

17/621.731

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Université 8Mai 1945 – Guelma  
Faculté des sciences et sciences de l'ingénierie  
Département de génie électrique



**Mémoire de fin d'étude**  
**Pour l'obtention du diplôme de master 2 académique**  
Domaine : Sciences et Techniques  
Filière : Génie électrique  
Option : système électronique

---

## COMMANDE ROBUSTE DES SYSTEMES D'ORDRE NON ENTIER

---

Présenté par :

- AMINE ZEGHOUM

Sous la direction de :

Mr, Sedraoui moussa

2012



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



يَأْتِيهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا  
فِي الْمَجَلِسِ فَأَفْسَحُوا يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ  
وَإِذَا قِيلَ أَنْشُرُوا فَأَنْشُرُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ  
ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ  
وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ

صدق الله العظيم

الآية 11 سورة المجادلة

**DEDICACE**

*A celle qui ma toujours bercé avec l'amour et l'affection,  
Ma mère.*

*A mon chère père.*

*A mes Sœurs et frères, Khadîdja, Chihebeddine,  
Imad*

*A mon cousin, Abdou*

*A mon amis, Isaac, Hamza, Ali*

*A tous mes amis.*

*A tous mes collègues de promotions de Master 2 Système Electronique 2011  
2012*

*Mes remerciements vont au Mr, Sedraoui moussa Pour son aide, ses conseils  
Précieux et son encouragement incessants tout au long de mon parcours en  
Electronique et durant la réalisation de ce mémoire.*

## Table des matières

### Introduction

### Chapitre I : Commande Robuste des systèmes multi variables par la méthode

1. Introduction	3
1.2. Outils fondamentaux utilisés dans la commande robuste	4
1.2.1. Représentation des systèmes multi-variable	4
a. Forme d'état d'un système MIMO	4
b. Forme LFT (Linear Fractional Transformation) d'un système MIMO	6
1.2.2. Norme d'un signal	7
1.2.2.1. Valeurs singulières	7
1.2.2.2. Norme $H_\infty$	8
a. Propriétés	9
b. Calcul de la norme $H_\infty$	9
1.3. Modélisation des incertitudes d'un système MIMO	10
1.4. Etude de robustesse d'un système MIMO	12
1.4.1. Théorème du petit gain	13
a. Stabilité nominale	12
b. Stabilité robuste	14
b.1. Cas des incertitudes additives	14
b.2. Cas des incertitudes multiplicatives	14
c. Performances nominales	14
d. Performances robustes	16
1.4.2. Conditions de robustesse sur la stabilité	16
1.4.3. Conditions de robustesse sur les performances	16
1.4.4. Loop-shaping	17
1.5. Commande par l'approche $H_\infty$	19
1.5.1. Solution du problème standard par l'approche $H_\infty$ basant sur les équations de Riccat	20
1.5.1.2. Solution du problème de sensibilité mixte $S/KS$	23
1.6. Simulation et discussion des résultats	25
1.6.1. Commande d'un système multi-variable incertain par un $H_\infty$	25
1.7. Conclusion	34

### Chapitre II : Application des techniques de la commande robuste

2.1. Introduction	35
2.2. Operateurs d'intégration et de dérivation non entière	37
2.2.1. Définitions d'intégration fractionnaire	37
2.2.2. Définitions de dérivation fractionnaire	37
2.2.2.1. Définition de Grünwald-Letnikov	37
2.2.2.2. Définition de Riemann-Liouville	38
2.2.3 Transformée de Laplace	39
2.2.3.1. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle	39
2.2.3.2. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle	39

2.2.4. Représentation d'un système d'ordre fractionnaire	40
2.2.4.1. Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire	40
2.3. Approximation du modèle fractionnaire par un autre rationnel continu	42
2.3.1. Méthode de Matsula	42
2.3.2. Méthode d'Oustaloup	43
2.3.3. Méthode basant sur l'approche de l'identification fréquentielle	44
2.4. Synthèse d'un PID fractionnaire par l'optimisation sous contraintes	44
2.4.1. Conception d'une commande PID d'ordre fractionnaire	46
2.4.2. Détermination des paramètres d'un PID fractionnaire	47
2.4.3. Formulation de problème d'optimisation	47
2.4.4. Critère d'optimisation à minimiser	48
2.4.5. Spécifications fréquentielles à satisfaire	49
2.5. Synthèse d'un contrôleur fractionnaire par l'utilisation de l'optimisation non lisse	50
2.5.1. Proposition d'une structure fractale basée sur les gains principaux	50
2.5.2. Algorithme de résolution d'un problème d'optimisation	53
2.5.3. Optimisation de type Min-Max	53
2.5.3.1. Structure générale d'un problème d'optimisation de type Min-Max	53
2.5.3.2. Résoudre d'un problème d'optimisation par la fonction $F_{minimax}$	54
2.6. Simulation et discussion des résultats	55
2.6.1. Commande d'un système multi-variable incertain par un PID fractionnaire	67
3. Comparaison entre les PID fractionnaire et PID standard et $H_{\infty}$	75
4. Conclusion	
<b>Annexe A</b>	
<b>Annexe B</b>	

Depuis plusieurs décennies le problème de la commande a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, or le fait que l'apparition systématique des erreurs lors de la conception qui sont dues à un mauvais choix du modèle, ou à un emplacement arbitraire des pôles, ou encore à la négligence des signaux de perturbations etc., a incité à mettre en œuvre des notions avancées pour l'élaboration d'une commande qui permet de ramener n'importe quel système à n'importe quel niveau des performances désirées.

La synthèse d'une loi de commande permettant de réaliser l'asservissement d'un processus passe par l'utilisation de modèles mathématiques qui ne seront jamais qu'une représentation imparfaite de la réalité. Il y a toujours des incertitudes de modélisation dont la conséquence est qu'on ne peut pas décrire exactement par un modèle mathématique le comportement entrée/sortie d'un système. Parmi ces erreurs de modélisation on peut citer les dynamiques hautes fréquences qui sont mal-connues, ou volontairement négligées dans l'écriture du modèle, les retards purs, les incertitudes sur la valeur des paramètres physiques, les effets d'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement, l'utilisation des modèles simplifiés pour les actionneurs et les capteurs,....

Il convient donc d'étudier la robustesse de la loi de commande appliquée, afin d'être capable de garantir la stabilité et un certain degré de performances en dépit de ces incertitudes. Notons que cette exigence est implicitement mais imparfaitement prise en compte en automatique traditionnelle, au moyen des marges de gain et de phase.

La théorie de la commande robuste, regroupe plusieurs méthodes d'analyse et de conception de contrôleurs réduisant l'écart entre le système réel et le modèle identifié.

Parmi ces méthodes nous allons synthétiser un contrôleur robuste par les méthodes : PID fractionnaire,  $H_\infty$ , PID standard pour nôtres systèmes (Multi variable), et vérifier la satisfaction des conditions de robustesse de la stabilité et des performances.

Notre travail est élaboré comme suit :

- ❖ Le premier chapitre sera consacré sur l'étude de la commande robuste d'un système multi-variable contrôlé par deux contrôleurs : celui qui est synthétisé par la méthode  $H_\infty$  et l'autre qui prend la structure du PID standard ainsi la comparaison entre les résultats obtenus.

- ❖ Le deuxième chapitre sera consacré sur l'étude de la commande robuste d'un système multi-variable contrôlé par deux PID : fractionnaire et standard ainsi la comparaison entre les résultats obtenus.
- ❖ Le troisième chapitre sera consacré pour la comparaison des trois contrôleurs mentionnés précédemment.

**Chapitre I**  
**Commande Robuste des systèmes**  
**multi variables par la méthode  $H_\infty$**



## 1. Introduction

La théorie de la commande robuste a atteint ces dernières années un degré de maturité théorique important. Ainsi, La robustesse des systèmes asservis est une notion importante en automatique. Les applications industrielles sont soumises à des perturbations externes et aux bruits de mesure, à ceux-ci vient s'ajouter le fait que la notion de la fonction de transfert n'est qu'un modèle mathématique décrivant le système à étudier, ce modèle n'est pas toujours fidèle au système réel à cause, au moins, des incertitudes paramétriques et des dynamiques négligées.

En automatique classique, pour le cas des systèmes mono-variables, cette robustesse est garantie en assurant aux systèmes asservis des marges de gain et de phase suffisantes. En revanche, pour le cas des systèmes multi-variables, le problème de la commande peut poser des sérieux problèmes à cause le couplage des grandeurs d'entrées à celles des sorties du système à commander, présente des retards purs multiples et d'autres. L'objectif de l'automaticien est de garantir de bonnes marges de robustesse de stabilité ou bien un niveau satisfaisant des performances ou bien de réaliser un compromis de robustesse de stabilité et des performances. Plusieurs méthodes de robustesse ont été proposées ces dernières années assurant ces objectifs, parmi lesquelles on peut citer : la méthode LQG (Linéaires Quadratiques Gaussiens), la méthode des gais principaux,...etc. Malheureusement, ces méthodes de commande ont montrées des faibles qualités de robustesse.

Les pionniers à travailler sur la commande  $H_\infty$ , au début des années 80, étaient Zames [ZAM] et Zames & Francis [ZAM1]. Dans l'approche  $H_\infty$ , l'automaticien introduit un modèle représentant les incertitudes qui peuvent être structurées et/ou non structurées. Elles peuvent présenter sous forme additive, multiplicative en entrée, multiplicative en sortie, ... et d'autres. Un algorithme d'optimisation est ensuite monté cherchant à maximiser la robustesse en stabilité du système en boucle fermée tenant compte de ces incertitudes. Les objectifs en performances peuvent aussi s'ajouter à l'algorithme d'optimisation. Le contrôleur synthétisé par cette méthode de commande doit satisfaire cette robustesse non seulement pour les régimes de fonctionnement nominal mais également pour les régimes perturbé du système.

Dans ce chapitre, on s'intéresse par la commande robuste par la méthode  $H_\infty$ . A cet effet, nous allons présenter les outils mathématiques de base utilisés dans cette méthode de commande, on présentera la définition de la norme  $H_\infty$  ainsi ses propriétés, de plus, les détails sur les incertitudes

affectant le modèles mathématique qui modélise le système réel à commander, les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire qui nous a permet de définir les conditions de robustesse de stabilité et des performances, la formulation du problème de commande et les deux versions qui nous a permet de résoudre ce problème qui sont: la version  $H_{\infty}$  basant sur la résolution récursive de deux équations de Riccati et la version de  $H_{\infty}$  basant sur la formulation LMI (Linear Matrix Inequalities).

Ce chapitre se terminera par une partie de simulation afin de valider les notions théoriques de la commande robuste utilisant la méthode  $H_{\infty}$  pour la commande d'un système multi-variable à retard pur multiple. La dynamique de ce système à été modélisé par un modèle incertain ou ses incertitudes sont considérées sous forme multiplicative en sortie, les résultats obtenus lors de cette simulation sont comparés dans le plan fréquentiel et temporel avec ceux obtenus par un PID multi variables standard.

## 1.2. Outils fondamentaux utilisés dans la commande robuste

### 1.2.1. Représentation des systèmes multi-variables

#### a. Forme d'état d'un système MIMO

Le modèle de connaissance décrivant un système linéaire et stationnaire est représenté par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (I.1)$$

Pour : p, q représentent respectivement le nombre des grandeurs des entrées et des sorties du système à commander, on aura les notifications suivantes:

- $x(t)$  : Vecteur d'état,  $dim(x(t)) = n \times 1$  ;
- $u(t)$  : Vecteur de commande de dimension :  $p \times 1$  où 1 est le nombre d'actionneurs ;
- $y(t)$  : Vecteur de grandeurs à régler,  $dim(y(t)) = q \times 1$  ;
- $A$  : Matrice d'état du système,  $dim(A) = n \times n$  ;
- $B$  : Matrice de commande,  $dim(B) = n \times p$  ;
- $C$  : Matrice d'observation,  $dim(C) = q \times n$  ;
- $D$  : Matrice de transfert direct,  $dim(D) = q \times p$  ;

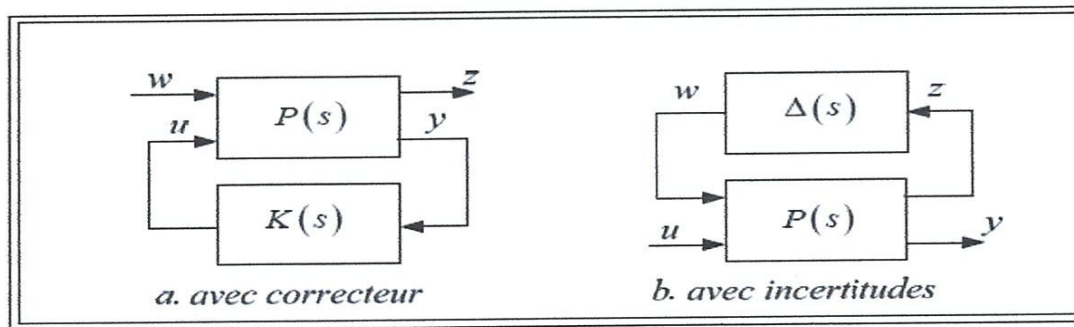
Avec l'hypothèse des conditions initiales nulles sur le vecteur d'état, la matrice de transfert du système peut prendre la forme ci-après:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (I.2)$$

Dans la suite, nous associons à  $G$  le formalisme suivant :

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (I.3)$$

Dans le but de mettre en évidence la correction du système ou la modélisation de ses incertitudes, une représentation unifiée, conformément à la Fig. I.1, a été introduite comme suite:



**Fig. I.1. Représentation sous forme standard d'un système.**

Dans cette représentation on peut noter:

- $P(s)$  : représente le procédé généralisé.
- $K(s)$  : représente le correcteur.
- $\Delta(s)$  : représente la modélisation des incertitudes.
- $w$  : représente les entrées exogènes du système (entrées à suivre et perturbations à rejeter).
- $z$  : représente les signaux à commander (erreurs entre consignes et sorties du système par exemple)
- $y$  : représente les sorties accessibles à la mesure du système.
- $u$  : représente les signaux de commande du processus.

Lorsque  $G(s)$  n'est pas strictement propre,  $G(\infty) = D$  et  $\|G\|_{\infty} \geq \bar{\sigma}(D)$ . La procédure ci-dessus n'est appliquée que pour  $\gamma \geq \bar{\sigma}(D)$ .

### 1.3. Modélisation des incertitudes d'un système MIMO

La représentation de ces incertitudes reflète notre connaissance des phénomènes physiques qui les causent et notre capacité à les représenter sous forme simple et facile à manipuler.

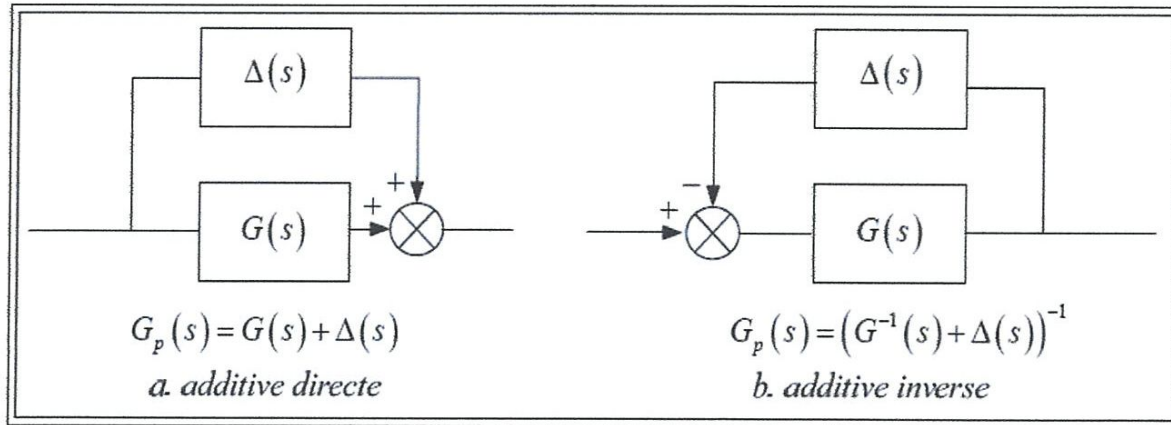
Dans le cadre de la commande robuste, il est nécessaire de préciser l'ensemble des modèles possibles représentant le système à commander. Un tel ensemble est défini par un modèle nominal et un domaine d'incertitude.

Les incertitudes du modèle décrivent les incohérences entre le modèle et le régime réel, il y a trois raisons pour leurs existences :

- a- Une connaissance incomplète du système.
- b- Le système original est parfaitement connu, mais le modèle est réduit pour simplifier les calculs, où pour contourner les difficultés imposées par la complexité du modèle complet...etc.
- c- Les incertitudes sont causées par une structure inadéquate du modèle, par exemple la représentation d'un modèle non linéaire par un modèle linéaire.

Les incertitudes sont représentées souvent de deux façons : additive ou multiplicative (à l'entrée ou à la sortie), selon la dynamique du système. Dans le cas général, on peut envisager deux types d'incertitudes qui sont :

- **Incertainces additives** (voir Fig. I.3) : Elles représentent, en général, des incertitudes absolues par rapport au modèle nominal. Cette représentation est souvent utilisée pour modéliser des dynamiques ou des non linéarités négligées [DUC], [DOY1].

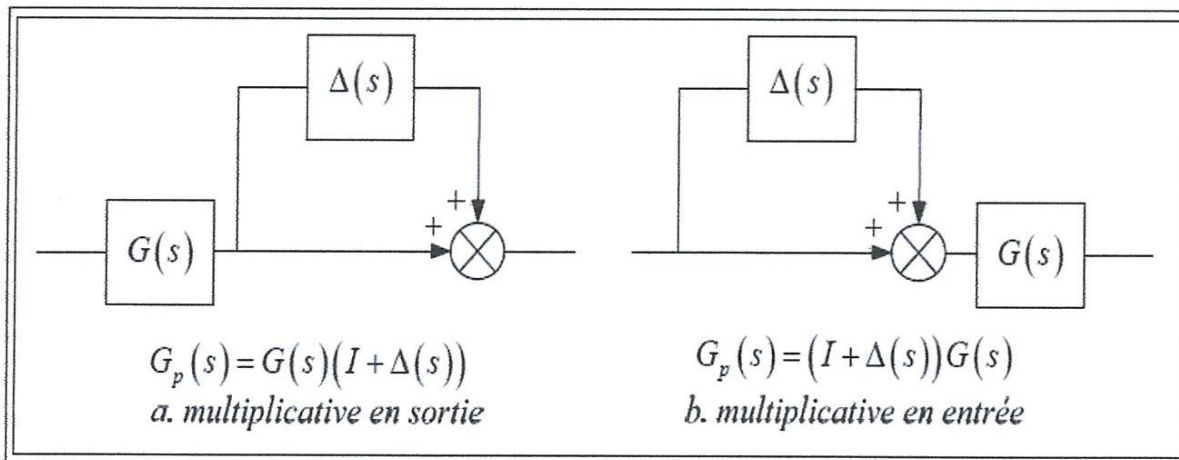


**Fig. I.3. Représentation additive des incertitudes**

Avec :

$G(s)$ ,  $G_p(s)$  et  $\Delta(s)$  : désignent respectivement la matrice de transfert du système nominal, perturbé et de la perturbation.

- **Incertitudes multiplicatives** (Voir Fig. I.4) : Elles permettent de définir les écarts en termes de variation par rapport au modèle nominal. Elles peuvent être introduites sous forme multiplicative en entrée ou en sortie. Elles peuvent être prises en considération sous forme directe ou inverse. Les formes multiplicatives en entrée sont généralement utilisées pour prendre en compte les erreurs de modélisation des actionneurs ou du convertisseur alimentant la machine. Les incertitudes multiplicatives en sortie modélisent généralement les défauts des capteurs de mesure [DUC], [DOY1].



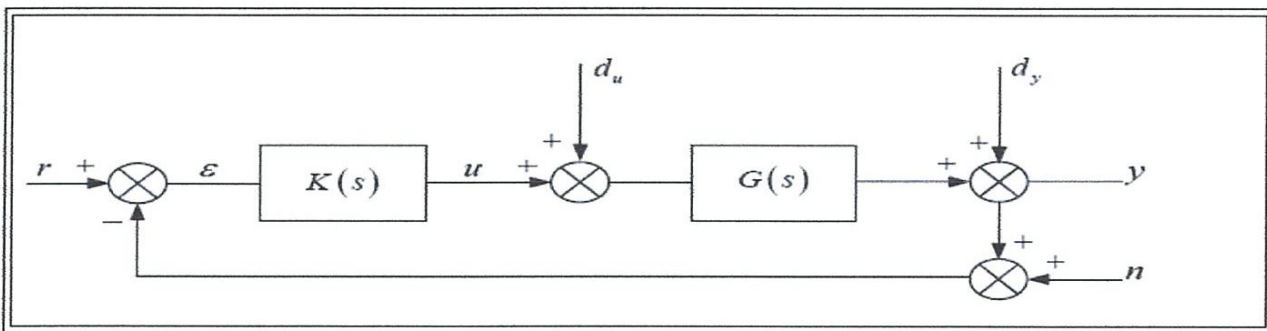
**Fig. I.4. Représentation multiplicative des incertitudes**

#### 1.4. Etude de robustesse d'un système MIMO

Un système asservi est robuste s'il reste stable, tout en assurant des bonnes performances, en présence des différents types d'incertitude. L'approche  $H_\infty$  a montré qu'elle constitue une méthode efficace pour calculer un correcteur robuste d'un système incertain.

Nous introduisons dans ce paragraphe le théorème du petit gain avant d'aborder l'étude de la robustesse en stabilité et en performance.

La boucle d'asservissement est habituellement décrite par le schéma bloc de la **Fig. I.5.**



*Fig. I.5. Schéma représentatif d'une boucle de suivi.*

En supposant la linéarité du système et du correcteur, on peut employer la transformée de Laplace et définir les paramètres ci-après:

- $R \in \mathbb{R}^p$  : Signal de référence
- $Y \in \mathbb{R}^p$  : Signal de sortie.
- $E \in \mathbb{R}^p$  : Erreur de suivi
- $U \in \mathbb{R}^m$  : Commande
- $D_u \in \mathbb{R}^m$  : Perturbation de la commande
- $D_y \in \mathbb{R}^p$  : Perturbation de la sortie
- $N \in \mathbb{R}^p$  : Bruit de mesure

Définissons les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire suivantes :

- Matrice de sensibilité en sortie :  $S_y = (I_p + GK)^{-1}$  (I.13)

- Matrice de sensibilité en entrée :  $S_u = (I_m + KG)^{-1}$  (I.14)

- Matrice de sensibilité complémentaire en sortie :  $T_y = GK(I_p + GK)^{-1}$  (I.15)

- Matrice de sensibilité complémentaire en entrée :  $T_u = KG(I_m + KG)^{-1}$  (I.16)

Le bilan des signaux dans la boucle donne les équations caractéristiques suivantes :

$$\bullet \quad Y = T_y (r - N) + S_y D_y + G S_y D_u \quad (\text{I.17})$$

$$\bullet \quad E = S_y (r - D_y - N) - G S_y D_u \quad (\text{I.18})$$

$$\bullet \quad U = K S_y (r - D_y - N) - T_u D_u \quad (\text{I.19})$$

Nous remarquons que  $S_y$ ,  $S_u$ ,  $T_y$  et  $T_u$  font intervenir la matrice de transfert en boucle ouverte  $GK$  et vérifient  $S_y + T_y = I_p$  et  $S_u + T_u = I_m$ .

### 1.4.1. Théorème du petit gain

En reprenant la figure I.1.b, où la matrice  $\Delta(s)$  représente les incertitudes de modélisation et  $P(s)$  la matrice de transfert nominale du système bouclé.

Sous l'hypothèse de stabilité de  $\Delta(s)$  et  $P(s)$ , le système de la figure I.1.b est stable pour toute  $\Delta(s)$  [DUC] si :

$$\|P \Delta\|_{\infty} \leq 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(P(j\omega)) \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1. \quad (\text{I.20})$$

#### a. Stabilité nominale

Nous distinguons deux définitions pour la stabilité nominale :

- La stabilité externe qui exige que toute entrée bornée  $r$  devra produire une sortie bornée  $y$ .
- La stabilité interne est plus large et exige que tout signal injecté en n'importe quel point de la boucle génère une réponse bornée en tout autre point.

En terme de fonctions de transfert caractéristiques, la stabilité externe se traduit par la stabilité de  $T$ . Tandis que la stabilité interne requiert la stabilité des quatre fonctions de transfert  $S, T, KS$  et  $G(I_m + KG)^{-1}$ .

**b. Stabilité robuste**

La stabilité est dite robuste si, en plus de la nominale, la stabilité de tous les systèmes atteignables par les perturbations est garantie. Sous l'hypothèse de stabilité de  $\Delta(s)$  et  $P(s)$ , nous allons établir les conditions de stabilité robuste pour des incertitudes de type additives ou multiplicatives :

**b.1. Cas des incertitudes additives :**  $P(s) = -K(I_p + GK)^{-1} = -KS_y$

Le théorème de petit gain nous donne:  $\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \bar{\sigma}(KS_y) < 1$ , comme  $\Delta(s)$  est stable alors :

$$\|\Delta\|_\infty < \sigma, \text{ soit : } \|KS_y\|_\infty < \frac{1}{\sigma}. \tag{I.21}$$

**b.2. Cas des incertitudes multiplicatives :**

	En sortie	En entrée
$P(s) =$	$-GK(I_p + GK)^{-1} = -KT_y$	$-KG(I_m + KG)^{-1} = -KT_u$
<b>Condition de Stabilité :</b>	$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \bar{\sigma}(T_y) < 1$	$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \bar{\sigma}(T_u) < 1$
$\ \Delta\ _\infty < \sigma$	$\Rightarrow \ T_y\ _\infty < \frac{1}{\sigma} \tag{I.22}$	$\Rightarrow \ T_u\ _\infty < \frac{1}{\sigma} \tag{I.23}$

*Tab. I.2. Condition de la stabilité robuste pour le cas des incertitudes multiplicatives.*

**c. Performances nominales**

Un asservissement est performant s'il réagit rapidement, rejette les perturbations et suit avec précision la consigne. Compte tenu de l'interprétation des matrices  $S$  et  $T$ , il est clair que le correcteur  $K$  à synthétiser doit chercher à satisfaire maintes exigences :



- **Atténuation des perturbations en sortie :**

Atténuer les perturbations en sortie revient à minimiser la fonction de sensibilité  $S_y$ , ceci revient à choisir sa norme  $\infty$  la plus faible possible.

Soit :

$$\bar{\sigma}(S_y) = \bar{\sigma}\left((I_p + GK)^{-1}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I_p + GK)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK)}.$$

Donc minimiser  $\bar{\sigma}(S_y)$  revient à maximiser  $\underline{\sigma}(GK)$

- **Rejet des bruits de mesure :** Pour réduire l'effet des bruits de mesure, il faut choisir

$$\bar{\sigma}(T_y) = \bar{\sigma}\left(\left((I_p + GK)^{-1}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I_p + GK)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK)} \text{ Le plus faible possible.}$$

Or

$$\bar{\sigma}(T_y) = \bar{\sigma}\left(I_p + \left(I_p + (GK)^{-1}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\underline{\sigma}\left((GK)^{-1}\right)} = \bar{\sigma}(GK).$$

Donc minimiser  $\bar{\sigma}(T_y)$  revient à minimiser  $\bar{\sigma}(GK)$ .

- **Poursuite du signal de référence :**

La poursuite idéale de la référence  $R$  par la sortie  $Y$  entraîne  $I - S_y \cong I$ , soit  $\bar{\sigma}(S_y)$  minimale. Cette condition rejoint donc celle du rejet des perturbations en sortie.

- **Limitation de l'énergie de commande :**

Pour éviter la fatigue des actionneurs, le bruit de mesure ne doit pas provoquer des agitations excessives de la commande. Les commandes seront d'autant plus réduites que la norme de la matrice  $KS$  l'est. Or, en pratique,  $T = GKS$  et comme  $G$  est fixé, réduire  $KS$  sera équivalent à réduire  $T$ . On se retrouve alors dans la même condition que celle des rejets de bruits de mesure.

#### d. Performances robustes

Un système bouclé satisfait le critère de robustesse en performances si les conditions de performances nominales sont vérifiées pour toute une classe de modèles de procédés caractérisés par des incertitudes.

#### 1.4.2. Conditions de robustesse sur la stabilité :

Le modèle perturbé (réel), sera stable si les valeurs singulières maximales du modèle nominal en boucle fermée, sont inférieures aux valeurs singulières maximales de l'inverse de la spécification sur la stabilité [2].

$$\sigma_{\max} [T(s)] \leq \sigma_{\max} [W_3(s)^{-1}] \quad (1.24)$$

Où:

- $T(s)$  : est la sensibilité complémentaire ou la matrice de transfert du système en boucle fermée.
- $W_3(s)$  : est la matrice de la spécification sur la stabilité, cette dernière englobe tous les modèles perturbés dont les valeurs singulières maximales sont au dessous de ces valeurs singulières maximale, donc, si on prend en compte cette spécification, cela revient à prendre en compte tous ces modèles perturbés [2].

#### 1.4.3. Conditions de robustesse sur les performances :

La condition de robustesse des performances d'un système bouclé est donnée par :

$$\sigma_{\max} [S(s)] \leq \sigma_{\max} [W_1(s)^{-1}] \quad (1.25)$$

- $S(s)$  : est la matrice de transfert de la sensibilité, elle joue un rôle très important dans la description des incertitudes sur le modèle, et leurs effets sur les performances de la boucle fermée.
- $W_1(s)$  : est la matrice de la spécification sur les performances, cette dernière est sous la forme (en mono variable) suivante :  $\frac{as+1}{as}$  où  $a$  : est la plus grande constante de temps du modèle de synthèse.

#### 1.4.4. Loop-shaping

L'approche par loop-shaping [MCF], [ALA] consiste à régler, avant le calcul du correcteur, les performances en modélisant la boucle ouverte, par l'ajout des fonctions de pondération, suivant les principes de l'automatique classique.

Les paragraphes 1.4.1.a, 1.4.1.b et 1.4.1.c nous ont permis de définir des contraintes sur les valeurs singulières de la fonction de transfert en boucle ouverte ou sur celles en boucle fermée ( $T_y$  et  $T_u$ ) ainsi que sur  $KS_y$ . Or la minimisation de l'erreur statique et le rejet des perturbations dans le système demandent de la matrice de transfert en boucle ouverte un gain élevé en basses fréquences (les entrées et les perturbations sont des signaux lentement variables dans le temps, donc de basses fréquences). Par contre l'atténuation des bruits dans la chaîne impose un gain élevé de la matrice de transfert en boucle ouverte en hautes fréquences (les bruits sont généralement des signaux de hautes fréquences).

Partant de ces principes, nous définissons les trois matrices de pondération suivantes :

- Une matrice  $W_1(s)$ , par exemple  $W_1(s) = w_1(s)I_p$ , où  $w_1(s)$  est une fonction de transfert scalaire du type passe-bas avec un gain élevé en basses fréquences ;
- Une matrice  $W_2(s)$ , par exemple  $W_2(s) = w_2(s)I_m$ , où  $w_2(s)$  est une fonction de transfert scalaire du type passe-haut avec un gain élevé en hautes fréquences, choisie en accord avec la norme des incertitudes additives.
- Une matrice  $W_3(s)$ , par exemple  $W_3(s) = w_3(s)I_m$ , où  $w_3(s)$  est une fonction de transfert scalaire du type passe-haut avec un gain élevé en hautes fréquences, choisie en accord avec la norme des incertitudes multiplicatives.

Les fonctions  $w_1(s)$ ,  $w_2(s)$  et  $w_3(s)$  sont dites fonctions de pondération. Dans cette étude on intéressera que par les deux pondérations  $w_1(s)$  et  $w_3(s)$ .

Les trois objectifs précédents se traduisent alors par les trois inégalités suivantes :

$$\bullet \quad \|W_1 S_y\|_{\infty} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(S_y(j\omega)) < \frac{1}{|w_1(j\omega)|} \quad (\text{I.26})$$

$$\bullet \quad \|W_2 K S_y\|_{\infty} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(K(j\omega)S_y(j\omega)) < \frac{1}{|w_2(j\omega)|} \quad (\text{I.27})$$

$$\bullet \quad \|W_3 T_y\|_\infty < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(T_y(j\omega)) < \frac{1}{|w_3(j\omega)|} \quad (\text{I.28})$$

Soit encore, comme le montre la Fig. I.6 :

$$\bullet \quad \underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) > |w_1(s)| > 1 \quad \text{Pour } \omega < \omega_b \quad (\text{I.29})$$

$$\bullet \quad \bar{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) < \frac{1}{|w_3(s)|} < 1 \quad \text{Pour } \omega < \omega_h \quad (\text{I.30})$$

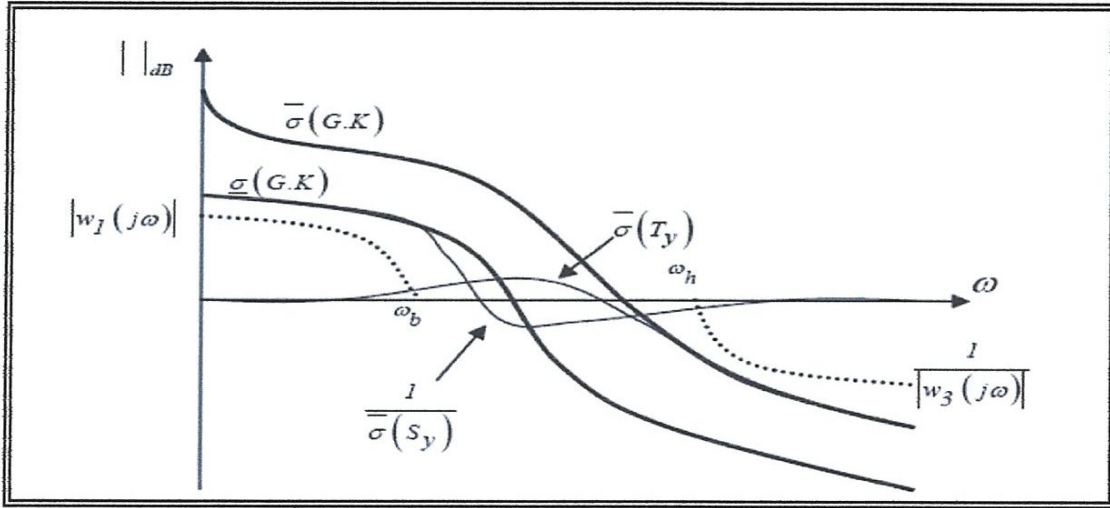


Fig. I.6. Contraintes de loop-shaping

Ces considérations illustrent le compromis inévitable, de l'automatique linéaire mono variable, précision/stabilité : toute augmentation des valeurs singulières améliore les performances en basses fréquences mais peut entraîner l'instabilité. Le meilleur compromis implique qu'au voisinage de la fréquence de coupure, les valeurs singulières  $\bar{\sigma}(GK)$  et  $\underline{\sigma}(GK)$  soient assez proches l'une de l'autre.

### 1.5. Commande par l'approche $H_\infty$

L'approche  $H_\infty$ , développée dans les deux dernières décennies, a montré son efficacité pour le calcul d'un correcteur robuste. En effet, la synthèse  $H_\infty$  permet de prendre en compte, a priori et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier de charges qui simplifieront ainsi la synthèse. Comme c'est une approche fréquentielle, les spécifications fréquentielles sont naturellement prises en considération, les spécifications temporelles classiques (temps de montée, rejet

des perturbations, atténuation du bruit,...) peuvent être facilement interprétées dans le domaine fréquentiel.

L'étude faite précédemment, sur la stabilité et les performances robustes, nous a donné les trois conditions suivantes :

$$\|W_1 S_y\| < 1 \quad \|W_2 K S_y\| < 1 \quad \|W_3 T_y\| < 1 \quad (I.31)$$

Qui peuvent être regroupées sous une seule condition de la forme :

$$\left\| \begin{array}{l} W_1 S_y \\ W_2 K S_y \\ W_3 T_y \end{array} \right\| < 1 \quad (I.32)$$

En pratique, nous avons vu que  $K S_y$  et  $T_y$  jouent des rôles semblables. La présence de ces deux fonctions dans le critère est donc superflue. On résoudra, par la suite, l'un des deux problèmes suivants :

$$\left\| \begin{array}{l} W_1 S_y \\ W_3 T_y \end{array} \right\| < 1 \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{array}{l} W_1 S_y \\ W_2 K S_y \end{array} \right\| < 1 \quad (I.33)$$

Le second problème s'avère en pratique plus judicieux. Ces deux problèmes sont désignés sous le nom de problème de sensibilité mixte. Comme l'indique la figure I.7

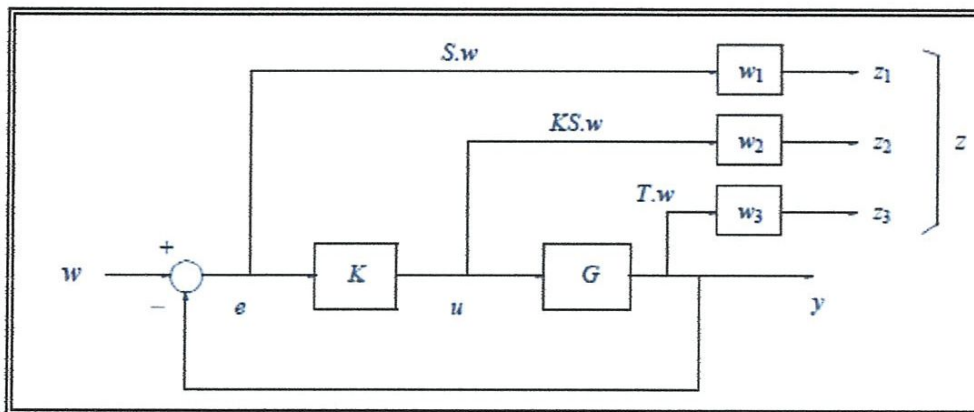


Fig. I.7. Problème de sensibilité mixte.

### 1.5.1. Solution du problème standard par l'approche $H_\infty$ basant sur les équations de Riccati

Considérons la représentation d'état généralisée introduite par les équations (I.4), (I.5) et sa matrice de transfert donnée par l'équation (I.6). Nous supposons, sans perte de généralités, dans cette représentation que la matrice  $D_{22}$  est nulle, c'est à dire qu'il n'existe pas une transmission direct de l'entrée vers la sortie ce qui est le cas dans les plupart des applications industrielles.

La solution du problème standard est basée sur la solution algébrique de l'équation de Riccati [GU], [DOY], [DOY1]. L'équation de Riccati étant donnée par :

$$XE + E^T X - XWX + Q = 0 \quad (I.34)$$

$$W = W^T \quad \text{Et} \quad Q = Q^T$$

La solution stabilisante  $X$ , si elle existe, sera une matrice symétrique et telle que  $(E - WX)$  est une matrice stable (ces valeurs propres ont une partie réelle strictement négative). Une telle solution sera notée :

$$X = Ric \begin{pmatrix} E & -W \\ -Q & -E^T \end{pmatrix} \quad (I.35)$$

Soit :

$$R_n = D_{1*}^T D_{1*} - \begin{pmatrix} \gamma^2 I_{m1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Et} \quad \tilde{R}_n = D_{*1} D_{*1}^T - \begin{pmatrix} \gamma^2 I_{p1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.36)$$

Ou :

$$D_{1*} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad D_{*1} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

Dans la mesure où  $R_n$  et  $\tilde{R}_n$  sont non singulières. Nous définissons les deux matrices hermitiennes  $H$  et  $J$  telles que :

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -C_1^T D_{1*} \end{bmatrix} R_n^{-1} \begin{bmatrix} D_{1*}^T C_1 & B^T \end{bmatrix} \quad (I.37)$$

$$J = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ -B_1 C_1^T & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T \\ -B_1 D_{*1}^T \end{bmatrix} \tilde{R}_n^{-1} \begin{bmatrix} D_{*1} B_1^T & C \end{bmatrix} \quad (I.38)$$

En prenant  $X = Ric(H)$  et  $Y = Ric(J)$ , nous pouvons définir les deux matrices suivantes :

$$F = -R_n^{-1} (D_{1*}^T C_1 + B^T X) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (I.39)$$

$$L = -(B_1 D_{*1}^T + Y C^T) \tilde{R}_n^{-1} = [L_1 \quad L_2] = [L_{11} \quad L_{12} \quad L_2] \quad (I.40)$$

Où :

$F_1, F_2, F_{11}$  et  $F_{12}$  Sont formées respectivement de  $m_1, m_2, m_1 - p_2$  et  $p_2$  lignes et  $L_1, L_2, L_{11}$  et  $L_{12}$  sont formées respectivement de  $p_1, p_2, p_1 - m_2$  et  $m_2$  colonnes.

Une solution existe si les conditions suivantes sont vérifiées :

1.  $(A, B_2)$  est stabilisable et  $(C_2, A)$  est détectable ;

2.  $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m_2} \end{bmatrix}$   $D_{21} = [0 \quad I_{p_2}]$  donc elles sont, respectivement, de rang  $m_2$  et  $p_2$  ;

3.  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2$  donc cette matrice est de rang complet et en plus  $P_{12}$  n'a pas de zéro sur l'axe des imaginaires ;

4.  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2$  donc cette matrice est de rang complet et en plus  $P_{21}$  n'a pas de zéro sur l'axe des imaginaires. En mettant  $D_{11} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix}$  avec  $D_{1122}$  est de dimension

$m_2 \times p_2$ , la solution sera donnée par le théorème suivant :

➤ **Théorème 1 :**

Supposons qu'un système  $P(s)$  vérifie les hypothèses 1 à 4 décrites plus haut.

a. Il existe un correcteur  $K(s)$  stabilisant le système tel que  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si :

$$1. \gamma > \max(\bar{\sigma}[D_{1111} \ D_{1112}], \bar{\sigma}[D_{1111} \ D_{1121}])$$

2. Il existe des solutions  $X \geq 0$  et  $Y \geq 0$  vérifiant les deux équations de Riccati (I.43) et (I.44) relatives aux matrices hamiltoniennes  $H$  et  $J$ , et tel que :  $\rho(XY) < \gamma^2$ .

Où :  $\rho(\cdot)$  désigne le rayon spectral.

b. Les conditions de la partie a sont satisfaites, alors les correcteurs stabilisant le système, et vérifiant  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ , sont donnés par :

$$K(s) = F_l(M, \phi) \tag{I.41}$$

Où :

$\|\phi(s)\|_\infty < \gamma$  et  $M(s)$  la réalisation suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{pmatrix} \tag{I.42}$$

Avec :

- $\hat{D}_{11} = D_{1121} D_{1111}^T (\gamma^2 I_{m_1-p_2} - D_{1111} D_{1111}^T)^{-1} D_{1112} - D_{1122}$
- $\hat{D}_{11} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$  et  $\hat{D}_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times p_2}$  sont deux matrices arbitraires vérifiant :
 
$$\hat{D}_{21} \hat{D}_{21}^T = I_{m_2} - D_{1121} (\gamma^2 I_{m_1-p_2} - D_{1111} D_{1111}^T)^{-1} D_{1121}^T$$

$$\hat{D}_{21}^T \hat{D}_{21} = I_{p_2} - D_{1121}^T (\gamma^2 I_{p_1-m_2} - D_{1111} D_{1111}^T)^{-1} D_{1112}$$
- $\hat{B}_2 = Z (B_2 + L_{12}) \hat{D}_{12}$                       et                       $\hat{B}_1 = -Z L_2 + Z (B_2 + L_{12}) \hat{D}_{11}$
- $\hat{C}_2 = -\hat{D}_{21} (C_2 + F_{12}) \hat{D}_{12}$                       et                       $\hat{C}_1 = -F_2 - \hat{D}_{11} (C_2 + F_{12})$
- $Z = (I_n - \gamma^{-2} Y X)^{-1}$
- $\hat{A} = A + BF - \hat{B}_1 (C_2 + F_{12})$



Le correcteur calculé pour  $\phi(s) = 0$  est appelé le correcteur central, il est largement utilisé sous la forme :

$$K(s) = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{I.43})$$

### 1.5.1.2. Solution du problème de sensibilité mixte $S/KS$

Le problème de sensibilité mixte  $S/KS$  est le plus étudié pour formuler un correcteur stabilisant le système. Pour simplifier, nous reprenons le système donné par la figure I.1a et la représentation associée. Donc pour un  $\gamma$  donné nous devons calculer un correcteur stabilisant le système tel que :

$$\begin{bmatrix} S_y \\ KS_y \end{bmatrix} < \gamma$$

La configuration standard du système est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} I_p & -G \\ 0 & I_m \\ I_p & -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & -B \\ \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \\ C & I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.44})$$

Il est évident, d'après a.1 du théorème 1 (§1.4.4), que  $\gamma$  doit être supérieur à 1, car la norme 2 de la matrice  $D_{11}$  du système  $P(s)$  est égale à 1. Dans ces conditions, les équations algébriques de Riccati s'écrivent :

$$A^T X + XA - XBB^T X + (1 - \gamma^{-2})^{-1} C^T C = 0 \quad (\text{I.45})$$

$$AY + YA^T - YC^T CY = 0$$

Le correcteur central sera donné par :

$$K_0 = \begin{bmatrix} A - BB^T X - (1 - \gamma^{-2})^{-1} ZYC^T C & ZYC^T \\ B^T X & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.46})$$

Avec :

$$Z = (I_n - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \quad (I.47)$$

Dans le cas général le correcteur sera donné par :  $K(s) = F_r(M, \phi)$  Où  $M(s)$  possède la réalisation suivante :

$$M = \begin{bmatrix} A - BB^T X & -(1 - \gamma^{-2})^{-1} ZYC^T C & ZYC^T & -ZB \\ & B^T X & 0 & I_m \\ & -(1 - \gamma^{-2})^{-1} C & I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (I.48)$$

Dans le cas ou, ce terme pourra être facilement isolé comme le montre la Fig. I.8. Au départ, nous calculons un correcteur en supposant  $D_{22}$ , puis nous déduisons le correcteur général d'après :

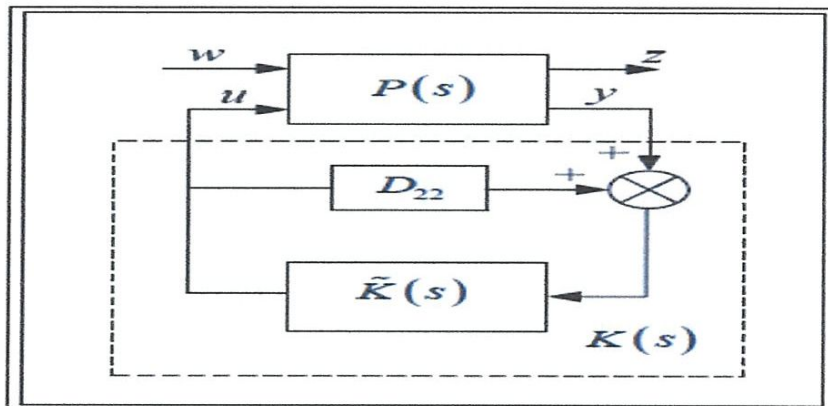


Fig. I.8. Cas où  $D_{22} = 0$

### 1.6. Simulation et discussion des résultats

Cette partie a pour but de valider l'approche de la synthèse d'un contrôleur robuste d'ordre non entier basant sur la résolution d'un problème d'optimisation de type Min-Max. La méthode de synthèse est effectuée pour un contrôleur  $H_\infty$ , ceci pour commander un système multi-variable incertain avec des retards purs importants. Noter ici, que ce système a été déjà commandé par un PID multi-variable d'ordre entier proposé par Q.G.Wang en 1999, ce contrôleur peut assurer une bonne dynamique de poursuite et réalise à la fois un bon comportement de découplage de la boucle fermée du système bouclé. L'inconvénient major de ce contrôleur synthétisé c'est que la robustesse du système n'est pas

garantie face aux incertitudes non structurées du modèle c'est pourquoi on a essayé de palier ces inconvénients par d'autres robustes.

### 1.6.1. Commande d'un système multi-variable incertain par un $H_\infty$

Le système à commander ici représente un procédé thermique multi-variable, ce dernier comporte deux entrées et deux sorties avec la matrice de transfert suivante:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-23.2s}}{-2680.4s - 22.4} & \frac{e^{-63.3s}}{-7.697.2s - 70.6} \\ \frac{e^{-15s}}{-7059.8s - 51.5} & \frac{e^{-14.0s}}{-1902.6s - 19.8} \end{bmatrix}$$

Les spécifications fréquentielles exigées par le cahier de charges sont résumées par les deux pondérations suivantes:

$$W_1(s) = \frac{2500(10s + 1)}{10^5 s + 1} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{Spécifications sur les performances du système bouclé.}$$

$$W_3(s) = \frac{100(100s + 1)}{s + 10^4} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{Spécifications sur la robustesse de stabilité du système bouclé.}$$

#### Analyse temporelle et fréquentielle du système étudié

On utilise maintenant les deux spécifications citées précédemment afin de calculer le transfert du contrôleur  $H_\infty$  puis, on utilise ce transfert avec celui du PID conventionnel qui est développé Wang afin de calculer les fonctions de sensibilité directe de sensibilité complémentaire, on obtient la figure suivante:

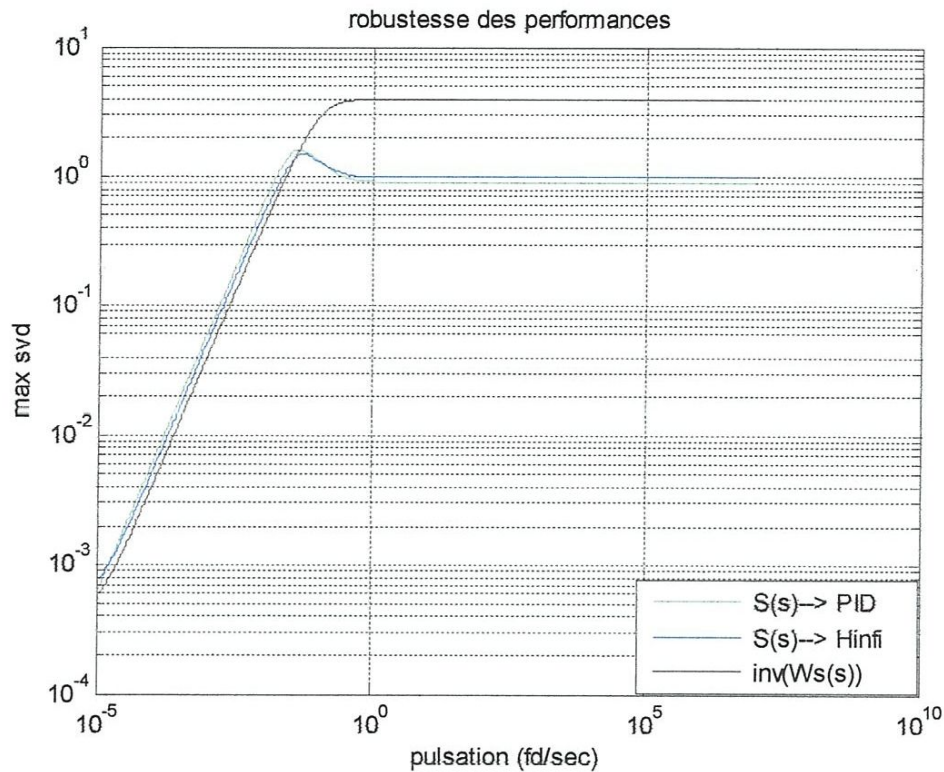
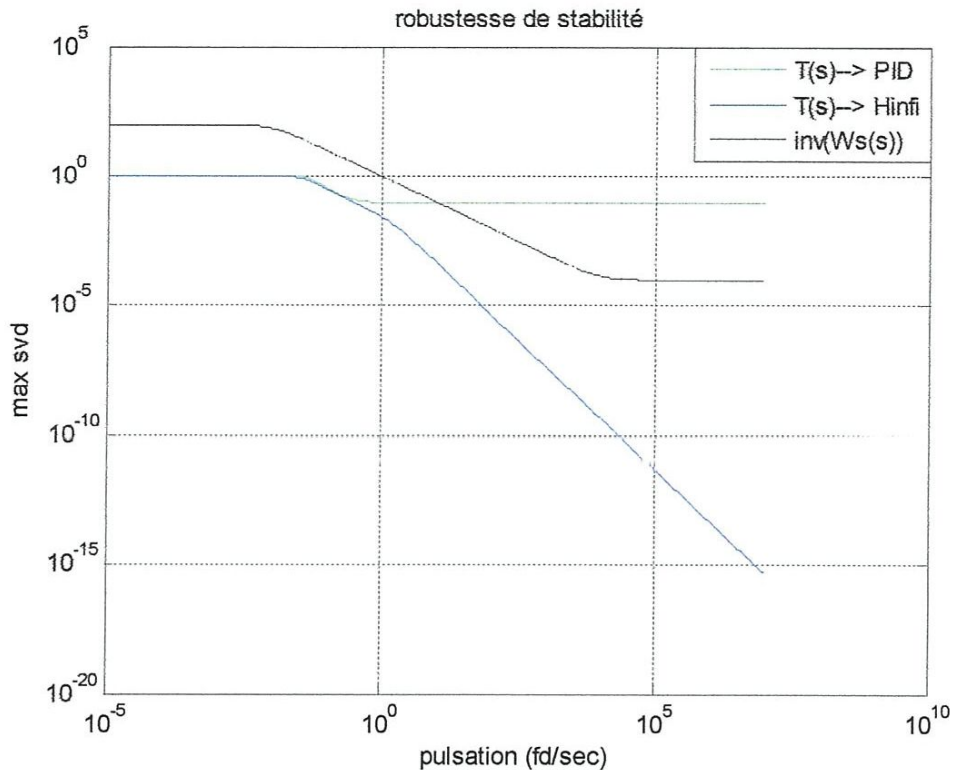


Fig. I.9. Sensibilités directes et condition de robustesse sur les performances.

La figure ci-dessous représente le test de robustesse des performances du système bouclé par les deux méthodes précédentes, d'où peut voir nettement que le contrôleur  $H_\infty$  présente une meilleure robustesse de performances celle-ci est traduite par la satisfaction de la condition exigée chose qui n'est pas réalisé avec le contrôleur PID qui représente par une grande sensibilité aux incertitudes paramétriques du modèle.

Maintenant, on calcul les valeurs singulières maximales de la fonction de sensibilité complémentaire de chaque méthode proposée, on obtient la figure suivante :

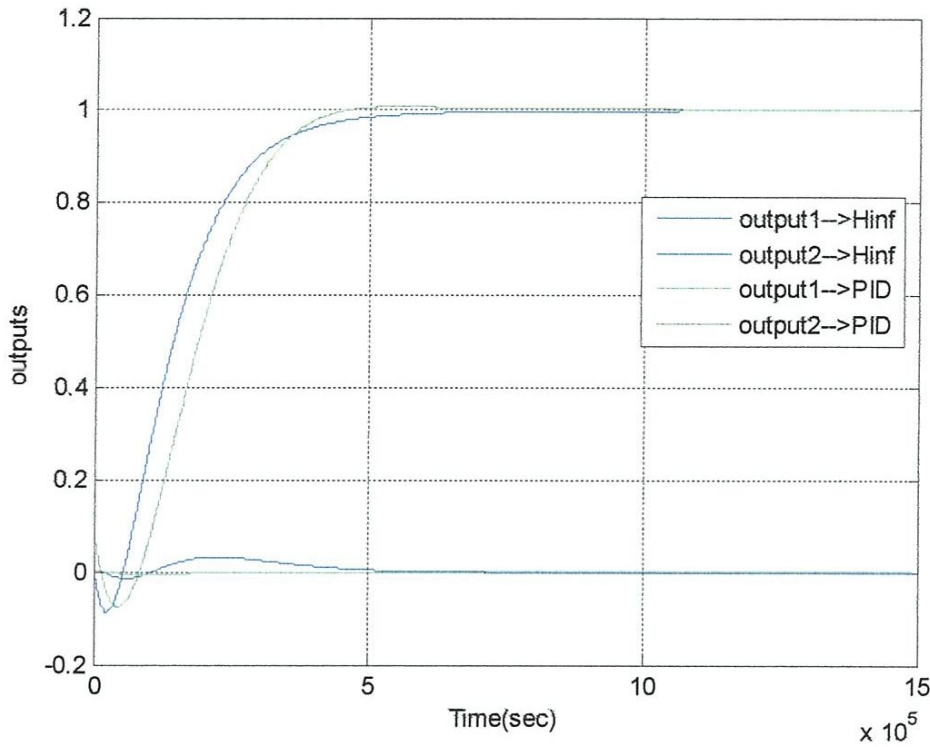


**Fig. I.10.** Sensibilité complémentaire et condition de robustesse sur la stabilité.

D'après cette figure, on peut constater que tous les lieux des valeurs singulières maximales de la fonction de sensibilité complémentaires (la boucle fermée) sont situés au-dessous de la condition de robustesse sur la stabilité, ceux-ci montrent la satisfaction de la condition en hautes fréquences. Maintenant, pour confirmer ces résultats dans le plan temporel, on utilise les entrées suivantes:

- Vecteur de consignes  $y_{ref} = \begin{pmatrix} ref_1 = 1 \\ ref_2 = 0 \end{pmatrix}$
- Entrées de perturbations à la sortie du procédé sous forme d'un échelon retardé d'amplitude égale à 0.35 pour chaque voie du système (Overshoot=35%).
- Entrées de bruits de mesures avec une moyenne nulle et une variance égale à 0.25 On obtient les sorties globales suivantes:

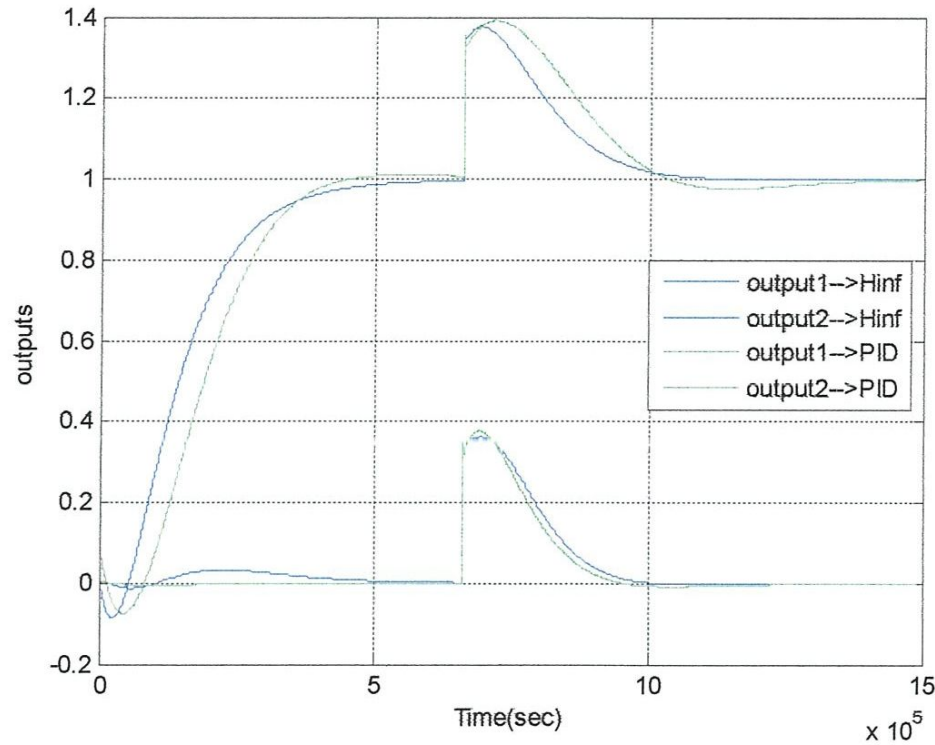
La Fig. I.11 représente la réponse indicielle du système en boucle fermée en absence des entrées de perturbations et de bruits de mesures.



**Fig. I.11. Dynamiques: poursuite du système bouclé.**

D'après la **Fig. I.11**, On peut voir que la méthode  $H_\infty$  citées précédemment assure un bon comportement de poursuite ainsi d'une bonne dynamique d'attraction des sorties, et comme résultat important tiré dans ce chapitre.

Maintenant, pour vérifier la robustesse du système bouclé dans le plan temporel au cas de présence des incertitudes paramétriques, on utilise des entrées de perturbation à la sortie du système à commander, ces perturbations sont données sous forme des échelons d'amplitude 0.35 injectées à partir de l'instant  $t=200$  millisecondes. L'objectif ici est de voir est ce que les contrôleurs synthétisés par les méthodes robustes citées précédemment sont capable de rejeter ces incertitudes ou non. On obtient la réponse représentée par la **Fig. I.12**.

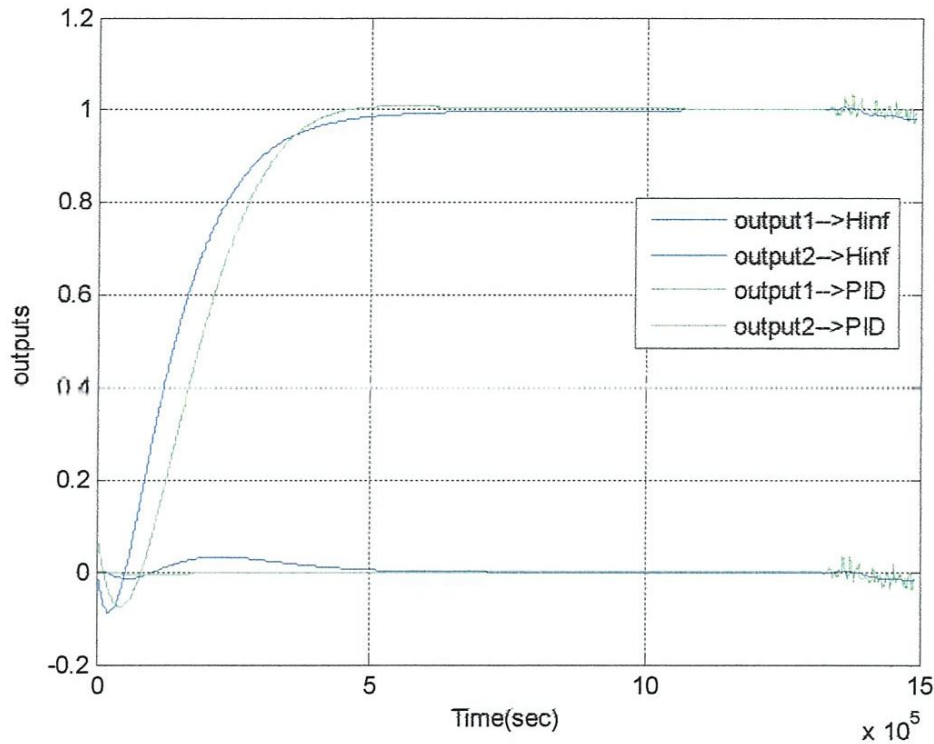


**Fig. I.12. Dynamiques: poursuite et rejection des perturbations du système bouclé.**

D'après la figure ci-dessus on peut constater les remarques suivantes :

La rejection des perturbations devient rapide avec une bonne dynamique de poursuite fournie par la méthode  $H_\infty$  par rapport PID .Ainsi le système bouclé par cette méthode de commande est bien robuste en performance en présence ces entrées de perturbation ce qui est confirme la satisfaction de la condition de robustesse des performances qui est présentée dans la **Fig. I.9**.

Maintenant, pour vérifier la robustesse du système bouclé dans le plan temporel au cas de présence des incertitudes paramétriques, on utilise des entrées de perturbation à la sortie du système à commander, ces perturbations sont données sous forme des échelons d'amplitude 0.25 injectées à partir de l'instant  $t=200$  millisecondes. L'objectif ici est de voir est ce que les contrôleurs synthétisés par les méthodes robustes citées précédemment sont capable de rejeter ces incertitudes ou non. On obtient la réponse représentée par la **Fig. I.13**.



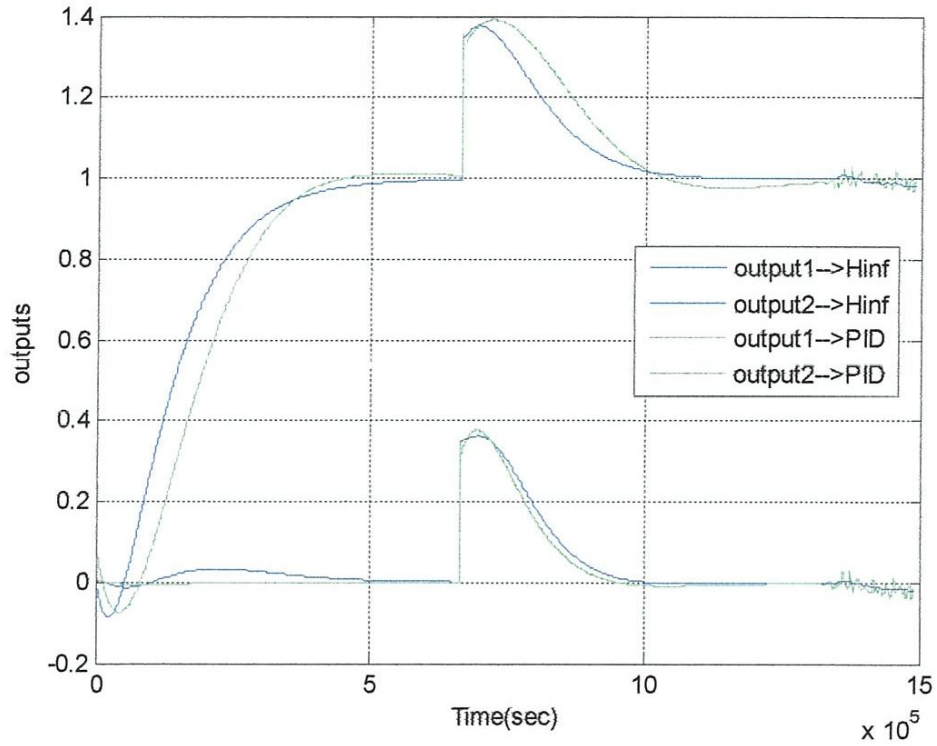
**Fig. I.13. Dynamiques: poursuite, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.**

D'après la figure ci-dessus on peut constater les remarques suivantes :

La minimisation de bruit devient rapide avec une bonne dynamique de poursuite fournie par la méthode  $H_\infty$  par rapport PID. Ainsi le système bouclé par cette méthode de commande est bien robuste en stabilité en présence ces entrées de perturbation ce qui est confirme la satisfaction de la condition de robustesse sur la stabilité qui est présentée dans la **Fig. I.10**.

Maintenant, Pour confirmer la satisfaction de la robustesse de stabilité dans le plan temporel, on utilise, plus les deux entrées citées précédemment, une troisième entrée qui représente les bruits de mesures affectant le système bouclé. Cette entrée est définie par un signal aléatoire présenté par une moyenne nulle et une variance égale à 0.25 appliquée à partir de l'instant  $t = 400$  millisecondes. L'objectif ici est de voir est ce que les contrôleurs précédents sont capable de minimiser l'effet de ces bruits, de rejeter également les entrées des perturbations et finalement de conserver une bonne dynamique de poursuite. On obtient la réponse représentée par la **Fig. I.14**.





**Fig. I.14.***Dynamiques: poursuite, rejection de perturbations, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.*

D'après cette figure, on peut confirmer, dans le plan temporel, les résultats obtenus dans le plan fréquentiel. L'entrée de perturbation est bien rejetée, l'effet des bruits de mesures est bien minimiser et la dynamique de poursuite est acceptable par la méthode  $H_{\infty}$ .

Maintenant, les commandes fournies par chaque méthode de commande sont présentées par les figures suivantes :

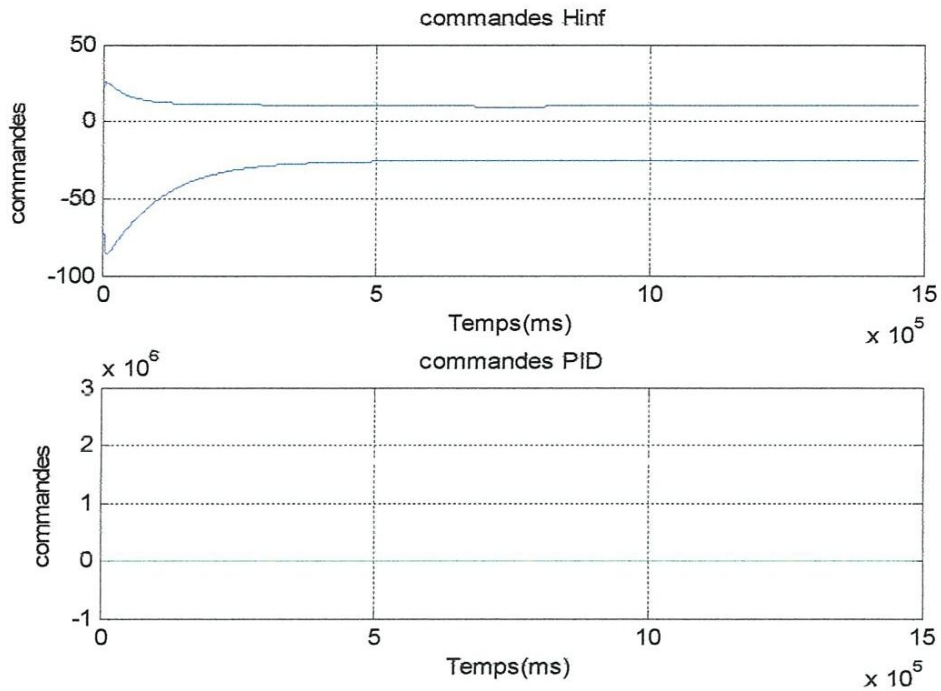


Fig. I.15.commandes: poursuite du système bouclé.

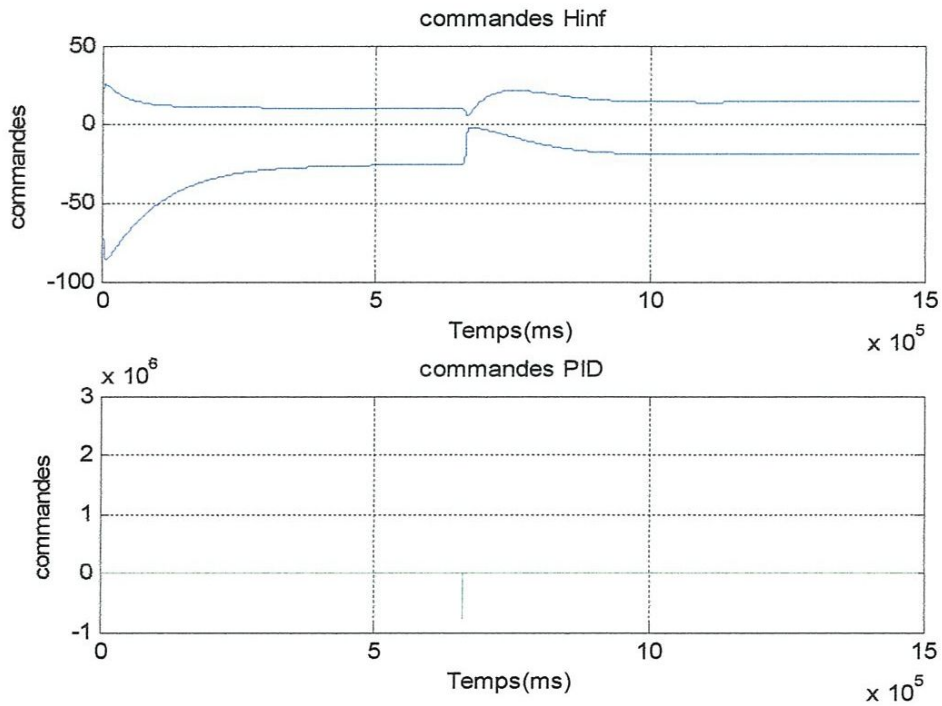


Fig. I.16.commandes: poursuite, rejection de perturbations du système bouclé.

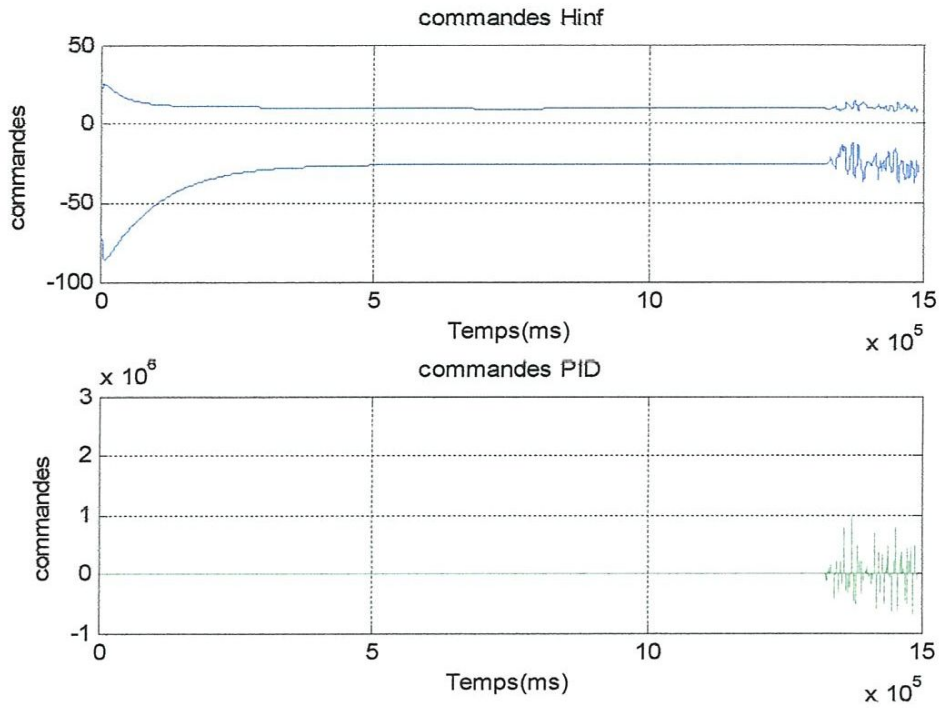
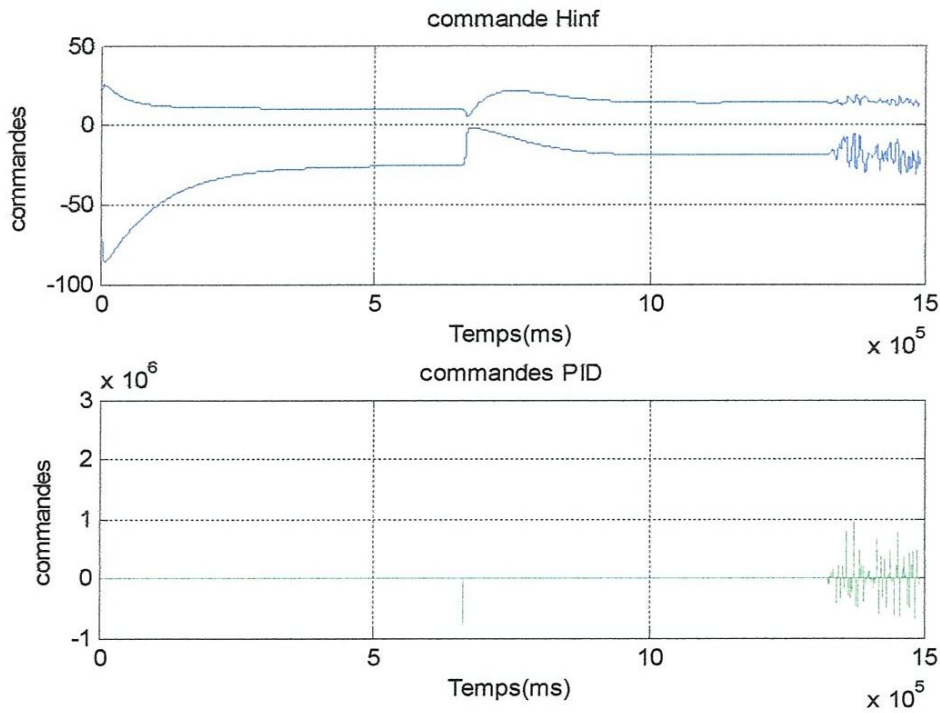


Fig. I.17. Dynamiques: poursuite minimisation des bruits de mesures du système bouclé.



I.14. Dynamiques: poursuite, rejection de perturbations, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.

### 1.7. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les détails et les notions de bases pour synthétiser des contrôleurs multi-variables et robustes par la méthode  $H_\infty$ . Ces contrôleurs sont utilisés pour commander des systèmes multi-variables incertains.

Les résultats de simulation montrent que le choix de la méthode  $H_\infty$  est très important pour contrôler ce genre des systèmes multi-variables, ce choix est justifier par l'obtention a des meilleures marges de robustesses de stabilité et des performances dans le plan fréquentiel, ces résultats sont ensuite confirmés, dans le plan temporel, par la bonne dynamique de poursuite et d'interaction des sorties du système à commander, de plus, la dynamique de rejection des perturbations est bien réalisée avec une minimisation des effets de bruits de mesures. La robustesse de cette méthode de commande est assurée non seulement pour le régime de fonctionnement nominal mais également pour les régimes perturbés du système.

Ces résultats sont très encourageants et font l'objectif de la partie suivante de ce travail pour chercher à d'autre méthode robuste plus efficace et qui assure des meilleures marges de robustesse que celles fournies par la méthode  $H_\infty$ .

**Chapitre II**  
**Commande Robuste Multi-variable**  
**d'ordre Non Entier**

## 2.1. Introduction

Dans le domaine de la commande, l'objectif ici est de déterminer le régulateur qui assure au procédé réglé, les performances fixées par le concepteur conformément à un compromis entre ces exigences et les limites physiques du procédé. La synthèse du régulateur ainsi adapté est effectuée à partir d'un état paramétrique donné du procédé (*état paramétrique nominal*).

Une modification de cet état, non accompagnée d'une reparamétrisation du régulateur (cas d'un régulateur fixe), se traduit par une désadaptation du régulateur au procédé. Il en résulte une modification des performances de la commande, traduisant ainsi sa sensibilité à un écart paramétrique du procédé.

D'une manière générale, cette absence de robustesse vis-à-vis des paramètres du procédé ne permet pas de garantir les spécifications sur les performances de la commande. En effet, l'état paramétrique du système pour lequel le régulateur est calculé, ne correspond que très rarement au véritable état paramétrique.

Ce problème constitue un souci constant de l'automaticien et fait l'objet de nombreuses recherches, d'autant que les écarts paramétriques sont très fréquents en raison de la diversité de leurs origines. Pour les procédés stationnaires, ce sont généralement les erreurs de modélisation et d'identification, la dispersion des caractéristiques des procédés de même type issus d'une fabrication artisanale ou industrielle, la modification des paramètres en fonction des conditions de fonctionnement, la dégradation du fonctionnement,... etc. Dans le cas des procédés non stationnaires vient s'ajouter à l'ensemble de ces causes, la variation temporelle des paramètres.

La robustesse est une notion très large qui traduit toujours la même idée, à savoir l'insensibilité ou par défaut la quasi-insensibilité. Aussi, dans un même domaine, il existe autant de types de robustesses que de grandeurs insensibles. Le domaine de la commande n'y échappe pas. Dans celui ci, il est fréquent de considérer la robustesse de la stabilité dont l'objectif est le maintien de la stabilité ou en d'autre terme, la garantie d'une valeur maximale du facteur de résonance en asservissement ou en régulation.

Dans l'approche fractionnaire qu'utilise la commande CRONE (*Commande Robuste d'Ordre Non Entier*) [OUS91], la robustesse est de nature plus sévère puisqu'il s'agit d'un degré de robustesse et des spécifications temporelles ou fréquentielles à satisfaire.

L'objectif étant alors le maintien ces dernières qui mesurent ce degré (*robustesse en performance*). Plus précisément, la robustesse dont il s'agit est celles du degré de stabilité de la commande vis-à-vis des incertitudes du procédé.

Toutefois pour certaines spécifications ces derniers présentent plusieurs inconvénients c'est pour quoi, on a cherché à une autre méthode plus robuste que les méthodes  $H_\infty$  avec ses différentes versions. Pour palier les inconvénients de ces méthodes, on doit synthétiser un contrôleur à partir des méthodes d'optimisations.

L'avancé de la recherche dans ces dernières années donne une naissance à plusieurs méthodes de synthèse utilisant l'optimisation parmi lesquelles on peut citer : les méthodes d'optimisation globales [2] ; méthodes utilisant la programmation non linéaires avec des matrices des contraintes d'inégalité et les méthodes des valeurs propres.

L'inconvénient major de ces dernières méthodes c'est que l'optimisation est manipulée avec un nombre des paramètres très élevé, faute de quoi (un nombre des paramètres plus de 20 pour un système de  $2 \times 2$  avec satisfaction de 3 spécifications) l'optimisation diverge vers des solutions non optimales.

Pour améliorer la convergence de l'optimisation de ces méthodes, on doit utiliser l'approche basée sur l'ordre fractionnaire, ce qui peut élaborer un contrôleur robuste avec un nombre de paramètres très réduit.

Cette approche de commande se base sur 2 étapes importantes ; la première consiste à résoudre un problème d'optimisation de type min-max afin de définir le transfert non entier du contrôleur, la seconde étape est pour approximer ce transfert afin de définir un équivalent d'ordre entier en se basant sur l'approche de l'identification fréquentielles.

Avant d'entamer dans l'approche utilisant l'ordre fractionnaire, nous nous précéderons, dans ce qui va suivre, les notions fondamentales sur les transferts d'ordre fractionnaire, ensuite, nous allons définir les différentes méthodes d'approximation d'un transfert fractionnaire afin de l'approximer à un autre transfert main avec un ordre entier, cette étape sera importante pour la phase d'implémentation de ce contrôleur dans la boucle de régulation.

Ce chapitre présente ainsi la méthode de synthèse basant sur la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte de type Min-Max, ce dernier terme vaut dire que la solution

optimale de celui-ci pourra minimiser le maximum possible des critères parmi lesquels construisant la fonction vectorielle de ce problème.

Enfin, ce chapitre se terminera par deux simulations afin de valider la commande proposée sur des systèmes multi-variables incertains, et les résultats obtenus seront très encourageants.

## 2.2. Operateurs d'intégration et de dérivation non entière

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions (en particulier pour les fonctions et les calculs considérés dans ce travail).

### 2.2.1. Définitions d'intégration fractionnaire

La généralisation de l'opérateur d'intégration d'une fonction  $f(t)$  à des ordres non entiers est donnée par [5] :

$${}_0D_t^{-n}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{n-1}d\tau, n \in \mathbb{R}^+ \quad (2.1)$$

Où  $\Gamma(n)$  représente la fonction gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{n-1}du, \text{ pour } n \in \mathbb{R}^+ \quad (2.2)$$

### 2.2.2. Définitions de dérivation fractionnaire

#### 2.2.2.1. Définition de Grünwald-Letnikov

Une des définitions les plus rencontrées de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée définition de Grünwald-Letnikov [MIL93], donnée par :

$${}_t D_t^\alpha y(t) = \frac{{}_t d_t^\alpha (y(t))}{dt^\alpha} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ Nh=t-t_0}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t-kh) \quad (2.3)$$



$$\text{Où } \binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, k \geq 1, t_0 < t \text{ et } \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.4)$$

Cette définition provient de la généralisation aux ordres fractionnaires de la formule donnant la dérivée d'ordre entier supérieur  $n$  d'une fonction continue  $y(t)$ , soit :

$$D^n y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n}{k} y(t - kh), n, N \in \mathbb{N} \quad (2.5)$$

Sous la condition que les dérivées  $y^{(k)}(t) (k = 1, 2, \dots, m+1)$  sont continues dans  $[t_0, t]$  avec

$m \leq \Re(\alpha) < m+1$ , la définition de Grünwald-Letnikov peut être aussi donnée par [POD99] :

$${}_t D_t^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^m \frac{y^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-\alpha} y^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

Où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma généralisée aux nombres fractionnaires, définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (2.7)$$

### 2.2.2.2. Définition de Riemann-Liouville

Une autre définition très utilisée de la dérivée d'ordre fractionnaire est appelée définition de Riemann-Liouville. Inspirée de la formule de Cauchy donnée par l'équation :

$${}_t D_t^{-n} y(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} y(x) dx \quad (2.8)$$

La définition complète de Riemann-Liouville de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de  $y(t)$  est donnée par:

$${}_t D_t^\alpha y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-x)^{-\alpha-1} y(x) dx, & \text{si } \Re(\alpha) < 0 \\ y(t), & \text{si } \Re(\alpha) = 0 \\ D^n [{}_t D_t^{\alpha-n} y(t)], n = \min \{k \in \mathbb{N} : k > \Re(\alpha)\}, & \text{si } \Re(\alpha) > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Où  $\alpha \in \mathbb{C}$ , est un entier positif et  $y$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, \infty]$ .

### 2.2.3 Transformée de Laplace

#### 2.2.3.1. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle

L'interprétation de l'équation (2.9) comme un produit de convolution permet le calcul de la transformée de Laplace de l'intégral d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle causale, soit [OLD74] :

$$\ell \{ {}_t D_t^{-\alpha} y(t) \} = \ell \left\{ \frac{t^{\alpha-1} u(t)}{\Gamma(\alpha)} * y(t) \right\} = \ell \left\{ \frac{t^{\alpha-1} u(t)}{\Gamma(\alpha)} \right\} \ell \{ y(t) \} = s^{-\alpha} Y(s) \quad (2.10)$$

Où  $u(t)$  est l'échelon unitaire,  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $Y(s) = \ell \{ y(t) \}$  et  $s = \sigma + j\omega$  désignant l'opérateur de Laplace.

Cette relation traduit un résultat remarquable en ce sens qu'elle généralise la formule bien connue de la transformée de Laplace de l'intégrale dans le cas entier.

#### 2.2.3.2. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle

La transformée de Laplace de la dérivée entière d'une fonction temporelle causale est donnée par la relation bien connue sous la forme:

$$\ell \{ D^n y(t) \} = s^{-\alpha} Y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k (I_0^{m-n} y(t))_{t=0^+} \quad (2.11)$$

Dans le cas où l'ordre  $n = \alpha$  est fractionnaire, si désigne le plus petit entier supérieur à  $\Re(\alpha) > 0$ , l'utilisation de la relation (2.11) conduit à [OLD74] :

$${}_0D_t^\alpha y(t) = D^m ({}_0I_t^{m-\alpha} y(t)) \quad \text{avec : } m-1 < \Re(\alpha) \leq m, m \in \mathbb{N} \quad (2.12)$$

Soit conformément à la relation (2.13) :

$$\ell \{ {}_0D_t^\alpha y(t) \} = L \{ D^m ({}_0I_t^{m-\alpha} y(t)) \} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k ({}_0I_t^{m-\alpha} y(t))_{t=0^+} \quad (2.13)$$

Ce qui conduit à l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle causale :

$$\ell \{ D^\alpha y(t) \} = s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k (I_0^{m-\alpha} y(t))_{t=0^+} \quad \text{avec } \begin{cases} \alpha \in \mathbb{C} \\ m = \text{Integer} [\Re(\alpha)] \\ \Re(\alpha) \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Cette relation traduit un résultat remarquable en ce sens qu'elle généralise la formule bien connue dans le cas entier. Ainsi, si les définitions temporelles des opérateurs d'ordre fractionnaire souffrent d'un formalisme mathématique quelque peu compliqué, leur expression dans le domaine opérationnel relève d'une simplicité remarquable dans le cas de l'étude des systèmes relaxés à l'instant  $t=0$ .

## 2.2.4. Représentation d'un système d'ordre fractionnaire

Si plusieurs formes de représentation sont à même de décrire un système entier (équation différentielle, équation récurrente, représentation d'état, fonction de transfert...), le comportement d'un système d'ordre fractionnaire est le plus souvent décrit par des équations différentielles ou des fonctions de transfert contenant des opérateurs d'ordre fractionnaire.

### 2.2.4.1. Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire

Comme dans le cas entier, une représentation d'état d'ordre fractionnaire comporte deux équations:

- Une équation d'état d'ordre fractionnaire dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre fractionnaire réel;

- Une équation d'observation identique à celle du cas entier.

Elle est ainsi définie par le système d'équation :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.15)$$

Dans lequel :

- $u$  : est le vecteur des entrées de dimension  $(n_e \times 1)$  ;
- $x$  : est le vecteur d'état d'ordre fractionnaire de dimension  $(n_x \times 1)$  ;
- $y$  : est le vecteur des sorties de dimension  $(n_y \times 1)$  ;
- $\alpha$  : est l'ordre de dérivation tel que  $0 < \alpha < 1$  ;
- $A, B, C$  et  $D$  : sont tous des matrices ou des vecteurs à éléments constants et de dimension appropriée.

Les systèmes d'ordre fractionnaire réel commensurable, permettent aussi une représentation dans l'espace d'état [POD99],

Soit :

$$\begin{cases} D^{(1/Q)}x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.16)$$

**Théorème 1** [OUS05] : La représentation d'état (2.16) correspond à la matrice de transfert :

$$y = \left( c \left( s^{1/Q} I - A \right)^{-1} B + D \right) u \quad (2.17)$$

Avec l'hypothèse que toutes les conditions initiales sont nulles.

**Preuve :**

À partir de la dernière hypothèse on peut écrire :

$$s^{1/Q} x = Ax + Bu \Leftrightarrow \left( s^{1/Q} I - A \right) x = Bu \Rightarrow x = \left( s^{1/Q} I - A \right)^{-1} Bu \quad (2.18)$$

En substituant  $x$  dans l'équation (2.9), on obtient (2.10).

### 2.3. Approximation du modèle fractionnaire par un autre rationnel continu

Cette approche consiste à calculer la sortie du système en utilisant un modèle rationnel continu équivalent, obtenu à partir de l'approximation du modèle d'ordre fractionnaire dans une bande de fréquence bien définie. Plusieurs méthodes d'approximation ont été développées. Le choix d'une méthode parmi les autres, dépend de la structure des systèmes que l'on cherche à simuler.

La méthode proposée par Carlson [CAR64], tirée de processus régulier de Newton, utilisé pour l'approximation itérative de  $\alpha^{\text{ème}}$  racine, peut être utilisée pour l'approximation itérative de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $s^\alpha$ . Cette méthode est basée sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\alpha} - (G(s)) = 0; H(s) = (G(s))^\alpha \quad (2.19)$$

En posant  $\alpha = 1/q$ ,  $m = q/2$ , à chaque itération à partir de la valeur initiale  $H_0(s) = 1$ , une fonction rationnelle d'approximation de  $(G(s))^\alpha = s^\alpha$  peut être donnée par :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (2.20)$$

Le modèle d'approximation est obtenu ensuite, en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle par son approximation rationnelle.

#### 2.3.1. Méthode de Matsuda

La méthode proposée par [MAT93] est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $G(s)^\alpha = s^\alpha$  par une fonction rationnelle  $\hat{G}(s)$  en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain. Le gain est calculé en utilisant  $M$  fréquences réparties dans une bande de fréquence  $[w_0, w_M]$  dans laquelle se fait l'approximation. Pour un ensemble de points sélectionnés  $w_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ , l'approximation prend la forme :

$$\hat{G}(s) = a_0 + \frac{(s-w_0)(s-w_1)(s-w_2)}{a_1+a_2+a_3+\dots} = \left[ a_0; \frac{s-w_{i-1}}{a_i} \right]_{i=1}^M \quad (2.21)$$

$$\text{Où } a_i = f_i(w_i), f_{i+1}(s) = \frac{s^{-w_i}}{f_i(s) - a_i} \text{ et } f_0(w) = |G(jw)|, \dots, i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (2.22)$$

Le modèle d'approximation est obtenu en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation.

### 2.3.2. Méthode d'Oustaloup

La méthode d'Oustaloup [OUS91] repose sur l'approximation en temps continu de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $G(s) = s^\alpha, \alpha \in \mathfrak{R}$ , par une fonction rationnelle en utilisant une distribution récursive de zéros et pôles d'ordre entier, répartis dans une bande de fréquence limitée.

Ainsi, l'approximation de l'opérateur  $s^\alpha$  dans une bande de fréquence st donnée par :

$$G(s) = s^\alpha \approx \hat{G}(s) = C_0 \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \right) \quad (2.23)$$

Avec :

$$\text{si } \alpha > 0 : \begin{cases} z_1 = w_b \sqrt{\eta} \\ p_i = z_i \lambda, & i = 1, 2, \dots, N \\ z_{i+1} = p_i \eta, & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ w_h = p_N \sqrt{\eta} \end{cases}, \text{ si } \alpha < 0 : \begin{cases} p_1 = w_b \sqrt{\eta} \\ z_i = p_i \lambda, & i = 1, 2, \dots, N \\ p_{i+1} = z_i \eta, & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ w_h = z_N \sqrt{\eta} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$N = \text{Integer} \left\{ \frac{\log \{w_h / w_b\}}{\log \{\alpha \eta\}} \right\} \quad (2.25)$$

$$\alpha = \left( \frac{w_h}{w_b} \right)^{\lambda/N}, \quad \eta = \left( \frac{w_h}{w_b} \right)^{(1-\lambda)/N} \quad (2.26)$$

Le modèle rationnel est obtenu ensuite en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire du modèle original par son approximation rationnelle. La sortie du modèle est donc la convolution du modèle rationnel obtenu avec le signal d'entrée.

### 2.3.3. Méthode basant sur l'approche de l'identification fréquentielle

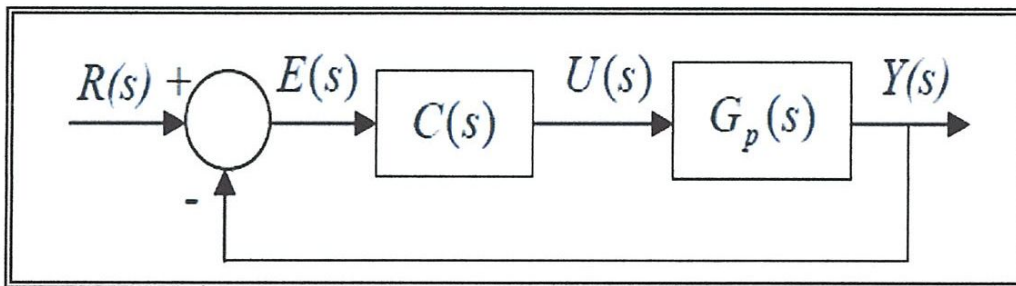
L'approche utilisée ici est celle utilisant la fonction de Matlab '*fitfrd.m*'. L'idée de cette méthode est basée sur la détermination de la réponse fréquentielle du transfert fractionnel dans une bande de fréquences prédéfinie à l'avance par l'utilisateur. Le vecteur des réponses fréquentielles ainsi le vecteur des fréquences correspondantes sont ensuite utilisés comme des entrées de la fonction '*frd.m*' du Matlab afin de construire le filtre approximant en module et en phase le transfert d'ordre non entier. Cette dernière nécessite à l'avance de fixer, par l'utilisateur, de l'ordre optimale du transfert entier pour faire cette approximation. Finalement l'application de la fonction '*fitfrd.m*' du Matlab nous a permis de définir la forme d'état de ce filtre. L'ordre de ce dernier sera accepté seulement si son module et sa phase sont identiques à ceux qui correspondent le transfert d'ordre non entier. Sinon on doit changer le choix de l'ordre du filtre et refaire le calcul.

Cette approche proposée présente l'avantage de sa simplicité et flexibilité par rapport aux autres approches citées précédemment c'est pourquoi notre étude sera basée pour la phase d'approximation sur cette dernière approche.

### 2.4. Synthèse d'un PID fractionnaire par l'optimisation sous contraintes

#### 2.4.1. Conception d'une commande PID d'ordre fractionnaire

Soit le système de commande à retour unitaire de la figure (2.1).



*Fig.2.1. Système de commande à retour unitaire*

Le transfert de la boucle ouverte est donné par :

$$G_{BO}(s) = G(s) C(s) \tag{2.27}$$

Où  $C(s)$  représente le transfert du contrôleur à élaborer

La commande *PID* est la technique la plus utilisée actuellement dans la commande des processus industriels. Sa fonction de transfert est bien connue sous la forme :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + \tau s} \quad (2.28)$$

Où  $E(s)$  représente l'erreur de poursuite tandis que  $U(s)$  représente la commande nécessaire pour cette poursuite.

$\frac{1}{1 + \tau s}$  Représente un filtre qui permet de minimiser l'effet de bruit qui est causé par l'action dérivée du contrôleur. Nous verrons dans ce qui va suivre que l'action dérivée fractionnaire ne nécessite pas ce genre de filtres car elle peut l'estimer par un transfert d'ordre infini

Podlubny [POD99b] avait proposé une généralisation de cette commande, appelée commande  $PI^\alpha D^\beta$  d'ordre fractionnaire, sa fonction de transfert est donnée sous la forme:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (2.29)$$

L'équation différentielle correspondant à cette fonction de transfert, est donnée par :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i D^{-\alpha} e(t) + K_d D^\beta e(t) \quad (2.30)$$

Sachant que  $0 < \lambda < 1$ , et  $0 < \mu < 1$ .

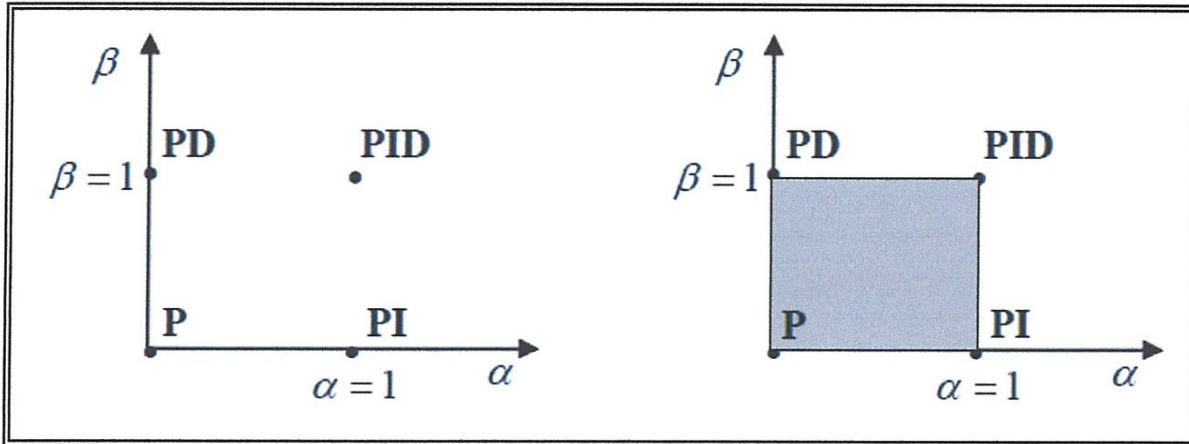
Avec :

$K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  : représentent respectivement les actions : proportionnelle, intégrale et dérivée du contrôleur.

$\lambda$  et  $\mu$  : représentent l'ordre fractal des actions intégrale et dérivée du contrôleur fractionnaire respectivement.



Comme il est montré sur la figure (2.2), le  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire généralisé le  $PID$  conventionnel et l'étend du point au plan. Cette extension donne plus de flexibilité dans la conception des commandes  $PID$ .



(a)  $PID$  conventionnel

(b)  $PI^\alpha D^\beta$  fractionnaire

**Fig.2.2. Commande  $PID$  à partir d'un point (a) jusqu'au plan (b)**

Plusieurs méthodes ont été proposées pour la conception de ce type de commande [POD99b] ; [JUN05] ; [PET98]. Motivé par les performances caractéristiques remarquables en qualité de robustesse de la boucle idéale de Bode, nous proposons dans ce paragraphe la conception d'une commande  $PI^\alpha D^\beta$  qui assure le même comportement fréquentielles et temporelles de celui-ci en boucle fermée.

#### 2.4.2. Détermination des paramètres d'un $PID$ fractionnaire

La détermination des paramètres d'un contrôleur fractionnaire nécessite une optimisation d'un critère de performance, ce dernier peut être donné sous forme d'un ensemble des fonctions non linéaires et non lisses. Suivant les spécifications à satisfaire, le critère à minimiser peut être présenté avec des contraintes de bornes, d'égalités et d'inégalités non linéaires.

### 2.4.3. Formulation de problème d'optimisation

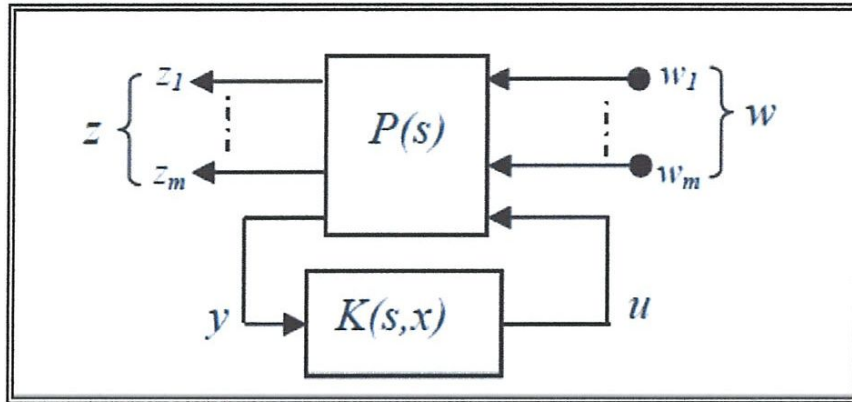


Fig.2.3. Blocks diagramme de la contre réaction.

Considérons la forme de la contre réaction de la figure (2.3), dans laquelle  $P(s)$  représente la matrice du système augmenté, cette dernière représente le transfert entre les entrées exogènes  $w$ ,  $u$ , ainsi les sorties exogènes  $z$ ,  $y$  avec les relations suivantes:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \times \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad u = K(s, x) \times y \quad (2.31)$$

Où :

- $K(s, x) \in C^{m \times m}$  : le contrôleur fractionnaire à élaborer, Il dépend de l'opérateur de Laplace ( $s$ ) et les paramètres  $x$  ( $x \in \mathfrak{R}^{q \times l}$ ) qui doivent calculer par la suite par l'optimisation non linéaire.
- Le système en boucle fermé possède ( $m$ ) vecteurs d'entrées exogènes qui sont données par  $w_1 \in \mathfrak{R}^{n_{w1}}, w_2 \in \mathfrak{R}^{n_{w2}}, \dots, w_m \in \mathfrak{R}^{n_{wm}}$ , il contient de plus ( $m$ ) vecteurs de sorties exogènes suivantes :  $z_1 \in \mathfrak{R}^{n_{z1}}, z_2 \in \mathfrak{R}^{n_{z2}}, \dots, z_m \in \mathfrak{R}^{n_{zm}}$ .
- $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$  : représente tous les signaux exogènes tels que les entrées de références, les perturbations et les bruits de mesures.
- $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$  : représente le vecteur de sortie globale du système bouclé.

### 2.4.4. Critère d'optimisation à minimiser

L'objectif de la commande robuste d'ordre non entier est de minimiser le critère (2.32), qui permet de synthétiser un contrôleur robuste, ce dernier doit réaliser un compromis de

robustesse de stabilité et des performances non seulement pour le mode de fonctionnement nominal mais également dans le cas de présence des incertitudes affectant le modèle de synthèse. Ce critère est donc défini comme suit :

$$\text{Minimiser : } J_{\infty}(x) = \|J_{w \rightarrow z}(s, x)\|_{\infty}, x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \quad (2.32)$$

Avec les contraintes de bornes :  $x_{min} \leq x_j \leq x_{max}$

Où :

- $J_{\infty}(x) : \mathfrak{R}^{q \times l} \rightarrow \mathfrak{R}^{p \times l}$  : représente le critère à minimiser (la fonction de coût). Nous verrons dans la suite de ce travail que (2.32) représente un ensemble des critères non lisses.
- $\Omega = [x_{min}, x_{max}]$  : l'espace de recherche initial de  $x \in \mathfrak{R}^{q \times l}$  qui est supposée contenir les paramètres optimaux du contrôleur fractionnaire, notés ici par  $x_j^*$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ). Ces paramètres doivent être initialisés, à l'avance, par l'utilisateur.
- $x_{min}$  et  $x_{max}$  : représentent respectivement, les bornes supérieures et inférieures limitant les paramètres  $x_j$  du contrôleur fractionnaire à élaborer.

#### 2.4.5. Spécifications fréquentielles à satisfaire

La synthèse du contrôleur est basée sur l'optimisation considéré est énoncé comme suit :

Soit la fonction de coût (2.32), on commence par l'initialisation de vecteur de paramètres  $x_0 \in \Omega$  dans le but de trouver la solution optimale  $x^*$  qui minimise le critère de performance  $\|J_{w \rightarrow z}(s, x)\|_{\infty}$ . A partir de cette solution, on détermine le transfert du contrôleur robuste afin de satisfaire des spécifications qui sont formulées sous forme des conditions comme suites:

**C1** : Obtenir d'une bonne dynamique de rejection des perturbations en basses fréquences ;

**C2** : Assurer d'un bon suivi de référence dans le régime stationnaire pour ( $t \rightarrow +\infty$ ) ;

**C3** : Minimiser l'effet de bruit de mesures du système bouclé en hautes fréquences;

**C4** : Elaboration d'un contrôleur robuste avec un minimum des paramètres qui construise son transfert;

**C5** : Assurer la stabilité interne quelque que soit les erreurs de modélisation affectant le modèle de synthèse.

### 2.5. Synthèse d'un contrôleur fractionnaire par l'utilisation de l'optimisation non lisse

Dans la commande classique basant sur l'optimisation non lisse, le transfert entier du contrôleur à synthétiser est fixé, à l'avance, par la structure (2.33), cette dernière représente un nombre fini de gains, zéros et pôles comme suit :

$$K_{ij}(s, x) = \frac{\Gamma_{(i,j)} \prod_{r=1}^{n_{ij}} (s - x_{N(i,j)})}{\prod_{r=1}^{m_{ij}} (s - x_{D(i,j)})}, m_{ij} \leq n_{ij} \quad (2.33)$$

Où  $x$  est le vecteur des paramètres défini par:

$$x = \begin{bmatrix} \text{vec}(\Gamma_{(i,j)}) \\ \text{vec}(x_{N(i,j)}) \\ \text{vec}(x_{D(i,j)}) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Pratiquement, L'application de l'optimisation non lisse utilisant la structure entière du contrôleur pour satisfaire les spécifications citées précédemment présente plusieurs anomalies dues de la taille importante de l'espace de recherche telles que le temps de calcul de la commande, convergence lente vers une solution optimale, obtention des minima locaux, ...etc. Ces anomalies sont causées par le nombre des paramètres du contrôleur ainsi par le nombre des spécifications à satisfaire. Il faut noter ici que l'efficacité de l'optimisation dépende d'un nombre raisonnable des paramètres du contrôleur ce qui peut réduire, d'un coté, la taille de l'espace de recherche des solutions, et d'un autre coté, d'assurer une convergence rapide de celles-ci. Pour résoudre ce problème, nous allons proposer une structure d'ordre non entier pour le contrôleur à synthétiser, cette dernière contient les trois actions possibles d'un contrôleur PID et l'ordre fractal est met sur les actions intégrale et dérivée de ce contrôleur. La solution optimale obtenue par l'optimisation non lisse peut décider quelle est la forme particulière qui peut prendre ce contrôleur robuste telle que  $PI^\alpha$ ,  $PD^\beta$  ou bien  $PI^\alpha D^\beta$ .

Le contrôleur fractionnaire obtenu par cette optimisation est ensuite approximé par un autre mais cette fois avec un ordre entier pour la phase de l'implémentation, le transfert de ce contrôleur est obtenu par utilisation de l'approche de l'identification fréquentielle du Matlab, en assurant, par ce dernier, le même comportement du contrôleur fractionnaire dans une large plage fréquentielle.

### 2.5.1. Proposition d'une structure fractale basée sur les gains principaux

Le principe de la synthèse d'un contrôleur d'ordre non entier basant sur la résolution d'un problème d'optimisation non lisse est articulé sur les deux étapes suivantes:

- **1<sup>ère</sup> étape** : détermination des paramètres de décisions du contrôleur robuste, on utilise la structure basant sur l'utilisation de l'ordre fractal sur l'opérateur de Laplace de la matrice de transfert du contrôleur à synthétiser.

**2<sup>ème</sup> étape** : l'utilisant de l'identification fréquentielles afin de calculer un filtre approximant le transfert fractal en module et en phase.

Dans la 1<sup>ère</sup> étape, le contrôleur d'ordre fractionnaire est supposé par la structure suivante:

$$K(s, x) = \begin{bmatrix} K_{p_{11}} & \dots & K_{p_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{p_{m1}} & \dots & K_{p_{mm}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{i_{11}}/s^{\lambda_{11}} & \dots & K_{i_{1m}}/s^{\lambda_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{i_{m1}}/s^{\lambda_{m1}} & \dots & K_{i_{mm}}/s^{\lambda_{mm}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d_{11}}s^{\mu_{11}} & \dots & K_{d_{1m}}s^{\mu_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{d_{m1}}s^{\mu_{m1}} & \dots & K_{d_{mm}}s^{\mu_{mm}} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

### 2.5.2. Algorithme de résolution d'un problème d'optimisation

La méthode proposée, doit être établie par les étapes suivantes :

Donner la matrice de transfert du système nominal à commander avec:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s)e^{-\theta_{11}s} & \dots & G_{1m}(s)e^{-\theta_{1m}s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s)e^{-\theta_{m1}s} & \dots & G_{mm}(s)e^{-\theta_{mm}s} \end{bmatrix}.$$

Définir la structure du contrôleur à synthétiser avec:

$$K(s, x) = \begin{bmatrix} K_{p_{11}} & \cdots & K_{p_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{p_{m1}} & \cdots & K_{p_{mm}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{i_{11}}/s^{\lambda_{11}} & \cdots & K_{i_{1m}}/s^{\lambda_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{i_{m1}}/s^{\lambda_{m1}} & \cdots & K_{i_{mm}}/s^{\lambda_{mm}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d_{11}}s^{\mu_{11}} & \cdots & K_{d_{1m}}s^{\mu_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{d_{m1}}s^{\mu_{m1}} & \cdots & K_{d_{mm}}s^{\mu_{mm}} \end{bmatrix}$$

**1<sup>ère</sup> étape**

- ✓ **Etape1.1.** Choisir un nombre suffisant de fréquence  $\psi \in \mathbb{N}$  pour discrétiser l'espace de fréquence qui est limité par le choix de la borne supérieure et inférieure suivante  $[w_{min}, w_{max}]$ . On obtient les fréquences.  $w_1, w_2, \dots, w_\psi$  avec  $w_1 = w_{min}$  et

$$w_\psi = w_{max};$$

- ✓ **Etape1.2.** Initialiser un pointeur noté ici par  $p_1 \leftarrow 1$  et aller à l'étape suivante ;
- ✓ **Etape1.3.** Calculer les matrices suivantes  $G(jw_{p_1}), K(jw_{p_1}, x)$  et  $J_{\infty, p_1}(x) = [J_{w \rightarrow z}(jw_{p_1}, x)]$  et faire l'examen suivant;
- ✓ **Etape1.4.** Arrêter le processus de calcul si le pointeur ci-dessus atteint le nombre total des fréquences avec  $p_1 = \psi$ . Sinon, incrémenté ce pointeur avec  $p_1 \leftarrow p_1 + 1$  et aller à l'étape précédente.

L'application de la 1<sup>ère</sup> étape, citée précédemment, offre ( $\psi$ ) critères à optimiser, ces derniers sont dépendent uniquement par le vecteur des variables de décisions  $x \in \mathbb{R}^{q \times 1}$  qui représentent les paramètres du contrôleur robuste d'ordre non entier tels que les variables suivantes  $K_1, (\beta_{11} \cdots \beta_{ij}), (\mu_{11} \cdots \mu_{ij}),$  et  $(\lambda_{11} \cdots \lambda_{ij})$ .

La solution optimale  $x_{opt}$  peut être établit par la minimisation du problème d'optimisation de type Min-Max défini par l'équation suivante:

$$\min_{x \in \Omega} J_\infty(x) = \min_{x \in \Omega} [J_{\infty,1}(x) \ J_{\infty,2}(x) \ \dots \ J_{\infty,\psi}(x)]^T = \min_{x \in D} \left\{ \max_{1 \leq p_1 \leq \psi} \left( \max_{w \in [w_{min}, w_{max}]} [J_{w \rightarrow z}(jw, x)] \right) \right\} \quad (2.41)$$

La solution de ce problème est achevée par l'utilisation de la fonction 'Fminimax' qui est disponible dans la bibliothèque Matlab/Optimization du logiciel de Matlab. Il faut noter ici

que le principe de cette fonction est basé essentiellement sur l'algorithme SQP avec la méthode BFGS (plus de détails sont disponibles dans le Help/Matlab).

Le vecteur de la solution optimale  $x_{opt}$  du problème d'optimisation, cité précédemment, peut être obtenu suivant les démarches de l'étape suivante.

## 2<sup>ème</sup> étape

- ✓ **Etape2.1.** Déterminer la borne supérieure et inférieure des vecteurs  $LB$ ,  $UB$  à partir de  $x_{min}$  et  $x_{max}$  comme suite:

$$x_j : LB = [x_{min}]_{j=1,2,\dots,q}, UB = [x_{max}]_{j=1,2,\dots,q}, \text{ où } LB \leq x \leq UB.$$

- ✓ **Etape2.2.** Initialiser le vecteur des paramètres  $x_0$  satisfaisant la condition:  $LB \leq x_0 \leq UB$ .
- ✓ **Etape2.3.** Initialiser un pointeur  $p_2 \leftarrow 0$  et aller à l'étape suivante ;
- ✓ **Etape2.4.** Mettre  $x \leftarrow x_{p_2}$  et calculer les critères  $J_\infty(x_{p_2})$  suivant la relation ci-dessous. A partir de ces derniers, tirer le critère mérite à optimiser, noté ici par  $J_{\infty,max}(x_{p_2})$  via la relation suivante:

$$J_\infty(x_{p_2}) = \bar{\sigma} \left[ J_{w \rightarrow z}(j\omega_{p_1}, x_{p_2}) \right]_{p_1=1,\dots,\psi} \text{ et } J_{\infty,max}(x_{p_2}) = \max [J_\infty(x_{p_2})]$$

- ✓ **Etape2.5.** Mettre à jour  $x_{p_2}$  par  $x_{p_2+l}$  pour produire une minimisation suffisante du critère  $J_{\infty,max}(x_{p_2})$  ;
- ✓ **Etape2.6.** Incrémenter le pointeur  $p_2 \leftarrow p_2 + 1$  et refaire l'étape précédente **Etape2.4** pour un autre critère mérite. Si tous les critères cités précédemment sont diminués, alors on accepte la solution désirée qui est définie par le vecteur  $x^*$  avec  $x^* \leftarrow x_{p_2}$ .

### 2.5.3. Optimisation de type Min-Max

#### 2.5.3.1. Structure générale d'un problème d'optimisation de type Min-Max

Un problème d'optimisation multicritères est composé d'un vecteur de fonctions objectives évaluées à minimiser et de certaines contraintes d'égalité ou d'inégalité, ce dernier est usuellement formulé comme un problème de minimisation, et s'écrit sous la forme :

$$x \in S \subset \mathfrak{R}^n : \begin{cases} \min (f_1(x), \dots, f_l(x)) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \\ h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p, \\ x_l \leq x \leq x_u \end{cases} \quad (2.42)$$

$f$ : est la fonction multiparamétrique à minimiser, appelée fonction coût ou fonction objectif ;

$x$  : représente le vecteur des variables d'optimisation ;

$g_i$  : sont les contraintes d'inégalité ;

$h_j$  : les contraintes d'égalité ;

$S$ : est l'espace des variables (appelé aussi espace de recherche).  $S$  indique quel type de variables sont considérées : réelles, entières, mixtes (réelles et entières dans un même problème), discrètes, continues, bornées, etc.

Un point  $x_A$  est appelé un point admissible si  $x_A \in S$  et si les contraintes d'optimisation sont satisfaites:  $g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$ , et  $h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p$ , . La solution de (2.36) est l'ensemble des optima  $\{x^*\}$ .

$x^*$  : est un minimum global de  $f$  si et seulement si  $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S$ , et  $x^*$  est un minimum local de  $f$  si et seulement si  $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S / \|x - x^*\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0$  .

#### 2.5.3.2. Résoudre d'un problème d'optimisation par la fonction *Fminimax*

L'application de cette fonction nécessite le formalisme standard suivant :

$$x = F \min i \max (F, X_0, A_{eq}, B_{eq}, A_{ineq}, B_{ineq}, L_B, U_B, Nonlin, options) \quad (2.43)$$

Le critère à minimiser est donc définit par la relation suivante:

$$\min_x F(X) \quad (2.44)$$



$$\text{Sujet à : } \begin{cases} A_{eq} \cdot X = B_{eq} \\ A_{ineq} \cdot X \leq B_{ineq} \\ L_B \leq X \leq U_B \\ C_{non\_lin\_eq}(X) = 0 \\ C_{non\_lin\_ineq}(X) \leq 0 \end{cases}$$

Les données de cette fonction sont définies comme suites:

- ✓ *Nonlin* : représente toutes les contraintes non linéaires d'égalités et d'inégalités, cette fonction est présentée sous la forme :

$$\text{Nonlin} = [C_{non\_lin\_ineq} \quad C_{non\_lin\_eq}]$$

- ✓  $A_{eq}$  C'est une matrice réelle qui représente tous les coefficients du vecteur des variables de décision, et  $B_{eq}$  le vecteur correspondant. L'ensemble cité précédemment englobe toutes les contraintes linéaires d'égalités
- ✓  $A_{ineq}$  C'est la matrice définissant toutes les contraintes linéaires d'inégalités, et  $B_{ineq}$  le vecteur correspondant.
- ✓  $L_B, U_B$  sont respectivement les limites supérieures et inférieures limitant le vecteur  $X$ . Cet ensemble englobe toutes les contraintes de bornes ou de saturations.
- ✓  $X_0$  est une initialisation de l'algorithme d'optimisation qui doit choisir avec précaution. Une mauvaise initialisation de ce dernier peut conduire à une divergence de la solution de cet algorithme.

## 2.6. Simulation et discussion des résultats

Cette partie a pour but de valider l'approche de la synthèse d'un contrôleur robuste d'ordre non entier basant sur la résolution d'un problème d'optimisation de type Min-Max. La méthode de synthèse est effectuée pour un contrôleur qui prend la structure d'un PID fractionnaire, ceci pour commander un système multi-variable incertain avec des retards purs importants.

### 2.6.1. Commande d'un système multi-variable incertain par un PID fractionnaire

Le système à commander ici représente un procédé thermique multi-variable, ce dernier comporte deux entrées et deux sorties avec la matrice de transfert suivante:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-23.2s}}{-2680.4s - 22.4} & \frac{e^{-63.3s}}{-7.697.2s - 70.6} \\ \frac{e^{-15s}}{-7059.8s - 51.5} & \frac{e^{-14.0s}}{-1902.6s - 19.8} \end{bmatrix}$$

Les spécifications fréquentielles exigées par le cahier de charges sont résumées par les deux pondérations suivantes:

$$W_1(s) = \frac{2500(10s+1)}{10^5s+1} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{Spécifications sur les performances du système}$$

bouclé.

$$W_3(s) = \frac{100(100s+1)}{s+10^4} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{Spécifications sur la robustesse de stabilité du système}$$

bouclé.

Le contrôleur PID d'ordre entier qui a été proposé par Q.G.Wang en 1999 est celui donné par la matrice de transfert suivante:

$$K_0(s) = \begin{bmatrix} -43.36 - 0.42/s + 293.21 \times s & 16.4 + 0.19/s - 75.6 \times s \\ 11.25 + 0.16/s - 75.44 \times s & -46.69 - 0.58/s + 212.73 \times s \end{bmatrix}$$

La méthode de synthèse basant sur la résolution d'un problème d'optimisation de type Min-Max, son critère de performance est formulé sous forme d'un problème de sensibilité mixte (critère de 2 blocs), et la solution de ce problème offre la structure d'un PID fractionnaire définie par:

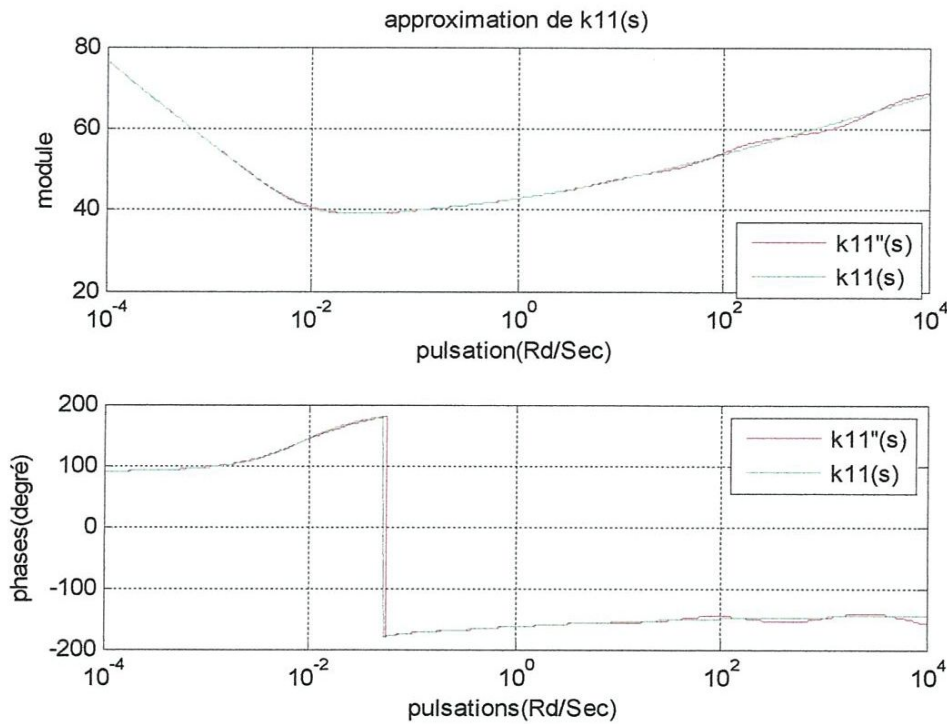
$$K(s) = \begin{bmatrix} -74.73 - 0.67/s^{1.0} - 69.447 \times s^{0.39} & -9.55 + 1.59/s^{0.78} - 9.60 \times s^{0.26} \\ -4.02 + 2.94/s^{0.53} & -55.05 - 2.57/s^{0.88} - 51.94 \times s^{0.38} \end{bmatrix}$$

Cette structure, qui est équivalente à la structure générale ci-dessous, est approximée par le transfert d'ordre entier  $(\tilde{K}(s))$ , en utilisant l'approche de l'identification fréquentielle avec les choix de degrés suivants:

$$d^0(\tilde{K}_{11}(s))=6, d^0(\tilde{K}_{12}(s))=5, d^0(\tilde{K}_{21}(s))=2 \text{ et } d^0(\tilde{K}_{22}(s))=4$$

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) \\ K_{21}(s) & K_{22}(s) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} PID^\mu & PI^\lambda D^\mu \\ PI^\lambda & PI^\lambda D^\mu \end{bmatrix}$$

Les réponses fréquentielles ainsi celles des temporelles du système boucle par les deux PID standard et fractionnaire sont présentées par les figures suivantes:



**Fig.2.4. Module & Phases de  $k_{11}$  et  $\tilde{k}_{11}$**

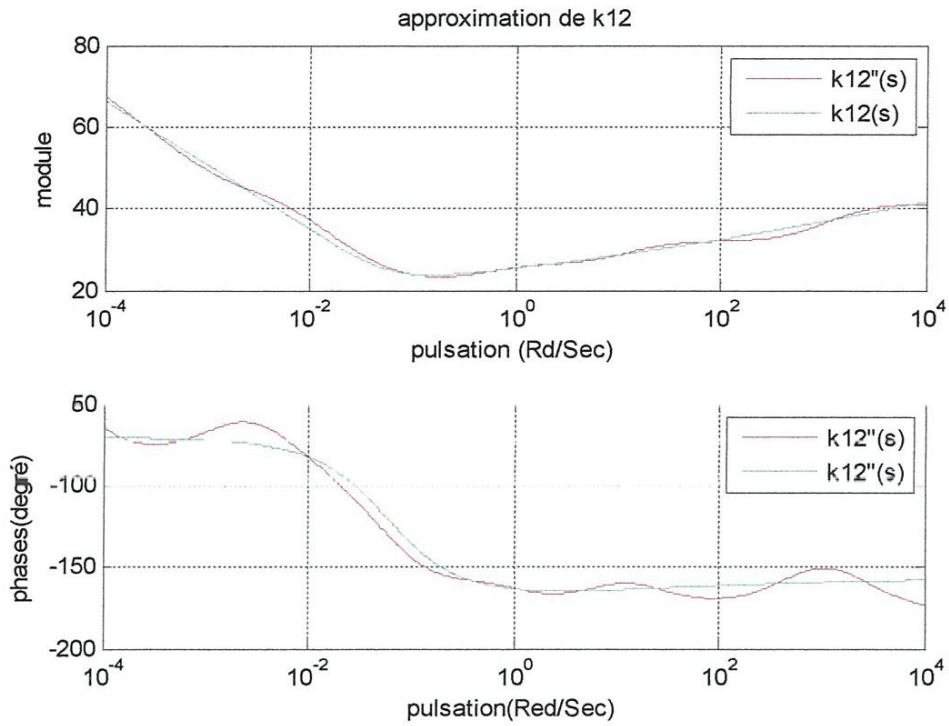


Fig.2.5. Module & Phases de  $k_{12}$  et  $\tilde{k}_{12}$

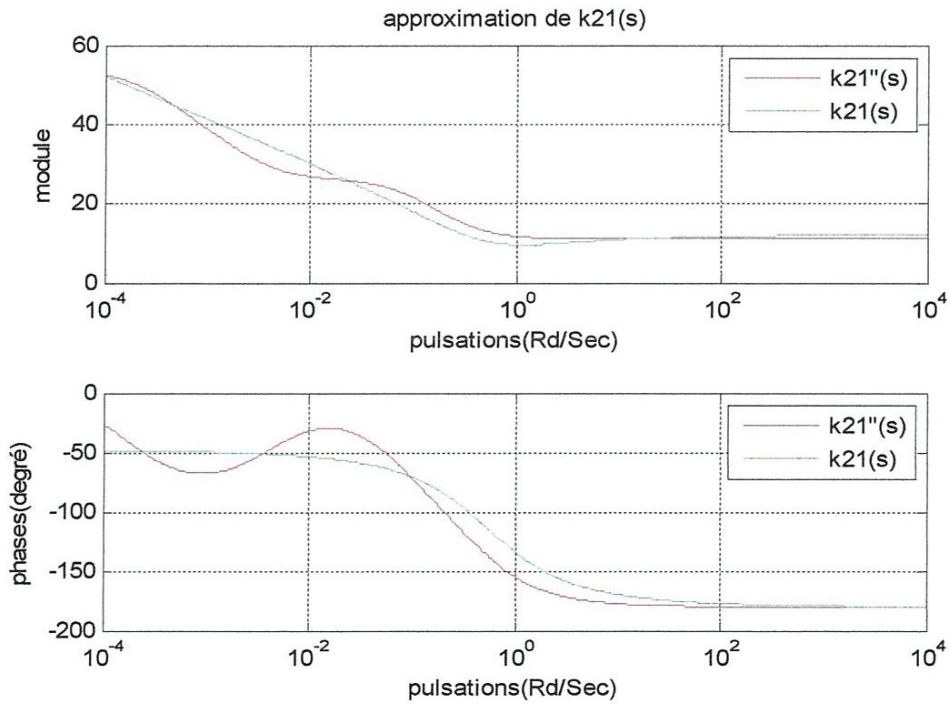
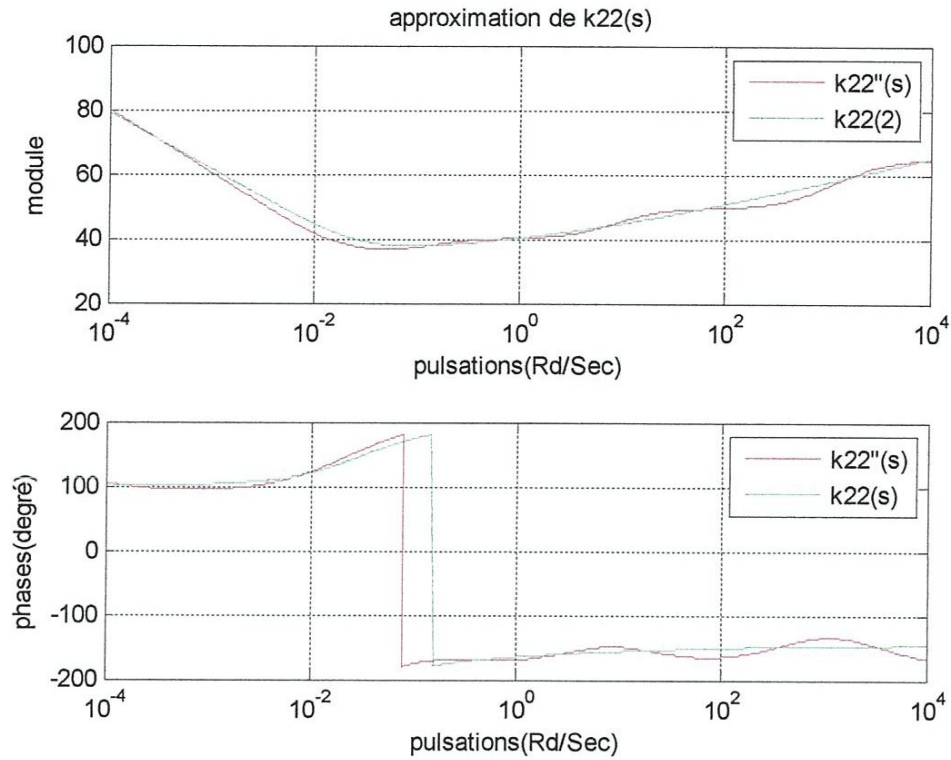
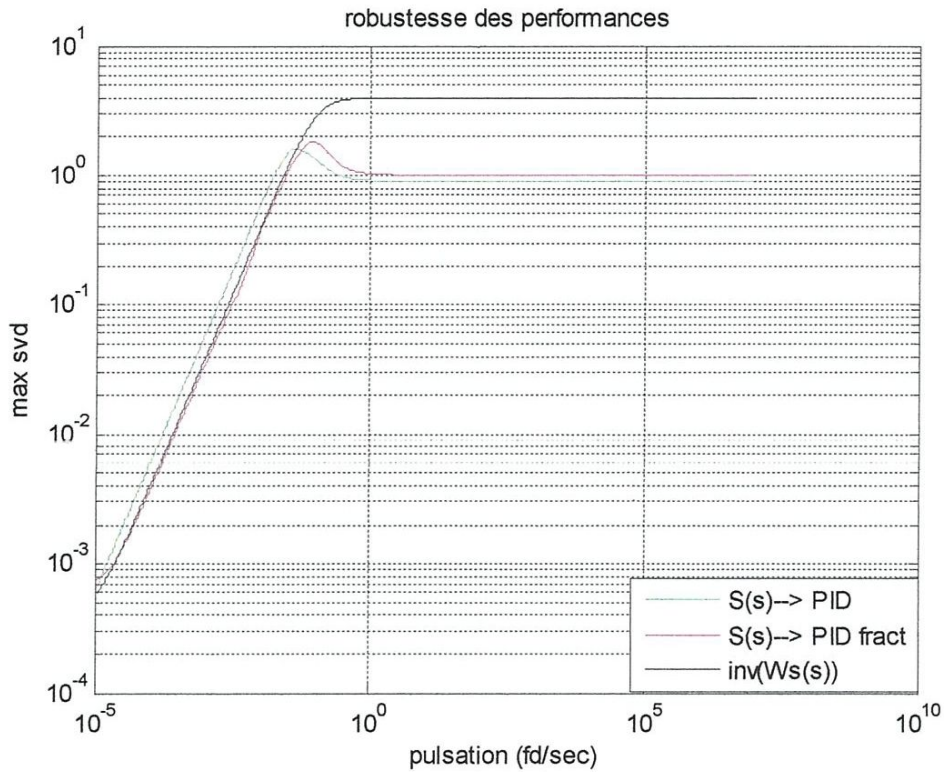


Fig.2.6. Module & Phases de  $k_{21}$  et  $\tilde{k}_{21}$



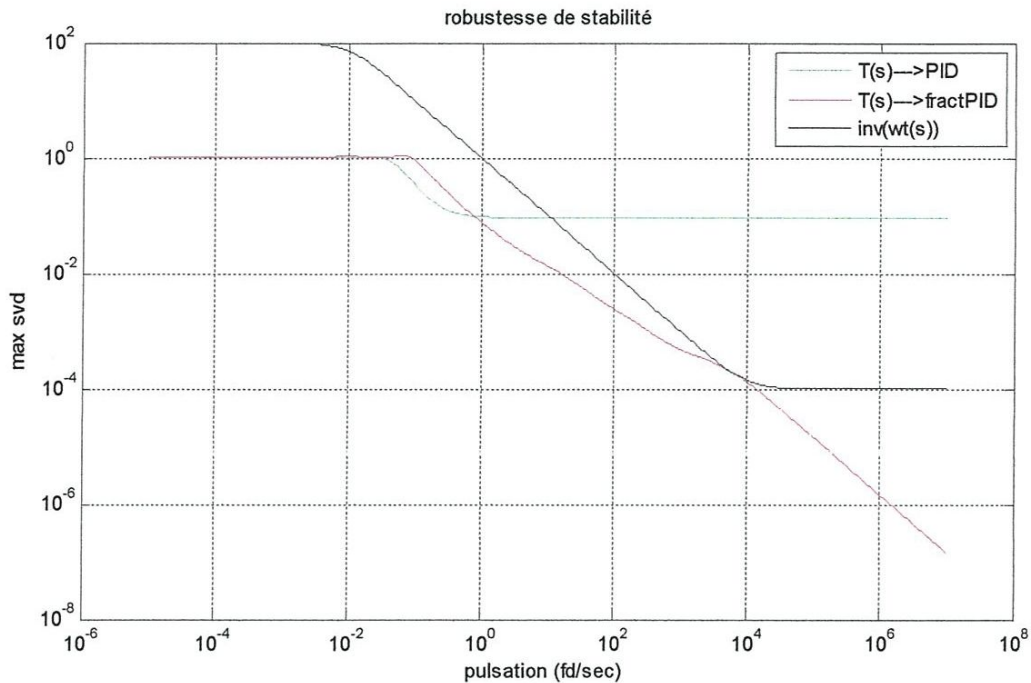
*Fig.2.7. Module & Phases de  $k_{22}$  et  $\tilde{k}_{22}$*

D'après cette figures, La comparaison entre le module et la phase des PID standard et l'estimé du fractionnaire présente une erreur d'approximation très réduite



**Fig.2.8. Robustesse des performances d'un système bouclé par les deux versions de PID**

D'après cette figure, on peut remarquer la satisfaction de la condition de robustesse sur les performances du système bouclé, celle-ci est traduite par le lieu des valeurs singulières maximales de la fonction de sensibilité directe qui est située au-dessous du lieu des valeurs singulières de la condition dans toute la plage de fréquence, cette robustesse devient très pauvre pour le système bouclé par le PID standard.

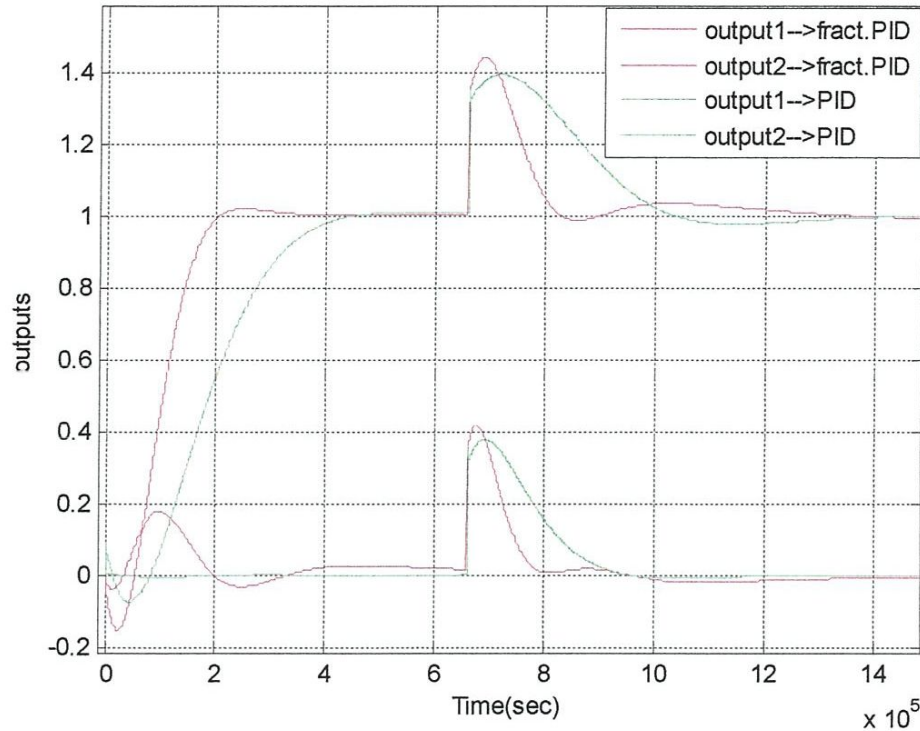


**Fig.2.9. Robustesse de stabilité d'un système bouclé par les deux versions de PID**

D'après cette figure, on peut constater la satisfaction de la condition de robustesse sur la stabilité du système bouclé par les deux PID: standard et fractionnaire avec une meilleure marge de robustesse est assurée par le second contrôleur. Et comme résultat important de cette comparaison, on peut conclure que la structure fractale du contrôleur offre des contrôleurs plus robustes en stabilité et en performances par rapport aux autres structures d'ordre entier qui sont insuffisantes pour satisfaire un nombre des spécifications fréquentielles. Maintenant, pour confirmer ces résultats dans le plan temporel, on utilise les entrées suivantes:

- Vecteur de consignes  $y_{ref} = \begin{pmatrix} ref_1 = 1 \\ ref_2 = 0 \end{pmatrix}$
- Entrées de perturbations à la sortie du procédé sous forme d'un échelon retardé d'amplitude égale à 0.35 pour chaque voie du système ( Overshoot=35%).
- Entrées de bruits de mesures avec une moyenne nulle et une variance égale à 0.25 On obtient les sorties globales suivantes:

La **Fig. 2.10** représente la réponse indicielle du système en boucle fermée en absence des entrées de perturbations et de bruits de mesures.



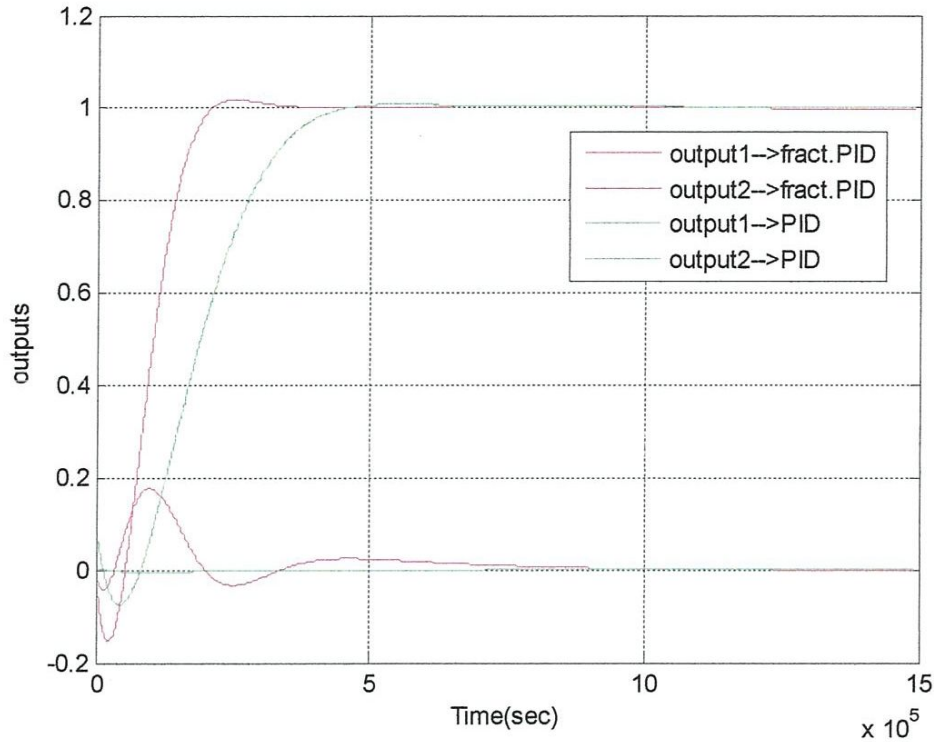
**Fig.2.11. Dynamiques: poursuite, rejection de perturbations du système bouclé.**

D'après la figure ci-dessus on peut constater les remarques suivantes :

La rejection des perturbations devient rapide avec une bonne dynamique de poursuite fournie par la méthode PID fractionnaire par rapport PID .Ainsi le système bouclé par cette méthode de commande est bien robuste en performance en présence ces entrées de perturbation ce qui est confirme la satisfaction de la condition de robustesse des performances qui est présentée dans la **Fig.2.8**.

Maintenant, pour vérifier la robustesse du système bouclé dans le plan temporel au cas de présence des incertitudes paramétriques, on utilise des entrées de perturbation à la sortie du système à commander, ces perturbations sont données sous forme des échelons d'amplitude 0.25 injectées à partir de l'instant  $t=200$  millisecondes. L'objectif ici est de voir est ce que les contrôleurs synthétisés par les méthodes robustes citées précédemment sont capable de rejeter ces incertitudes ou non. On obtient la réponse représentée par la **Fig.2.12**.

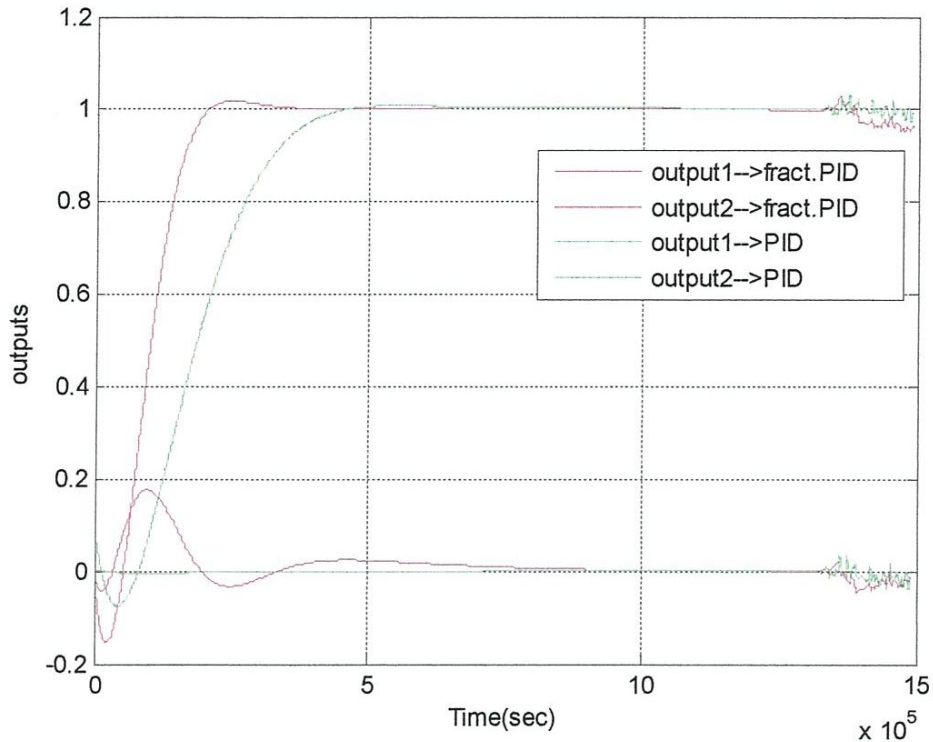




**Fig.2.10. Dynamiques: poursuite du système bouclé.**

D'après la **Fig.2.10**, On peut voir que la méthode PID fractionnaire citées précédemment assure un bon comportement de poursuite ainsi d'une bonne dynamique d'attraction des sorties, et comme résultat important tiré dans ce chapitre.

Maintenant, pour vérifier la robustesse du système bouclé dans le plan temporel au cas de présence des incertitudes paramétriques, on utilise des entrées de perturbation à la sortie du système à commander, ces perturbations sont données sous forme des échelons d'amplitude 0.35 injectées à partir de l'instant  $t=200$  millisecondes. L'objectif ici est de voir est ce que les contrôleurs synthétisés par les méthodes robustes citées précédemment sont capable de rejeter ces incertitudes ou non. On obtient la réponse représentée par la **Fig.2.11**.

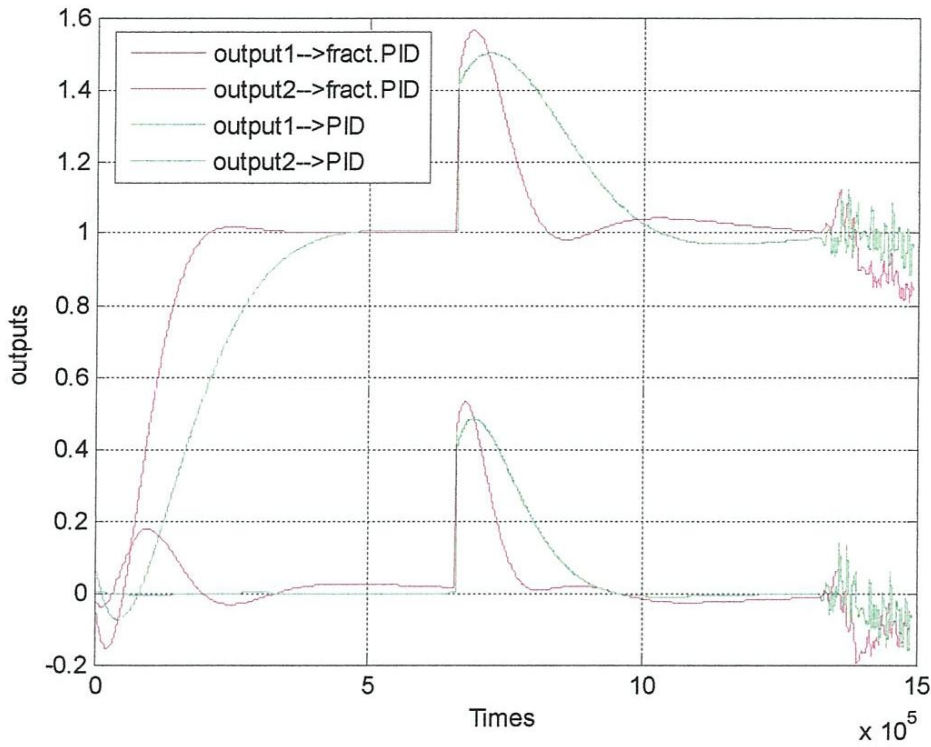


**Fig.2.12.Dynamiques: poursuite, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.**

D'après la figure ci-dessus on peut constater les remarques suivantes :

La minimisation de bruit devient rapide avec une bonne dynamique de poursuite fournie par la méthode PID fractionnaire par rapport PID. Ainsi le système bouclé par cette méthode de commande est bien robuste en stabilité en présence de ces entrées de perturbation ce qui est confirmé par la satisfaction de la condition de robustesse sur la stabilité qui est présentée dans la **Fig.2.9**.

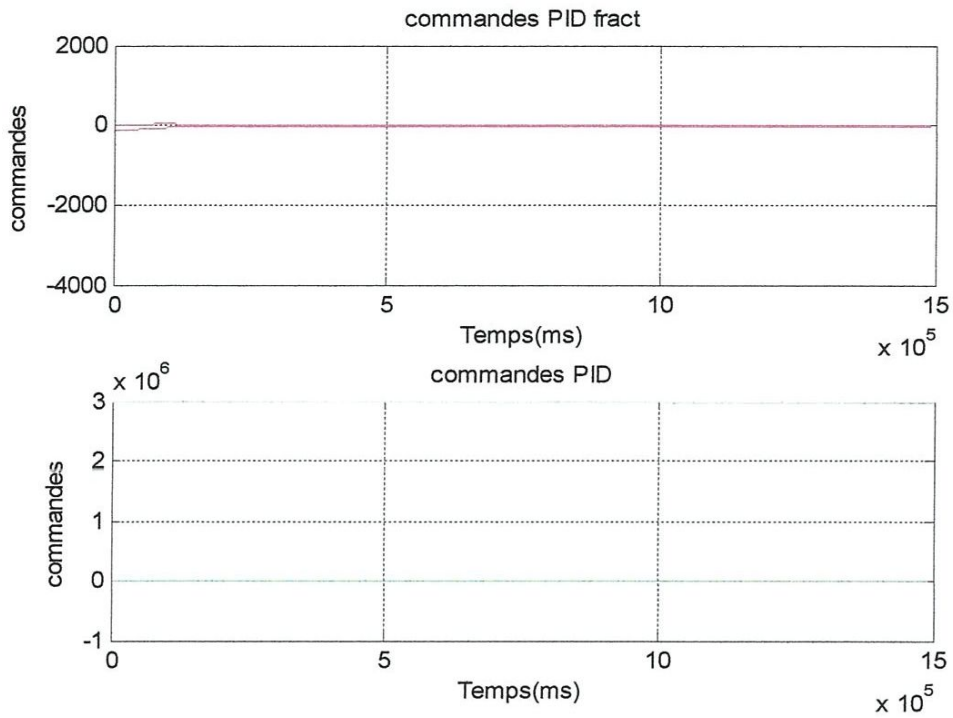
Maintenant, Pour confirmer la satisfaction de la robustesse de stabilité dans le plan temporel, on utilise, en plus des deux entrées citées précédemment, une troisième entrée qui représente les bruits de mesures affectant le système bouclé. Cette entrée est définie par un signal aléatoire présenté par une moyenne nulle et une variance égale à 0.25 appliquée à partir de l'instant  $t = 400$  millisecondes. L'objectif ici est de voir si les contrôleurs précédents sont capables de minimiser l'effet de ces bruits, de rejeter également les entrées de perturbations et finalement de conserver une bonne dynamique de poursuite. On obtient la réponse représentée par la **Fig.2.13**.



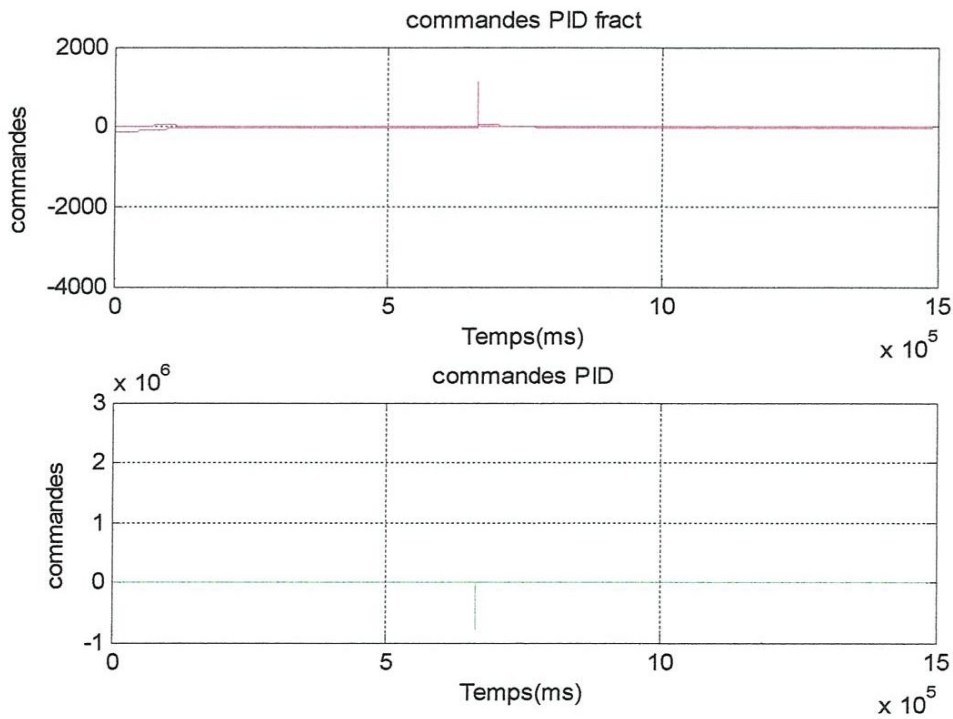
**Fig.2.13. Dynamiques: poursuite, rejection de perturbations, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.**

D'après cette figure, on peut confirmer, dans le plan temporel, les résultats obtenus dans le plan fréquentiel. L'entrée de perturbation est bien rejetée, l'effet des bruits de mesures est bien minimiser et la dynamique de poursuite est acceptable par la méthode PID fractionnaire.

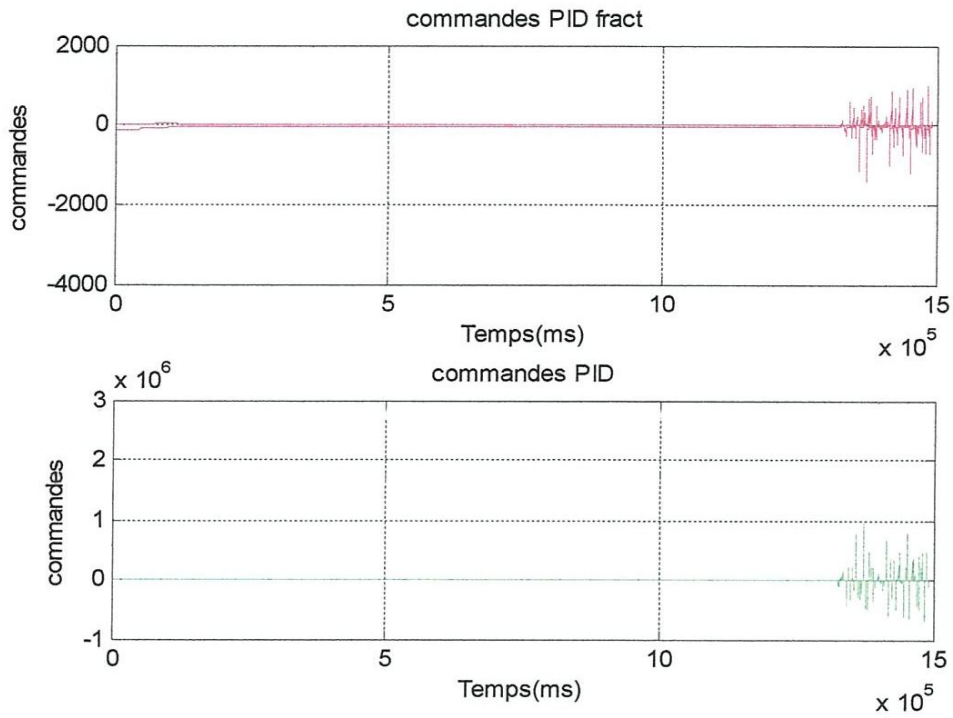
Maintenant, les commandes fournies par chaque méthode de commande sont présentées par les figures suivantes :



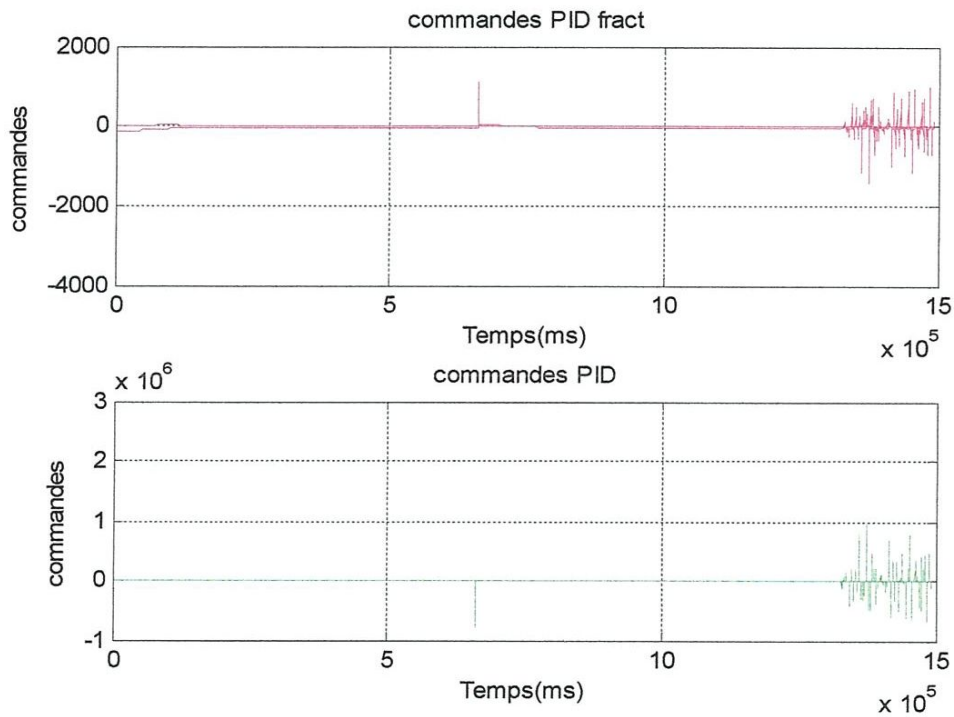
*Fig.2.14. commandes: poursuite du système bouclé.*



*Fig.2.15. commandes: poursuite, rejection de perturbations du système bouclé.*



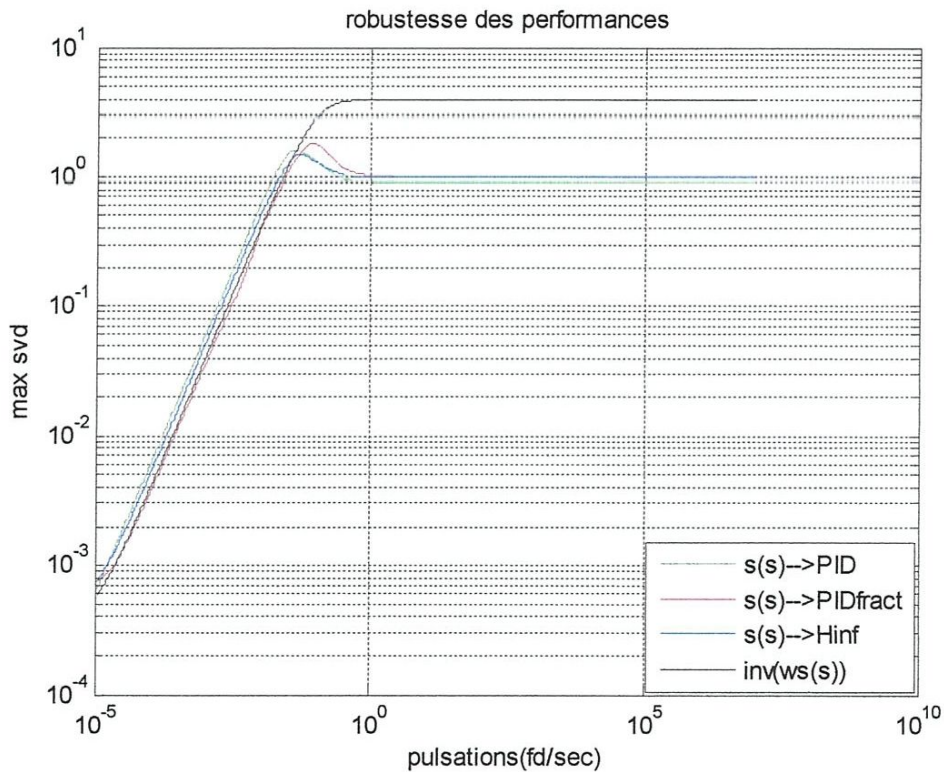
*Fig.2.16. commandes: poursuite, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.*



*Fig.2.17. commandes: poursuite, rejection de perturbations, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.*

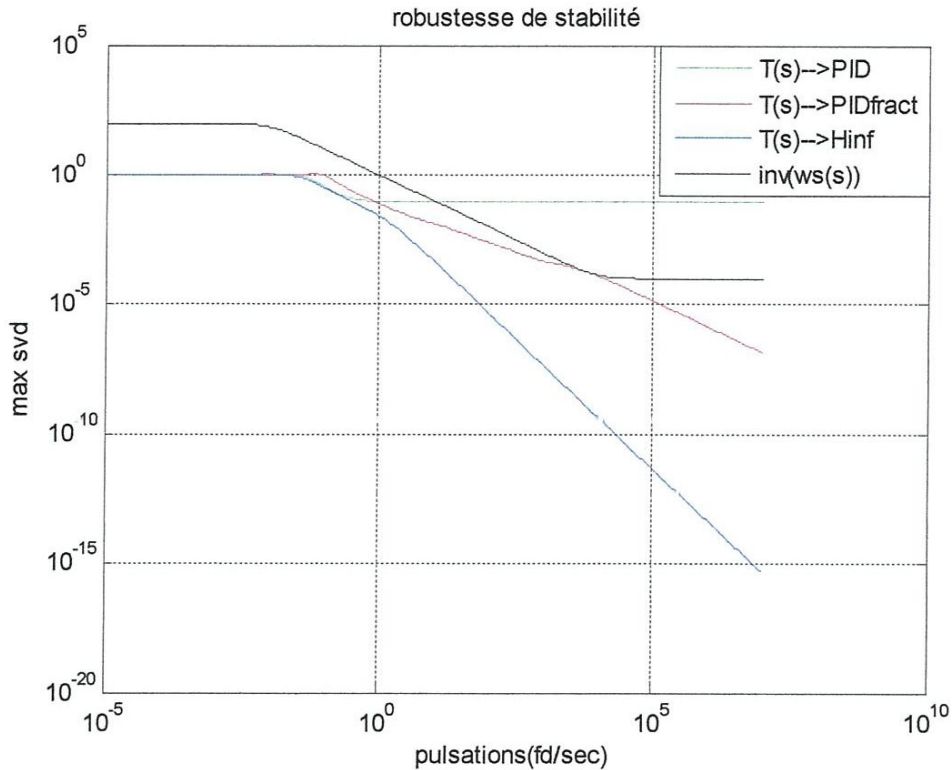
### 3. Comparaison entre les PID fractionnaire et PID standard et $H_\infty$

Les réponses fréquentielles ainsi que celles des temporelles du système bouclé par les deux PID standard et fractionnaire et la méthode  $H_\infty$  sont présentées par les figures suivantes:



*Fig.2.18. Sensibilités directes et condition de robustesse sur les performances.*

La figure ci-dessus représente la vérification de la robustesse des performances du système bouclé par les trois méthodes robustes citées précédemment, d'où peut voir nettement que le contrôleur PID fractionnaire présente une meilleure robustesse de performances celle-ci est traduite par la satisfaction de la condition exigée chose qui n'est pas réalisée avec le contrôleur PID qui représente par une grande sensibilité aux incertitudes paramétriques du modèle.



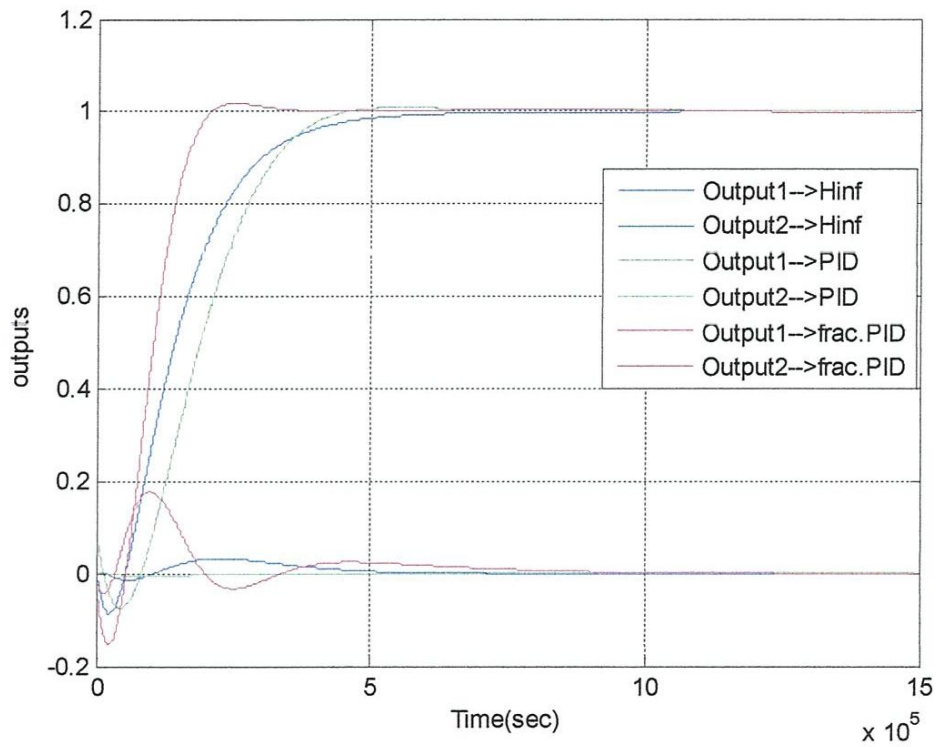
*Fig.2.19. Sensibilité complémentaire et condition de robustesse sur la stabilité.*

D'après cette figure, on peut constater la satisfaction de la condition de robustesse sur la stabilité du système bouclé par les trois méthodes robustes citées précédemment avec une meilleure marge de robustesse est assurée par la méthode  $H_{\infty}$ . Et comme résultat important de cette comparaison, on peut conclure que le contrôleur  $H_{\infty}$  offre des contrôleurs plus robustes en stabilité par rapport aux autres structures d'ordre entier.

Maintenant, pour confirmer ces résultats dans le plan temporel, on utilise les entrées suivantes:

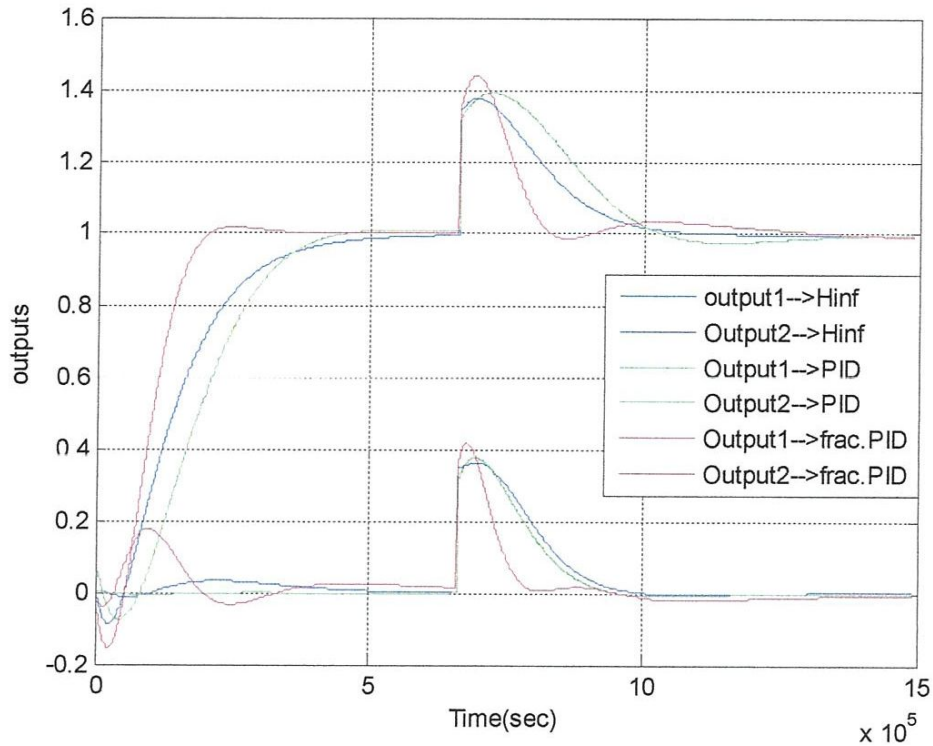
- Vecteur de consignes  $y_{ref} = \begin{pmatrix} ref_1 = 1 \\ ref_2 = 0 \end{pmatrix}$
- Entrées de perturbations à la sortie du procédé sous forme d'un échelon retardé d'amplitude égale à 0.35 pour chaque voie du système (Overshoot=35%).
- Entrées de bruits de mesures avec une moyenne nulle et une variance égale à 0.25 On obtient les sorties globales suivantes:

La **Fig. 2.20** représente la réponse indicielle du système en boucle fermée en absence des entrées de perturbations et de bruits de mesures.



*Fig.2.20. Dynamiques: poursuite, du système bouclé.*

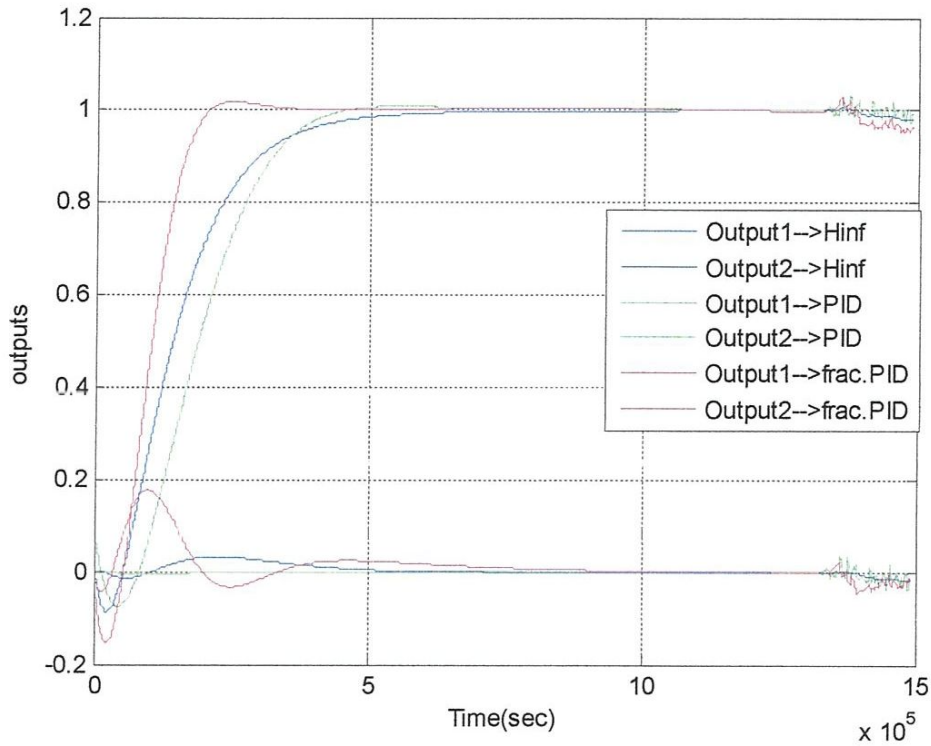




*Fig.2.21. Dynamiques: poursuite, rejection de perturbations du système bouclé.*

D'après la figure ci-dessus on peut constater les remarques suivantes :

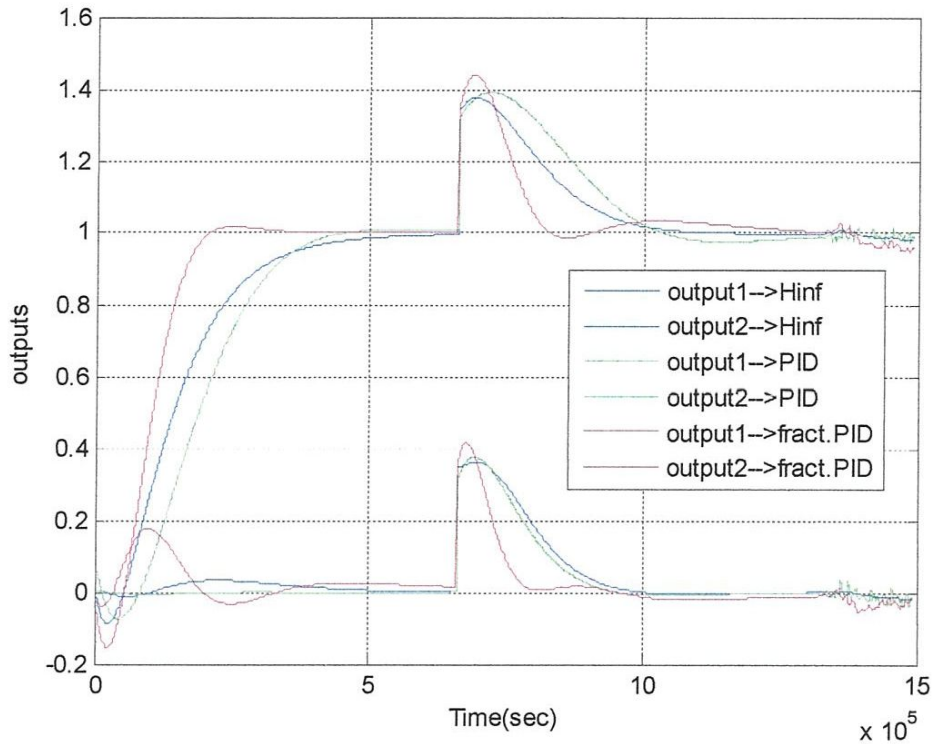
La rejection des perturbations devient rapide avec une bonne dynamique de poursuite fournie par la PID fractionnaire .Ainsi le système bouclé par cette méthode de commande est bien robuste en performance en présence ces entrées de perturbation ce qui est confirme la satisfaction de la condition de robustesse des performances qui est présentée dans la **Fig.2.18**.



*Fig.2.22.Dynamiques: poursuite, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.*

D'après la figure ci-dessus on peut constater les remarques suivantes :

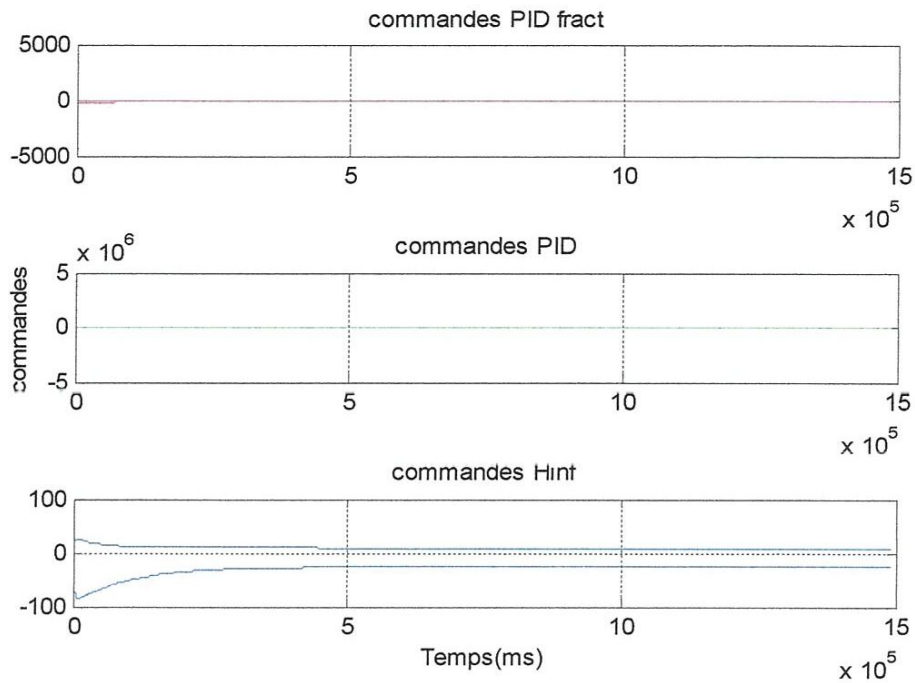
La minimise de bruit devient rapide avec une bonne dynamique de poursuite fournie par la méthode  $H_\infty$ . Ainsi le système bouclé par cette méthode de commande est bien robuste en stabilité en présence ces entrées de perturbation ce qui est confirme la satisfaction de la condition de robustesse sur la stabilité qui est présentée dans la **Fig.2.19**.



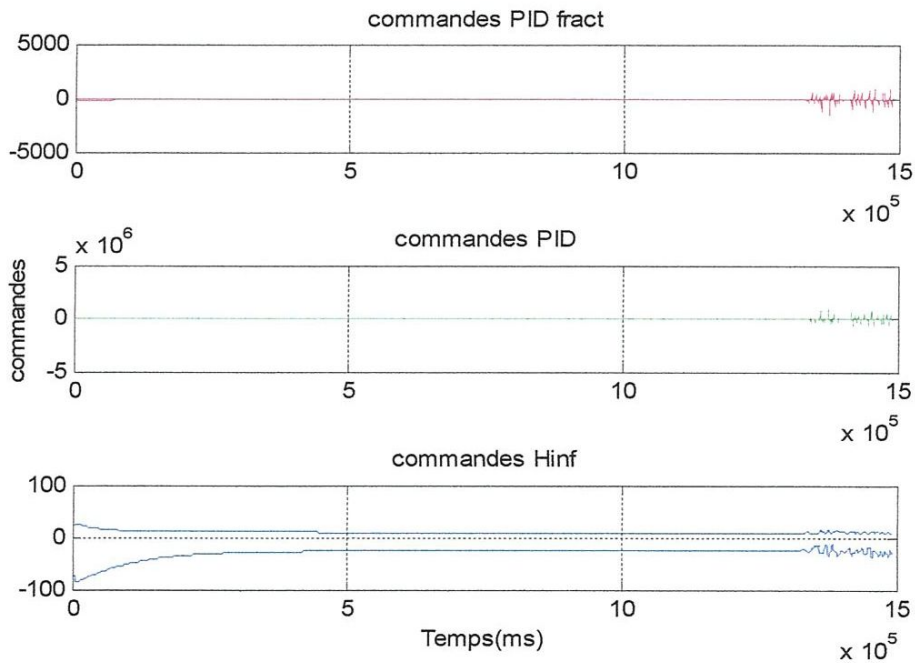
**Fig.2.23. Dynamiques: poursuite, rejection de perturbations, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.**

D'après cette figure, on peut confirmer, dans le plan temporel, les résultats obtenus dans le plan fréquentiel. L'entrée de perturbation est bien rejetée, la dynamique de poursuite est acceptable par la méthode PID fractionnaire, l'effet des bruits de mesures est bien minimiser par la méthode  $H_\infty$ .

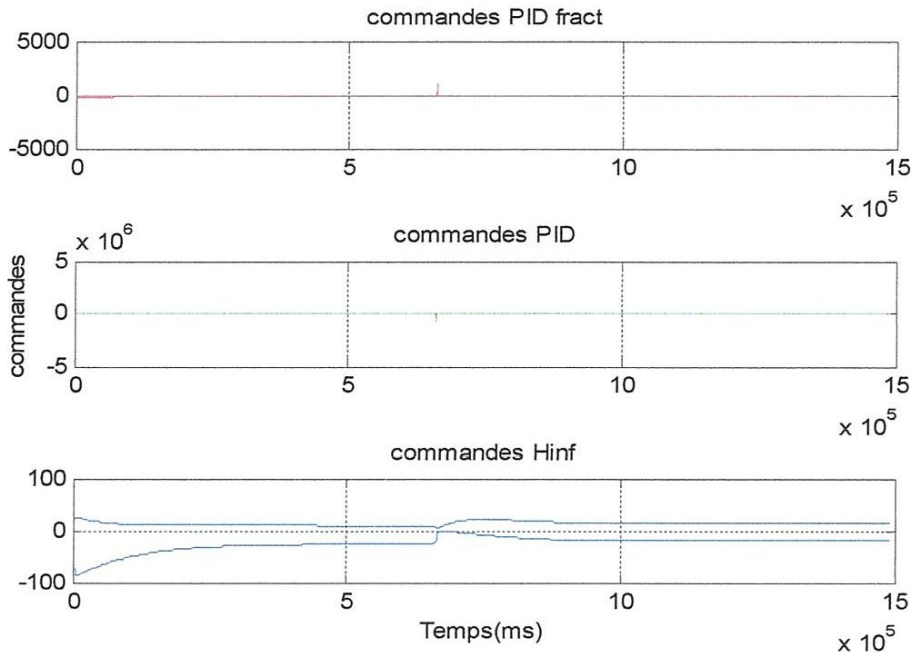
Maintenant, les commandes fournies par chaque méthode de commande sont présentées par les figures suivantes :



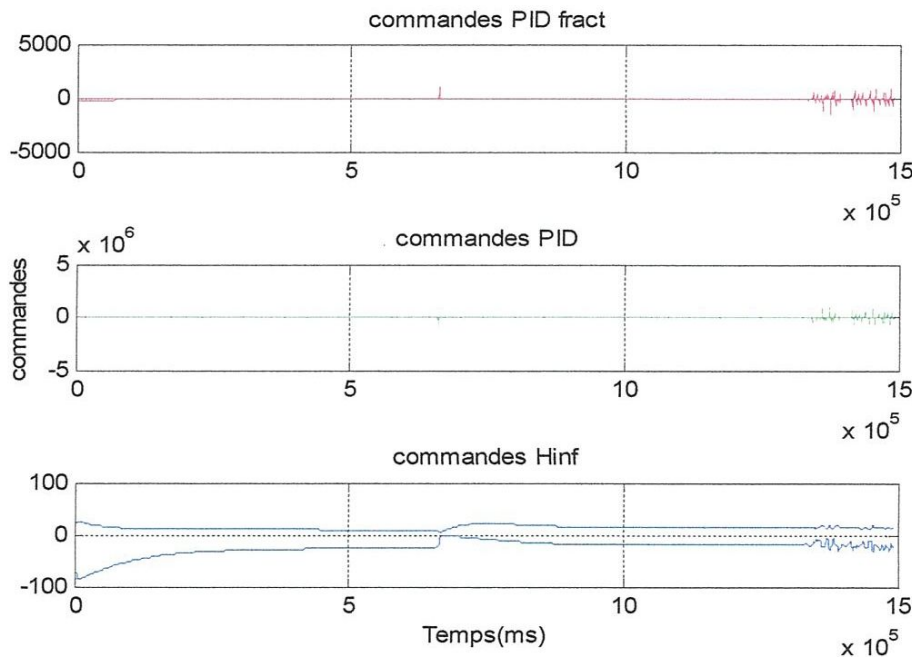
*Fig.2.17. commandes: poursuite, du système bouclé.*



*Fig.2.17. commandes: poursuite, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.*



*Fig.2.17. commandes: poursuite, rejection de perturbations du système bouclé.*



*Fig.2.17. commandes: poursuite, rejection de perturbations, minimisation des bruits de mesures du système bouclé.*

#### 4. Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté une approche de commande basée sur la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes de type Min-Max. Cette approche peut utiliser des différentes structures du contrôleur synthétisé, on a cité parmi lesquelles utilisées celle du PID et  $H_\infty$ . L'avantage de cette méthode de commande est la possibilité d'élaborer un contrôleur robuste satisfaisant un nombre important des spécifications fréquentielles, ce contrôleur est capable d'assurer une marge importante de robustesse face aux différentes perturbations affectant le modèle de synthèse. L'implémentation de ce type des contrôleurs nécessite à priori l'application de l'approche de l'identification fréquentielle qui résout le problème de l'ordre fractal.

L'efficacité de l'approche de l'identification fréquentielle est conditionnée par un choix, à priori, de l'ordre des transferts irrationnels qui approximent les transferts d'ordre non entier, de plus, elle est aussi dépend du choix de la plage de fréquence pour faire cette approximation.

Le filtre élaborer par identification est en suite utilisé dans la boucle de régulation afin de contrôler des procédés avec la présence des perturbations paramétriques du modèle ainsi les erreurs d'approximations commises lors la phase d'identification ce qui peut présente un point faible de cette méthode proposée.

La méthode de commande proposée dans cette partie de ce travail a été validée sur deux systèmes multi-variables incertains à retards purs multiples et les résultats de simulation sont très encourageants.

La comparaison de cette méthode de commande a été faite avec deux autres méthodes robustes et les résultats obtenus n'enlèvent rien de la qualité de ces méthodes qui sont aussi acceptables dans son domaine d'application.

# Références Bibliographiques

---

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

**[ALA] ALAZARD D. – CUMER C. – APKARIAN P. – GAUVRIT M. – FERRERES G.**  
*Robustesse et Commande Optimale*, Cépaduès éditions, I.S.B.N. : 2.85428.516.6, 1999.

**[DOY] DOYLE J.C. – GLOVER K. – KHARGNEKAR P.K. – FRANCIS B.A.**  
*State-Space Solution to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problem.*  
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, pp 831-846, 1989.

**[DOY1] DOYLE J.C. – FRANCIS B.A. – TANNENBAURN A.R.**  
*Feedback Control Theory*, Maxwell MacMillan International Editions, 1990

**[DOY2] DOYLE J.C.**  
*Analysis of feedback systems with structured uncertainties.,*  
*IEE Proceedings – Part D*, 129:242–250, 1982.

**[DOY3] DOYLE J.C.**  
*Structured uncertainty in control system design.*  
Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 260–265, December 1985.

**[DOST] J.C.DOYLE, G. STEIN.**  
Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical /Modern Synthesis.  
IEEE Trans. Autom. Control, AC 26 n° 1, 1981.

**[DPK] D.-W. Gu, P. Hr. Petkov and M. M. Konstantinov**  
Robust Control Design with MATLAB, Springer-Verlag London Limited 2005

**[DUC] DUC G.**  
*Robustesse des Systèmes Linéaires Multivariables.* Polycopie de l'Ecole Supérieure d'Electricité, 1993.

**[DUC1] DUC G. – FONT S.**  
*Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -Analys.* Polycopie de l'Ecole Supérieure d'Electricité, 1999.

**[MCF] MCFARLANE – GLOVER D.**  
*A Loop Shaping Design Procedure Using  $H_\infty$  Synthesis.*  
IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, pp. 749-769, 1992.



**[SAF] SAFONOV M.G. – LIMEBEER D.J.N. – CHIANG R.Y.**

*Simplifying the  $H_\infty$  theory via Loop-Shifting, Matrix-Pencil and Descriptor Concept*

International Journal Control, Vol. 50, No 6, pp. 2467-2488, 1989.

**[ZAM] ZAMES G.**

*Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses.*

IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26, pp 301-320, 1981.

**[ZAM1] ZAMES G. – FRANCIS B.A.**

*Feedback, Minmax Sensitivity, and Optimal Robustness.*

IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 28, pp 585-600, May 1983.

# Annexes

## DECOMPOSITION EN VALEURS SINGULIERES (SVD)

Dans cette annexe nous définissons la notion des valeurs singulières et nous donnons leurs principales propriétés.

### Définition 1 (Matrice unitaire)

La matrice complexe  $U$  est unitaire si elle vérifie :

$$UU^* = U^*U = I \quad (\text{A.1})$$

Toutes les valeurs propres d'une matrice unitaire sont de valeur absolue égale à 1, et toutes ses valeurs singulières sont égales à 1.

### Définition 2 (Décomposition en valeurs singulières SVD)

Toute matrice complexe  $A \in C^{l \times m}$  peut s'écrire sous la forme :

$$A = U \Sigma V^* \quad (\text{A.2})$$

Les matrices  $U$  et  $V$  sont les matrices des vecteurs singuliers gauches et droits, respectivement.

Ces matrices  $U$  ( $l \times l$ ) et  $V$  ( $m \times m$ ) sont des matrices unitaires.  $\Sigma \in R^{l \times m}$  est de la forme :

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{si } l \geq m \quad (\text{A.3a})$$

$$\Sigma := [\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \ 0]; \quad \text{si } l \leq m \quad (\text{A.3b})$$

Avec :  $r = \min(l, m)$  et,  $\sigma_i(A) := [\lambda_i(AA^*)]^{1/2} := [\lambda_i(A^*A)]^{1/2}$

### Définition 3 (La SVD de l'inverse d'une matrice)

Si  $A$  est une matrice inversible de dimension ( $m \times m$ ) est dont la SVD est donnée par l'expression :  $A = U \Sigma V^*$ .

La SVD de l'inverse de la matrice A est donnée alors par l'expression :

$$A = V \Sigma^{-1} U^* \quad (\text{A.4})$$

Si  $u_i$  ( $v_i$ ) dénote la  $i^{\text{ième}}$  colonne de  $U(V)$  et  $\sigma_r$  dénote la plus petite valeur singulière non nulle,

la décomposition (A.2) s'écrit aussi :  $G = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$ .

- Il est à noter que dans  $\Sigma^{-1}$  l'ordre des valeurs singulières est inversé.

Soit :  $j = m - i - 1$ , l'expression (A.5) implique que :

$$\sigma_i(A^{-1}) = 1/\sigma_i(A) \quad \text{et} \quad U_i(A^{-1}) = V_j(A), \quad V_i(A^{-1}) = U_j(A) \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_i(A^{-1}) = 1/\sigma_i(A) \quad \text{et} \quad U_i(A^{-1}) = V_j(A), \quad V_i(A^{-1}) = U_j(A) \quad (\text{A.6})$$

en particulier  $\bar{\sigma}(A^{-1}) = 1/\underline{\sigma}(A) \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}(A^{-1}) = 1/\bar{\sigma}(A) \quad (\text{A.7})$

- $\bar{\sigma}(\cdot) = \sigma_{\max}$  est une norme matricielle, elle a donc toutes les propriétés de la norme, il faut noter également que cette norme est multiplicative.

$$\bar{\sigma}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \sigma_i(\alpha A) = |\alpha| \cdot \sigma_i(A) \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{\sigma}(AB) = \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{\sigma}(A^*) = \bar{\sigma}(A) \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}(A^T) = \bar{\sigma}(A) \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{\sigma}(A^*) = \bar{\sigma}(A) \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}(A^T) = \bar{\sigma}(A) \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{\sigma}(AB) = \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \quad (\text{A.14})$$

## Les inégalités des valeurs singulières

$$\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A) \quad (\text{A.15})$$

$$\underline{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(AB) \quad (\text{A.16})$$

$$\underline{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \leq \bar{\sigma}(AB) \quad \text{ou} \quad \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \leq \bar{\sigma}(AB) \quad (\text{A.17})$$

$$\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \quad (\text{A.18})$$

$$\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma}[A \ B] \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{\sigma} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{\sigma} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \leq \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma_i(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \sigma_i(A+B) \leq \sigma_i(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (\text{A.22})$$

$$|\sigma(A) - \bar{\sigma}(B)| \leq \bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (\text{A.23})$$

$$\underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(A+B) \leq \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (\text{A.24})$$

$$\underline{\sigma}(A) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + A) \leq \underline{\sigma}(A) + 1 \quad (\text{A.25})$$

$$\underline{\sigma}(A(j\omega)) \leq \frac{\|A(j\omega)Ee^{j\omega t}\|_2}{\|Ee^{j\omega t}\|_2} \leq \bar{\sigma}(A(j\omega)) \quad (\text{A.26})$$

**ANNEXE B****Propriétés des LFT**

Nous donnons dans cette annexe les propriétés principales qui sont susceptibles d'être utiles dans la pratique de la commande robuste et en modélisation.

**1. Le produit de Redheffer ou produit Star «\*» (LFT généralisée)**

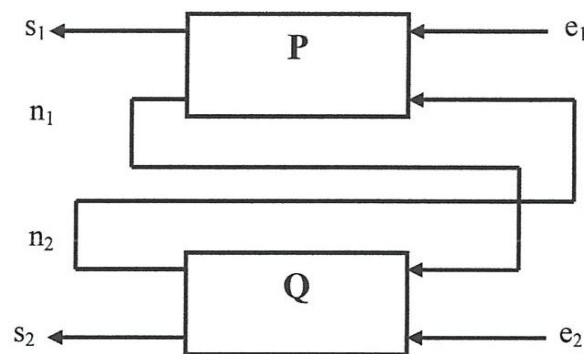
Supposons que les matrices P et Q sont de dimensions appropriées et partitionnées comme suit :

$$P := \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \text{ et } Q := \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

En supposant l'existence de certains produits et inverses, le produit Star ou de Redheffer de P et Q est défini par :

$$S(P, Q) := P * Q := \begin{bmatrix} F_l(P, Q_{11}) & P_{12}(I - Q_{11}P_{22})^{-1}Q_{12} \\ Q_{21}(I - P_{22}Q_{11})^{-1}P_{21} & F_u(Q, P_{22}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Le diagramme fonctionnel du produit Star est donné sur la figure (1).



**Figure (1) : Diagramme fonctionnel du produit Star.**

- Ce produit peut être étendu aux cas particuliers des matrices P ou Q n'ayant qu'un seul bloc, en adoptant les conventions :

$$P * Q_{11} := F_l(P, Q_{11}) \quad \text{et} \quad P_{22} * Q := F_u(Q, P_{22}) \quad (\text{B.3})$$

Par conséquent, les LFT sont un cas particulier du produit Star.

- On démontre également que le produit est associatif, c'est à dire :

$$(P * Q) * R = P * (Q * R) = P * Q * R \quad (\text{B.4})$$

## 2. Composition de LFT

La propriété la plus intéressante des LFT, est que toute composition de LFT est encore une LFT. C'est à dire que des connexions en cascade, en parallèle, en boucle fermée... etc., préservent la structure d'une LFT. Donc la LFT est un outil de représentation très intéressant. Pour mettre en évidence sa puissance nous considérons les deux exemples suivants :

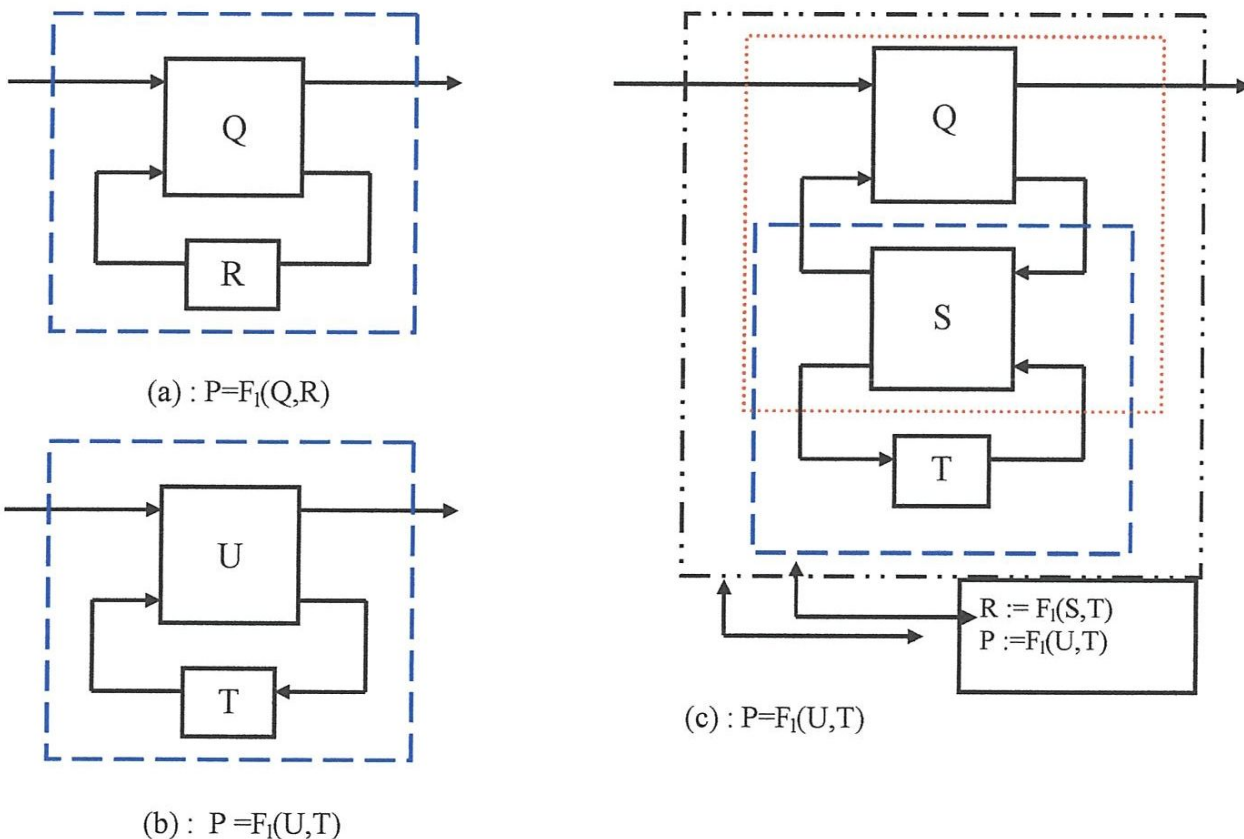
- a) Considérons le cas de la figure (2), où P est écrit sous forme d'une LFT inférieure de R qui est elle-même une LFT inférieure de T.

$$P = F_1(Q, R) \text{ et } R = F_1(S, T) \quad (\text{B.5})$$

On démontre qu'on peut écrire P comme une LFT faisant intervenir T sous la forme :  $P = F_1(U, T)$ .

avec :

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = Q * S \quad (\text{B.6})$$



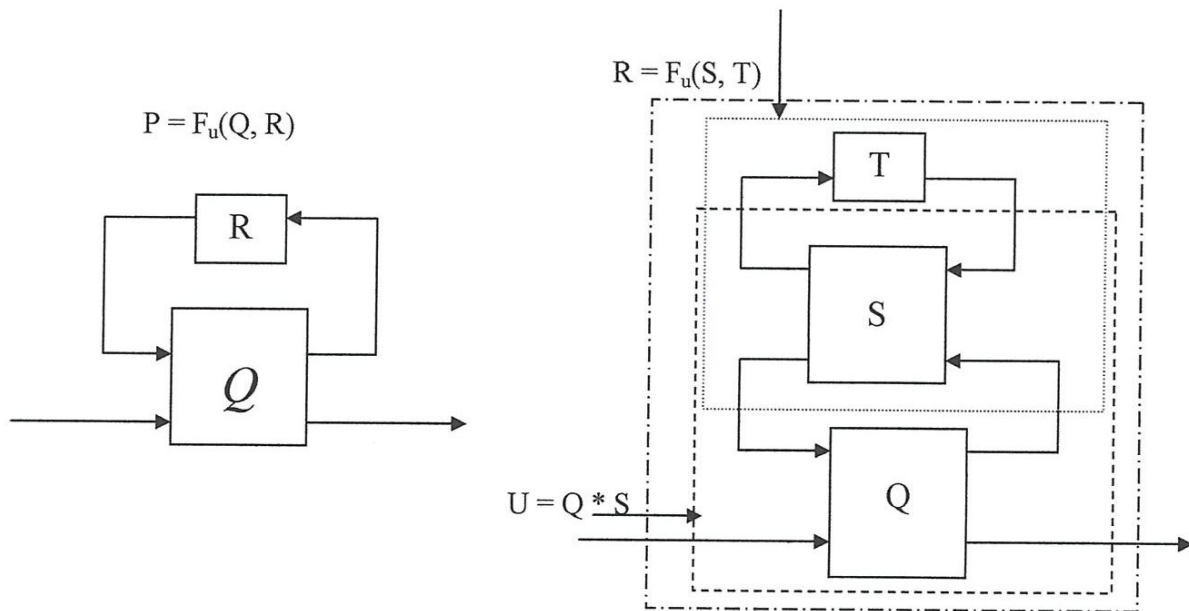
**Figure (2) : Composition de LFT**

Des expressions similaires peuvent être déterminées, lorsqu'on utilise des LFT supérieures. Si nous supposons que :

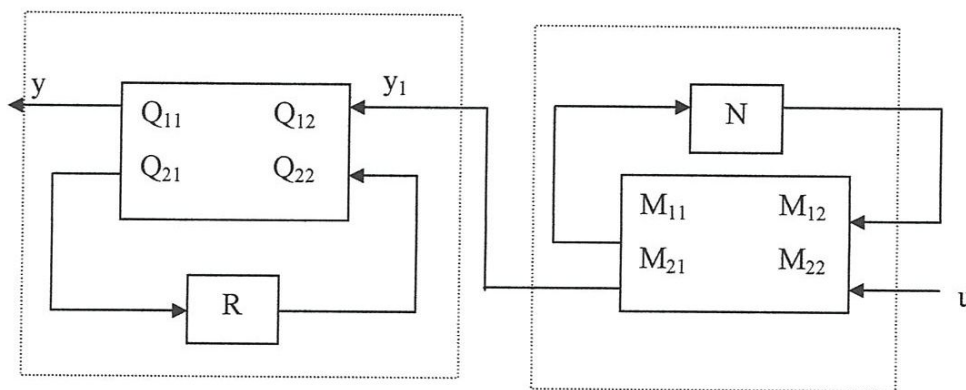
$$P = F_u(Q, R) \quad \text{et} \quad R = F_u(S, T) \quad (\text{B.7})$$

Nous obtenons  $P = F_u(U, T)$ , où  $U$  est donné en fonction de  $Q$  et  $S$  par :

$$U = Q * S \quad (\text{B.8})$$

**Figure (3) : Connexion de deux LFT supérieures**

ii) Nous pouvons également montrer que la connexion cascade de  $F_l(Q, R)$  et  $F_u(M, N)$ , est aussi une LFT : figure(4).

**Figure (4) : Connexion en cascade de deux LFT.**



$$F_l(Q, R). F_u(M, N) = F_l(W, \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}) \quad (\text{B.9})$$

$$\text{Avec :} \quad W = \begin{bmatrix} Q_{11}M_{22} & Q_{12} & Q_{11}M_{21} \\ Q_{21}M_{22} & Q_{22} & Q_{21}M_{21} \\ M_{12} & 0 & M_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

### 3. Passage entre LFT inférieure et supérieure :

Supposons que  $P = F_l(Q, R)$ , alors on peut réécrire  $P$  comme une LFT supérieure en  $Q$  et  $R$  sous la forme :

$$P = F_u \left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, R \right) \quad (\text{B.11})$$

### 4. Inverse d'une LFT :

L'inverse d'une LFT est aussi une LFT. En supposant que les inverses cités ci-dessous existent, on peut écrire :

$$(F_l(P, Q))^{-1} = F_l(P_{LI}, Q) \quad \text{et} \quad [F_u(P, Q)]^{-1} = F_u(P_{UI}, Q) \quad (\text{B.1})$$

Si  $P$  est défini comme précédemment, les expressions de  $P_{LI}$  et  $P_{UI}$  sont données par :

$$P_{LI} = \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} & -P_{11}^{-1}P_{12} \\ P_{21}P_{11}^{-1} & P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_{UI} = \begin{bmatrix} P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21} & P_{12}P_{22}^{-1} \\ -P_{22}^{-1}P_{21} & P_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

### 5. Inverse d'un paramètre $K$

Etant donné une LFT en  $K$ , on peut l'exprimer en une LFT en  $K^{-1}$  à condition que les inverses impliquées, existent.

$$F_l(P, K) = F_l(\tilde{P}, K^{-1}) \quad (\text{B.13})$$

$$\text{où } \tilde{P} \text{ est donné par :} \quad \tilde{P} = \begin{bmatrix} P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21} & -P_{12}P_{22}^{-1} \\ -P_{22}^{-1}P_{21} & P_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Ceci découle du fait que :

$$(I + L)^{-1} = I - L(I + L)^{-1}, \quad \forall L \text{ carrée} \quad (\text{B.15})$$

### 6. Relations entre fonctions de transfert caractéristiques et les LFT

Pour caractériser la stabilité interne, il est plus commode de travailler sur les représentations d'état de  $G$  et  $K$ . Considérons en effet la boucle standard de la Figure ( ) et introduisons les réalisations minimales suivantes de  $G(s)$  et  $K(s)$ .

$$A_{BF} = \begin{bmatrix} A_G - B_G C_K (I + D_G D_K)^{-1} C_G & B_G (I + D_G D_K)^{-1} C_G \\ -B_G (I + D_G D_K)^{-1} C_G & -B_G (I + D_G D_K)^{-1} D_G C_K \end{bmatrix} \quad (B.22)$$

En utilisant les formules donnant la réalisation d'une LFT en fonction des réalisations des arguments, il est facile de montrer que la stabilité (au sens des fractions rationnelles) des quatre transferts ci-dessus est équivalente à la stabilité au sens des matrices, de  $A_{BF}$ .

$$\begin{bmatrix} I & -G \\ I & -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -D_G \\ I & -D_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_G \\ C_G \end{bmatrix} (sI - A_G)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -B_G \end{bmatrix} \quad (B.21)$$

déduit de celle de  $G(s)$ , par exemple :

Soient  $x_n$  et  $x_k$  les vecteurs d'état associés à ces réalisations, une réalisation de ces LFT est facilement

$$\bullet \quad G(I + KG)^{-1} = H_l \begin{bmatrix} G & -G \\ G & G \end{bmatrix}, K \quad (B.20)$$

$$\bullet \quad K(I + GK)^{-1} = H_l \begin{bmatrix} I & -G \\ 0 & I \end{bmatrix}, K \quad (B.19)$$

$$\bullet \quad GK(I + GK)^{-1} = H_l \begin{bmatrix} I & -G \\ 0 & G \end{bmatrix}, K \quad (B.18)$$

$$\bullet \quad (I + GK)^{-1} = H_l \begin{bmatrix} I & -G \\ I & -G \end{bmatrix}, K \quad (B.17)$$

suit :

Les fonctions de transfert mentionnées ci-dessous, peuvent s'écrire en terme de LFT comme

$$G(s) = D_G + C_G (sI - A_G)^{-1} B_G \quad K(s) = D_K + C_K (sI - A_K)^{-1} B_K \quad (B.16)$$