

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



591



Mémoire de Master

Spécialité : Maintenance Industrielle

Présenté par : BOUBEKER Rabia & MERABET Houssam

Dynamique des rotors flexibles : modèles simples de monorotors

Sous la direction de : Dr. REZAIGUIA Abdelouahab

Juin 2011





Table des matières

Principaux notations et symboles

Chapitre 1 : Introduction et synthèse bibliographique	01
1.1 Introduction.....	01
1.2 Dynamique linéaire des rotors	04
1.2.1 Équations de mouvement.....	05
1.2.2 Systèmes tournants	06
1.2.3 Coordonnées complexes dans la dynamique des rotors.....	07
1.2.4 Vibration libre.....	08
1.2.4.1 Fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation : diagramme de Campbell	08
1.2.4.2 Vitesses critiques	09
1.2.4.3 Trajectoire et type de précision.....	10
1.2.4.4 Plages d'instabilité.....	11
1.2.5 Vibration forcée :.....	12
1.2.5.1 Réponse due au balourd	12
1.2.5.2 Réponse due à une force asynchrone.....	13
1.3 Contenu du mémoire.....	13
Chapitre 2 : Dynamique des rotors flexibles.....	15
2.1 Introduction.....	15
2.2 Détermination des caractéristiques des éléments de rotor.....	16
2.2.1. Disque.....	16
2.2.2. Arbre.....	19
2.2.2.1 Energie cinétique de l'arbre.....	19
2.2.2.2 Energie de déformation de l'arbre.....	20

2.2.3 Palier	21
2.2.4 Balourd.....	22
2.2.4.1 Cas d'un seul balourde dans le disque.....	22
2.2.4.2 Cas d'un balourd réparti dans l'arbre.....	23
Chapitre 3 : Étude des modèles simples de monortors.....	26
3.1 Introduction.....	26
3.2 Phénomènes de base de la dynamique des rotors.....	26
3.3 Modèle symétrique non amorti	26
3.3.1 Détermination des équations de mouvement.....	27
3.3.1.1 Énergie cinétique du disque.....	28
3.3.1.2 Énergie cinétique de l'arbre.....	28
3.3.1.3 Énergie cinétique du balourd.....	29
3.3.1.4 Énergie cinétique total du système.....	29
3.3.1.5 Énergie de déformation de l'arbre.....	30
3.3.1.6 Équations de mouvement.....	30
3.3.2 Fréquences propres en fonction de la vitesses de rotation : diagramme de Campbell.....	30
3.3.3 Réponse en vibration libre.....	33
3.3.4 Réponse aux forces d'excitation.....	35
3.3.4.1 Réponse due au Balourd.....	35
3.3.4.2 Réponse due à une force asynchrone	37
3.4 Modèle non symétrique amorti.....	38
3.4.1 Fréquences naturelles et vitesses critiques.....	40
3.4.2 Réponse aux forces d'excitation.....	42
3.4.2.1 Balourd.....	42
3.4.2.2 Force asynchrone	44

Table des matières

Concluions générales.....	45
Références bibliographiques.....	47
Annexe A : Détermination du vecteur rotation du disque.....	48
Annexe B : Energie de déformation d'une poutre en flexion.....	51
Annexe C : Détermination de la matrice d'inertie du disque.....	55

Principaux notations et symboles

Symbole	Désignation
β	Paramètre d'amortissement
c	Amortissement
E	Module d'élasticité d'Young
ϵ	Déformation
F	Force extérieure
F_0	Amplitude de la force extérieur
F_u, F_w	Composantes de la force généralisée
$f(\Omega)$	Fréquence propre
f_b, m_b, d	Force, masse et distance du balourd respectivement
G	Module de cisaillement
h	Epaisseur du disque
I	Moment d'inertie diamétral
$[I(c/R)]$	Matrice d'inertie du disque
I_{dx}, I_{dy}, I_{dz}	Moments d'inertie du disque
k	Raideur
l	Longueur
M_d	Masse du disque
$N, N_{cr}, \Omega, \Omega_{cr}$	Vitesse et vitesse critique de rotation respectivement
$\bar{\omega}$	Vecteur rotation
$\omega(\Omega)$	Pulsation propre
$\Phi(y)$	Premier mode propre d'une poutre en flexion
q	Coordonnée généralisée
Q_1, Q_2	Amplitudes
R_1, R_2	Rayon intérieur et extérieur du disque respectivement
ρ	Masse volumique

Principaux notations et symboles

s	Section de l'arbre
$\sigma, \dot{\sigma}(\Omega)$	Contrainte, taux de décroissance respectivement
T_d, T_a, T_b	Energie cinétique du disque, de l'arbre et du balourd respectivement
δW	Travail virtuel des forces extérieures
u, v, w	Déplacements d'un point situé sur l'axe de rotation du rotor
Ψ, Φ, θ	Angles d'Euler
ν	Coefficient de Poisson
U_a	Energie de déformation de l'arbre

Chapitre 1

Introduction et synthèse bibliographique

1.1 Introduction

La dynamique des rotors est une branche de la dynamique des systèmes tournants et en particulier des ensembles mécaniques dans lesquels au moins une partie ; généralement définie comme rotor; tourne à une vitesse angulaire autour d'une ligne de rotation.

Suite à la définition de ISO [1], *un rotor est un corps animé d'un mouvement de rotation équipé de tourillons supportés par des paliers*. Le tourillon est la partie du rotor par laquelle il est guidé par rapport à une structure-stator (Fig.1.1). Le centre du tourillon est le point de l'axe du tourillon à égales distances de ces sections extrêmes. L'axe du rotor est la droite qui joint les centres des tourillons. La liaison est l'élément qui associe le tourillon à la structure. On distingue les liaisons à fluides (huile, air,...), à roulements ou magnétiques. Le rôle des liaisons est essentiel dans le comportement vibratoire. Une machine tournante est constituée donc d'un rotor, une structure-stator et des liaisons.

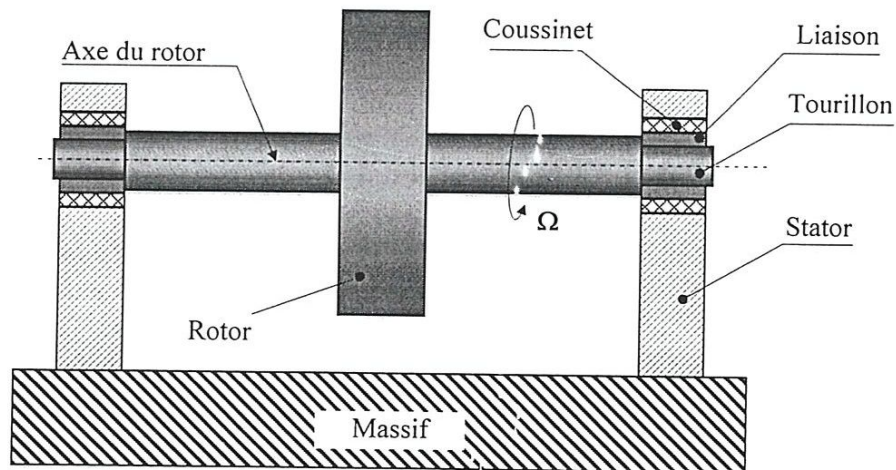


Figure 1.1. Éléments d'une machine tournante

L'étude de la dynamique des rotors liée aux applications technologiques, a été commencée à partir du 19^{ème} siècle lorsque l'augmentation de la vitesse de rotation de plusieurs éléments de machines devient nécessaire. Ces éléments de machines aux fonctions, aux formes, aux tailles variées : la fraise du dentiste, le disque compact, le turboréacteur, le turboalternateur de la centrale nucléaire, ont des vitesses de rotations et de puissances qui varient dans de vastes domaines : de quelques tours par minute à quelques centaines de milliers de tours par minute, d'une fraction de Watt à 1500 mégawatts. Ces machines doivent assurer leur service en tranquillité pour une longue durée de vie et une sécurité des hommes.

Plusieurs mathématiciens et mécaniciens ont étudié avec succès la dynamique des rotors. L'article intitulé "*On the centrifugal force on rotating shafts*", (*Force centrifuge sur les arbres tournants*), publié en 1869 par Rankine [2], est considéré comme le premier article entièrement consacré à la dynamique des rotors. L'auteur confirme avec raison qu'un système souple qui tourne à une vitesse de rotation ; définie par l'auteur comme vitesse critique ; subit des vibrations de très grandes amplitudes. Toutefois, l'auteur interprète incorrectement que le fonctionnement stable au-dessus de la vitesse critique de rotation est impossible.

Les premières tentatives pour construire les turbines à vapeur qui ont commencé à la fin du 19^{ème} siècle, conduisent à des vitesses de rotation beaucoup plus élevées. A ces vitesses, certains problèmes dynamiques particuliers sont rencontrés. De Laval avait résolu ces problèmes de manière appropriée en étudiant le comportement dynamique d'un rotor en rotation à une vitesse supérieure à la vitesse critique c'est à dire, dans des conditions supercritiques, tout en concevant son fameux séparateur de crème, puis sa turbine à vapeur après une compréhension approfondie de la dynamique des rotors.

Une explication théorique du fonctionnement au dessous de la vitesse critique a été fourni d'abord par Föppl [3], Belluzzo [4], Stodola [5], et Jeffcott dans son célèbre article publié en 1919 [6]. Bien que les premières turbines à rotor ont une conception très simple et pourrait être traitée en utilisant des modèles simples de type connu sous le nom *Jeffcott rotor*, des machines tournantes plus complexes nécessitent une modélisation plus détaillée. En effet, même si une approche simplifiée ; comme

mentionnée ci-dessus *Jeffcott rotor* ; peut expliquer qualitativement de nombreux phénomènes importants du comportement réel des rotors. Le plus important étant le rôle de l'amortissement du rotor et des pièces statiques de la machine. Il ne parvient pas à expliquer d'autres aspects tels que la variation des fréquences naturelles du rotor en fonction de la vitesse de rotation. Surtout le simple *Jeffcott rotor* ne permet pas d'obtenir une analyse qualitative précise du comportement dynamique des systèmes complexes par exemple ceux rencontrés dans les turbines à gaz, les turbines à vapeur, les compresseurs, les pompes et de nombreuses autres types de machines.

Pour faire face à la complexité croissante des systèmes tournants, les abaques de calcul graphique ont été conçus. Elles peuvent être trouvées dans des livres et des documents publiés à partir du début du siècle, comme les livres de **Belluzzo** et **Stodola**. Ces abaques sont l'outil de base pour l'analyse dynamique des rotors de turbines. Un grand nombre de documents traitant de la vibration de flexion des rotors et des arbres tournants ainsi que la vibration de torsion dans les machines à mouvement alternatifs sont apparus dans les années après la première guerre mondiale. Cette tendance s'est poursuivie pendant de nombreuses années, alimentée par l'augmentation du pouvoir machines pour la production, de la puissance spécifique des moteurs de tous types et de l'augmentation de la vitesse de rotation des machines.

Avec le développement de l'outil informatique, les chercheurs ont développé des méthodes numériques très efficaces pour la dynamique des rotors. En particulier, la méthode d'**Holzer** pour les vibrations de torsion des arbres et la méthode de **Myklestadt-Prohl** pour le calcul des vitesses critiques en flexion des rotors des turbines. Ces méthodes ont été immédiatement automatisées lorsque les ordinateurs numériques sont devenus disponibles.

L'apparition de la méthode des éléments finis a également et profondément influencé le domaine de la dynamique des rotors. Au départ, les codes de calcul des éléments finis ne peuvent pas être utilisés pour l'analyse de la dynamique des rotors en raison du manque de considération des effets gyroscopiques. La matrice gyroscopique peut être prise en compte dans la formulation éléments finis. Actuellement, plusieurs fabricants commerciaux utilisent des codes d'éléments finis spécifiques pour la dynamique des rotors tel que le logiciel **Sysrotor**. Grâce à la modélisation éléments

finis, il est possible d'étudier le comportement dynamique des rotors des machines qui tournent à grandes vitesses et contenant plus de détails et par conséquent d'obtenir des prédictions quantitatives avec un certain degré de précision élevé.

L'analyse dynamique des rotors n'est pas limitée à la conception : elle peut fournir des outils indispensables pendant le test et le fonctionnement réel des machines. Il est essentiel d'acquérir une connaissance approfondie des conditions de travail et pour effectuer la maintenance préventive.

L'étude de la signature vibratoire (**spectre**) d'une machine tournante permet d'identifier les problèmes de fonctionnement même avant qu'ils deviennent dangereux et d'éviter le fait que la défaillance d'un composant défectueux peut causer des dégâts ou des dommages à d'autres parties de la machine. Toute déviation dans la signature vibratoire habituelle est un symptôme. Cette étude permet donc de prendre des interventions nécessaires à temps.

Particulièrement, les machines tournantes à grandes vitesses sont fournies avec des capteurs, des actionnaires et des systèmes de contrôle pour surveiller et contrôler d'une manière active, leur comportement dynamique. Ce sont des machines de plus en plus intelligentes.

Actuellement, la dynamique des rotors est un domaine de recherche très actif. Plusieurs chercheurs travaillent non seulement sur la dynamique linéaire des rotors, mais aussi dans la dynamique non linéaire des rotors à vitesses variables et dans le contrôle actif des machines tournantes. Chaque année, de nombreuses conférences et séminaires scientifiques sur la dynamique des rotors sont déroulés. Ainsi que le nombre de documents publiés dans des revues scientifiques et des livres augmente d'une manière importante.

1.2 Dynamique linéaire des rotors

Les équations décrivant le mouvement d'un solide de masse m , de moments principaux d'inertie J_ξ, J_η, J_φ liés à un repère de référence dans l'espace en trois dimensions, sont effectivement complexes, notamment lorsqu'il s'agit des degrés de liberté en rotation. Elles ne permettent pas l'utilisation directe d'un modèle linéaire. On

se référant à un repère inertiel et un autre tournant lié au solide et qui coïncide avec les axes principaux d'inertie, les 6 équations du mouvement du solide sous l'effet d'une force \vec{F} et d'un moment \vec{M} peuvent être écrites sous la forme [1] :

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases} \begin{cases} M_\xi = \dot{\Omega}_\xi J_\xi + \Omega_\eta \Omega_\varphi (J_\varphi - J_\eta) \\ M_\eta = \dot{\Omega}_\eta J_\eta + \Omega_\xi \Omega_\varphi (J_\xi - J_\varphi) \\ M_\varphi = \dot{\Omega}_\varphi J_\varphi + \Omega_\xi \Omega_\eta (J_\eta - J_\xi) \end{cases} \quad (1.1)$$

Les trois équations pour les degrés de liberté de rotation qui sont bien connues *équations d'Euler*, sont non linéaires de la vitesse angulaire Ω . Toutefois, un certain nombre de simplifications permettent d'obtenir un modèle linéaire qui conserve les caractéristiques de base du comportement dynamique des systèmes tournants et nous permettent de les décrire correctement à la fois d'une manière qualitative et quantitative.

Le rotor a ; dans sa configuration non déformée ; un axe de rotation bien définie qui coïncide avec l'un des axes principaux d'inertie. Cette condition est exactement vérifiée si que le rotor est parfaitement équilibré et n'est que d'environ vrai, mais dans la plupart des cas, le déséquilibre (balourd) à savoir, l'excentricité est petite et il est possible de le traiter comme une petite perturbation. En outre, tous les déplacements et les vitesses ; linéaires et angulaire ; peuvent être supposés petits, à l'exception de l'angle de rotation et la vitesse angulaire autour de l'axe de rotation qui ne sont pas petites mais, peuvent être considérés comme imposés par le système d'entraînements.

1.2.1 Équations de mouvement

Les deux hypothèses de base, faible déséquilibre et petits déplacements, permettent la linéarisation des équations du mouvement comme dans la dynamique des structures. Cependant, même dans le cas d'un modèle discrétisé d'un rotor linéaire qui est axialement symétrique autour de son axe de rotation et tourne à une vitesse de rotation constante, les équations du mouvement linéaire (équations d'équilibre dynamique), est de la forme générale suivante :

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + [G])\{\dot{q}\} + ([K] + [H])\{q\} = \{F\} \quad (1.2)$$

Où $\{q(t)\}$ est un vecteur contenant les coordonnées généralisées, $[M]$ est la matrice de masse symétrique, $[C]$ est la matrice d'amortissement symétrique, $[G]$ est la matrice gyroscopique antisymétrique, $[K]$ est la matrice de raideur symétrique, $[H]$ est la matrice circulatoire antisymétrique et $\{F\}$ est un vecteur dans lequel toutes les forces sont regroupées.

1.2.2 Systèmes tournants

Lorsqu'on parle de systèmes tournants, l'une des vibrations forcées est habituellement celle provoquée par le balourd résiduel que, bien que petit, ne peut cependant être négligé. Les forces de balourds sont harmoniques dans le temps, d'amplitude proportionnelle à Ω^2 et de fréquence égale à Ω ($F_b = m\varepsilon \Omega^2$).

La matrice gyroscopique contient des termes d'inertie qui, dans le cas de la dynamique des rotors, sont strictement liés aux moments gyroscopiques agissant sur les parties tournantes de la machine. Si l'équation est écrite par rapport à un repère non inertiel, les termes liés à l'accélération de Coriolis sont aussi présents dans la matrice gyroscopique. La matrice circulatoire contient des termes non conservatifs liés à l'amortissement des éléments tournants et; si on utilise un modèle linéaire pour les paliers à fluides; à l'amortissement du film fluide entourant le tourillon. Il est bien connu que la présence d'une matrice circulatoire, peut causer l'instabilité, et les rotors ne font pas exception à cette règle.

Il faut noter que, dans la dynamique des rotors, les matrices gyroscopique et circulatoire $[G]$ et $[H]$, sont proportionnelles à la vitesse de rotation, et quand Ω tend vers zéro, les termes anti-symétriques disparaissent et l'équation se réduit à celui d'une structure non tournante. En outre, les matrices d'amortissement et de rigidité $[C]$ et $[K]$, peuvent dépendre de la vitesse de rotation, souvent avec Ω^2 et $[H]$ peut-être une fonction plus complexe de Ω .

L'équation (1,2) est obtenue avec l'hypothèse de la symétrie du rotor par rapport l'axe de rotation. Elle est encore valable lorsque le rotor est à symétrie axiale, mais fonctionne sur un stator général sans aucune propriété de symétrie particulière. Au contraire, si le rotor n'a pas de symétrie axiale, l'étude devient très compliquée.

La plupart des rotors flexibles peuvent être considérés comme des structures semblables à des poutres. Le comportement latéral d'une poutre peut être découplé de son comportement axial et de torsion. Ce découplage est généralement utilisé dans dynamique des rotors, à l'exception qu'on ne peut pas découpler entre la flexion dans les plans principaux.

1.2.3 Coordonnées complexes dans la dynamique des rotors

Si le stator et le rotor sont isotropes par rapport à l'axe de rotation, des modèles très simples peuvent être conçus par l'introduction de coordonnées complexes. Supposons que l'axe de rotation coïncide avec l'axe (o,z) d'un repère inertiel (Fig.1.2). Le déplacement de n'importe quel point de l'axe du rotor peut être décomposé en deux déplacements suivant les directions (o,x) et (o,y) . On peut présenter ce déplacement par un vecteur déplacement dans le plans (o,x,y) . Ce dernier peut être exprimé sous la forme d'un nombre complexe :

$$r_c(t) = x_c(t) + iy_c(t) \tag{1.3}$$

où i est l'unité imaginaire ($i = \sqrt{-1}$).

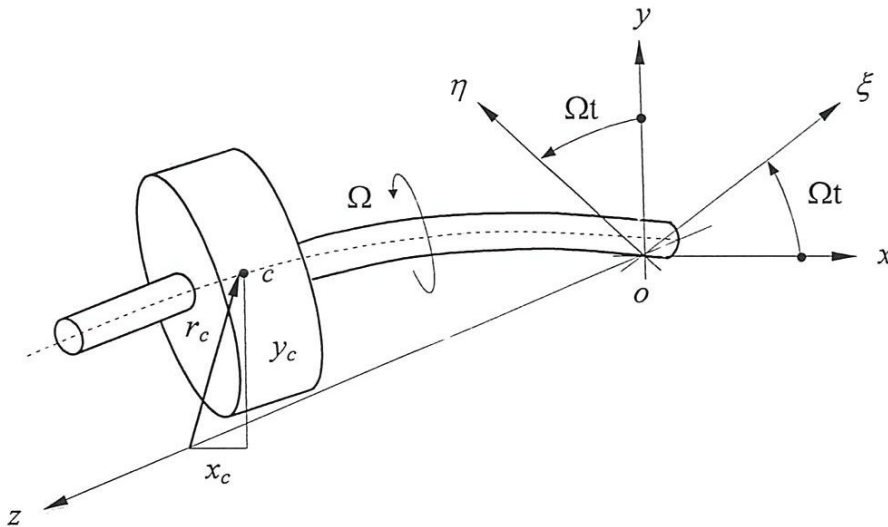


Figure 1.2. Vecteur déplacement du point c et ses composantes. $R(o,x,y,z)$: repère inertiel, $R(o,\xi,\eta,z)$: repère tournant

1.2.4 Vibration libre

La solution générale de l'équation (1,2) est composée de la solution homogène (sans second membre) et la solution particulière. La première partie de la solution générale permet d'étudier le comportement libre du système. La solution en vibration libre est généralement harmonique et peut être écrite sous la forme :

$$\{q\} = \{Q\}e^{st} \quad (1.4)$$

Où

$$s = \sigma + i\omega \quad (1.5)$$

est la **fréquence complexe**. La fréquence naturelle (propre) du mouvement libre (**fréquence circulaire**) du système est alors la partie imaginaire ω de s , tandis que sa partie réelle σ est le **taux de décroissance** (c'est-à-dire, le taux à lequel l'amplitude diminue dans le temps) qui change de signe: *une valeur négative de σ caractérise un mouvement qui diminue dans le temps (mouvement stable), tandis qu'une valeur positive caractérise une croissance exponentielle du mouvement dans le temps (mouvement instable).*

1.2.4.1 Fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation : diagramme de Campbell

Comme la vitesse de rotation peut apparaître explicitement dans les équations du mouvement (à cause de l'effet gyroscopique dû aux disques et les caractéristiques des liaisons), les fréquences propres d'une machine tournante peuvent dépendre de la vitesse de rotation Ω . Lorsque cela se produit, le comportement libre du système est généralement résumé par le traçage de l'évolution des fréquences naturelles $\omega_i(\Omega) = \text{Im}(s_i)$ en fonction de Ω . Comme dans de nombreux cas, les fréquences d'excitations aussi dépendent de la vitesse. Elles peuvent être tracées dans le même diagramme en obtenant ce qu'on appelle le **diagramme de Campbell**. Comme le diagramme de Campbell est symétrique par rapport aux axes de ω et Ω en même temps, toutes les informations sont contenues dans l'un de ses quadrants. Le traçage d'un seul quadrant est donc suffisant (Fig.1.3.a). Si l'amortissement est présent, un deuxième diagramme, dans lequel la variation du taux de décroissance σ en fonction de la vitesse de rotation, peut être tracé avec le diagramme de Campbell (Fig.1.3.b).

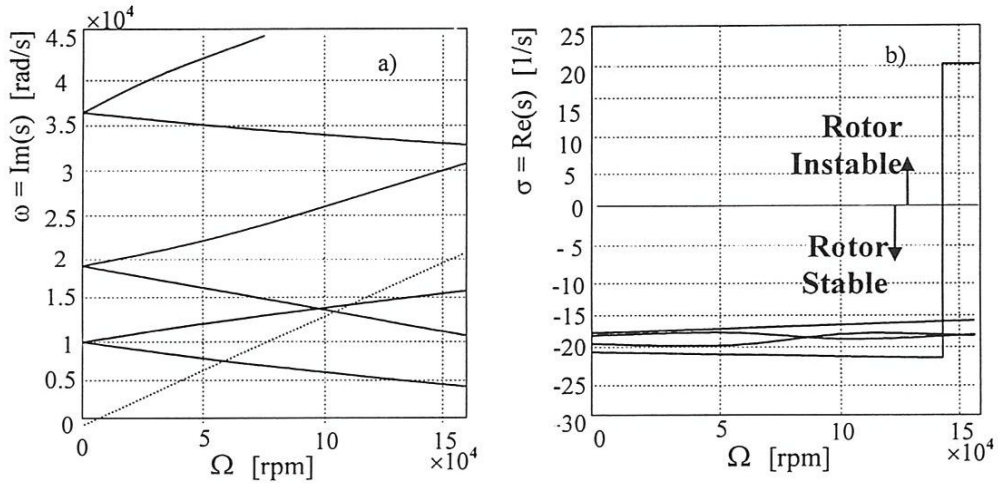


Figure 1.3. Diagramme de Campbell (uniquement le premier quadrant est présenté), et le taux de décroissance d'un rotor flexible à symétrie axiale

1.2.4.2 Vitesses critiques

Les vitesses critiques sont les vitesses de rotation du rotor pour lesquelles, en un point et pour une direction fixée, l'amplitude du déplacement passe par un maximum. Elles sont particulièrement dangereuses. En l'absence de l'amortissement, une vitesse critique de rotation coïncide exactement avec une fréquence propre du rotor. Les vitesses critiques peuvent être donc déterminées à partir du diagramme de Campbell par les intersections des courbes relatives aux fréquences naturelles avec celles liées aux fréquences de rotation (ligne droite $\omega = \Omega$). Elles sont généralement désignées sous le nom de *vitesses critiques de flexion* (Fig.1.4).

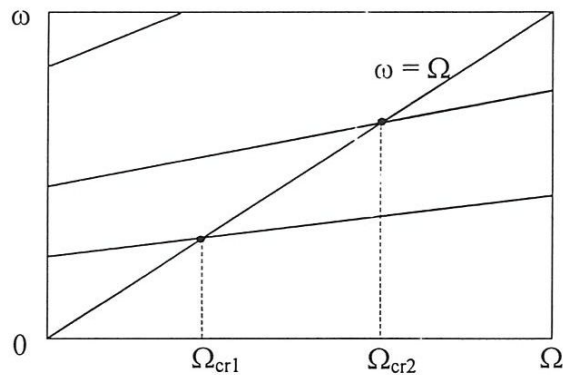


Figure 1.4. Localisation des vitesses critiques sur le diagramme de Campbell

Si le diagramme de Campbell est sous forme des lignes droites parallèles à l'axe de Ω , c'est à dire, si les fréquences propres sont indépendantes de la vitesse de rotation,

les valeurs numériques des vitesses critiques coïncident avec ceux des fréquences propres à l'arrêt (Fig.1.5).

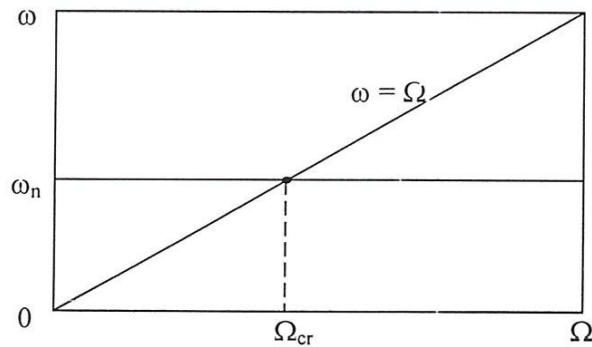


Figure 1.5. Vitesse critique d'un rotor dont le diagramme de Campbell est horizontal

En plus des vitesses critiques de flexion, les vitesses critiques de torsion peuvent aussi être très dangereuses, surtout dans le cas des machines à mouvement alternatif. De nombreux dispositifs dont le but est de réduire l'amplitude des vibrations induites par les vitesses critiques ont été développés.

1.2.4.3 Trajectoire et type de précision

La trajectoire du centre géométrique c d'un rotor (Fig.1.6), s'appelle : *trajectoire de précision*. La précision est dite *directe* ou *positive*, si le mouvement de c s'effectue dans le même sens de la vitesse de rotation Ω . Dans le cas contraire, elle est dite *inverse* ou *rétrograde*.

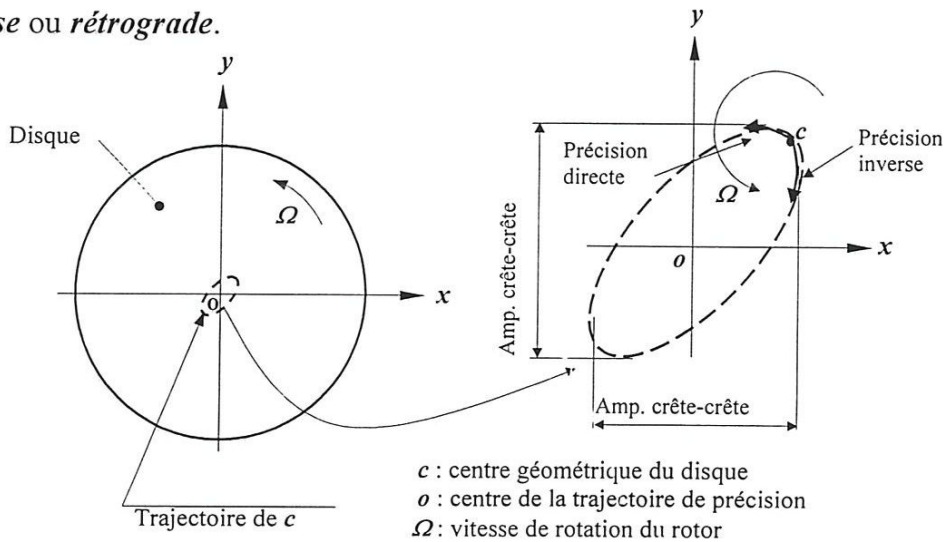


Figure 1.6. Trajectoire et type de précision

1.2.4.4 Plages d'instabilité

Les rotors peuvent développer un comportement instable dans des plages de vitesses de rotation bien définies. Les vitesses auxquelles ce comportement instable se produit, ne doivent pas être confondues avec les vitesses critiques de rotation du rotor car, les deux phénomènes sont complètement différents.

Il est possible de démontrer qu'un système linéaire est asymptotiquement stable si toutes les solutions en vibration libre présentées par (1.5) sont telles que toutes les valeurs de s ont une partie réelle négative ou nulle, c'est-à-dire $\sigma_i \leq 0$. Si l'une ou plusieurs valeurs de σ_i sont positives, le système est instable.

Pour les machines tournantes, une définition technique de la stabilité a été établie par **Muszynska** [1]: *Une machine tournante est stable si son rotor effectue un mouvement de rotation pur autour d'un axe à une vitesse de rotation et ce mouvement n'est pas accompagnée par d'autres modes de vibrations du rotor, de ses éléments ou d'autres parties fixes de la machine, leurs amplitudes de vibration ne dépassent pas des valeurs acceptables admises. La machine stable en rotation est à l'abri de forces perturbatrices externes. C'est-à-dire, toute perturbation aléatoire ne peut pas changer radicalement son comportement.*

Les plages des vitesses de rotation où cette croissance d'amplitude se produit c'est à dire, dans lesquelles des vibrations d'auto excitations peuvent se développer, sont généralement appelés *plages d'instabilité*. Pour faciliter la distinction entre les vitesses critiques et les plages d'instabilité, les caractéristiques suivantes peuvent être mentionnées :

Pour les vitesses critiques :

- Elles se produisent à des valeurs bien définies de la vitesse de rotation.
- L'amplitude croît linéairement dans le temps si aucun amortissement n'est présent.
- L'amplitude peut être maintenue dans des limites raisonnables, et en tant que conséquence, une vitesse critique peut être passée.
- La valeur de la vitesse est fixée, mais celle de l'amplitude maximale dépend de l'amplitude de vibration. En particulier, les principales vitesses critiques de

flexions ne dépendent pas de l'amplitude du balourd, mais l'amplitude augmente avec l'augmentation du balourd.

Pour les plages d'instabilité :

- Leurs plages sont généralement larges. Souvent, toutes les vitesses de rotation au-delà du seuil d'instabilité donnent lieu à un comportement instable.
- Le seuil d'instabilité; s'il existe; se trouve généralement dans la plage des vitesses supercritiques.
- L'amplitude de vibration croît de façon exponentielle dans le temps. Elle croît de façon incontrôlable et le travail près du seuil d'instabilité est impossible. Le rotor doit être modifié pour porter bien le seuil d'instabilité au-dessus de la vitesse de travail maximale.

1.2.5 Vibration forcée

1.2.5.1 Réponse due au balourd

En introduisant la force de balourd dans les équations de mouvement (1,2), il est possible d'obtenir la réponse $\{q(t)\}$ du système, puis de calculer les sollicitations du rotor et les vibrations induites sur les parties non tournantes de la machine. Si le rotor a une symétrie axiale, la réponse due au balourd est harmonique et l'orbite est circulaire tourbillonnant varie en fonction de la vitesse de rotation de la machine. Dans ce cas, le rotor ne vibre plus mais tourne dans une configuration fléchie et le matériau qui constitue les pièces en rotation de la machine n'est pas soumis à la fatigue et leurs amortissements ne jouent aucun rôle dans son comportement [1]. Dans le cas d'un système non amorti, l'amplitude tend vers l'infini à la vitesse critique. En réalité, les rotors des machines sont toujours amortis. Un pic de vibration apparaît à la vitesse critique de rotation. Pour réduire l'amplitude de ce pic, le concepteur doit augmenter l'amortissement non tournant [1].

Dans le cas des rotors montés sur roulements anisotropes, la trajectoire tourbillonnaire devient elliptique et dans certains cas, peut se produire en mouvement inverse. Si le matériau du rotor est anisotrope, la réponse devient poly-harmonique et le mouvement est assez complexe.

La réponse due au balourd est généralement présentée sous forme graphique en montrant la variation de l'amplitude de l'orbite circulaire en fonction de la vitesse de rotation, à des positions bien choisies sur le rotor (Fig.1.7).

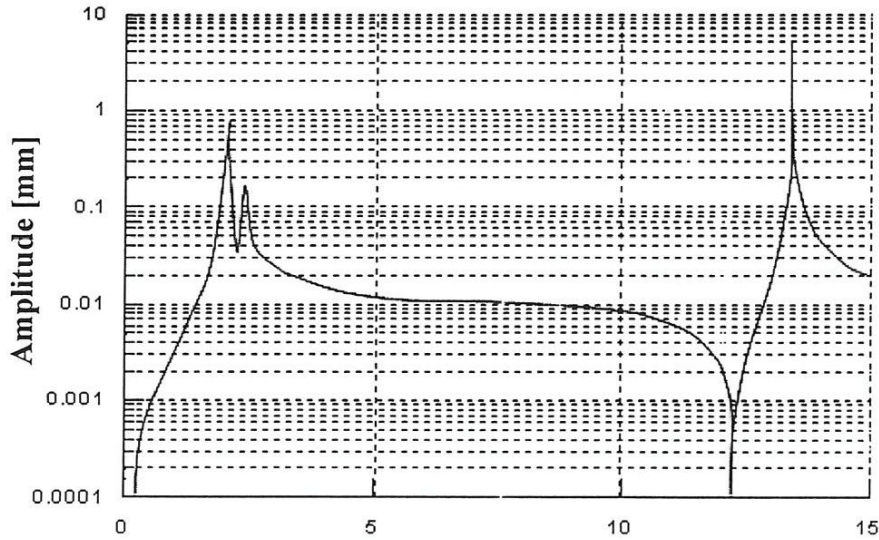


Figure 1.7 : Amplitude de la réponse due à un balourd pour un rotor amortie à symétrie axiale

1.2.5.2 Réponse due à une force asynchrone

En régime de fonctionnement, la force due au balourd n'est pas la seule qui agisse sur un rotor. Ce dernier et dans la plus part des cas, peut être excité par une force asynchrone, c'est-à-dire une force d'amplitude constante qui tourne à une vitesse différente à celle du rotor de forme $n\Omega$, avec n est une multiple de la vitesse de rotation : $2 \times$, $3 \times$, $4 \times$, etc.

1.3 Contenu du mémoire

Le présent chapitre représente une synthèse bibliographique sur la dynamique des rotors et les phénomènes de base qui caractérisent la dynamique des rotos flexibles.

Le deuxième chapitre concerne la détermination des caractéristiques des éléments de rotors. Il s'agit de la détermination des expressions des énergies cinétiques et de déformation ainsi que du travail virtuel correspondant aux éléments de rotor : disque, arbre, palier et balourd.

Dans le chapitre 3, deux modèles simples de mono-rotors sont utilisés afin de permettre un développement analytique mettant en évidence les phénomènes de base : évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, type de précision, vitesses critiques, effet de balourd, effet des forces asynchrones, instabilité et effet d'amortissement.

Chapitre 2

Dynamique des rotors flexibles

2.1 Introduction

Les machines tournantes sont présentes dans de nombreux secteurs d'activité. Elles sont très diverses : compresseurs, turbines, moteurs d'avion, pompes, alternateurs, etc. Elles doivent dans un souci de qualité, d'efficacité et de sûreté, être étudiées avec soin au niveau d'un projet.

Dans une première étape, les rotors des machines tournantes sont dimensionnés à partir de la résistance des matériaux : il s'agit de déterminer un diamètre minimale de l'arbre pouvant supporter le couple nominal. L'étude du comportement dynamique en torsion est ensuite effectuée : il s'agit d'éviter un fonctionnement dans une plage de vitesse comportant une ou des vitesses critiques. Par ailleurs, si des régimes transitoires existent, par exemple dans le cas d'un moteur électrique lors du démarrage ou lors d'un court-circuit accidentel, le comportement transitoire doit être étudié, il fournit alors un rayon de l'arbre supérieur au rayon minimum défini en statique. La dynamique des rotors en flexion doit ensuite être étudiée.

Deux effets particuliers sont généralement présents : l'effet gyroscopique dû aux disques (disque voilé, palier male serré, courroie malle montée, etc.), et l'effet d'amortissement qui peut-être très important dans le cas des paliers hydrodynamique et qui peut provoquer l'instabilité des rotors. Dans un premier temps, il s'agit de prévoir l'évolution des fréquences propres en fonction des vitesses de rotation. Cela permet de déterminer les vitesses critiques et les possibles instabilités dues aux paliers. Dans un deuxième temps, on calcule en régime permanent, la réponse à des effets de balourd et éventuellement à une force asynchrone.

Ce chapitre présente la modélisation des éléments constitutifs d'une machines tournante et la mis équation. L'article de la référence [7] est intensivement utilisé.

2.2 Détermination des caractéristiques des éléments de rotor

Les éléments de base d'un rotor d'une machine tournante sont : disque, arbre et palier. Le balourd qui ne peut pas être complètement évité doit aussi être pris en compte. Les expressions de l'énergie cinétique sont nécessaires pour caractériser le disque, l'arbre et le balourd. L'énergie de déformation est nécessaire pour caractériser l'arbre. L'expression du travail virtuel des forces dues aux paliers permet de déterminer les forces généralisées. Les équations générales du mouvement d'un rotor sont obtenues à partir des étapes suivantes :

- ✓ L'énergie cinétique T , l'énergie de déformation U et le travail Virtuel des forces extérieures δW sont calculés pour tous les éléments du système.
- ✓ Une méthode numérique est choisie : la méthode de Rayleigh-Ritz ou la méthode des éléments finis pour des Applications industrielles.
- ✓ Les équations du mouvement sont déduites d'une formulation de type éléments finis suivi de l'application des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.1)$$

Avec $q_i (i = 1, 2, \dots, N)$ sont les coordonnées généralisées indépendantes qui décrivent complètement le mouvement du système étudié, Q_i sont les forces généralisées, N est le nombre de degrés de liberté.

2.2.1 Disque

Le modèle de rotor de la figure 2.1 est schématisé sur la figure 2.2 avec les différents repères de références utilisés dans l'étude de la cinématique et la dynamique des rotors flexibles. $R_0(O, X, Y, Z)$ est un repère fixe lié au bâti de la machine, $R(c, x, y, z)$ est un repère finale (inertiel) lié au disque. L'axe (c, y) perpendiculaire au disque, coïncide avec l'axe de rotation du disque à l'état déformée de l'arbre (axe principale d'inertie). Le système de coordonnées (x, y, z) est relié au système de coordonnées (X, Y, Z) par l'intermédiaire des angles ψ, θ et ϕ . Pour déterminer la position du disque, on tourne initialement d'un angle ψ autour de l'axe (c, Z) puis d'un

angle θ autour du nouvel axe (c, x_1) , en fin d'un angle ϕ autour de l'axe de rotation propre du disque (c, y) .

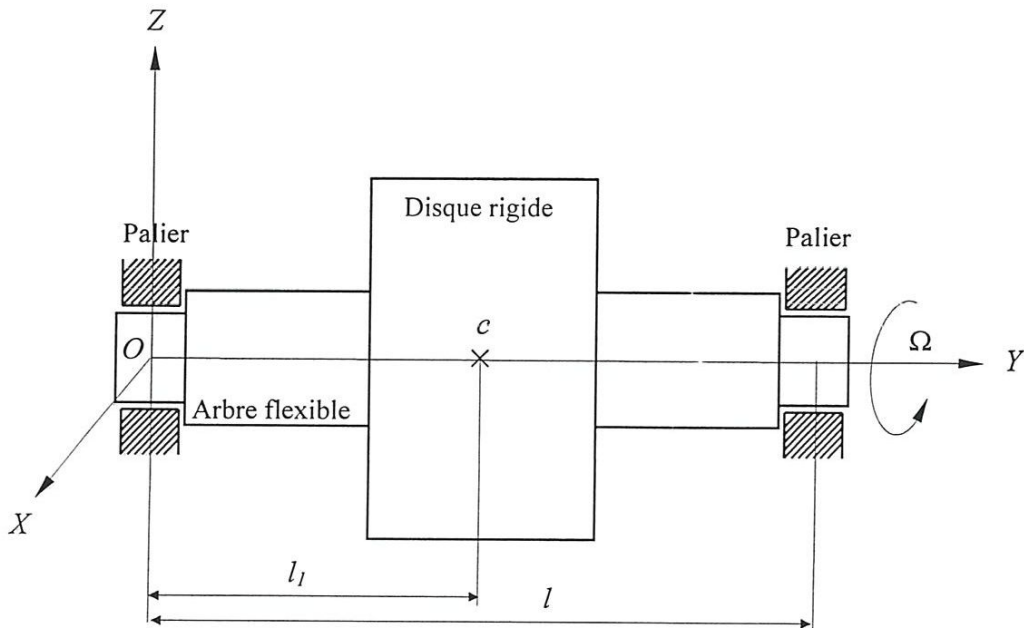


Figure 2.1 : Modèle d'un rotor

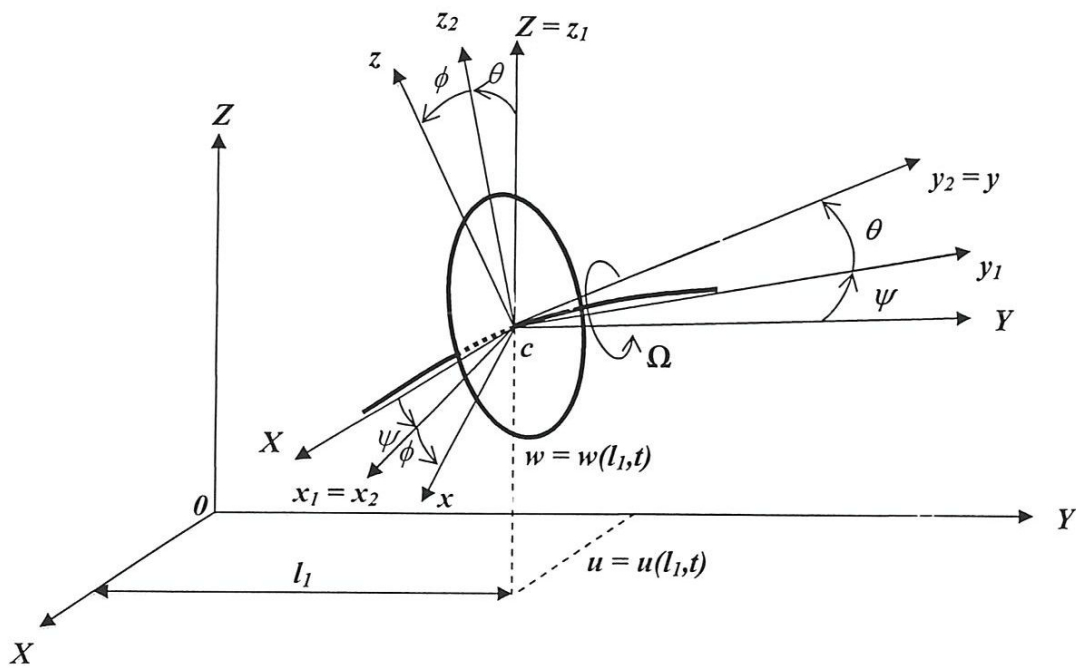


Figure 2.2 : Repères de référence du disque rigide sur l'arbre flexible

Le vecteur rotation traduisant l'orientation instantanée de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par rapport la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ s'écrit (voir annexe 1) :

$$\vec{\omega}(R/R_0) = \dot{\Psi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\phi} \vec{y} \quad (2.2)$$

Où \vec{z}_1, \vec{x}_2 et \vec{y} sont les vecteurs unitaires des axes $(c, z_1), (c, x_2)$ et (c, y) respectivement.

L'énergie cinétique du disque correspondant à son mouvement autour du centre de masse c est calculée en utilisant le repère fixe R . Le vecteur rotation $\vec{\omega}(R/R_0)$, exprimé dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ s'écrit (voir annexe 1) :

$$\vec{\omega}(R/R_0) = \left\{ \begin{matrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{matrix} \right\}_R = \left\{ \begin{matrix} -\dot{\Psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{matrix} \right\}_R \quad (2.3)$$

Avec $\phi = \Omega t$ et $\dot{\phi} = \Omega$.

Soient u et w , les déplacements en flexion de c dans les plans (O, X, Y) et (O, Y, Z) respectivement (flexion dans deux plans). Le mouvement de traction compression suivant $(0, Y)$ est négligé. Par ailleurs, la masse du disque est notée M_d , son tenseur d'inertie en c , comme $(c, x), (c, y), (c, z)$ sont les directions principales d'inertie, a comme expression :

$$[I(c/R)] = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Avec I_{dy} est le moment d'inertie polaire du disque par rapport à (c, y) , I_{dx}, I_{dz} sont les moments d'inertie transversaux par rapport à un axe dans le plan (c, x, z) .

L'énergie cinétique du disque est la somme de l'énergie cinétique de translation et l'énergie cinétique de rotation du centre de masse c :

$$T_d = \underbrace{\frac{1}{2} M_d (\vec{V}(c/R_0))^2}_{\text{énergie de translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \{\omega\}_R^T [I(c/R)] \{\omega\}_R}_{\text{énergie de rotation}} \quad (2.5)$$

Avec $\vec{V}(c/R_0)$ est le vecteur vitesse absolue de c exprimé dans R_0 , obtenu en dérivant par rapport au temps le vecteur position $o\vec{c}$ avec $\dot{\phi} = \Omega$ constante :

$$\vec{V}(c/R_0) = \left[\frac{d\vec{oc}}{dt} \right]_{R_0} = \frac{d}{dt}(u \vec{X} + l_1 \vec{Y} + w \vec{Z}) = \dot{u} \vec{X} + \dot{w} \vec{Z} \quad (2.6)$$

Remplaçons (2.3), (2.4) et (2.6) dans (2.5), l'expression de l'énergie cinétique du disque devient alors :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad (2.7)$$

L'expression (2.7) peut être simplifiée car le disque est symétrique ($I_{dy} = I_{dz}$), les angles θ et ψ sont petits et la vitesse angulaire ($\dot{\phi} = \Omega$) est constante. L'expression (2.7) devient :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta) \quad (2.8)$$

Le terme $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$ n'a pas d'influence sur les équations de mouvement et représente l'énergie cinétique du disque tournant à la vitesse Ω dans le cas où tous les autres déplacements sont nuls. Le terme $I_{dy} \Omega \dot{\psi} \theta$ représente l'effet gyroscopique.

2.2.2 Arbre

L'arbre est représenté par une poutre de section circulaire, caractérisé par une énergie cinétique et une énergie de déformation.

2.2.2.1 Energie cinétique de l'arbre

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque en intégrant sur la longueur de l'arbre :

$$T_a = \frac{1}{2} \rho S \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I l \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^l \dot{\psi} \theta dy \quad (2.9)$$

Avec ρ est la masse volumique de l'arbre, S est l'aire de la section droite de l'arbre et I est le moment d'inertie diamétral (de section).

La première intégrale de (2.9) est l'expression classique de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion. La seconde intégrale de (2.9) correspond à l'effet secondaire de l'inertie de rotation (poutre de Timoshenko). Le terme $\rho I l \Omega^2$ est constant et a une contribution nulle dans les équations du mouvement. La dernière intégrale de (2.9) représente l'effet gyroscopique.

2.2.2.2 Energie de déformation de l'arbre

Le point o_1 est le centre géométrique d'une section de la poutre à l'état déformée, $B(x,z)$ est un point de cette section droite (Fig.2.3), u^* et w^* sont les déplacements du centre o_1 par rapport aux axes (o,x) et (o,z) . La déformation longitudinale du point B s'écrit (voir annexe 2) :

$$\varepsilon_{yy} = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (2.10)$$

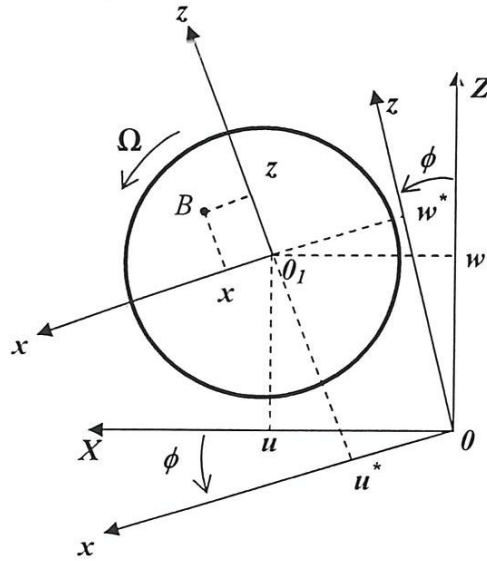


Figure 2.3 : Section droite de l'arbre, mouvement dans le plan (O,X,Z)

L'énergie de déformation de l'arbre a comme expression (voir annexe 2) :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} dV \quad (2.11)$$

Avec V est le volume de la poutre, σ_{yy} est la contrainte longitudinale de traction – compression.

La relation entre la contrainte et la déformation est (voir annexe 2) :

$$\sigma_{yy} = E \varepsilon_{yy} \quad (2.12)$$

Avec E est le module d'Young.

Compte tenu de (2.12), l'expression (2.11) devient :

$$U_a = \frac{1}{2} E \int_V \varepsilon_{yy}^2 dV \quad (2.13)$$

En tenant compte de l'expression (2.10), l'énergie de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 U_a &= \frac{E}{2} \int_0^l \int \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 ds dy \\
 &= \frac{E}{2} \int_0^l \int \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] ds dy
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Par suite de la symétrie de la section de l'arbre, l'intégrale correspondant au troisième terme de (2.14) est nulle. En introduisant les inerties diamétrales de la section droite par rapport à x et à z on a :

$$I_x = \int_s z^2 ds ; \quad I_z = \int_s x^2 ds \tag{2.15-2.16}$$

L'énergie de déformation de l'arbre a donc comme expression :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^l \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \tag{2.17}$$

De préférable exprimer U_a en fonction des déplacement u et w . Le passage de u, w à u^*, w^* s'écrit (voir figure 2.3) :

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \tag{2.18}$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \tag{2.19}$$

Compte tenu de (2.18) et (2.19), l'expression (2.17) devient alors :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^l \left[I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \tag{2.20}$$

Finalement, pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique ($I_x = I_z = I$), l'énergie de déformation se simplifie à :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \tag{2.21}$$

2.2.3 Palier

Les caractéristiques de raideurs et d'amortissements sont supposées connues. Le travail virtuel δW des forces extérieures agissant sur l'arbre se met sous la forme (fig.2.4):

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \tag{2.22}$$

F_u et F_w sont les composants de la force généralisée qui s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{XX} & k_{XZ} \\ k_{ZX} & k_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{XX} & c_{XZ} \\ c_{ZX} & c_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Fréquemment en particulier dans le cas de palier hydrodynamique : $k_{XX} \neq k_{ZZ}$; $c_{XX} \neq c_{ZZ}$; $k_{XX} \neq k_{ZX}$; $c_{XZ} \neq c_{ZX}$.

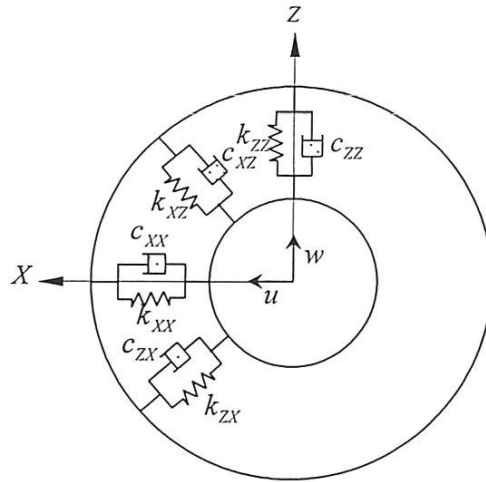


Figure 2.4 : Amortissements et raideurs d'un palier

2.2.4 Balourd

2.2.4.1 Cas d'un seul balourd dans le disque

Le balourd (fig. 2.5) est dû à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique du disque c et son énergie cinétique doit être calculée. La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe (O, Y) et sa coordonnée selon cet axe est constante. Dans le repère R_0 , les coordonnées de la masse m_b sont :

$$\vec{OD} = \vec{OC} + C\vec{D} = \begin{Bmatrix} u + d \sin \Omega t \\ ct \underline{e} \\ w + d \cos \Omega t \end{Bmatrix}_{R_0} \quad (2.24)$$

d'où la vitesse :

$$\vec{V}(D/R_0) = \left[\frac{d\vec{OD}}{dt} \right]_{R_0} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{Bmatrix}_{R_0} \quad (2.25)$$

et l'énergie cinétique :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d(\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t)) \quad (2.26)$$

Le terme $m_b \Omega^2 d^2 / 2$ est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement. La masse m_b est sans commune mesure avec celle du rotor, alors l'énergie cinétique du balourd peut se mettre sous la forme :

$$T_b = m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (2.27)$$

L'application des équations de Lagrange fournit la force tournante du au balourd.

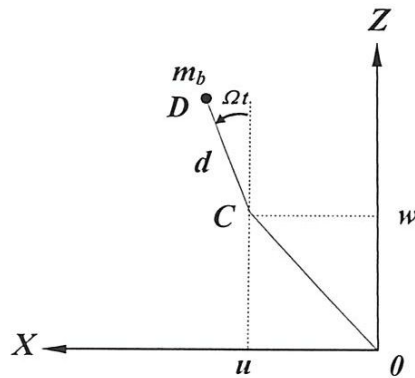


Figure 2.5 : Paramétrage du balourd élémentaire

2.4.2 Cas d'un balourd réparti dans l'arbre

Le balourd initial est généralement réparti dans l'arbre de manière continue et quelconque sur le rotor (fig. 2.6).

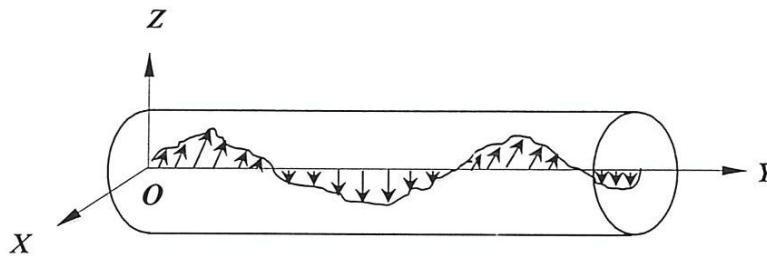


Figure 2.6 : Répartition du balourd sur le rotor

Pour modéliser simplement ce balourd, il est décomposé en masses concentrées situées dans différents plans (fig. 2.7). Les masses sont supposées avoir le même effet que le balourd continu sur le comportement dynamique du rotor.

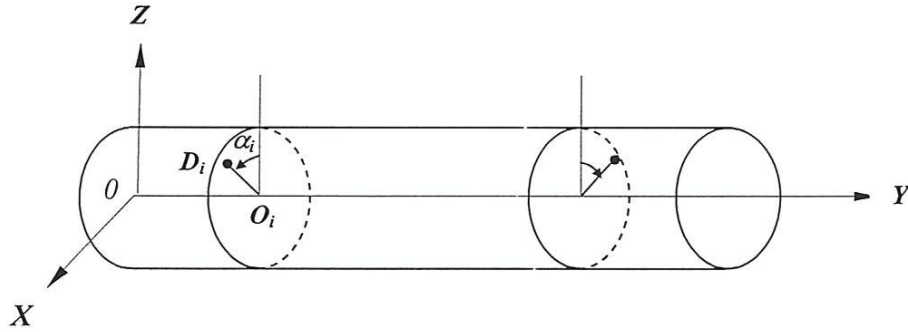


Figure 2.7 : Modélisation de la répartition du balourd sur l'arbre

A l'arrêt, la position D_i de chaque masse m_{bi} est défini par :

- Son abscisse sur l'axe (O, Y)
- La distance $d_i = O_i D_i$, O_i étant le centre de la section d'ordre i de l'arbre
- L'angle initiale α_i que fait la position de la masse m_{bi} par rapport au repère tournant de référence.

Lors de la rotation du rotor, chaque masse m_{bi} est liée à l'arbre en position déformée (fig. 2.8). Le vecteur position et la vitesse associée s'écrivent :

$$O\bar{D}_i = O\bar{O}_i + O_i\bar{D}_i = \begin{cases} u_i + d_i \sin(\Omega t + \alpha_i) \\ \underline{cte} \\ w_i + d_i \cos(\Omega t + \alpha_i) \end{cases}_{R_0} \quad (2.28)$$

$$\vec{V}(D_i/R_0) = \left[\frac{d O\bar{D}_i}{dt} \right]_{R_0} = \begin{cases} \dot{u}_i + d_i \Omega \cos(\Omega t + \alpha_i) \\ 0 \\ \dot{w}_i - d_i \Omega \sin(\Omega t + \alpha_i) \end{cases}_{R_0} \quad (2.29)$$

L'énergie cinétique du balourd d'ordre i qui participe à la construction du vecteur force d'excitation est :

$$T_{bi} = m_{bi} d_i \Omega \{ \dot{u}_i \cos(\Omega t + \alpha_i) - \dot{w}_i \sin(\Omega t + \alpha_i) \} \quad (2.30)$$

L'application des équations de Lagrange permet de déterminer les forces du balourd d'ordre i dans le cas général :

$$\begin{Bmatrix} F_{u_i}^{bi} \\ F_{w_i}^{bi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{bi} d_i \cos \alpha_i \\ -m_{bi} d_i \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \Omega^2 \sin \Omega t + \begin{Bmatrix} m_{bi} d_i \sin \alpha_i \\ m_{bi} d_i \cos \alpha_i \end{Bmatrix} \Omega^2 \cos \Omega t \quad (2.31)$$

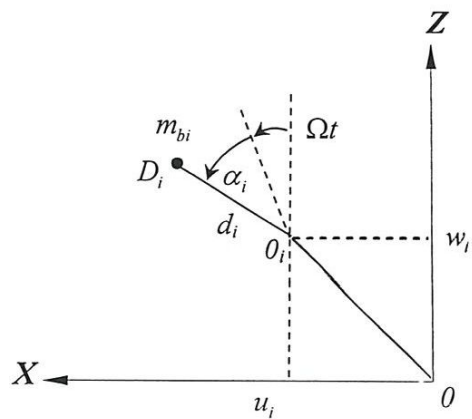


Figure 2.8 : Paramétrage du balourd répartie

Chapitre 3

Étude des modèles simples de monorotors

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, deux modèles simples de monorotors mais représentatifs de situations réelles, sont utilisés afin de permettre un développement analytique mettant en évidence les phénomènes de base. Il est ainsi possible dans le cas de rotors symétriques et non symétriques (la non symétrie est due aux caractéristiques des paliers) d'aborder les aspects suivants : évolution des fréquences en fonction de la vitesse de rotation, précession, vitesse critique, effet de balourd et de force asynchrone, instabilité, amortissement, rapport entre fréquences naturelles et vitesses critiques, etc.

3.2 Phénomènes de base de la dynamique des rotors

Les principaux phénomènes de basse qui caractérisent la dynamique des rotors en flexion sont les suivants :

- Variation des fréquences propre en fonction de la vitesse de rotation
- Effet gyroscopique du au mouvement de voilement des disques
- Effet d'amortissement généralement du aux paliers
- Effet des forces d'excitation (force de balourd et forces extérieurs)
- Instabilité des rotors généralement due à l'amortissement

3.3 Modèle symétrique non amorti

Il s'agit d'un modèle simple mais réaliste présenté par la **figure 3.1**. Le rotor est supposé en appuis rigides à ces deux extrémités. Il est essentiellement constitué de :

- Un arbre flexible en acier homogène et symétrique de longueur $l = 0.4$ m, de section circulaire constante de rayon $R_1 = 0.01$ m, de masse volumique $\rho = 7800$ kg/m³ et de module d'Young $E = 2 \times 10^{11}$ N/m² ;
- un disque indéformable en acier homogène et symétrique de rayon intérieur $R_1 = 0.01$ m, de rayon extérieur $R_2 = 0.15$ m, d'épaisseur $h = 0.03$ m et de masse

volumique $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, situé à une distance sur l'arbre $l_1 = l/3 = 0.133 \text{ m}$, comportant un balourd de masse $m_b = 10^{-4} \text{ kg}$ situé à une distance $d = 0.15 \text{ m}$;

- Deux paliers rigides.

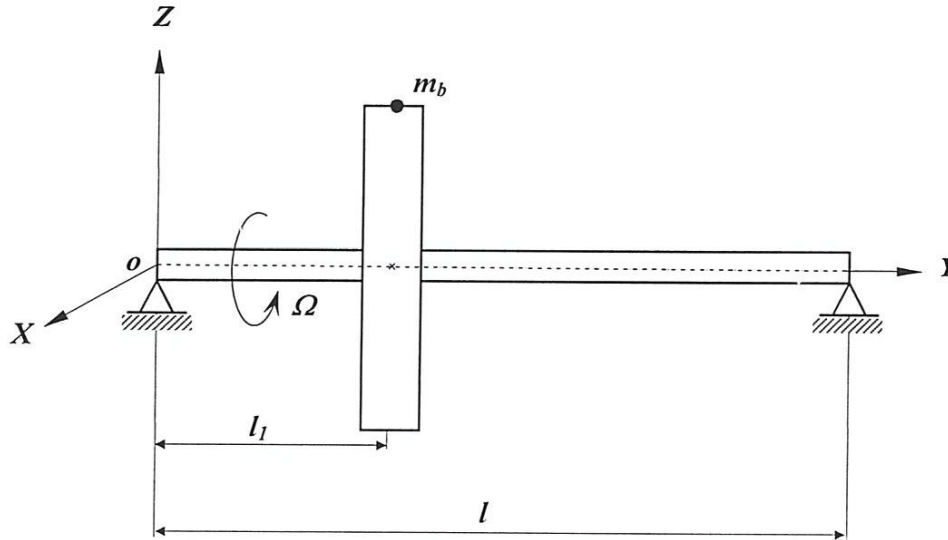


Figure 3.1 : Modèle symétrique d'un monorotor

3.3.1 Détermination des équations de mouvement

Pour déterminer les équations de mouvement de ce modèle, nous utilisons les équations de Lagrange. Un seul degré de liberté est utilisé pour chaque direction :

$$u(y,t) = \phi(y) q_1(t) \quad (3.1.1)$$

$$w(y,t) = \phi(y) q_2(t) \quad (3.1.2)$$

Avec q_1 et q_2 sont les coordonnées généralisées indépendantes, $\phi(y)$ est le premier mode propre de vibration de flexion d'une poutre appuyée aux deux extrémités exprimé par :

$$\phi(y) = \sin(\pi y/l) \quad (3.2)$$

L'effet gyroscopique est caractérisé par les deux angles de voilement $\psi(y,t)$ et $\theta(y,t)$ (fig. 3.2). Elles sont approximées par :

$$\theta(y,t) = \frac{\partial w}{\partial y} = \phi'(y) q_2(t) \quad (3.3.1)$$

$$\psi(y,t) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\phi'(y) q_1(t) \quad (3.3.2)$$

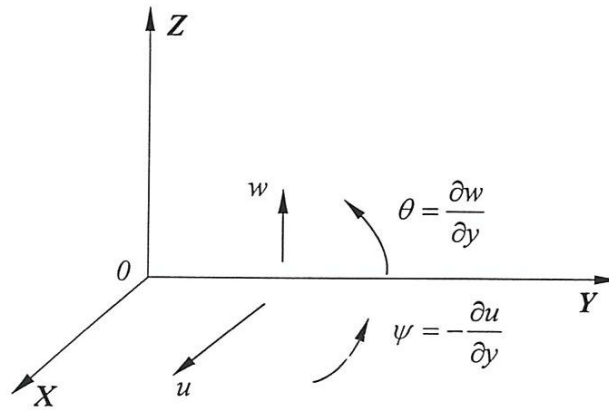


Figure 3.2 : Degrés de liberté et angles de voilement

3.3.1.1 Énergie cinétique du disque

L'énergie cinétique du disque est (voir chapitre 2, expression (2.8)) :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2 + I_{dy} \Omega \dot{\psi} \theta \quad (3.4)$$

Avec M_d, I_{dx}, I_{dy} sont la masse et les moments d'inerties du disque respectivement, elles sont calculées dans l'annexe 3 :

$$M_d = 16.467 \text{ kg} ; I_{dx} = 9.4273 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2 ; I_{dy} = 0.186 \text{ kgm}^2 \quad (3.5)$$

Les déplacements u et w doivent être évalués à $y = l_1$. Compte tenu des expressions (3.1.1), (3.1.2), (3.3.1) et (3.3.2), l'énergie cinétique du disque devient (on omet le terme constant) :

$$T_d = \frac{1}{2} (M_d \phi^2(l_1) + I_{dx} \phi'^2(l_1)) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - I_{dy} \phi'^2(l_1) \Omega \dot{q}_1 q_2 \quad (3.6)$$

Après évaluation des déformés à $y = l_1$ et en tenant compte des expressions (3.5), l'expression (3.6) prend la forme finale suivante :

$$T_d = 6.902 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.8732 \Omega \dot{q}_1 q_2 \quad (3.7)$$

3.3.1.2 Énergie cinétique de l'arbre

L'énergie cinétique de l'arbre s'écrit (voir chapitre 2 expression (2.9)) (on omet le terme constant) :

$$T_a = \frac{\rho s}{2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + 2 \rho I \Omega \int_0^l \dot{\psi} \theta dy \quad (3.8)$$

Avec s et I sont la section et le moment d'inertie diamétral (de section) de l'arbre et

$$\begin{aligned} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy &= (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \int_0^l \phi^2(y) dy = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi}{l} y\right) dy \\ &= (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \int_0^l \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{l} y \right] dy = \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{\pi} \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\int_0^l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \int_0^l \phi'^2(y) dy = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{\pi} \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad (3.10)$$

$$\int_0^l \dot{\psi} \theta dy = -\dot{q}_1 q_2 \int_0^l \phi'^2(y) dy = -\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{\pi} \right) \dot{q}_1 q_2 \quad (3.11)$$

La section et le moment quadratique d'arbre sont :

$$s = \pi R_1^2 = 3.142 \times 10^{-4} m^2 \quad I = \frac{\pi R_1^4}{2} = 1.57 \times 10^{-8} m^4 \quad (3.12)$$

Remplaçons les expressions (3.9), (3.10) et (3.11) dans (3.8), après simplification et factorisation, on obtient :

$$T_a = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{\pi} \right) \left(s + I \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2 \rho I \Omega \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{\pi} \right) \dot{q}_1 q_2 \quad (3.13)$$

Remplaçons (3.12) dans (3.13), après tout calcul fait on obtient l'expression finale de l'énergie cinétique de l'arbre :

$$T_a = 0.0893 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 4.9477 \times 10^{-3} \Omega \dot{q}_1 q_2 \quad (3.14)$$

3.3.1.3 Énergie cinétique du balourd

L'énergie cinétique du balourd est (voir chapitre 2, expression (2.27)) :

$$T_b = m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (3.15)$$

Les déplacements doivent être évalués à $y = l_1$ et compte tenu des expressions (3.1.1), (3.1.2), l'expression (3.15) devient :

$$T_b = m_b \Omega d \phi(l_1) (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (3.16)$$

Après tout calcul fait, on obtient l'expression finale de l'énergie cinétique du balourd :

$$T_b = 1.299 \times 10^{-5} \Omega (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (3.17)$$

3.3.1.4 Énergie cinétique total du système

L'énergie cinétique totale de system est : $T = T_d + T_a + T_b$. Après tout calcul fait, on trouve :

$$T = 6.9913 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.8732 \Omega \dot{q}_1 q_2 + 1,299 \times 10^{-5} \Omega (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (3.18)$$

3.3.1.5 Énergie de déformation de l'arbre

L'énergie de déformation de l'arbre est (voir chapitre 2, expression (2.21)) :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.19)$$

On remplace les expressions (3.1.1) et (3.1.2) dans (3.19), on obtient :

$$U_a = \frac{EI}{2} (q_1^2 + q_2^2) \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \int_0^l \sin^2 \left(\frac{\pi y}{l} \right) dy \quad (3.20)$$

$$= \frac{EI}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \left(\frac{l}{2} \quad l \right) (q_1^2 + q_2^2) \quad (3.21)$$

Après tout calcul fait, l'expression finale de l'énergie de déformation de l'arbre est :

$$U_a = 5.977 \times 10^5 (q_1^2 + q_2^2) \quad (3.22)$$

3.3.1.6 Équations de mouvement

Les équations du mouvement sont déduites des équations de Lagrange (voir chapitre 2, expression (2.1)). L'application des équations de Lagrange conduit à :

$$13.9826 \ddot{q}_1 - 2.8732 \Omega q_2 + 1.1954 \times 10^6 q_1 = 1.299 \times 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t \quad (3.23)$$

$$13.9826 \ddot{q}_2 + 2.8732 \Omega q_1 + 1.1954 \times 10^6 q_2 = 1.299 \times 10^{-5} \Omega^2 \cos \Omega t \quad (3.24)$$

Qui sous une forme générale s'écrivent :

$$m \ddot{q}_1 - a \Omega \dot{q}_2 + k q_1 = m_b d \Omega^2 \phi(l_1) \sin \Omega t \quad (3.25)$$

$$m q_2 + a \Omega \dot{q}_1 + k q_2 = m_b d \Omega^2 \phi(l_1) \cos \Omega t \quad (3.26)$$

3.3.2 Fréquences propres en fonction de la vitesses de rotation : diagramme de Campbell

Le rotor est tout d'abord étudié en mouvement libre. Seule la solution des équations (3.25) et (3.26) sans second membres est considérée :

$$m \ddot{q}_1 - a \Omega \dot{q}_2 + k q_1 = 0 \quad (3.27)$$

$$m \ddot{q}_2 + a \Omega \dot{q}_1 + k q_2 = 0 \quad (3.28)$$

Soit sous une forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\text{Matrice masse}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}} + \underbrace{\Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice gyroscopique}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}}_{\text{Matrice raideur}} \underbrace{\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

La deuxième matrice représente l'effet gyroscopique. Les deux autres matrices sont les matrices de masse et de raideur. Les solutions des équations (3.29) sont sous la forme :

$$q_1(t) = Q_1 e^{rt} \quad (3.30)$$

$$q_2(t) = Q_2 e^{rt} \quad (3.31)$$

Remplaçons (3.30) et (3.31) dans (3.29), il vient :

$$\begin{bmatrix} k + mr^2 & -ar\Omega \\ ar\Omega & k + mr^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Pour une solution non triviale de (3.32), il faut que le déterminant soit égale à zéro, d'où l'équation aux fréquences propres :

$$m^2 r^4 + (2km + a^2 \Omega^2) r^2 + k^2 = 0 \quad (3.33)$$

À l'arrêt ($\Omega = 0$), les racines r_{10} et r_{20} de (3.33) sont :

$$r_{10}^2 = r_{20}^2 = j^2 \omega_{10}^2 = j^2 \omega_{20}^2 = -\frac{k}{m}$$

D'où les fréquences propres à l'arrêt :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.34)$$

En rotation ($\Omega \neq 0$), les racines de (3.33) sont r_1 et r_2 qui sont :

$$r_1^2 = -\left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_1^2 \quad (3.35)$$

$$r_2^2 = -\left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right] = j^2 \omega_2^2 \quad (3.36)$$

D'où les fréquences propres en rotation :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (3.37)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (3.38)$$

Les équations (3.35) et (3.36) montrent que r_1^2 et r_2^2 sont des quantités négatives, ainsi que r_1 et r_2 sont imaginaires et la solution générale du mouvement reste limité dans le temps, le mouvement du rotor est stable.

La représentation de $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$ et $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$ est le diagramme de Campbell. En général, le diagramme de Campbell représente f_1 et f_2

$$f_1 = \omega_1 / 2\pi \quad (3.39)$$

$$f_2 = \omega_2 / 2\pi \quad (3.40)$$

en fonction de la vitesse de rotation N (tr/min) qui est reliée à Ω (rad/s) par :

$$N = 30\Omega / \pi \quad (3.41)$$

Ω et ω sont des pulsations et f est une fréquence. Dans ce qui suit, les trois quantités sont simplement appelées fréquences.

Le diagramme de Campbell ($f_1 = f_1(N), f_2 = f_2(N)$) est présenté sur la **figure 3.3** et les intersections de $f_1(N)$ et $f_2(N)$ avec les deux droites sont indiquées. Les points **A** et **B** correspondent aux intersections avec la droite $f = N/60$. À ces deux points, une fréquence propre du rotor égale à une fréquence de rotation. Les points **C** et **D** correspondent aux intersections avec la droite $f = 0.5N/60$. Ces deux points correspondent à une fréquence propre du rotor égale à la moitié de la vitesse de rotation. Il est intéressant d'avoir une expression générale des fréquences correspondantes aux point **A, B, C** et **D**. La relation entre ω et Ω est :

$$\omega = s\Omega \quad (3.42)$$

où $s = 1$ en **A** et **B**, $s = 0.5$ en **C** et **D**, les expressions (3.35) et (3.36) permettent d'écrire

$$r = \pm j\omega = \pm js\Omega \quad (3.43)$$

qui substituée dans (3.33) donne :

$$s^2(s^2m^2 - a^2)\Omega^4 - 2kms^2\Omega^2 + k^2 = 0 \quad (3.44)$$

Les solutions en fréquences de (3.44) sont :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} ; \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (3.45)$$

et à partir de (3.43)

$$\omega_1 = s\sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}} \quad (3.46)$$

qui correspond aux points **A** pour $s = 1$ et au point **C** pour $s = 0.5$.

$$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}} \quad (3.47)$$

qui correspond aux points **B** pour $s = 1$ et au point **D** pour $s = 0.5$.

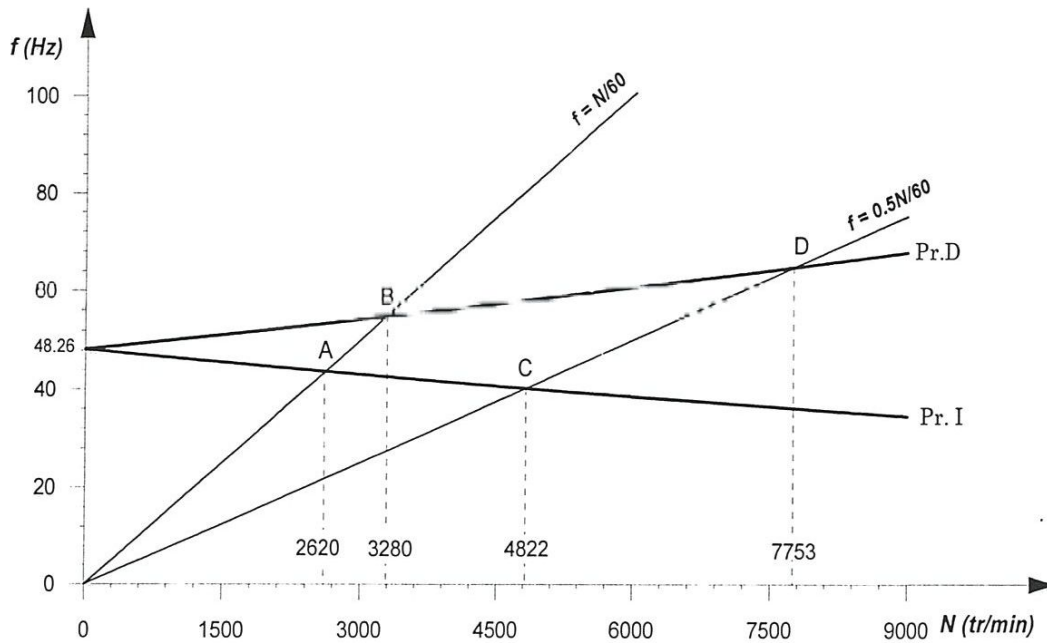


Figure 3.3: Diagramme de Campbell

Pour l'application considérée, nous avons :

- Les fréquences propres à l'arrêt : $f_{10} = \frac{\omega_{10}}{2\pi} = f_{20} = \frac{\omega_{20}}{2\pi} = 48.26$ Hz
- En A : $f_1 = 43.67$ Hz ; $N = 2620$ tr/min
- En B : $f_2 = 54.68$ Hz ; $N = 3280$ tr/min
- En C : $f_3 = 40.19$ Hz ; $N = 4822$ tr/min
- En D : $f_4 = 64.61$ Hz ; $N = 7753$ tr/min

3.3.3 Réponse en vibration libre

Choisissons l'ensemble de conditions initiales suivant :

$$q_1(0) = 0 ; q_2(0) = q_{20} ; \dot{q}_1(0) = -\omega_1 q_{20} ; \dot{q}_2(0) = 0 \quad (3.48)$$

Remplaçons les conditions initiales (3.48) dans (3.30) et (3.31), après simplifications, nous obtenons :

$$q_1(t) = -q_{20} \sin \omega_1 t \quad (3.49)$$

$$q_2(t) = q_{20} \cos \omega_1 t \quad (3.50)$$

Les déplacements $u(y,t)$ et $w(y,t)$ d'un point situé à une distances y de l'origine o sont donnés par (3.1.1) et (3.1.2), soient :

$$u(y,t) = -q_{20} \sin \frac{\pi y}{l} \sin \omega_1 t = -R \sin \omega_1 t \quad (3.51)$$

$$w(y,t) = q_{20} \sin \frac{\pi y}{l} \cos \omega_1 t = R \cos \omega_1 t \quad (3.52)$$

Ces deux expressions entraînent :

$$R = \sqrt{u^2(y,t) + w^2(y,t)} = q_{20} \sin \frac{\pi y}{l} \quad (3.53)$$

Les points situés sur l'axe du rotor décrivent donc **des cercles**. Avec l'ensemble des conditions initiales choisies, l'orbite est décrite (Fig. 3.4), dans un sens opposé au sens de rotation Ω ; le rotor est dans la situation de précision inverse (Pr.I).

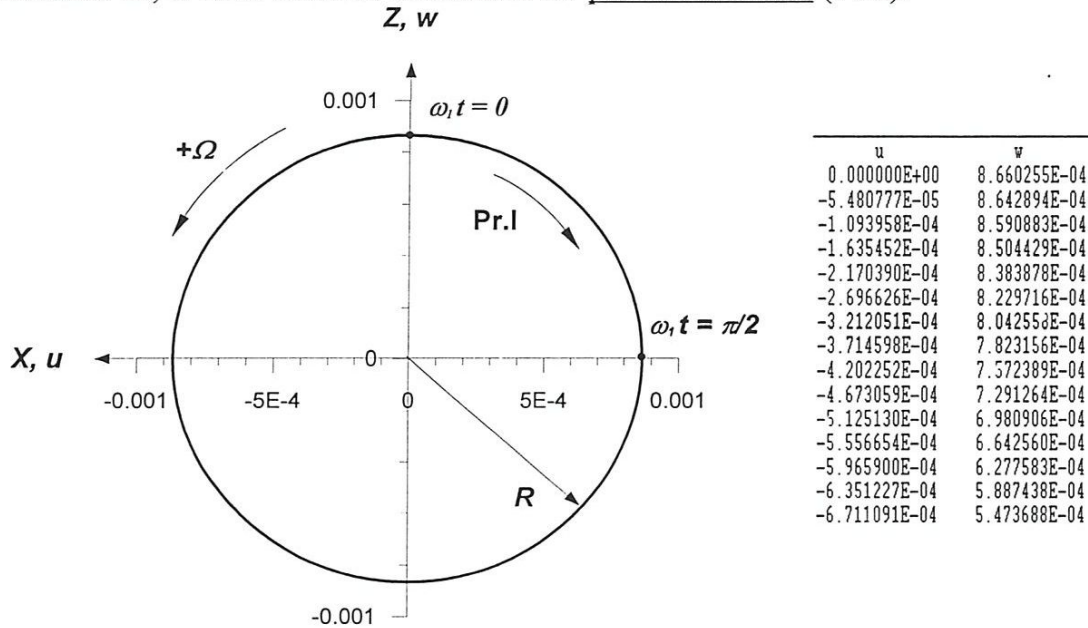


Figure 3.4 : Trajectoire du centre géométrique du rotor au niveau du disque ($y = l/3$), Précision Inverse (Pr.I), $N = 2620$ tr/min.

Choisissons maintenant un autre ensemble de conditions initiales :

$$q_1(0) = q_{10} ; q_2(0) = 0 ; \dot{q}_1(0) = 0 ; \dot{q}_2(0) = -\omega_2 q_{10} \quad (3.54)$$

Remplaçons les conditions initiales (3.54) dans (3.30) et (3.31), après simplifications, nous obtenons :

$$q_1(t) = q_{10} \cos \omega_2 t \quad (3.55)$$

$$q_2(t) = -q_{10} \sin \omega_2 t \quad (3.56)$$

Soit :

$$u(y,t) = q_{10} \sin \frac{\pi y}{l} \cos \omega_2 t = R \cos \omega_2 t \quad (3.57)$$

$$w(y,t) = -q_{10} \sin \frac{\pi y}{l} \sin \omega_2 t = -R \sin \omega_2 t \quad (3.58)$$

Le rotor est dans la situation de précision directe (Pr.D) (Fig.3.5).

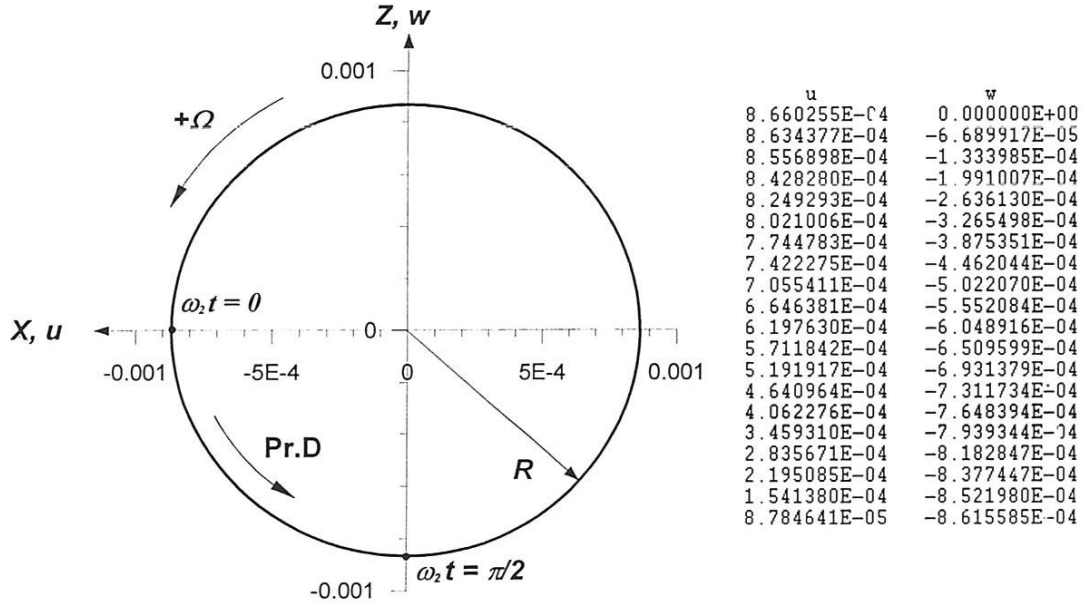


Figure 3.5 : Trajectoire du centre géométrique du rotor au niveau du disque ($y=l/3$), Précision Directe (Pr.D), $N = 2620$ tr/min.

3.3.4 Réponse aux forces d'excitation

Il s'agit ici des réponses en régime permanent. Seule la solution particulière des équations complètes (3.25) et (3.26) est considérée.

3.3.4.1 Réponse due au Balourd

Les équations (3.25) et (3.26) avec $m^* = m_b \phi(l_1)$, deviennent :

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = m^* d\Omega^2 \sin \Omega t \quad (3.59)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = m^* d\Omega^2 \cos \Omega t \quad (3.60)$$

Comme il n'y a pas d'amortissement, les solutions de (3.25) et (3.26) peuvent être cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = Q_1 \sin \Omega t \quad (3.61)$$

$$q_2(t) = Q_2 \cos \Omega t \quad (3.62)$$

En reportant (3.61) et (3.62) dans (3.59) et (3.60), il vient :

$$-m\Omega^2 Q_1 + a\Omega^2 Q_2 + kQ_1 = m^* d\Omega^2 \quad (3.63)$$

$$-m\Omega^2 Q_2 + a\Omega^2 Q_1 + kQ_2 = m^* d\Omega^2 \quad (3.64)$$

Soit :

$$Q_1 = Q_2 = \frac{m^* d \Omega^2}{k + (a - m)\Omega^2} \quad (3.65)$$

La vitesse critique Ω_{cr} qui rend les déplacements infinis et l'annulation du dénominateur de (3.65) entraîne :

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m - a}} \quad (3.66)$$

Ce résultat montre une seule vitesse critique, elle correspond à la valeur de Ω_2 donné en (3.45) quand $s = 1$. La valeur correspondante est celle du point **B** de la **figure 3.3**. Comme $Q_1 = Q_2$, les orbites décrites par l'axe du rotor sont des cercles et la précision est directe. Pour le rotor étudié, la fréquence propre correspondante à la vitesse critique $\Omega_{cr} = 343.47 \text{ rad/s}$ est $f = 54.68 \text{ Hz}$; soit $N_{cr} = 3280 \text{ tr/min}$. Il faut remarquer que lorsque Ω augment, la valeur limite du déplacement est :

$$|Q_1| = |Q_2| = \left| \frac{m^* d}{a - m} \right| \quad (3.67)$$

Ce qui donne pour le rotor concerné :

$$|Q_1| = |Q_2| = 1.282 \times 10^{-6} \text{ m} = 0.001282 \text{ mm}$$

L'amplitude Q_1 , de la réponse est représentée sur la **figure 3.6**.

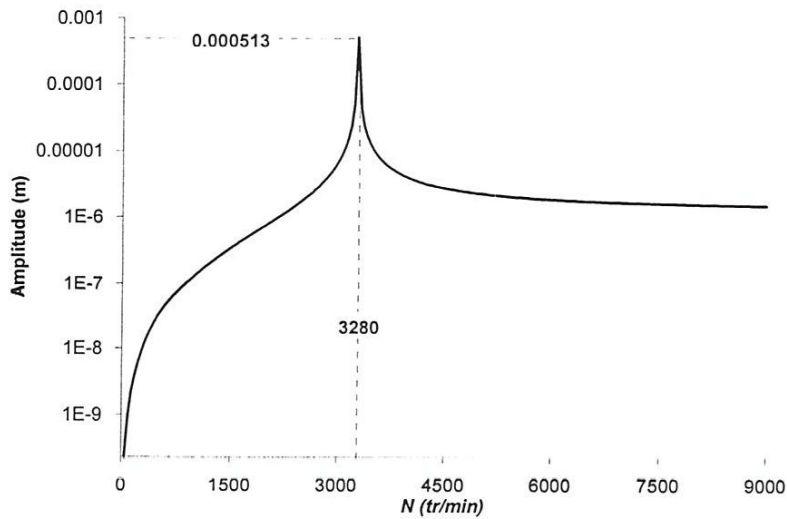


Figure 3.6 : Réponse due au balourd

3.3.4.2 Réponse due à une force asynchrone

En fonctionnement, le rotor peut être excité par des forces asynchrones. Une force asynchrone est une force d'amplitude constante F_0 tournante à une vitesse $(s\Omega)$ différente de celle du rotor. Si cette force est en $y = l_3$, il vient :

$$F_{q_1} = F_0 \phi(l_3) \sin(s\Omega t) = F \sin(s\Omega t) \quad (3.68)$$

$$F_{q_2} = F_0 \phi(l_3) \cos(s\Omega t) = F \cos(s\Omega t) \quad (3.69)$$

Donc, les équations à résoudre sont :

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = F \sin(s\Omega t) \quad (3.70)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = F \cos(s\Omega t) \quad (3.71)$$

Comme il n'y a pas d'amortissement, les solutions sont cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = Q_1 \sin(s\Omega t) \quad (3.80)$$

$$q_2(t) = Q_2 \cos(s\Omega t) \quad (3.81)$$

Remplaçons les expressions (3.80) et (3.81) dans les équations du mouvement (3.70) et (3.71), après simplification, on obtient :

$$Q_1 = Q_2 = \frac{F}{k + (as - ms^2)\Omega^2} \quad (3.91)$$

La vitesse critique qui rend le déplacement infini est :

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{s(ms - a)}} \quad (3.92)$$

Le résultat montre une seule vitesse critique, elle correspond à la valeur de $\Omega_2 = 7753$ tr/min donnée aussi en (3.45), la valeur correspond est celle du point **D** de la **figure 3.3**. La fréquence propre qui correspond à la vitesse critique donnée par l'expression (3.47) est : $\omega_2 = 64.61$ Hz. Comme $Q_1 = Q_2$, les orbites sont des cercles et la précision est directe.

L'amplitude de la réponse Q_1 est représentée sur la **figure 3.7** pour deux amplitudes différentes de la force appliquée à une position $l_3 = l/3$.

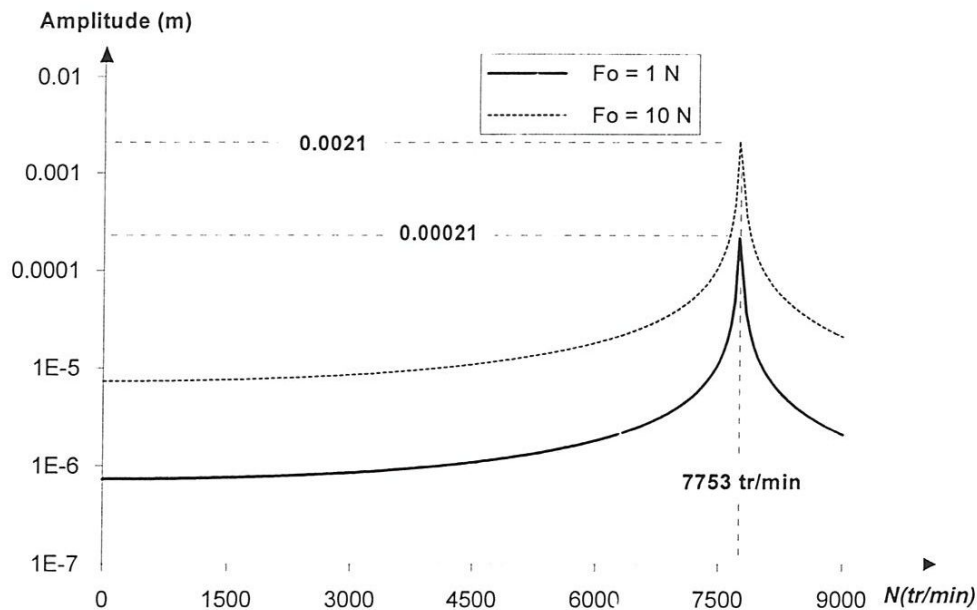


Figure 3.6 : Réponse due à une force asynchrone, $s = 0.5$.

3.4 Modèle non symétrique amortis

Les rotors couramment supportés par des paliers hydrodynamiques sont amortis. L'amortissement, qui peut être important, est de type visqueux. Le modèle utilisé (**Fig. 3.7 a et b**), Comprend deux raideurs $k_{xx} = 10^5$ N/m, $k_{zz} = 5 \times 10^5$ N/m et deux amortissements visqueux différents $c_{xx} = 100\beta$, $c_{zz} = 500\beta$, avec β est un paramètre d'amortissement. Le modèle est non symétrique. La non symétrie est introduite par les raideurs et les amortissements inégaux du palier.

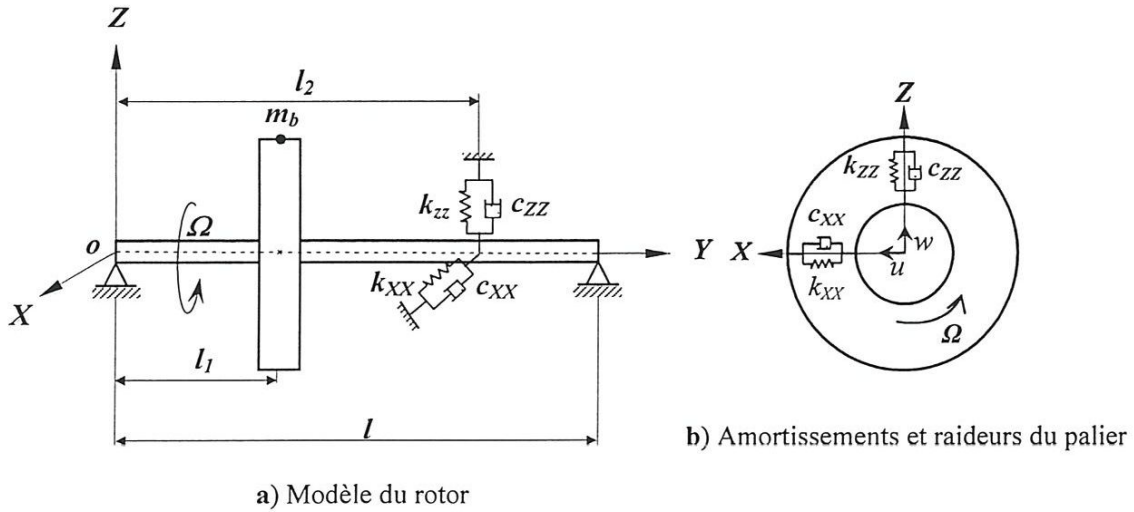


Figure 3.7 : Modèle simple de monorotor Amorti

Le travail virtuel des forces extérieures agissantes sur l'arbre au niveaux du palier se met sous la forme (voir expressions (2.22) et (2.23) du chapitre 2) :

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{zz}w\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w \quad (3.93)$$

En tenant compte des expressions (3.1.1) et (3.1.2), l'expression (3.93) devient :

$$\delta W = -k_{xx}\phi^2(l_2)q_1\delta q_1 - k_{zz}\phi^2(l_2)q_2\delta q_2 - c_{xx}\phi^2(l_2)\dot{q}_1\delta q_1 - c_{zz}\phi^2(l_2)\dot{q}_2\delta q_2 \quad (3.94)$$

D'où les forces généralisées :

$$F_{q_1} = -k_{xx}\phi^2(l_2)q_1 - c_{xx}\phi^2(l_2)\dot{q}_1 \quad (3.95.1)$$

$$F_{q_2} = -k_{zz}\phi^2(l_2)q_2 - c_{zz}\phi^2(l_2)\dot{q}_2 \quad (3.95.2)$$

L'utilisation des expressions (3.95.1) et (3.95.2) entraîne

$$\begin{aligned} k_1 &= k + k_{xx}\phi^2(l_2) \\ k_2 &= k + k_{zz}\phi^2(l_2) \\ c_1 &= c_{xx}\phi^2(l_2) \\ c_2 &= c_{zz}\phi^2(l_2) \end{aligned} \quad (3.96)$$

Les équations de mouvement (3.59) et (3.60) deviennent alors :

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = m^*d\Omega^2 \sin \Omega t \quad (3.97)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = m^*d\Omega^2 \cos \Omega t \quad (3.98)$$

3.4.1 Fréquences naturelles et vitesses critiques

Les équations (3.97) et (3.98) sans second membre s'écrivent :

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = 0 \quad (3.99)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = 0 \quad (3.100)$$

Les solutions des équations (3.99) et (3.100) sont recherchées sous les formes (3.30) et (3.31), ce qui conduit à l'équation caractéristique :

$$m^2r^4 + m(c_1 + c_2)r^3 + (k_1m + k_2m + c_1c_2 + a^2\Omega^2)r^2 + (k_2c_1 + k_1c_2)r + k_1k_2 = 0 \quad (3.101)$$

En général les valeurs des coefficients d'amortissement c_1 et c_2 sont telles que les racines de l'équation (3.99) sont des paires de quantités complexes conjuguées qui se mettent sous la forme $r_i = \sigma_i + j\omega_i$ et qui donnent ainsi les fréquences propres $\omega_i(\Omega)$ et les taux de décroissance $\sigma_i(\Omega)$. L'instabilité, si elle existe, apparaît tout naturellement lorsque $\sigma_i(\Omega)$ sont positifs.

Nous présentons sur la **figure 3.8.a**, l'évolution des fréquences propres ($f_i = \omega_i/2\pi$), c'est-à-dire la partie imaginaire de r_i , en fonction de la vitesse de rotation N pour un faible amortissement du palier ($\beta = 1$). Les points **A** et **B** correspondent aux intersections avec la droite $f = N/60$. À ces deux points, une fréquence propre du rotor égale à une fréquence de rotation. Le diagramme de Campbell donne l'évolution des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation et permet de **visualiser approximativement** les vitesses critiques potentielles à **cause de l'amortissement**. Les vitesses critiques ne sont vraiment déterminées que lors de la réponse aux balourds ou de la réponse à une force asynchrone. Autrement, la vitesse critique due à un balourd ou à une force asynchrone ne correspond pas exactement à l'intersection de courbe de fréquence avec la droite $f = N/60$ du diagramme de Campbell.

Nous présentons sur la figure **3.8.b**, le taux de décroissance σ , c'est-à-dire, la partie réelle de r_i , en fonction de la vitesse de rotation N pour le même paramètre d'amortissement ($\beta = 1$). On constate que toutes les valeurs de σ sont négatives, alors le mouvement du rotor est **stable**.

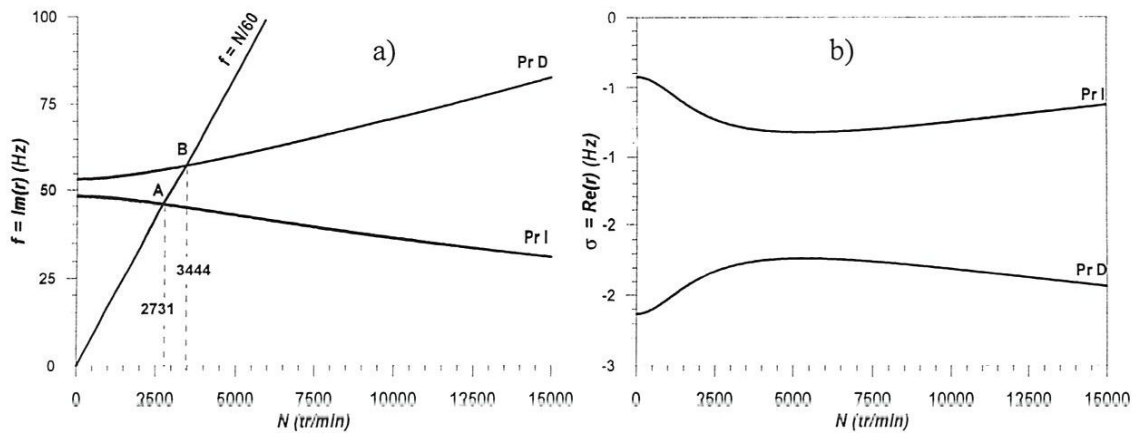


Figure 3.8 : Diagramme de Campbell et taux de décroissance pour $\beta = 1$

Sur les figures 3.9.a et b, on présente respectivement la variation des fréquences propres et le taux de décroissance en fonction de la vitesse de rotation du rotor pour un amortissement important ($\beta = 15$). Le diagramme de Campbell est très différent en comparaison avec la figure 3.8, et le mouvement est **stable**.

Sur les figures 3.10 a et b, on présente respectivement, la variation des fréquences propres et le taux de décroissance en fonction de la vitesse de rotation du rotor pour un amortissement très important ($\beta = 26$). On constate qu'une fréquence propre n'apparaît pas avant que la vitesse de rotation atteigne une certaine valeur ($N = 5250$ tr/min). On constate aussi que le comportement du rotor est stable.

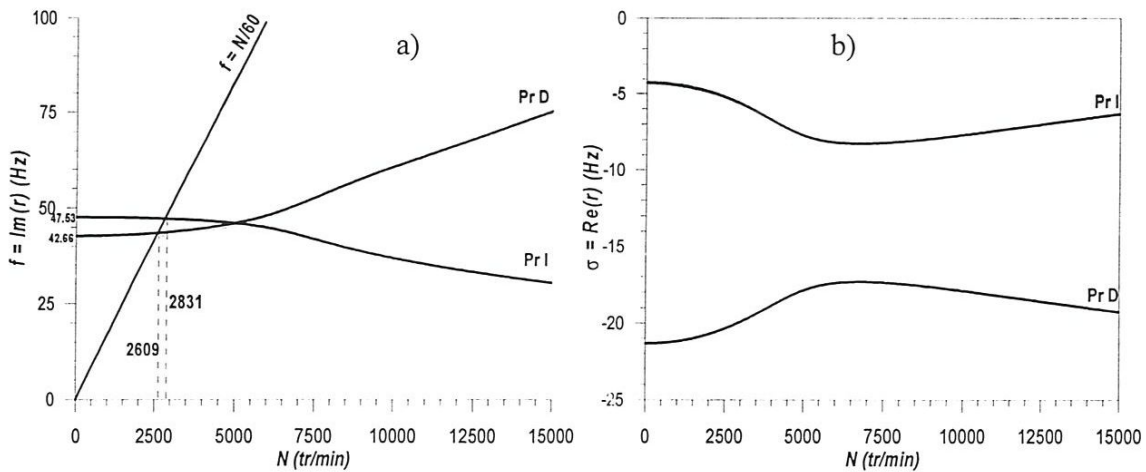


Figure 3.9 : Diagramme de Campbell et taux de décroissance pour $\beta = 15$

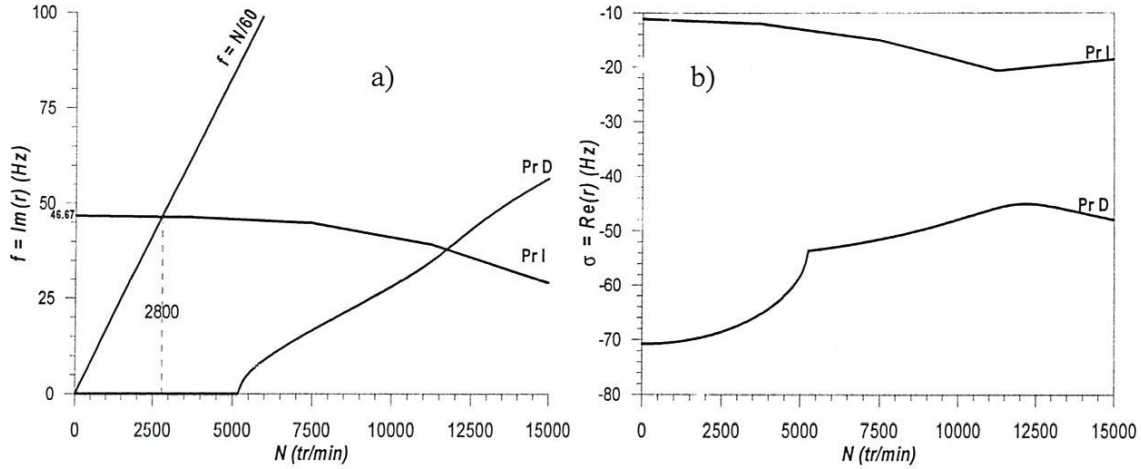


Figure 3.10 : Diagramme de Campbell et taux de décroissance pour $\beta = 26$

3.4.2 Réponse aux forces d'excitation

3.4.2.1 Balourd

Comme le système est amorti, la réponse n'est en générale pas en phase avec la force du balourd. Les solutions sont cherchées sous la forme suivante :

$$q_1(t) = A_1 \sin \Omega t + B_1 \cos \Omega t \quad (3.101.1)$$

$$q_2(t) = A_2 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t \quad (3.101.2)$$

Ces expressions sont reportées dans les équations du mouvement (3.97) et (3.98) et chaque équation conduit à deux équations traduisant l'égalité des facteurs de $\sin \Omega t$ et de $\cos \Omega t$. Cela donne un ensemble d'équations algébrique linéaire qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -c_1\Omega & 0 & a\Omega^2 \\ c_1\Omega & k_1 - m\Omega^2 & -a\Omega & 0 \\ 0 & -a\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 & -c_2\Omega \\ a\Omega^2 & 0 & c_2\Omega & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^* d \Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ m^* d \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Pour une valeur de Ω , la résolution de (3.102) donne $A_1(\Omega)$, $B_1(\Omega)$, $A_2(\Omega)$, $B_2(\Omega)$ et donc $Q_1(\Omega)$ et $Q_2(\Omega)$ à partir de :

$$Q_1(\Omega) = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad (3.103.1)$$

$$Q_2(\Omega) = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \quad (3.103.2)$$

La résolution du système d'équations algébrique linéaire (3.102) s'effectue par la **méthode directe de Gauss-Jordan**. La programmation s'effectue en langage FORTRAN.

L'amplitude composante du balourd est présentée dans les **figures 3.11, 3.12 et 3.13** pour différentes valeurs de β . Pour la figure 3.11, on observe deux pics correspondants aux vitesses critiques **2730.5 tr/min** et **3450 tr/min**. On constate aussi que l'amplitude maximale de la réponse au balourd correspond à une vitesse de rotation supérieure à celle obtenue par le diagramme de Campbell figure 3.8, surtout lorsque l'amortissement est important (voir **figures 3.12 et 3.13**). Dès que l'amortissement est important on n'observe pratiquement plus de vitesse critique (figure 3.13).

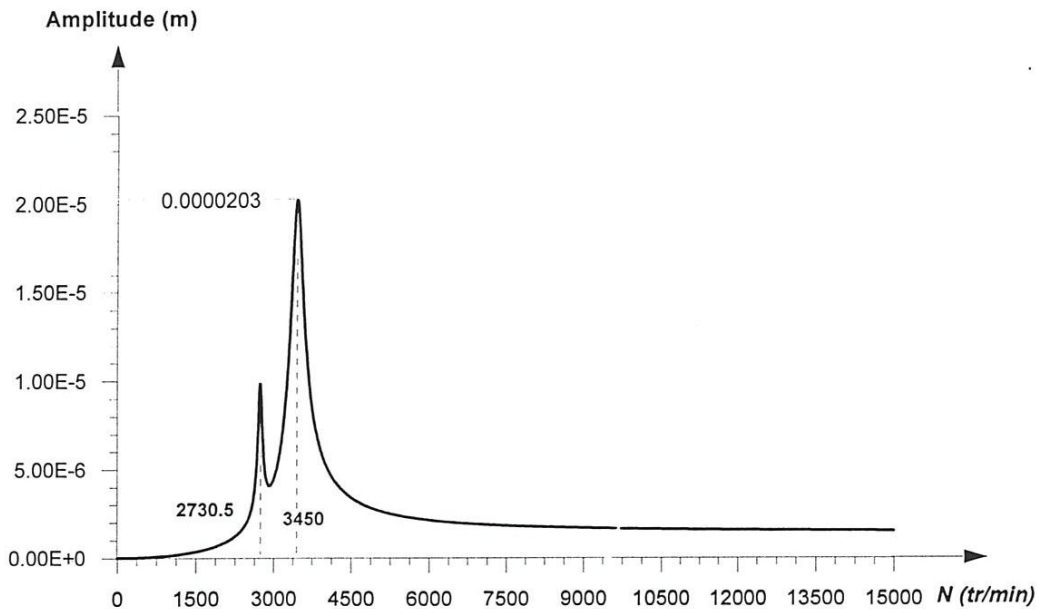


Figure 3.11 : Amplitude de la réponse au balourd pour $\beta = 1$

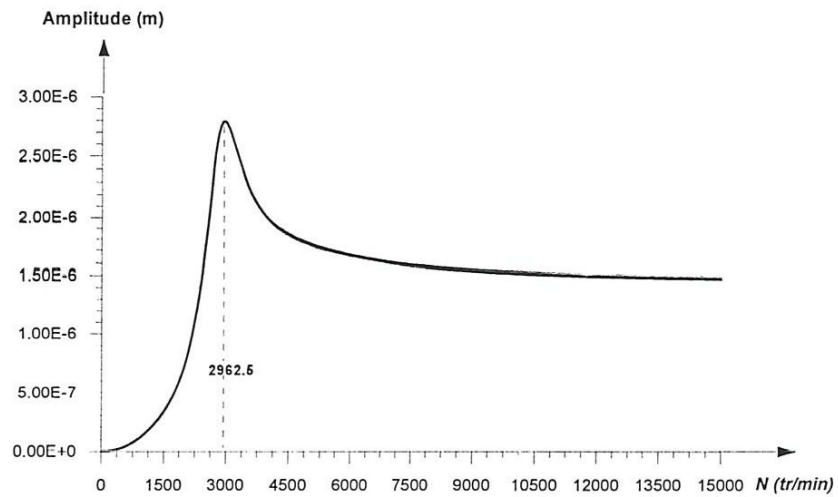


Figure 3.11 : Amplitude de la réponse au balourd pour $\beta = 15$

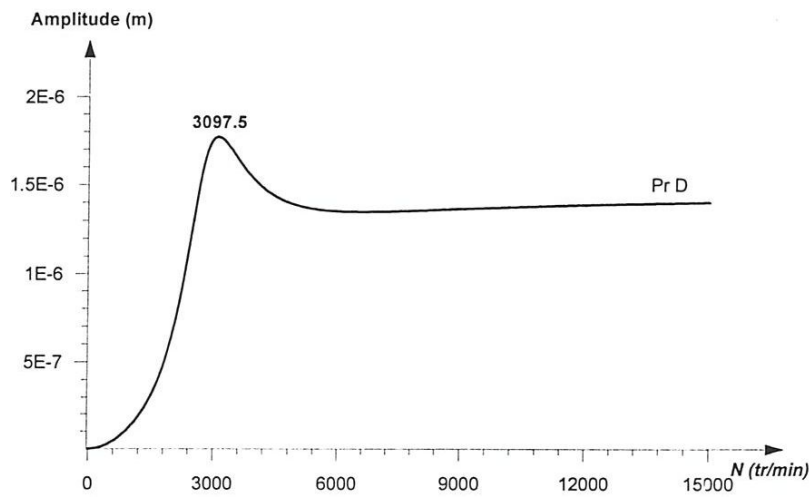


Figure 3.11 : Amplitude de la réponse au balourd pour $\beta = 26$

3.4.2.2 Force asynchrone

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = A_1 \sin(s\Omega t) + B_1 \cos(s\Omega t) \quad (3.104.1)$$

$$q_2(t) = A_2 \sin(s\Omega t) + B_2 \cos(s\Omega t) \quad (3.104.2)$$

Pour déterminer la réponse due à une force extérieure asynchrone, on procède de la même manière que dans le cas d'une force de balourd.

Conclusions générales

Ce travail avait pour objectif, la modélisation du comportement dynamique des rotors flexibles (modèles simples de monorotors), avec la prise en compte de l'effet gyroscopique.

L'objectif est d'étudier les principaux phénomènes de base qui caractérisent la dynamique des rotors flexibles à savoir : variation des fréquences propre en fonction de la vitesses de rotation ; effet gyroscopique ; effet d'amortissement ; effet des forces d'excitation et instabilité.

Dans le deuxième chapitre, les différentes caractéristiques des éléments de rotors (arbre, disque, palier, balourd) sont déterminées. Le disque est modélisé par un solide indéformable, l'arbre est modélisé par une poutre continue, les paliers hydrodynamiques sont modélisés par un groupe de ressorts et d'amortisseurs. Deux types de balourds sont modélisés : cas d'un balourd concentré et cas d'un balourd réparti.

Dans le troisième chapitre, deux modèles simples de monorotors sont étudiés : un modèle symétrique non amorti et un modèle non symétrique amorti. Dans les deux cas, les paliers extrêmes sont supposés infiniment rigides, les déformés propre d'une poutre en flexion simplement appuyée sont alors utilisés pour décomposer les déplacements de l'axe du rotors.

D'après cette étude, nous avons tiré les conclusions suivantes :

- ✓ La prise en compte de l'effet gyroscopique dû au disque ou à l'arbre ainsi que les caractéristiques du palier hydrodynamique rond les fréquences propres variant en fonction de la vitesse de rotation. Le comportement libre du rotor est résumé par le traçage du diagramme de Campbell.
- ✓ A partir du diagramme de Campbell, on peut déterminer les vitesses critique de rotation que se soit en vibration libre ou forcées (balourd et forces extérieures asynchrone).

- ✓ Dans le cas du modèle symétrique, la trajectoire est toujours circulaire.
- ✓ Dans le cas du modèle symétrique non amorti étudié ici, la vitesse critique due au défaut de balourd coïncide exactement avec le point B sur le diagramme de Campbell ($N_{cr}=3280$ tr/min). La vitesse critique due à l'application d'une force asynchrone de fréquence $0,5\Omega$ coïncide exactement avec le point C sur le diagramme de Campbell ($N_{cr}=7753$ tr/min).
- ✓ Dans le cas du modèle non amorti étudié ici, la non symétrie est introduite par les raideurs et les amortissements différents du palier.
- ✓ Avec la présence de l'amortissement, les racines du polynôme caractéristique sont des paires de quantités complexes conjuguées. Dans ce cas, l'instabilité peut avoir lieu. Le traçage d'un deuxième diagramme (taux de décroissance) est indispensable pour le cas étudié, le rotor est stable dans les plages de vitesses choisies.
- ✓ Dans le cas du modèle amorti, le diagramme de Campbell permet de visualiser approximativement les vitesses critique dues aux balourd et à une force asynchrone qui sont déterminées à partir de la réponse (balourd et force)
- ✓ Le comportement dynamique d'un rotor amorti est totalement déferant à celui d'un rotor non amorti.
- ✓ Dans le cas d'un modèle non symétrique les orbites sont elliptiques.
- ✓ Les vitesses critiques de rotation dues au défaut de balourd, déterminés à partir de l'amplitude de la réponse sont décalées en avant par rapport à celles déterminées sur le diagramme de Campbell surtout lorsque l'amortissement est important.

Références bibliographiques

- [1] G. Genta, 'Dynamic of Rotating Systems, *Mechanical Engineering series*, Edition Springer, 2005.
- [2] W. Rankine, 'Centrifugal Whirling of Shafts' *The Engineer*, 1869.
- [3] A. Föppl, 'Das problem der laval : shen turbinewelle', *Civilingenieur*, pp. 332—342, 1895.
- [4] G. Belluzzo, 'Le turbinc a vapore ed a gas'. Hocpli, Milano, Italy, 1905.
- [5] A. Stodola, 'Steam and Gas Turbines', Mc Graw-Hill, New York, 1927.
- [6] H. H. Jeffcott, 'The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed-the effect of want of balance', *Phil. Mag.*, Vol. 37, N° 6, pp. 304-314, 1919.
- [7] M. Lalanne, Guy Ferraris, "Dynamique des rotos en flexion", technique de l'ingénieur.
- [8] R. Bigret, 'Vibrations des machines tournantes et des structures' Technique et Documentation, Paris.
- [9] F. Sidorof, 'Mécanique des solides', tome 1, chapitre 7 : le problème de Saint Venant.

Annexe A

Détermination du vecteur rotation du disque

1 Système d'axe et de coordonnées

Le système d'axe et de coordonnées utilisés dans l'étude de la cinématique et dynamique des rotors en flexion est présenté par la figure 1 (voir aussi chapitre 2).

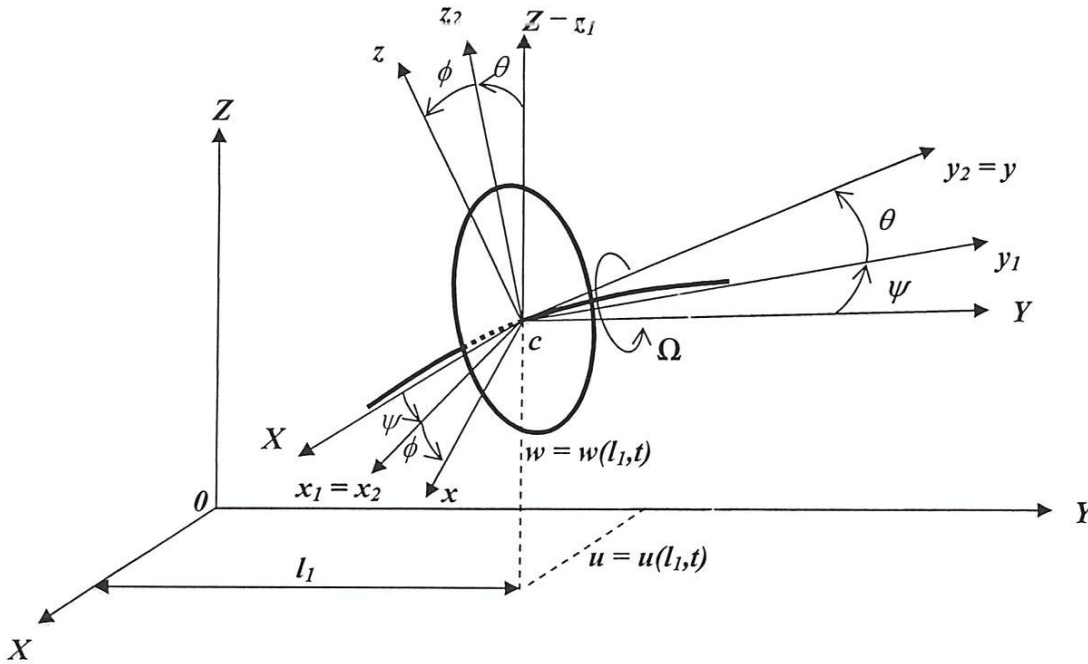
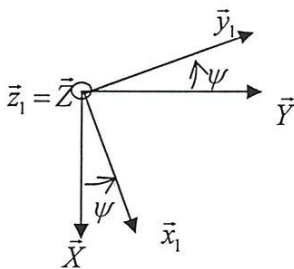


Figure 1 : Repères de référence du disque rigide sur l'arbre flexible

Première rotation :

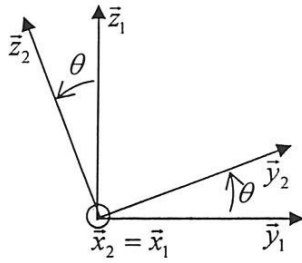
$$(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) \xrightarrow{\text{rot}(\psi, \vec{Z})} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{Z})$$



$$\begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[R_1]} \begin{Bmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix}$$

Deuxième rotation :

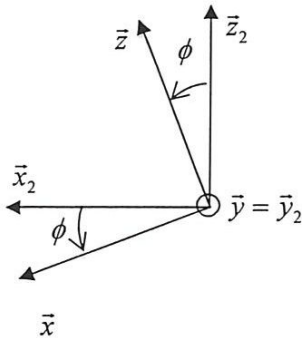
$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \xrightarrow{\text{rot}(\theta, \bar{x}_1)} (\bar{x}_2 = \bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$$



$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{z}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{[R_2]} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{z}_1 \end{Bmatrix}$$

Troisième rotation :

$$(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2) \xrightarrow{\text{rot}(\phi, \bar{y}_2)} (\bar{x}, \bar{y} = \bar{y}_2, \bar{z})$$



$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}}_{[R_3]} \begin{Bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{z}_2 \end{Bmatrix}$$

D'où le vecteur rotation :

$$\vec{\omega} = (R/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\phi} \vec{y}$$

2. Expression de $\vec{\omega}(R/R_0)$ dans la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} &= [R_3] \begin{Bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{z}_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{z}_2 \end{Bmatrix} = [R_3]^T \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

D'où : $\bar{x}_2 = \cos \phi \bar{x} + \sin \phi \bar{z}$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} &= [R_3][R_2] \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix} = [R_2]^T [R_3]^T \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta & -\sin \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

D'où : $\vec{z}_1 = -\cos \theta \sin \phi \vec{x} + \sin \theta \vec{y} + \cos \theta \cos \phi \vec{z}$

Le vecteur rotation exprimé dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(R/R_0) &= \dot{\psi} [-\cos \theta \sin \phi \vec{x} + \sin \theta \vec{y} + \cos \theta \cos \phi \vec{z}] + \dot{\theta} [\cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{z}] + \dot{\phi} \vec{y} \\ &= (\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi) \vec{x} + (\dot{\phi} + \sin \theta) \vec{y} + (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi) \vec{z} \end{aligned}$$

D'où, on obtient :

$$\vec{\omega}(R/R_0) = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\Psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{Bmatrix}_R$$

Annexe B

Energie de déformation d'une poutre en flexion

1. Rappels d'élasticité

Considérons une poutre continue repérée dans une base orthonormée (x, y, z) , un point $B(x, y, z)$ de ce milieu continu qui subit, à un instant donné t , des déplacements (u, v, w) , des déformations ε_{ij} et des contraintes σ_{ij} . Ces grandeurs sont définies et reliées par les relations suivantes [8] :

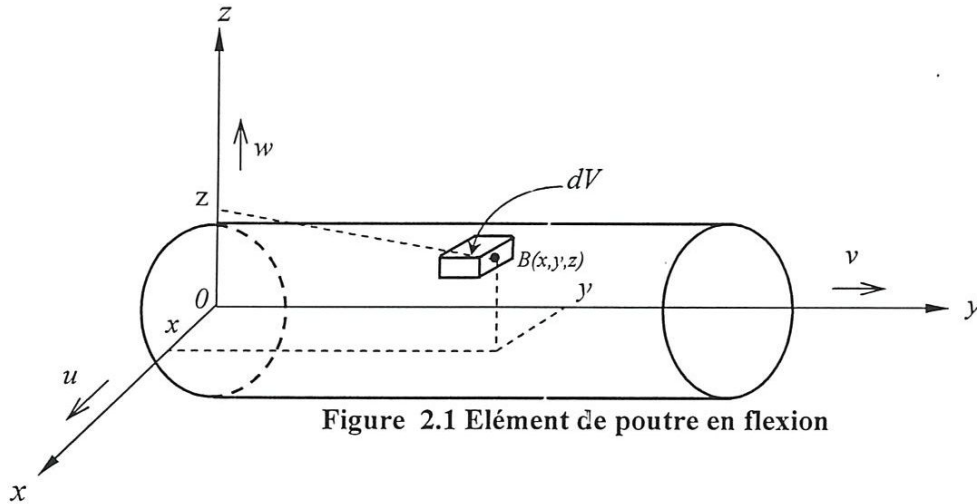


Figure 2.1 Elément de poutre en flexion

Déplacements :

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} u_i, i=1, 2, 3 \quad (B.1)$$

Déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (B.2)$$

Contraintes : Pour un matériau isotrope, la loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (B.3)$$

Avec

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}(\vec{u})$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ G = \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \text{ Constantes de Lamé}$$

E : Module d'élasticité d'Young

ν : Coefficient de Poisson

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases} \quad \text{Symbole de Kronecker}$$

2. Energie de déformation par unité de volume

L'énergie de déformation par unité de volume est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\sigma]^T [\varepsilon] \quad (\text{B.4})$$

Les contraintes sont liées aux déformations par les relations suivantes (loi de Hooke) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & \\ & & & [0] & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon\} \quad (\text{B.5})$$

Avec $[D]$ est la matrice des coefficients d'élasticité.

De Saint Venant a démontré que [9] :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Avec cette hypothèse, on peut analyser le comportement d'un élément de poutre qui décrit par les déformations du centre de gravité de la section. La **figure 2.2** représente les contraintes non nulles sur la face d'un élément de la poutre. Avec les l'hypothèses

Annexe B : Energie de déformation d'une poutre en flexion

définies par les relations (B.6), et en tenant compte des relations générales de l'élasticité, on montre que (on néglige les déformations dues à σ_{yz} et à σ_{yx}) :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (B.7)$$

Avec

$\frac{\partial v}{\partial y}$: Résulte de la traction- compression suivant l'axe (o,y)

$z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ et $x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; Résultant de la flexion dans les plans (o, y, z) et (o, x, y)

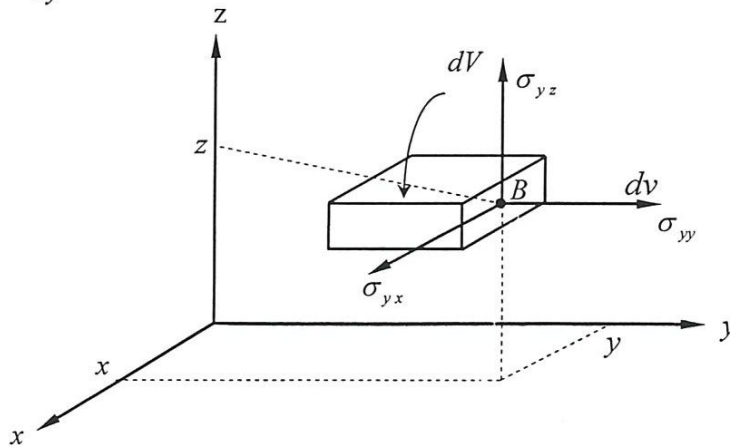


Figure 2.2 : Contraintes non nulles sur une façade d'un élément de volume de la poutre

L'énergie de déformation par unité de volume se simplifie à :

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} \quad (B.8)$$

Selon l'hypothèse de Saint Venant, on peut démontrer que ($\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0 \rightarrow \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{yy}$):

$$\sigma_{yy} = E \varepsilon_{yy} \quad (B.9)$$

3. Énergie de déformation totale de la poutre

L'énergie de déformation totale de la poutre est obtenue en intégrant sur son volume :

$$\begin{aligned} U_t &= \int_v U dV = \int_0^l \int_s U ds dy \\ &= \frac{1}{2} E \int_0^l \int_s \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{2} E \int_0^l I_x \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{2} E \int_0^l I_z \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dy \end{aligned} \quad (B.10)$$

Annexe B : Energie de déformation d'une poutre en flexion

Avec s est la section de la poutre, I_x est le moment d'inertie de section par rapport à l'axe (o, x) ($I_x = \int_s z^2 ds$), I_z est l'inertie de section par à l'axe (o, z) , ($I_z = \int_s x^2 ds$).

Pour le cas le plus courant d'une poutre symétrique ($I_x = I_z = I$), l'énergie de déformation total se simplifie à :

$$U_T = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (\text{B.11})$$

Résumé

*C*e travail est une première étape dans la modélisation vibratoire des rotors flexibles. Deux modèles mais réalistes de monorotors sont étudiés : un modèle symétrique non amorti et un modèle non symétrique amorti. Les différents phénomènes de base qui caractérisent la dynamiques des rotors flexibles sont étudiés : l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, l'effet gyroscopique, l'effet d'amortissement, l'effet des forces de balourd, l'effet des forces asynchrones et l'instabilité.