République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 08 Mai 1945
– Guelma –
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie
Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER EN MATHÉMATIQUES
ÉCOLE DOCTORALE EN MATHÉMATIQUES

Par
Mr. Mohamed Lakhdar Hadji

Intitulé

Etude des équations de Navier-stokes Stochastiques non homogènes

Dirigé par : Dr M. Z. Aissaoui
Option
Probabilité & statistique

Devant le jury.

PRÉSIDENT	A. Ayadi	*Prof.*	Université d'Oum-Bouaghi
RAPPORTEUR	M. Z. Aissaoui	*M. C.*	Université de Guelma
EXAMINATEUR	M. R. Remita	*M. C.*	Université d'Annaba
EXAMINATEUR	A. Boutaghou	M. C.	Université de Jijel
INVITÉ	N. Boussetila	M. C.	Université de Guelma

Année 2009

Table des matières

Résumé

L'essentiel de notre travail, consiste à étudier l'existence et l'unicité, de la solution des équations, de Navier-Stokes stochastiques et non homogènes. Cette étude, comporte deux approches, dans un premier temps, on démontre l'existence et l'unicité, de la solution des équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes. Selon une méthode classique et directe (méthode de Faedo-Galerkin et le passage à la limite). En partant par le problème, la deuxième approche consiste, à présenter un cadre abstrait, où on démontre l'existence et l'unicité, de la solution pour une classe d'équations non linéaires stochastiques (type Navier-Stokes). englobant les équations de Navier-Stokes stochastiques. Quelques résultats numériques seront présentés, pour appuyer notre étude.

Abstract

The essential of our work, consist on studying the existence and the uniqueness, of the solution of equations, of Navier-Stokes stochastic and no homogeneous.This study, include two approaches, at first, we demonstrate the existence and the uniqueness, of the solution of equations, of Navier-Stokes stochastic no homogeneous, according to a classic and direct method (the method of faedo-Galerkin and the passage to the limit). The second approach consist on presenting an abstract frame, or we demonstrate the existence and the uniqueness, of the solution to a class of nonlinear stochastic equations (type Navier-Stokes), encompassing the stochastic equations of Navier-Stokes. Some numerical results will be presented to support our study.

Remerciements

Mes sincères remerciements à mon directeur de mémoire M. Z. Aissaoui, Maitre de Conférence à l'université de Guelma, pour le sujet trés intéressant qu'il m'a proposé. Sans ses conseils et son suivi continu je ne serais jamais arrivé à ce fruit.

Mes remerciements les plus chers vont aussi à Madame Nouri Fatma Zohra pour sa disponibilité, ses conseils et ses encouragements, pour faire aboutir ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsiuer A. Ayadi, Professeur à l'université d'Oum-Baoughi, pour avoir bien fait d'accepter, de présider le jury.

Je remercie également Monsier M. R. Remita, Maitre de Conférence à l'université d'Annaba, Monsieur N. Boustila, Maitre de Conférence à l'université de Guelma et A. Boutaghou, Maitre de Conférence à l'université de jijel, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et tous ceux que j'ai connus au département de Mathématiques d'Annaba ainsi que Guelma.

Introduction

Discipline ancienne, la première de la physique où le quantitatif a progressivement complété, puis enrichi l'intuition ou le savoir faire, la mécanique a toujours fasciné l'homme, en même temps qu'elle l'a servi ou qu'il a su y avoir recours. Parmi les grands domaines de la mécanique, la mécanique des fluides nous a de tout temps passionnée, qu'il s'agisse des écoulements d'air (les moulins, la marine à voile, puis l'aéronautique bien sûr, ou les mouvements des grandes masses de l'atmosphère) ou d'eau (l'hydraulique, les écoulemens autour des coques, les circulations marines et océaniques.) C'est une science qui sert à comprendre et à décrire l'écoulement de liquides et de gaz et leurs intéractions avec des corps solides. Comme toute discipline ancienne, la mécanique des fluides demande de la part de celui qui s'y intéresse un effort "initiatique" tout à la fois long, puisqu'il y a rançon de l'histoire, beaucoup de choses à assimiler efficacement, de manière à ce que le poids du passé n'empêche pas d'atteindre les champs nouveaux qui sont actuellement défrichés. Cette science repose avant tout sur l'application de lois fondamentales de la mécanique et de la thermodynamique et mis à part les nombreux développements analytiques produits au fil des ans, elIe doit en grande partie son évolution à la compréhension des propriétés des fluides et à un vaste répertoire d'études expérimentales. Elle est vaste et diversifiée, tant par les champs scientifiques qu'elle recouvre que par ses domaines applicatifs.

Presque deux siècles se sont écoulés depuis que le mathématicien anglais Sir George Gabriel Stokes a clarifié la mise en équations des écoulements de fluides visqueux introduites par le mathématicien et ingénieur français Louis Marie Henry Navier à partir des considérations antérieures établies par le mathématicien suisse Leonhard Euler qui n'avait pas pris en compte les effets de viscosité. la modélisation mathématique des équations aux dérivées partielles est devenue un outil indispensable, un moteur puissant de progrès pour les physiciens et les ingénieurs, en effet elle permet d'anticiper et de contrôler le déroulement de phénomènes, sans faire appel à des expériences difficiles et trés coûteuses. L'utilisation de cette modélisation comporte une connaissance approfondie du domaine d'application, combinée à la maîtrise de moyens mathématiques et informatiques. Elle peut être efficace uniquement au sein d'une collaboration interdisciplinaire étroite entre les mathématiciens et les ingénieurs. Dans l'étude théorique des équations de Navier-Stokes, la modélisation mathématique de ces équations a connu au dix-neuvième siècle une avancée considérable et majeure. En 1933 Leray a prouvé les premiers résultats d'existence et d'unicité de solutions. Des résultats fondamentaux dans le même domaine ont été ensuite obtenus par de nombreux mathématiciens. Citons ici les travaux de Jacques-Louis Lions qui est à l'origine du développement actuel de mathématiques appliquées et les contributions fondamentales de Jacques-Louis Lions, en particulier sur les fluides non homogènes et compressibles. Mentionnons que l'étude complète de l'existence et l'unicité des solutions n'est pas encore achevée aujourd'hui, ce qui fait que le système de Navier-Stokes continue à fasciner les mathématiciens. Une question ouverte très importante, est l'existence et l'unicité de solutions classiques globales, de ces équations en trois dimensions en espace, pour des données initiales générales. En ce qui concerne les solutions dites faibles de ces équations, reste à l'heure actuelle encore totalement ouverte la question de régularité globale et d'unicité et ce en dépit de nombreuses tentatives lorsque l'écoulement est compressible et barotrope. On peut à ce stade se poser une question en apparence naïve, au fond pourquoi choisir de travailler sur l'existence et l'unicité de solutions. Une première réponse est purement mathématique : le sujet est en apparence simple, son histoire est riche et il est rempli d'interactions avec divers sujets de mathématiques. Mais, outre la motivation purement mathématique, cette étude a un intérêt plus pratique. Tout d'abord elle permet de valider un modèle mathématique. Si par exemple, les équations issues d'un modèle admettent plusieurs solutions on peut s'interroger sur la pertinence de ce modèle. D'autre part, les techniques utilisées dans la preuve de l'existence et de l'unicité de solutions sont souvent source d'inspiration pour les méthodes utilisées dans les calculs effectifs, réalisés à l'aide de super-ordinateurs.

Durant les dernières décennies, les techniques et les méthodes numériques sont celles qui ont suscité le plus d'intérêt pour prédire et comprendre les caractéristiques d'écoulements de fluides. Ceci est en partie dû au fait que les simulations numériques d'écoulements de fluides (SNEF) permettent de comprendre des phénomènes qu'il serait trop coûteux et difficile d'étudier par les méthodes de recherche classiques ou conventionnelles (prototypes, études expérimentales , ...). Cependant, les SNEF ne pourront probablement jamais subsister seules car leur but fondamental étant la représentation de phénomènes observés, elles doivent être validées par les mesures expérimentales qui proviennent de situations réelles. Couplées à l'amélioration de performance continuelle des outils informatiques, les SNEF se sont tout de même démarquées comme outil indispensable à la conception et l'amélioration de plusieurs procédés, applications ou appareils technologiques et se sont révélées efficaces pour adresser les aspects fondamentaux et théoriques des phénomènes étudiés. Les méthodes numériques employées par les SNEF sont avant tout basées sur les modèles mathématiques, qui régissent les écoulements. Dans les écoulements considérés isothermes de fluides newtoniens, les modèles mathématiques sont traditionnellement constitués de l'équation de la continuité des équations de Navier-Stokes, et des conditions aux limites physiques du modèle géometrique étudié. De plus, les équations du modéle sont historiquement formulées en variables primitives, c'est-à-dire en termes de la vitesse u et de la pression p. Bien que les équations à résoudre soient uniques, les méthodes utiIisées pour effectuer les SNEF peuvent assumer plusieurs formes, chacune ayant leurs propres caractéristiques, avantages et inconvénients. Même avec leurs variations multiples, un trait commun à toutes les méthodes est la discrétisation du domaine étudié en un nombre de points de contrôle et d'équations discrètes, dont le nombre dépend du niveau de discrétisation. En général, plus élevé est le niveau de discrétisation, meilleurs sont les résultats mais plus coûteuses sont les simulations. De plus, le type de discrétisation va en quelque sorte définir la nature même de la méthode. Le choix d'utiliser une méthode plutôt qu'une autre peut dépendre, entre autres, du type de problème envisagé, des ressources informatiques disponibles et de plusieurs facteurs reliés à la méthode tels que sa stabilité (convergence, robustesse,..), son efficacité (temps de calcul, mémoire requise,..), et surtout la précision des résultats obtenus.

Notre étude portera, sur les équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes, équations décrivant le mouvement d'un fluide visqueux, incompressible non homogéne, soumis à une perturbation aléatoire. Ce phénomène apparait, à la rencontre de fluides de différentes concentrations, ou si la consentration change en fonction du temps. Deux approches seront proposées pour la résolution de ce type d'équations.

Contenu de mémoire

Notre travail est composé essentiellement de cinq chapitres :

Le chapitre un est consacré, aux notions de base sur les opérateurs differentiels, les espaces de fonctions intégrables, les espaces de Sobolev et notions sur les processus stochastiques.

Dans le deuxieme chapitre, on introduit, les équations de Navier-Stokes, stochastiques non-homogène.

Dans le troisieme chapitre, en se basant sur la méthode de Faedo-Galerkin, on construit des solutions approchées pour certaines équations de Navier-Stokes stochastiques.

Dans le chapitre quatre, on étudiera une classe d'équations stochastiques non linéaire (de type Navier Stokes), des théorèmes d'existence seront démontrés avec des conditions plus faibles que celles posées par Viot [V1][V2]. On verra comment pour les équations de Navier Stokes stochastiques non homogène, on peut obtenir un résultat analogue à celui de [BT] en utilisant les idées et les techniques de [AVM] et [BT].

Dans le dernier chapitre, on donne quelques résultats numériques.

Chapitre 1

Rappels et notations

1.1 Opérateurs différentiels

Soient $(x_1, ..., x_d)$ les coordonnées cartésiennes. On note par ∂_i la dérivée partielle dans la i-ème coordonnée $(1 \leq i \leq d\ )$ et ∂_{ij} la dérivée seconde par rapport à x_i, x_j $(\ 1 \leq i, j \leq d)$. Pour les dérivées partielles en dimension $d \geq 1$, nous notons $\alpha = (\alpha_{1,...,}\alpha_d)$ un multi-indice où les α_i , pour $1 \leq i \leq d$, sont des entiers positifs $\alpha_i \geq 0$, et nous posons :

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_d}^{\alpha_d} \tag{0.1}$$

et

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \tag{0.2}$$

1.1.1 En coordonnées cartésiennes

a) Opérateur Gradient :

- Si la fonction u est à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\operatorname{grad} u \in \mathbb{R}^d$ est donné par :

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = (\partial_i u)_{1 \leq i \leq d} \tag{0.3}$$

ou encore :

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ . \\ . \\ . \\ \partial_d u \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

- Si la fonction u est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\nabla u \in \mathbb{R}^{d,d}$ est donné par :

$$\nabla u = (\partial_j u_i)_{1 \leq i,j \leq d} \tag{0.5}$$

ou encore :

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 ... & \partial_d u_1 \\ \partial_1 u_d ... & \partial_d u_d \end{pmatrix} \tag{0.6}$$

b) Opérateur Divergence :

- Si la fonction u est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{div} u$ est le scalaire donné par :

$$\operatorname{div} u = \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{d} \partial_i u_i \tag{0.7}$$

- Si la fonction u est à valeurs dans $\mathbb{R}^{d,d}$, $\nabla \cdot u \in \mathbb{R}^d$ a pour composantes :

$$\nabla \cdot u = \left(\sum_{j=1}^{d} \partial_j u_{ij} \right)_{1 \leq i \leq d} \tag{0.8}$$

c) Opérateur Laplacien :

- Si la fonction u est à valeurs dans $\mathbb{R}$, Δu est le scalaire donné par :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \partial_{ii} u \tag{0.9}$$

- Si la fonction u est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\Delta u \in \mathbb{R}^d$ de composantes :

$$\Delta u = \left(\sum_{j=1}^{d} \partial_{jj} u_i \right)_{1 \leq i \leq d} \tag{0.10}$$

d) Opérateur Rotationnel :

- Si la fonction $u \in D^{'}(O)$ (O est un ouvert borné), $rotu$ est le vecteur donné par :

$$rotu = \nabla \times u = \begin{pmatrix} \partial_2 u \\ -\partial_1 u \end{pmatrix} \tag{0.11}$$

- Si la fonction u est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, $rotu$ est le scalaire donné par :

$$\nabla \times u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \tag{0.12}$$

- Si la fonction u est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, $rotu$ est le vecteur donné par :

$$\nabla \times u = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix} \tag{0.13}$$

1.1.2 En coordonnées cylindriques

Les définitions précedentes seront données dans la base cylindrique (e_r, e_θ, e_z) .

a) Opérateur Gradient :

- Le vecteur gradient d'une fonction scalaire v :

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial v}{\partial z} e_z \tag{0.14}$$

b) Opérateur Divergence :

- Le scalaire divergence d'une fonction vectorielle $F(F_r, F_\theta, F_z)$ est donné par :

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{0.15}$$

c) Opérateur Laplacien :

- Le laplacien d'une fonction scalaire v :

$$\Delta v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{0.16}$$

d) Opérateur Rotationnel :

- Le rotationnel d'une fonction vectorielle $F(F_r, F_\theta, F_z)$ est donné par :

$$rotF = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (rF_\theta)}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) \tag{0.17}$$

1.1.3 Quelques propriétés des opérateurs différentiels

Soit F une fonction vectorielle et v une fonction scalaire , on a :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(rotF) = 0 \\ rot(\nabla F) = 0 \\ rot(vF) = vrotF + \nabla v \wedge F \\ \operatorname{div}(vF) = v \operatorname{div} F + \nabla v \cdot F \\ \operatorname{div}(\nabla F) = \Delta v \\ rot(rotF) = \nabla(\operatorname{div} v) - \Delta F \end{cases} \tag{0.18}$$

1.2 Espaces de fonctions intégrables

Soit O un domaine de $\mathbb{R}^d$, de frontière Γ et de normale extérieure n . Notons par $\mathbb{M}(O)$ l'espace des fonctions définies sur O et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont mesurables au sens de Lebesgue.

Définition 0.1

Pour $1 \leq p < \infty$ *, nous posons :*

$$L^p(O) = \left\{ f \in \mathbb{M}(O) \ ; \ \int_O |f|^p \, dX < \infty \right\} \tag{0.19}$$

Par ailleurs, pour $p = \infty$ *, nous posons :*

$$L^\infty(O) = \left\{ f \in \mathbb{M}(O) \ ; \sup_{x \in \Omega} ess \, |f(x)| < \infty \right\} \tag{0.20}$$

où, par définition :

$$\sup_{x \in \Omega} ess \, |f(x)| = \inf \{ M \geq 0 ; \ |f(x)| \leq M \ , p.p. \text{dans } O \} \tag{0.21}$$

Le domaine O *étant borné, les espaces* $L^p(O)$ *forment une suite d'espaces emboîtés .*

$$L^\infty(O) \subset ... \subset L^p(O) \subset ... \subset L^q(O) \subset ... \subset L^1(O), \, p > q \tag{0.22}$$

Théorème 0.1

Soit $1 \leq p \leq \infty$ *. L'espace* $L^p(O)$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|f\|_{L^p(O)} = \left(\int_O |f|^p \, dX \right)^{1/p} \quad , \quad \textit{pour } 1 \leq p \leq \infty \tag{0.23}$$

et

$$\|f\|_{L^\infty(O)} = \sup_{x \in O} ess \, |f(x)| \tag{0.24}$$

En particulier, pour $p = 2$*,* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(O)} = \int_O f(x) \, g(x) \, dX \tag{0.25}$$

Théorème 0.2

Soit $1 \leq p \leq \infty$ *. L'espace dual de* $L^p(O)$ *est* $L^q(O)$ *avec* q *donné par* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *si* $p \neq 1$ *et* $q = \infty$ *si* $p = 1$ *.*

Inégalité de Cauchy-Schwharz

$\forall f \in L^2(O)$, $\forall g \in L^2(O)$

$$\|fg\|_{L^1(O)} \leq \|f\|_{L^2(O)} \, \|g\|_{L^2(O)} \tag{0.26}$$

1.3 Notions fondamentales sur les espaces de Sobolev

Définition 0.2

Soient s et p deux entiers avec $s \geq 0$ et $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{s,p}(O)$ est défini par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in D'(O) \ , \partial^{\alpha} u \in L^{p}(O) \ , \ |\alpha| \leq s \right\} \tag{0.27}$$

où *les dérivées sont prises au sens des distributions. C'est un espace de Banach pour la norme* :

$$\|u\|_{W^{s,p}(O)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^{p}(O)}^{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.28}$$

Par convention , $W^{0,p}(O) = L^{p}(O)$. Le cas $p = 2$ est particulièrement intéressant car les espaces $W^{s,2}(O)$ ont une structure d'espace de Hilbert. Il seront notés $H^{s}(O)$.

Définition 0.3

Soit $s \geq 0$. L'espace $H^{s}(O)$ est défini par :

$$H^{s}(O) = \left\{ u \in D'(O) \ , \ \partial^{\alpha} u \in L^{2}(O) \ , \ |\alpha| \leq s \right\} \tag{0.29}$$

Les dérivées étant prises au sens des distributions . C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{s,O} = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{O} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v dX \tag{0.30}$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{s,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} \|\partial^{\alpha} u\|_{s,\Omega}^{2} dX \right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.31}$$

Par convention, $H^{0}(O) = L^{2}(O)$. Enfin , pour $s \geq 1$, nous introduisons la semi-norme :

$$|u|_{s,O} = \left(\sum_{|\alpha| = s} \int_{O} \|\partial^{\alpha} u\|_{s,O}^{2} dX \right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.32}$$

de sorte que :

$$\|u\|_{s,O} = \left(\|u\|_{s-1,O}^{2} + |u|_{s,O}^{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.33}$$

Pour $s \geq 1$, l'adhérence de l'espace des fonctions tests $D(O)$ dans $H^s(O)$ est un sous-espace de $H^s(O)$ strictement inclus dans celui-ci .

Définition 0.4

Soit un entier $s \geq 1$. On note :

$$H_0^s(O) \overset{def}{=} \overline{D(O)}^{H^s(O)} \tag{0.34}$$

et $H^{-s}(O) = (H_0^s(O))'$ le dual de $H_0^s(O)$, équipé de la norme :

$$\forall f \in H^{-s}(O) \;,\; \|f\|_{-s,\Omega} = \sup_{\substack{u \in H_0^s(O) \\ u \neq 0}} \frac{\langle f, u \rangle_{H^{-s}(O),\; H_0^s(O)}}{\|u\|_{s,O}} \tag{0.35}$$

Exemple

L'espace

$$H^1(O) = \left\{ u \in L^2(O) \;,\; \partial_i u \in L^2(O) \;,\; 1 \leq i \leq d \right\} \tag{0.36}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{1,O} = \int_O uv dX + \int_O \nabla u \nabla v dX \tag{0.37}$$

$$(u, v)_{1,O} = \int_O uv dX + \sum_{i=1}^{d} \int_O \partial_i u \partial_i v dX \tag{0.38}$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{1,O} = \left(\int_O u^2 dX + \int_O (\nabla u)^2 dX \right)^{1/2} \tag{0.39}$$

En introduisant la semi-norme :

$$|u|_{1,O} = \left(\int_O (\nabla u)^2 dX \right)^{1/2} \tag{0.40}$$

nous avons

$$\|u\|_{1,O} = \left(\|u\|_{0,O}^2 + |u|_{1,O}^2 \right)^{1/2} \;. \tag{0.41}$$

Théorèmes de densités et injections

Théorème 0.3

$C^\infty(O)$ est dense dans $H^s(O)$ pour $s \geq 0$.

Théorème 0.4

Les injections suivantes sont compactes :

i) Pour $s \geq 0$, $H^{s+1}(O) \subset H^s(O)$.

ii) Si $s > d/2$, $H^s(O) \subset C^0\left(\overline{O}\right)$.

Théorèmes de traces

Définition 0.5

$L^2(\Gamma)$ est l'espace des fonctions définies sur Γ et de carré sommable pour la mesure surfacique :

$$L^2(\Gamma) = \left\{ g \ , \ \int_\Gamma g^2 ds < +\infty \right\} \tag{0.42}$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(g_1, g_2)_{0,\Gamma} = \int_\Gamma g_1 g_2 ds \tag{0.43}$$

la norme associé étant notée $\|.\|_{0,\Gamma}$.

Définition 0.6

L'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est défini par :

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ g \in L^2(\Gamma) \ , \ \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x-y|^{N+1}} ds < +\infty \right\} \tag{0.44}$$

où : $N = 1$ si O est de dimension 2 (et donc Γ de dimension 1) et $N = 2$ si O est de dimension 3 (et donc Γ de dimension 2) . C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(g_1, g_2)_{1/2,\Gamma} = \int_\Gamma g_1 g_2 ds + \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{(g_1(x) - g_1(y))(g_2(x) - g_2(y))}{|x-y|^{N+1}} ds \tag{0.45}$$

la norme associé étant notée $\|.\|_{1/2,\Gamma}$. Enfin , le dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est noté $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et le crochet de dualité correspondant est noté $\langle .,. \rangle_\Gamma$.

Remarque 0.1

On vérifie aisément en dimension 3 l'inclusion :

$$C^{0,1}(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(O) \tag{0.46}$$

Par contre, il existe des fonctions continues sur Γ qui n'appartiennent pas à $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Théorèmes de trace Théorème 0.5[HB]

L'application $\gamma_0 : u \mapsto \gamma_0(u)$, *qui a une fonction* $u \in C^\infty\left(\overline{O}\right)$ *associe sa trace sur* Γ *se prolonge en une application continue de* $H^1(O)$ *dans* $L^2(\Gamma)$. *Il existe donc une constante c strictement positive telle que :*

$$\forall u \in H^1(O)\ ,\ \|\gamma_0(u)\|_{0,\Gamma} \leq c\,\|u\|_{1,O} \tag{0.47}$$

L'application trace $\gamma_0 : H^1(O) \mapsto H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *est continue et surjective :*$\mathrm{Im}(\gamma_0)=\gamma_0(H^1(O)) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

$$\forall u \in H^1(O)\ ,\ \|\gamma_0(u)\|_{1/2,\Gamma} \leq c\,\|u\|_{1,O} \tag{0.48}$$

de plus , nous avons la caractérisation :

$$H_0^1(O) = \left\{u \in H^1(O)\ ,\ \gamma_0(u) = 0\right\} \tag{0.49}$$

Théorème 0.6[HB]

Il existe une constante c stictement positive telle que : $\forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $\exists u_g \in H^1(O)$ *tel que :*

$$\left\{\begin{array}{c} \gamma_0(u_g) = g \\ \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).} \leq c\,\|u\|_{H^1(O)} \end{array}\right. \tag{0.50}$$

On dit que u_g *est un relèvement de g dans* $H^1(O)$.

Théorème 0.7[HB]

Soit O un domaine de $\mathbb{R}^d$ *de classe* C^2 . *L'application*

$$\gamma_1 : u \mapsto \gamma_1(u) = \partial_n u = \sum_{i=1}^{d} \gamma_0(\partial_i u)\, n_i \tag{0.51}$$

qui à une fonction $u \in C^\infty\left(\overline{O}\right)$ *associe sa dérivée normale sur* Γ *se prolonge en une application continue de* $H^2(O)$ *dans* $L^2(\Gamma)$. *Il existe donc une constante c strictement positive telle que :*

$$\forall u \in H^2(O),\ \|\gamma_1(u)\|_{0,\Gamma} \leq c\,\|u\|_{2,O} \tag{0.52}$$

De plus, nous avons la caractérisation, pour des ouverts lipschitziens :

$$H_0^2(O) = \left\{u \in H^2(O)\ ,\ \gamma_0(u) = \gamma_1(u) = 0\right\} \tag{0.53}$$

Formule de la divergence et ses conséquences

Lemme 0.1 (Formule de la divergence)

Soit u un champs de vecteur dans $(L^2(O))^d$ *tel que* $\nabla \cdot u \in L^2(O)$. *Alors* $u \cdot n \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *et on a :*

$$\int_O \nabla \cdot u dX = \int_\Gamma u \cdot n ds \tag{0.54}$$

Remarque 0.2

$$\int_O \nabla \cdot u dX = \langle u \cdot n, 1 \rangle_\Gamma \ . \tag{0.55}$$

Corollaire 0.1 (Formule de Green)

Soit O *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *de frontière* Γ *lipschitzienne , on a :*

(i) *Pour u et v de* $H^1(O)$:

$$\int\limits_\Omega u(x)(\nabla v)(x)\,dX = -\int\limits_\Omega (\nabla u)(x)\,v(x)\,dX + \int\limits_\Gamma \gamma_0(uv)\,nds. \tag{0.56}$$

(ii) *Soit* $u \in H^1(O)$ *avec* $\Delta u \in L^2(O)$. *Alors* $\partial_n u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *et nous avons*

$$\forall w \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \ , \quad \langle \partial_n u, w \rangle_\Gamma = \int\limits_O \triangle u v dX + \int\limits_O \nabla u \cdot \nabla v dX \tag{0.57}$$

pour tout $v \in H^1(O)$ *tel que* : $\gamma_0(v) = w$ et si O est de classe C^2.

Equivalence de Normes

1) Inégalité de Poincaré :

Lemme 0.2

Il existe une constante $c(O) > 0$ *telle que :*

$$\forall v \in H_0^1(O) \ , \ c_O \int_O v^2 dX \leq \int_O (\nabla v)^2 dX \tag{0.58}$$

ou encore :

$$\forall v \in H_0^1(O) \ , \ c_O \|v\|_{0,O}^2 \leq |v|_{1,O}^2 \tag{0.59}$$

2) La norme du Laplacien :

Lemme 0.3

Sur $H_0^2(O)$, *l'application* $v \mapsto \|\Delta v\|_{0,O}$ *est une norme équivalente à la norme canonique* $\|v\|_{2,O}$, *c-à-d, il existe une constante* $c > 0$ *telle que :*

$$\forall v \in H_0^2(O) \ , \quad c\|v\|_{2,\Omega} \leq \|\Delta v\|_{0,O} \tag{0.60}$$

Théorème de Rahm

Soit O *un domaine de* $\mathbb{R}^d$ de frontière lipschitzienne *et considérons les espaces fonctionnels :*

$$V_0 = \left\{ v \in \left(H_0^1(O)\right)^d \ , \nabla \cdot v = 0 \right\} \tag{0.61}$$

et

$$L_0^2(O) = \left\{ q \in L^2(O) \ , \ \int_O q dX = 0 \right\} \tag{0.62}$$

Théorème 0.8 (De Rham)

Les formes linéaires continues sur $\left(H_0^1(O)\right)^d$ *qui s'annulent sur* V_0 *sont des gradients de fonctions de* $L^2(O)$.

Corollaire 0.2

L'opérateur de divergence $\nabla\cdot : \left(H_0^1(O)\right)^d \longrightarrow L_0^2(O)$ *est surjectif .*

Opérateurs de Banach bijectifs

Nous présentons ici quelques résultats fondamentaux permettant de caractériser les opérateurs de Banach linéaires bijectifs. Par la suite, notons par $\mathcal{L}(V,W)$ l'ensemble des formes linéaires continues sur V dans W où V, W sont deux espaces de Banach.

Lemme 0.4.

Soit V *et* W *deux espaces de Banach et* $A \in \mathcal{L}(V,W)$ *un opérateur surjectif . Soit* $\alpha > 0$. *La propriété*

$$\forall w \in W \ , \exists v_w \in V \ , Av_w = w \ , \alpha \|v_w\|_V \leq \|w\|_W \tag{0.63}$$

implique

$$\inf_{w' \in W'} \sup_{v \in V} \frac{\left(A^t w', v\right)_{V',V}}{\|v\|_V \|w'\|_W'} \geq \alpha \tag{0.64}$$

La réciproque est vraie si V *est réfléxif .*

Lemme 0.5

Soit $A \in \mathcal{L}(V,W)$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) $A : V \longrightarrow W$ *est surjectif .*

ii) $A^t : W^t \longrightarrow V'$ *est injectif et son image* $R(A^t)$ *est fermé dans* V' *.*

iii) Il existe $\alpha > 0$ *tel que :*

$$\forall w' \in W' \ , \ \left\| A^t w' \right\|_{V'} \geq \alpha \left\| w' \right\|_{W'} \tag{0.65}$$

Corollaire 0.3

Un opérateur de Banach $A \in \mathcal{L}(V, W)$ *est bijectif si et seulement s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que :*

$$\forall v \in V \ , \ \|Av\|_W \geq \alpha \|v\|_V \tag{0.66}$$

et

$$\forall w' \in W' \ , \ \left(A^t w'\right) \Longrightarrow \left(w' = 0\right) \tag{0.67}$$

Théorème 0.9

Soient X et M *deux espaces de Banach réels . On considère le problème suivant : étant donnés* $f \in X'$ *et* $g \in M$,

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u \in X \text{ et } p \in M' \textit{ tels que :} \\ Au + B^t p = f \\ Bu = g \end{cases} \tag{0.68}$$

où A *et* B^t *sont deux opérateurs linéaires continus* $A : X \longrightarrow X'$, $B^t : M' \longrightarrow X$*. En désignant par* $N(B)$ *le noyau de l'opérateur* B *et définissant l'opérateur* $\pi A : N(B) \longrightarrow N(B)'$ *tel que* $\langle \pi A u, v \rangle = \langle Au, v \rangle$ *pour tout* u *et* v *dans* $N(B)$ *. Le problème est bien posé si et seulement si :*

i) $\pi A : N(B) \longrightarrow N(B)'$ *est un isomorphisme .*

ii) $B : X \longrightarrow M$ *est surjectif .*

1.4 Notions fondamentales sur les processus stochastiques

1.4.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires, généralement indexée par $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{N}$.

1.4.2 Filtration

Une filtration est une suite croissante de tribus $(F_n)_{n\geq 0}$, c'est-à-dire $F_n \subset F_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.4.3 Martingale dans $\mathbb{N}$.

Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une filtration et soit $(M_n)_{n\geq 0}$une suite de variables aléatoires.

On dit que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(F_n)_{n\geq 0}$ si :

1 $(M_n)_{n\geq 0}$ est adaptée à la filtration $(F_n)_{n\geq 0}$

2 M_n est intégrable pour tout n

3 $E(M_{n+1} \,|F_n\,) = M_n$.

1.4.4 Processus adapté

On dit que le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est adapté à la filtration $(F_n)_{n\geq 0}$ si X_n est F_n-mesurable pour tout n.

1.4.5 Intégrale de Wiener et intégrale stochastique

Si W un mouvement brownien standard défini sur l'espace probabilisé (Ω, A, F, P) et σ un processus adapté à F. on suppose par ailleurs que σ vérifie :

$$E(\int_0^T \sigma^2 ds) < +\infty$$

Alors, l'intégrale stochastique de σ par rapport à W est la varéable aléatoire :

$$\left(\int_0^T \sigma dW_s\right) = \lim_{N\longrightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N} \sigma_{n-1}(W_n - W_{n+1})$$

Chapitre 2

Introduction des équations de Navier Stokes stochastiques et non homogènes.

Introduction :

Dans ce chapitre, on présente les équations de Navier Stokes homogènes, non homogènes et stochastiques, ces dernièresauront sans doute des caractères généraux pour des équations aux dérivées partielles stochastiques dans des espaces abstraits. Ces équations seront présentées sous plusieurs formes et avec différentes conditions. En particulier, notre étude portera sur les équations de Navier Stokes stochastiques non homogènes, équations décrivant le mouvement d'un fluide visqueux incompressible non homogène soumis à une perturbation aléatoire, par exemple quand deux ou plusieurs fluides de différentes concentrations se rencontrent.

2.1 Equations de Navier Stokes et Navier Stokes non homogènes.

Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par les équations de Navier-Stokes :

$$\rho \partial_t u + \rho (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla p = \rho \ f \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{1.2}$$

$$\text{où} \quad (u \cdot \nabla) = \sum_{i=1}^{3} u_i \, \partial_{x_i} \quad , \quad \nabla u = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} u_i.$$

On désigne par : $u = u(t, x)$, $p = p(t, x)$, $f = f(t, x)$ la vitesse, la pression hydrodynamique et la force extérieure au point (t, x), et par ρ et ν la densité du fluide et le coefficient de viscosité, respectivement.

La plupart des études faites antérieurement portent sur le cas où ρ et ν sont deux constantes positives et le fluide homogène c'est-à-dire toutes ces parties ont les mêmes propriétés matérielles.

Maintenant, on s'intéresse au mouvement d'un fluide visqueux incompressible non homogène. Par exemples, mélange de deux matières fluides ou d'une solution dont la concentration varie d'une partie à une autre de l'ensemble de la solution. Dans ces cas ρ et ν sont considérées comme fonctions du temps t et de l'espace x. La viscosité ν a partout la même valeur pour qu'il n'y ait pas de diffusion de concentration.

Sous ces hypothèses ρ n'est plus une constante car dépendant du temps t et de l'espace $x, \rho = \rho\ (t, x)$ et doit satisfaire l'équation :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \tag{1.3}$$

L'équation (1.3) représente la loi de conservation de la matière sous l'hypothèse de l'absence de diffusion de la densité.

Le système d'équations (1.1), (1.2) et (1.3) est appelé équations de Navier-Stokes non homogènes ; on doit à A.V.Kazhikhov le théorème d'existence.

Le problème se pose sous une forme faible en faisant appel aux espaces fonctionnels V^0, V^1 qui seront constamment utilisés dans la suite.

Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière est assez régulière. Ces espaces sont définis par :

$$V^\infty = \{u \in (C_0^\infty(O))^3 : \nabla \cdot u = 0 \text{ dans } O \} \tag{1.4}$$

$$V^0 := \text{adhérence de } V^\infty \text{ dans } (L^2(O))^3 \tag{1.5}$$

$$V^1 := \text{adhérence de } V^\infty \text{ dans } (H^1(O))^3 \tag{1.6}$$

On a le théorème suivant de *Kazhikhov* :

Théorème

Si $f \in L^1(O,T,L^2(O))$, $u_0 \in V^0$ $\rho_0 \in L^\infty(O)$

$$0 \leq ess_{x\in Q} \quad \inf \rho_0(x) \leq ess_{x\in Q}, \ \sup \rho_0(x) < \infty$$

Alors il existe une paire de fonctions (u,ρ) telle que :

$$u \in L^\infty(O,T,V^0) \cap L^2(O,T,V^1) \tag{1.7}$$

$$\rho \in L^\infty(]0,T[\times O) \tag{1.8}$$

$$\int_0^T\int_O \left[\rho u \cdot (\partial_t\Phi + (u\cdot\nabla)\Phi - \nu\sum_{i=1}^{3}\nabla u_i \nabla\Phi_i + \rho f\cdot\Phi\right] dxdt = -\int_O \rho_0 u_0 \cdot \Phi(0,x)dx \tag{1.9}$$

pour tout $\Phi \in C^1(O,T,V^1)$ tel que $\Phi(T,\cdot)=0$.

$$\int_0^T\int_O \rho(\partial_t\varphi + (u\nabla)\varphi)dxdt = -\int_O \rho_0\varphi(0,x)dx \tag{1.10}$$

pour tout $\varphi \in C^1(O,T,H^1(O))$ tel que $\varphi(T,\cdot)=0$.

2.2 Equations de Navier Stokes stochastiques et équations de Navier Stokes stochastiques non homogènes.

Un fluide est composé en général de molécules sans lien rigide entre elles. Inévitablement, il est soumis à des fluctuations, il est évident que le problème des équations du mouvement du fluide doit tenir compte de la variation due à ces fluctuations. La description de ces fluctuations, de part leur propre nature, ne peut être que aléatoire. Les équations envisagent la contribution des fluctuations sous forme d'une perturbation stochastique.

Dans cette étude, le fluide est incompressible et il convient de considérer le champ de vitesse u comme fonction de t à valeurs dans l'espace V^0 et introduisons la projection orthogonale Pr :

$$Pr = \text{projection orthogonale de } \ (L^2(O))^3 \ \text{ sur } \ V^0. \tag{1.11}$$

On a $\forall\ p \in\ H^1(O)$, on a :

$$Pr\nabla p = 0.$$

Si on applique l'opérateur Pr à l'équation (1.1), elle se réduit à

$$Pr\rho\partial_t u \ + \ Pr\rho(u\nabla)u - Pr\nu\Delta u = Pr\rho f$$

cette équation jointe à la condition

$$u(t,\cdot) \in V^1 \tag{1.12}$$

peut se substituer au système d'équations (1.1), (1.2), si la force extérieure est soumise à une perturbation stochastique ; alors on considère l'équation stochastique suivante :

$$Pr\rho du \ + \ (Pr\rho(u\nabla)u - Pr\nu\Delta u)dt = Pr\rho f dt + Pr\rho dG. \tag{1.13}$$

Dans notre étude l'équation (1.13) est limitée au cas où G est un processus à valeurs dans V^0, on considére la différence $G(t+\Delta t) - G(t)$ comme variation du champ de vitesse u par rapport à la solution des équations ((1.1)-(1.3)) pendant la période $[t, t+\Delta t]$.
Quand le fluide est non homogène, le système d'équations est complété par :

$$\partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho = 0 \tag{1.14}$$

qui est exactement (1.3).
le système d'équations (1.13), (1.14) avec la conditions (1.12) est appelé les équations de Navier Stokes stochastiques non homogènes.
Quand le fluide est homogène, ρ est une constante positive et l'équation (1.14) est superflue. Le système est appelé équations de Navier Stokes stochastiques.

Pour que le probléme soit défini d'une manière complète, on ajoute des conditions initiales :

$$u_{|t=0} = u_0 \tag{1.15}$$

$$\rho_{|t=0} = \rho_0 \tag{1.16}$$

Quant aux conditions aux limites, elles consistent en l'adhérence du fluide à la frontière, elles sont contenues dans (1.12). Il est à noter qu'on peut considérer d'autres conditions aux limites.

Les équations de Navier Stokes stochastiques ont été dans la forme indiquée ci-dessus, étudiées par A.Bensoussan et R. Temam [BT], pour une classe d'équations un peu plus large dite équations stochastiques du type Navier Stokes, ont démontré l'éxistence d'une solution faible. Dans leur travail, ils ont supposé une régularité majeure (par rapport aux coordonnées spatiales) de la perturbation G, de sorte que la résolution de l'équation stochastique se réduit, pour chaque élément ω de l'éspace de probabilité Ω, à celle d'une équation déterministe.

D'autre part, M.Viot [V1][V2] a étudié le problème des martingales correspondant aux équations stochastiques de type Navier Stokes et a démontré le théorème d'éxistence pour le problème. La formulation du problème de martingale lui a permis d'affaiblir la condition sur la régularité spatiale de la perturbation donnée G, mais sa méthode a été conditionnée par le fait que G soit un processus de Wiener dans l'espace V^0 c.a.d. $G = W$.

Dans le chapitre quatre,on étudiera une classe d'équations stochastiques non linéaire(de type Navier Stokes), des théorèmes d'existence seront démontrés avec des conditions plus faibles que celles posées par Viot [V1][V2]. On verra comment pour les équations de Navier Stokes stochastiques non homogène, on peut obtenir un résultat analogue à celui de [BT] en utilisant les idées et les techniques de [AVK] et [BT].

Chapitre 3

Equations de Navier Stokes Stochastiques non homogénes.

3.1 Existence et unicité de la solution

Dans ce chapitre, on étudiera les solutions approchées des équations de Navier Stokes stochastiques non homogènes, en utiliant la méthode Faedo-Galerkin.

On précisera la régularité du domaine O seulement s'il y a un risque d'équivoque, par contre on suppose toujours que ∂O est suffisament régulière. On rappelle que, l'opérateur $-\Pr\Delta$ est auto-adjoint, défini positif et que ses valeurs propres normalisés e_j forment une base orthonormale dans l'espace V^0, qui est un Hilbertien. Les valeurs propres λ_j correspondantes à e_j ,vérifiant la relation $\lambda_j \leq \lambda_{j+1}$. On a :

$$\begin{cases} 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...... \leq \lambda_j \leq ...... \leq \lambda_j..... \\ \lambda_j \rightarrow .\infty \text{ pour } j \rightarrow \infty \end{cases} \tag{2.1}$$

Proposition 3.1.1 *Si O est de classe $C^r (r \geq 2)$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $s \leq r$, la fonction $e_j(x)$ appartient à $(H^s(O))^3$*

Démonstration

D'aprés de Cattabriga [Ca], on a

$$\|u\|_{(H^s(O))^3} \leq c\,\|f\|_{(H^{s-2}(O))^3}$$

si u vérifie les relations

$$-\Pr\Delta u = f \quad \text{(dans O) et } u\,|_{\partial O} = 0.$$

de la relation

$$-\Pr\Delta e_j = \lambda_j e_j \text{ ou } (-\Pr\Delta)^k e_j = (\lambda_j)^k e_j$$

on déduit que : $e_j \in (H^s(O))^3$

pour tout $s \in [0, 2k]$.

Ce qui nous conduit à la proposition suivante. On définit l'espace

$$V^2 = V^1 \cap (H^2(O))^3 \tag{2.2}$$

Proposition 3.1.2 *pour* $s \in \{0, 1, 2\}$ *on a*

$$V^s = \left\{ u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j, a_j \in \mathbb{R}; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s a_j^2 < \infty \right\} \tag{2.3}$$

Démonstration

comme $\{e_j\}$ est une base orthonormale de V^0, il est trivial que (2.3) est vérifiée pour $s = 0$. Pour $s = 1$, (2.3) est la conséquence de l'équivalence entre la norme de $(H_0^1(O))^3$ et celle définie par le produit scalaire $(\nabla \cdot \mid \nabla \cdot)^{1/2}$et de la relation

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j^2 = (\nabla u^N \mid \nabla u^N) \quad , \quad (u^U = \sum_{j=1}^{N} a_j e_j \ , \ a_j \ \in \ \mathbb{R} \ , \ N \in \mathbb{N} \ )$$

Il est essentiel que O soit borné, pour avoir l'équivalence des normes.

De la définition des λ_j , la relation (2.3) pour $s = 2$ découle du résultat de Cattabriga [Ca]. Ce dernier implique en effet l'équivalence entre la norme de $(H^2(O))^3$ et $\|-\Pr \Delta \cdot\|_{V^0}$ pour les éléments de V^1. En utilisant (2.3), on définit pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ l'espace V^S :

$$V^s = \left\{ u : u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \ , a_j \in \mathbb{R}; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s a_j^2 \prec \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{V^s} = (\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s a_j^2)^{1/2}.$$

Proposition 3.1.3 *Si* O *est de classe* $C^r (r \geq 2)$*, alors pour* $s \in \mathbb{N}$ *tel que* $s \leq r$ *et pour* $u \in V^s$*, on a :*

$$\|u\|_{(H^s(O))^3} \leq c(s) \|u\|_{V^s} \leq c'(s) \|u\|_{(H^s(O))^3}$$

où $c(s)$ et $c\prime(s)$ sont des constantes qui dépendent de s mais pas de u.

Démonstration

D'aprés [Ca] on a

$$\|u\|_{(H^s(O))^3} \leq c\,\|-\operatorname{Pr}\Delta u\|_{(H^{s-2}(O))^3} \qquad (\text{u} \in V^1 \cap (H^s(O))^3, s \geq 2)$$

et que

$$\lambda_j^m e_j = (-\operatorname{Pr}\Delta)^m e_j \quad (\text{m=0,1,.........})$$

Soit le sous-espace W_m de V_0, engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$. En vertu de la construction de W_m et de la proposition 3, il est clair que, si O est de classe $C^r(r \geq 2)$, alors pour tout n $\in \mathbb{N}$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$ tel $s \leq r$, on a

$$W_m \subset v^s \subset H^s(O))^3. \tag{2.4}$$

Puis on définit la projection Pr_m par

$$Pr_m = \text{projection orthogonale de } \; L^2(O))^3 \;\text{ sur }\; V_m. \tag{2.5}$$

Lemme 2.1

Si $u \in C(O,T;C^1(O) \cap V^0)$ et si $\rho_0 \in C^1(O)$, alors l'équation

$$\begin{cases} \partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho = 0 \quad \textit{dans } [0,T]\times O \\ \rho\mid_{t=0} = \rho_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

admet une solution unique $\rho \in C^1([0,T]\times O)$, et la dépendence de la solution $\rho \in C^1([0,T]\times O)$ des coéfficients $u \in C(O,T;C^1(O)\cap V^0)$ est continue. De plus, on a

$$max_{x\in O}\rho(t,x) = \max_{x\in O}\rho_0(x) \quad , \quad min_{x\in O}\rho(t,x) = min_{x\in O}\rho_0(x) \;\forall\; t\in[0,T]$$

Démonstration :

On remarque que l'équation (2.6) est résolue par les caractéristiques. Le long de celles-ci on a le système d'équations différentielles ordinaires

$$\tfrac{dx_i(t)}{dt} = (u(t,x(t)))_i \quad (i=1,2,3)$$
$$\tfrac{d}{dt}\rho(t,x_1(t),x_2(t),x_3(t)) = 0$$

le second membre $u(t,x)$ de la première équation est(par hypothèse) suffisament régulier et on peut donc résoudre l'équation. la condition $d\rho/dt = 0$ sur les caractéristiques implique que

$$\{r \in \mathbb{R} : \exists x \in O : r = \rho(t,x)\} = \{r \in \mathbb{R} : \exists\ x \in O : r = \rho_0(x)\}$$

La dépendance continue de ρ de u est évidente.

3.2 Formulation des équations approchées

Ce paragraphe, est consacré à la formulation approchée des équations, dont les solutions constituent l'approximation du problème (1.12) et (1.16) par la méthode Faedo-Galerkin. Pour cela on considère les équations suivantes :

$$(\rho du \mid e_j) = -(\rho(u \cdot \nabla)u \mid e_j)dt - (\nabla u \mid \nabla e_j)dt + (\rho f^m \mid e_j)dt + (\rho dG^m \mid e_j)\ \ j = 1,2,..,m\ \ p.s. \tag{2.7}$$

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0\ dans\ [0,T] \times O \quad p.s. \tag{2.8}$$

$$u(\omega;t) \in V_m \quad \forall t \in [0,T] \quad p.s. \tag{2.9}$$

$$u(0) = u_0^m\ \ p.s. \tag{2.10}$$

$$\rho(0) = \rho_0^m\ \ p.s. \tag{2.11}$$

où $u_0^m,\ \rho_0^m \in C^1(O),\ \ 0 < \underline{c}_p \leq \rho_0^m\ (x) \leq \overline{c}_p < \infty \quad \forall x \in O,\ \ f^m \in L^2(O,T,(L^2(O))^3)$ et G^m est un processus stochastique continu à valeurs dans V_m et défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

La solution des équations ((2.7)-(2.11)) sera obtenue en résolvant les équations pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé. On considère les équations déterministes suivantes

$$(\rho du \mid e_j) = -(\rho(u \cdot \nabla)u \mid e_j)dt - (\nabla u \mid \nabla e_j)dt + (\rho f^m \mid e_j)dt + (\rho dG^m \mid e_j),\ \ j = 1,2,..,m\ \ p.s. \tag{2.6 bis}$$

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0 \quad dans[0,T] \times O \tag{2.7 bis}$$

$$u(t) \in V_m \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.8 bis}$$

$$u(0) = u_0^m \tag{2.9 bis}$$

$$\rho(0) = \rho_0^m \tag{2.10 bis}$$

où u_0^m , ρ_0^m et f^m sont définis comme dans ((2.6)-(2.10)), tandis que G^m est une fonction continue et définie sur $[0,T]$ à valeurs dans V_m.

Si on pose $y_j(t) = (u(t) \mid e_j)$, $y_j^0(t) = (u_0^m(t) \mid e_j)$, $\Gamma(t) = (G^m(t) \mid e_j)$ On a :

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{m} y_j(t) e_j(x), \quad u_0^m(x) = \sum_{j=0}^{m} y^0(t) e_j(x) \quad G^m(t,x) = \sum_{j=0}^{m} \Gamma_j(t) e_j(x).$$

.

De même on pose

$$\alpha_{jk}(t) = \int_O \rho(t,x) e_k(x) \cdot e_j(x) dx$$

$$\widetilde{\beta}_{jkl}(t) = \int_O \rho(t,x)((e_k(x) \cdot \nabla) e_l(x)) \cdot e_j(x) dx$$

$$\widetilde{\varphi}_j(t) = \int_O \rho(t,x) f^m(t,x) \cdot e_j(x) dx$$

On remarque que, si (u, ρ) est solution du problème ((2.7) bis-(2.11) bis) et si u est une fonction continue à valeurs dans V^m,alors la matrice $\alpha = (\alpha_{jk}(t))$ est inversible et d'après le lemme 2.1, on a

$$0 < \underline{c}_p \leq \rho\ (t,x) \leq \overline{c}_p < \infty\ \forall (t,x) \in [0,T] \times O$$

et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ on a :

$$\sum_{j,k}^{m}\alpha_{jk}(t)\xi_j\xi_k=\int_O\rho(t,x)(\sum_j^m\xi_je_j(x))\cdot(\sum_{j,k}^m\xi_ke_k(x))dx=\int_O\rho(t,x)(v(x))^2dx\geq \underline{c}_\rho\left\|v\right\|^2_{(L^2(O))^3}=\underline{c}_\rho\left|\xi\right|^2>0$$

où $v(x)=\sum_j^m\xi_je_j(x)$, ce qui prouve l'inversibilité de $\alpha=(\alpha_{jk})$, de plus la matrice α est symétrique.

On pose $\beta_{jkl}(t)=\sum_{i=1}^m(\alpha^{-1})_{ji}(t)\widetilde{\beta}_{ikl}(t)$, $\gamma_{jk}(t)=(\alpha^{-1})_{jk}(t)\,\lambda_k$, $\varphi_j(t)=,\sum_{k=1}^m(\alpha^{-1})_{jk}(t)\widetilde{\varphi}_k(t)$, où λ_k sont les valeurs propres de $-Pr\Delta$.

On peut écrire l'équation (2.7) sous la forme

$$\sum_{k=1}^m\alpha_{jk}(t)dy_k(t)=\sum_{k,l=1}^m\widetilde{\beta}_{jkl}(t)y_k(t)y_i(t)\,dt-\lambda_jy_j(t)\,dt+\widetilde{\varphi}_j(t)+\sum_{k=1}^m\alpha_{jk}(t)\,d\,\Gamma_k(t),\ \ j=1,2,..,m$$

en multipliant par $(\alpha^{-1})(t)$,

$$dy_j(t)=-\left(\sum_{k,l=1}^m\beta_{jkl}(t)y_k(t)y_l(t)\right)\,dt-\left(\sum_{k=1}^m\gamma_{jk}(t)y_k(t)dt+\varphi_j(t)\right)\,dt+\varphi_j(t)\,dt+d\,\Gamma_j(t),\ \ j=1,2,..,m \tag{2.11}$$

La condition (2.10) devient :

$$y_j(0)=y_j^0. \tag{2.12}$$

Pour résoudre le problème de (2.7) jusqu'a (2.11), on a besoin de résoudre le problème suivant :

Problème $(N)_m$

Trouver un processus stochastique y à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ tel que y satisfait les équations ((2.11)-(2.12)).

On pose : $u(t,x)=\sum_{j=1}^m y_je_j(x)$, en définissant $\rho(t,x)$ par l'équation (2.8) avec la condition initiale (2.11) et $\alpha,\beta,\gamma,\varphi$ de la matrice.

3.2.1 Existence et unicité de la solution du problème linéarisé.

Pour linéariser le problème, on utlise la formulation suivante :

On suppose que $\overline{y}_j$ $(j = 1....., m)$ sont des fonctions réelles continues définies sur $[0, T]$. Alors on définit :

$$\overline{u}(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \overline{y}_j(t) e_j(x), \tag{2.13}$$

On résout l'équation en $\overline{\rho}$

$$\begin{cases} \partial_t \overline{\rho}(t,x) + \overline{u}(t,x) \cdot \nabla \overline{\rho}(t,x) = 0 \quad \text{dans } [0,\text{T}] \times O \\ \overline{\rho}(0,\cdot) = \rho_0^m \end{cases} \tag{2.14}$$

On définit $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\varphi}$ de la même manière que l'on a définit $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ dans le paragraphe 2 et on remplace aussi la fonction $\rho(t,x)$ par $\overline{\rho}(t,x)$ donnée par (2.14). On pose le problème linéarisé :

Problème $(L)_m$

Etant donnée une fonction continue $\overline{y}$ (défini sur $[0,T]$) à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ qui satisfait les équations suivantes :

$$dy_j(t) = -(\sum_{k,l=1}^{m} \overline{\beta}_{jkl}(t) \overline{y}_k(t) y_l(t) dt - (\sum_{k=1}^{m} \overline{\gamma}_{jk}(t) y_k(t) dt + \overline{\varphi}_j(t) dt + d\Gamma_j(t) \quad j = 1, 2, .., m \tag{2.15}$$

$$y_j(0) = y_j^0. \tag{2.16}$$

On a le lemme suivant

Lemme 2.2

Le problème $(L)_m$ *admet une solution unique.*

Démonstration :

On pose

$$z_j(t) = y_j(t) - \Gamma_j(t) \tag{2.17}$$

on remarque facilement que les équations (2.15) et (2.16) sont équivalentes à :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z_j(t) = \sum_{k=1}^{m} A_{jk}(t) z_k(t) + B_j(t) \\ z_j(0) = y_j^0 \end{cases} \quad j = 1, 2, .., m \tag{2.18}$$

où

$$A_{jk}(t) = -\sum_{i=1}^{m} \overline{\beta}_{jik}(t)\overline{y}_i(t) - \overline{\gamma}_{jk}(t) \text{ et } B_j(t) = -\sum_{i,k=1}^{m} \overline{\beta}_{jik}(t)\overline{y}_i(t)\Gamma_k(t) - \sum_{k=1}^{m} \overline{\gamma}_{jk}(t)\Gamma_k(t) + \overline{\varphi}_j(t)$$

sont des valeurs données. On résout aisément le système d'équations différentielles ordinaires linéaires (2.18). En reconstruisant y par la relation (2.17), on peut voir immédiatement que $y = (y_j)$ satisfait (2.15) et (2.16). L'unicité de la solution est donc évidente.

3.2.2 Estimation de la solution du problème linéarisé.

La résolution du problème $(N)_m$, exige des estimations de la fonction $z(t) = y(t) - \Gamma(t)$ obtenue en résolvant (2.18). On a le lemme :

Lemme 2.3

Il existe une fonction continue croissante bornée $\varphi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, telle que $y(t) = (y_j(t) = (z(t) + \Gamma_j(t))$ est la solution du problème $(L)_m$ et si les fonctions continues $\overline{y}(t)$ qui figurent dans le problème $(L)_m$ vérifient la condition

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{z}_j(t)^2 \leq \varphi(t) \ \forall t \in [0,T] \quad (\overline{z}_j(t) = \overline{y}_j(t) - \Gamma_j(t)), \tag{2.19}$$

alors on a

$$\sum_{i=1}^{m} z_j(t)^2 \leq \varphi(t) \qquad \forall t \in [0,T] \tag{2.20}$$

Démonstration

On pose :

$$\varphi(t) \ = \frac{1}{\underline{c}_\rho}\Psi(t), \tag{2.21}$$

où $\Psi(t)$ est une fonction de l'équation différentielle ordinaire linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi'(t) = c_1(t)\Psi(t) + c_2(t), \\ \Psi'(0) = \overline{c}_\rho \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (y_j^0)^2, \end{array} \right. \tag{2.22}$$

et $c_1(t)$ et $c_2(t)$ sont les fonctions définies par les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(t) = 9\frac{\overline{c}_\rho}{\underline{c}_\rho}A(t) + (\overline{c}_\rho)^{\frac{1}{2}} \left\| f^m(t) \right\|_{(L^2(O))^3} \\ c_2(t) = 3\overline{c}_\rho A(t) \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (\Gamma_j(t))^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \lambda_j (\Gamma_j(t))^2 + (\overline{c}_\rho)^{\frac{1}{2}} \left\| f^m(t) \right\|_{(L^2(O))^3} \\ A(t) = \sup \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x_p} (G^m(t,x))_q \right| : x \in O; \ p,q = 1,2,3 \right\} \\ G^m(t,x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \Gamma_j(t) e_j(x) \end{array} \right. \tag{2.23}$$

Comme $\Gamma_j(t)$ est par hypothèse, continue et que $e_j \in V_m \subset (H^3(O))^3$, la fonction $A(t)$ est bornée et continue. L'équation (2.22) est bien définie, de sorte que l'existence et l'unicité de la solution $\Psi(t)$ soit évidente. On a aussi $\Psi(t)$ continue, non négative et bornée .

On démontre que, si la fonction $\overline{y}$ est donnée et satisfait la condition (2.19) avec $\varphi(t)$ définie par ((2.21)-(2.23)) et si y est solution du problème $(L)_m$ avec la fonction $\overline{y}$, alors la relation (2.20) est vraie.

Puisque $z_j(t) = y_j(t) - \Gamma_j(t)$ $(j = 1, 2., m)$, satisfaient (2.18), en multipliant les équations (2.18) par $\overline{\alpha}_{jk}(t)z_k(t)$ et en les additionnant par rapport à j et k, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}_{jk}(t)z_k(t) &= \sum_{,ji,k=1}^{m} \overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\overline{y}_i(t)z_k(t)z_j(t) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j z_j(t)^2 \\ &\quad - \sum_{,ji,k=1}^{m} \overline{\widetilde{\beta_{jik}}}(t)\overline{y}_i(t)\Gamma_k(t)z_j(t) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Gamma_j(t) + \sum_{j=1}^{m} \overline{\widetilde{\varphi}}_j z_j(t)\end{aligned} \tag{2.24}$$

où

$$\overline{\beta}_{jik}(t) = \int_O \overline{\rho}(t,x)((e_i(x)\cdot\nabla)e_k(x))\cdot e_j(x)dx$$

$$\overline{\widetilde{\varphi}} = \int_O \overline{\rho}(t,x)f^m(t,x)\cdot e_j(x)dx$$

Si on pose : $v(t,x) = \sum_{j=1}^{m} z_j(t)e_j(x)$ et en utilisant les relations ((2.13)- (2.14)) on a :

$$\begin{aligned}-\sum_{,ji,k=1}^{m} \overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\overline{y}_i(t)z_k(t)z_j(t) &= -\int_O \overline{\rho}(t,x)((\overline{u}(t,x)\cdot\nabla)v(t,x))\cdot v(t,x)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_O (\overline{u}(t,x)\cdot\nabla\overline{\rho}(t,x))v(t,x))^2dx \\ &= -\tfrac{1}{2}\int_O (\partial_t\overline{\rho}(t,x))v(t,x))^2dx \\ &= -\tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} (\tfrac{d}{dt}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j(t)z_k(t)\end{aligned}$$

L'équation (2.24) devient :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j,k=1}^{m} \overline{\alpha}_{jk}(t))z_j(t)z_k(t) &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j z_j(t)^2 - \sum_{,ji,k=1}^{m} \overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\overline{z}_i(t)\Gamma_k(t)z_j(t) - \\ &\quad \sum_{,ji,k=1}^{m} \overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\Gamma_i(t)\Gamma_k(t)z_j(t) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\Gamma_j(t)z_j(t) + \sum_{j=1}^{m} \overline{\widetilde{\varphi}_j}z_j(t).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Si on pose $\overline{v}(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\overline{z}_j(t)e_j(x)$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{,ji,k=1}^{m}\overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\overline{z}_i(t)\Gamma_k(t)z_j(t)\right| &= \left|\int_O \overline{\rho}(t,x)(\overline{v}(t,x)\cdot\nabla)G^m(t,x)\cdot v(t,x)dx\right| \\
&\leq 3\overline{c}_\rho A(t)(\frac{1}{2}\int_O |v(t,x)|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_O |\overline{v}(t,x)|^2\,dx) \\
&\leq \frac{3}{2}\overline{c}_\rho A(t)(\frac{1}{\underline{c}_p}\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j(t)z_k(t)+\sum_{j=1}^{m}\overline{z}_j(t)^2)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{,ji,k=1}^{m}\overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\Gamma_i(t)\Gamma_k(t)z_j(t)\right| &= \left|\int_O \overline{\rho}(t,x)(G^m(t,x)\cdot\nabla)G^m(t,x)\cdot v(t,x)dx\right| \\
&\leq 3\overline{c}_\rho A(t)(\frac{1}{2}\int_O |v(t,x)|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_O |G^m(t,x)|^2\,dx) \\
&\leq \frac{3}{2}\overline{c}_\rho A(t)(\frac{1}{\underline{c}_p}\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j(t)z_k(t)+\sum_{j=1}^{m}\Gamma_j(t)^2)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Comme on a :

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Gamma_j(t)z_j(t)\right|\leq\sum_{j=1}^{m}\lambda_j z_j(t)^2+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Gamma_j(t)^2$$

cela implique

$$-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j z_j(t)^2-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Gamma_j(t)z_j(t)\leq\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Gamma_j(t)^2 \tag{2.28}$$

Enfin de compte on a :

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\overline{\widetilde{\varphi}}_j z_j(t)\right|=\left|\int_O \overline{\rho}(t,x)f^m(t,x)\cdot v(t,x)dx\right|\leq\frac{1}{2}(\overline{c}_\rho)^{\frac{1}{2}}\left\|f^m(t,\cdot)\right\|_{(L^2(O))^3}(1+\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j(t)z_k(t). \tag{2.29}$$

Il vient des relations ((2.25)-(2.29)) que

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j(t)z_k(t) &\leq (6\tfrac{\overline{c}_\rho}{\underline{c}_p}A(t)+(\overline{c}_\rho)^{\frac{1}{2}}\left\|f^m(t,\cdot)\right\|_{(L^2(O))^3}\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j(t)z_k(t) \\
&+3\overline{c}_\rho A(t)\sum_{j=1}^{m}(z_j(t)^2+\Gamma_j(t)^2)\quad+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Gamma_j(t)^2+(\overline{c}_\rho)^{\frac{1}{2}}\left\|f^m(t,\cdot)\right\|_{(L^2(O))^3}
\end{aligned}$$

D'aprés l'hypothèse (2.19) et la définition (2.21) on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j(t)z_k(t) \quad \le \quad & (6\frac{\overline{c}_\rho}{\underline{c}_p}A(t)+(\overline{c}_\rho)^{\frac{1}{2}}\left\|f^m(t,\cdot)\right\|_{(L^2(O))^3}\times \\ & \times\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j(t)z_k(t)+3\overline{c}_\rho(\underline{c}_p)^{-1}A(t)\Psi(t)+c_2(t) \end{aligned} \tag{2.30}$$

pour $t=0$ on a :

$$\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(0))z_j(0)z_k(0)=\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(0)y_j^0y_k^0\le\overline{c}_\rho\sum_{j=1}^{m}(y_j^0)^2=\Psi(o)$$

On applique le théorème de la comparaison à la fonction $\Psi(t)$; qui satisfait l'équation linéaire (2.22) et à la fonction $t\longrightarrow\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j(t)z_k(t)$ qui vérifie la relation (2.30), ce qui démontre le lemme.

Pour estimer la dérivée de la fonction $z(t)=y(t)-\Gamma(t)$, on utilise le resultat suivant :

Lemme 2.4

Il existe une constante C telle que, si $y(t)=(y_j(t))=z_j(t)+\Gamma_j(t)$ est solution du problème $(L)_m$ et si la fonction continue $\overline{y}(t)$ figurant dans le problème $(L)_m$ vérifie la condition (2.19), alors on a :

$$\int_0^T\sum_{j,k=1}^{m}(\frac{d}{dt}z_j(t))^2dt\le C \tag{2.31}$$

La constante C ne dépend pas de $\overline{y}(\cdot)$ pour vu que $\overline{y}(\cdot)$ vérifie la condition (2.19).

Démontration :

Comme les fonctions $z_j(t)$ satisfait (2.18), en multipliant les équations par

$$\overline{\alpha}_{jk}(t)\frac{d}{dt}z_j(t)=\overline{\alpha}_{jk}(t))z'_j(t)$$

et en les additionnant par rapport à j et k, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z'_j(t)z'_k(t) \quad = \quad & -\sum_{,ji,k=1}^{m}\overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\overline{z}_i(t)z_k(t)z'_j(t) \\ & -\sum_{,ji,k=1}^{m}\overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\Gamma_i(t)z_k(t)z'_j(t)-\sum_{,ji,k=1}^{m}\overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\overline{z}_i(t)\Gamma_k(t)z'_j(t) \\ & -\sum_{,ji,k=1}^{m}\overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\Gamma_i(t)\Gamma_k(t)z'_j(t)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_jz_j(t)z'_j(t)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\Gamma_j(t)z'_j(t)+\sum_{j=1}^{m}\overline{\overline{\varphi}}_jz'_j \end{aligned} \tag{2.3}$$

On vérifie encore $\sum_{p,q=1}^{3}\int_{O}|(\overline{v}(t,x))_p|$.

$$\left\|\sum_{,ji,k=1}^{m}\overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\overline{z}_i(t)z_k(t)z_j'(t)\right\| = \left|\int_O \overline{\rho}(t,x)(\overline{v}(t,x)\cdot\nabla)v(t,x)\cdot\frac{d}{dt}v(t,x)dx\right|$$

$$\leq \overline{c}_\rho A_1(t)\sum_{p,q=1}^{3}\int_O|(\overline{v}(t,x))_p|\left|\frac{d}{dt}(v(t,x))_q\right| - \leq \overline{c}_\rho A_1(t)\frac{3}{2}(\frac{1}{\epsilon}\int_O|(\overline{v}(t,x))^2|$$

$$+\epsilon\int_O\left|(\frac{d}{dt}v(t,x))^2\right|dx \leq \frac{3}{2}\overline{c}_\rho A_1(t)(\frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^{m}\overline{z}_j(t)^2+\frac{\epsilon}{\underline{c}_\rho}\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j'(t)z_k'(t))$$

où $\quad A_1(t)=\sup\left\{\left|\frac{\partial}{\partial x_p}(v(t,x))_q\right| : x\in O; p,q=1,2,3\right\}$

d'aprés le lemme 2.3, on a $A_1(t)\leq m^{\frac{1}{2}}(\varphi(t))^{\frac{1}{2}}S_1\leq c_1 \quad \forall t\in[0,T]$ où

$$S_1=\sup\left\{\left|\frac{\partial}{\partial t}((v(t,x))_q\right| : x\in O;\ p,q=1,2,3; j=1.....,m\right\}$$

.

En utilisant l'hypothèse (2.19), on obtient

$$\left|\sum_{,ji,k=1}^{m}\overline{\overline{\beta}}_{jik}(t)\overline{z}_i(t)z_k(t)z_j'(t)\right| \leq c(\epsilon')\varphi(t)+\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j'(t)z_k'(t).$$

En effectuant, des calculs analogues pour les autres termes du second membre, de (2.32), et en rappelant que la fonction $A(t)$ définie dans (2.32) est bornée, on obtient

$$\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j'(t)z_k'(t)\leq c(\epsilon'')(\varphi(t)+\sum_{j=1}^{m}\Gamma_j(t)^2+\|f^m(t)\|^2_{(L^2(O))^3}+\epsilon''\sum_{j,k=1}^{m}\overline{\alpha}_{jk}(t))z_j'(t)z_k'(t).$$

Maintenant , en choisissant $\epsilon''=\frac{1}{2}$ et en intégrant cette inégalité, on obtient l'estimation (2.31). Ce qui démontre le lemme.

3.2.3 Existence et unicité de la solution du problème approché (théorème du point fixe de Schauder).

Aprés avoir démontré les lemmes (2.2), (2.3), (2.4), on se propose de démontrer l'existence et l'unicité de la solution des équations (2.7)-(2.11). On commence par démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.5

Le problème (2.6)bis-(2.10)bis admet une solution unique

$$(u,p) \in C(0,T,V_m) \times C^1([0,T],O)$$

Démonstration :

L'existence et l'unicité de la solution $y(\cdot) = z(\cdot) + \Gamma(\cdot)$, démontrées dans le lemme 2.2, nous permet de définir l'opérateur A : $C(O,T;\mathbb{R}^m) \to C(O,T;\mathbb{R}^m)$ déterminé par la relation

$$z = A\overline{z} \iff \left\{ \begin{array}{c} z(\cdot) \text{ est la solution du problème (L)}_m \\ \text{avec } \overline{y}(\cdot) = \overline{z}(\cdot) + \Gamma(\cdot) \end{array} \right.$$

L'opérateur A est continu (par rapport à la topologie $C(O,T;\mathbb{R}^m)$, et d'aprés le lemme (2.1), la solution $\overline{\rho}$ de (2.14), considérée dans la topologie de $C^1([0,T],O)$ dépend continûment de $\overline{u}(t,x) = \sum_{j=1}^{m}(\overline{z}_j(t) + \Gamma_j(t))e_j(x)$ dans la topologie $C(0,T;C^1(O) \cap V_m)$ et donc de $\overline{z}$ dans la topologie $C(O,T;\mathbb{R}^m)$. D'autre part la solution du système d'équations (2.18) équivalent au système d'équations (2.15)-(2.16) dépend continûment des coefficients de l'équation et que la dépendance de ces coéfficients de $(\overline{\rho},\overline{z}) \in C^1([0,T],O) \times C(O,T;\mathbb{R}^m)$, cette solution est aussi continue, ce qui entraine la continuité de A :

$$C(O,T;\mathbb{R}^m) \to C(O,T;\mathbb{R}^m).$$

Soit l'ensemble $K \subset C(O,T;\mathbb{R}^m)$ défini par :

$$K = \left\{ z \in C(O,T;\mathbb{R}^m) : |z(t)| \leq (\varphi(t))^{\frac{1}{2}} \right\}$$

où $\varphi(t)$ est la fonction définie par (2.21)-(2.23). D'après le lemme 2.3, on a

$$AK \subset K \tag{2.33}$$

et d'aprés le lemme 2.4, l'ensemble AK est borné dans la norme :

$$\|Az\|_{H^1(O,T;\mathbb{R}^m)} = (\|Az\|^2_{L^2(O,T;\mathbb{R}^m)} + \left\|\tfrac{d}{dt}Az\right\|^2_{L^2(O,T;\mathbb{R}^m)})^{\frac{1}{2}}.$$

L'injection de $H^1(O,T;\mathbb{R}^m)$ dans $C(O,T;\mathbb{R}^m)$ est compacte, cela implique que AK est compact dans $C(O,T;\mathbb{R}^m)$.

La continuité de A, la relation (2.23) et la compacité de AK sont vérifiées. Le théorème du point fixe de Schauder implique qu'il éxiste un

$$z_0 \in \ AK \subset K \subset C(O,T;\mathbb{R}^m)$$

$$\text{tel que} \quad z^0 = Az^0.$$

en posant $y(t) = z^0(t) + \Gamma(t)$, $y(t)$ résout le problème $(N)_m$.Comme z^0 et Γ appartiennent à $C(O,T;\mathbb{R}^m)$,on a

$$u(\cdot) = \sum_{j=1}^{m} y_j(\cdot)e_j \in C(O,T;V_m).$$

La fonction $\rho(t,x)$ est définie par (2.7)-(2.10), en vertu du lemme 2.1, on a

$$\rho \in C^1([0,T],O)$$

L'unicité de la solution est prouvée par l'estimation de la différence

$$Y(t) = y(t) - \overline{y}(t) = z(t) - \overline{z}(t)$$

deux solutions y, $\overline{y}$ appartenant à $C(O,T;\mathbb{R}^m)$ du problème $(N)_m$. la diffence $Y(t)$ satisfait la relation

$$\begin{aligned} Y\prime_j(t) \quad = \quad & -\sum_{i,k=1}^{m}(\beta_{jik}(t) - \overline{\beta}_{jik}(t))y_i(t)y_k(t) - \sum_{i,k=1}^{m}\overline{\beta}_{jik}(t)Y_i(t)y_k(t) \\ & -\sum_{i,k=1}^{m}\overline{\beta}_{jik}(t))\overline{y}_i(t)Y_k(t) - \sum_{k=1}^{m}(\gamma_{jk}(t) - \overline{\gamma}_{jk}(t))Y_k(t) \\ & -\sum_{k=1}^{m}\overline{\gamma}_{jk}(t))Y_k(t) + \varphi_j(t) - \overline{\varphi}_j(t), \end{aligned}$$

et on a

$$\frac{d}{dt}\|Y(t)\|^2 \leq c(\left|\beta(t) - \overline{\beta}(t)\right| + |\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)| + |\varphi(t) - \overline{\varphi}(t)|)\,|Y(t)| + c'\,|Y(t)|^2$$

où β,γ,φ (respectivement $\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\varphi}$) sont définis de la même façon que dans le paragraphe 2, ρ et $\overline{\rho}$ par (2.7) avec $u = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j$ et $\overline{u} = \sum_{j=1}^{m}\overline{y}_j e_j$. Les différrences

$$\beta(t) - \overline{\beta}(t),\ \gamma(t) - \overline{\gamma}(t),\ \varphi(t) - \ \overline{\varphi}(t)$$

sont estimées par $\sigma = \rho - \overline{\rho}$,de telle sorte qu'on aît :

$$\left|\beta(t) - \overline{\beta}(t)\right| + |\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)| + |\varphi(t) - \ \overline{\varphi}(t)| \leq c' \left\|\sigma(t)\right\|_{L^2(O)} .$$

D'autre part, σ satisfait la relation :

$$\partial_t \sigma + u \cdot \nabla \sigma + U \cdot \nabla \overline{\sigma} = 0$$
$$\tfrac{d}{dt} \left\|\sigma(t)\right\|_{L^2(O)} = \int\limits_O (U \cdot \nabla \overline{\rho})\sigma \leq c \left|Y(t)\right| \left\|\sigma(t)\right\|_{L^2(O)}$$

En appliquant le lemme de Gronwall [ ] à $\eta(t) = \left|Y(t)\right|^2 + \left\|\sigma(t)\right\|_{L^2(O)}$ et en tenant compte de $\eta(0) = 0$, on a l'unicité de la solution. Après tous ces éléments de base on présente la démonstration du résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.6

Il existe une paire de variables aléatoires (u, ρ)(par rapport au même espace de probabilité), à valeurs dans $C(O, T; V_m)$ et dans $C^1([O, T] \times O)$ respectivement, et une seule qui satisfait le système d'équations (2.7)-(2.11).

Démonstation :

D'après le théorème 2.5, pour presque tout ω, le problème (2.7)bis-(2.11)bis avec

$$G^m = G^m(\omega)$$

admet une et une seule solution :

$(u, \rho) = (u(\omega), \rho(\omega)) \in C(O, T; V_m) \times C^1([0, T] \times O)$. Il suffit de démontrer que l'application $G^m \in C(O, T; V_m) \longrightarrow (u, \rho)$ définie par la solution unique obtenue dans le théorème 2.5 est mesurable.

Soient G^m et $\overline{G}^m$ deux éléments de $C(O, T; V_m)$. Soient $(u, \rho), (\overline{u}, \overline{\rho})$ les solutions des équations (2.7)bis-(2.11)bis correspondant à G^m et $\overline{G}^m$ respectivement. En utilisant les notations analogues à celles utilisées dans la démonstration de l'unicité du théorème 2.5.

$$y_j(t) = (u(t, \cdot) \mid e_j)$$

On considère la différence $Y(t) = y(t) - \overline{y}(t) = z(t) - \overline{z}(t) + (\Gamma(t) - \overline{\Gamma}(t))$ où y et $\overline{y}$ sont les solutions du problème $(N)_m$ avec $\Gamma(t) = (G^m(t) \mid e_j)$ et $\overline{\Gamma}(t) = (\overline{G}^m(t) \mid e_j)$. Comme dans la démonstration de l'unicité du théorème 2.5, on a :

$$\frac{d}{dt} \left|Y(t)\right|^2 \leq c \left\|\sigma(t)\right\|_{L^2(O)} \left|Y(t)\right| + c' \left|Y(t)\right|^2 + c'' \left|\Gamma(t) - \overline{\Gamma}(t)\right|$$

$$\frac{d}{dt}\left\|\sigma(t)\right\|_{L^2(O)} \leq c_1 \left|Y(t)\right| \left\|\sigma(t)\right\|_{L^2(O)}$$

où $\sigma(t) = \rho(t) - \overline{\rho}(t)$. Comme on a la convergence $(\Gamma - \overline{\Gamma}) \longrightarrow 0$ dans $C(O,T;\mathbb{R}^m)$, ceci implique que $Y \longrightarrow 0$ dans $C(O,T;\mathbb{R}^m)$,c'est-a-dire $(u - \overline{u}) \longrightarrow 0$, dans $C(O,T;\mathbb{R}^m)$. De ce résultat de convergence, et d'après le lemme 2.1, on a $(\rho - \overline{\rho}) \longrightarrow 0$ dans $C^1([0,T],O)$, ce qui démontre que l'appliquation $G^m \longrightarrow (u,\rho)$ est continue et donc mesurable dans la topologie considérée.

Chapitre 4

Etude d'une classe d'équations stochastiques non linéaire (type Navier-Stokes).

4.1 Présentation du problème et son cadre fonctionnel.

Dans ce chapitre, il s'agit de trouver un processus stochastique $u(t)$ qui satisfait à une équation de la forme :

$$du(t) + (A(t)u(t) + B(u(t)))\, dt = dG(t) + dH(t)$$

dite équation d'évolution dans un espace séparable, avec condition initiale $u(0) = u_0$, où $A(t)$ est un opérateur linéaire, $B(\cdot)$, est un opérateur non linéaire, G est un processus stochastique à variation bornée et H est une martingale où toutes ses valeurs sont dans un espace de Hilbert séparable.

Soient U, V, W trois espaces de Hilbert séparables, $U', V', W\,'$leur dual respectif et tels que :

$$\begin{cases} U' \subset V' \subset W' & \text{chaque espace est dense dans le suivant} \\ & \text{avec injection continue.} \end{cases} \tag{3.1}$$

On suppose que U et son dual U' sont identiques de telle sorte que :

$$W \subset V \subset U = U' \subset V' \subset W\,' \tag{3.2}$$

On suppose aussi que

$$\text{l'injection de } V \text{ dans } U \text{ est compacte} \tag{3.3}$$

Il existe donc une base orthogonale $\{e_j\}$ de U telle que, pour tout j, il existe $\lambda_j > 0$ tel que

$$(e_j\,|v)_V = \lambda_j (e_j\,|v)_U \quad \forall v \in V$$

$$\lambda_j \longrightarrow \infty \ \ pour \ \ j \longrightarrow \infty$$

U_m est le sous espace engendré par $\{e_1, ..., e_m\}$ et par Pr_m la projection orthogonale de U sur U_m. On suppose aussi que :

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} U_m \ \text{ est contenue et dense dans } W \\ \exists c > 0 : \|\mathrm{Pr}_m w\|_W \leq c \|w\|_W \quad \forall w \in W, \ m \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.4}$$

Les processus stochastiques G et H vérifient les hypothéses suivantes :

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P\right) \text{ est une base stochastique sur laquelle les processus stochastiques } G \text{ et } H \text{ sont dé} \tag{3.5}$$

G est un processus stochastique adapté(par rapport à $\mathcal{F}_t$), continue à valeurs dans U, à variation bornée et tel que $G(0) = 0$ p.s et que

$$E(Var_U(G; 0, T))^4 < \infty \tag{3.6}$$

H est une martingale continue à valeurs dans U telle que $H(0) = 0$ p.s.et que :

$$\sup_{0\leq t\leq T} E \|<< H >> (t)\|_{\otimes 1}^2 < \infty \quad (\|\cdot\|_{\otimes 1} = \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(U,U)}). \tag{3.7}$$

H est une martingale, $\|<< H >> (t)\|_{\otimes 1}$ est croissante et égale à $Tr << H >> (t)$, on a :

$\sup_{0\leq t\leq T} E \|<< H >> (t)\|_{\otimes 1}^2 = E \|<< H >> (t)\|_{\otimes 1}^2$

$$= E(Tr << H >> (T))^2 = \sup_{0\leq t\leq T} E \|Tr << H >> (t)\|^2 < \infty$$

($\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(U,U)}$ et Tr sont définis de la même manière que dans le cas où on considère V^0 à la place de U.

Pour les opérateurs $A = A(t)$ et B, on suppose que :

$$\begin{cases} A(t) \in \mathcal{L}(V, V') \ \ \forall t \in [0, T] \\ \exists \ c > 0 : \|A(t)\|_{\mathcal{L}(V,V)} \ \leq c \ \ \forall t \in [0, T] \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \exists \ c_1 > 0, \ \exists \ c_2 \geq 0 \\ \langle A(t)v, v\rangle \geq c_1 \|v\|_V^2 - c_2 \|v\|_U^2 \quad \forall t \in [0, T] \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\left\{\begin{array}{c} B(v) = \widetilde{B}(v,v),\ \widetilde{B} : V \times V \longrightarrow W' \text{ bilinaire} \\ \exists c > 0 : \|B(v)\|_{W'} \leq c\,\|v\|_V^2 \end{array}\right. \tag{3.10}$$

$$\left\langle \widetilde{B}(v,w), v \right\rangle = 0\ \forall w \in W,\ \forall v \in V \tag{3.11}$$

$\forall$m$\in \mathbb{N}$, $\exists$c$_m$>0 :

$$|\langle A(t)u, \vartheta\rangle| \leq c_m \|u\|_U \|\vartheta\|_W\ ;\ |\langle B(u), \vartheta\rangle| \leq c_m \|u\|_U^2 \|\vartheta\|_W \quad \forall t \in [0,T]\ \ \forall \vartheta \in U_m \tag{3.12}$$

La condition initiale est :

$$u_0 \in U \tag{3.13}$$

On suppose aussi, qu'il existe un processus stochastique g à valeurs dans W' et un nombre $p > 1$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{c} g \in L^1(O,T;W')\ p.s. \\ G(t) = \int\limits_0^t g(s)ds \text{ dans } W'\ p.s \\ .E\,\|g\|_{L^1(O,T;W')}^p < \infty \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Il existe un processus stochastique Q à valeurs dans $W' \otimes W'$ et un nombre $\widetilde{p}$ >1 tels que :

$$\left\{\begin{array}{c} Q \in L^1(O,T;\mathcal{L}^\infty(W,W') \quad p.s, \\ \langle\langle H\rangle\rangle = \int\limits_0^t Q(s)ds \quad p.s, \\ E\,\|Q\|_{L^1(O,T;\mathcal{L}^\infty(W,W'))}^{\widetilde{p}} < \infty \end{array}\right. \tag{3.15}$$

où $\mathcal{L}^\infty(W,W')$ est l'espace des opérateurs compacts muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(W,W')}$.

Sinon, on suppose que

$$\exists c > 0, \exists \alpha \in]0,2] : \|B(v)\|_{W'} \leq c\,\|v\|_U^\alpha\,\|v\|_V^{2-\alpha}\ \ \forall v \in V \tag{3.16}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction réelle $\gamma(\epsilon;\cdot)$ définie sur $[0,T]$, continue et telle que $\gamma(\epsilon;0) = 0$ et que :

$$\left\{\begin{array}{c} P\left(\{\omega \in \Omega : \forall \delta \in [0,T], S(\omega;\delta) \leq \gamma(\varepsilon;\delta)\}\right) \geq 1 - \varepsilon \\ \text{où } S(\omega;\delta) = \sup\left\{Var_{W'}(G(\omega);t_1,t_2) : [t_1,t_2] \subset [0,T], t_2 - t_1 \leq \delta\right\} \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Il existe $p > 0, \overline{\alpha} > 0, c > 0$ tels que

$$\forall\,[s,t] \subset [0,T]\,,\ E\left(Tr\left\langle\langle H\rangle\right\rangle(t) - Tr\left\langle\langle H\rangle\right\rangle(s)\right)^p \leq c(t-s)^{1+\overline{\alpha}}. \tag{3.18}$$

Sous ces hypothèses, on obtient les résultats suivants.

Théorème :3.1.[HFY]

Si les hypothèses ((3.1)-(3.15)) sont vérifiées, alors il existe une base stochastique $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}, \widetilde{P}\right)$ et des variables aléatoires

$$\begin{aligned} u:\ \widetilde{\Omega} &\longrightarrow L^2(O,T,U) \\ \widetilde{G}:\ \widetilde{\Omega} &\longrightarrow C(O,T,U) \\ \widetilde{H}:\ \widetilde{\Omega} &\longrightarrow C(O,T,U) \end{aligned}$$

qui satisfaient les conditions suivantes de ((3.19)-(3.22)) :

$$u \in L^2(O,T,V)\ \widetilde{P} - p.s \tag{3.19}$$

pour toute fonction $\varphi : C(O,T,U) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on a :

$$E_P\varphi(G+H) = E_{\widetilde{P}}(\widetilde{G} + \widetilde{H}) \tag{3.20}$$

$$\widetilde{H} \text{ est une martingale par rapport à } \left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}, \widetilde{P}\right) \tag{3.21}$$

pour toute fonction $\Psi_r(\cdot) = \Psi_r(\widetilde{\omega};\cdot) : C^1(O,T;\mathbb{R})$ avec $r \in [0,T]$, fonction bornée c'est-à-dire $\exists c > 0\ \ \|\Psi_r(\widetilde{\omega};\cdot)\|_{C^1(O,T;\mathbb{R})} \leq c\ \forall\widetilde{\omega} \in\ \widetilde{\Omega}$, mesurable par rapport $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ et telle que :

$$\begin{gathered} \text{si}\ \ r > 0,\ \ \Psi_r(t) = 0\ \forall t \in [0,r] \cup \{T\} \\ \text{si } r = 0\ \Psi_r(T) = 0 \end{gathered}$$

pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et pour tout $\vartheta \in W$, on a :

$$E_{\widetilde{P}}\left[\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^T \Psi_r'(t)\varphi(\langle u(t),\vartheta\rangle)dt - \int_0^T \Psi_r(t)\varphi'(\langle u(t),\vartheta\rangle)\left(\langle A(t)u(t),\vartheta\rangle + \langle B(u(t)),\vartheta\rangle\right)dt + \\ \displaystyle\int_0^T \left\langle \Psi_r(t)\varphi'(\langle u(t),\vartheta\rangle), d\widetilde{G}(t)\right\rangle + \frac{1}{2}\int_0^T \left\langle \Psi_r(t)\varphi''(\langle u(t),\vartheta\rangle)(\vartheta\otimes\vartheta), d << \widetilde{H} >> (t)\right\rangle \end{array}\right] = \tag{3.22}$$

$= -E_{\widetilde{P}}\Psi_r(0)\varphi(\langle u_0, \vartheta\rangle)$

Théorème :3.2.[HFY]

Si les hypothèses de ((3.1)-(3.13)) et de ((3.16)-(3.18)) sont vérifiées, alors il existe une base stochastique $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}, \widetilde{P}\right)$ et des variables aléatoires

$$u: \widetilde{\Omega} \longrightarrow L^2(O,T,U)$$
$$\widetilde{G}: \widetilde{\Omega} \longrightarrow C(O,T,U)$$
$$\widetilde{H}: \widetilde{\Omega} \longrightarrow C(O,T,U)$$

qui satisfaient les conditions de ((3.19)-(3.21)) et la condition suivante :

pour tout $\vartheta \in W$, le processus

$$M^\vartheta(t) = \left\langle u(t) - u_0 - \widetilde{G}(t), \vartheta\right\rangle + \int_0^t \left(\langle A(s)u(s), \vartheta\rangle + \langle B(u(s)), \vartheta\rangle\right) ds \quad (3$$

est une martingale par rapport à $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}, \widetilde{P}\right)$ avec le processus croissant ass

$$\langle\langle M^\vartheta\rangle\rangle(t) = \int_0^t \left\langle \vartheta\otimes\vartheta, d\left\langle\left\langle \widetilde{H}\right\rangle\right\rangle(s)\right\rangle \quad \widetilde{P} - p.s, \text{ et telle que } M^\vartheta(0) = 0 \quad \widetilde{P} - p.s$$

Il est aussi facile de généraliser les conditions sur les données des théorèmes 3.1 et 3.2, en ajoutant avec G et H, un processus F adapté par rapport à $\mathcal{F}_t$, continue à valeurs dans V' et telle qu'il existe un processus stochastique f vérifiant les relations suivantes :

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds \quad p.s$$
$$E\left\|f\right\|^4_{L^2(O,T,V')} < \infty$$

Les théorèmes 3.1 et 3.2 restent vrais si on ajoute

$$\int_0^T \Psi_r(t)\varphi'(\langle u(t), \vartheta\rangle)\left\langle \widetilde{f}(t), \vartheta\right\rangle dt$$

à l'expression sous l'espérance mathématique $E_{\widetilde{P}}$ dans (3.22), ou si on ajoute

$$-\int_0^t \left\langle \widetilde{f}(t), \vartheta\right\rangle ds$$

dans l'expression de $M^\vartheta(t)$ dans (3.23), où $\widetilde{f}$ est une variable aléatoire : $\widetilde{\Omega} \longrightarrow L^2(O,T,V')$, dont l'existence fait partie de l'énoncé du théorème comme celle de $\widetilde{G}$ et de $\widetilde{H}$ et égale en loi à f sur $L^2(O,T,V')$.

4.2 Existence et estimation des solutions approchées du problème considéré.

Lemme 3.3

Supposons que les hypothèses ((3.1)-(3.13)) sont vérifiées et on pose

$$G^m = \Pr_m G,\ \ H^m = \Pr_m H,\ \ u_0 = \Pr_m u_0 \tag{3.24}$$

alors il existe un processus stochastique u^m continue à valeurs dans U_m et tel que, pour tout $v \in U_m$, on ait

$$\langle u^m(t), v\rangle = \langle u_0^m, v\rangle - \int_0^t \langle A(s)u^m(s), v\rangle\, ds - \int_0^t \langle B(u^m(s)), v\rangle\, ds + \langle G^m(t) + H^m(t), v\rangle \ \ p.s. \tag{3.25}$$

u^m est appelé solution approchée. Pour m fixé, la solution approchée u^m est unique. Les solutions approchées $u^m(m = 1, 2, ...)$ vérifient les estimations suivantes :

$$E_{0\leq t\leq T} \sup \|u^m(t)\|_U^4 \leq c_1 < \infty \tag{3.26}$$

$$E\left[\int_0^T \|u^m(t)\|_V^2\, dt\right]^2 \leq c_2 < \infty \tag{3.27}$$

$$E_{0\leq t\leq T} \sup \|u^m(t)\|_U^2 + E\int_0^T \|u^m(t)\|_V^2\, dt \leq c_3 < \infty \tag{3.28}$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes indépendantes de m.

démonstration

pour tout $\omega \in \Omega$, le système d'équations $z^m(\cdot) = z^m(\omega; \cdot) : [0, T] \longrightarrow U_m$

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{d\langle z^m(t), e_j\rangle}{dt} + \langle A(t)z^m(t), e_j\rangle + \langle B(z^m(t)), e_j\rangle + \left\langle \widetilde{B}(G^m(\omega;t) + H^m(\omega;t), z^m(t)), e_j\right\rangle + \\ \left\langle \widetilde{B}(z^m(t), G^m(\omega;t) + H^m(\omega;t)), e_j\right\rangle = -\langle B(G^m(\omega;t) + H^m(\omega;t)), e_j\rangle - \langle A(t)(G^m(\omega;t) + H^m(\omega;t \\ z^m(0) = u_0^m \end{array}\right. \tag{3.29}$$

on pose $u^m(\omega; t) = z^m(\omega; t) + G^m(\omega; t) + H^m(\omega; t)$.

On voit que $u^m(\cdot) = u^m(\omega;\cdot)$ est l'unique processus stochastique continue à valeurs dans U_m qui satisfait à (3.25).

Si on applique la formulle d'Ito à

$$(u^m(t)\,|u^m(t))_U = (z^m(t) + G^m(t) + H^m(t)\,|z^m(t) \; + G^m(t) + H^m(t))_U$$

On voit que

$$(u^m(t)\,|u^m(t))_U - (u_0^m\,|u_0^m)_U = 2\int_0^t \left\langle u^m(s), \tfrac{d}{ds}z^m(s)\right\rangle ds + 2\int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s)\rangle + 2\int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s)\rangle + \int_0^t \langle 1, d\,\langle\langle H^m\rangle\rangle(s)\rangle \;\; p.s$$

Si on substitue l'expression de (3.29) à $\frac{d}{ds}z^m(s)$ dans cette dernière relation et en tenant compte de (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned}(u^m(t)\,|u^m(t))_U - (u_0^m\,|u_0^m)_U &= -2\int_0^t \langle A(s)u^m(s), u^m(s)\rangle\, ds \\ &\quad +2\int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s)\rangle + 2\int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s)\rangle + \int_0^t \langle 1, d\,\langle\langle H^m\rangle\rangle(s)\rangle\end{aligned} \quad (3.$$

En vertu de (3.29), on déduit de (3.30) que

$$\begin{aligned}\|u^m(t)\|_U^2 + 2c_1\int_0^t \|u^m(s)\|_V^2\, ds &\le \|u_0^m\|_U^2 + \\ &\quad 2c_2\int_0^t \|u^m(s)\|_U^2\, ds + 2\left|\int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s)\rangle\right| + \\ &\quad 2\left|\int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s)\rangle\right| + \int_0^t \langle 1, d\,\langle\langle H^m\rangle\rangle(s)\rangle \;\; p.s\end{aligned} \quad (3.31)$$

comme

$$\int_0^t \|u^m(s)\|_V^2\, ds \ge 0$$

En appliquant le lemme de Gronwall à la fonction $\varphi(t) = \|u^m(t)\|_U^2$ dans (3.31), on obtient

$$\|u^m(t)\|_U^2 \le e^{2c_2 t}\left[\|u_0^m\|_U^2 + 2\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s)\rangle\right| + 2\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s)\rangle\right| + Tr\,\langle\langle H\rangle\rangle(T)\right. \quad (3.32)$$

comme

$$E_{\leq t\leq T}\sup\left|\int_0^t \langle u^m(s), dG^m(s)\rangle\right|^2 \leq \epsilon E\sup_{0\leq t\leq T}\|u^m(t)\|_U^4 + c(\epsilon)E(Var_U(G;0,T))^4$$

$$E_{0\leq t\leq T}\sup\left|\int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s)\rangle\right|^2 \leq \epsilon E\sup_{0\leq t\leq T}\|u^m(t)\|_U^4 + c(\epsilon)E(Tr\left\langle\langle H\rangle\right\rangle(T))^2$$

pour ces inégalités, on peut prendre $\epsilon = \frac{1}{4}e^{-4c_2T}$. En suite le carré de (3.32)

$$E_{0\leq t\leq T}\sup\|u^m(t)\|_U^4 \leq C\left(\|u_0^m\|_U^4 + E(Var_U(G;0,T))^4 + E(Tr\left\langle\langle H\rangle\right\rangle(t))^2\right)$$

avec C constante indépendante de m, d'apres (3.6) et (3.7), on peut obtenir (3.26). L'estimation (3.27) résulte des relations (3.26) (3.31) et des estimations de

$$E\sup\left|\int_0^t \langle u^m(s), dH^m(s)\rangle\right|^2$$

(3.28) est une conséquence de (3.26),(3.27) ce qui démontre le lemme.

Lemme 3.4

On suppose que les hypothéses ((3.1)-(3.13)) sont vérifiées.Alors pour tout $\alpha' < 1$ et pour $\varepsilon > 0$ il existe $c(\varepsilon) = c(\alpha';\varepsilon)$ indépendante de m et telle que :

$$P\left(\left\{\omega : \sup_{\|w\|_W=1}\delta^{-\alpha'}\int_0^{T-\delta}|\langle u^m(t+\delta)-u^m(t), w\rangle|^2\,dt \leq c(\varepsilon)\right\}\right) \geq 1-\epsilon. \qquad \text{avec } 0<\delta\leq T \tag{3.33}$$

démonstration.

On suppose que $w \in U_m$. Alors, on déduit que de (3.25) que

$$\begin{aligned} |\langle u^m(t+\delta)-u^m(t), w\rangle|^2 \;\leq\; & |\langle u^m(t+\delta)-u^m(t), w\rangle| \times \\ & \int_t^{t+\delta}(|\langle A(s)u^m(s), w\rangle| + |\langle B(u^m(s)), w\rangle|)\,ds + \\ & |\langle G^m(t+\delta)-G^m(t), w\rangle| + |\langle H^m(t+\delta)-H^m(t), w\rangle| \end{aligned} \tag{3.34}$$

D'apres (3.8) et (3.10), on a

$$\begin{aligned}\int_0^{T-\delta}\left|\langle u^m(t+\delta)-u^m(t),w\rangle\int_t^{t+\delta}\Gamma(s)ds\right|dt &\leq c\int_0^{T-\delta}(\|u^m(t+\delta)\|_U+\|u^m(t)\|_U)\int_t^{t+\delta}(\|u^m(s)\|_V+\\ +\|u^m(s)\|_V^2)dsdt &= c\int_t^T(\|u^m(s)\|_V+\|u^m(s)\|_V^2)\int_{0\vee(s-\delta)}^{s\wedge(T-\delta)}(\|u^m(t+\delta)\|_U\\ &\quad+\|u^m(t)\|_U)dtds\end{aligned}$$

où

$$\Gamma(s)=|\langle A(s)u^m(s),w\rangle|+|\langle B(u^m(s)),w\rangle|$$

donc

$$\int_0^{T-\delta}\left|\langle u^m(t+\delta)-u^m(t),w\rangle\int_t^{t+\delta}\Gamma(s)ds\right|dt\leq 2c\delta\sup_{0\leq t\leq T}\|u^m(t)\|_U\,(\|u^m\|_{L^2(0,T,V)}+\|u^m\|^2_{L^2(0,T,V)}) \tag{3.35}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{T-\delta}|\langle u^m(t+\delta)-u^m(t),w\rangle|\,|\langle G^m(t+\delta)-G^m(t),w\rangle|\,dt &\leq c_0\sup_{0\leq t\leq T}\|u^m(t)\|_U\times \qquad (3.36)\\ \int_0^{T-\delta}Var_U(G^m;t,t+\delta)dt &\leq c\delta\sup_{0\leq t\leq T}\|u^m(t)\|_U\,Var_U(G^m;0,T)\end{aligned}$$

En considérant

$$\delta^{-\alpha'}\int_0^{T-\delta}|\langle H^m(t+\delta)-H^m(t),w\rangle|^2\,dt$$

Définissant $I_n=]2^{-n}T,2^{-n+1}T]$ $(n=1,2,.....)$ et prolongeons H^m à droite en posant $H^m(t)=H^m(T)$ pour $t\geq T$.On a alors

$$\begin{aligned}&E\sup_{\delta\in\ I_n}\delta^{-\alpha'}\int_0^{T-\delta}|\langle H^m(t+\delta)-H^m(t),w\rangle|^2\,dt\\ \leq\ &2^{n\alpha'}T^{-\alpha'}4\int_0^{T-2^{-n}T}E(\langle\langle\,\langle H^m,w\rangle\,\rangle\rangle(t+2^{-n+1}-\langle\langle\,\langle H^m,w\rangle\,\rangle\rangle(t))dt\leq c2^{n(\alpha'-1)}E\sup_{0\leq t\leq T}\|\langle\langle H\rangle\rangle(t)\|_{\otimes 1}\end{aligned}$$

et on a

$$P\left(\left\{\omega : \sup_{0\leq\delta\leq T} \delta^{-\alpha'} \int_0^{T-\delta} |\langle H^m(t+\delta) - H^m(t), w\rangle|^2 \, dt \geq \frac{1}{\epsilon_0}\right\}\right) \leq \qquad (3.37)$$

$$\epsilon_0 cE \left\|\text{‹‹}H\text{››}(t)\right\|_{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-1+\alpha'})^n \Omega = \epsilon_0 c' < \infty$$

compte tenue de la relation

$$\begin{aligned} & |\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w\rangle| \, |\langle H^m(t+\delta) - H^m(t), w\rangle| \\ \leq \; & \frac{1}{2} |\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w\rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle H^m(t+\delta) - H^m(t), w\rangle|^2 \end{aligned}$$

on déduit de (3.27), (3.28) ,(3.34) jusqu'à (3.37) que la relation (3.33) est vraie sous la restriction $w \in U_m$. Mais la condition (3.4) et l'égalité suivante

$$\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), w\rangle = \left\langle u^m(t+\delta) - u^m(t), \Pr_m w\right\rangle$$

nous permet d'enlever cette restriction, de sorte que la relation (3.33) soit vérifiée, sans aucune restriction ; le lemme est démontré.

Lemme 3.5

On suppose que les hypothèses ((3.1)-(3.13)) et ((3.16)-(3.18)) sont vérifiées. Alors il existe une fonction $\beta(\cdot) = \beta(\varepsilon; \cdot)$ définie sur $[0, T]$, continue, indépendante de m et telle que $\beta(\varepsilon; \cdot) = 0$ et que, pour les solutions approchées u^m, on a :

$$P\left(\{\omega : \forall\ \delta \in [0,T], \forall\ w \in W : \|w\|_W = 1,\ S_1(m,\omega;\delta,w) \leq \beta(\epsilon;\delta)\ \}\right) \geq 1 - \epsilon \qquad (3.38)$$

où

$$S_1(m,\omega;\delta,w) = \sup\{|u^m(\omega,t) - u^m(\omega,s), w| : 0 \leq s \leq t \leq T,\ t-s \leq \delta\}$$

démonstration.

On suppose que $w \in U_m$.Alors, on déduit de (3.25) que

$$\begin{aligned} |\langle u^m(t) - u^m(s), w\rangle| \leq & \int_s^t |\langle A(r)u^m(r), w\rangle| + |\langle B(u^m(r)), w\rangle| \, dr \qquad (3.39) \\ & + |\langle G^m(t) - G^m(s), w\rangle| + |\langle H^m(t) - H^m(s), w\rangle| \end{aligned}$$

Il résulte de (3.8) , (3.16) que

$$\int_s^t |\langle A(r)u^m(r), w\rangle| + |\langle B(u^m(r)), w\rangle| \, dr \le c(t-s)^{\frac{1}{2}} \times \|u^m\|_{L^2(0,T,V)} + c(t-s)^{\frac{\alpha}{2}} (\sup_{0\le r\le T} \|u^m(t)\|_U)^\alpha \|u^m\|_{L^2(0,T,V)}^{\alpha-2} \tag{3.40}$$

pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction réelle $\beta_1(\cdot) = \beta_1(\epsilon, \cdot)$ continue sur $[0,T]$ et telle que $\beta_1(0) = 0$ et que

$$P\left(\{\omega : \forall\, \delta \in [0,T] \sup\{\|u^m(t) - u^m(s)\|_U : 0 \le s \le t \le T,\ t-s \le \delta\} \le \beta_1(\delta)\}\ \right) \ge$$

$1 - \epsilon$.

On a d'autre part

$$|\langle u^m(t) - u^m(s), w\rangle| \le c\,\|H(t) - H(s)\|_U \ \ \forall \in U_m\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Le lemme résulte de cette estimation de $|\langle u^m(t) - u^m(s), w\rangle|$, des estimations (3.39), (3.40) (3.28) et de la conséquence de sur $|\langle u^m(t) - u^m(s), w\rangle|$.

4.3 Etude du cas particulier des équations de Navier-Stokes stochastiques.

Les équations de Navier-Stokes stochastiques dans un domaine régulier et borné de $\mathbb{R}^n$ avec $n \ge 2$ sont des cas particuliers des équations stochastiques du type Navier-Stokes considérées dans les théorèmes 3.1 et 3.2, ces théorèmes peuvent être appliqués aux équations de Navier-Stokes stochastiques. On précise que, pour $n > 3$, les équations et leurs solutions ne représentent plus le mouvement d'un fluide réel.

Cas de dimension 3.

Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ dont la frontière δO est assez régulière. Soient $V^0, V^1, \Pr$ les éspaces et l'opérateur définis (1.5), (1.6) (1.11).Posons :

$$A = -\Pr \Delta, \quad B(u) = \Pr(u \cdot \nabla)u.$$

Alors Les équations de Navier-Stokes stochastiques, s'écrivent sous la forme

$$du(t) = [-Au(t) - B(u(t))]\, dt + dG(t) + dH(t).$$

Pour appliquer les théorèmes 3.1 et 3.2 au probème correspondant à cette équation, nous choisissons les espaces de Hilbert séparables U, V, W comme suit :

$$\begin{cases} U = V^0 \\ V = W = V^1. \end{cases}$$

Les espaces U, V, W et les opérateurs A et B satisfaient les conditions ((3.1)- (3.12)) et (3.16)(on pose $\alpha = \frac{1}{2}$ pour cette dernière condition) ; et si les processus stochastiques G, H et la condition initiale u_0 satisfaient les conditions((3.5)-(3.18)). Alors il existe une base stochastique $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}, \widetilde{P}\right)$ et des variables aléatoires

$$u : \widetilde{\Omega} \longrightarrow L^2(O, T, U)$$
$$\widetilde{G} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow C(O, T, U)$$
$$\widetilde{H} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow C(O, T, U)$$

qui satisfaient aux conditions ((3.19)-(3.21)) et (3.23).Ces variables aléatoires ainsi obtenues représent une solution des équations de Navier-Stokes stochastiques en dimension 3

Cas de dimension 2.

On choisit $W = V^1$, avec les définitions suivantes sur A, B, U, V et satisfaisant les conditions des théorèmes 3.1 et 3.2.

les opérateurs A et B sont définis

$$\begin{cases} A = -\operatorname{Pr}(\sum_{i=1}^{n} \partial^2_{x_i} \cdot) \\ B(u) = \operatorname{Pr}(u \cdot \nabla)u = \operatorname{Pr}(\sum_{i=1}^{n} u_i \partial_{x_i} u) \end{cases}$$

$$U = V^0, V = V^1$$

Les théorèmes 3.1 et 3.2. sont vérifiés avec $W = V^1$ (car $W = V^s$ avec $s \geq 2$ signifie une hypothèse plus forte que le cas où $W = V^1$) et les théorèmes sont vérifiés egalement.

Cas de dimension 1.

Ce cas est sans intéret car la condition $\nabla \cdot u = \delta_x u = 0$

Cas où n est supérieur à 3.

La condition sur s pour que la condition (3.10) et (3.16) soient vérifiées. Le critère du choix de s résulte des propriétés de l 'immersion des espaces de Sobolev. En effet, si $v \in V^1$, alors on a :

$$\|v\|_{(L^q(O))^n} \leq c\,\|v\|_{(L^1(O))^n} \leq c'\,\|v\|_{V^1}\,, \quad q = \tfrac{2n}{n-2}$$

D'autre part, si $w \in V^s$, alors on a :

$$\|w\|_{(L^r(O))^n} \leq c\,\|w\|_{(H^s(O))^n} \leq c'\,\|w\|_{V^s}\,, \quad r = \tfrac{2n}{n-2s}$$

Pour qu'il existe un nombre $c > 0$ tel que

$$\|B(v)\|_{W'} \leq c \|v\|_V^2 \ \ \forall v \in V$$

il suffit que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$ ou encore $s \geq \frac{n}{2} - 1$.

D'autre part, d'apres le théorème d'immersion de Sobolev, pour que la condition (3.16) soit vérifiée il suffit aussi que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$ ou encore $s \geq \frac{n}{2} - 1$.

Or quelque soit $s \geq 1$, les conditions (3.1) ;(3.2) (3.3) ; (3.4) ;(3.8) ;(3.9) ; (3.12) sont vérifiées avec $W = V^s$ qui satisfait à la condition (3.10) satisfait aussi à la condition (3.11).

Si $s \geq (\frac{n}{2}) - 1$ et si u_0, G, H sont donnés et satisfaient les conditions (3.13) ;(3.14) (3.15), alors le théorème 3.1 est vérifié avec A, B, U, V donnés dans (3.a) ;(3.b), avec $W = V^s$.

Chapitre 5

Résultats numériques.

5.1 Mise en oeuvre par la résolution numérique du probléme de Navier-Stokes

On condsidère le problème de Navier Stokes Suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans }]0,T[\times \Omega \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans }]0,T[\times \Omega \\ u = 0 & \text{sur }]0,T[\times \partial\Omega \\ u(t=0) = u_0 \end{cases}$$

Formulation variationnelle, en utilisant la formulle de Green :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v = \nu \int_\Omega \nabla u \times \nabla v - \nu \int_{\partial\Omega} \nabla u \times v \times d\sigma + \rho \int_\Omega (u \cdot \nabla u) v du + \int_\Omega \nabla p \times v$$

On considère un schéma numérique d'élément finis en espace et différence finies implicites en temps comme suit :

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} - \nu\Delta u^{n+1} = 0 & \text{dans }]0,T[\times \Omega \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0 & \text{dans }]0,T[\times \Omega \\ u^{n+1} = 0 & \text{sur }]0,T[\times \partial\Omega \\ u^0 = u_0 \end{cases}$$

où U^n est calculé en fonction de u^n pendant un pas de temps Δt. On approxime en espace par les éléments P1/P2 pour la vitesse et la pression.

Programme en FreeFem

```
// Résolution de l'équation de Navier Stokes éléments finis en espace
// et différences finies en temps
mesh Th=square(30,30,[x,y]);
fespace Vh(Th,P2);     // pour la vitesse
fespace Wh(Th,P1);     // pour la pression
```

```
/
Vh u1,u2,U1,U2,v1,v2;
Wh p,q;
macro grad(u1,u2)
          [dx(u1),dx(u2),dy(u1),dy(u2)]     //

real nu=1.;     // Visocité
real rho=50.;     // inertie
real dt=0.1;     // pas de temps
real T=10;     // temps final
real[int] viso=(50);
real visomin=-20.;
real visomax=20.;
for (int i=0;i<viso.n;i++) viso[i]=visomin*(1.-(1.*i)/viso.n)+(visomax*i)/viso.n;
int k=0;
problem NS(u1,u2,p,v1,v2,q,init=k)=
          int2d(Th)(nu*(grad(u1,u2)'*grad(v1,v2)))
          +int2d(Th)([u1,u2]'*[dx(q),dy(q)])
          +int2d(Th)([v1,v2]'*[dx(p),dy(p)])
          +int2d(Th)(1.e-5*p*q)
          +int2d(Th)(rho*([u1,u2]'*[v1,v2])/dt)
          -int2d(Th)(rho*([U1,U2]'*[v1,v2])/dt)
          +on(1,2,4,u1=0,u2=0)
          +on(3,u1=1,u2=0);

u1=0;u2=0; p=0;
for (real t=0;t<T;t+=dt){
//     plot(p,[u1,u2],cmm="Time t="+t,viso=viso);
plot([u1,u2],cmm="u1,u2 at Time t="+t,viso=viso,wait=1);
// plot(u1,cmm="u1 at Time t="+t,viso=viso,wait=1);
```

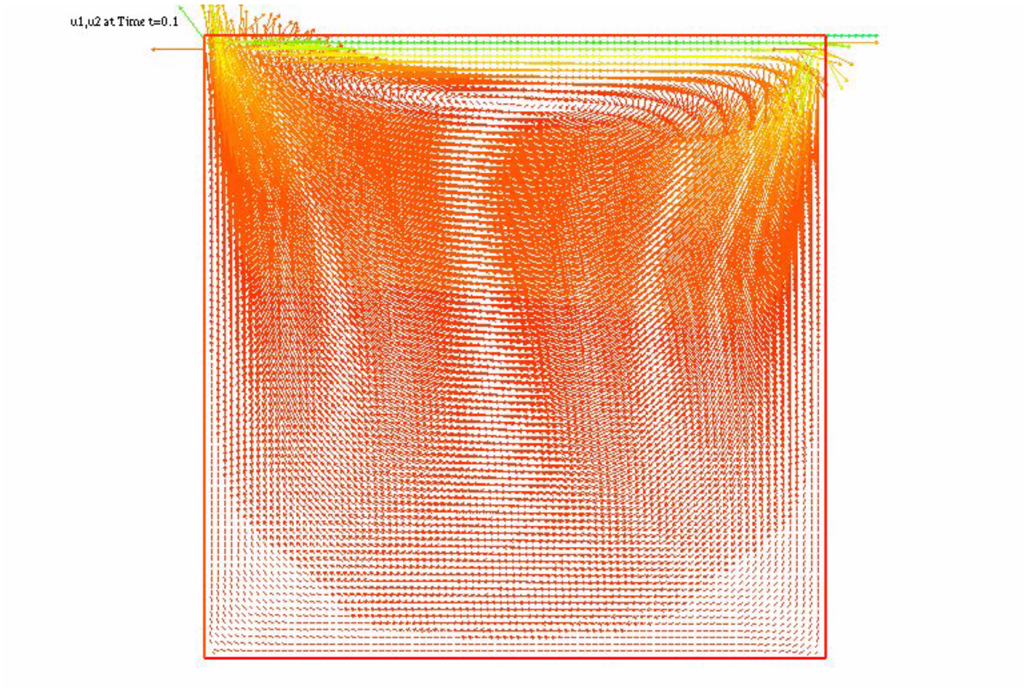

FIG. 5.1 – vitesse du fluide pour t=0,1

```
// plot(u2,cmm="u2 at Time t="+t,viso=viso,wait=1);
plot(p,cmm="pression at Time t="+t,viso=viso,wait=1);
    U1=convect([u1,u2],-dt,u1);
    U2=convect([u1,u2],-dt,u2);
    NS; k++;
}.
```

5.2 Résultats numériques.

On remarque d'après les resultats graphiques (voir figure 4.1) que le schéma numérique choisi s'adapte bien avec les données du problème, c'est à dire aucun phénomène d'instabilité numérique n'est apparu même dans le calcul pour un nombre d'itération assez grand. Le pas de temps choisi pour ces calculs est 0.1 car aucune restriction sur les conditions de stabilté n'est imposée; vu que le schéma en différences finies pour l'approximation temporelle utilisée est implicite.

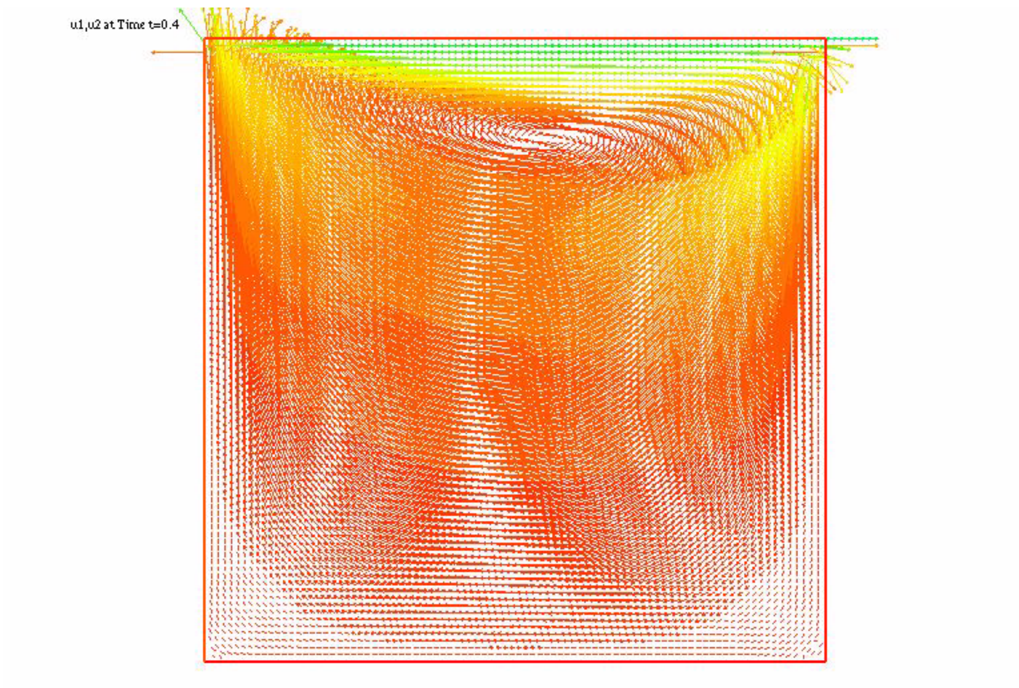

Fig. 5.2 – itesse du fluide pour t=0,4

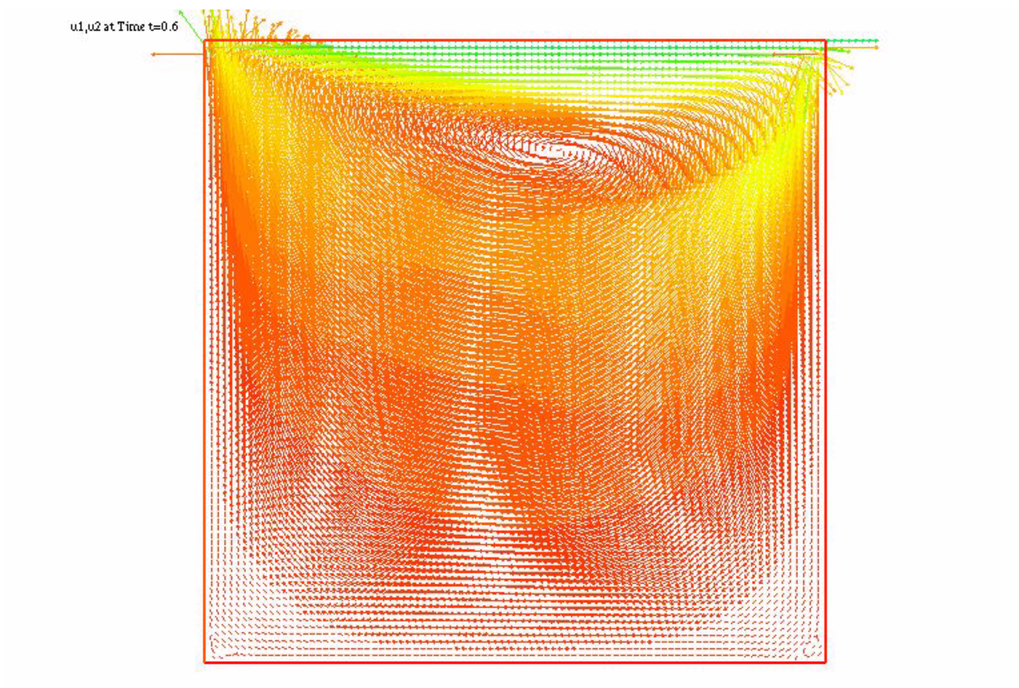

Fig. 5.3 – vitesse du fluide pour t=0,6

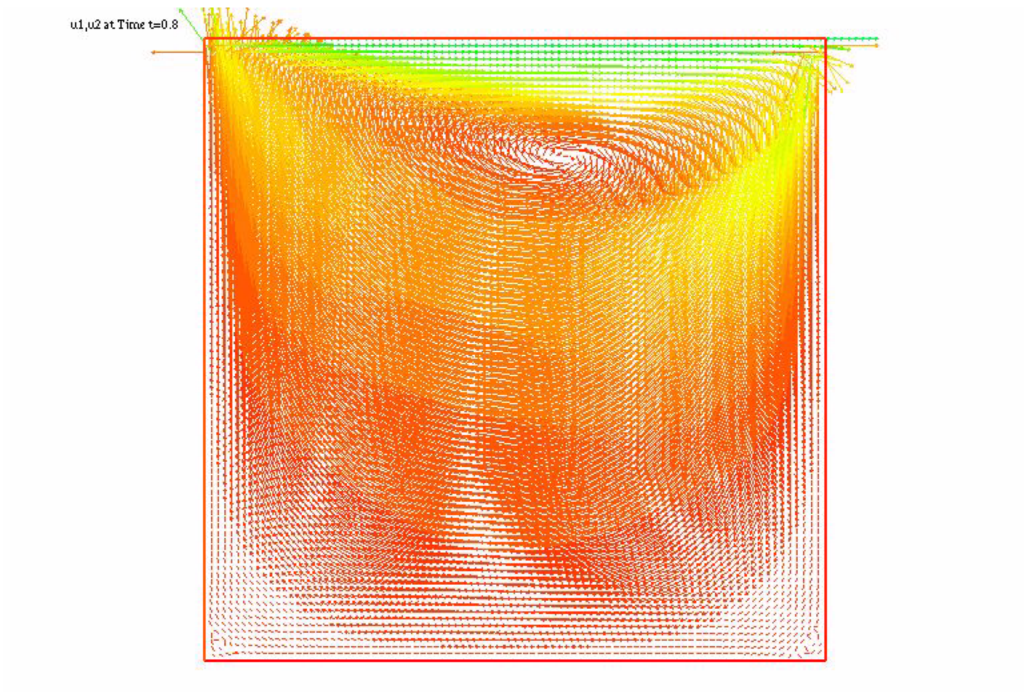

FIG. 5.4 – la vitesse du fluide pour t=0,8

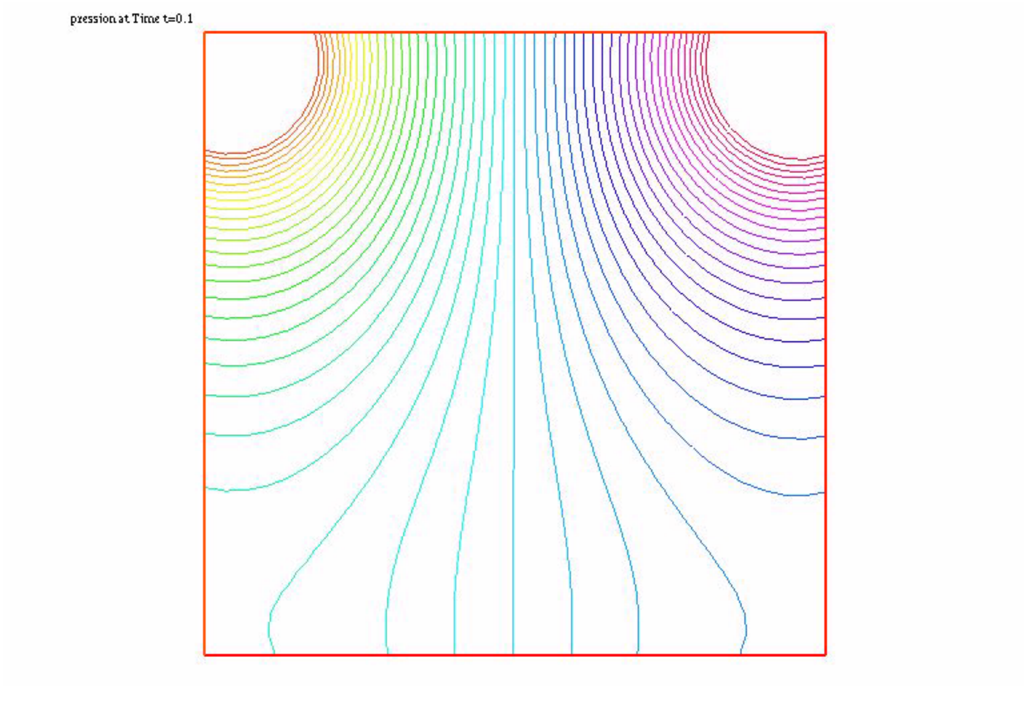

FIG. 5.5 – pression pour t=0,1

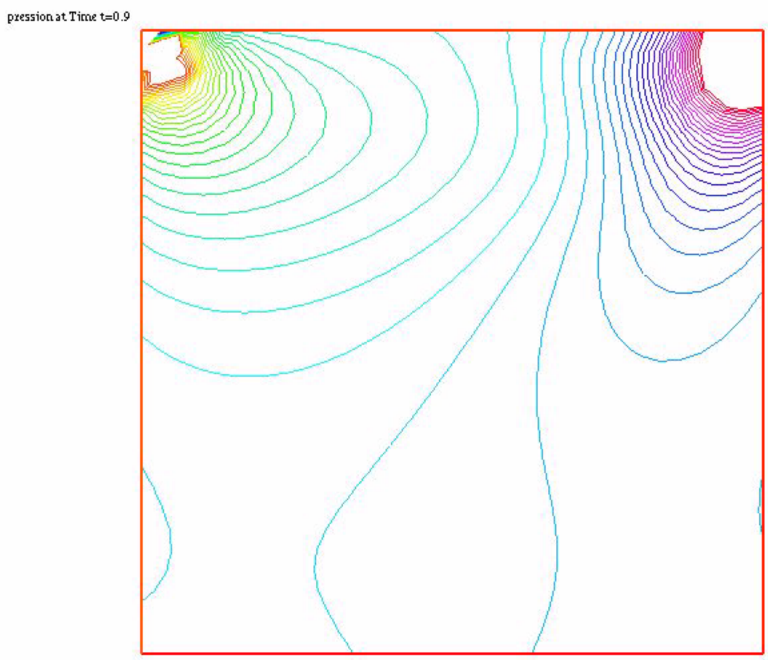

FIG. 5.6 – pression pour t=0,9

Conclusion et perspectives

Tout le long du présent travail, notre objectif a été l'étude de l'éxistence et l'unicité de la solution des équations Navier-Stokes stochastiques non homogénes, décrivant le mouvement d'un fluide visqueux incompressible, quand la force extérieure est soumise à une perturbation aléatoire, le fluide subit, alors une fluctuation d'aspect probabiliste, ce qui augmente les difficultés de résolution de ce type d'équations, déja assez conpliqué.
Nous avons traité, les équations Navier-Stokes stochastiques non homogénes, selon deux approches diffentes ; la prémière, qui consiste à trouver, des solutions approchées au problème, en utilisant la méthode Faedo-Galerkin, et le théorème du point fixe de Schauder. Pour la deuxième approche, on a considéré les équations Navier-Stokes stochastiques non homogénes, comme un cas particulier d'une classe, assez large d'équations stochastiques non linéaire(de type Navier-Stokes).
Nous rappelons que les équations de Navier Stokes stochastiques ont été dans la forme indiquée dans notre travail, étudiées par A.Bensoussan et R. Temam [BT], qui, considérant une classe d'équations un peu plus large dite équations stochastiques du type Navier Stokes, ont démontré l'éxistence d'une solution faible. Dans leur travail, ils ont supposé une régularité majeure (par rapport aux coordonnées spatiales) de la perturbation G, de sorte que la résolution de l'équation stochastique se réduit, pour chaque élément ω de l'éspace de probabilité Ω, à celle d'une équation déterministe.
D'autre part, M.Viot [V1][V2] a étudié le problème des martingales correspondant aux équations stochastiques de type Navier Stokes et a démontré le théorème d'éxistence pour ce problème. La formulation du problème de martingale lui a permis d'affaiblir la condition sur la régularité spatiale de la perturbation donnée G, mais sa méthode a été conditionnée par le fait que G soit un processus de Wiener dans l'espace V^0 c.a.d. $G = W$.

Dans notre mémoire on a présenté, pour une classe d'équations stochastiques non linéaire(de type Navier Stokes), des théorèmes d'existence avec des conditions plus faibles que celles que Viot [V1][V2]. Ce pendant, pour les équations de Navier Stokes stochastiques non homogène, on peut obtenir un résultat analogue à celui de [BT] en utilisant les idées et les techniques de [K], [AKM] et [BT].

A la fin on montre que, les équations de Navier-Stokes stochastiques non homogénes, sont des cas particuliers d'une classe, assez large d'équations stochastiques non linéaire(de type Navier-Stokes). Cette étude a mis aussi, en valeur le lien étroit entre la théorie mathématique de la mécanique des fluides et les techniques développées dans la théorie des équations de Navier-Stokes stochastiques non homogénes.

Une étude numérique pour les équations de Navier Stokes a été élaborée, et à considérer comme première étape, dans le cadre d'une approximation numérique future, de ce type de problème où figure la partie perturbée.

Bibliographie

[1] R. A. Adams ; *Sobolov space.* Academic Press. New-York.(1975).

[2] A. Bensoussan, R. Temam ; *Equations stochastiques du type Navier-Stokes,* J.Func.Anal., **13** (1973),195-222.

[3] H. Bresis ; *Analyse fonctionnelle,* Masson.(1983).

[4] L. Cattabriga ; *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazio di Stokes,* Rend.Sem. Mat. Univ. Padova, 31 (1961), 308-355.

[5] A.B. Cruzeiro : Solutions et mesures invariantes pour des équations d'évolution stochastiques du type Navier-Stokes. Expositiones Mathematicae, 7(1989), 73-82.

[6] I.I. Gihman, A. V. Skorohod : Thorie des processus stochastiques, tome 1. Nauka, Moscou, 1971 ; The theory of stochastic processus, vol. 1(traduction anglaise). Springer, 1980.

[7] J. M. Harrison : Martingales and stochastic intégrales in the theory of continous trading. Evaluation, Northwesten university.Pliska, S. R.(1981).

[8] N. Ikeda, S. Watanabe : stochastic diffencial equations and diffusion processes. North-Holl.Publ. 1981.

[9] I. Karatzas and S. E. Shreve : brownian motion and stochastic calculus. Grad,texts in Math. Springer-Verlag, New-york.(1991).

[10] A. V. Kazhikhov : Solubilité de problème de Cauchy aux limites pour l'équation de mouvement pour les fluides visqueux incompressibles non-homogénes. Dokl. Akad. Nauk 216 (1974), 1008-1010.

[11] O. A. Ladyzhenskaya : Problèmes mathématiques de dynamique des fluides visqueux (édition russe). Nauka, Moscou, 1970 ; The mathematical theory of viscous incrompressible flow(traduction anglaise). Gordon & Breach, New York, 1969.

[12] L. D. Landau, E. M. Lifshitz : Hydrodynamique (en russe). Nauka, (dernière édition 1986) ; Mécanique des fluides. (traduction française). Mir, Moscou, 1971.

[13] J. Leray : Etude de divers équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J. Math. Pures appli., 13 (1934), 331-418.

[14] J. Leray : Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limitent des parois. J. Math.Pures Appl., 13 (1934), 331-418.

[15] J. Leray : sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Ata Math., 63 (1934), 193-248.

[16] J. L. Lions, G. Prodi : Un théorème d'existence et d'unicité dans les équations de Navier-Stokes stochastiques en dimension deux. C. R. Acad. Sci. Paris, 248 (1959), 3519-3521.

[17] E. Pardoux : Intégrales stochastiques hilbertiennes. Publication de l'univ. Paris-Dauphine, 1976.

[18] E. Pardoux and S. Peng : Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems Control Lett.(1990).

[19] R. Temam : Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis. North-Holl.Publ. 1977.

[20] M. Viot : Solution en loi d'une équation aux dérivées partielles stochastique non linéaire : Méthode de monotonie. C. R. Acad.Sci. Paris 278 (1974). A-1405-1408.

[21] M. Viot : Solutions faibles d'équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires. Thèse de doctorat. Paris VI, 1976.

[22] M. I. Vishik, A.V. Fursikov : Problèmes mathématiques d'hydrodynamique statisque (édition russe). Nauka, Moscou, 1980.

[23] H. F. Yashima : Equations de Navier-Stokes stochastiques non homogénes et applications. Pisa. 1992.

[24] K. Yosida : Functional analysis. Berlin Heidelber, New-york.(1978).