2 \cos(\theta - \alpha) + \vec{s}_2 \sin(\theta - \alpha) \\ \vec{\phi} = -\vec{n}_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha)\right) - \vec{s}_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha)\right) \end{cases}$$

Puisque,  $\alpha = \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| \ll 1$ , on peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon} = -\vec{n}_2 \cos \theta + \vec{s}_2 \sin \theta \\ \vec{\phi} = -\vec{n}_2 \sin \theta - \vec{s}_2 \cos \theta \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon} \\ \vec{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{n}_2 \\ \vec{s}_2 \end{Bmatrix} \quad (e-2)$$

La vitesse de  $O_a$  dans le repère  $(\vec{n}_2, \vec{s}_2, \vec{z})$  est :

$$\vec{V}(O_a) = C\dot{\varepsilon}(-\vec{n}_2 \cos \theta + \vec{s}_2 \sin \theta) + C\varepsilon\dot{\phi}(-\vec{n}_2 \sin \theta - \vec{s}_2 \cos \theta)$$

$$\text{Soit : } \vec{V}(O_a) = \vec{n}_2(-C\dot{\varepsilon} \cos \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta) + \vec{s}_2(C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta) \quad (\text{e-3})$$

- Expression de  $(\vec{n}_2, \vec{s}_2, \vec{z})$  en fonction de  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{Bmatrix} \vec{n}_2 \\ \vec{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{Bmatrix} \quad (\text{e-4})$$

On a alors :

$$\overline{M_2 O_a} = -R\vec{n}_2 = -R\vec{i} \sin \alpha + R\vec{j} \cos \alpha$$

$$\text{Et, } \overline{M_2 O_a} \Lambda \overline{\omega_a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin \alpha & R \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \omega_a \end{vmatrix} = \vec{i} \omega_a R \cos \alpha - \vec{j} R \omega_a \sin \alpha + \vec{k} 0$$

Soit :

$$\overline{M_2 O_a} \Lambda \overline{\omega_a} = R \omega_a (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \quad (\text{e-5})$$

En utilisant la matrice de passage (e-4), la vitesse du centre de l'arbre ( $O_a$ ) dans le repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est :

$$\vec{V}(O_a) = (\sin \alpha \vec{i} - \cos \alpha \vec{j})(-C\dot{\varepsilon} \cos \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta) + (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})(C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta)$$

Comme  $\alpha$  est très petit, la vitesse du point  $M_2$  dans le repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M_2) = & \vec{i} \left( -C\dot{\varepsilon} \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - C\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta \frac{\partial h}{\partial x} + C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta + R\omega_a \right) \\ & + \vec{j} \left( +C\dot{\varepsilon} \cos \theta + C\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta + C\dot{\varepsilon} \sin \theta \frac{\partial h}{\partial x} - C\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta \frac{\partial h}{\partial x} + R\omega_a \frac{\partial h}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{e-6})$$

D'où les expressions des composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}_2$  suivant les directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  :

$$\begin{cases} U_2 = \omega_a R + C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta - \frac{\partial h}{\partial x} (C\dot{\varepsilon} \cos \theta + C\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta) \\ V_2 = \omega_a R \frac{\partial h}{\partial x} + C\dot{\varepsilon} \cos \theta + C\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta + \frac{\partial h}{\partial x} (C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta) \end{cases} \quad (\text{e-7})$$

En régime permanent, les composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}_2$  se réduisent à :

$$\begin{cases} U_2 = \omega_a R \\ V_2 = \omega_a R \frac{\partial h}{\partial x} = u_2 \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{e-8})$$

Avec  $\omega_a$  est la vitesse de rotation du palier,  $R$  le rayon de palier,  $h$  l'épaisseur de film lubrifiant et  $C$  le jeu radial du palier.

## ANNEXE f

### *SOLUTION ANALYTIQUE DE L'EQUATION DE REYNOLDS NOWTONIENNE POUR UN PALIER INFINIMENT LONG LUBRIFIE PAR UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE ISOVISQUEUX*

Les solutions analytiques de l'équation de Reynolds correspondant aux conditions limites de Sommerfeld (film complet) et de demi-Sommerfeld (film rompu) sont présentées dans le cas du palier lubrifié par fluide newtonien.

#### **- Solutions de Sommerfeld et de Gümbel**

On suppose que le palier est alimenté à la pression  $p = 0$  par l'intermédiaire d'une rainure axiale infiniment mince située à l'abscisse  $\theta = 0$ , soit :

$$p(\theta = 0) = p(\theta = 2\pi) = 0 \quad (f-1)$$

Une première intégration de l'équation de Reynolds classique ( $G \cong h^3$ ) donne :

$$\frac{dp}{d\theta} = 6\mu R^2 \omega \left( \frac{h - h^*}{h^3} \right)$$

Où  $h^*$  est l'épaisseur du film lubrifiant au point où le gradient de pression est nul et  $R$  est le rayon du palier fluide.

En intégrant encore une fois, on obtient :

$$p(\theta) = 6\mu\omega \left( \frac{R}{C} \right)^2 \left[ \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{h^*}{C} \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right] + K$$

$K$  est une constante d'intégration.

Pour calculer ces intégrales, on utilise le changement de variables de Sommerfeld :

$$1 + \varepsilon \cos \theta = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cos \psi} \quad (f-2)$$

tel que,  $\theta = 0, 2\pi$  correspond à  $\psi = 0, 2\pi$

Soit :

$$p(\psi) = \frac{6\mu\omega \left( \frac{R}{C} \right)^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \psi - \varepsilon \sin \psi - \frac{h^* [2\psi - 4\varepsilon \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi]}{2C(1 - \varepsilon^2)} \right\} + K \quad (f-3)$$

Les deux constantes  $h^*$  et  $K$  sont déterminées à partir des conditions aux limites (f-1) :

Soit :

$$p(\psi) = \frac{6\mu\omega\left(\frac{R}{C}\right)^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \psi - \varepsilon \sin \psi - \frac{2\psi - 4\varepsilon \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi}{(2-\varepsilon^2)} \right\} \quad (\text{f-4})$$

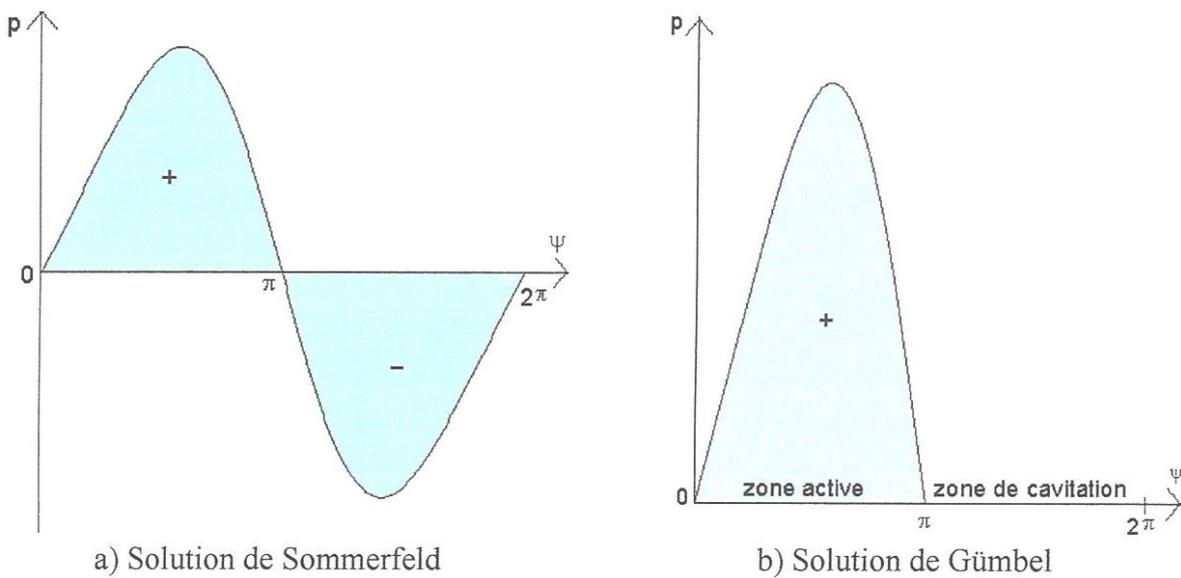
qui s'écrit aussi :

$$\tilde{p} = \frac{p}{\mu\omega\left(\frac{R}{C}\right)^2} = \frac{6\varepsilon \sin \psi}{(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} [2-\varepsilon^2 - \varepsilon \cos \psi] \quad (\text{f-5.a})$$

Si on change  $\psi$  en  $\theta$  tel que :  $\cos \psi = \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  et  $\sin \psi = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ , il vient :

$$\tilde{p}(\theta) = \frac{6\varepsilon \sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)} \quad (\text{f-5.b})$$

La répartition circonférentielle de la pression dans le palier est représentée sur la figure f-1.



**Fig.f-1:** Représentation graphique des *solutions* de Sommerfeld (*film complet*) et de Gümbel (*film rompu*).

## ANNEXE j

### *EXEMPLE DE SCHEMA GENERAL DE RESOLUTION DE L'EQUATION DE REYNOLDS MODIFIEE DANS LE CAS D'UN PALIER RIGIDE LUBRIFIE PAR FLUIDE VISCOELASTIQUE (MODELE FENE-P)*

1. Lecture des données :  $\mu_s$ ,  $b$ ,  $T$ ,  $\lambda_H$ ,  $k$ ,  $n$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\omega$ ,  $R$  et  $C$
2. Calcul de l'épaisseur du film adimensionnée (II-76)
3. Calcul du champ de pression initial ( $\tilde{p}_i^{(0)}$ ) en utilisant la solution de Gumbel (annexe f),  $i = 0, M$  où  $M$  est le nombre d'intervalles selon la direction circonférentielle
4. Calcul du taux de cisaillement ( $\dot{\gamma}_{xy}(i, j)$ ) (II-28) dans l'épaisseur du film, ( $j = 0, N$  où  $N$  est le nombre d'intervalles selon l'épaisseur du film)
5. Calcul des contraintes de cisaillement ( $\tau_{(p)xy}(i, j)$ ) (b-19) dans l'épaisseur du film
6. Calcul du paramètre de l'élasticité adimensionné du lubrifiant ( $\tilde{L}_{px}(i)$ )
7. Résolution du système non linéaire (III-10)

8. Si  $\sum_{i=1}^{M-1} \left| \frac{\tilde{p}_i^{(k+1)} - \tilde{p}_i^{(k)}}{\tilde{p}_i^{(k+1)}} \right| \leq 10^{-4}$

- convergence atteinte
- calcul des performances hydrodynamiques du palier (champ de pression hydrodynamique statique dans le film lubrifiant, portance hydrodynamique du palier, angle de calage, etc.)
- arrêt

9. Sinon poser  $k = k + 1$  et retourner à l'étape 4 pour une autre itération

## ANNEXE g

### **REPONSE D'UN PALIER HYDRODYNAMIQUE A UNE EXCITATION SYNCHRONNE DE TYPE BALOURD**

Dans le cas de vibrations de faibles amplitudes de l'arbre au voisinage de la position d'équilibre ( $O_{a0}$ ), avec un balourd de faible excentricité ( $e_b$ ) (résiduel), les équations de mouvement du rotor rigide s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X'' \\ Y'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{XX} & b_{XY} \\ b_{YX} & b_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{XX} & a_{XY} \\ a_{YX} & a_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = Me_b \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (g-1)$$

En variable sans dimension l'équation (g-1) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{m} & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}'' \\ \tilde{Y}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \tilde{m} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} \cos \tilde{t} \\ \sin \tilde{t} \end{Bmatrix} \quad (g-2)$$

Avec :  $\tilde{m} = \frac{M\omega^2 C}{W_0}$ ,  $A_{ij} = a_{ij} \frac{C}{W_0}$ ,  $B_{ij} = b_{ij} \frac{C\omega}{W_0}$ ,  $\tilde{t} = \omega t$ ,  $\tilde{X} = \frac{X}{C}$ ,  $\tilde{Y} = \frac{Y}{C}$ ,  $\tilde{X}' = \frac{X'}{C\omega}$ ,

$$\tilde{Y}' = \frac{Y'}{C\omega}, \quad (\tilde{X}'', \tilde{Y}'') = \frac{(X'', Y'')}{C\omega^2}, \quad \varepsilon_b = \frac{e_b}{C}.$$

Le vecteur solution du système d'équation (g-2) est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{Bmatrix} \cos \tilde{t} + \begin{Bmatrix} \tilde{X}_2 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} \sin \tilde{t} \quad (g-3)$$

En remplaçant (g-3) dans le système (g-2), et en identifiant les termes en  $\cos \tilde{t}$  et  $\sin \tilde{t}$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} (A_{XX} - \tilde{m}) & B_{XX} & A_{XY} & B_{XY} \\ -B_{XX} & (A_{XX} - \tilde{m}) & -B_{XY} & A_{XY} \\ A_{YX} & B_{YX} & (A_{YY} - \tilde{m}) & B_{YY} \\ -B_{YX} & A_{YX} & -B_{YY} & (A_{YY} - \tilde{m}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} = \tilde{m} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (g-4)$$

La solution du système (g-4) s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \tilde{m} \varepsilon_b \left( \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \right) \\ \tilde{X}_2 = -\tilde{m} \varepsilon_b \left( \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} \right) \\ \tilde{Y}_1 = \tilde{m} \varepsilon_b \left( \frac{EC + FD}{C^2 + D^2} \right) \\ \tilde{Y}_2 = -\tilde{m} \varepsilon_b \left( \frac{FC - ED}{C^2 + D^2} \right) \end{cases} \quad (g-5)$$

avec :

$$\begin{cases} A = -\tilde{m} + A_{YY} - B_{XY} \\ B = A_{XY} + B_{YY} \\ C = \tilde{m}^2 - \tilde{m}(A_{XX} + A_{YY}) + A_{XX}A_{YY} - A_{XY}A_{YX} - (B_{XX}B_{YY} - B_{XY}B_{YX}) \\ D = -\tilde{m}(B_{XX} + B_{YY}) + A_{XX}B_{YY} + A_{YY}B_{XX} - A_{XY}B_{YX} - A_{YX}B_{XY} \\ E = -A_{YX} + B_{XX} \\ F = \tilde{m} - A_{XX} - B_{YX} \end{cases}$$

### - Caractéristiques de la trajectoire du centre de l'arbre

La solution (g-3) du système (g-2) correspond à une trajectoire de forme elliptique (figure g-1) dont les caractéristiques sont les suivantes :

$a = \tilde{a}C$  : demi-grand axe de l'ellipse

$b = \tilde{b}C$  : demi-petit axe de l'ellipse

$\varphi$  : angle de déphasage entre le vecteur balourd et le vecteur déplacement

$\delta$  : l'angle qui donne l'inclinaison du demi-grand axe par rapport à l'axe X.

Ainsi, dans le repère propre de l'ellipse ( $O_{a0}, X^*, Y^*$ ), l'équation de l'ellipse s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{X}^* = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \\ \tilde{Y}^* = \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \end{cases} \quad (g-6)$$

$$\text{où : } (\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*) = \frac{(X^*, Y^*)}{C}$$

Compte tenu de la relation (g-6), la projection sur ( $O_{a0}, X, Y$ ) donne :

$$\begin{cases} \tilde{X} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ \tilde{Y} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (g-7)$$

Les équations (g-3) sont identiques aux équations (g-7), ce qui permet d'écrire :

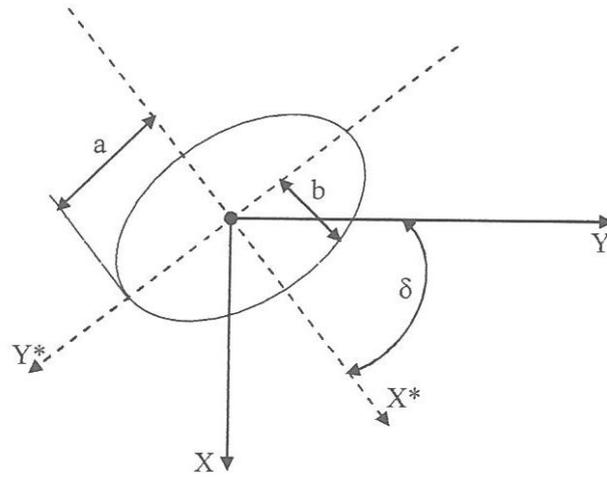
$$\begin{cases} \tilde{X}_1 \cos \tilde{t} + \tilde{X}_2 \sin \tilde{t} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ \tilde{Y}_1 \cos \tilde{t} + \tilde{Y}_2 \sin \tilde{t} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (g-8)$$

Ce système d'équations étant vérifié quelque soit le temps adimensionné ( $\tilde{t}$ ), il vient en identifiant les termes en  $\cos \tilde{t}$  et  $\sin \tilde{t}$  :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \tilde{a} \cos \delta \cos \varphi + \tilde{b} \sin \delta \sin \varphi \\ \tilde{X}_2 = -\tilde{a} \cos \delta \sin \varphi + \tilde{b} \sin \delta \cos \varphi \\ \tilde{Y}_1 = -\tilde{a} \sin \delta \cos \varphi + \tilde{b} \cos \delta \sin \varphi \\ \tilde{Y}_2 = \tilde{a} \sin \delta \sin \varphi + \tilde{b} \cos \delta \cos \varphi \end{cases} \quad (g-9)$$

La résolution des équations (g-9) permet de déterminer les caractéristiques de l'ellipse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a} = \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)}{2} + \sqrt{(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)^2 + \frac{1}{4}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2)^2}} \\ \tilde{b} = \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)}{2} - \sqrt{(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)^2 + \frac{1}{4}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2)^2}} \\ \delta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{-2(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)}{\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2} \right) \\ \varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{-2(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2)}{\tilde{X}_1^2 - \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{g-5})$$



**Fig. g-1:** Caractéristiques d'une trajectoire elliptique.

## ANNEXE h

### **FORMULATION DES PROBLEMES ELASTO-STATIQUE LINEAIRE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS (3D) DANS LES PALIERS CYLINDRIQUES REVETUS [53]**

#### 1. Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème élasto-statique linéaire est construite à partir de l'application du principe des travaux virtuels. En l'absence des forces de volume, elle s'écrit [53] :

$$W = \int_V \langle \delta \varepsilon \rangle [H] \{ \varepsilon \} dv - \int_{S_t} \langle \delta u \rangle \{ f_s \} ds = 0 \quad (h-1)$$

$$\forall \{ \delta u \} \text{ avec } \{ \delta u \} = \{ 0 \} \text{ et } \{ u \} = \{ \bar{u} \} \text{ sur } S_u$$

Avec :

[H] : matrice constitutive du matériau

{ε} : vecteur de déformations linéaires

S<sub>t</sub> : partie de la frontière S où sont appliquées les sollicitations

S<sub>u</sub> : partie de la frontière S où les déplacements sont connus

{u} : vecteur des déplacements

{ū} : vecteur des déplacements imposés.

#### 2. Approximations par éléments finis

Selon le principe de la méthode des éléments finis, le domaine V ou A est découpé en N<sub>e</sub> éléments volumiques V<sup>e</sup> ou surfaciques A<sup>e</sup> (figure g-1).

$$V = \bigcup_{e=1}^{N_e} V^e ; A = \bigcup_{e=1}^{N_e} A^e ; W = \sum_{e=1}^{N_e} W^e = 0 \quad (h-2)$$

Où : W<sup>e</sup> est la forme variationnelle élémentaire

Chaque élément comprend n<sub>e</sub> nœuds et le domaine discret, obtenu après maillage, contient n nœuds au total.

La géométrie de chaque élément V<sup>e</sup> est représentée par :

- *En coordonnées cartésiennes*

$$\begin{Bmatrix} x(\xi) \\ y(\xi) \\ z(\xi) \end{Bmatrix} = [\bar{N}(\xi)] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ x_{n_e} \\ y_{n_e} \\ z_{n_e} \end{Bmatrix} \quad (h-3)$$

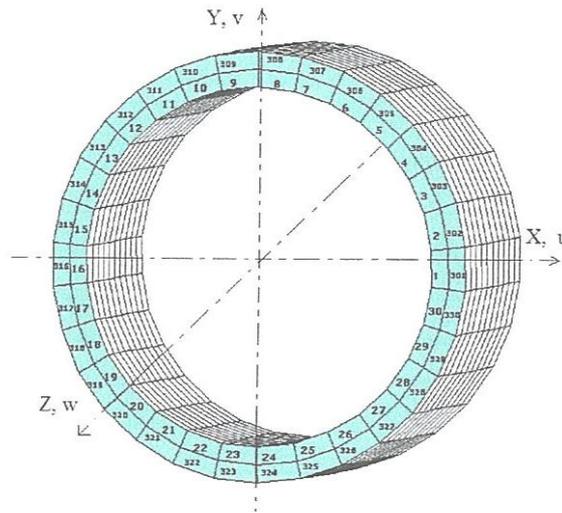
En coordonnées cylindriques

$$\begin{Bmatrix} r(\xi) \\ \theta(\xi) \\ z(\xi) \end{Bmatrix} = [\bar{N}(\xi)] \begin{Bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ r_{n_e} \\ \theta_{n_e} \\ z_{n_e} \end{Bmatrix} \quad (h-4)$$

Où  $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$  ou  $\begin{Bmatrix} r \\ \theta \\ z \end{Bmatrix}$  définit la position d'un point appartenant à l'élément  $x_i, y_i$  et  $z_i$  ou  $r_i, \theta_i, z_i$  ( $i$

$= 1, n_e$ ) les coordonnées cartésiennes ou cylindriques des nœuds définissant  $V^e$ .

$\xi = (\xi, \eta, \zeta)$  les coordonnées paramétriques ou locales de l'élément parent ou de référence  $V^e$  et  $[\bar{N}]$  les fonctions de transformation géométrique ou fonctions de forme exprimées en variables paramétriques.



**Fig.g-1:** Découpage de la couche élastique par éléments hexaédriques à huit nœuds.

Sur chaque élément, les déplacements réels  $\{u^e\}$  et les variations de déplacements  $\{\delta u^e\}$  sont représentés par :

$$\{u^e(\xi)\} \approx \{\tilde{u}^e(\xi)\} = [N(\xi)]\{u_n\} \quad \text{et} \quad \{\delta u^e(\xi)\} \approx \{\delta \tilde{u}^e(\xi)\} = [N(\xi)]\{\delta u_n\} \quad (h-5)$$

Où :  $\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$  et  $\{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix}$  en coordonnées cartésiennes

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} \text{ et } \{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u_r \\ \delta u_\theta \\ \delta u_z \end{Bmatrix} \text{ en coordonnées cylindriques}$$

$[N]$  est la matrice regroupant les fonctions d'interpolation exprimées en variables paramétriques.

$\{u_n\}$  et  $\{\delta u_n\}$  sont des vecteurs regroupant les degrés de liberté et les variations virtuelles de degrés de liberté de l'élément.

Dans notre cas, les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolation de l'élément sont confondus (élément isoparamétrique), on a alors:

$$[\bar{N}] \equiv [N] \quad (h-6)$$

L'approximation des déplacements  $\{u^e\}$  et des variations de déplacements  $\{\delta u^e\}$  conduit à la discrétisation de la forme variationnelle élémentaire  $W^e$ :

$$W^e \approx \tilde{W}^e = \langle \delta u_n \rangle ([k_e] \{u_n\} - \{f_e\}) \quad (h-7)$$

Où :  $[k_e]$  et  $\{f_e\}$  sont respectivement la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur sollicitation élémentaire. Pour ce type de problème, l'élément utilisé est l'élément hexaédrique tri-linéaire isoparamétrique à huit nœuds de classe  $C^0$  (figure h-2).

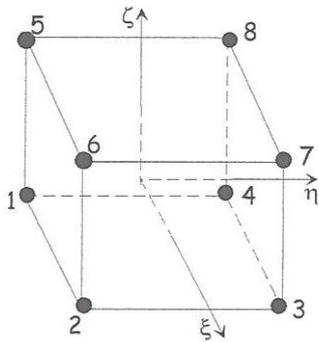
Dans la notation matricielle (h-7), le symbole  $\langle \rangle$  désigne le vecteur ligne tel que  $\langle \rangle \equiv \{ \}^T$

La base polynômiale de cet élément est :  $\langle p(\xi, \eta) \rangle = \langle 1; \xi; \eta; \zeta; \xi\eta; \eta\zeta; \xi\zeta; \xi\eta\zeta \rangle$

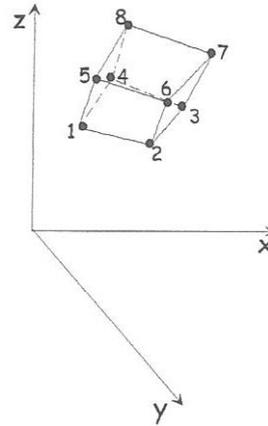
Les expressions de fonctions d'interpolation et de leurs gradients sont données dans le tableau h-1 suivant :

Nœud $i$	Fonction de forme $\frac{1}{c} \{N_i(\xi, \eta, \zeta)\}$	$\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right\}$	$\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right\}$	$\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \right\}$
1	$a_2 b_2 c_2$	$-b_2 c_2$	$-a_2 c_2$	$-a_2 b_2$
2	$a_1 b_2 c_2$	$b_2 c_2$	$-a_1 c_2$	$-a_1 b_2$
3	$a_1 b_1 c_2$	$b_1 c_2$	$a_1 c_2$	$-a_1 b_1$
4	$a_2 b_1 c_2$	$-b_1 c_2$	$a_2 c_2$	$-a_2 b_1$
5	$a_2 b_2 c_1$	$-b_2 c_1$	$-a_2 c_1$	$a_2 b_2$
6	$a_1 b_2 c_1$	$b_2 c_1$	$-a_1 c_1$	$a_1 b_2$
7	$a_1 b_1 c_1$	$b_1 c_1$	$a_1 c_1$	$a_1 b_1$
8	$a_2 b_1 c_1$	$-b_1 c_1$	$a_2 c_1$	$a_2 b_1$

Avec :  $c = 1/8$ ,  $a_1 = 1 + \xi$ ,  $a_2 = 1 - \xi$ ,  $b_1 = 1 + \eta$ ,  $b_2 = 1 - \eta$ ,  $c_1 = 1 + \zeta$ ,  $c_2 = 1 - \zeta$



Elément de référence



Elément réel

Fig.h-2: Elément hexaédrique à huit nœuds

Les matrices élémentaires s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} [k_e] = \iiint_{V^e} [B(x, y, z)]^T [H] [B(x, y, z)] dx dy dz \\ \{f_e\} = \iint_{S_i^e} [N]^T \begin{Bmatrix} f_{s_x} \\ f_{s_y} \\ f_{s_z} \end{Bmatrix} ds \end{cases} \quad (h-8)$$

Avec

$$[B(x, y, z)] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & N_{3,x} & 0 & 0 & N_{4,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & 0 & N_{3,y} & 0 & 0 & N_{4,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & 0 & 0 & N_{3,z} & 0 & 0 & N_{4,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & N_{2,y} & N_{2,x} & 0 & N_{3,y} & N_{3,x} & 0 & N_{4,y} & N_{4,x} & 0 \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} & N_{2,z} & 0 & N_{2,x} & N_{3,z} & 0 & N_{3,x} & N_{4,z} & 0 & N_{4,x} \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} & 0 & N_{2,z} & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & N_{3,z} & 0 & N_{4,y} & N_{4,z} \\ N_{5,x} & 0 & 0 & N_{6,x} & 0 & 0 & N_{7,x} & 0 & 0 & N_{8,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{5,y} & 0 & 0 & N_{6,y} & 0 & 0 & N_{7,y} & 0 & 0 & N_{8,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{5,z} & 0 & 0 & N_{6,z} & 0 & 0 & N_{7,z} & 0 & 0 & N_{8,z} \\ N_{5,y} & N_{5,x} & 0 & N_{6,y} & N_{6,x} & 0 & N_{7,y} & N_{7,x} & 0 & N_{8,y} & N_{8,x} & 0 \\ N_{5,x} & 0 & N_{5,z} & N_{6,x} & 0 & N_{6,z} & N_{7,x} & 0 & N_{7,z} & N_{8,x} & 0 & N_{8,z} \\ 0 & N_{5,y} & N_{5,z} & 0 & N_{6,y} & N_{6,z} & 0 & N_{7,y} & N_{7,z} & 0 & N_{8,y} & N_{8,z} \end{bmatrix}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et, } \begin{cases} f_{s_x} \\ f_{s_y} \\ f_{s_z} \end{cases} = \begin{cases} p^\circ(\theta, z) \cos \theta^\circ \\ p^\circ(\theta, z) \sin \theta^\circ \\ 0 \end{cases}$$

P étant la pression exercée par le fluide sur la paroi interne du tube et  $\theta^\circ$  la coordonnée angulaire d'un point appartenant à la face de l'élément soumis à la pression ( $S_i^\circ$ ).

Sur l'élément de référence  $V^r$ , les relations (h-8) prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} [k_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [J]^T [B(\xi)]^T [H] [B(\xi)] [J] \det J(\xi) d\xi d\eta d\zeta \\ \{f_e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta, \zeta = 1)]^T \begin{cases} p^\circ(\xi, \eta) \cos \theta^\circ(\xi, \eta) \\ p^\circ(\xi, \eta) \sin \theta^\circ(\xi, \eta) \\ 0 \end{cases} |J_s(\xi, \eta)| d\xi d\eta \end{cases} \quad (\text{h-9})$$

Où  $\det J$  est le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation géométrique.

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{N}_{,\xi} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\eta} \rangle \\ \langle \bar{N}_{,\zeta} \rangle \end{bmatrix} [\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}]$$

La valeur du déterminant de la matrice jacobienne correspond au volume de l'élément réel ( $V^e$ ) divisé par huit.

$$\text{Et, } J_s = \left[ (y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta})^2 + (z_{,\xi} x_{,\eta} - x_{,\xi} z_{,\eta})^2 + (x_{,\xi} y_{,\eta} - y_{,\xi} x_{,\eta})^2 \right]^{1/2}$$

Avec

$$\langle x_{,\xi} : y_{,\xi} : z_{,\xi} \rangle = \langle \bar{N}_{,\xi} \rangle [\{x_n\} : \{y_n\} : \{z_n\}]$$

$$\langle x_{,\eta} : y_{,\eta} : z_{,\eta} \rangle = \langle \bar{N}_{,\eta} \rangle [\{x_n\} : \{y_n\} : \{z_n\}]$$

$$\langle \bar{N}_{,\xi}(\xi, \eta, \zeta = 1) \rangle = \frac{1}{4} \langle 0 : 0 : 0 : 0 : -(1-\eta) : (1-\eta) : (1+\eta) : -(1+\eta) \rangle$$

$$\langle \bar{N}_{,\eta}(\xi, \eta, \zeta = 1) \rangle = \frac{1}{4} \langle 0 : 0 : 0 : 0 : -(1-\xi) : -(1+\xi) : (1+\xi) : (1-\xi) \rangle$$

La valeur de  $J_s$  correspond au quart de l'aire de l'élément réel  $S_i^\circ$ .

Pour transformer les opérateurs de dérivation, on utilise la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

Où  $j_{\alpha\beta}$  sont les coefficients de la matrice jacobienne inverse  $[j] = [J]^{-1}$

Le vecteur sollicitation élémentaire peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\{f_e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_2(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_3(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_3(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_3(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_4(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_4(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_4(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_5(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_5(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_5(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_6(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_6(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_6(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_7(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_7(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_7(\xi, \eta, \zeta = 1) \\ N_8(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 & 0 \\ 0 & N_8(\xi, \eta, \zeta = 1) & 0 \\ 0 & 0 & N_8(\xi, \eta, \zeta = 1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^e(\xi, \eta) \cos \theta^e(\xi, \eta) \\ p^e(\xi, \eta) \sin \theta^e(\xi, \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} |J_s(\xi, \eta)| d\xi d\eta$$

Avec

$$\langle N(\xi, \eta, \zeta = 1) \rangle = \frac{1}{4} \langle 0:0:0:0:(1-\xi)(1-\eta):(1+\xi)(1-\eta):(1+\xi)(1+\eta):(1-\xi)(1+\eta) \rangle$$

$$p^e \approx \tilde{p}^e = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\xi, \eta, \zeta = 1) p_i = \langle N(\xi, \eta, \zeta = 1) \rangle \{p_n\}$$

$$\theta^e \approx \tilde{\theta}^e = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\xi, \eta, \zeta = 1) \theta_i = \langle N(\xi, \eta, \zeta = 1) \rangle \{ \theta_n \}$$

- Cas d'un problème tridimensionnel en coordonnées cylindriques

$$\left\{ \begin{aligned} [k_e] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [J]^T [B(r, \theta, z)]^T [H] [B(r, \theta, z)] [J] r dr d\theta dz \\ \{f_e\} &= \int_{S_i^e} [N(\theta, z)]^T \begin{Bmatrix} f_{s_r} \\ f_{s_\theta} \\ f_{s_z} \end{Bmatrix} r d\theta dz = \int_{S_i^e} [N(\theta, z)]^T \begin{Bmatrix} p^e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} r d\theta dz \end{aligned} \right. \quad (h-10)$$

Avec

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,r} & 0 & 0 & N_{2,r} & 0 & 0 & N_{3,\theta} & 0 \\ \frac{1}{r} N_1 & \frac{1}{r} N_{1,\theta} & 0 & \frac{1}{r} N_2 & \frac{1}{r} N_{2,\theta} & 0 & \frac{1}{r} N_3 & \frac{1}{r} N_{3,\theta} \\ 0 & 0 & N_{1,z} & 0 & 0 & N_{2,z} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} N_{1,\theta} & -\frac{1}{r} N_{1,r} + N_{1,r} & 0 & \frac{1}{r} N_{2,\theta} & -\frac{1}{r} N_2 + N_{2,r} & 0 & \frac{1}{r} N_{3,\theta} & -\frac{1}{r} N_3 + N_{3,r} \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,r} & N_{2,z} & 0 & N_{2,r} & N_{3,z} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & \frac{1}{r} N_{1,\theta} & 0 & N_{2,z} & \frac{1}{r} N_{2,\theta} & 0 & N_{3,z} \\ 0 & N_{4,r} & 0 & 0 & N_{5,r} & 0 & 0 & N_{6,r} \\ 0 & \frac{1}{r} N_4 & \frac{1}{r} N_{4,\theta} & 0 & \frac{1}{r} N_5 & \frac{1}{r} N_{5,\theta} & 0 & \frac{1}{r} N_6 \\ N_{3,z} & 0 & 0 & N_{4,z} & 0 & 0 & N_{5,z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} N_{4,\theta} & -\frac{1}{r} N_4 + N_{4,r} & 0 & \frac{1}{r} N_{5,\theta} & -\frac{1}{r} N_5 + \frac{1}{r} N_{5,r} & 0 & \frac{1}{r} N_{6,\theta} \\ N_{3,r} & N_{4,z} & 0 & N_{4,r} & N_{5,z} & 0 & N_{5,r} & N_{6,z} \\ \frac{1}{r} N_{3,\theta} & 0 & N_{z,z} & \frac{1}{r} N_{4,\theta} & 0 & N_{5,z} & \frac{1}{r} N_{5,\theta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{7,r} & 0 & 0 & N_{8,r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} N_{6,\theta} & 0 & \frac{1}{r} N_7 & \frac{1}{r} N_{7,\theta} & 0 & \frac{1}{r} N_8 & \frac{1}{r} N_{8,\theta} & 0 \\ 0 & N_{6,z} & 0 & 0 & N_{7,z} & 0 & 0 & N_{8,z} \\ -\frac{1}{r} N_6 + N_{6,r} & 0 & \frac{1}{r} N_{7,\theta} & -\frac{1}{r} N_r + N_{7,r} & 0 & \frac{1}{r} N_{8,\theta} & -\frac{1}{r} N_8 + N_{8,r} & 0 \\ 0 & N_{6,z} & N_{7,z} & 0 & N_{7,r} & N_{8,z} & 0 & N_{8,r} \\ N_{6,z} & \frac{1}{r} N_{6,\theta} & 0 & N_{7,z} & \frac{1}{r} N_{7,\theta} & 0 & N_{8,z} & \frac{1}{r} N_{8,\theta} \end{bmatrix}$$

Sur l'élément de référence  $V^r$ , les relations (h-10) prennent la formule suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} [k_e] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi)]^T [H] [B(\xi)] r(\xi) \det J(\xi) d\xi d\eta d\zeta \\ \{f_e\} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta, \zeta = 1)]^T \begin{Bmatrix} f_{s_r} \\ f_{s_\theta} \\ f_{s_z} \end{Bmatrix} r(\xi, \eta, \zeta = 1) |J_s(\xi, \eta)| d\xi d\eta \end{aligned} \right. \quad (h-11)$$

Où :  $\det J$  est le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation géométrique définie par :

$$[J] = \begin{bmatrix} r_{,\xi} & \theta_{,\xi} & z_{,\xi} \\ r_{,\eta} & \theta_{,\eta} & z_{,\eta} \\ r_{,\zeta} & \theta_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec ; } r(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) r_i = \langle \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{r_n\}$$

$$\theta(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) \theta_i = \langle \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{\theta_n\}$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) z_i = \langle \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{z_n\}$$

Les opérateurs de dérivation se transforment comme suit (dérivation en chaîne) :

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial r} = \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \theta} = \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial z} = \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

Ou encore :

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial r} = j_{11} \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} + j_{12} \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} + j_{13} \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \theta} = j_{21} \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} + j_{22} \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} + j_{23} \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial z} = j_{31} \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} + j_{32} \frac{\partial(\dots)}{\partial \eta} + j_{33} \frac{\partial(\dots)}{\partial \zeta}$$

$$J_s = \left[ (\theta_{,\xi} z_{,\eta} - \theta_{,\xi} \eta_{,\eta})^2 + (z_{,\xi} r_{,\eta} - r_{,\xi} z_{,\eta})^2 + (r_{,\xi} \theta_{,\eta} - \theta_{,\xi} r_{,\eta})^2 \right]^{1/2}$$

### 3. Evaluation des matrices élémentaires : Quadrature de Gauss-Legendre

Les coefficients de matrices élémentaires sont calculés par intégration sur la géométrie d'un élément. Lorsque les expressions à intégrer se présentent sous forme polynomiale, l'intégration peut alors être effectuée analytiquement. Dans le cas où la géométrie de l'élément réel est complexe (la matrice jacobienne est fonction de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) ou lorsque les

termes à intégrer ne se présentent plus sous forme polynomiale simple, on utilise des techniques d'intégration numérique telle que la quadrature de Gauss-Legendre.

Sur l'élément de référence, les matrices élémentaires se présentent sous la forme générale :

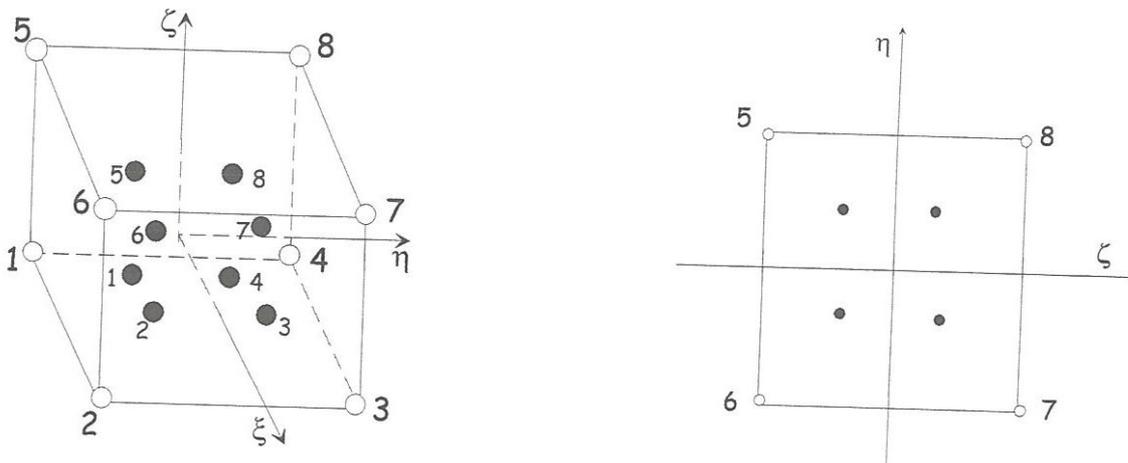
$$\begin{cases} [k_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi)]^T [H][B(\xi)] \det J(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [k_\xi] d\xi \\ \{f_e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N(\xi, \eta)]^T \{f_s(\xi, \eta)\} J_s(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{f_\zeta\} d\xi d\eta \end{cases} \quad (h-12)$$

La formule d'intégration numérique de Gauss permet d'évaluer les matrices  $[k_e]$  et  $\{f_e\}$  sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} [k_e] = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3} W_i W_j W_k [k_\xi(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] \\ \{f_e\} = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j \{f_\xi(\xi_i, \eta_j)\} \end{cases} \quad (h-13)$$

Où :  $r_1, r_2, r_3$  sont respectivement les nombres de points d'intégration dans les directions  $\xi, \eta, \zeta$ . Le nombre total des points d'intégration est égale à  $r_1 \times r_2 \times r_3$ .

Les points d'intégration choisis pour l'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire et du vecteur sollicitation élémentaire sont indiqués sur les figures h-3 dans le cas de problèmes tridimensionnels.



a) schéma (2 x 2 x 2) points pour le calcul de  $[k_e]$

b) schéma (2 x 2) points pour le calcul de  $\{f_e\}$

○ nœuds géométriques    ● point d'intégration de Gauss

**Fig.h-3 :** choix des points d'intégration de Gauss pour un problème à trois dimensions.

Les coordonnées des points d'intégration et leurs poids dans le cas d'une intégrale simple sont donnés dans le tableau h-3.

**Tableau h-3 :** valeurs des paramètres de la quadrature de Gauss à une dimension

Nombre de points d'intégration de Gauss r	Coordonnées des points d'intégration $\xi_i$	Poids $w_i$	Erreur $E$	Degré max. des polynômes $m = 2r - 1$
1	0	2	$\frac{1}{6} \frac{d^2 f}{d\xi^2}$	1
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\approx 0.7 \times 10^{-2} \times \frac{d^4 f}{d\xi^4}$	3
3	$0$ $\pm \sqrt{3/5}$	8/9 5/9	$\approx 0.6 \times 10^{-4} \times \frac{d^6 f}{d\xi^6}$	5

#### 4. Formule globale

La technique d'assemblage permet de construire la forme intégrale globale du problème élasto-statique :

$$W = \sum_{e \geq 1} \tilde{W}^e = 0 \quad (\text{h-14})$$

Soit :

$$\tilde{W} = \langle \delta U_n \rangle ([K] \{U_n\} - \{F\}) = 0 \quad \forall \langle U_n \rangle \quad (\text{h-15})$$

Avec :

$$[K] = \sum_{e=1}^{ne} [k^e]$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{ne} \{f^e\}$$

A : opérateur d'assemblage

[K] : matrice de rigidité globale ayant une structure de bande

{F} : vecteur sollicitation global

{U<sub>n</sub>} : vecteur regroupant tous les D.D.L. de la structure.

Après introduction des conditions aux limites sur les déplacements, le vecteur solution {U<sub>n</sub>} est obtenu en inversant le système d'équations algébriques linéaires suivant :

$$[K] \{U_n\} = \{F\} \quad \forall \langle \delta U_n \rangle \quad (\text{h-16})$$

La connaissance du vecteur déplacement global permet de calculer les déformations au centre de chaque élément en appliquant les relations déformations-déplacements.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. V. K., Stokes, Couple stresses in fluids, *The physics fluids*, 1966, volume 9, pages 1709-1715.
2. T.T, Ariman, et N.D., Sylvester, Microcontinuum fluid mechanics, *A review, Int. J. Eng. Sci.*, 1973, volume 11, pages 905-930.
3. T.T, Ariman, et N. D., Sylvester, Application of micro continuum fluid mechanics, *J. Eng. Sci.*, 1974, volume 12, pages 273-293.
4. D. R., Oliver, Load enhancement effects due to polymer thickening in a short model journal bearing, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 1988, volume 30, pages 185-196.
5. R. S., Gupta, et L. G., Sharma, Analysis of couple stress lubricant in hydrostatic thrust bearing, *wear*, 1988, volume 125, Issue 3, pages 257-269.
6. N. M., Bujurke, et N. G., Naduvinamani, On the performance of narrow porous journal bearing lubricated with couple stress fluid, *Acta Mech.* 1991, volume 86, pages 179-191.
7. J. R., Lin, static characteristics of rotor journal bearing system lubricated with couple stress fluids, *Computers & Structures*, 1997, Volume 62, No 1, pages 175 181.
8. J. R., Lin, Squeeze film characteristics of long partial journal bearings lubricated with couple-stress fluids, *Tribology international*, 1997, Volume 30. No.1. pages 53-58.
9. J. R., Lin, Effects of couple stresses on the lubrication of finite journal bearings, *Wear* 206, 1997, p. 171-178.
10. J. R., Lin, Squeeze film characteristics of finite journal bearings: couple-stress fluid model, *Tribology Int.*, 1998, volume 31, issue 4, page 201-207.
11. J. R., Lin, Static and dynamic characteristics of externally pressurized circular bearings lubricated with couple-stress fluids, *Tribology Int.*, 1999, volume 32, page 207-216.
12. J. R., Lin, Linear stability analysis of a rotor-bearing system: couple-stress fluid model, *Comput. Structures*, 2000, volume 79, pages 801-809.
13. N.B. Naduvinamani, P.S. Hiremath, et G. Gurubasavaraj, Squeeze film lubrication of a short porous journal bearing with couple stress fluids, *Tribology International*, 2001, volume 34, pages 739-74.
14. N.B., Naduvinamani, P.S. Hiremath, et G. Gurubasavaraja, Surface roughness effects in a short porous journal bearing with a couple stress fluid, *Fluid Dynamics Research*, 2002, volume 31, pages 333-354.
15. Hsiu-Lu Chiang, Cheng-Hsing Hsu, et Jaw-Ren Lin, Lubrication performance of finite journal bearings considering effects of couple stresses and surface roughness, *Tribology International*, 2004, volume 37, issue 4, pages 297-307.
16. Yan-Yan Ma, Wei-Hua Wang, et Xian-Hua Cheng, A study of dynamically loaded journal bearings lubricated with non-Newtonian couple stress fluids, *Tribology Letters*, July 2004, Vol. 17, No. 1, pages 69-74.

17. H.-L. Chiang, J.-R. Lin, C.-H. Hsu, et Y.-P. Chang, Linear stability analysis of a rough short journal bearing lubricated with non-Newtonian fluids, *Tribology Letters*, November 2004, Vol. 17, No. 4. Pages 867-877.
18. L., Won-Hion, L., Rong-Fan, CH., Rean-Der, et J. R., Lin, linear stability analysis of long journal bearing : couple stress fluid model, *Industrial lubrication and tribology* 2005, Vol 57, Issue 1, pages 21-27.
19. N.B. Naduvinamani, et A. Siddangouda, Effect of surface roughness on the hydrodynamic lubrication of porous step-slider bearings with couple stress fluids, *Tribology International*, 2002, volume 40, pages 780-793.
20. Cai-Wan Chang-Jiana, et Chao-Kuang Chen, Bifurcation analysis of flexible rotor supported by couple-stress fluid film bearings with non-linear suspension systems, *Tribology International*, 2008, volume 41, p. 367-386.
21. Cheng-Ying Lo, et Cai-Wan Chang-Jian, Nonlinear dynamic of flexible rotor supported by turbulent bearing with couple stress fluid, *Chaos, solitions & Fractals*, august 2008, Vol 37, Issue 4, pages 1002-1024.
22. J. Bouyer, Etude des performances thermoélastohydrodynamiques de paliers soumis à des conditions sévères, *thèse de Doctorat, Université de Poitiers, octobre 2003*.
23. N. C. Das, Elastohydrodynamic Lubrication Theory of Line Contacts : Couple Stress Fluid Model, *Tribology Transactions*, 2007, volume 40, issue 2, pages 353-359.
24. U. M., Mokhiamer, W. A., Crosby, et H. A., El- Gamal, A study of a journal bearing lubricated by fluids with couple-stress considering the elasticity of the liner. *Wear* 1999, volume 224, pages 194-201.
25. A. A. Elsharkawy, et L. H. Guedouar, An inverse method for finite journal bearings lubricated with couple stress fluids, *Tribology International*, 2001, volume 34, pages 107-118.
26. V.P. Sukumaran Nair, et K. Prabhakaran Nair, Finite element analysis of elastohydrodynamic circular journal bearing with micropolar lubricants, *Finite Elements in Analysis and Design*, 2004, volume 41, p. 75-89.
27. K. Prabhakaran Nair, V.P. Sukumaran Nair, et N.H. Jayadas, Static and dynamic analysis of elastohydrodynamic elliptical journal bearing with micropolar lubricant, *Tribology International*, 2007, volume 40, pages 297-305.
28. A.A. Elsharkawy, Effects of lubricant additives on the performance of hydrodynamically lubricated journal bearings, *Tribology Letters*, January 2005, Vol. 18, No.1, pages 63-73.
29. M., Lahmar, Elasto-hydrodynamic analysis of double-layered journal bearings lubricated by couple-stress fluids, *Journal of Engineering Tribology, Proceedings of the IMech E, Part J*, April 2005, Vol. 219, No J2, pages 145-171.
30. A. A. Elsharkawy, et L. H. Guedouar, The effects of surface irregularities on the performance characteristics of flexible finite journal bearings lubricated with couple stress fluids, *march 2006, volume 15, issue 1, pages 51-72*.

31. A. Chapkov, Etude des contacts ElastoHydroDynamiques lubrifiés avec un fluide non newtonien, *thèse de Doctorat, laboratoire de Mécaniques des Contacts et des Solides de l'INSA de LYON, septembre 2006.*
32. S., Das, S. K., Guha, et A. K., Chattopadhyay, On the steady-state performance of misaligned hydrodynamic journal bearings lubricated with micropolar fluids, *Tribology Int.*, 2002, volume 35, pages 201-210.
33. Jun Sun, et Gui Changlin, Hydrodynamic lubrication analysis of journal bearing considering misalignment caused by shaft deformation, *Tribology International*, 2004, volume 37, pages 841-848.
34. A.M. El-Butch et N.M. Ashour, Transient analysis of misaligned elastic tilting-pad journal bearing, *Tribology International*, 2005, volume 38, pages 41-48.
35. Yansong, W. Jang, et W. Chih, A mixed-EHL analysis of effects of misalignment and elastic deformations on the performance of a coupled journal-thrust system, *Tribology Int.*, 2006, volume 39, pages 281-289.
36. A. Kabouya, M. Lahmar et B. Bou-Saïd, Étude des paliers lisses mésalignés lubrifiés par des fluides à couple de contrainte, *Mécanique & Industries*, 2007, volume 8, pages 577-595.
37. Tanner Roger I, Engineering Rheology, *Oxford Engineering Science Series, 2<sup>nd</sup> Edition*, 2000.
38. K., Malal, Contribution à l'étude de l'influence de la rugosité et des effets non newtoniens dans les contacts sévères lubrifiés, *thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, mars 2003.*
39. B., Najji, calculs des contacts lubrifiés à l'aide d'un fluide non newtonien : méthodes numériques nouvelles, *Thèse de Docteur-Ingénieur, soutenue à l'INSA de Lyon le 2 juillet 1985, numéro d'ordre : IDI 8516.*
40. R.B., Bird, R.C., Armstrong, et O., Hassager, Dynamics of polymeric liquid, *Volume 1, Fluid Mechanics, New-York, John Wiley & Sons, 1977.*
41. R.B., Bird, C.F., Curtiss, R.C., Armstrong, et O., Hassager, Dynamics of polymeric liquids, *Volume 2, Kinetic Theory, New-York, John Wiley & Sons, 1977.*
42. R.B., Bird, Use of Simple Molecular Models in the Study of the Mechanical Behavior of Solutions of Flexible Macromolecules, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1979, Vol. 7, pages 235.
43. R.B., Bird, P.J., Dotson, et N.L., Johnson, Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain mode, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1980, volume 7, pages 213-235.
44. H., Boucherit, Comportement dynamique des paliers fluides de machines tournantes : Analyses linéaire et non linéaire, *Mémoire de magister, Département de Génie Mécanique, faculté des Sciences et de l'Ingénierie, Université de Guelma, 2002.*

45. N., Nicolas, Les paliers hydrodynamiques soumis à un torseur de forces quelconque, *Thèse de Docteur Ingénieur, Lyon, 1972.*
46. A. A., Elsharkawy, et L. H., Guedouar, An inverse solution for finite journal bearings lubricated with couple stress fluids, *Tribology Int.*, 2001, volume 34, pages 107-118.
47. H.W., Swift, The stability of lubricating films in journal bearings, *Proc. Inst. Civil Eng.*, 233, Pt 1, pages 267-322, 1931.
48. W., Stieber, S., Das, VDI, Berlin, 1933.
49. A., Chapkov, Etude des contacts élastohydrodynamiques lubrifiés avec un fluide non newtonien, *Thèse de Docteur-Ingénieur, soutenue à l'INSA de Lyon le 20 juillet 2006, numéro d'ordre : 2006-ISAL-0050.*
50. B.L., Newkirk, et L.P., Grobel, Oil-film whirl-A nonwhirling bearing, *Tans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 59, 607, 1934.
51. A. C., Hagg, The influence of oil-film journal bearings on the stability of rotating machines, *JAM* 13, T. 68, A-211-20, 14, 69, A-77-8, 1947.
52. J. P., Den Hartog, Vibrations mécaniques, *Dunod, Paris, 1960.*
53. A., Nouar, Analyse des contraintes et des déformations des tubes et secteurs cylindriques : application à la résolution des problèmes d'interaction fluide-structure dans les paliers hydrodynamiques, *Mémoire de magister, Université de Guelma, 2005.*

## PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

- a demi-grand axe de l'ellipse, (m)  
 $a_{ij}$  coefficients de raideur du palier, (N/m)  
 $A_{ij}$  coefficients de raideur adimensionnés,  $A_{ij} = \frac{a_{ij}}{\mu\omega L(R/C)^3}$ ;  $(i,j) = (\varepsilon, \phi)$   
b demi-petit axe de l'ellipse, (m)  
 $b_{ij}$  coefficients d'amortissement du palier, (N.s/m)  
 $B_{ij}$  coefficients d'amortissement adimensionnés,  $B_{ij} = \frac{b_{ij}}{\mu L(R/C)^3}$ ;  $(i,j) = (\varepsilon, \phi)$   
 $\vec{B}$  vecteur force par unité de masse, (N/kg)  
C jeu radial du palier, (m)  
 $C_a$  couple de frottement sur l'arbre, (N.m)  
 $\vec{C}$  vecteur couple de volume par unité de masse, (N.m/kg)  
 $\vec{C}_a$  couple de frottement adimensionné sur l'arbre,  $\vec{C}_a = \left( \frac{C}{\mu\omega R^3 L} \right) C_a$   
 $C_c$  couple de frottement sur le coussinet, (N.m)  
 $\vec{C}_c$  couple de frottement adimensionné sur le coussinet,  $\vec{C}_c = \left( \frac{C}{\mu\omega R^3 L} \right) C_c$   
 $\vec{C}_d$  coefficient de déformation élastique adimensionné,  $\vec{C}_d = \frac{\mu\omega(R/C)^3}{E}$   
d amplitude du mésalignement,  $d = C\delta$ , (m)  
D diamètre du palier,  $D = 2R$ , (m)  
 $D_m$  degré du mésalignement,  $D_m = \delta/\delta_m$   
 $D_{ij}$  tenseur des taux de déformation,  $D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$   
E module d'Young, (Pa)  
e excentricité de fonctionnement, (m)  
 $e_0$  excentricité de fonctionnement statique, (m)  
 $e_b$  excentricité du balourd, (m)  
 $e_{ijk}$  tenseur de permutation d'ordre trois  
 $f_a, f_c$  nombre de frottement sur l'arbre et le coussinet,  $(f_a, f_c) = \frac{(\vec{C}_a, \vec{C}_c)}{\vec{W}_0}$   
 $F_\varepsilon, F_\phi$  composantes de la portance hydrodynamique, (N)  
 $\tilde{F}_\varepsilon, \tilde{F}_\phi$  composantes de la portance hydrodynamique adimensionnées,  $(\tilde{F}_\varepsilon, \tilde{F}_\phi) = \frac{(F_\varepsilon, F_\phi)}{\mu\omega RL \left( \frac{R}{C} \right)^2}$   
g accélération de la pesanteur,  $(m/s^2)$   
G module de cisaillement du fluide lubrifiant, (Pa)  
h épaisseur du film lubrifiant, (m)  
H constante de raideur Hookéenne du connecteur  
 $\tilde{h}$  épaisseur du film adimensionnée,  $(\tilde{h} = h/C)$   
 $h_0$  épaisseur du film lubrifiant statique correspondre à la position d'équilibre statique

- $(\varepsilon_0, \phi_0)$ , (m)
- $\tilde{h}_0$  épaisseur du film lubrifiant statique adimensionné,  $\tilde{h}_0 = h_0/C$
- $\tilde{h}_1$  amplitude du déplacement du centre de l'arbre dû à la vibration,  $\tilde{h}_1 = \varepsilon_1 \cos \theta + \varepsilon_0 \phi_1 \sin \theta$
- k constante de Boltzman, (Pa.K<sup>-1</sup>)
- $K_{ij}$  tenseur des taux de rotation
- L longueur du palier, (m)
- $L_0$  opérateur de compliance,  $L_0 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{t_h}{E}$ , (m/Pa)
- $\tilde{L}_0$  opérateur de compliance adimensionné,  $\tilde{L}_0 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \times \tilde{C}_d \times \tilde{t}_h$
- $L_{mx}, L_{mz}, L_{px}, L_{pz}$  termes représentant l'élasticité du fluide lubrifiant
- M masse de l'arbre affectée au palier, (kg)
- $\tilde{m}$  masse adimensionnée,  $\tilde{m} = \frac{M\omega^2 C}{W_0}$
- $m_c$  masse critique, (kg)
- $\tilde{m}_c$  masse critique adimensionnée,  $\tilde{m}_c = \frac{m_c C \omega^2}{W_0}$
- $M_0$  moment de mésalignement,  $M_0 = \sqrt{(M_\varepsilon)^2 + (M_\phi)^2}$ , (N.m)
- $M_\varepsilon, M_\phi$  composantes du moment de mésalignement, (N.m)
- $\tilde{M}_0$  moment de mésalignement adimensionné,  $\tilde{M}_0 = M_0 / \mu \omega R L^2 (R/C)^2$
- $M_{ij}$  tenseur de couples de contraintes
- n nombre volumique des haltères dans le solvant
- $N_\theta, N_z$  nombres de mailles respectivement suivant  $\theta$  et  $\tilde{z}$
- $O_a$  centre de l'arbre,
- $O_c$  centre du coussinet,
- $O_{a0}$  position d'équilibre statique,  $(\varepsilon_0, \phi_0)$
- p pression dans le film lubrifiant, (Pa)
- $\tilde{p}$  pression adimensionnée,  $\tilde{p} = \frac{p}{\mu \omega (R/C)^2}$
- $p_0$  pression statique dans le film lubrifiant, (Pa)
- $\tilde{p}_0$  pression statique adimensionnée dans le film lubrifiant,  $\tilde{p}_0 = \frac{p_0}{\mu \omega (R/C)^2}$
- $\tilde{p}_\varepsilon, \tilde{p}_\phi$  pressions dynamiques complexes adimensionnées,  $(\tilde{p}_\varepsilon, \tilde{p}_\phi) = \left( \frac{\partial \tilde{p}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \tilde{p}_\phi}{\partial \phi} \right)$
- $\tilde{p}_{max}$  pression maximale adimensionnée dans le film lubrifiant
- $\tilde{Q}_{moy}$  débit volumique moyen total adimensionné,  $\tilde{Q}_{moy} = |\tilde{Q}_+| + |\tilde{Q}_-|$
- $\tilde{Q}_+, \tilde{Q}_-$  débits moyens volumiques adimensionnés aux extrémités du palier
- R rayon de l'arbre, (m)
- $R_0$  constante désignant l'extension limite acceptable de l'haltère, (m)
- $R_c$  rayon du coussinet, (m)
- $R_m$  nombre de Reynold moyen,  $R_m = (\omega \rho C R) / \mu$

- $t$  temps, (s)  
 $T$  température du fluide lubrifiant, K  
 $\tilde{t}$  temps adimensionné,  $\tilde{t} = \omega t$   
 $t_h$  épaisseur de la couche élastique du revêtement de surface, (m)  
 $\tilde{t}_h$  épaisseur de la couche élastique adimensionnée,  $\tilde{t}_h = t_h / R$   
 $U_r$  déplacement radial, (m)  
 $\tilde{U}_r$  déplacement radial adimensionné,  $\tilde{U}_r = U_r / C$   
 $u, v, w$  composantes de vecteur vitesse d'écoulement de lubrifiant, (m/s)  
 $u_{\text{moy}}, w_{\text{moy}}$  vitesses moyennes de l'écoulement du fluide lubrifiant, (m/s)  
 $\tilde{u}_{\text{moy}}, \tilde{w}_{\text{moy}}$  vitesses moyennes d'écoulement adimensionnées,  $\tilde{u}_{\text{moy}} = \frac{u_{\text{moy}}}{\omega R}$ ,  $\tilde{w}_{\text{moy}} = \frac{L w_{\text{moy}}}{\omega R^2}$   
 $W_0$  poids du rotor affecté au palier,  $W_0 = Mg$ , (N)  
 $\tilde{W}_0$  portance hydrodynamique adimensionnée,  $\tilde{W}_0 = (\tilde{F}_e^2 + \tilde{F}_\phi^2)^{1/2}$   
 $W_b$  charge dynamique due au balourd (excitation dynamique synchrone),  $W_b = Me_b \omega^2$   
 $X, Y$  coordonnées du centre de l'arbre, (m)  
 $\tilde{X}, \tilde{Y}$  coordonnées du centre de l'arbre adimensionnées,  $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (X, Y) / C$   
 $\tilde{x}_d, \tilde{y}_d$  déplacement du centre de l'arbre adimensionné dans la section droite du palier  
 $\tilde{x}_g, \tilde{y}_g$  déplacement du centre de l'arbre adimensionné dans la section gauche du palier  
 $x', y'$  composantes de la vitesse de déplacement du centre de l'arbre, (m/s)  
 $\tilde{x}', \tilde{y}'$  vitesses adimensionnées,  $(\tilde{x}', \tilde{y}') = \frac{(x', y')}{C\omega}$   
 $x'', y''$  composantes de l'accélération du centre de l'arbre, (m/s<sup>2</sup>)  
 $\tilde{x}'', \tilde{y}''$  composantes de l'accélération adimensionnées,  $(\tilde{x}'', \tilde{y}'') = \frac{(x'', y'')}{C\omega^2}$   
 $z$  coordonnée axiale du palier, (m)  
 $\tilde{z}$  coordonnée axiale adimensionnée,  $\tilde{z} = z / L$   
 $Z_{e\phi} = A_{e\phi} + i\gamma B_{e\phi}$  impédances dynamiques complexes du palier fluide  
 $(O_c, \tilde{X}, \tilde{Y})$  repère fixe lié au coussinet  
 $(O_c, \tilde{e}, \tilde{\phi})$  repère intermédiaire lié à la ligne des centres du palier  
 $\ell$  paramètre des couples de contraintes ou longueur de la chaîne moléculaire des additifs améliorant l'indice de viscosité (VI),  $\ell = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$ , (m)  
 $\tilde{\ell}$  paramètre des couples de contraintes adimensionné,  $\tilde{\ell} = \ell / C$   
 $\varepsilon$  excentricité relative,  $\varepsilon = e / C$   
 $\varepsilon_0$  excentricité relative statique dans la section médiane de palier,  $\varepsilon_0 = e_0 / C$   
 $\varepsilon_b$  excentricité relative du balourd,  $\varepsilon_b = e_b / C$   
 $\eta$  constante physique due à la présence des couples de contraintes, (N.s)  
 $\mu$  coefficient de viscosité du fluide lubrifiant, (Pa.s)  
 $\mu_0$  viscosité dynamique du fluide à faible taux de cisaillement, (Pa.s)  
 $\mu_s$  viscosité du solvant, (Pa.s)  
 $\beta$  angle de mésalignement, (rad)  
 $\phi$  angle de calage, (rad)  
 $\phi_0$  angle de calage statique, (rad)

- $\varepsilon_1, \phi_1$  amplitudes de perturbation de l'arbre dans le palier,  $\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \ll 1, \frac{\phi_1}{\phi_0} \ll 1\right)$
- $\delta$  mésalignement relatif,  $\delta = d/C$
- $\delta_h$  mésalignement horizontal, (rad)
- $\delta_m$  représente la valeur maximale que peut prendre  $\delta$ ,  $\delta_m = 2\left(\sqrt{1 - \varepsilon_0^2 \sin^2 \beta_0} - \varepsilon_0 |\cos \beta_0|\right)$
- $\delta_v$  mésalignement vertical, (rad)
- $\Omega$  coefficient de sur-relaxation
- $\theta$  coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur la ligne des centres
- $\theta_{c0}$  angle de cavitation, (rad)
- $\omega$  vitesse angulaire de l'arbre, (rad/s)
- $\nu$  coefficient de Poisson de la couche élastique ou du revêtement de surface
- $\nu^*$  pulsation du mouvement vibratoire de l'arbre, (rad/s)
- $\rho$  masse volumique du lubrifiant, ( $\text{kg/m}^3$ )
- $\gamma$  fréquence d'excitation relative,  $\gamma = \nu^* / \omega$
- $\gamma_c$  fréquence de fouettement adimensionnée (whirl)
- $\dot{\gamma}_{ij}$  tenseur des contraintes de cisaillement
- $\sigma_{ij}$  tenseur des contraintes,
- $\text{tr}(\overline{\sigma}_{(p)})$  trace de tenseur des contraintes
- $\tau_0$  contrainte de cisaillement de référence, (Pa)
- $\tau_e$  contrainte de cisaillement équivalente définie à l'aide du critère de Von Mises,
- $$\tau_e = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ji}}, \text{ (Pa)}$$
- $\tau_p$  tenseur des contrainte de cisaillement des polymères solubles dans le fluide lubrifiant, (Pa)
- $\tau_s$  tenseur des contrainte de cisaillement du solvant (fluide de base), (Pa)
- $\lambda_H$  constante de temps, (s)
- $\Theta$  taux de dilatation cubique ( $\Theta = D_{kk}$ )
- $\Phi$  concentration volumique des sphères rigides dans le solvant newtonien
- $\Phi_0$  fonction de dissipation visqueuse, ( $\text{W/m}^3$ )
- $\Phi_m$  concentration maximale admissible
- $\delta_{ij}$  symbole de Kronecker ou tenseur unité
- $\mathcal{P}_0$  puissance dissipée, (W)
- $\tilde{\mathcal{P}}_0$  puissance dissipée adimensionnée,  $\tilde{\mathcal{P}}_0 = \left(\frac{C}{\mu \omega^2 R^3 L}\right) \mathcal{P}_0$
- [ ] matrice,
- { } vecteur colonne
- \langle \rangle vecteur ligne,  $\langle \rangle \equiv \{ \}^T$
- $\frac{\delta(\cdot)}{\delta}$  opérateur qui spécifie la dérivée codeformationnelle contravariante

## LISTE DES ILLUSTRATIONS

### CHAPITRE II

<b>Fig.II-1:</b> <i>schéma de contact</i>	17
<b>Fig.II-2:</b> <i>Modèle de Maxwell généralisé</i>	20
<b>Fig.II-3:</b> <i>Modèle de l'Haltère</i>	20
<b>Fig.II-4:</b> <i>Géométrie et cinématique du contact selon la théorie de Reynolds</i>	24
<b>Fig.II-5:</b> <i>Schématisation des efforts de surface et de volume agissant sur un élément de fluide polaire</i>	29
<b>Fig.II-6:</b> <i>L'origine du système d'axes confondu avec la paroi 1</i>	32
<b>Fig.II-7:</b> <i>Schéma d'un Palier lisse</i>	36
<b>Fig. II-8:</b> <i>Section droite du palier développé</i>	37
<b>Fig.II-9:</b> <i>configuration d'un palier mésaligné</i>	40
<b>Fig.II-10:</b> <i>Conditions aux limites liées à l'écoulement du lubrifiant</i>	42

### CHAPITRE III

<b>Fig.III-1:</b> <i>Discrétisation par la méthode des différences finies de la circonférence du palier</i>	48
<b>Fig.III-2:</b> <i>Comparaison de champ de pression hydrodynamique statique adimensionnée dans le palier pour différents fluides lubrifiants (<math>\epsilon_0 = 0.7</math>)</i>	52
<b>Fig.III-3:</b> <i>variation de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différents fluides lubrifiant</i>	52
<b>Fig.III-4:</b> <i>Variations de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative statique pour différents fluides lubrifiants</i>	53
<b>Fig.III-5:</b> <i>Comparaison de champ de pression adimensionnée dans le palier pour différents fluides lubrifiants (<math>\epsilon_0 = 0.7</math>)</i>	54
<b>Fig.III-6:</b> <i>variation de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différents fluides lubrifiant</i>	54
<b>Fig.III-7:</b> <i>Variations de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative statique pour différents fluides lubrifiants</i>	55

### CHAPITRE VI

<b>Fig.IV-1:</b> <i>Systèmes d'axes et notations</i>	57
<b>Fig.IV-2:</b> <i>Champ de pression hydrodynamique calculé dans le demi-palier</i>	69
<b>Fig.IV-3:</b> <i>Maillage du demi-tube cylindrique par éléments hexaédriques à 8 nœuds</i>	69
<b>Fig.IV-4:</b> <i>Variations circonférentielles du champ de déplacement radial dans le plan médian du tube constitué d'un matériau compressible (<math>E = 3 \text{ GPa}</math>, <math>\nu = 0.36</math>)</i>	70
<b>Fig.IV-5:</b> <i>présentation de champ de pression statique adimensionné (<math>\tilde{\ell} = 0.0</math> et <math>\epsilon_0 = 0.80</math>)</i>	72
<b>Fig.IV-6:</b> <i>présentation de champ de pression statique adimensionné (<math>\tilde{\ell} = 0.4</math> et <math>\epsilon_0 = 0.80</math>)</i>	73

<b>Fig.IV-7:</b> Variations de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement	75
<b>Fig.IV-8:</b> Variations de la puissance dissipée adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement	75
<b>Fig.IV-9:</b> Variations de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement	78
<b>Fig.IV-10:</b> Variation du débit de fuite moyen adimensionné en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètre des couples de contraintes et paramètres de mésalignement	79
<b>Fig.IV-11:</b> Répartition des vitesses moyennes d'écoulement et lignes de courant dans le film lubrifiant pour une excentricité relative statique $\varepsilon_0 = 0.80$	81
<b>Fig.IV-12:</b> Variations du moment de mésalignement adimensionné en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement	82
<b>Fig.IV-13:</b> Variations des coefficients dynamiques de raideur adimensionnés en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement	84
<b>Fig.IV-14:</b> Variations des coefficients dynamiques d'amortissement adimensionnés en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement	86
<b>Fig.IV-15:</b> Variations de la masse critique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement	87
<b>Fig.IV-16:</b> Variations de la fréquence de fouettement adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement	88
<b>Fig.IV-17:</b> Comparaison des orbites linéaires du centre de l'arbre pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement	90
<b>Fig.IV-18:</b> Variations des déplacements adimensionnés du centre de l'arbre en fonction du temps sans dimension pour différentes valeurs de paramètres de couples de contraintes et de mésalignement	91

## CHAPITRE V

<b>Fig.V-1:</b> Schéma du système rotor – palier pour l'analyse dynamique non linéaire	95
<b>Fig.V-2:</b> Section droite du palier et bilan des forces statiques et dynamique agissant sur l'arbre	95
<b>Fig.V-4:</b> Configuration géométrique d'un palier mésaligné	97
<b>Fig.V.5:</b> Trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier ( $\delta_h = 0, \delta_v = 8 \cdot 10^{-4}$ rad ) (N=3000 rpm)	101

<b>Fig.V.6:</b> Trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier ( $\delta_h = 8 \cdot 10^{-4}$ rad, $\delta_v=0$ ) (N=3000 rpm)	102
<b>Fig.V.7:</b> Trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier ( $\delta_h = 0$ , $\delta_v= 8 \cdot 10^{-4}$ rad) (N=6000 rpm)	103
<b>Fig.V.8:</b> Trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier ( $\delta_h = 8 \cdot 10^{-4}$ rad, $\delta_v = 0$ ) (N=6000 rpm)	104
<b>Fig.V.9:</b> Variations de la hauteur minimale du film dans les trois sections du palier en fonction du temps ( $\delta_h = 8 \cdot 10^{-4}$ rad, $\delta_v=0$ ) (N=3000 rpm)	106
<b>Fig.V.10:</b> Variations de la hauteur minimale du film dans les trois sections du palier en fonction du temps ( $\delta_h = 0$ , $\delta_v= 8 \cdot 10^{-4}$ rad)(N=3000 rpm)	107
<b>Fig.V.11:</b> Variations de la hauteur minimale du film dans les trois sections du palier en fonction du temps ( $\delta_h = 8 \cdot 10^{-4}$ rad, $\delta_v=0$ ) (N=6000 rpm)	108
<b>Fig.V.12:</b> Variations de la hauteur minimale du film dans les trois sections du palier en fonction du temps ( $\delta_h=0$ , $\delta_v = 8 \cdot 10^{-4}$ rad) (N=6000)	109

## TABLE DES MATIERES

<b>Introduction générale</b>	1
<b>Chapitre I : Etude bibliographique sur les paliers hydrodynamiques lubrifiés par des fluides à couple de contraintes (fluides additifs)</b>	
1. Introduction	4
2. Fluides à couples de contraintes ou fluide polaire	5
2.1. Régime Elastohydrodynamique (EHD)	9
2.2. Défaut de mésalignement	12
3. Conclusion	15
<b>Chapitre II : lois de comportement rhéologique des fluides lubrifiants et équations de base de la lubrification hydrodynamique</b>	
1. Introduction	16
2. Lois de comportement rhéologique des huiles lubrifiantes	16
2.1. Suspension de particules sphériques solides : effet de la concentration	18
2.2. Modèle de Maxwell généralisé (approche Macro)	19
2.3. Modèle de l'Haltère (approche Micro-Macro)	20
2.4. Fluide à couples de contraintes ou fluide polaire (approche Micro-Macro)	21
3. Equations de base de la lubrification hydrodynamique par fluides newtonien et viscoélastique non newtonien	22
3.1. Equation de conservation de la masse	22
3.2. Equations d'équilibre	23
3.3. Dérivation de l'équation de Reynolds pour un fluide newtonien	23
3.4. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide viscoélastique : modèle Maxwell	24
3.5. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide viscoélastique : modèle FENE-P	25
3.5.1. Conditions aux limites sur les vitesses	26
3.6. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée pour fluides à couples de contraintes	28
3.6.1. Expression du champ de vitesses d'écoulement de fluide à couples de contraintes	30
3.7. Action du fluide sur les parois du contact	34
4. Expressions des équations de Reynolds modifiées dans le cas d'un palier lisse lubrifié par fluides polymériques ou additives (non newtoniens)	35

4.1. Equations géométriques du film lubrifiant	39
4.1.1. Cas du palier aligné	39
4.1.2. Cas du palier mésaligné	42
4.2. Conditions aux limites sur la pression	41
4.2.1. Conditions liées à l'alimentation et à l'environnement	41
4.2.2. Conditions liées à l'écoulement du fluide lubrifiant	41
5. Ecriture des différentes équations en variables réduites	43
5.1. Equation géométrique adimensionnée	44
6. Conclusion	45
<b>Chapitre III : Étude comparative d'un palier long lubrifié par différents fluides polymériques (additives)</b>	
1. Introduction	46
2. Résolution des équations de Reynolds modifiées	47
2.1. Résolution du système d'équations	49
3. Etude paramétrique	50
4. conclusion	55
<b>Chapitre IV : Comportement dynamique linéaire d'un palier compliant lubrifié par fluide à couples de contraintes</b>	
1. Introduction	56
2. application de la méthode de perturbation	7
3. Etude statique du palier	58
3.1. Portance hydrodynamique et angle de calage du palier	59
3.2. Puissance dissipée	59
3.3. Couple de frottement	60
3.4. Moment de mésalignement	61
3.5. Les vitesses moyennes de l'écoulement et le débit moyen volumique	61
4. Etude dynamique linéaire du palier	62
4.1. Coefficients de raideur et d'amortissement	62
4.2. Système en vibration libre : paramètres de stabilité (fréquence de fouettement et masse critique)	63
4.3. Système en vibrations forcées : réponse à un balourd résiduel	65
5. Schéma de résolution du problème d'interaction fluide-structure	65

5.1. Solution statique du problème d'interaction fluide-structure	65
5.2. Méthode de résolution dans les conditions dynamiques	66
6. Résultats et discussions	66
6.1. Etude paramétrique	67
6.1.1. Validation du Modèle Couche Elastique Mince (MCEM)	68
6.1.2. Effets des déformations élastiques du revêtement sur la distribution de la pression	71
6.1.3. Etude des effets du paramètre des couples de contraintes et du défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier sur les performances statiques et dynamiques linéaires de palier	74
6.1.4. Effets du paramètre des couples de contraintes sur la réponse dynamique du palier	89
8. conclusion	92
<b>Chapitre V: Analyse dynamique non linéaire d'un palier compliant lubrifié par fluide à couples de contraintes</b>	
1. Introduction	94
2. Equations du problème dynamique non linéaire	95
2.1. Equation de Reynolds modifiée en variables sans dimension	95
2.2. Equations du mouvement de l'arbre	97
3. Résolution des équations de mouvement : <i>Détermination de la réponse du palier</i>	98
4. Etude paramétrique	99
4.1. résultat et discussions	100
7. Conclusion	110
<b>Conclusion générale</b>	111
Annexe a : Différentes expressions de la dérivée $\frac{d\tau_{ij}}{dt}$	115
Annexe b: Modèle de l'Haltère (approche Micro-Macro)	117
Annexe c : Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée : modèle Maxwell (fluide viscoélastique)	122
Annexe d : Analyse dimensionnelle des équations de Navier pour un écoulement en film mince	125
Annexe e : Expression des composantes de la vitesse de surface de l'arbre	130
Annexe f : Solution analytique de l'équation de Reynolds pour un palier infiniment long lubrifié par un fluide incompressible isovisqueux	132

Annexe j : Exemple de schéma général de résolution de l'équation de Reynolds modifiée dans le cas d'un palier rigide lubrifié par fluide viscoélastique (modèle FENE-P)	134
Annexe g : Réponse d'un palier hydrodynamique à une excitation synchrone de type balourd	135
Annexe h : formulation des problèmes élasto-statique linéaires par la méthode des éléments finis 3D pour les tubes cylindriques	138
Références bibliographiques	148
Principales notations utilisées	152
Table des illustrations	156
Table des matières	164