



## Mémoire de MASTER

Présenté à l'Université de Guelma  
Faculté des Sciences et sciences de l'ingénierie  
Département de Génie mécanique

Option : Maintenance industrielle



---

Thème : Application de la méthode des différences  
finies dans le calcul des plaques circulaires

---

Sous la direction de : Dr. GUENFOUD S

Par

BENNACER RIAD



Le travail réalisé dans ce mémoire de fin d'étude est structuré en : Sommaire ; Introduction générale ; cinq chapitres ; conclusion générale ; références bibliographiques.

Chapitre I : Généralités sur les plaques.

Chapitre II : Méthode des différences finies.

Chapitre III : Calcul d'une plaque circulaire encastrée sur tout son contour.

Chapitre IV : Calcul d'une plaque circulaire reposant sur d'appuis simple sur tout son contour.

Chapitre V : calcul d'une plaque de forme demi circulaire encastrée sur tout son coté linéaire.



## **Introduction Générale :**

Le calcul des structures de plus d'une dimension telles que les plaques ou les coques en statique comme en dynamique est lié à de très grandes difficultés mathématiques. C'est pourquoi l'adoption de certaines hypothèses simplifiant la tâche du calcul est inévitable à nos jours. Le calcul statique des plaques circulaires se complique encore lorsque certains facteurs entrent dans le calcul à savoir la forme géométrique compliquée de la plaque, le type de la charge extérieure sollicitant la plaque, le type du matériau composant la plaque, le type des conditions aux limites imposées etc... Tous ces facteurs influent considérablement sur les résultats de calcul à savoir les déflexions, les efforts internes, les contraintes, les déformations etc.... La prise en compte de certains ou de tous ces facteurs, sans doute, précisera les résultats de calcul des différentes grandeurs physiques ce qui les rend plus réelles. Cependant, le calcul en considérant tous ces différents facteurs n'est possible, sauf pour certains cas limités et possible que par des méthodes numériques vu la complexité de la tâche.

L'approche proposée dans ce mémoire pour le calcul statique des plaques circulaires de différentes conditions aux limites se base sur l'application de la méthode des différences finies, les différentes lois de la théorie d'élasticité et un code de calcul. Cet avantage cumule les trois directions essentielles qui intéressent l'ingénieur : (i) le savoir de la théorie d'élastique; (ii) le savoir des différentes méthodes numériques de calcul; (iii) le savoir de la construction des codes de calcul.

L'arrivée à cette fin, nécessite la discrétisation de la plaque en un nombre d'éléments finis, le nombre est proportionnel au degré de précision désiré. Ensuite, la modélisation selon les algorithmes appropriés pour chaque cas traité. La résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque circulaire de différentes conditions aux limites et soumise aux différents types de charges extérieures représente travail principal de cette étude. L'introduction des conditions aux limites et le type du chargement extérieur diminue la taille du système étudié et allège un peu la tâche. Cette opération aboutit à un système d'équations matricielles de vecteur d'inconnues représentant les déflexions de la plaque. La formulation de la matrice de rigidité du système, ainsi que sa résolution nécessite la construction d'un programme de calcul en utilisant le logiciel Mathematica. Enfin, pour la bonne présentation des résultats du calcul (graphiquement) on procède aussi à l'utilisation d'un autre logiciel qui est Fortran pour fournir Data au logiciel Mathematica.

**CHAPITRE : I**

***Généralités sur les  
plaques***

**I. Généralités sur les plaques :**

Les plaques occupent une position particulière vu leur large application dans les différents domaines, comme la construction, l'aviation, et certaines parties des diverses machines...etc. L'importance des plaques ne cesse d'augmenter guère, puisque leur utilisation augmente aussi avec le développement technologique. On peut définir la plaque comme étant un solide déterminé par une surface de référence (plan  $xy$ ) et par une épaisseur  $\delta$  petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Une plaque peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. La théorie des plaques est basée sur les hypothèses suivantes: [1, 2, 3, 4, 5, 6]:

- L'hypothèse dite de section droites (ou planes), les points situés sur une normal à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée ;
- L'hypothèse des déplacements  $u$  et  $v$  (suivant  $x$  et  $y$ ) d'un point quelconque varient linéairement en  $z$  et le déplacement transversal  $w$  (suivant  $z$ ) n'est fonction que de  $x$  et  $y$ . Cette hypothèse a été initialement proposée pour les plaques isotropes, mais ensuite a été appliquée aux plaques orthotropes et multicouches ;
- L'hypothèse du plan neutre ou le plan ( $xy$ ) noté  $A$  est généralement le plan moyen de la plaque:  $-t \leq z \leq t$ , avec  $t = \frac{\delta}{2}$  et  $\delta$  c'est l'épaisseur de la plaque.

Toutes ces hypothèses conduisent au modèle classique généralement associé au nom de Kirchhoff [1]. Dans la théorie des déformées des plaques le plan moyen joue un rôle important dans son calcul.

Considérons les axes ( $ox$ ) et ( $oy$ ) parallèles aux plan moyen de la plaque et l'axe ( $oz$ ) perpendiculaire à ce plan et dirige vers le bas. Par conséquent, les déformées du plan moyen (déplacement verticaux)  $w$  sont fonction de  $x$  et  $y$ :

$$w = w(x, y) \tag{I.1}$$

Cette expression est dite l'expression des déformées du plan moyen de la plaque.

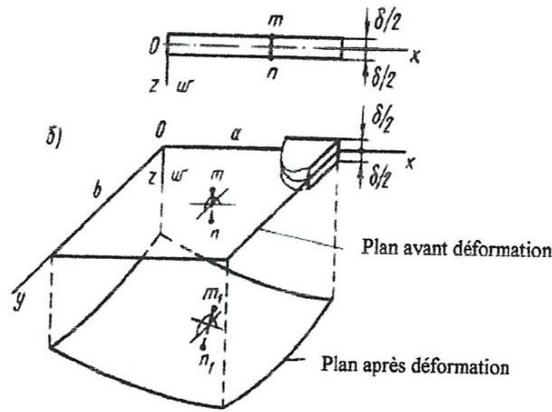


Fig. I.1 : les formées du plan moyen de la plaque

L'épaisseur de la plaque considérablement influe sur la déformation de la plaque. On distingue trois types de plaques selon le rapport  $\frac{a}{\delta}$ ,

Où

$a$  : dimension de la plaque dans le plan  $(xy)$  et  $\delta$  son épaisseur.

Si  $\frac{a}{\delta} \leq 80$ , alors la plaque est du type épais. Le calcul de ce type de plaque se fait avec la considération de toutes les composantes des contraintes spatiales. Si le rapport  $\frac{a}{\delta} \geq 80$ , alors la plaque est du type très mince ou la plaque devient une membrane, qui travaille sous conditions aux limites bien déterminées.

La plus part des plaques, ce qu'on appelle plaques minces, ayant le rapport  $\frac{a}{\delta}$  suivant:

$8 \dots 10 \leq \frac{a}{\delta} \leq 80 \dots 100$ . Ce type de plaque peut être divisé en deux catégories : plaques rigides et plaques déformables.

Si le rapport  $\frac{w}{\delta} \leq 0,2 \dots 0,5$ , dans ce cas les déformées peuvent être négligées et la plaque peut être considérée comme étant un solide rigide ;

Si le rapport  $\frac{w}{\delta} \geq 0,5$  dans ce cas la plaque travaille à la flexion et se considère comme une membrane. Par exemple, les plaques en béton armé, en général, des plaques rigides par contre les

tôles en acier peuvent être considérées comme des plaques rigides ou des plaques déformables, tout dépend des sollicitations auxquelles on été soumises.

Les forces extérieures peuvent être considérées appliquées au plan moyen normalement. Les contraintes normales  $\sigma_z$  sur tout élément parallèle au plan moyen peuvent être négligées par comparaison aux contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .

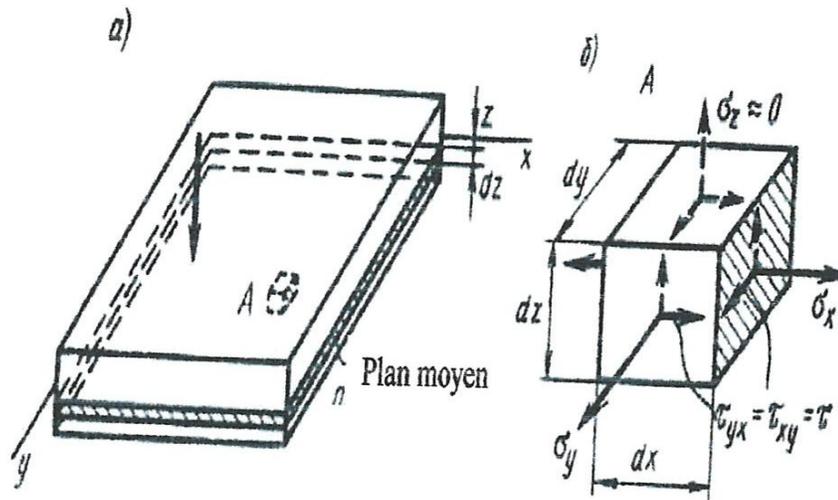


Fig. 1.2 : les contraintes dans la section de la plaque

Le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la plaque, le déplacement d'un point du plan moyen se réduit donc à sa seule composante normale  $w(x, y)$  comptée positivement sur  $(oz)$ .

La tâche principale dans le calcul des plaques est de déterminer les contraintes et les efforts internes dans ses sections ce qui conduit aux problèmes hyperstatiques. Il est préférable de résoudre ce problème en tenant compte comme inconnues les fonctions des déformées  $w = w(x, y)$ . Après la détermination des déformées  $w$ , on pourra déterminer le reste des inconnues (contraintes et efforts internes) en appliquant les lois de la théorie d'élasticité exprimée par  $w$ .

## II. Les déformées de la plaque :

Si une plaque sollicitée par une charge extérieure  $q = q(x, y)$ , la plaque se déforme et son plan moyen se détermine après déformation par la fonction  $w = w(x, y)$ .

Coupons de la plaque un élément de dimensions  $\Delta x \Delta y \delta$  (fig.1.3):

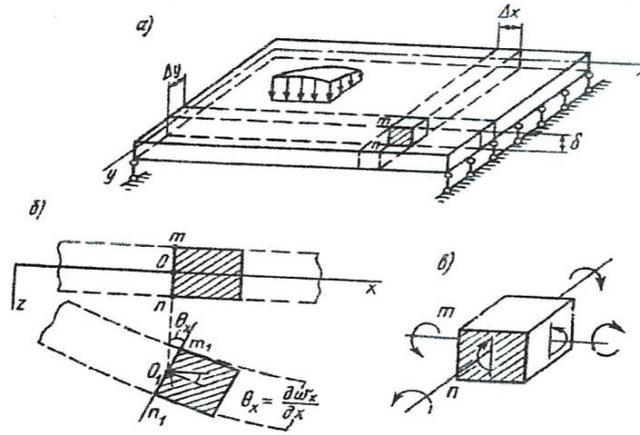


Fig. 1.3 : Les déformations d'un point situé sur le plan moyen de la plaque

D'après l'hypothèse, le plan moyen ne subit pas de déformations latérales, le point  $O$  se déplace uniquement dans le sens vertical par une entité qui définit la déformée  $w$ , et la normale  $mn$  fait une rotation (fig. 1.3). D'après fig. 1.3, la normale  $mn$  tourne par un angle  $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$  et un angle  $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ . Donc les déplacements et les contraintes que se soient de chaque point du plan moyen de la plaque se déterminent à partir de la déformée  $w = w(x, y)$  et des angles de rotation  $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$  et  $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ . Les angles de rotation de la normale  $mn$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , nous permettent de déterminer les déplacements  $u$  et  $v$  des points de cette normale  $mn$  par les expressions suivantes :

$$u = -z\theta_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = -z\theta_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.2)$$

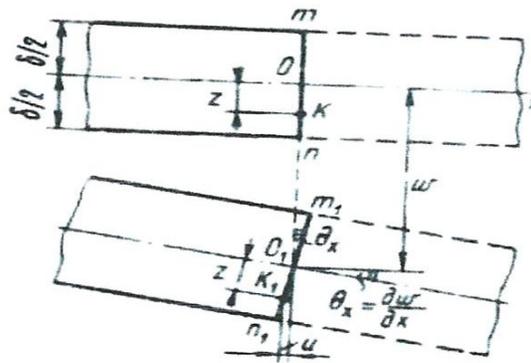


Fig. 1.4 : Les angles de rotation du plan moyen de la plaque

L'utilisation des équations de  $u$  et  $v$  (I.2), qui représentent les déplacements des point de la normale de coordonnées  $z$  permet de déterminer les déformations dans le plan moyen, soient :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (I.3)$$

La déformation de chaque plan horizontal de la plaque est une fonction linéaire par rapport à l'axe  $z$  et dépend de trois paramètres suivants :

$$\chi_x = \frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \chi_y = \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (I.4)$$

Pour les petites déformations,  $\chi_x$  et  $\chi_y$  représentent les courbes des éléments  $dx dy$  et  $\chi$  leur rotation.

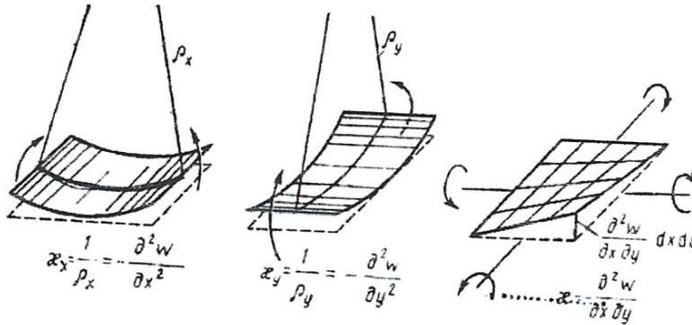


Fig. I.5 : Les paramètres de déformation du plan moyen

### III. Contraintes et efforts internes dans la plaque :

D'après l'hypothèse dans laquelle  $\sigma_z = 0$ , les contraintes  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau$  (fig. 1.6) se déterminent par l'application de la loi de Hooke:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_1(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = E_1(\chi_x + \mu\chi_y)z; \\ \sigma_y &= \bar{E}_1(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = \bar{E}_1(\chi_y + \mu\chi_x)z; \\ \tau &= G\gamma_{xy} = E_1(1-\mu)\chi z \end{aligned} \quad (I.5)$$

$$\text{Où : } E_1 = \frac{E}{(1-\mu^2)};$$

$\mu$  : Coefficient de poisson

$E$  : Module d'élasticité

$G$  : Module de cisaillement

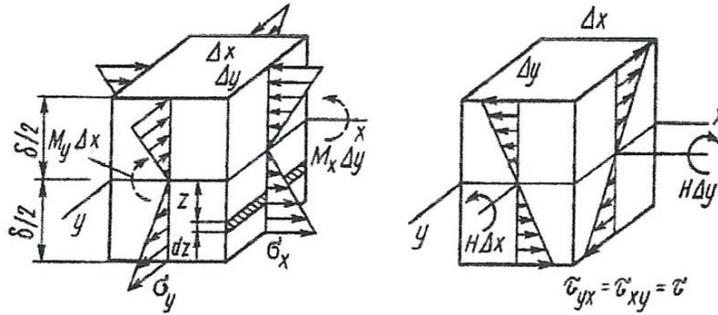


Fig. I.6: Représentation des contraintes dans des sections de la plaque

Les contraintes  $\sigma_x$  au bout de l'élément  $\delta \cdot \Delta y$  amènent au moment de flexion suivant :

$$\int_{-\delta/2}^{\delta/2} (\sigma_x dz \Delta y) = \Delta y E_1 (x_x + \mu x_y) \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 dz = M_x \Delta y \quad (I.6)$$

Où

$$M_x = \frac{E_1 \delta^3}{12} (x_x + \mu x_y)$$

Analogiquement, on détermine les expressions de  $M_y$  et du moment de rotation  $H$  :

$$\begin{aligned} M_x &= D(x_x - \mu x_y) = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ M_y &= D(x_y - \mu x_x) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ M_{xy} &= D(1 - \mu) \chi = D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (I.7)$$

Où :  $D = \frac{E_1 \delta^3}{12} = \frac{E \delta^3}{12(1 - \mu^2)}$  s'appelle rigidité cylindrique de la plaque.

Pour une plaque de section rectangulaire  $\Delta x \Delta y$  et d'épaisseur  $\delta$ , tel que :  $\Delta x = \Delta y = 1$ , les expressions des contraintes peuvent prendre la forme suivante :

$$\delta_x = \frac{12 M_x}{\delta^3} z; \delta_y = \frac{12 M_y}{\delta^3} z; \tau = \frac{12 H}{\delta^3} z. \quad (I.8)$$

#### IV. Equation différentielle des déformées de la plaque :

Comme nous avons indiqué précédemment qu'il y a une seule fonction inconnue  $w$ , donc l'équation différentielle des déformées de la plaque ne fait intervenir qu'une seule variable  $w$ . D'après les lois fondamentales des résistances des matériaux, les équations d'équilibre d'un élément de la plaque sont données par :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = Q_x; \quad (I.9)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H_x}{\partial x} = Q_y;$$

Où  $Q$  : l'effort tranchant dans la section de la plaque.

Du système (I.9), on considère la première équation :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q; \quad (I.10)$$

Qui doit contenir uniquement les inconnues  $w$ . Pour déterminer  $Q_x$  nous devons utiliser la deuxième et la troisième équation du système (I.9)

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = -D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\}; \quad (I.11)$$

Après simplification, les expressions de  $Q_x$  prennent la forme suivante :

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w); \quad (I.12.a)$$

Analogiquement, pour  $Q_y$  on trouve :

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad (I.12.b)$$

Où

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Reportons l'équation (I.12.a) et (I.12.b) dans l'équation (I.10) on obtient l'équation (I.13)

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}, \quad (I.13)$$

Ou

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (I.14)$$

Cette équation à été obtenue par le savant Français : Sophie Germain en 1811.

L'équation différentielle des déformées des plaques en coordonnée polaires est donnée par l'expression suivante :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (I.15)$$

### V. Introduction des conditions aux limites

L'introduction des conditions aux limites intervient dans la fonction  $w$  pour les différents types d'appuis sur lesquels la plaque repose. L'expression de l'introduction des conditions aux limites nécessite un exemple d'application (fig.1.7).

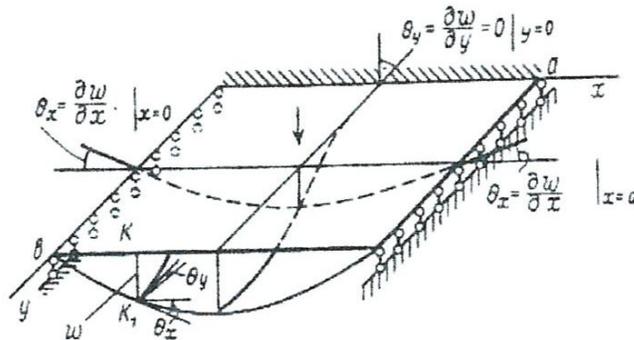


Fig. I.7 : Introduction des conditions aux limites

Sur la fig.I.7, la plaque est illustrée avec les données suivantes :

$y = 0 \rightarrow$  La plaque est encadrée ;

Les cotés ( $x=0$  et  $X=a$ ) → la plaque repose sur un appui simple ;

Le coté ( $y=b$ ) → la plaque est libre.

Dans ce cas tous les points de la plaque en contact avec les appuis leurs déplacements sont nuls.

La condition de non rotation des points ( $y=0$ ) s'ajoute à ce type de plaque, ce qui conduit à écrire :

$$w = 0 \Big|_{y=0}; \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Big|_{y=0} \quad (I.16)$$

Pour les appuis simples, comme dans le cas d'une poutre, deux conditions s'imposent

$$w = 0 \Big|_{x=0, x=a}; M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \Big|_{x=0, x=a}, \quad (I.17)$$

Dans ce cas les appuis simples se considèrent rigides où  $w=0$ , la ligne  $x=a$  et  $x=0$  ne se déforme pas, c'est pourquoi  $\frac{\partial w}{\partial y}$  et  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  sont nuls, ce qui nous permet d'écrire:

$$w = 0 \Big|_{x=a}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \Big|_{x=a}. \quad (I.18)$$

S'agissant du coté libre ( $y=b$ ), une autre condition s'impose c'est que les contraintes dans cette section sont nulles et par conséquent les efforts internes sont aussi nuls :

$$M_y = 0 \Big|_{y=0}; Q_y = 0 \Big|_{y=b}; H = 0 \Big|_{y=b}. \quad (I.19)$$

Cette dernière condition permet de préciser les expressions des efforts tranchants :

$$v_y = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}; v_x = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (I.20)$$

En rapportant l'équation (I.20) dans l'équation (I.19), on obtient :

$$M_y = 0 \Big|_{y=b}; V_y = 0 \Big|_{y=b} \quad (I.21)$$

Exprimons l'équation (I.21) en fonction de  $w$ , on obtient :

$$\begin{cases} V_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]; \\ V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]; \end{cases} \quad (I.22)$$

Enfin, l'équation (I.21) pourra être exprimée en fonction de  $w$  par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 0 \Big|_{y=b}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \Big|_{y=h} \end{cases} \quad (I.23)$$

## VI Solution de l'équation différentielle des déformées de la plaque :

Examinons trois cas :

### VI.1. Plaque soumise à une flexion appliquée à son contour :

Examinons une plaque rectangulaire libre de tous types d'appuis et soumise à son contour aux moments fléchissant  $M_x$  et  $M_y$  tels que :

$$M_x = m_1 = cst \text{ et } M_y = m_2 = cst$$

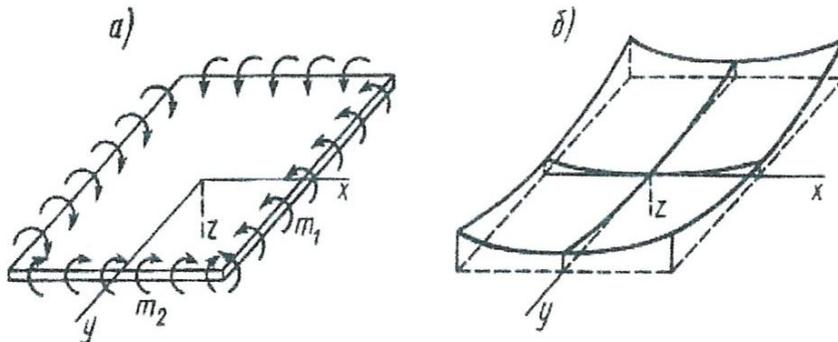


Fig. I.8 : Plaque soumise a des moments de flexion au niveau de son contour

Pour la détermination des déformées de la plaque  $w$  on résout l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (I.24)$$

Cette équation est satisfaite si on adopte la solution suivante :

$$w = 0.5C_1 x^2 + 0.5C_2 y^2. \quad (I.25)$$

Les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  se déterminent de la condition  $M_x = m_1$  et  $M_y = m_2$ .

De l'équation (I.7) on a

$$M_x = -D(C_1 + \mu C_2) = m_1; M_y = -D(C_2 + \mu C_1) = m_2; H = 0, \quad (I.26)$$

$$D'où : C_1 = \frac{\mu m_2 - m_1}{D(1 - \mu^2)}, C_2 = \frac{\mu m_1 - m_2}{D(1 - \mu^2)};$$

Finalement, on obtient :

$$w = \frac{1}{2D(1 - \mu^2)} \left[ (\mu m_2 - m_1)x^2 + (\mu m_1 - m_2)y^2 \right] \quad (I.27)$$

## VI.2. Solution sous forme d'une série bi trigonométrique

### VI.2.a. Chargement particulier :

Si la plaque repose sur des appuis simples le long de tout son contour et chargée verticalement par une charge du type fig. 1.9.

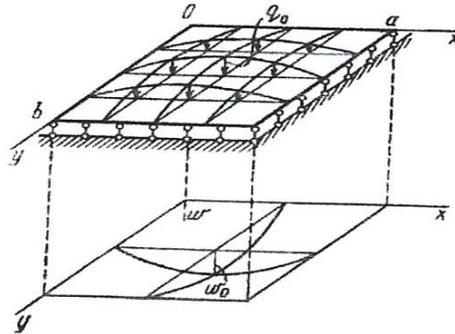


Fig. 1.9. Plaque sollicitée par une charge particulière

Dans ce cas  $q(x, y)$  ayant la forme suivante :

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (I.28)$$

La solution de l'équation différentielle, pour ce cas de chargement, est donnée sous forme suivante :

$$w(x, y) = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (I.29)$$

Où  $w_0$  paramètre à déterminer.

Reportons l'équation (I.29) dans l'équation (I.7), on obtient :

$$M_x = w_0 \pi^2 D \left( \frac{1}{a^2} + \mu \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (I.30)$$

$$M_y = w_0 \pi^2 D \left( \frac{1}{b^2} + \mu \frac{1}{a^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (I.31)$$

Pour déterminer  $w_0$  reportons (I.28) et (I.29) dans l'équation différentielle (I.14) ce qui nous permet, après simplification, d'avoir

$$w_0 \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{q_0}{D} \quad (I.32)$$

Ce qui aboutit au calcul de  $w_0$  :

$$w_0 = \frac{q_0}{\pi^4 D \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right]^2} \quad (I.33)$$

D'après (I.7) et (I.12) on aura les expressions des restes des efforts internes :

$$\begin{cases} H = -w_0 (1 - \mu) \pi^2 D \frac{1}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \\ Q_x = w_0 \pi^3 D \frac{1}{a} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ Q_y = w_0 \pi^3 D \frac{1}{b} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \end{cases} \quad (I.34)$$

Les efforts tranchants au niveau des appuis s'expriment par :

$$\begin{cases} V_x = \left( Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = w_0 \pi^3 D \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{(2-\mu)}{b^2} \right] \sin \frac{\pi y}{b}; \\ V_y = \left( Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = w_0 \pi^3 D \frac{1}{b} \left[ \frac{1}{b^2} + \frac{(2-\mu)}{a^2} \right] \sin \frac{\pi x}{a}. \end{cases} \quad (I.35)$$

### **VI.2.b. Chargement général:**

Dans ce cas la charge extérieure  $q = q(x, y)$  est donnée sous forme d'une série bi trigonométrique, (fig. I.10), suivante :

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (I.36)$$

Où :  $q_{nm}$  coefficient de la charge à déterminer.

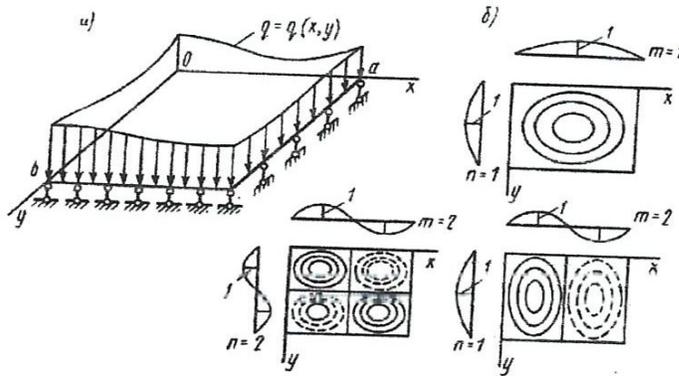


Fig. I.10 : plaque sollicitée par une charge générale

Pour déterminer  $q_{nm}$  effectuons le processus suivant :

L'intégrale sur la surface de la plaque associée à deux termes  $m, n$  et  $m_1, n_1$  est :

$$\text{int} = \int_0^b \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m_1\pi x}{a} \sin \frac{n_1\pi y}{b} dx dy \quad (I.37)$$

Prend uniquement deux valeurs :

$$\begin{cases} \text{int} = 0, & \text{si } m_1 \neq m \text{ et } n_1 \neq n, \\ \text{int} = \frac{ab}{4}, & \text{si } m_1 = m \text{ et } n_1 = n. \end{cases}$$

Cette propriété d'orthogonalité permet d'écrire la formule de  $q_{nm}$  de n'importe quelles charges extérieures  $q(x, y)$ . Multiplions l'expression (I.36) par  $\sin \frac{m_1\pi x}{a} \sin \frac{n_1\pi y}{b}$  et intégrons sur la surface de la plaque on obtient :

$$q_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (I.38)$$

Après avoir déterminé  $q_{nm}$  la solution de l'équation différentielle est donnée par :

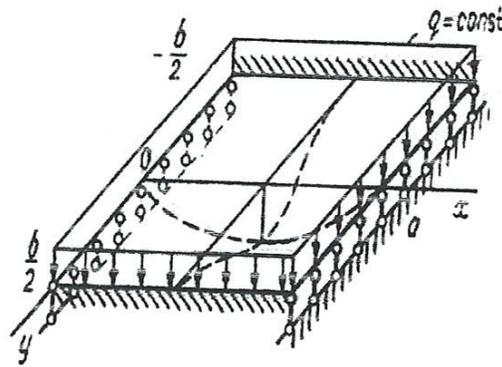


Fig. I.12 : Plaque rectangulaire encastrée sur deux cotés et simplement appuyée sur les deux autres chargée uniformément

### **VII. Conclusion**

Les problèmes rencontrés dans l'étude des structures élastiques continues sont des problèmes d'analyse mathématique difficile dont la solution formelle ne peut être donnée que dans des cas particuliers. Aujourd'hui, ces problèmes peuvent être résolus numériquement grâce à la prodigieuse vitesse de calcul des ordinateurs. Il est nécessaire, pour calculer une structure continue, de la remplacer par une structure discrète de degré de liberté fini. Le calcul de la structure se réduit alors à des problèmes d'algèbre linéaire faisant intervenir un grand nombre de variables. L'usage du calcul matriciel allège et facilite grandement leur résolution.

**CHAPITRE : II**

***Exposé de la  
méthode des  
différences finies***

## I. Méthode des différences finies :

### 1.1. Définition :

Cette méthode de la résolution des équations différentielles des problèmes physiques avec l'introduction des conditions aux limites s'appelle aussi la méthode des filets.

### 1.2 Principe de la méthode :

Le principe de cette méthode est le suivant :

Tout le domaine étudié : axe d'une poutre, surface d'une plaque, superficialité d'une coque etc... se couvrent par un filet de lignes, dans lesquelles leurs intersections forment ce qu'on appelle nœuds. Pour cela, il faut construire des formules approchées, substituant les équations différentielles aux dérivées partielles. Ces formules approchées s'expriment par les coordonnées des nœuds, opérateurs de dérivées des différences finies, comme le montre la fig. 11.1

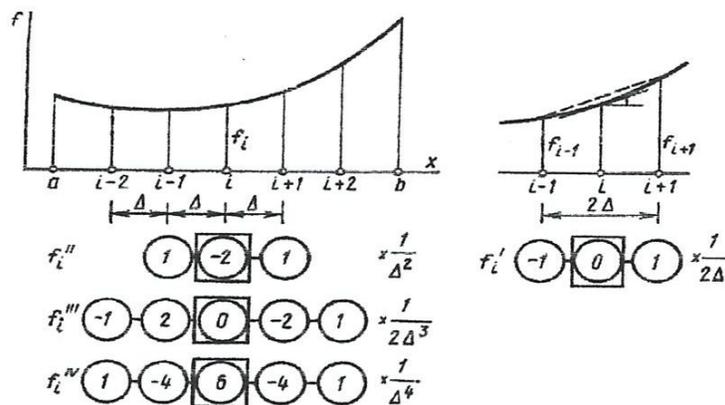


Fig. 11.1 : Discretisation de la fonction et des dérivées partielles par la méthode des différences finies.

Ces opérateurs se mettent dans l'équation différentielle où il faut l'accomplir dans chaque nœud. L'introduction des conditions aux limites se fait aussi par les opérateurs des différences finies. Cela conduit à un système algébrique d'équation dont le nombre d'équations égale celui des inconnues. Avec l'apparition des machines de calcul, la taille du système d'équations algébrique ne pose aucun problème, car ces dernières permettent de résoudre ce type de systèmes. La méthode des différences finies présente un moyen puissant qui sert à résoudre beaucoup de problèmes de la théorie d'élasticité, de la physique, de la science d'ingénieur etc....

Examinons la construction des opérateurs pour les dérivées de la fonction  $f = f(x)$ , (fig. 11.1). On divise la distance  $(ab)$  en un nombre d'intervalles égaux  $(\Delta)$  et on développe la fonction  $f = f(x)$  en série de Taylor. Si  $f$  est continue au voisinage de  $X_0$ , alors  $f$  peut s'écrire:

$$f(x_0 + \Delta) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta + \frac{1}{2}f''(x_0)\Delta^2 + \dots \quad (\text{II.1})$$

Posons  $X_0 = X_i$  et appliquons l'équation (II.1) pour les points  $i+1$  et  $i-1$ :

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + f'_i \Delta + \frac{1}{2!} f''_i \Delta^2 + \frac{1}{3!} f'''_i \Delta^3 + \dots \\ f_{i-1} &= f_i - f'_i \Delta + \frac{1}{2!} f''_i \Delta^2 - \frac{1}{3!} f'''_i \Delta^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Si on néglige les termes de (II.2) d'ordre supérieure à 3 et ensuite on fait la somme et la soustraction des deux équations de (II.2) on obtient la première et la deuxième dérivée aux point  $j$ :

$$f'_i = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2\Delta} = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{\Delta}, \quad (\text{II.3})$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta^2} \quad (\text{II.4})$$

Le calcul par les formules (II.3) et (II.4) est présenté schématiquement dans la fig. II.1. La dérivée troisième  $f'''_i$  se détermine par :

$$f'''_i = \frac{d}{dx}(f''_i) = \frac{-f''_{i-1} + f''_{i+1}}{2\Delta} = \frac{-(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) + (f_i - 2f_{i-1} + f_{i+2})}{2\Delta\Delta^2}$$

Soit :

$$f'''_i = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta^3} \quad (\text{II.5})$$

De manière analogue, on détermine la quatrième dérivée

$$f''''_i = \frac{f_{i-2} + 6f_i + f_{i+2}}{\Delta^4} \quad (\text{II.6})$$

Les opérateurs obtenus sont symétriques par rapport à leur centre c'est pourquoi ils s'appellent différences finies centralisées. On peut obtenir des opérateurs qui s'expriment seulement par les coordonnées gauches ou droites.

Par exemple :

$$f'_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta}$$

$$f''_i = \frac{2f_i + 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{\Delta^2} \quad (\text{II.7})$$

On essaie d'illustrer la méthode des différences finies en une simple application suivante. Soit une poutre reposant sur deux appuis et sollicitée par une charge uniformément répartie (fig.11.2).

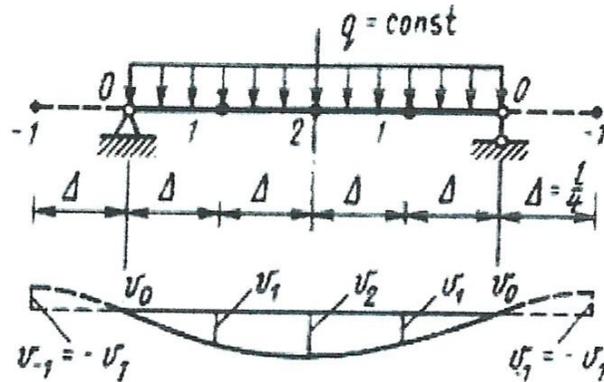


Fig. II.2 : Calcul d'une poutre par la méthode des différences finies

On applique la méthode des différences finies pour déterminer les déformées de la poutre aux niveaux des points 1 et 2 en résolvant l'équation différentielle suivante:

$$v^4 = \frac{q}{EJ} \quad (\text{a})$$

Puisque l'équation différentielle est d'ordre 4, alors c'est évident d'appliquer l'opération du quatrième ordre aux points 1 et 2 ce qui nous amène à :

$$\left. \begin{aligned} v_{-1} - 4v_0 + 6v_1 - 4v_2 + v_1 - \frac{q\Delta^4}{EJ} &= 0 \\ v_0 - 4v_1 + 6v_2 - 4v_1 + v_0 - \frac{q\Delta^4}{EJ} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

L'introduction des conditions aux limites nous aboutissent à :

$$\begin{cases} v_0 = 0; \\ M_0 = 0, \end{cases} \rightarrow v'' = 0 \rightarrow v''_0 = \frac{v_{-1} - 2v_0 + v_1}{\Delta^2} = 0.$$

Après simplification, on trouve :  $v_{-i} = -v_i$

On remplace  $v_0$  par 0 et  $v_{-1}$  par  $-v_1$  dans (b), on trouve :

$$\left. \begin{aligned} 6v_1 - 4v_2 &= \frac{q\Delta^4}{EJ}; \\ -8v_1 + 6v_2 &= \frac{q\Delta^4}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

La solution du système (c) donne :

$$\begin{aligned} v_1 &= 2,5 \frac{q\Delta^4}{EJ}; \\ v_2 &= 3,5 \frac{q\Delta^4}{EJ}. \end{aligned}$$

La comparaison de ces résultats avec la solution exacte montre que l'erreur de calcul est de 7%. Cette erreur pourra diminuer en diminuant le pas  $\Delta$ .

Examinons les opérateurs aux dérivées partielles correspondants aux fonctions à double variables :  $F = F(x, y)$  (fig.11.3).

L'expression  $F = F(x, y)$  peut se traiter comme une équation d'une superficialité d'un domaine

quelconque. Les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}, \dots$  peuvent être Déterminées par les

opérateurs des équations. (II.3), (II.4). Les opérateurs correspondants pour le point  $k$  sont :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_k &= \frac{f_a - 2f_k + f_c}{\Delta^2}, \\ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_k &= \frac{f_d - 2f_k + f_b}{\Delta^2}. \end{aligned} \quad (II.8)$$

Le schéma correspondant de ces opérateurs est montré dans fig. 11.3.

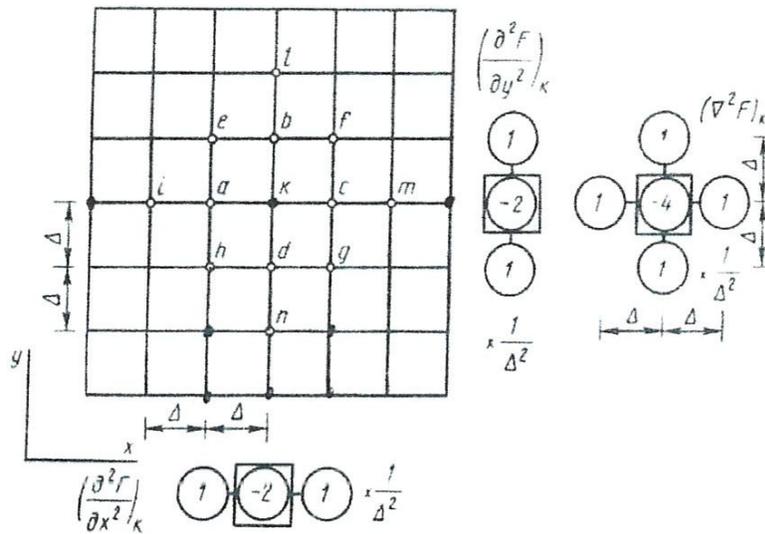


Fig. II.3 : Opérateurs de la méthode des différences finies en 2D

La somme des expressions de (II.8) donne l'expression canonique de l'opérateur de Laplace au point  $k$ .

$$(\nabla^2 f)_k = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_k = \frac{f_a + f_b + f_c + f_d - 4f_k}{\Delta^2}, \quad (\text{II.9})$$

Ce qui est schématisé dans la fig. 11.3

L'opérateur bi-harmonique résultant de la double dérivation de l'opérateur harmonique de Laplace (II.9) est :

$$(\nabla^2 \nabla^2 f)_k = \nabla^2 (Z)_k = \frac{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d - 4f_k}{\Delta^2}, \quad (\text{II.10})$$

Où:  $Z_j = (\nabla^2 f)_j, j = a, b, c, d, k$

Remplaçons les opérateurs harmoniques de ces points dans (II.10) on obtient l'expression de l'opérateur bi harmonique :

$$(\nabla^2 \nabla^2 F)_k = \frac{20F_k - 8(F_a + F_b + F_c + F_d) + 2(F_e + F_f + F_g + F_h) + (F_l + F_m + F_n + F_i)}{\Delta^4}. \quad (\text{II.11})$$

Le schéma de l'opérateur bi-harmonique est illustré dans la fig. 11.4 et le deuxième opérateur bi-harmonique mixte est donné par :

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_k = \frac{-(\partial F / \partial y)_a + (\partial F / \partial y)_c}{\Delta^2} = \frac{(F_h + F_e + F_f + F_g)}{4\Delta^2}, \quad (\text{II.12})$$

Son schéma est présenté dans la fig. II.5

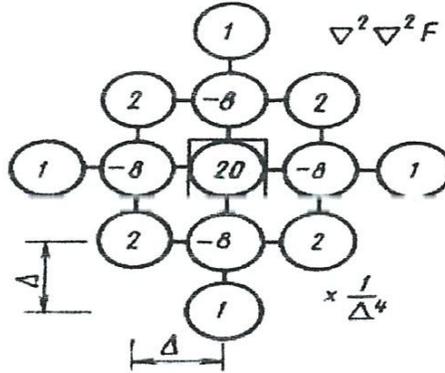


Fig. II.4 : Schéma de l'opérateur bi harmonique

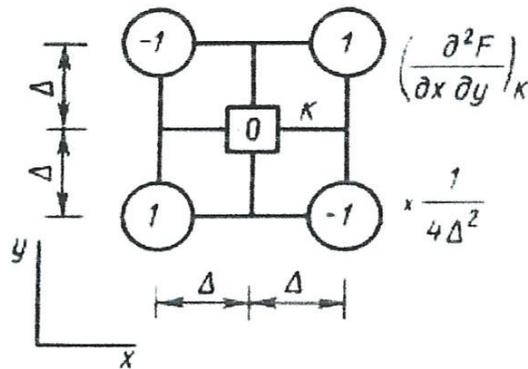


Fig. II.5 : Schéma de l'opérateur bi harmonique mixte

## II. Application de la méthode des différences finies dans la flexion des plaques :

Le calcul des plaques isotopes à la flexion conduit à résoudre l'équation différentielle des déformées qui est la fonction des flèches  $w(x, y)$  suivante :

$$\left(\nabla^2 \nabla^2 w\right)_k = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (\text{II.13})$$

Comme dans les problèmes bidimensionnels, la plaque s'est discrétisée en un filet de pas  $\Delta$  et pour chaque nœud  $k$  dans lequel  $w_k \neq 0$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ), Construisons son équation différentielle à base de la méthode des différences finies en utilisant l'opérateur bi-harmonique dans l'équation (II.11):

$$(\nabla^2 \nabla^2 w)_k = \frac{q_k}{D}, k = 1, 2, 3, \dots, n; \quad (II.14)$$

Où :  $q_k$  charge extérieure moyenne appliquée sur l'élément de dimensions  $\Delta x \Delta y$ , environnant le nœud  $k$ . Si au nœud  $k$  est appliquée une charge concentrée  $p_k$  alors  $q_k = \frac{p_k}{\Delta^2}$ . L'introduction des conditions aux limites dans l'équation (II.4) nécessite l'étude des deux cas d'appuis suivants .

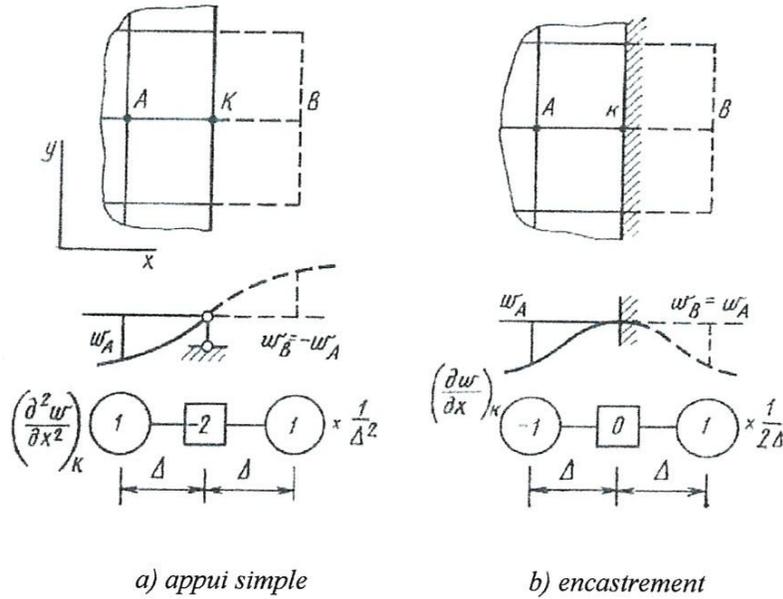


Fig. II.6 : Introduction des conditions aux limites

**II.1. Cas d'un appui simple (fig. II.6.a):**

Dans ce cas le déplacement du point  $k$ , ainsi que son moment sont nuls c'est à dire :

$$w_k = 0, \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_k = 0 \text{ ce qui donne, selon l'équation (II.4):}$$

$$\frac{w_a - 2w_k + w_b}{\Delta^2} = 0,$$

D'où :  $w_a = w_b$

**II.2. Cas d'un encastrement (fig. II.6.b) :**

D'une façon analogue on a:  $w_k = 0$ ,

Ainsi que la rotation est nulle  $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k = 0$  ce qui donne, selon l'équation (II.3):

$$\frac{w_b - w_a}{2\Delta} = 0 \rightarrow w_a = w_b.$$

**II.3. Cas d'un côté libre (fig. II.7):**

Dans ce cas deux conditions de force s'imposent  $M_x = 0$  et  $V_x = 0$ . C'est à dire le moment de flexion  $M_x$  et l'effort tranchant  $V_x$  au niveau du côté libre de la plaque sont nuls. Ces deux conditions peuvent être s'exprimées par :

$$2(1 + \mu)w_k - w_a - w_c - \mu(w_b + w_d) = 0;$$

$$2(3 + \mu)(w_c - w_a) + (2 - \mu)(w_e - w_h - w_f - w_g) + w_i - w_m = 0. \tag{II.15}$$

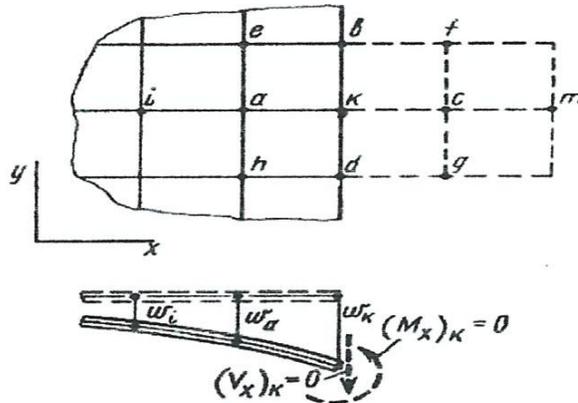


Fig. II.7 Introduction des conditions aux limites au côté libre

Dans ce cas, comme le montre la fig. II.7, on rajoute deux lignes de nœuds fictifs afin d'évaluer les déplacements au niveau des nœuds du contour libre. L'introduction des équations (II.5) dans le système (II.14) comme équations complémentaires aboutit à un système algébrique d'équations dont le nombre d'équations égale au nombre d'inconnues. La solution du système algébrique donne toutes les déformées de la plaque  $w_k (k = 1, 2, \dots, n)$ .

Dans la fig. II.8 sont présentés les opérateurs des moments de flexions  $M_x$  et  $M_y$ . Les opérateurs du moment de rotation  $H$ , ainsi que ceux des efforts tranchants  $V_x$  sont illustrés dans fig. II.9 et fig. II.10.

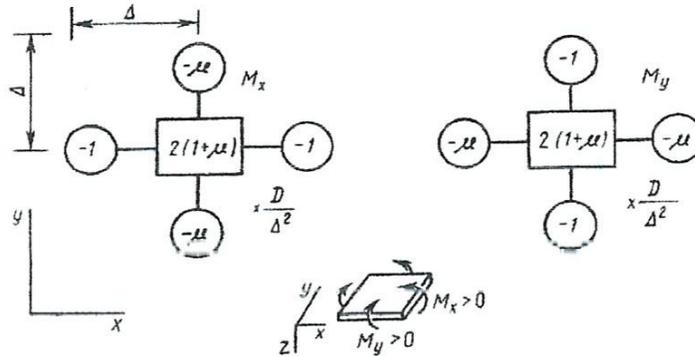


Fig. II.8: Schémas des moments de flexion

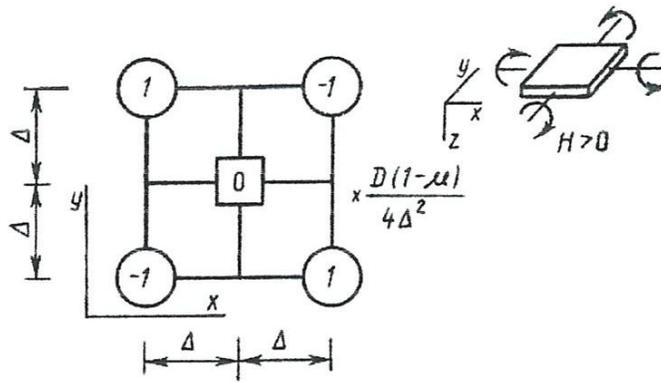


Fig. II.9: Schéma du moment de torsion

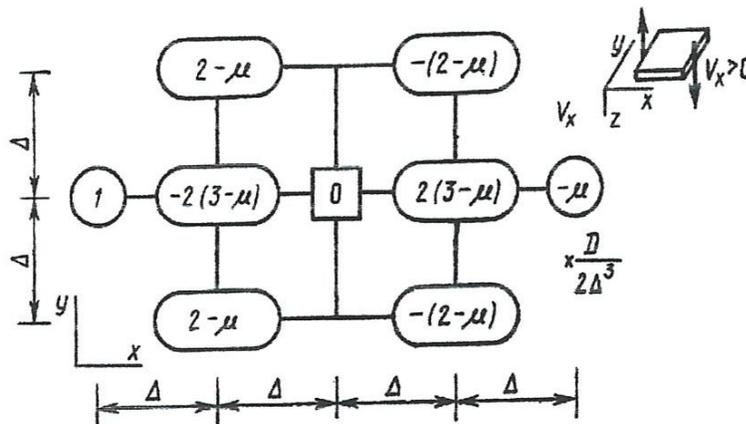


Fig. II.10: Schéma des efforts tranchants

**III. Application de la méthode des différences finies dans la flexion des plaques en coordonnées polaires :**

Soit une plaque circulaire discrétisée en coordonnées polaires sous forme d'un filet de nœuds présenté dans la figure II.11.

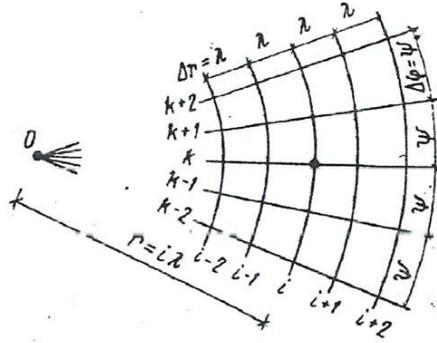


Fig. II.11: Discrétisation 2D en coordonnées polaires

Les algorithmes de la méthode des différences finies en coordonnées polaires appropriés aux différents opérateurs sont présentés dans les figures suivantes, [7] :

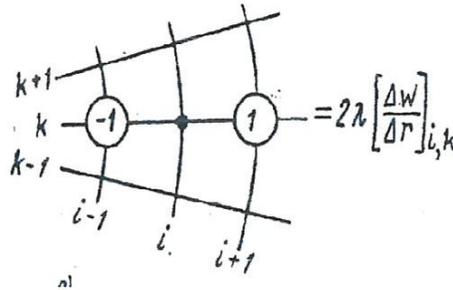


Fig. II.12: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur  $\frac{\Delta w}{\Delta r}$

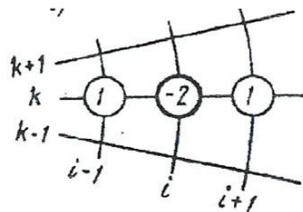


Fig. II.13: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur  $\frac{\Delta^2 w}{\Delta r^2}$

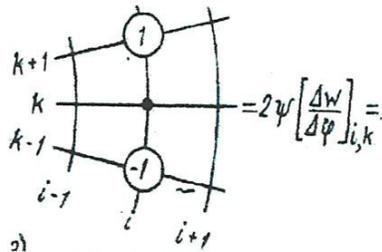


Fig. II.14: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur  $\frac{\Delta w}{\Delta \phi}$

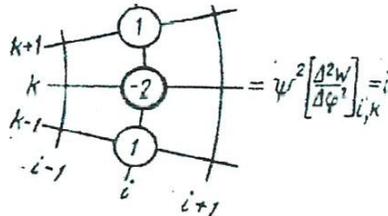


Fig. II.15: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur  $\frac{\Delta^2 w}{\Delta \phi^2}$

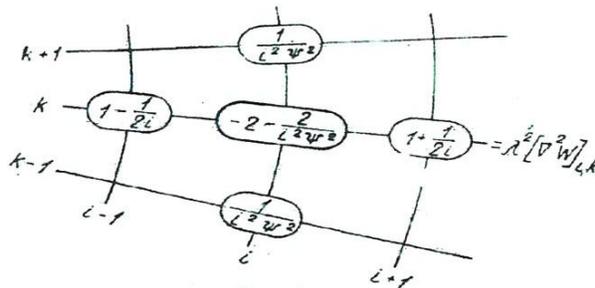


Fig. II.16: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur  $\nabla^2 w$

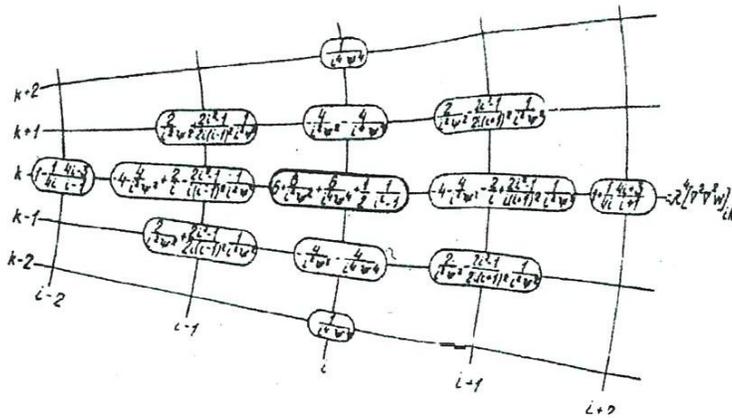


Fig. II.17: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur  $\nabla^2 \nabla^2 w$

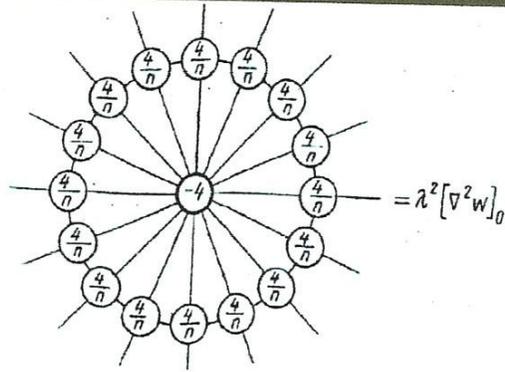


Fig. II.18: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires du nœud central approprié à l'opérateur  $\nabla^2 w$

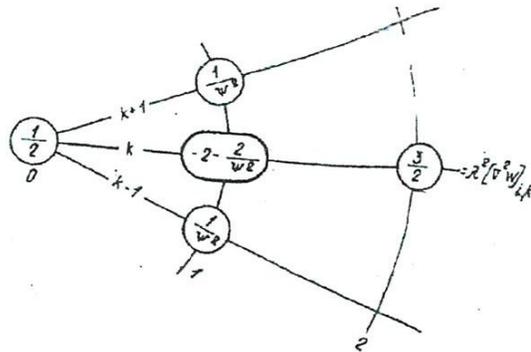


Fig. II.19: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires des nœuds adjacents au nœud central approprié à l'opérateur  $\nabla^2 w$

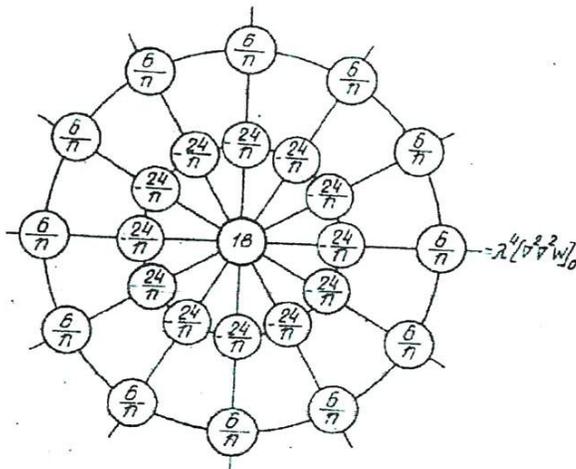


Fig. II.20: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires du nœud central approprié à l'opérateur  $\nabla^2 \nabla^2 w$

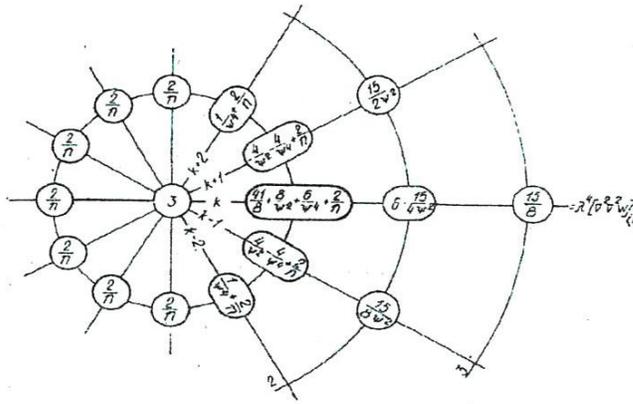


Fig. II.21: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires des nœuds adjacents au nœud central approprié à l'opérateur  $\nabla^2 \nabla^2 w$

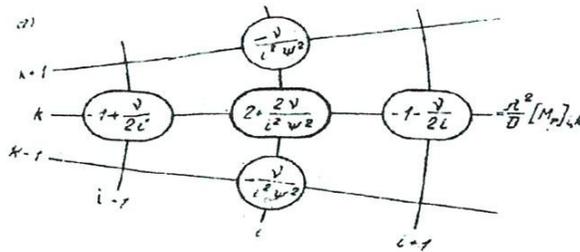


Fig. II.22: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur du moment radial  $M_r$

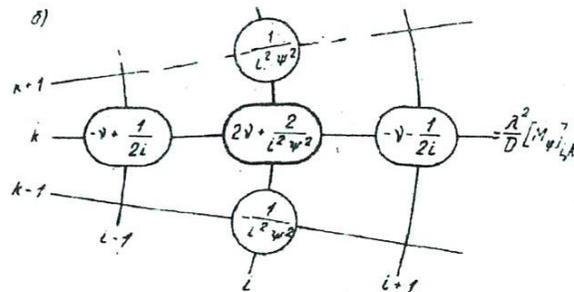


Fig. II.23: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur du moment angulaire  $M_\phi$

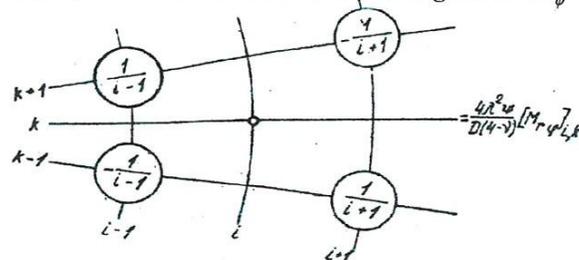


Fig. II.24: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur du moment  $M_{r\phi}$

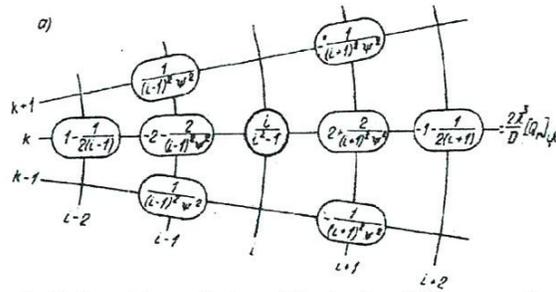


Fig. II.25: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur de l'effort tranchant radial  $Q_r$

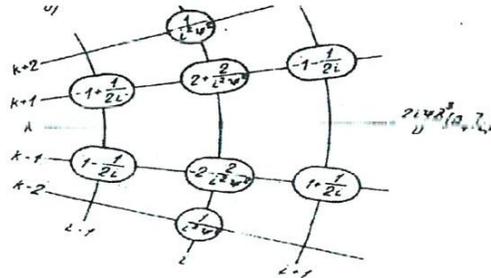


Fig. II.26: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires approprié à l'opérateur de l'effort tranchant angulaire  $Q_\phi$

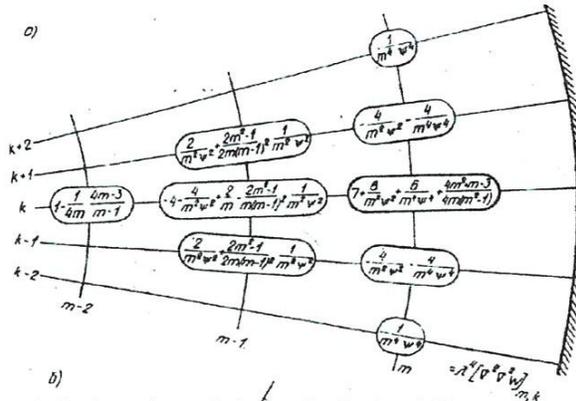


Fig. II.27: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires des nœuds adjacent aux nœuds du contour encasté approprié à l'opérateur  $\nabla^2 \nabla^2 w$

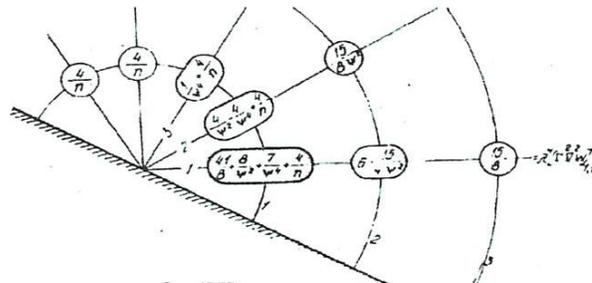


Fig. II.28: Schéma de l'algorithme de la méthode des différences finies en coordonnées polaires des nœuds adjacent aux nœuds du contour linéaire encasté approprié à l'opérateur  $\nabla^2 \nabla^2 w$

**11.4. Conclusion:**

Le principe de la méthode des différences finies exposé dans ce chapitre est exprimé par de différents opérateurs et formules, ainsi que leur schéma explicatif. Cela permet la bonne mise en application de cette méthode pour le calcul des différentes structures. L'utilisation de ces formules permet le calcul des plaques à définir dans les chapitres suivants.

CHAPITRE : III

*Calcul d'une  
plaques circulaire  
encasté sur tout  
son contour*

**I. Introduction:**

Le calcul des plaques circulaires avec des conditions aux limites bien déterminées et soumises à n'importe quel type de charges extérieures nécessite des méthodes de calcul spécifiques, généralement, des méthodes numériques. La méthode des différences finies permet le calcul de ce type de plaques du fait qu'elle peut considérer les différents cas de conditions aux limites, ainsi que les différents types de charges extérieures. Examinons dans ce chapitre un cas de plaques circulaires de conditions aux limites très utilisées dans la pratique qui est le cas de la plaque encastrée sur tout son contour (fig.III.1).

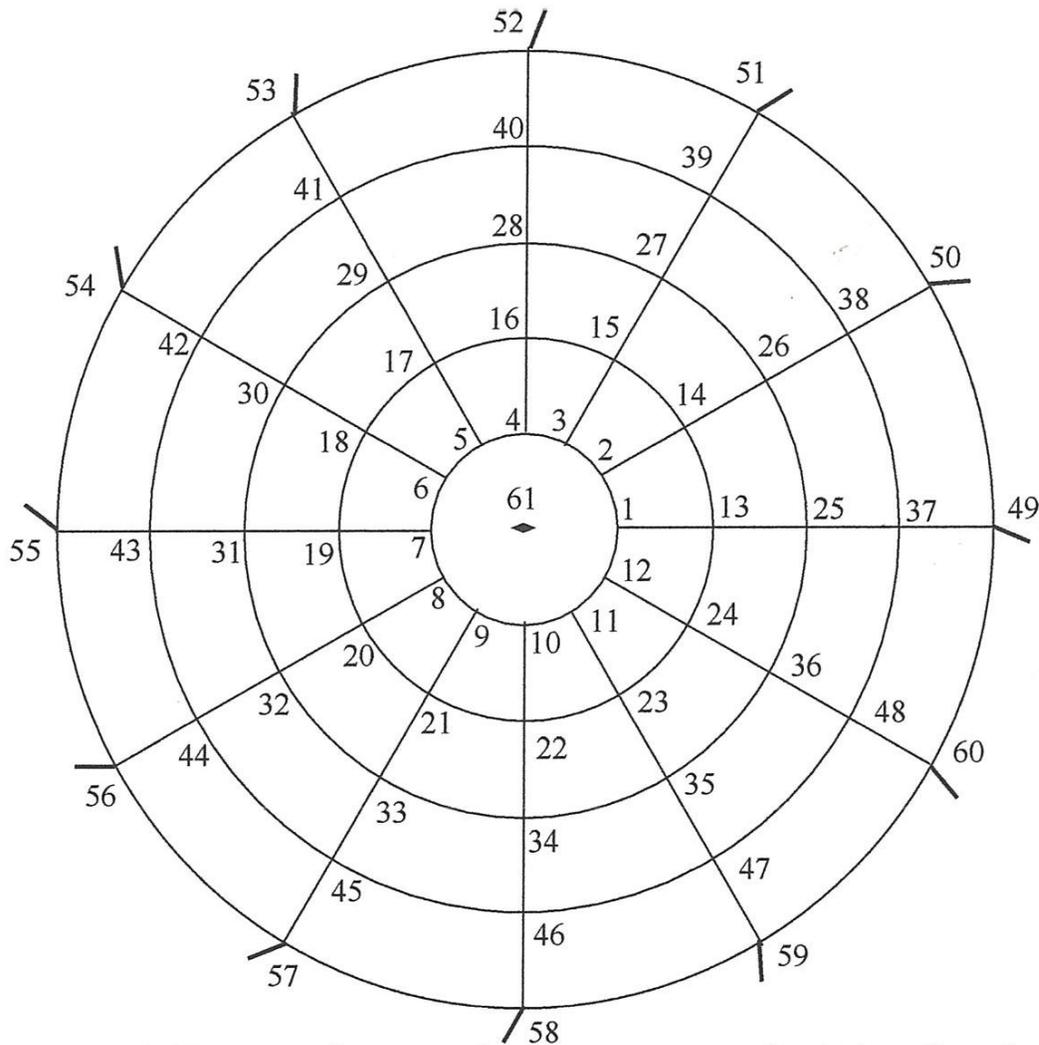


Fig. III.1: Plaque circulaire encastrée sur tout son contour et discrétisée en 61 nœuds

**II. problème posé:**

Le problème posé et à traiter dans ce chapitre est de déterminer les flèches (déflexions) de la plaque circulaire encastrée sur tout son contour causées par une charge uniformément répartie

sur toute la plaque, ainsi que les efforts internes dans ses sections. La méthode de calcul utilisée est celle des différences finies basée sur le principe de la discrétisation de la plaque (fig.1).

### **III. Méthode de calcul:**

Afin de procéder au calcul de la plaque, appliquons la méthode des différences finies exposée dans le chapitre précédent, dans laquelle le problème se traite par la discrétisation de la plaque. A cet égard, la plaque se divise en un nombre fini d'éléments ayant la forme d'un secteur d'anneau (fig. III.1). Les points d'intersection des lignes radiales et des lignes circonférentielles forment ce qu'on appelle nœuds. Cette méthode permet de déterminer la fonction inconnue  $w(x, y)$  représentant les déflexions de la plaque uniquement au niveau des nœuds. Selon le principe de toutes les méthodes numériques, plus le nombre de nœuds augment plus l'erreur du calcul diminue, c'est-à-dire on se rapproche de la précision et inversement, donc la précision peut être obtenue au prix d'un effort de calcul important.

### **IV. Détermination des déflexions de la plaque dues à une charge uniformément répartie sur toute la surface de la plaque :**

Supposons que la plaque circulaire encastée sur tout son contour est soumise à une charge extérieure verticale  $q$  uniformément répartie sur toute sa surface  $xy$ . Par principe de la méthode des différences finies, la charge extérieure  $q$  est considérée comme étant une charge concentrée appliquée en chaque nœud. Le maillage de la plaque a été fait de façon que le nombre de nœuds sur chaque ligne circonférentielle est pris égale 12 ce qui rend le nombre total des nœuds sur toute plaque à 61 (fig. III.1). A noter que la numérotation des nœuds est choisie de façon à faciliter le programme de calcul. Pour déterminer les déflexions de la plaque, autrement dit les déplacements verticaux des nœuds il faut résoudre l'équation différentielle des déflexions de la plaque suivant:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (\text{III.1})$$

La résolution de cette équation différentielle de quatrième degré par la méthode des différences finies se fait par l'algorithme illustré dans la figure III.2. C'est-à-dire pour chaque nœud de la plaque on détermine la flèche  $w(i, k)$  en appliquant le schéma de la figure III.2, [7].

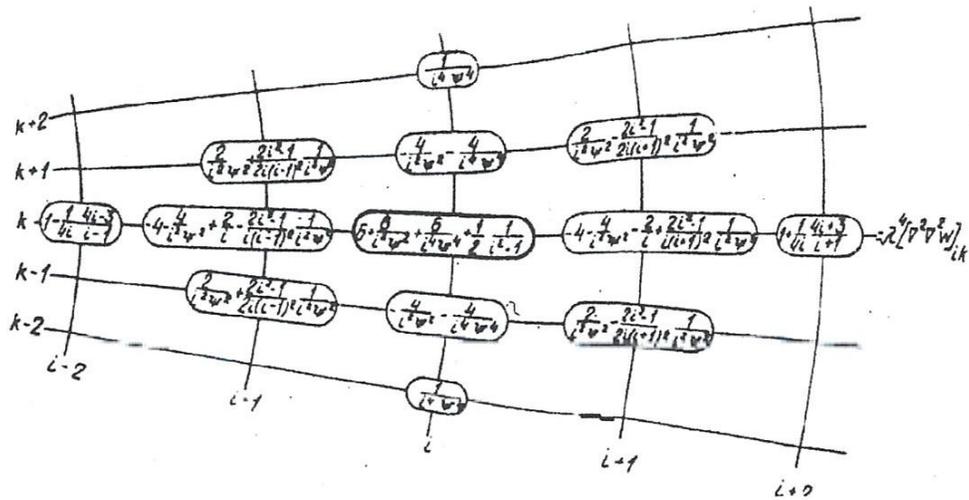


Fig. III.2: Algorithme de résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque circulaire par la méthode des différences finies

L'introduction des conditions aux limites permet encore de diminuer le nombre d'inconnues du problème du fait que la valeur de la flèche au niveau des nœuds du contour de la plaque est préalablement connue et elle est égale à zéro. Puisque le type de condition aux limites considéré est l'encastrement, alors l'algorithme de résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque des nœuds adjacents aux nœuds du contour est illustré dans la figure III.3, [7].

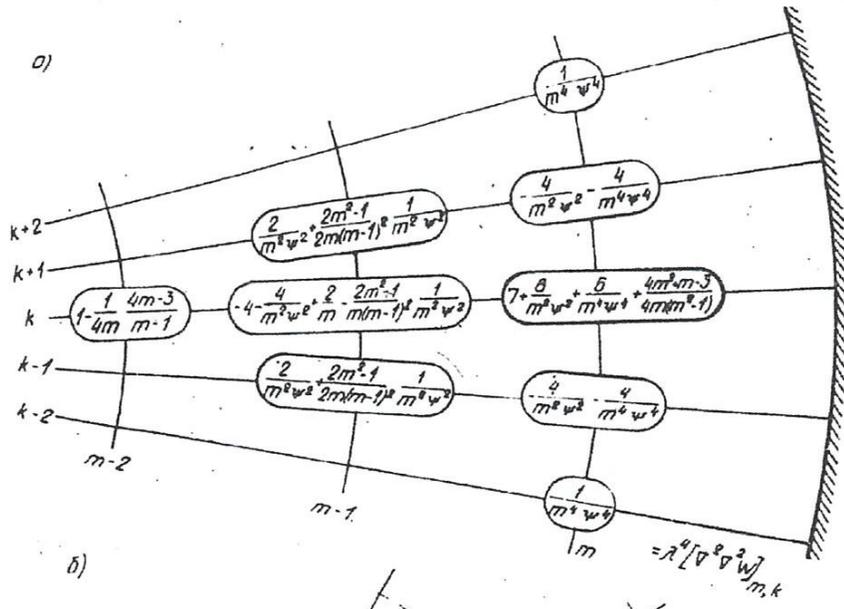


Fig. III.3: Algorithme de résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque circulaire des nœuds adjacents aux nœuds du contour encastré par la méthode des différences finies



$$\vec{R}w = \vec{R}_q \quad (\text{III.2})$$

Avec:

$\vec{R}$ : Matrice de taille (61×61) issue de l'application des différents algorithmes de résolution des figures III.3, III.4 et III.5

$$w = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{61} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{R}_q = \frac{q\lambda^4}{D} \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$q$ : Charge extérieure;

$\lambda$ : Le pas du maillage suivant le rayon de la plaque circulaire;

$D$ : Rigidité cylindrique du matériau de la plaque, donnée par:  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ;

$E$ : Module d'élasticité du matériau de la plaque;

$\nu$ : Coefficient de Poisson du matériau de la plaque;

$h$ : Epaisseur de la plaque.

Le calcul numérique par le biais d'un programme en Mathematica et par Fortran a permis de formuler les éléments de la matrice  $\vec{R}$  et les valeurs des éléments de cette matrice issus du calcul sont :







Les valeurs des éléments du vecteur  $\vec{R}_q$  issus du calcul sont :

$$\vec{R}_q = \frac{q\lambda^4}{D} (1,1,1,\dots,1,1)^T$$

La résolution du système (III.2) donnant les valeurs des déflexions de la plaque en chaque nœud en fonction des paramètres géométriques et mécaniques de la plaque sont :

-	0.536126
-	0.538074
-	0.540889
-	0.543952
-	0.54416
-	0.543243
-	0.541839
-	0.539774
-	0.536652
-	0.532164
-	0.527543
-	0.527664
-	0.239441
-	0.259748
-	0.267398
-	0.273207
-	0.283944
-	0.288436
-	0.288451
-	0.286458
-	0.283592
-	0.280234
-	0.274885
-	0.261571
-	0.0191385
-	0.0663644
-	0.069841
-	0.0744695
-	0.0931265
-	0.0987164
-	0.0989341
-	0.0976134
-	0.0957942
-	0.093551
-	0.0885655
-	0.0697731
-	0.0502891
-	0.0524621
-	0.0525519
-	0.0526976
-	0.0535118
-	0.0537363
-	0.0537386
-	0.0536912
-	0.0536327
-	0.0535666
-	0.0533981
-	0.0526013
-	1.08599

Les résultats graphiques concernant les déflexions de la plaque encastrée sur tout son contour et dues à une charge extérieure uniformément répartie sur toute la plaque sont:

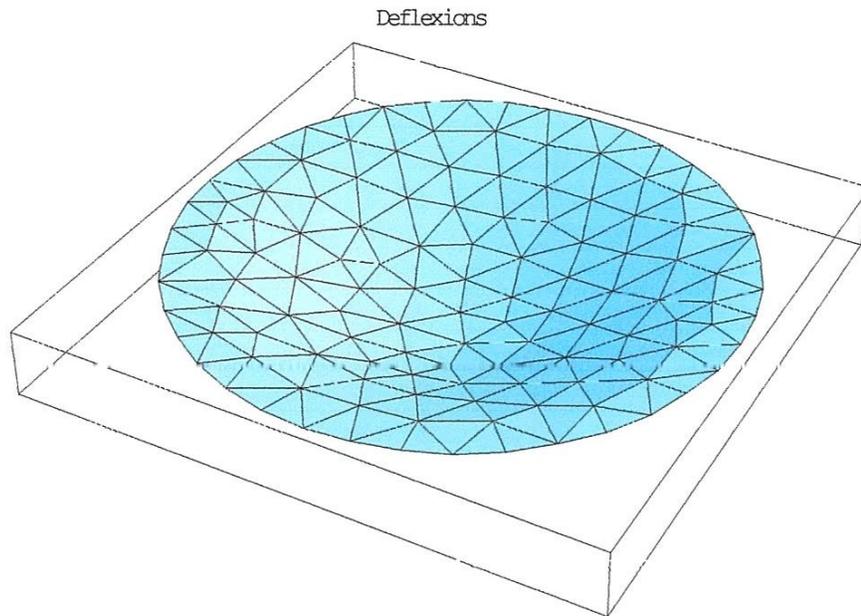


Fig. III.3: Vue de dessus de toutes les déflexions de la plaque encastrée sur son contour, en 3D, issues du programme de calcul

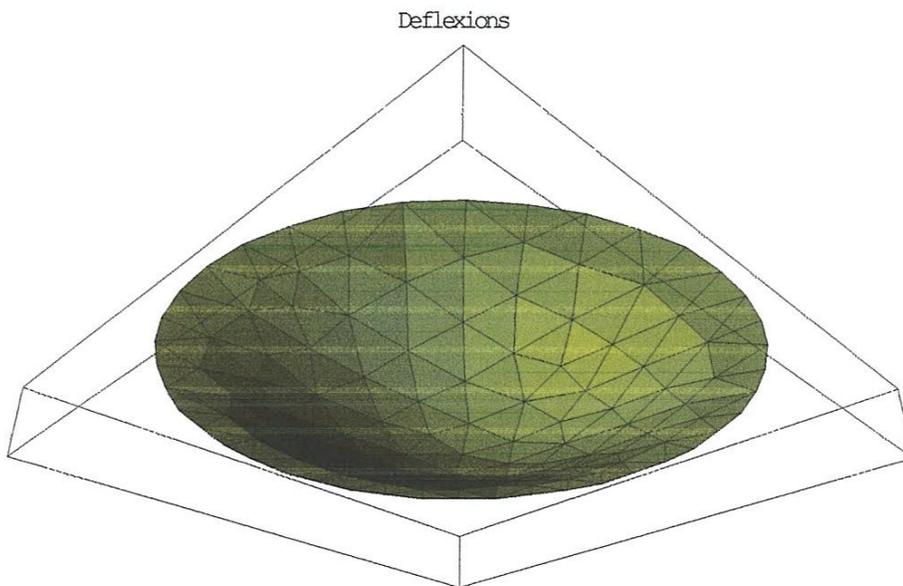


Fig. III.4: Vue de dessous de toutes les déflexions de la plaque encastrée sur son contour, en 3D, issues du programme de calcul

**V. Détermination des efforts internes dans les sections de la plaque:**

Les efforts internes de la plaque circulaire considérés sont les moments fléchissants  $M_{xx}$  dans les sections de la plaque correspondant à la ligne de coupe 11 et  $M_{yy}$  dans les sections de la plaque correspondant à la ligne de coupe 22, fig. III.5.

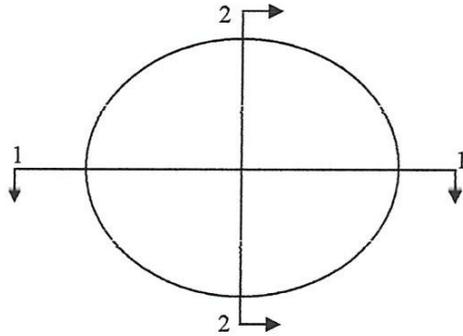


Fig. III.5: Sections de la plaque où les efforts internes sont déterminés

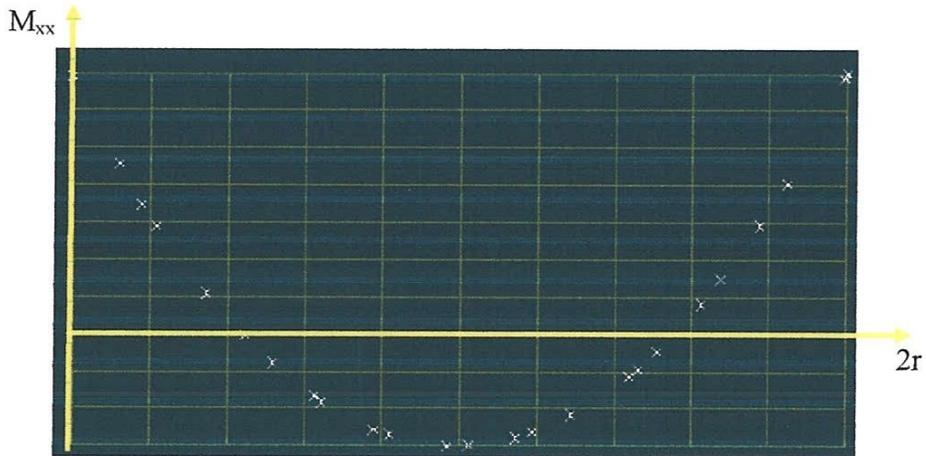


Fig. III.6: Diagramme du moment fléchissant  $M_{xx}$  dans les sections de la plaque correspondant à la ligne de coupe 11

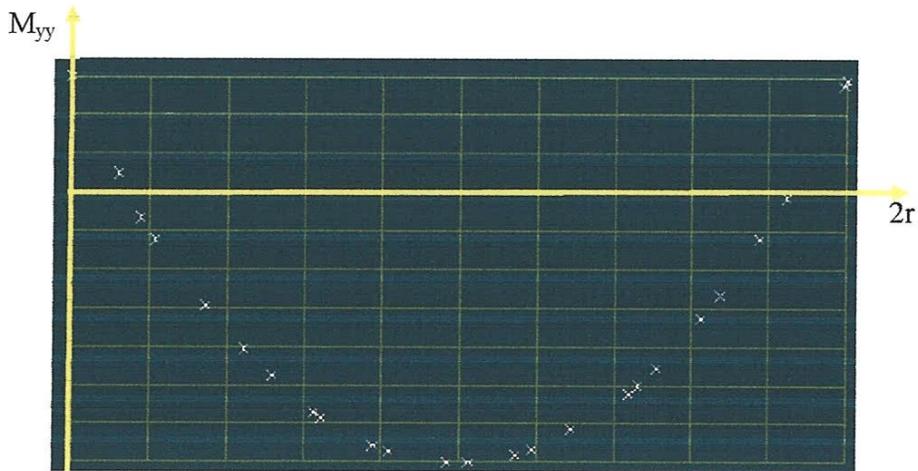


Fig. III.7: Diagramme du moment fléchissant  $M_{yy}$  dans les sections de la plaque correspondant à la ligne de coupe 22

**VI. Détermination des déflexions de la plaque dues à une charge concentrée appliquée au centre de la plaque :**

Considérons la même plaque de mêmes conditions aux limites, de mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques et gardons la même discrétisation, sauf que la plaque est sollicitée par une charge concentrée appliquée à son centre. On suit la même procédure de calcul et les résultats graphiques des déflexions de la plaque encastrée sur tout son contour surgis par ce type de chargement sont donnés dans les figures suivantes :

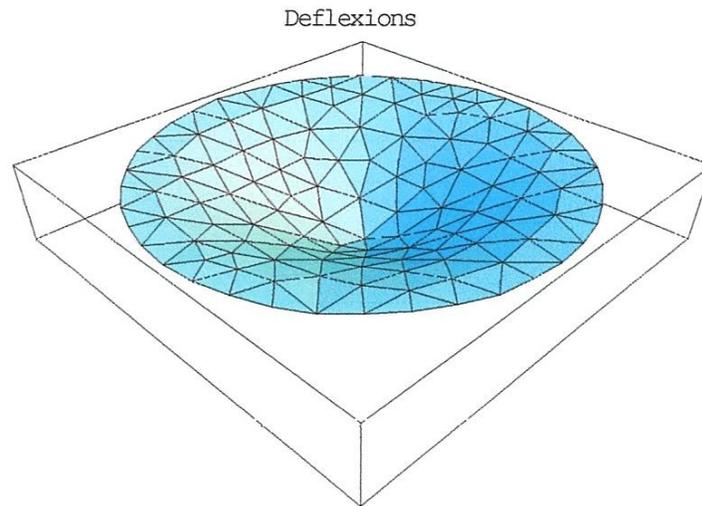
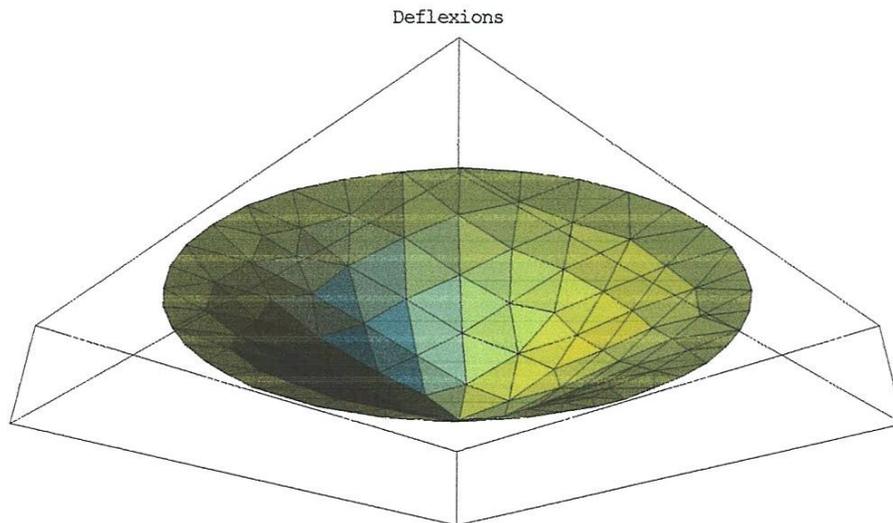


Fig. III.8: Vue de dessus de toutes les déflexions de la plaque encastrée sur son contour, en 3D, issues du programme de calcul



## VII. Comparaison des résultats de calcul:

Pour savoir la fiabilité de la méthode de calcul utilisée et la certitude des résultats obtenus, on procède à la comparaison suivante:

Pour ce type de plaque de telles conditions aux limites (encastrement sur tout son contour) et de tel type de charge extérieure (charge uniformément répartie sur toute la surface de la plaque), la solution analytique est connue [2] et donnée par l'expression suivante:

$$w = \frac{qR^4}{64D} \left[ 1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right]$$

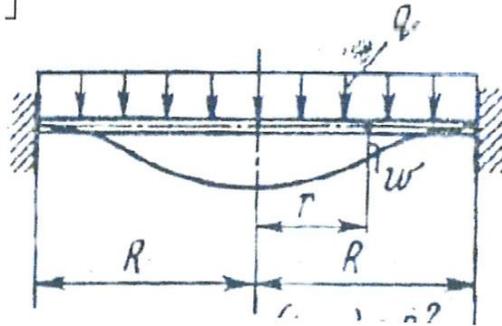


Fig. III.10: Plaque circulaire encastrée sur tout son contour et soumise à une charge uniformément répartie sur toute sa surface

Avec

$w$  : Déplacement vertical du point de la plaque de coordonnées  $(r, \theta)$  ;

$R$  : Rayon de la plaque, pour notre cas  $R = 1$ .

$q$  et  $D$  sont définis dans la page 36.

La comparaison des résultats de la méthode des différences finies avec ceux de la méthode exacte concerne les déflexions de la plaque correspondant à la ligne de la coupe 11 (fig. III.5). A noter que ces déflexions sont en fonctions des caractéristiques géométriques et mécaniques de la plaque circulaire encastrée sur tout son contour et sont dues à une charge uniformément répartie sur toute sa surface.

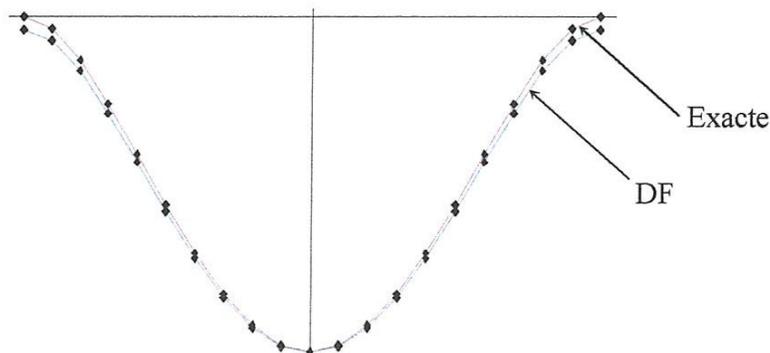


Fig. III.11: Comparaison des valeurs des déflexions de la plaque circulaire obtenues numériquement et analytiquement

D'après la figures III.11, on constate une bonne concordance entre les deux méthodes avec une erreur assez apparente aux alentours de l'encastrement. Cela témoigne la certitude des résultats issus de la méthode des différences finies ce qui permet son application pour des cas où l'on ne connaît pas la solution analytique.

### **VIII. Conclusion:**

L'application de la méthode des différences finies en coordonnées polaires pour ce type de plaque montre sa fiabilité en la comparant avec sa solution analytique. Cela permet sa généralisation pour d'autres types de plaque dont on ne connaît pas la solution analytique. Son principe se base comme toutes les autres méthodes numériques sur la discrétisation de la plaque et l'erreur du calcul est inversement proportionnelle au nombre de nœuds considérés. Son algorithme s'applique facilement aux nœuds ordinaires, par contre les nœuds situant au voisinage du contour, ainsi que ceux situant au voisinage du centre, certaines attentions doivent être prises en considération. Enfin, elle nécessite aussi la construction d'un programme de calcul qui nécessite de son côté un effort et une concentration très important.

CHAPITRE : IV

*Calcul d'une  
plaque circulaire  
reposant sur  
d'appuis simples  
sur tout son  
contour*



### III. Méthode de calcul:

Selon le principe de la méthode des différences finies, la plaque se divise en un nombre fini d'éléments ayant la forme d'un secteur d'anneau (fig. IV.1). Les points d'intersection des lignes radiales et des lignes circonférentielles forment ce qu'on appelle nœuds. Cette méthode permet de déterminer la fonction inconnue  $w(x, y)$  représentant les déflexions de la plaque uniquement au niveau des nœuds.

### IV. Détermination des déflexions de la plaque dues à une charge uniformément répartie sur toute la surface de plaque :

Supposons que la plaque circulaire reposant sur des appuis simples sur tout son contour est soumise à une charge extérieure verticale  $q$  uniformément répartie sur toute sa surface  $xy$ . Par principe de la méthode des différences finies, la charge extérieure  $q$  est considérée comme étant une charge concentrée appliquée en chaque nœud. Le maillage de la plaque a été fait de façon que le nombre de nœuds sur chaque ligne circonférentielle est pris égale 12 ce qui rend le nombre total des nœuds sur toute plaque à 61 (fig. IV.1). A noter que la numérotation des nœuds est choisie de façon à faciliter le programme de calcul. Pour déterminer les déflexions de la plaque, autrement dit les déplacements verticaux des nœuds il faut résoudre l'équation différentielle des déflexions de la plaque suivant:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (IV.1)$$

La résolution de cette équation différentielle de quatrième degré par la méthode des différences finies se fait par l'algorithme illustré dans la figure IV.2. C'est-à-dire pour chaque nœud de la plaque on détermine la flèche  $w(i, k)$  en appliquant le schéma de la figure IV.2.

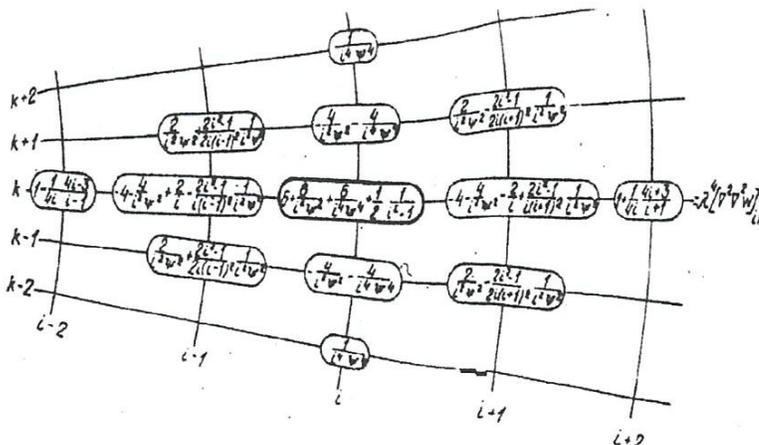


Fig. IV.2: Algorithme de résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque circulaire par la méthode des différences finies

L'introduction des conditions aux limites permet encore de diminuer le nombre d'inconnues du problème du fait que la valeur de la flèche au niveau des nœuds du contour de la plaque est préalablement connue et elle est égale à zéro. Puisque le type de condition aux limites considéré est le cas des appuis simples au niveau de tout le contour de la plaque, alors l'algorithme de résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque des nœuds adjacents aux nœuds du contour est illustré dans la figure IV.3

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{m^4 \psi^4} \\ \beta_2 &= -\frac{4}{m^2 \psi^2} - \frac{4}{m^4 \psi^4} \\ \beta_3 &= 5 + \frac{8}{m^2 \psi^2} + \frac{6}{m^4 \psi^4} + \frac{4m^2 + 4m - (2m^2 - 2)(4m + 3)}{(2m^2 - 2)(4m^2 + 4m)} \\ \beta_4 &= -\frac{4}{m^2 \psi^2} - \frac{4}{m^4 \psi^4} \\ \beta_5 &= -\frac{1}{m^4 \psi^4} \\ \beta_6 &= \frac{2}{m^2 \psi^2} + \frac{2m^2 - 1}{2m(m-1)^2} \frac{1}{m^2 \psi^2} \\ \beta_7 &= -4 - \frac{4}{m^2 \psi^2} + \frac{2}{m} - \frac{2m^2 + 1}{m(m-1)^2} \frac{1}{m^2 \psi^2} \\ \beta_8 &= \frac{2}{m^2 \psi^2} + \frac{2m^2 - 1}{2m(m-1)^2} \frac{1}{m^2 \psi^2} \\ \beta_9 &= 1 - \frac{1}{4m} \frac{4m - 3}{m - 1}\end{aligned}$$

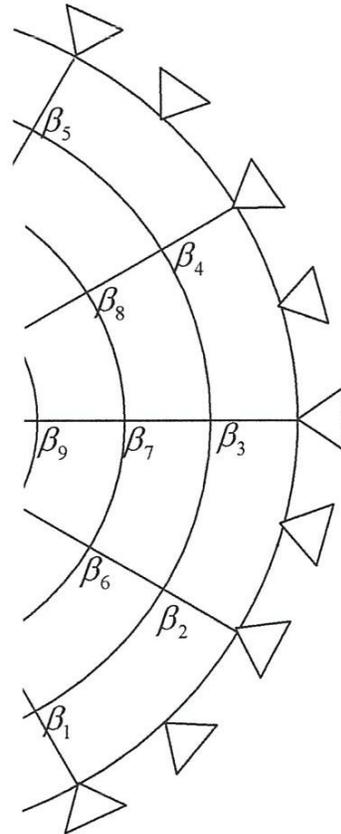


Fig. IV.3: Algorithme de résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque circulaire des nœuds adjacents aux nœuds du contour par la méthode des différences finies

L'algorithme de résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque circulaire par la méthode des différences finies pour les nœuds adjacents au nœud central, ainsi que celui du nœud central sont exposés dans le chapitre III.

Finalement, la résolution de l'équation différentielle (IV.1) selon tous ces algorithmes de la méthode des différences finies en coordonnées polaires appliqués pour tous les nœuds abouti à un système d'équations algébriques linéaire sous forme matricielle dont le nombre d'inconnues  $w_i$  est égal au nombre d'équation formulées pour chaque nœuds:

$$\bar{R}w = \bar{R}_q \quad (IV.2)$$

Avec:

$\bar{R}$ : Matrice de taille (61×61) issue de l'application des différents algorithmes de résolution des figures IV.3, III.4 et III.5.

$$w = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{61} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{R}_q = \frac{q\lambda^4}{D} \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

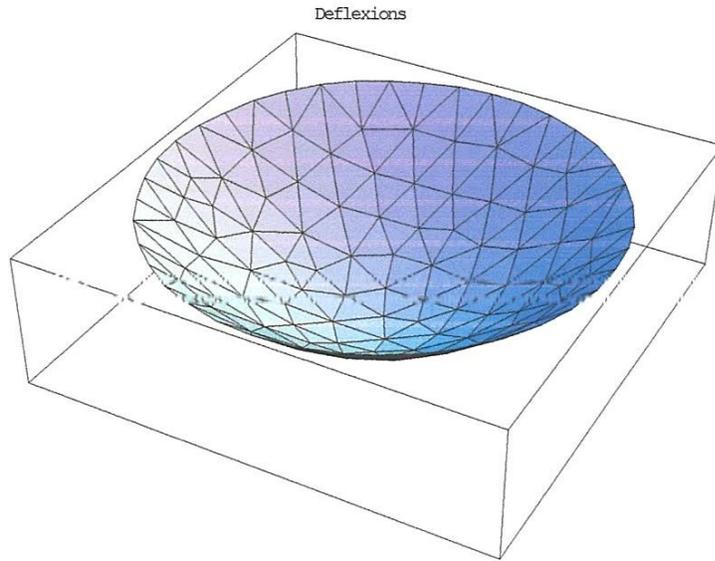
Les définitions de tous les paramètres de ces expressions sont données dans le chapitre III.

Le calcul numérique par le biais d'un programme en Mathematica et par Fortran a permis de formuler les éléments de la matrice  $\bar{R}$  et les valeurs des éléments de cette matrice issus du calcul sont :

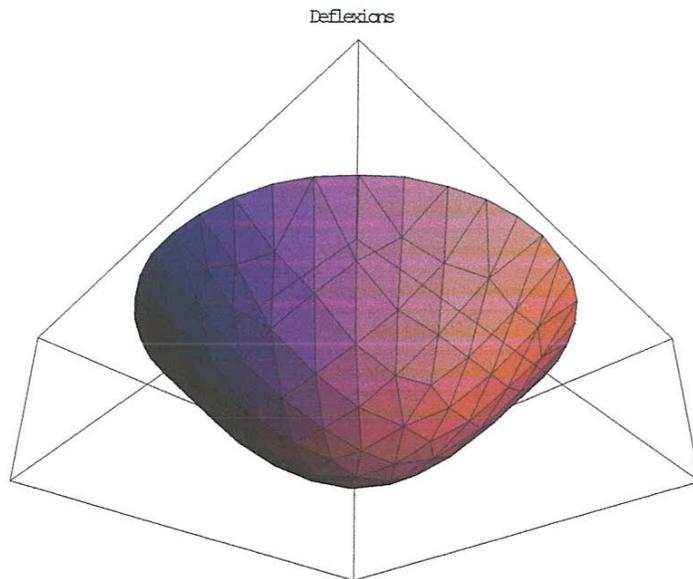




Les résultats graphiques concernant les déflexions de la plaque reposant sur des appuis simples sur tout son contour et dues à une charge extérieure uniformément répartie sur toute la plaque sont:



*Fig. IV.4. Vue de dessus de toutes les déflexions de la plaque reposant sur des appuis simples sur son contour, en 3D, issues du programme de calcul*



*Fig. IV.5. Vue de dessous de toutes les déflexions de la plaque reposant sur des appuis simples sur son contour, en 3D, issues du programme de calcul*

**V. Détermination des efforts internes dans les sections de la plaque:**

Les efforts internes de la plaque circulaire considérés sont les moments fléchissants  $M_{xx}$  dans les sections de la plaque correspondant à la ligne de coupe 11 et  $M_{yy}$  dans les sections de la plaque correspondant à la ligne de coupe 22, fig. IV.5.

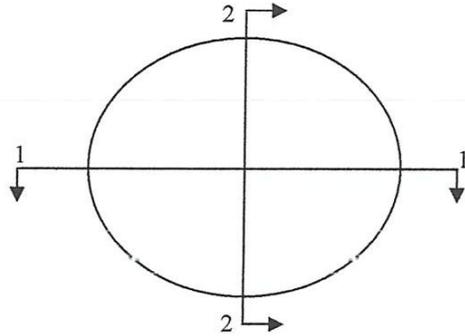


Fig. IV.6. Sections de la plaque où les efforts internes sont déterminés

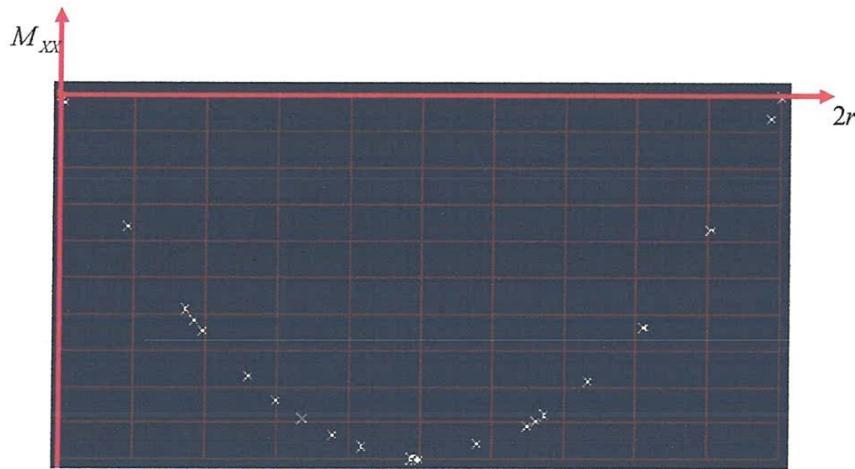


Fig. IV. 7. Diagramme du moment fléchissant  $M_{xx}$  dans les sections de la plaque correspondant à la ligne de coupe 11

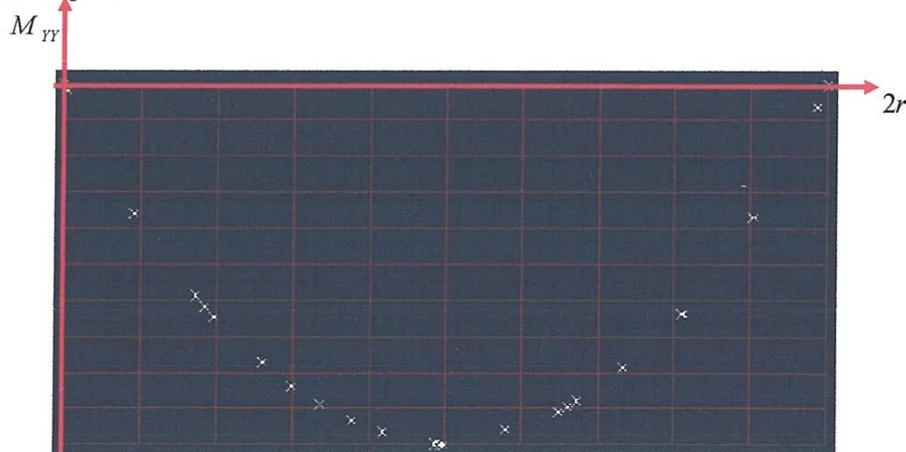
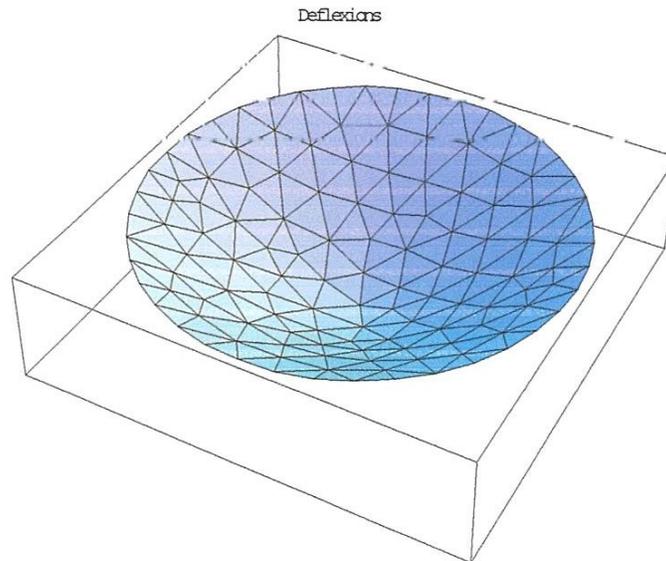


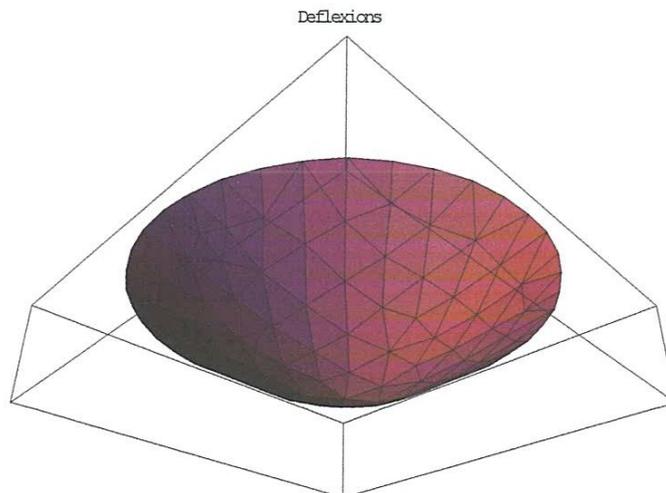
Fig. IV. 8. Diagramme du moment fléchissant  $M_{yy}$  dans les sections de la plaque correspondant à la ligne de coupe 22

**VI. Détermination des déformées de la plaque dues à une charge concentrée appliquée au milieu de la plaque :**

Considérons la même plaque de mêmes conditions aux limites, de mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques et gardons la même discrétisation, sauf que la plaque est sollicitée par une charge concentrée appliquée à son centre. On suit la même procédure de calcul et les résultats graphiques des déflexions de la plaque reposant sur d'appuis simples sur tout son contour surgis par ce type de chargement sont donnés dans les figures suivantes :



*Fig. IV. 9 Vue de dessus de toutes les déflexions de la plaque reposant sur des appuis simples sur son contour, en 3D, issues du programme de calcul*



*Fig. IV.10. Vue de dessous de toutes les déflexions de la plaque reposant sur des appuis simples sur son contour, en 3D, issues du programme de calcul*

## **VII. Conclusion:**

On a montré d'après ce chapitre que la méthode des différences finies en coordonnées polaires est applicable aux plaques de différents types de conditions aux limites et soumises aux différents types de chargements extérieurs. Cela permet sa généralisation pour d'autres types de plaque dont on ne connaît pas la solution analytique. Son principe se base, comme toutes les autres méthodes numériques, sur la discrétisation de la plaque et l'erreur du calcul pourra se minimiser en augmentant le nombre de nœuds. Cela est possible grâce à la présence des machines de processeur puissant et grâce aussi à l'algorithme de la méthode qui s'applique facilement. Mais elle nécessite quand même un effort et une concentration très important.

CHAPITRE : V

*Calcul d'une plaque  
demi circulaire  
encastree sur tout  
son cote linéaire*

### I. Introduction:

Examinons dans ce chapitre un cas particulier de plaques qui peut trouver son application dans la pratique qui est le cas de la plaque demi circulaire encastrée sur tout son coté linéaire (fig. V.1).

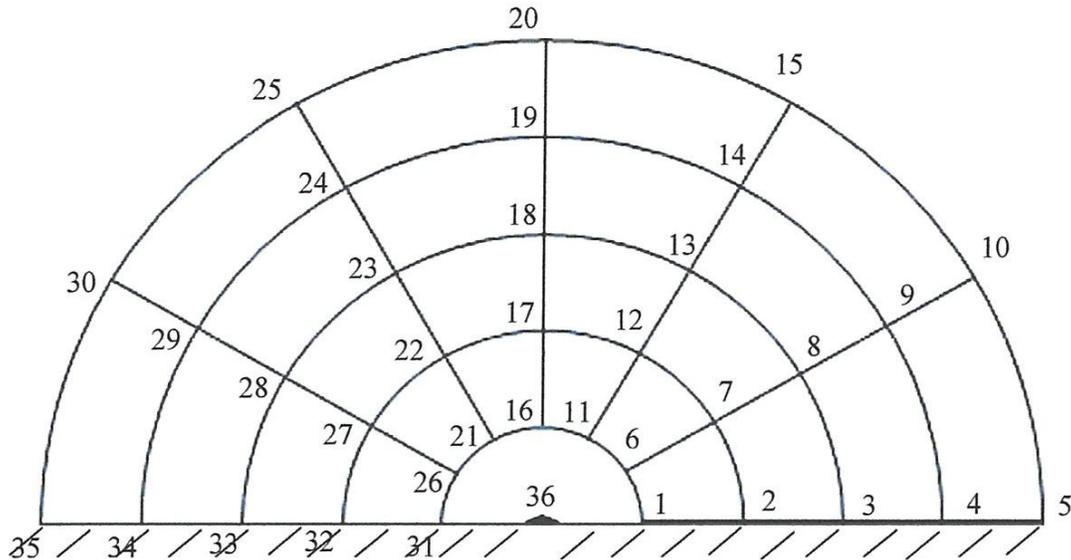


Fig. V.1: Plaque demi circulaire encastrée sur tout son coté linéaire et discrétisée en 36 nœuds

### II. problème posé:

Le problème posé et à traiter dans ce chapitre est de déterminer les flèches (déflexions) de la plaque demi circulaire encastrée sur tout son coté linéaire causées par une charge uniformément répartie sur toute la plaque, ainsi que les efforts internes dans ses sections. La méthode de calcul utilisée est celle des différences finies basée sur le principe de la discrétisation de la plaque (fig. V.1).

### III. Méthode de calcul:

Selon le principe de la méthode des différences finies, la plaque se divise en un nombre fini d'éléments ayant la forme d'un secteur d'anneau (fig. V.1). Les points d'intersection des lignes radiales et des lignes circonférentielles forment ce qu'on appelle nœuds. Cette méthode permet de déterminer la fonction inconnue  $w(x, y)$  représentant les déflexions de la plaque uniquement au niveau des nœuds. Le nombre de nœuds est lié à la précision désirée.

**IV. Détermination des déflexions de la plaque de forme demi cercle dues à une charge uniformément répartie sur toute sa surface :**

Supposons que la plaque de forme demi circulaire encastrée sur tout son coté linéaire est soumise à une charge extérieure verticale  $q$  uniformément répartie sur toute sa surface  $xy$ . Par principe de la méthode des différences finies, la charge extérieure  $q$  est considérée comme étant une charge concentrée appliquée en chaque nœud. Le maillage de la plaque a été fait de façon que le nombre de nœuds sur chaque ligne radiale est pris égale à 5 ce qui rend le nombre total des nœuds sur toute plaque à 36 (fig. V.1). A noter que la numérotation des nœuds est choisie de façon que le programme de calcul sera facile. Pour déterminer les déflexions de ce type de plaque, on doit résoudre l'équation différentielle :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q(r, \theta)}{D} \tag{V.1}$$

La résolution de cette équation différentielle de quatrième degré par la méthode des différences finies se fait par l'algorithme illustré dans la figure V.2. C'est-à-dire pour chaque nœud de la plaque on détermine la flèche  $w(i, k)$  en appliquant le schéma de cette figure.

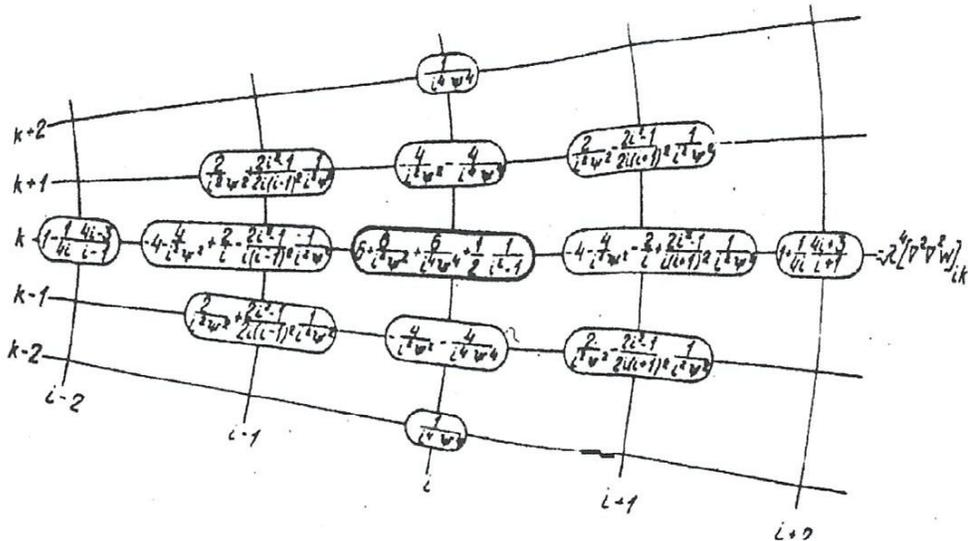


Fig. V.2: Algorithme de résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque demi circulaire par la méthode des différences finies

L'introduction des conditions aux limites permet encore de diminuer le nombre d'inconnues du problème du fait que la valeur de la flèche au niveau des nœuds situant sur l'encastrement est préalablement connue et elle est égale à zéro. Puisque le type de condition aux limites considéré est le cas d'encastrement au niveau de la partie linéaire du contour de la plaque, alors l'algorithme de résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque des nœuds adjacents aux nœuds du contour encastré est illustré dans la figure V.3

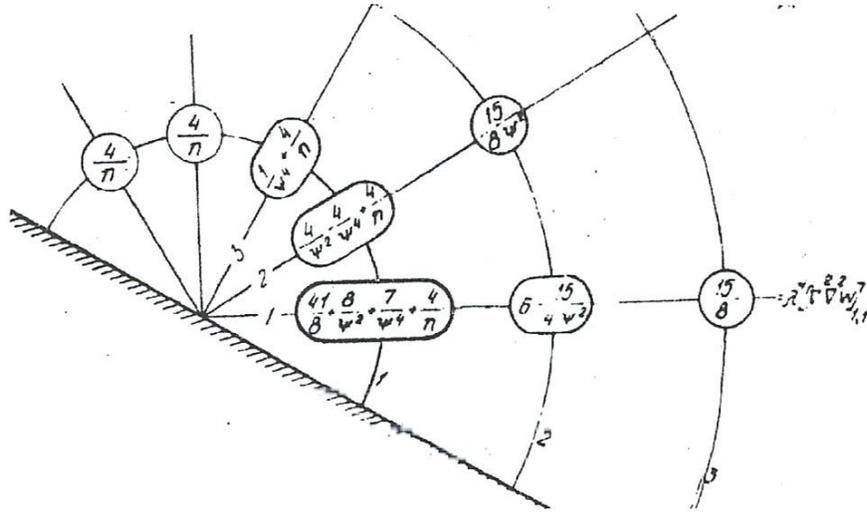


Fig. V.3: Algorithme de résolution de l'équation différentielle des déflexions de la plaque demi circulaire des nœuds adjacents à la partie encastrée du contour par la méthode des différences finies

Finalement, la résolution de l'équation différentielle (V.1) selon tous ces algorithmes de la méthode des différences finies en coordonnées polaires appliquée pour tous les nœuds abouti à un système d'équations algébriques linéaire sous forme matricielle dont le nombre d'inconnues  $w_i$  est égal au nombre d'équation formulées pour chaque nœuds:

$$\vec{R}w = \vec{R}_q \quad (V.2)$$

Avec:

$\vec{R}$ : Matrice de taille (36×36) issue de l'application des différents algorithmes de résolution des figures V.2, et V.3

$$w = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{61} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{R}_q = \frac{q\lambda^4}{D} \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Le calcul numérique par le biais d'un programme en Mathematica et par Fortran a permis de formuler les éléments de la matrice  $\vec{R}$  et les valeurs des éléments de cette matrice issus du calcul sont :

128.105	-7.67836	1.875	0	0	-37.9619	0	6.83918	0	0	13.9714	0
-3.45595	18.4511	-8.29294	1.45833	0	3.41959	-6.97374	1.64647	0	0	0	0.831545
0.625	-4.38032	10.2903	-6.14427	0	0	1.09765	-2.27816	0.7388	0	0	0
0	0.729167	-4.21558	8.16894	-5.34122	0	0	0.5541	-1.11978	0.42061	0	0
0	0	0	0	7.31578	0	0	0	0	-0.66876	0	0
0	0	0	0	0	128.105	-7.67836	1.875	0	0	-37.9619	6.83918
3.41959	-6.97374	1.64647	0	0	-3.45595	18.4511	-8.29294	1.45833	0	3.41959	-6.97374
0	1.09765	-2.27816	0.7388	0	0.625	-4.38032	10.2903	-6.14427	0	0	1.09765
0	0	0.5541	-1.11978	0.42061	0	0.729167	-4.21558	8.16894	-5.34122	0	0
0	0	0	0	-0.66876	0	0	0	0	7.31578	0	0
0	-7.67836	0	0	0	0	0	0	0	0	128.105	-7.67836
0	0.831545	0	0	0	3.41959	-6.97374	1.64647	0	0	-3.45595	18.4511
0	0	0.164256	0	0	0	1.09765	-2.27816	0.7388	0	0.625	-4.38032
0	0	0	0.0519715	0	0	0	0.5541	-1.11978	0.42061	0	0.729167
0	0	0	0	0.0212875	0	0	0	0	-0.66876	0	0
0	-7.67836	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.831545	0	0	0	3.41959	-6.97374
0	0	0	0	0	0	0	0.164256	0	0	0	1.09765
0	0	0	0	0	0	0	0	0.0519715	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0212875	0	0
0	-7.67836	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.831545
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.666667	0	0	0	0	0.666667	0	28	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.164256	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0519715	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.0212875	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	13.9714	0	0	0	0	0.666667	0	0	0
1.64647	0	20	0	0.831545	0	0	0	0	0	0	0
-2.27816	0.7388	0	0	0	0.164256	0	0	0	0	0	0
0.5541	-1.11978	0.42061	0	0	0	0.0519715	0	0	0	0	0
0	0	-0.66876	0	0	0	0	0.0212875	0	0	0	0
1.875	0	0	-37.9619	6.83918	0	0	0	13.9714	0	0	0
-8.29294	1.45833	0	3.41959	-6.97374	1.64647	0	0	0	0.831545	0	0
10.2903	-6.14427	0	0	1.09765	-2.27816	0.7388	0	0	0	0.164256	0
-4.21558	8.16894	-5.34122	0	0	0.5541	-1.11978	0.42061	0	0	28	0.0519715
0	0	7.31578	0	0	0	-0.66876	0	0	0	0	0.0212875
0	0	0	128.105	-7.67836	1.875	0	0	-37.9619	6.83918	0	0
1.64647	0	0	-3.45595	18.4511	-8.29294	1.45833	0	3.41959	-6.97374	1.64647	0
-2.27816	0.7388	-6.14427	0.625	-4.38032	10.2903	0	0	0	1.09765	-2.27816	0.7388
0.5541	-1.11978	0.42061	0	0.729167	-4.21558	8.16894	-5.34122	0	0	0.5541	-1.11978
0	0	-0.66876	0	0	0	0	7.31578	0	0	0	-0.66876
0	0	0	0	0	0	0	0	128.105	-7.67836	1.875	0
0	0	0	3.41959	-6.97374	1.64647	0	0	-3.45595	18.4511	-8.29294	1.45833
0.164256	0	0	0	1.09765	-2.27816	0.7388	0	0.625	-4.38032	10.2903	-6.14427
0	0.0519715	0	0	0	0.5541	-1.11978	0.42061	0	0.729167	-4.21558	8.16894
0	0	0.0212875	0	0	0	-0.66876	0	0	0	0	7.31578

Les valeurs des éléments du vecteur  $\vec{R}_q$  issus du calcul sont :

$$\vec{R}_q = \frac{q\lambda^4}{D} (1,1,1,\dots,1,1,1)^T$$

La résolution du système (V.2) donnant les valeurs des déflexions de la plaque de forme demi circulaire en chaque nœud en fonction des paramètres géométriques et mécaniques de la plaque sont :

```

0.0106389
0.0187431
0.0496189
0.0702974
0.0951266
0.0106389
-0.031519
0.0792761
0.0904879
-0.164471
0.0242206
-0.054657
0.0971671
-0.165734
-0.315786
0.0106389
-0.031519
0.0792761
0.0904879
-0.164471
0.0106389
0.0187431
0.0496189
0.0702974
0.0951266
    
```

Les résultats graphiques concernant les déflexions de la plaque de forme demi circulaire encastrée sur tout son côté linéaire et dues à une charge extérieure uniformément répartie sur toute la surface de la plaque sont:

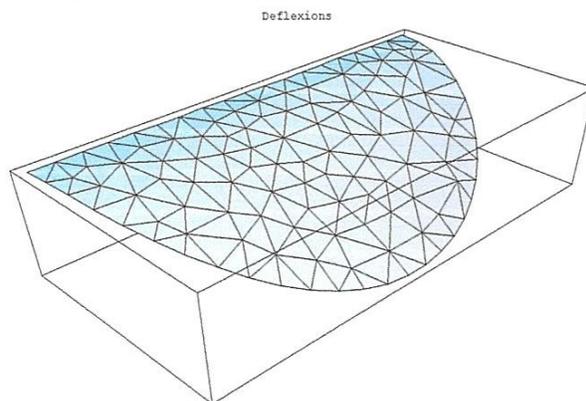


Fig. V.4: Vue de dessus de toutes les déflexions de la plaque de forme demi circulaire encastrée sur tout son côté linéaire, en 3D, issues du programme de calcul

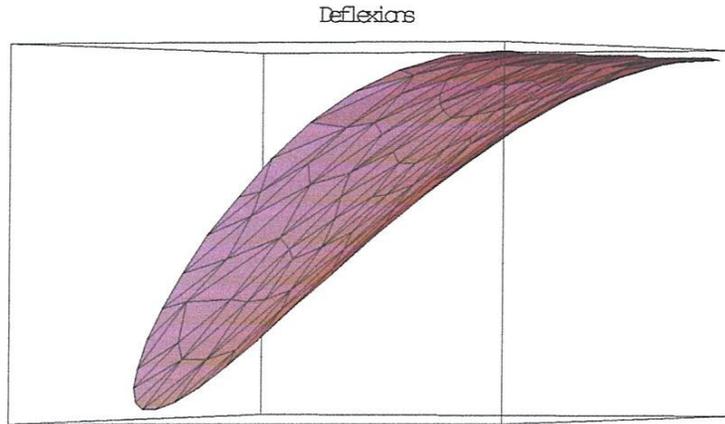


Fig. V.5: Vue de dessous de toutes les déflexions de la plaque de forme demi circulaire encastrée sur tout son côté linéaire, en 3D, issues du programme de calcul

**V. Détermination des efforts internes dans les sections de la plaque:**

Les efforts internes de la plaque de forme demi circulaire considérés sont les moments fléchissant  $M_{xx}$  et  $M_{yy}$  dans toutes les sections de la plaque dus à une charge uniformément répartie sur toute la surface de la plaque. Les résultats graphiques sont montrés dans les figures suivantes :

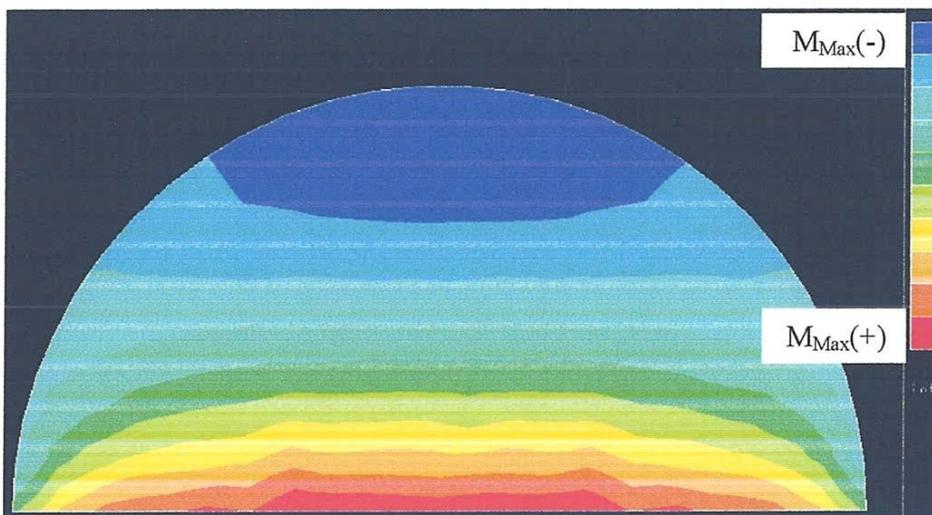


Fig. V.6: Mosaïque du moment fléchissant  $M_{xx}$  dans toutes les sections de la plaque de forme demi circulaire

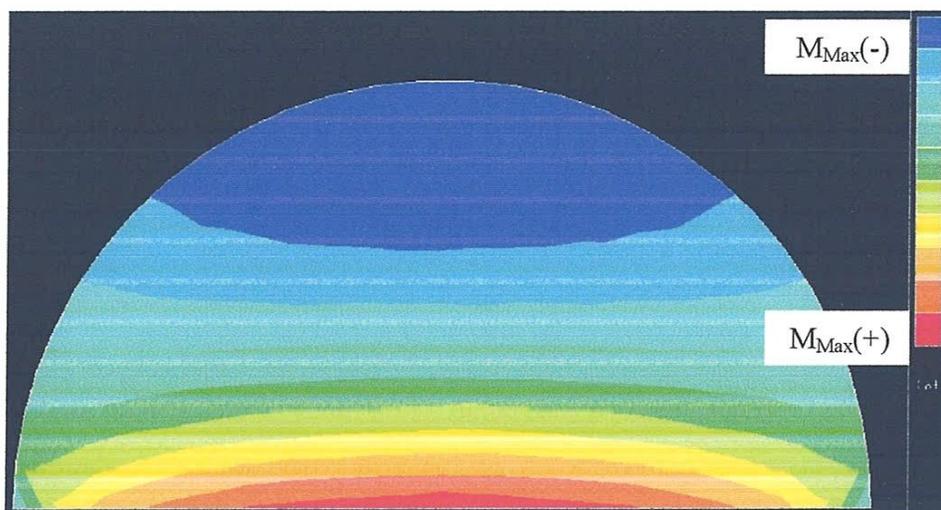


Fig. V.6: Mosaïque du moment fléchissant  $M_{yy}$  dans toutes les sections de la plaque de forme demi circulaire

**VI. Détermination des déflexions de la plaque dues à une charge concentrée appliquée au point situant au centre de gravité de la plaque :**

Considérons la même plaque de mêmes conditions aux limites, de mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques et gardons la même discrétisation, sauf que la plaque est sollicitée

par une charge concentrée appliquée au point situant en son centre de gravité  $\left( \begin{matrix} x = 0 \\ y = \frac{4R}{3\pi} \end{matrix} \right)$ . On suit

la même procédure de calcul et les résultats graphiques des déflexions de la plaque de forme demi circulaire encastrée sur tout son coté linéaire surgis par ce type de chargement sont donnés dans les figures suivantes :

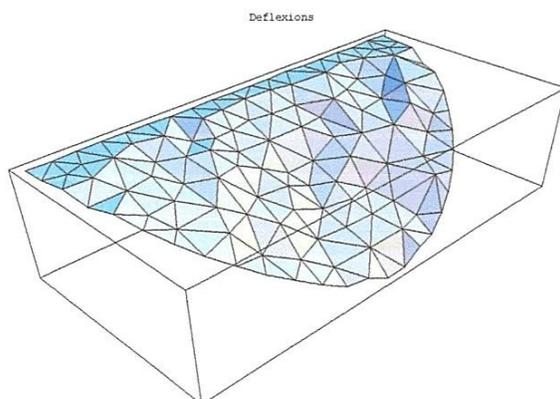


Fig. V.8: Vue de dessus de toutes les déflexions de la plaque de forme demi circulaire encastrée sur tout son coté linéaire, en 3D, issues du programme de calcul

## **VII. Conclusion:**

On a montré d'après ce chapitre que la méthode des différences finies en coordonnées polaires est applicable aux plaques de différentes formes et de différents types de conditions aux limites sollicitées par différents types de chargements extérieurs. Cela permet de conclure un objectif majeur de cette méthode qui est son application pour d'autres types de plaque dont la solution analytique est inenvisageable ou pratiquement impossible.

## **Conclusion Générale :**

L'étude et le calcul des problèmes physiques stationnaires ou non stationnaires par voie analytique n'arrive pas à se réaliser dans la plus part des cas vu leur complexité. C'est pourquoi la nécessité d'examiner ces problèmes numériquement est inévitable à nos jours. Le traitement de cette tâche numériquement est devenue aujourd'hui plus facile grâce au développement des machines de calcul qui permettent un calcul plus rapide et plus fiable.

L'étude apportée dans ce mémoire de fin d'études concernant le calcul statique des plaques circulaires de différentes conditions aux limites et soumises aux différents types de charges extérieures n'est pas tout a fait nouvelle dans le sens global, mais d'un autre coté a permis de découvrir et de savoir la possibilité d'examiner des cas où l'application des méthodes analytiques n'est plus possible. L'application de la méthode des différences finies pour ces cas assez faciles, peut être considérée comme un début d'une tâche plus compliquée et plus importante selon les besoins rencontrés souvent dans la pratique, comme le cas des plaques de forme compliquée ou des coques utilisées dans des différents secteurs de l'industrie et de la construction.

La tâche réalisée et apportée dans ce mémoire a permis à l'étudiant d'acquérir différents savoirs essentiels pour l'ingénieur qui sont : les différentes lois de la théorie d'élasticité, les différentes méthodes numériques de calcul, ainsi que la construction des codes de calcul et l'illustration des résultats.

Enfin, cette étude réalisée numériquement peut être considérée comme étant une base de l'étude statique de plaques de forme plus compliquée ou pour l'étude dynamique de ce même type de plaque.

## BIBLIOGRAPHIE

1. S. Timoshenko, Woinowsky-Krieger. Plaques et coques (Version Russe). Moscou 1963. 632 pages.
2. A.V. Aleksandrov, V. D. Potapov. Les bases de la théorie d'élasticité et de plasticité (Version Russe). Moscou 1990. 393 pages.
3. A. S. Kalmanok. Calcul des plaques (Version Russe). Moscou 1959. 212 pages.
4. Jean-Louis, Gouri Dhatt. Modélisation des structures par éléments finies (volume 2). HERMES 1993. 483 pages.
5. S. P Timoshenko. Résistance des matériaux (tome 2). Dunod. 1990. 464 pages.
6. S. P Timoshenko. Résistance des matériaux (tome 1). Dunod. 1990. 456 pages.
7. Z. Kaczkowski. Plaques et calcul statiques (Version Russe). Varsovie 1980. 480 pages.