

17/621.753

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8Mai 1945 – Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Electrotechnique et Automatique



**Mémoire de fin d'études  
pour l'obtention du diplôme de Master Académique**

Domaine : **Sciences et Technologie**  
Filière : **Automatique et Informatique Industrielle**  
Spécialité : **Commande et Diagnostic des Systèmes Industriels**

---

**Le Correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire**

---

Présenté par :

**AIT IZEM Tarek**

Sous la direction de :

**Pr. TEBBIKH Hicham**

JUIN 2012



## Table des matières

### Introduction Générale

1. Introduction .....	1
2. Objectif du mémoire.....	2
3. Structure du mémoire .....	3



### Chapitre 2

#### Le Calcul d'Ordre Fractionnaire

1. Introduction .....	4
2. Définitions fondamentales .....	4
2.1. Dérivée de Grünwald-Letnikov .....	5
2.2. Dérivée de Caputo .....	5
2.3. Intégrale de Riemann-Liouville .....	5
2.4. Dérivée de Riemann-Liouville .....	6
1. Quelques propriétés de la dérivation non entière .....	6
2. Exemples de calcul de dérivée non entière .....	7
2.1. Dérivation non entière d'une exponentielle .....	7
2.2. Dérivation non entière d'un cosinus (ou d'un sinus).....	7
3. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	8
3.1. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire .....	8
3.2. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire .....	8
4. Représentation d'un système d'ordre fractionnaire.....	8
4.1. Équations différentielles et fonctions de transfert d'ordre fractionnaires.....	8
4.2. Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire.....	9
5. Approximation analogique des opérateurs fractionnaires .....	9
5.1. Approximations par CFE (Continued Fraction Expansions – CFE).....	10
5.2. Méthode de Carlson.....	10
5.3. Méthode de Matsuda .....	11
5.4. Méthode d'Oustaloup .....	11
5.5. Méthode de Charef .....	12

5.6.	Méthode basant sur l'approche de l'identification fréquentielle .....	12
5.7.	Exemples d'approximation d'un opérateur d'ordre fractionnaire .....	13
5.7.1.	Approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire .....	13
5.7.2.	Approximation d'un dérivateur d'ordre fractionnaire .....	14
6.	Discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	15
6.1.	La Transformation Bilinéaire (Tustin).....	16
6.2.	La Transformation Backward (Euler).....	16
6.3.	L'équation de la transformation Al-Alaoui.....	16
6.4.	La Transformation de Simpson.....	17
7.	Conclusion.....	17

### Chapitre 3

#### Approximation Analogique et Discrétisation

1.	Introduction.....	18
2.	Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire (Méthode de Charef) .....	18
2.1.	Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire .....	18
2.2.	Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	20
2.3.	Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire .....	21
2.4.	Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.....	23
3.	Implémentation par des circuits électriques analogiques .....	24
3.1.	Intégration d'ordre fractionnaire .....	24
3.2.	Dérivée d'ordre fractionnaire .....	25
4.	Discrétisation de la fonction d'approximation rationnelle .....	26
4.1.	Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire .....	26
4.1.1.	Par la transformation Bilinéaire .....	26
4.2.	Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire .....	28
4.2.1.	Discrétisation par la transformation Bilinéaire .....	28
4.2.1.	Discrétisation par la transformation Backward.....	29

### Chapitre 4

#### Le Correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Fractionnaire

1.	Introduction.....	31
----	-------------------	----



2. Le Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.....	32
3. Approximation d'un $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire par une fonction rationnelle.....	36
3.1. Cas 1 ( $0 < \lambda < 1$ et $0 < \mu < 1$ ) .....	36
3.2. Cas 2 ( $1 < \lambda < 2$ et $0 < \mu < 1$ ) .....	36
3.3. Cas 3 ( $0 < \lambda < 1$ et $1 < \mu < 2$ ) .....	37
3.4. Cas 4 ( $1 < \lambda < 2$ et $1 < \mu < 2$ ) .....	37
3.5. Exemple illustratif .....	37
4. Implémentation analogique du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ .....	38
4.1. Réalisation de l'action proportionnelle .....	39
4.2. Réalisation de l'action intégrale.....	39
4.3. Réalisation de l'action dérivée.....	40
4.4. Réalisation du régulateur $PI^\lambda D^\mu$ .....	41
5. Réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire .....	42
5.1. Ajustement des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.....	42
5.1.1. Ajustement des paramètres $K_P$ , $T_I$ et $T_D$ .....	43
5.1.2. Ajustement des paramètres $\lambda$ et $\mu$ .....	43
5.1.2.1. Minimisation d'un critère de performance .....	43
5.1.2.2. Méthode de détermination sous contraintes .....	45
5.2. Exemple de simulation .....	46
6. Conclusion .....	49

## Chapitre 5

### Applications

1. Introduction .....	50
2. Asservissement de niveau.....	50
3. Commande d'un moteur à courant continu.....	52
3.1. Régulation en vitesse .....	54
3.2. Régulation en position .....	55
4. Commande d'un train.....	56
5. Commande d'un système électrohydraulique .....	69



5.1. Régulation en position du moteur hydraulique .....	60
5.2. Régulation en vitesse du moteur hydraulique .....	62
6. Test de robustesse.....	64
7. Conclusion.....	65

## Chapitre 6

### Le Simulateur des Correcteurs $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Fractionnaires

1. Introduction .....	66
2. Présentation du Simulateur .....	66
3. Différentes fonctions du Simulateur .....	68
3.1. Traitement des Données .....	68
3.2. Ziegler-Nichols.....	69
3.3. Approximation.....	70
3.4. Calcul des paramètres $\lambda$ et $\mu$ .....	71
3.4.1. Calcul avec critère .....	72
3.4.2. Calcul sous contraintes .....	72
3.5. Paramètres du correcteur .....	73
3.6. Outil de représentation graphique.....	73
Conclusion .....	75
Conclusion générale et perspectives.....	76
Références bibliographiques .....	77

« Une personne qui n'a jamais commis d'erreurs n'a jamais tenté d'innover. »

Albert Einstein

## *Dédicace*

Ce travail s'est fait sans ta présence, *Papa*, mais ton amour et tes encouragements gravés à jamais en ma mémoire m'ont accompagnés et m'accompagneront pour toujours, pour que toutes études te soient dédiées.

*A* mon père

*Puisse* Dieu t'accueillir dans son infinie miséricorde

*A* la plus belle perle au monde...ma tendre mère

*A* mes frères, *A* ma sœur

*A* toute ma famille

*A* tous mes amis

*Aimablement...*

*Je dédie ce modeste travail*

*Ait Irem Fares*



## Remerciements

Je remercie Allah le tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir mener à bien mes études et pour finir ce mémoire.

Je tiens à remercier profondément mon encadreur : le Professeur Tebbikh Hicham pour la confiance qu'il m'a accordée, pour ses encouragements, et ses précieux conseils.

Je remercie, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes études et en particulier mes enseignants du département de génie électrique à l'université de Guelma.

Enfin, je tiens aussi à remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin durant tout mon parcours universitaire.

# Chapitre 1

## Introduction Générale

### 1. Introduction

De nos jours, les systèmes physiques animés par une commande automatique sont très répandus dans l'industrie. Le développement récent de la théorie des systèmes, des moyens informatisés, des processeurs et par conséquent de la puissance de calcul ont considérablement amplifié l'utilisation de cette science pour la commande de processus. L'une des théories, qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité en milieu des chercheurs dans les sciences fondamentales et en ingénierie, est celle du calcul d'ordre fractionnaire qui étend la dérivation et l'intégration aux ordres fractionnaires.

La naissance du calcul d'ordre fractionnaire remonte à l'année 1695 [1], quand Leibniz a soulevé la question suivante dans une lettre à L'Hôpital, « Peut la signification des dérivés avec ordre entier  $\frac{d^n y(t)}{dt^n}$  être généralisée aux dérivés avec des ordres non entier? ». L'Hôpital, a soulevé une question en réponse: « Qu'en est-il si l'ordre sera  $\frac{1}{2}$  ? ». La réponse historique de Leibniz était, « Il mènera à un paradoxe, duquel un jour des conséquences utiles seront tirées ».

Aujourd'hui, l'intérêt de la dérivation d'ordre fractionnaire ne cesse de grandir, notamment dans le domaine de l'automatique pour la modélisation, l'identification et la commande des systèmes. En fait, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE a été proposé par Oustaloup [2]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. Depuis cette initiative, la commande d'ordre fractionnaire captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, Podlubny [3] a proposé le régulateur  $PI^\lambda D^\mu$ , une généralisation du correcteur PID classique, comprenant une intégration fractionnaire d'ordre  $\lambda$  et une dérivation fractionnaire d'ordre  $\mu$ , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande, ce qui a orienté plusieurs chercheurs à un nouveau axe de recherche qui est le réglage du correcteur PID d'ordre fractionnaire [4-5-6]. L'intérêt porté à ce type de correcteurs, connu pour sa simplicité et son utilisation fréquente en industrie, est justifié par une meilleure flexibilité due aux deux paramètres supplémentaires ; l'action d'intégration d'ordre fractionnaire  $\lambda$  et l'action de différentiation d'ordre fractionnaire  $\mu$ .

## 2. Objectif du mémoire

Ce travail porte essentiellement sur les techniques de la commande classique en utilisant les concepts de la théorie des dérivées, intégrales et des systèmes d'ordres fractionnaires. En effet, plusieurs méthodes de réglage des correcteurs d'ordres fractionnaires sont proposées, tout en montrant leurs avantages en les appliquant à différents systèmes dynamiques.

Les méthodes de conception des correcteurs fractionnaires, et plus concrètement le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, sont basées sur les règles dites de Ziegler-Nichols pour le calcul des paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire pour  $\lambda=\mu=1$ , ce qui signifie une conception simple du correcteur PID classique. En utilisant ces paramètres, obtenus dans la première étape, nous avons proposé deux méthodes pour la détermination des meilleurs paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.

- La première méthode consiste à minimiser un critère de performance, selon le choix ou bien selon l'adaptabilité de ce dernier aux exigences requises. Pour cela, nous avons utilisé quatre critères intégraux de l'erreur. Il s'agit de : l'intégrale de l'erreur quadratique (ISE : Integrated Square Error), l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur (IAE : Integrated Absolute Error), l'intégrale de l'erreur quadratique multipliée par le temps (ITSE : Integrated Time multiplied Square Error) et l'intégrale de l'erreur absolue multipliée par le temps (ITAE : Integrated Time multiplied Absolute Error).
- La deuxième méthode consiste à déterminer les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire selon des contraintes imposées, en l'occurrence : le temps de réponse, le dépassement et la marge de phase.

Notre contribution a porté essentiellement sur ces deux méthodes ainsi que la réalisation d'un simulateur de correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordres fractionnaires.

## 3. Structure du mémoire

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

**Le chapitre 2** est une introduction aux éléments de base du calcul d'ordre fractionnaire. Nous répertorions quelques notions essentielles sur le calcul d'ordre fractionnaire nécessaires pour la compréhension de notre travail les correcteurs d'ordre fractionnaire.

**Le chapitre 3** contient les méthodes d'approximation rationnelles existantes dans la littérature avec un intérêt porté sur la méthode d'approximation rationnelle de Charef, ainsi qu'un aperçu sur l'implémentation analogique et la discrétisation des opérateurs fractionnaires.



**Le chapitre 4** introduit la notion du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire qui représente une extension du correcteur PID classique auquel sont rajoutés deux paramètres complémentaires qui sont l'ordre d'intégration et de dérivation fractionnaires. Ces derniers, ont été approximés par une fonction rationnelle par la méthode de Charef et le correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  a été implémenté par des composants analogiques. Nous avons, également, présenté les deux méthodes proposées pour la détermination des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire. Pour valider notre travail, nous avons introduit quelques l'exemple de simulation.

**Le chapitre 5** est dédié à l'application du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire dans des boucles d'asservissement et de régulation sur une grande variété de systèmes réels simples et complexes.

**Le chapitre 6** est réservé à un nouvel outil de simulation dédié à la correction des systèmes par un correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire, que nous avons développé. Ce simulateur est une interface graphique réalisée sous MATLAB qui permet de concevoir et simuler des correcteurs pour des systèmes similaires à ceux présentés dans ce mémoire.

**Le chapitre 7** représente une synthèse de ce travail dans laquelle nous présentons la conclusion et les perspectives suggérées.

# Chapitre 2

## Le Calcul d'Ordre Fractionnaire

### 1. Introduction

La naissance du calcul d'ordre fractionnaire remonte à l'année 1695 [1], quand Leibniz a soulevé la question suivante dans une lettre à L'Hôpital, " Peut la signification des dérivés avec ordre entier  $\frac{d^n y(t)}{dt^n}$  être généralisée aux dérivés avec des ordres non entier?". L'Hôpital, a soulevé une question en réponse: « Qu'en est-il si l'ordre sera  $\frac{1}{2}$  ? » La réponse historique de Leibniz était, « Il mènera à un paradoxe, duquel un jour des conséquences utiles seront tirées ».

Le calcul d'ordre fractionnaire a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Dans le domaine de la commande, des travaux intéressants ont été réalisés par I.A. Brin [7]. Plus tard, plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire [8-9].

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier  ${}_{t_0}D_t^m$  où  $t_0$  et  $t$  sont des limites de l'opération. L'opérateur intégro-différentiel continu est défini par [10] :

$${}_{t_0}D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} & R(m) > 0 \\ 1 & R(m) = 0 \\ \int_{t_0}^t (d\tau)^{-m} & R(m) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $m \in \mathbb{C}$  est l'ordre de l'opération,  $\mathbb{C}$  est l'anneau des nombres complexes et  $\Re(\cdot)$  symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

### 2. Définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions [10]. Nous citerons les définitions de Grünwald-Letnikov [10], de Caputo [11] et de Riemann-Liouville [10]

### 2.1. Dérivée de Grünwald-Letnikov

La définition de la dérivée d'ordre fractionnaire la plus rencontrée est celle de Grünwald-Letnikov, donnée par :

$${}_{t_0}D_t^\alpha y(t) = \frac{{}_{t_0}d_t^\alpha (y(t))}{dt^\alpha} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ Nh=t-t_0}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t-kh) \quad (2.2)$$

$$\text{Où } \binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, k \geq 1, t_0 < t \text{ et } \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.3)$$

Cette définition provient de la généralisation aux ordres fractionnaires de la formule donnant la dérivée d'ordre entier supérieur  $n$  d'une fonction continue  $y(t)$ , soit :

$$D^n y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n}{k} y(t-kh), n, N \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

Sous la condition que les dérivées  $y^{(k)}(t)$  ( $k=1, 2, \dots, m+1$ ) sont continues dans  $[t_0, t]$  avec  $m \leq \Re(\alpha) < m+1$ , la définition de Grünwald-Letnikov peut être aussi donnée par [10] :

$${}_{t_0}D_t^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^m \frac{y^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-\alpha} y^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

Où  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma généralisée aux nombres fractionnaires, définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (2.6)$$

### 2.2. Dérivée de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par :

$${}_{t_0}^c D_t^m f(t) \equiv I^{n-m} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{m-n+1}} d\tau \quad (2.7)$$

Où le nombre entier  $n$  vérifie l'inégalité  $(n-1) < m < n$ .

### 2.3. Intégrale de Riemann-Liouville :

Soient  $C$  et  $R$  les anneaux des nombres complexes et réels respectivement,  $\Re(\cdot)$  symbolise la partie réelle d'un nombre complexe. Soient  $\alpha \in C$  avec  $\Re(\alpha) > 0, t_0 \in R$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$ . L'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre  $m$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par :



$${}^{RL}I_{t_0}^m f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

Avec  $t > t_0$  et  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy \quad (2.9)$$

#### 2.4. Dérivée de Riemann-Liouville :

Soient  $C$  et les anneaux des nombres complexes et réels respectivement,  $\Re(\cdot)$  symbolise la partie réelle d'un nombre complexe. Soient  $\alpha \in C$  avec  $\Re(\alpha) > 0, t_0 \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$ . La dérivée de Riemann-Liouville d'ordre  $m$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par :

$${}^{RL}D_t^m f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(n-m)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-m-1} f(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

Où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < m < n$ .

Notons que la dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (2.8) comme suit:

$${}^{RL}D_t^m f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{I^{n-m} f(t)\} \quad (2.11)$$

### 1. Quelques propriétés de la dérivation non entière

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes:

1. Si  $f(t)$  est une fonction analytique de  $t$ , alors, sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^m f(t)$  est une fonction analytique de  $t$  et  $m$ .
2. Pour  $n=m$ , où  $n$  est un entier, l'opération  $D^m f(t)$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier  $n$ .
3. Pour  $m=0$  l'opération  $D^m f(t)$  est l'opérateur identité:  $D^0 f(t) = f(t)$ .
4. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires  
 $D^m a f(t) + D^m b g(t) = a D^m f(t) + b D^m g(t)$ .
5. La loi additive (propriété du semi-groupe)  $D^m D^n f(t) = D^{m+n} f(t)$  est valable, sous certaines contraintes sur la fonction  $f(t)$ .
6. la dérivée non entière de  $f(t)$  nécessite la connaissance de  $f(t)$  sur l'intervalle  $[t_0, t]$  alors que dans le cas entier, seule la connaissance "locale" autour de  $t$  est nécessaire. Cette propriété permet d'interpréter les systèmes non entiers comme des systèmes à mémoire longue et les systèmes entiers comme des systèmes à mémoire courte.

## 2. Exemples de calcul de dérivée non entière

### 2.1. Dérivation non entière d'une exponentielle

Pour un nombre  $z$  quelconque, on a [12]:

$$D^{(\alpha)}[e^{(z.t)}] = z^\alpha \cdot e^{(z.t)} \quad (2.12)$$

Où  $D^{(\alpha)}$  est la dérivée d'ordre  $\alpha$  par rapport à la variable  $t$ .

### 2.2. Dérivation non entière d'un cosinus (ou d'un sinus)

En utilisant le fait qu'un cosinus (resp. un sinus) est égal à la partie réelle (resp. imaginaire) d'une exponentielle et que l'opérateur dérivée non entière est linéaire [12], on peut déterminer facilement la dérivée non entière d'ordre  $\alpha$  d'un cosinus (resp. un sinus).

$$D^{(\alpha)}[\cos(w_0 t - \varphi)] = w_0^\alpha \cdot \cos\left(w_0 t - \varphi + \alpha \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.13)$$

$$D^{(\alpha)}[\sin(w_0 t - \varphi)] = w_0^\alpha \cdot \sin\left(w_0 t - \varphi + \alpha \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.14)$$

La figure (1.1) ci-dessous illustre cette notion de dérivée non entière pour une fonction sinusoïdale caractérisée par une pulsation de 10 rad/s et un déphasage nul.

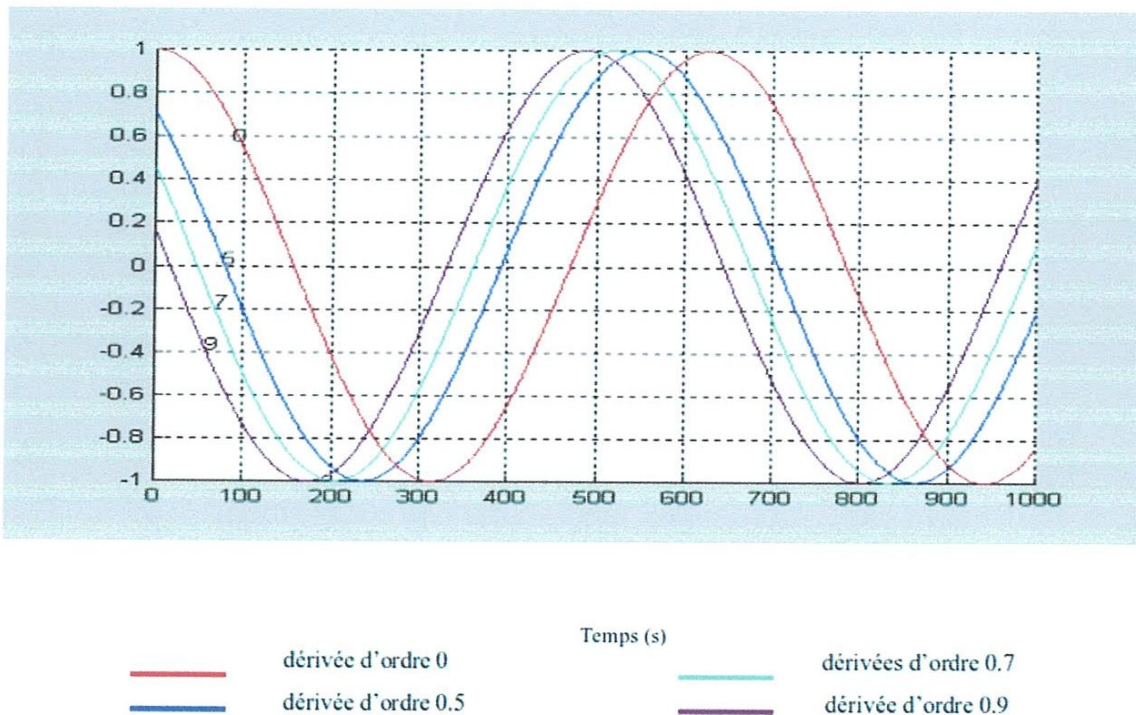


Figure (1.1) Dérivation d'ordre  $\alpha$  d'une fonction sinusoïdale

### 3. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

#### 3.1. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\lambda > 0$ , définie par l'équation (2.8), qu'on peut écrire comme une convolution des fonctions  $g(t) = t^{\lambda-1}$  et  $f(t)$  est donnée par :

$$I^\lambda f(t) = D^{-\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau = t^{\lambda-1} * f(t) \quad (2.15)$$

La transformée de Laplace de la fonction  $t^{\lambda-1}$  est :

$$G(s) = L[t^{\lambda-1}, s] = \Gamma(\lambda) s^{-\lambda} \quad (2.16)$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution:  $L\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$ , on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville :

$$L\{I^\lambda f(t)\} = s^{-\lambda} F(s) \quad (2.17)$$

#### 3.2. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\lambda > 0$ , définie par l'équation (2.10), est donnée par :

$$L\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) + \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\mu-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (2.18)$$

Avec  $(n-1) < \mu < n$ .

Cette transformée est bien connue [13], mais son utilisation en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour  $t = 0$ .

## 4. Représentation d'un système d'ordre fractionnaire

#### 4.1. Équations différentielles et fonctions de transfert d'ordre fractionnaires

Un système d'ordre fractionnaire peut être décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme [13]:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (2.19)$$

Ou par une fonction de transfert continue de la forme :

$$G(s) = \frac{b_m S^{\beta_m} + b_{m-1} S^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 S^{\beta_0}}{a_n S^{\alpha_n} + a_{n-1} S^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 S^{\alpha_0}} \quad (2.20)$$



Où :  $a_k$  ( $k = 0, \dots, n$ ),  $b_k$  ( $k = 0, \dots, n$ ) sont des constantes,  $\alpha_k$  ( $k = 0, \dots, n$ ),  $\beta_k$  ( $k = 0, \dots, n$ ) sont des nombres réels arbitraires.

#### 4.2. Représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire

Comme dans le cas entier, une représentation d'état d'ordre fractionnaire comporte deux équations:

- Une équation d'état d'ordre fractionnaire dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre fractionnaire réel;
- Une équation d'observation identique à celle du cas entier.

Elle est ainsi définie par le système d'équation :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.21)$$

Dans lequel :

- $u$  : est le vecteur des entrées de dimension  $(n_e \times 1)$  ;
- $x$  : est le vecteur d'état d'ordre fractionnaire de dimension  $(n_x \times 1)$  ;
- $y$  : est le vecteur des sorties de dimension  $(n_y \times 1)$  ;
- $\alpha$  : est l'ordre de dérivation tel que  $0 < \alpha < 1$  ;

$A, B, C$  et  $D$  : sont tous des matrices ou des vecteurs à éléments constants et de dimensions appropriées.

### 5. Approximation analogique des opérateurs fractionnaires

D'habitude les simulations sont effectuées avec un logiciel préparé pour traiter seulement les puissances d'ordre entier de  $s$ . Alors, il est très important de trouver des approximations d'ordre entier pour des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire. Autrement dit, lorsque les simulations doivent être exécutées ou les correcteurs doivent être implémentés, les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire sont remplacées par des fonctions de transfert d'ordre entier, avec un comportement assez identique à celles désirées, mais beaucoup plus facile à manipuler. Notons que les approximations disponibles dans le domaine fréquentiel «  $s$  » sont appelées : Approximations analogiques.

Il existe plusieurs méthodes pour trouver de telles approximations. Dans la référence [14], on peut trouver un très bon résumé des méthodes d'approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire existantes dans la littérature, dont nous pouvons citer :

- Méthode EFC (Expansion Fractionnaire Continue) ;
- Méthode de Carlson ;
- Méthode de Matsuda ;
- Méthode d'Oustaloup ;
- Méthode de Charef ;
- Autres méthodes (Roy, Wang, Jones...).

Le choix d'une méthode parmi les autres, dépend de la structure du système que l'on cherche à simuler. Nous choisirons, bien évidemment, la mieux adaptée au problème.

### 5.1. Approximations par CFE (Continued Fraction Expansions – CFE)

Les fractions en chaîne continues (Continued Fraction Expansions – CFE) représentent une méthode à convergence rapide pour l'évaluation de l'approximation de différentes fonctions irrationnelles. La forme généralisée de la fraction en chaîne continue [15,16] du nombre réel  $x$  est donnée par (2.22) ou par (2.23), ou encore plus simplifiée par (2.24), avec la notation abrégée (2.25). Pour les résidus dans les expressions on a (2.26) et (2.27).

$$x = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots}}} \quad (2.22)$$

$$x = a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots \quad (2.23)$$

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad (2.24)$$

$$x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots] \quad (2.25)$$

$$r_0 = x \quad (2.26)$$

$$r_0 = \frac{1}{r_{n-1} - a_{n-1}} \quad (2.27)$$

Les fractions en chaîne continues sont utilisées pour la détermination des relations entre des événements de périodicité différente ainsi que pour le calcul des nombres de transfert. Une autre application des CFE [14] est l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires. Les fractions en chaîne continues sont utilisées pour la conception de circuits réels qui simulent le comportement des systèmes dynamiques fractionnaires.

### 5.2. Méthode de Carlson

La méthode proposée par Carlson [17], tirée du processus régulier de Newton, utilisé pour l'approximation itérative de  $\alpha^{\text{ème}}$  racine, peut être utilisée pour l'approximation itérative de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $s^\alpha$ . Cette méthode est basée sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\alpha} - (G(s)) = 0; H(s) = (G(s))^\alpha \quad (2.28)$$

En posant  $\alpha = 1/q$ ,  $m = q/2$ , à chaque itération à partir de la valeur initiale  $H_0(s) = 1$ , une fonction rationnelle d'approximation de  $(G(s))^\alpha = s^\alpha$  peut être donnée par :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (2.29)$$

Le modèle d'approximation est obtenu ensuite, en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle par son approximation rationnelle.

### 5.3. Méthode de Matsuda

La méthode proposée par [18] est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $G(s)^\alpha = s^\alpha$  par une fonction rationnelle  $\hat{G}(s)$  en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain. Le gain est calculé en utilisant  $M$  fréquences réparties dans une bande de fréquence  $[w_0, w_M]$  dans laquelle se fait l'approximation. Pour un ensemble de points sélectionnés  $w_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ , l'approximation prend la forme :

$$\hat{G}(s) = a_0 + \frac{(s-w_0)(s-w_1)(s-w_2) \dots}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots} = \left[ a_0; \frac{s-w_{i-1}}{a_i} \right]_{i=1}^M \quad (2.30)$$

$$\text{Où} \quad a_i = f_i(w_i), f_{i+1}(s) = \frac{s-w_i}{f_i(s)-a_i} \quad \text{et} \quad f_0(w) = |G(jw)|, i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (2.31)$$

Le modèle d'approximation est obtenu en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation.

### 5.4. Méthode d'Oustaloup

La méthode d'Oustaloup [19] repose sur l'approximation en temps continu de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $G(s) = s^\alpha, \alpha \in \mathfrak{R}$ , par une fonction rationnelle en utilisant une distribution récursive de zéros et pôles d'ordre entier, répartis dans une bande de fréquence limitée. Ainsi, l'approximation de l'opérateur  $s^\alpha$  dans une bande de fréquence est donnée par :

$$G(s) = s^\alpha \approx \hat{G}(s) = C_0 \prod_{i=1}^N \left( \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \right) \quad (2.32)$$

Avec :

$$si \alpha > 0 : \begin{cases} z_1 = w_b \sqrt{\eta} \\ p_i = z_i \lambda, & i = 1, 2, \dots, N \\ z_{i+1} = p_i \eta, & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ w_h = p_N \sqrt{\eta} \end{cases}, si \alpha < 0 : \begin{cases} p_1 = w_b \sqrt{\eta} \\ z_i = p_i \lambda, & i = 1, 2, \dots, N \\ p_{i+1} = z_i \eta, & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ w_h = z_N \sqrt{\eta} \end{cases} \quad (2.33)$$

$$N = \text{Partie entière de} \left\{ \frac{\log \{w_h / w_b\}}{\log \{\alpha \eta\}} \right\} \quad (2.34)$$

$$\alpha = \left( \frac{w_h}{w_b} \right)^{\lambda/N}, \quad \eta = \left( \frac{w_h}{w_b} \right)^{(1-|\alpha|)/N} \quad (2.35)$$



Le modèle rationnel est obtenu ensuite en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire du modèle original par son approximation rationnelle. La sortie du modèle est donc la convolution du modèle rationnel obtenu avec le signal d'entrée.

### 5.5. Méthode de Charef

Cette méthode d'approximation rationnelle de Charef proposée dans [20,21], est basée sur l'approximation d'une fonction de la forme :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^\alpha} \quad (2.36)$$

Par un quotient de polynômes en fonction de  $s$  sous la forme :

$$\hat{H}(s) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.37)$$

Les  $p_i$  et  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation.

Où les coefficients sont calculés pour obtenir une déviation maximale de la réponse originale de l'amplitude dans le domaine fréquentiel de. On définit :

$$a = 10^{y/10(\alpha-1)}, b = 10^{y/10\alpha}, ab = 10^{y/10\alpha(1-\alpha)} \quad (2.38)$$

Les pôles et les zéros de la fonction rationnelle approximée sont obtenus à partir des formules suivantes :

$$p_0 = p_T \sqrt{b}, p_i = p_0(ab)^i, z_i = ap_0(ab)^i \quad (2.39)$$

Le nombre des pôles et des zéros est lié à la largeur de la bande désirée et au critère d'erreur utilisé par l'expression :

$$N = \text{Partie entière de} \left[ \frac{\log\left(\frac{w_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (2.40)$$

Où  $y$  est l'erreur d'approximation et  $w_{\max}$  la bande de fréquences d'approximation.

### 5.6. Méthode basant sur l'approche de l'identification fréquentielle

Cette approche utilise la fonction de Matlab 'fitfrd.m'. L'idée est de déterminer la réponse fréquentielle du transfert fractionnel dans une bande de fréquences prédéfinie à l'avance par l'utilisateur. Le vecteur des réponses fréquentielles ainsi que le vecteur des fréquences correspondantes sont ensuite utilisés comme des entrées de la fonction 'fitfrd.m' du Matlab afin de construire le filtre approximant en module et en phase la fonction de transfert d'ordre non entier.



### 5.7. Exemples d'approximation d'un opérateur d'ordre fractionnaire

#### 5.7.1. Approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Soit l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire suivant :

$$H(s) = \frac{1}{s^{0.55}}$$

Pour obtenir la fonction rationnelle d'approximation de cet opérateur d'ordre fractionnaire, on suppose que la bande de fréquences est donnée par  $[w_b, w_h] = [0.001 \text{ rad/sec}, 0.1 \text{ rad/sec}]$ . Les tracés de Bode des fonctions rationnelles obtenues par différentes approximations (Charef, Oustaloup et Matsuda) sont présentés dans les figures suivantes.

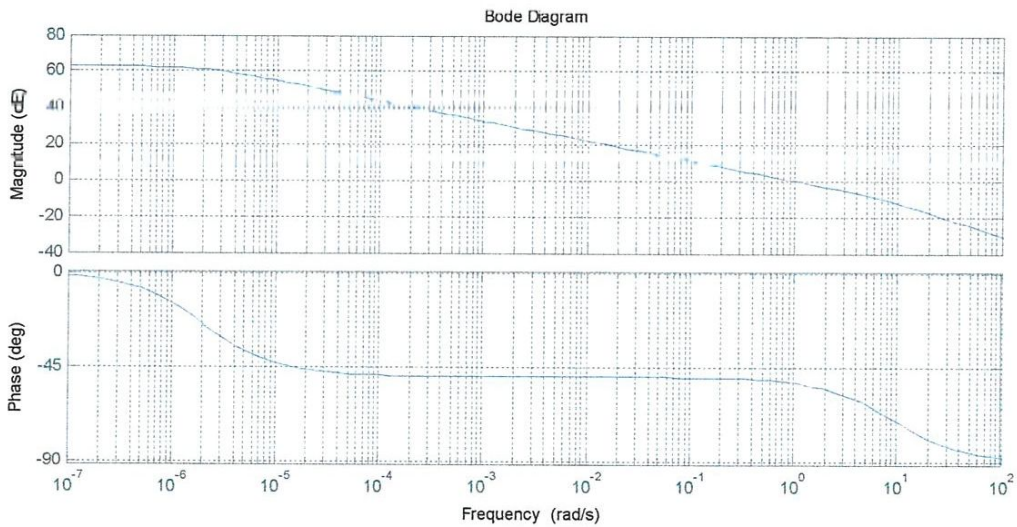


Figure (1.2) Approximation de Charef de l'intégrateur fractionnaire  $\frac{1}{s^{0.55}}$ .

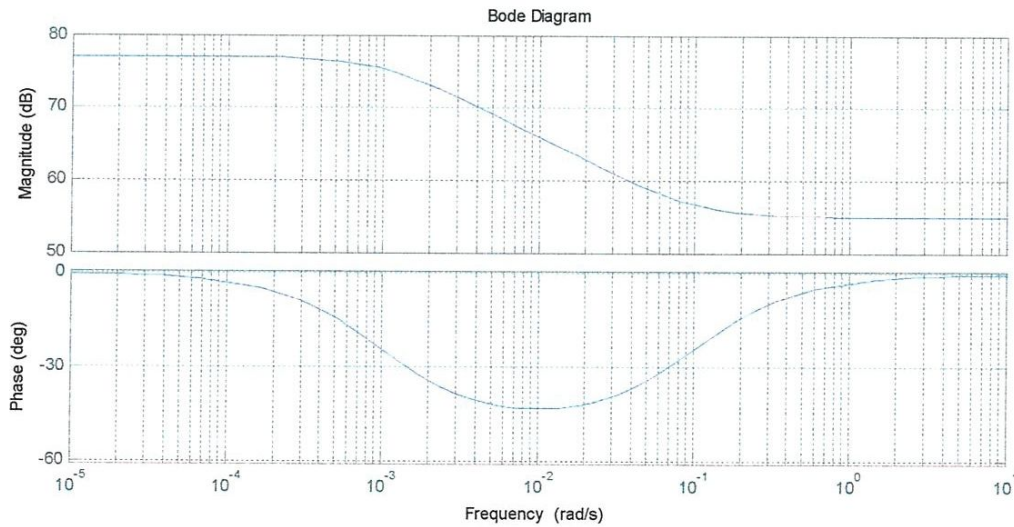


Figure (1.3) Approximation d'Oustaloup de l'intégrateur fractionnaire  $\frac{1}{s^{0.55}}$ .

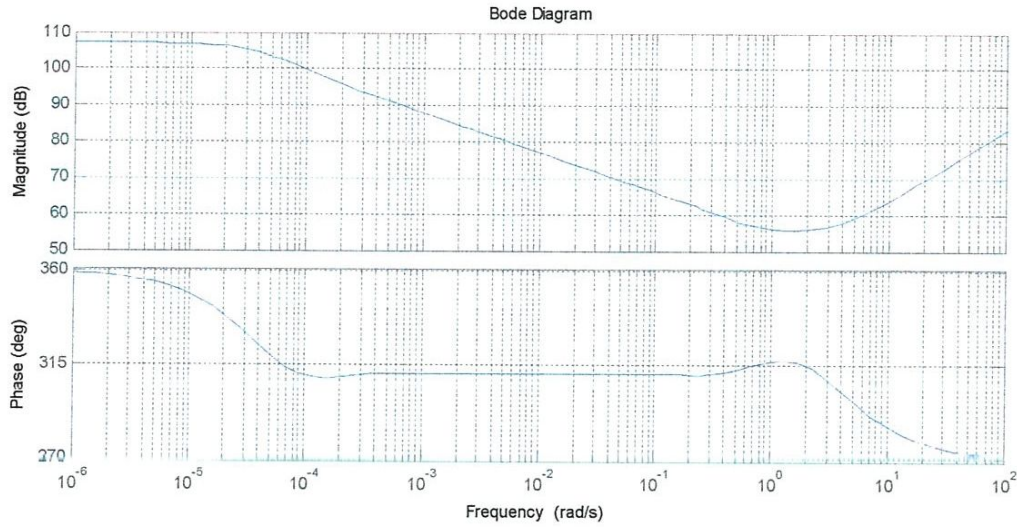


Figure (1.4) Approximation de Matsuda d'un intégrateur fractionnaire  $\frac{1}{s^{0.55}}$ .

### 5.7.2. Approximation d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

Soit l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire suivant :

$$G_D(s) = s^{0.85}$$

Avec :  $[w_b, w_h] = [100rad / sec, 10000rad / sec]$  est la bande de fréquences sur laquelle s'effectuera l'approximation. Les figures suivantes représentent les tracés de Bode obtenus pour les approximations de Charef, Oustaloup et Matsuda.

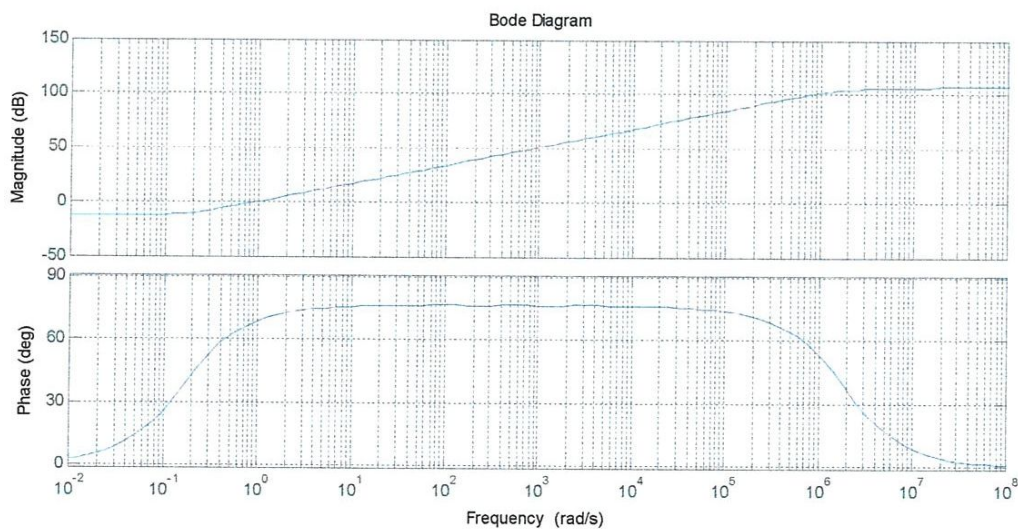


Figure (1.5) Approximation de Charef du dérivateur fractionnaire  $s^{0.85}$ .



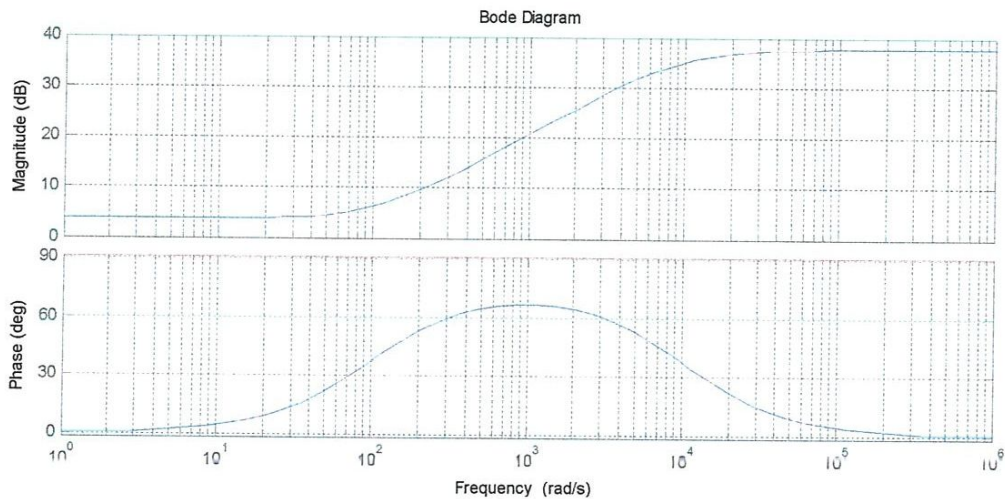


Figure (1.6) Approximation d'Oustaloup du dérivateur fractionnaire  $s^{0.85}$ .

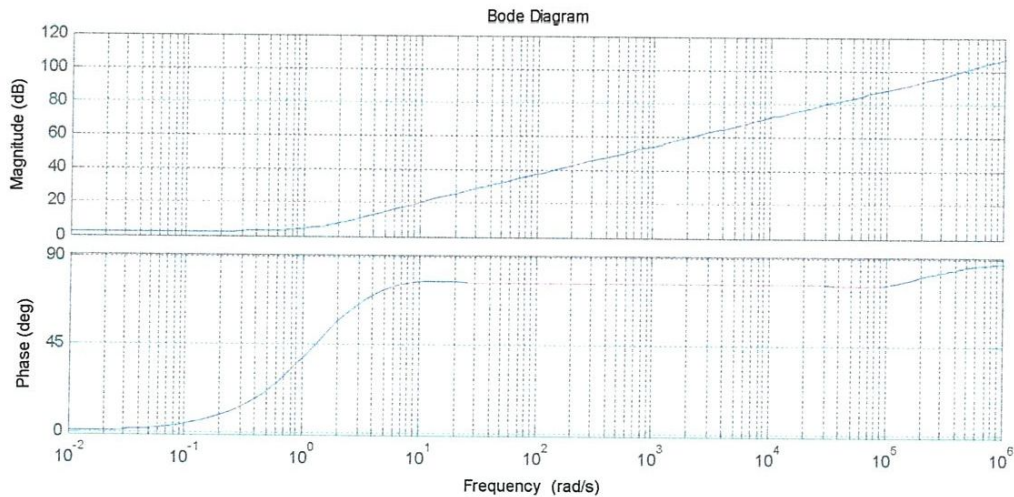


Figure (1.7) Approximation de Matsuda du dérivateur fractionnaire  $s^{0.85}$ .

La méthode de Charef est plus précise pour les approximations des fonctions de transferts d'ordre fractionnaire, c'est pourquoi nous l'utiliserons dans notre mémoire.

## 6. Discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire

L'étape clé dans l'implémentation numérique d'un correcteur d'ordre fractionnaire est l'évaluation numérique ou la discrétisation des dérivations d'ordre fractionnaire. En général, il y a deux types de méthodes de discrétisation : la discrétisation directe et la discrétisation indirecte. Dans les méthodes de discrétisation indirecte, deux étapes sont nécessaires, l'approximation analogique du dérivateur puis la discrétisation de la fonction de transfert en  $s$  obtenue. Les méthodes de discrétisation directe existantes incluent l'application du développement direct en série de puissances de l'opérateur d'Euler, le développement fractionnaire continu de l'opérateur de Tustin et les méthodes basées sur l'intégration numérique [22, 23].

Pour obtenir les modèles discrets des systèmes d'ordre fractionnaire, il est nécessaire d'utiliser des approximations discrètes des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. En faisant cela

dans l'équation (1.20) de  $G(s)$ , une expression générale pour la fonction de transfert discrète du système d'ordre fractionnaire  $G(z)$ , peut être obtenue sous la forme :

$$G(z) = \frac{b_m(w(z^{-1}))^{\beta_m} + b_{m-1}(w(z^{-1}))^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0(w(z^{-1}))^{\beta_0}}{a_n(w(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1}(w(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0(w(z^{-1}))^{\alpha_0}} \quad (2.41)$$

Où  $w(z^{-1})$  représente l'équivalent discret de l'opérateur de Laplace  $s$ , exprimé comme une fonction de la variable complexe  $z$  ou l'opérateur de décalage  $z^{-1}$ .

Comme on peut le voir dans les expressions précédentes, un système d'ordre fractionnaire possède une fonction de transfert continue irrationnelle dans le domaine de Laplace et une fonction de transfert discrète de dimension infinie dans le domaine de  $Z$ . En d'autres termes, un système d'ordre fractionnaire a une mémoire illimitée, au contraire des systèmes d'ordre entier où la mémoire est limitée. Il est évident que seulement dans le cas des systèmes d'ordre entier, on peut réaliser exactement une fonction de transfert en utilisant les éléments électriques conventionnels (résistances, inductances et capacités), ou en utilisant les procédures conventionnelles (équations aux différences d'ordre fini ou filtres numériques dans le cas des réalisations discrètes). La dernière étape dans l'implémentation d'un système de commande d'ordre fractionnaire exige une forme réalisable de celui-ci, c'est pour cela que nous nous sommes intéressés aux approximations d'ordre entier discrètes des opérateurs et fonctions d'ordre fractionnaire. En effet, une difficulté majeure avec les modèles d'ordre fractionnaire est la simulation dans le domaine temporel. Souvent, l'expression analytique de la sortie d'un modèle n'est pas simple à implémenter.

La discrétisation des systèmes fractionnaires peut être effectuée à l'aide de quelques types d'opérateurs dont ceux de Tustin (2.42), Euler-Grünwald Letnikov (2.43), Al-Alaoui M. A. (2.44), Simpson (2.45) [24].

Notons que  $s = j\omega$  est la fréquence complexe,  $z = e^{(j\omega T)}$  est une variable complexe et  $T$  est la période d'échantillonnage.

### 6.1. La Transformation Bilinéaire (Tustin)

La méthode de transformation de Tustin, connue sous le nom de la méthode trapézoïdale d'intégration, est basée sur l'équation de la transformation bilinéaire donnée par :

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (2.42)$$

### 6.2. La Transformation Backward (Euler)

Cette méthode de discrétisation est simple et consiste à produire un filtre discret stable à partir d'un filtre analogique stable. L'équation de la transformation Backward est donnée par :

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \quad (2.43)$$

### 6.3. L'équation de la transformation Al-Alaoui

Elle est donnée par :

$$s = \frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7} \quad (2.44)$$



#### 6.4. La Transformation de Simpson

Elle est donnée par :

$$s = \frac{3}{T} \frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})}{1+4z^{-1}+z^{-1}} \quad (2.45)$$

### 7. Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul d'ordre fractionnaire. Nous y avons répertorié quelques notions essentielles sur le calcul d'ordre fractionnaire nécessaires pour aborder notre travail sur les correcteurs d'ordre fractionnaire. Après un historique sur le calcul d'ordre fractionnaire, nous avons présenté les définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire. Les caractéristiques et les méthodes de représentation et d'approximation de ces opérateurs ont été également étudiées.

# Chapitre 3

## Approximation Analogique et Discrétisation

### 1. Introduction

En général, une approximation rationnelle de la fonction  $H(s) = s^{-m}$ ,  $0 < m < 1$  (Intégration d'ordre fractionnaire) peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues :

$$s^{-m} = \begin{cases} H_h(s) = \frac{1}{(1+Ts)^m} \\ H_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^m \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $H_h(s)$  est l'approximation pour les hautes fréquences ( $\omega T \gg 1$ ), et  $H_l(s)$  est l'approximation pour les basses fréquences ( $\omega T \ll 1$ ).

Plusieurs méthodes ont été proposées pour l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire, un aperçu sur ces méthodes a été présenté précédemment au premier chapitre. Dans ce qui suit nous allons détailler une méthode d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire qui sera utilisé plus tard dans notre mémoire, cette méthode est développée par Charef en 1992 et nommé la méthode de la fonction singulière, c'est une approche qui repose sur une méthode graphique, elle consiste à approximer la ligne de pente fractionnaire sur le tracé de Bode de la fonction de transfert irrationnelle par un nombre de lignes sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente correspondant à une alternance de pôles et de zéros.

Nous entamerons aussi dans ce chapitre la discrétisation ou la transformation de fréquence du plan P au plan Z. Pour cela, nous utiliserons des méthodes classiques de discrétisation bien connues tel que la méthode Backward ou la méthode Bilinéaire.

### 2. Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire (Méthode de Charef)

#### 2.1. Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^m} \quad (3.2)$$

Avec  $s=j\omega$  la fréquence complexe et  $m$  est un nombre positif tel que  $0 < m < 1$ . Dans une bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$H(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \quad (3.3)$$

Si on suppose que pour  $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$  on a :  $\omega \gg \omega_c$ , on peut écrire :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} \quad (3.4)$$

Avec  $K_I = (1/\omega_c^m)$  et  $\omega_c$  est la fréquence de coupure du PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $\omega_b$  :  $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)} - 1}$  où  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (3.2) et le PPF de l'équation (3.3) dans la bande de fréquence donnée  $[\omega_b, \omega_h]$ .

Dans le but de représenter le pôle d'ordre fractionnaire de l'équation (3.3) et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une rationnelle [20,21].

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de  $20\text{dB/dec}$  sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de lignes sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente  $20\text{ dB/dec}$  et  $0\text{ dB/dec}$  correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan  $s$  tel que :  $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{n-1} < p_n$ . D'où l'approximation suivante :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.5)$$

Les  $p_i$  et  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation.

Comme premières remarques, notons que ces pôles et zéros sont sous forme d'une progression géométrique, l'approximation introduit une erreur d'approximation  $\gamma$  en dB et qu'elle est valable sur une bande de fréquence d'approximation  $\omega_{\max}$ .

Pour déterminer le nombre  $n$ , la bande de fréquence sur laquelle l'approximation est faite doit être spécifiée. Soit  $\omega_{\max}$  cette bande, telle que  $\omega_{\max}$  est prise 100 fois égale à  $\omega_h$ , son expression est donnée par [20,21] :

$$n = \text{Partie entière de } \left[ \frac{\log\left(\frac{w_{\max}}{P_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (3.6)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0 \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n$$

$$z_i = (ab)^i ap_0 \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n-1$$

Où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de y et m sont donnée par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)} \quad (3.7)$$

Et le premier pôle  $p_0$  et le premier zéro  $z_0$  sont donnés par [14,18] :

$$p_0 = w_c \sqrt{b}, z_0 = ap_0 \quad (3.8)$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$H_I(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)} = \sum_{i=0}^n \frac{h_i}{1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}} \quad (3.9)$$

Où les coefficients  $h_i$  sont les résidus et qui sont déterminés par :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j ap_0}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n \left(1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j P_0}\right)} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n \left(1 - (ab)^{(i-j)}\right)}, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

## 2.2. Exemple d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Dans le but d'illustrer cette méthode, prenons un exemple numérique d'un intégrateur d'ordre fractionnaire représenté par :

$$H(s) = \frac{1}{s^{0.5}}$$

Pour obtenir la fonction rationnelle d'approximation de cet opérateur d'ordre fractionnaire, nous supposons que la bande de fréquences est donnée par  $[w_b, w_h] = [100 \text{ rad/sec}, 10000 \text{ rad/sec}]$ . Pour  $\varepsilon = 10^{-5}$ , on obtient  $w_c = 0.2146, K_I = 0.4632$ . Alors, le PPF de cet opérateur d'ordre fractionnaire est donné par :



$$H(s) = \frac{0.4632}{\left(1 + \frac{s}{0.2146}\right)^{0.5}}$$

Nous choisissons l'erreur du PPF  $y = 1$  dB. La bande fréquentielle d'approximation étant  $w_{\max} = 100w_h = 10^6 \text{ rad/s}$ , les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $z_0$  et  $n$  peuvent être facilement calculés et les résultats sont comme suit :

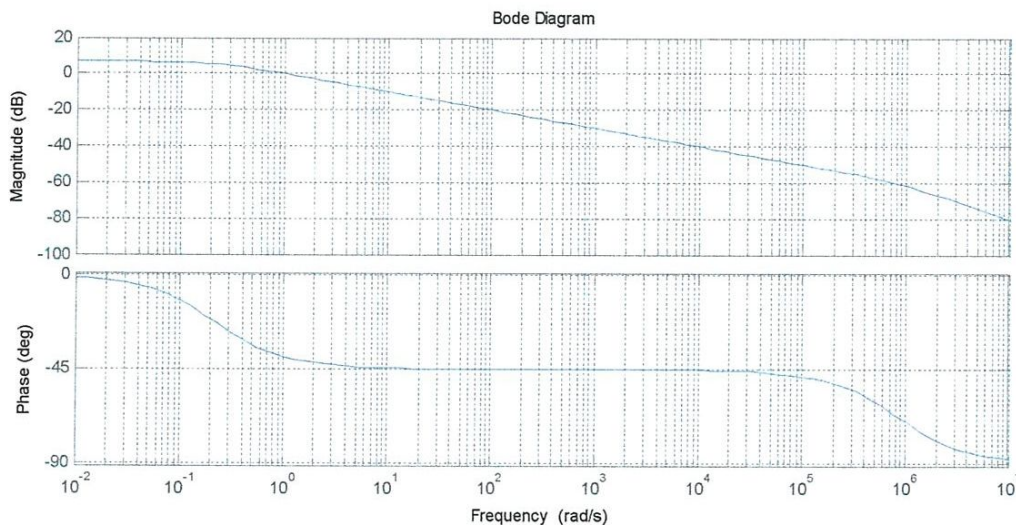
$$a=1.5849 \quad b=1.5849 \quad p_0=0.2702 \text{ rad/s} \quad z_0=0.4282 \text{ rad/s} \quad n=17$$

Alors, les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes:

$$p_0=0.2702(2.7530)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,17$$

$$z_0=0.4282(2.7530)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,16$$

Et le tracé de Bode de la fonction rationnelle d'approximation est présenté dans la figure (3.1).



**Figure (3.1)** Tracé de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-0.5}$

Nous remarquons bien que dans la plage de fréquence  $[100,10000]$ , la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire à une pente de  $10\text{dB/dec}$  et une phase de  $-45^\circ$ , ce qui implique la justesse de l'approximation.

### 2.3. Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur intégral d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^m \tag{3.11}$$

Avec  $s=jw$  la fréquence complexe et  $m$  est un nombre positif tel que  $0 < m < 1$ .

Dans une bande de fréquence donnée  $[w_b, w_h]$ , cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit :

$$G_D(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{w_c} \right)^m \quad (3.12)$$

En supposant que  $w \in [w_b, w_h]$  et  $w \gg w_c$ , on peut écrire :

$$D_D(s) = K_D \left( \frac{s}{w_c} \right)^m = \frac{K_D}{w_c^m} s^m = s^m \quad (3.13)$$

Avec  $K_D = (1/w_c^m)$  et  $w_c$  est la fréquence de coupure du ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence  $w_b$  :  $w_c = w_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)} - 1}$  où  $\varepsilon$  est l'erreur maximale permise entre la pente de l'opérateur de puissance fractionnaire de l'équation (3.11) et le ZPF de l'équation (3.12) dans la bande de fréquence donnée  $[w_b, w_h]$ .

Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (3.12), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une rationnelle.

La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de  $20\text{mdB/dec}$  sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne sous forme de Zig-Zag, produite par une alternance de pente  $20\text{ dB/dec}$  et  $0\text{ dB/dec}$  correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négatif du plan  $s$  tel que :  $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{n-1} < p_n$ . D'où l'approximation suivante :

$$G_D(s) = K_D \left( 1 + \frac{s}{w_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^n \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^n \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (3.14)$$

Les  $p_i$  et  $z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation.

Notons que dans ce cas aussi les pôles et les zéros sont sous forme d'une progression géométrique, l'approximation introduit une erreur d'approximation  $y$  en dB et qu'elle est valable sur une bande de fréquence d'approximation  $w_{\max}$ .

Le nombre  $n$  est déterminé de la même façon, décrit par l'expression (3.6), que pour l'intégrateur. L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est, alors, établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0 \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n$$

$$p_i = (ab)^i az_0 \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n$$

Où  $a$  et  $b$  sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de  $y$  et  $m$  sont donnée par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)} \quad (3.16)$$

Avec :

$$p_0 = w_c \sqrt{b}, z_0 = ap_0 \quad (3.17)$$

Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans la bande de fréquence considérée sera :

$$G_D(s) = s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} \quad (3.18)$$

Pour des raisons de réalisabilité, nous développons  $\frac{G_D(s)}{s}$  en fonctions élémentaires, alors :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} K_D \cdot \prod_{i=0}^n \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i az_0}\right)} \quad (3.19)$$

En calculant les résidus des pôles, nous obtenons :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^n \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.20)$$

Avec  $G_0 = K_D$

Et 
$$g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^n (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{\left(- (ab)^i az_0\right) \prod_{j=0, j \neq i}^n (1 - (ab)^{(i-j)})} \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n \quad (3.21)$$

#### 2.4. Exemple d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

Soit l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire suivant :

$$G_D(s) = s^{0.85}$$

De la même façon que l'exemple du PPF, le modèle ZPF du dérivateur d'ordre fractionnaire est donné par :

$$G(s) = 1.5274 \left(1 + \frac{s}{1.6459}\right)^{0.85}$$

Avec :  $K_I = 0.4632, [w_b, w_h] = [100 \text{ rad / sec}, 10000 \text{ rad / sec}], w_c = 0.2146, \varepsilon = 10^{-5}$ .



Nous choisissons l'erreur du PPF  $y = 0.5$  dB. La bande fréquentielle d'approximation étant  $\omega_{\max} = 100\omega_h = 10^6 \text{ rad/s}$ , les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $p_0$ ,  $z_0$  et  $n$  peuvent être facilement calculés et les résultats sont comme suit :

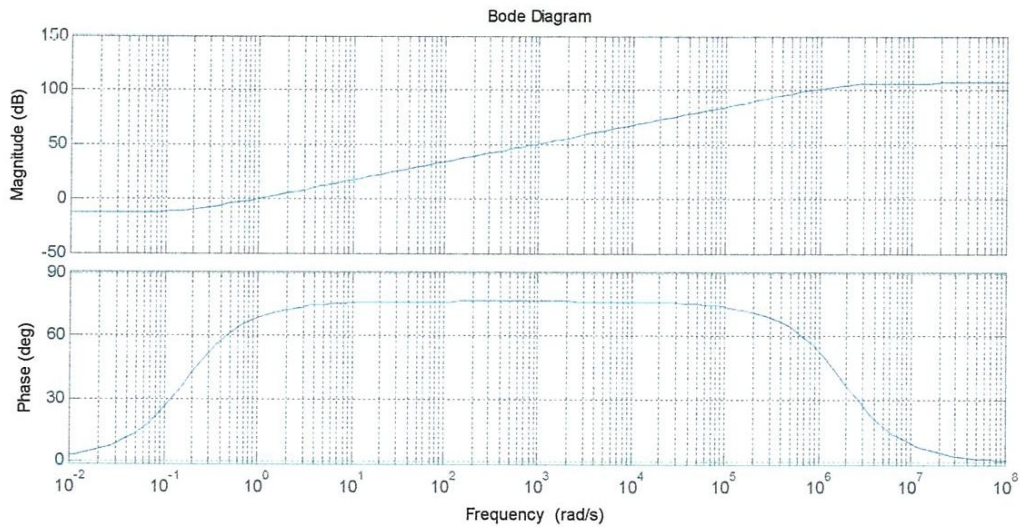
$$a=2.1544 \quad b=1.1450 \quad p_0=3.7944 \text{ rad/s} \quad z_0=1.7612 \text{ rad/s} \quad n=17$$

Alors, les pôles et les zéros de l'approximation sont donnés par les équations suivantes:

$$p_i=0.2702(2.7530)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,17$$

$$z_i=0.4282(2.7530)^i, \text{ pour } i=0,1,\dots,16$$

Et le tracé de Bode de la fonction rationnelle d'approximation est présenté dans la figure (3.2).



**Figure (3.2)** Tracé de Bode de la fonction d'approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.85}$

Nous remarquons bien que dans la plage de fréquence [100,10000], la pente de la fonction d'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire à une pente de  $10\text{dB/dec}$  et une phase de  $76.5^\circ$ , ce qui implique la justesse de l'approximation.

### 3. Implémentation par des circuits électriques analogiques

#### 3.1. Intégration d'ordre fractionnaire

L'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme :

$$H_I(s) = \frac{K_I}{s^m} = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.22)$$

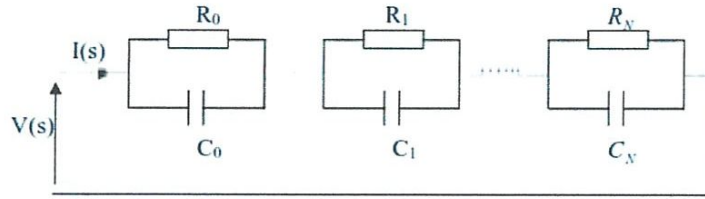


La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $H_I(s)$  donne :

$$H_I(s) = \sum_{i=0}^n \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.23)$$

Où les coefficients  $h_i$  sont les résidus déterminés par (3.10).

Cette équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Forster de la 1<sup>ère</sup> forme dont le schéma est représenté dans la figure (3.3)



**Figure (3.3)** Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

L'impédance de ce réseau est donnée par :

$$Z(s) = \sum_{i=0}^n \left( \frac{R_i}{1 + sR_iC_i} \right) \quad (3.24)$$

Que l'on peut faire correspondre à (3.23) en mettant :

$$\left. \begin{matrix} R_i C_i = \frac{1}{p_i} \\ R_i = h_i \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} R_i = h_i \\ C_i = \frac{1}{h_i p_i} \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n \quad (3.25)$$

### 3.2. Dérivée d'ordre fractionnaire

De la même manière, l'approximation rationnelle de la dérivée d'ordre fractionnaire peut être donnée par une fonction de la forme :

$$G_D(s) = K_D s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.26)$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle obtenue donne :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^n \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (3.27)$$

Où les  $g_i$  sont les résidus donnés par (3.21).

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Forster de la 2<sup>ème</sup> forme, dont le schéma est représenté à la figure (3.4).

L'admittance de ce réseau est de la forme :

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^n \left( \frac{sC_i}{1 + sR_iC_i} \right) \quad (3.28)$$

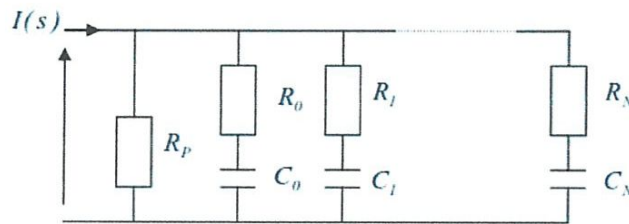


Figure (3.4) Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

Que l'on peut faire correspondre à (3.27) en mettant :

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{1}{R_i C_i} \\ g_i &= C_i \\ G_0 &= \frac{1}{R_p} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C_i = g_i \\ R_i = \frac{1}{G_0} \\ R_p = \frac{1}{G_0} \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n \quad (3.29)$$

## 4. Discrétisation de la fonction d'approximation rationnelle

### 4.1. Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

#### 4.1.1. Par la transformation Bilinéaire

La transformation Bilinéaire est connue dans la littérature souvent sous le nom de méthode trapézoïdale d'intégration, ou méthode de transformation de Tustin [25]. L'équation de la transformation bilinéaire est donnée par :

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (3.30)$$

Où  $s = j\omega$  est la fréquence complexe,  $z = e^{(j\omega T)}$  est une variable complexe et T est la période d'échantillonnage.

Cette transformation sert à obtenir un filtre discret stable à partir d'un filtre analogique stable. On a alors :

$$H_I(z) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \bigg|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \bigg|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} \quad (3.31)$$

On obtient le filtre RII suivant :

$$H_{Bil}(z) = K_I (z+1) \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left( \left(1 + \frac{2}{Tz_i}\right)z + \left(1 - \frac{2}{Tz_i}\right) \right)}{\prod_{i=0}^n \left( \left(1 + \frac{2}{Tp_i}\right)z + \left(1 - \frac{2}{Tp_i}\right) \right)} \quad (3.32)$$

$$\text{On pose} \quad \alpha_i = 1 + \frac{2}{Tz_i}, \quad \beta_i = \frac{2}{Tz_i} - 1 \quad (3.33)$$

$$\delta_i = 1 + \frac{2}{Tp_i}, \quad \lambda_i = \frac{2}{Tp_i} - 1 \quad (3.34)$$

Par substitution de (3.33) et (3.34) dans l'équation (3.32) on obtient :

$$H_{Bil}(z) = K_I (z+1) \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\alpha_i z - \beta_i)}{\prod_{i=0}^n (\delta_i z - \lambda_i)} \quad (3.35)$$

#### 4.1.2. Par la transformation Backward

La transformation Backward est une méthode simple de discrétisation qui produit un filtre discret stable à partir d'un filtre analogique stable [25].

$$\text{Soit :} \quad s = \frac{1-z^{-1}}{T} \quad (3.36)$$

Où  $s = j\omega$  est la fréquence complexe,  $z = e^{j\omega T}$  est une variable complexe et  $T$  est la période d'échantillonnage.

$$\text{Donc :} \quad H_I(z) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m} \bigg|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \bigg|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (3.37)$$

On aura par la suite :

$$H_{Bac} = K_I z \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \left( \left( 1 + \frac{1}{Tz_i} \right) z - \frac{1}{Tz_i} \right)}{\prod_{i=0}^n \left( \left( 1 + \frac{1}{Tp_i} \right) z - \frac{1}{Tp_i} \right)} \quad (3.38)$$

On Pose

$$\alpha_i = 1 + \frac{1}{Tz_i}, \quad \beta_i = \frac{1}{Tz_i} \quad (3.39)$$

$$\delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i}, \quad \lambda_i = \frac{1}{Tp_i} \quad (3.40)$$

Par substitution de (3.39) et (3.40) dans l'équation (3.38) on obtient :

$$H_{Bac}(z) = K_I z \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\alpha_i z - \beta_i)}{\prod_{i=0}^n (\delta_i z - \lambda_i)} \quad (3.41)$$

## 4.2. Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

### 4.2.1. Discrétisation par la transformation Bilinéaire

Soit :

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (3.42)$$

Et

$$G(z) = K_D \left( 1 + \frac{s}{w_c} \right)^m \bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^n \left( 1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^n \left( 1 + \frac{s}{p_i} \right)} \bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (3.43)$$

On aura donc:

$$G_{Bil}(z) = K_D \frac{\prod_{i=0}^n \left( \left( 1 + \frac{2}{Tz_i} \right) z + \left( 1 - \frac{2}{Tz_i} \right) \right)}{\prod_{i=0}^n \left( \left( 1 + \frac{2}{Tp_i} \right) z + \left( 1 - \frac{2}{Tp_i} \right) \right)} \quad (3.44)$$

On Pose

$$\alpha_i = 1 + \frac{2}{Tz_i}, \quad \beta_i = \frac{2}{Tz_i} - 1 \quad (3.45)$$

$$\delta_i = 1 + \frac{2}{Tp_i}, \quad \lambda_i = \frac{2}{Tp_i} - 1 \quad (3.46)$$

Par substitution de (3.45) et (3.46) dans l'équation (3.44) on obtient :



$$G_{Bil}(z) = K_D \frac{\prod_{i=0}^n (\alpha_i z - \beta_i)}{\prod_{i=0}^n (\delta_i z - \lambda_i)} \quad (3.47)$$

#### 4.2.2. Discrétisation par la transformation Backward

Soit :

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \quad (3.48)$$

Et

$$G(z) = K_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^m \bigg|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^n \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \bigg|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (3.49)$$

On aura :

$$G_{Bac}(z) = K_D \frac{\prod_{i=0}^n \left( \left(1 + \frac{1}{Tz_i}\right) z - \frac{1}{Tz_i} \right)}{\prod_{i=0}^n \left( \left(1 + \frac{1}{Tp_i}\right) z - \frac{1}{Tp_i} \right)} \quad (3.50)$$

En Posant

$$\alpha_i = 1 + \frac{1}{Tz_i}, \quad \beta_i = \frac{1}{Tz_i} \quad (3.51)$$

$$\delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i}, \quad \lambda_i = \frac{1}{Tp_i} \quad (3.52)$$

Et par substitution de (3.51) et (3.52) dans l'équation (3.50), on obtient :

$$G_{Bac}(z) = K_D \frac{\prod_{i=0}^n (\alpha_i z - \beta_i)}{\prod_{i=0}^n (\delta_i z - \lambda_i)} \quad (3.53)$$

Et

$$G_{Bac}(z) = \frac{\prod_{i=0}^n \left( z - \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)}{\prod_{i=0}^n \left( z - \frac{\lambda_i}{\delta_i} \right)} = const. \cdot \frac{\prod_{i=0}^n (z - z_i)}{\prod_{i=0}^n (z - p_i)} \quad (3.54)$$

Avec les  $z_i$  et les  $p_i$  sont les nouveaux pôles et zéros définis par :

$$z_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}, \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\delta_i} \quad (3.55)$$

Et

$$const = K_D \cdot \prod_{i=0}^n \frac{\alpha_i}{\delta_i} \quad (3.56)$$

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode d'approximation rationnelle de Charef pour pouvoir l'utiliser dans la suite de ce mémoire tout en essayant de mettre en évidence son efficacité par le biais de deux exemples d'application. Un aperçu sur l'implémentation analogique ainsi que la discrétisation des opérateurs fractionnaires par deux méthodes de transformation (Bilinéaire & Backward) ont été aussi introduit dans ce chapitre.

## Chapitre 4

# Le Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ Fractionnaire

### 1. Introduction

Le correcteur PID est la technique la plus utilisée dans la commande des processus industriels pour des décennies. Les raisons majeures de son large acceptation en industrie sont sa capacité à commander la majorité des processus, ces actions sont bien comprises et son implémentation est très simple. La conception et le réglage des correcteurs PID a été un sujet de recherche depuis le jour où Ziegler et Nichols ont présenté leur méthode en 1942 [26]. Bien qu'il existe plusieurs techniques pour le réglage des paramètres du correcteur PID, un travail de recherche continu et intensif est encore en cours pour le rehaussement de la qualité et l'amélioration des performances de la commande.

Récemment, Podlubny a proposé un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire [3] qui est une généralisation du correcteur PID classique. L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus qui sont les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis.

Aujourd'hui, les chercheurs s'intéressent au développement des méthodes et techniques de réglage du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$ . Plusieurs méthodes ont été proposées telle que la technique basée sur la fonction transfert idéale de Bode proposée par Djouambi [27]. Cette technique consiste à fixer les ordres fractionnaires  $\lambda$  et  $\mu$  à partir du comportement fréquentiel de la commande en boucle ouverte puis l'estimation des autres paramètres par l'algorithme du moindre carré. Une méthode proposée par Monje [28] qui est basée sur la formulation du problème de commande et de robustesse en un problème d'optimisation en cinq inconnus qui sont les cinq paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Une amélioration de la méthode précédente a été proposée par Valerio [29] où une solution analytique du problème de commande et de robustesse du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  a été déterminée à partir de la réponse indicielle du processus en s'inspirant de la technique de Ziegler et Nichols pour le PID classique.



Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de réglage du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  en se basant sur la méthode proposée dans [30] de Zigler et Nichols pour le réglage du correcteur PID classique, les ordres d'intégration et de dérivation seront calculés par la suite en optimisant un critère bien spécifique aux exigences requises.

## 2. Le Correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ d'ordre fractionnaire

Aujourd'hui, le correcteur PID est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles d'asservissement sont des correcteurs PID. Généralement, le correcteur PID classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure (4.1) dans lequel  $U_c(s)$  désigne le signal de commande,  $E(s)$  l'écart résultant de la différence entre la consigne  $R(s)$  et la grandeur à commander  $Y(s)$ ,  $G_c(s)$  la fonction de transfert du correcteur,  $G_p(s)$  la fonction de transfert de système et  $N(s)$  et  $D(s)$  respectivement le bruit et les perturbations.

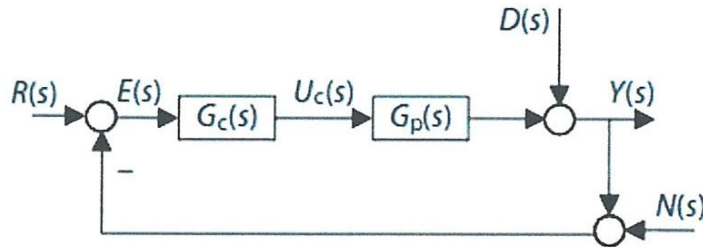


Figure (4.1) Système de commande à retour unitaire classique

Le correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) classique est basée sur le présent (P), le passé (I) et le future (D) de l'erreur de commande  $e(t)$ , son comportement peut être décrit par l'équation suivante :

$$u_c(t) = k_p \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (4.1)$$

Les paramètres du correcteur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel  $K_p$ , la constante d'intégration  $T_I$  et la constante de dérivation  $T_D$ . Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire.

La partie proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander, multiplié par le gain  $K_p$ . L'intuition veut qu'en augmentant ce gain, le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système et ainsi atténue plus rapidement l'écart. D'un autre côté, un correcteur agissant trop fortement donnera naissance à des comportements oscillatoires, témoins d'une diminution, voire d'une perte de stabilité. L'apparition d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un correcteur proportionnel, est soumise à l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à commander. La suppression de celui-ci est assurée par l'utilisation du terme intégral. Ce dernier génère, à partir d'un moindre signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de croître. Cela aura pour conséquence de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, le terme intégral est

souvent interprété dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du correcteur. Mais il engendre un effet déstabilisant. Au contraire, l'objectif premier de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée. L'idée du terme dérivé est de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition [31].

Afin d'améliorer le comportement du correcteur PID, on propose la version du correcteur d'ordre fractionnaire. La forme la plus commune d'un correcteur d'ordre fractionnaire est le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire [3], impliquant un intégrateur d'ordre  $\lambda$  et un différentiateur d'ordre  $\mu$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont n'importe quels nombres réels. L'équation de la sortie du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme:

$$u_c(t) = k_p \left( e(t) + \frac{1}{T_I} D^{-\lambda} (e(t)) + T_D D^\mu (e(t)) \right) \quad (4.2)$$

Où  $K_p$  est la constante proportionnel,  $T_I$  est la constante d'intégration,  $T_D$  est la constante de différentiation,  $\lambda$  est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration et  $\mu$  est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation.

L'algorithme du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire tel que décrit en équation (2.2) peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad (4.3)$$

Une expression équivalente, où les paramètres apparaissent de manière linéaire, est souvent plus appréciée pour les calculs analytiques. Une telle formulation est donnée par la forme parallèle :

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu \quad (4.4)$$

Les gains d'intégration  $K_I$  et de dérivation  $K_D$  sont liés aux paramètres de la forme standard par les relations suivantes :

$$K_I = \frac{K_p}{T_I} \quad (4.5)$$

$$K_D = K_p T_D \quad (4.6)$$

La figure (4.2) présente la structure interne du  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, elle consiste on la connexion parallèle des parties proportionnelle, intégrale d'ordre fractionnaire et dérivée d'ordre fractionnaire.

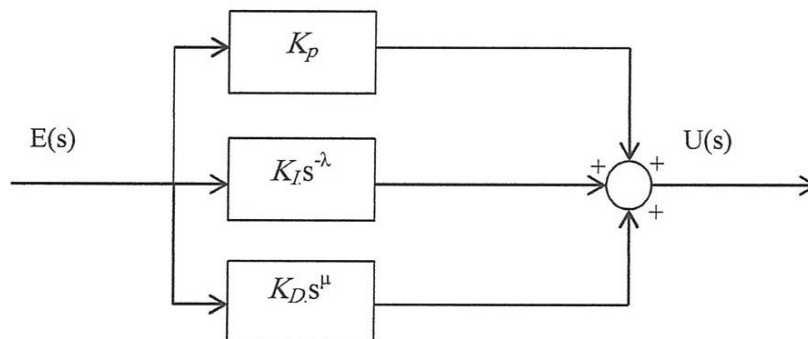
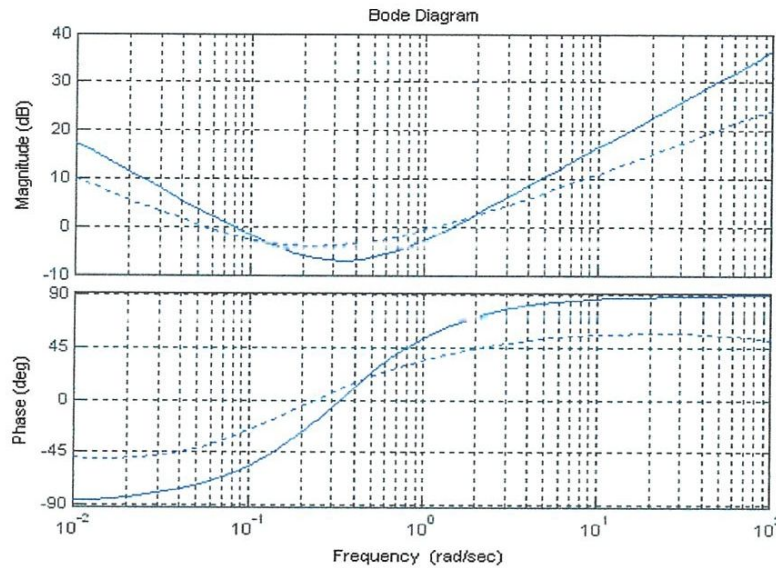


Figure (4.2) Structure du  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire

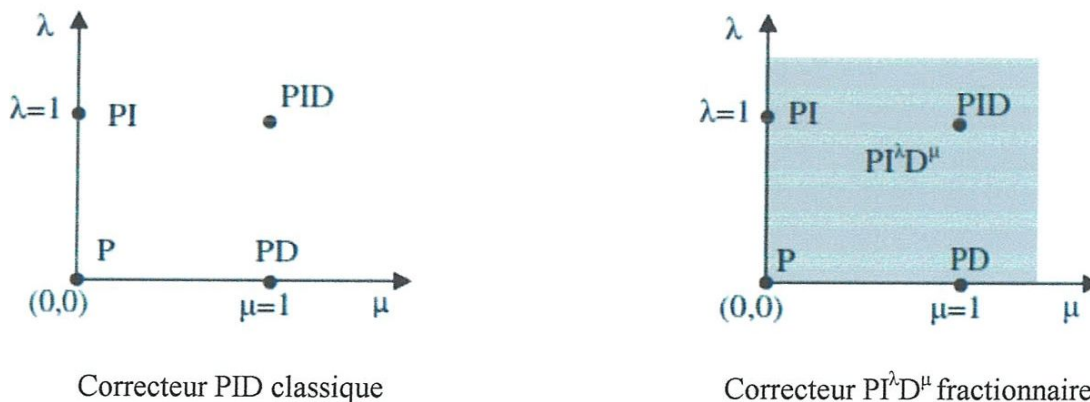


Les tracés exacts du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire (amplitude et phase) sont représentés dans la figure (4.3). Par comparaison avec celles du correcteur PID, on peut observer l'effet des ordres fractionnaires sur les pentes de la partie intégrale et dérivée du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.



**Figure (4.3)** Tracés d'amplitude et de phase : (— : PID et --- :  $PI^\lambda D^\mu$  pour  $\lambda=0.8$  et  $\mu=0.7$ )

Comme indiqué dans la figure (4.4), le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire généralise le correcteur PID classique et l'étend du point à un plan. Cette expansion pourrait fournir beaucoup plus de flexibilité dans la conception de commande PID. Clairement, en choisissant  $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ , un correcteur PID classique peut être récupéré et en utilisant  $(\lambda, \mu) = (1, 0)$  et  $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ , nous obtenons des correcteurs PI et PD classiques, respectivement. En d'autres termes, tous ces types de correcteurs PID classiques sont des cas spéciaux du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire donné par l'équation (4.4).

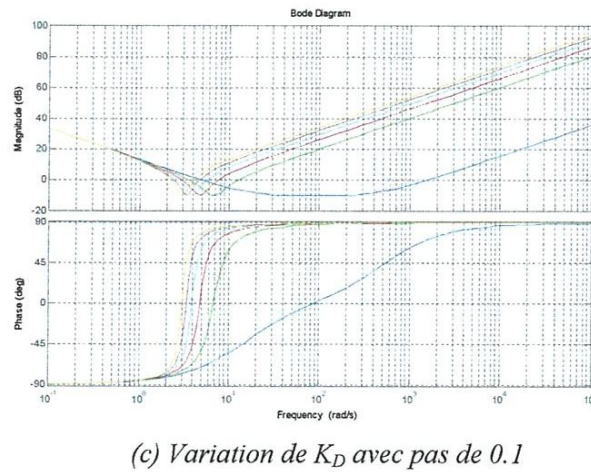
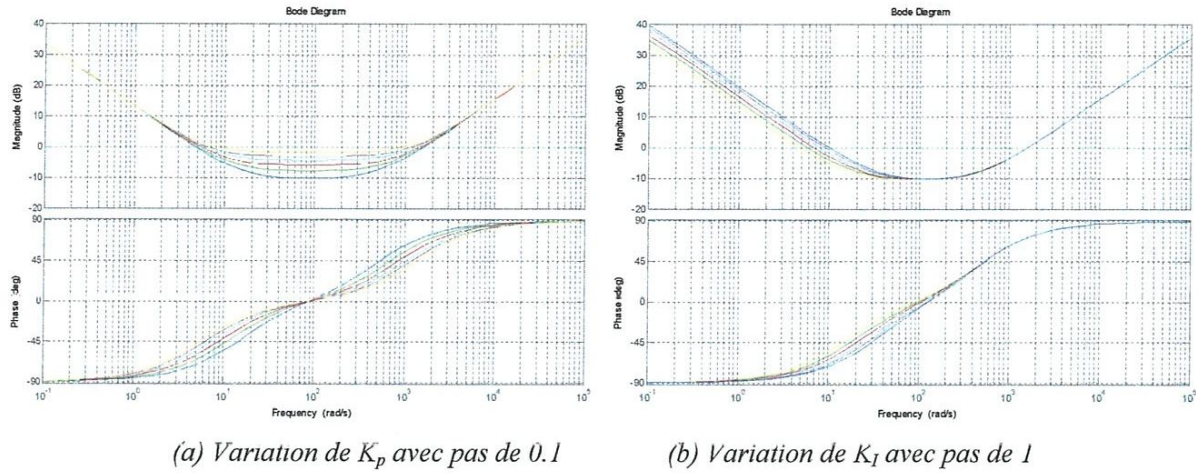


**Figure (4.4)** Localisation en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  des correcteurs PID classique et  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire

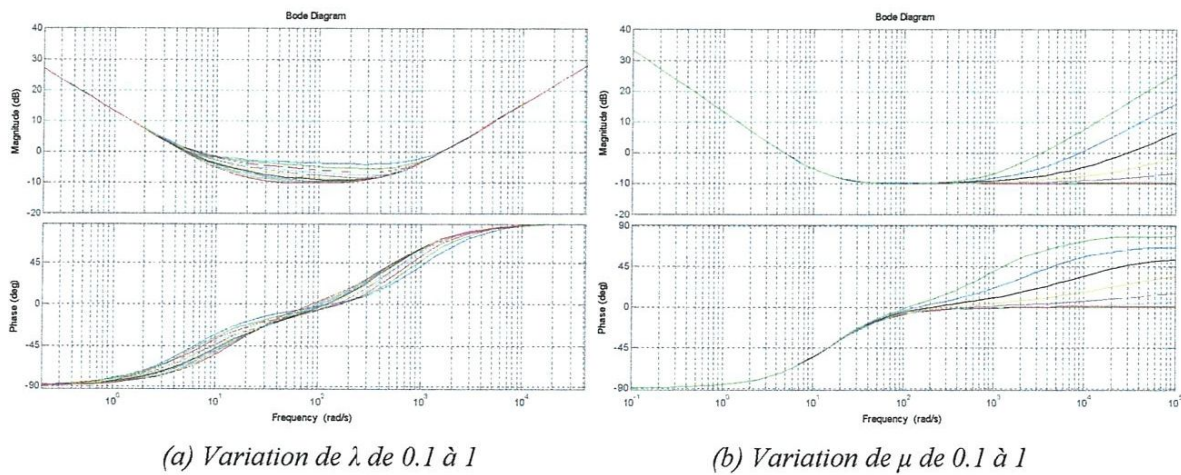
Comme exemple, nous choisissons  $K_p=0.309$ ,  $K_I= 4.5$  et  $K_D=0.0006$  comme paramètres de base d'un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. En comparant les figures (4.5) et (4.6), nous pouvons constater que l'utilisation des paramètres intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire permet



d'ajuster les réponses fréquentielles du correcteur PID classique d'une manière beaucoup plus significative que les coefficients  $K_p$ ,  $K_I$ , et  $K_D$ . Le changement des réponses en fréquence est également plus prévisible.



**Figure (4.5)** Variation des paramètres  $K_p$ ,  $K_I$  et  $K_D$  du correcteur PID classique



**Figure (4.6)** Variation de  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire

Un des avantages les plus importants du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est sa possibilité de bien commander la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. Un autre avantage se trouve dans le fait que les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sont moins sensibles aux changements des paramètres d'un système commandé, ce qui donne une amélioration de la robustesse. Ceci est parce que les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire ayant deux degrés de liberté supplémentaires pour mieux ajuster les propriétés dynamiques de systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Puisque les ordres  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels arbitraires, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est plus flexible et donne l'avantage de mieux régler les propriétés dynamiques des systèmes [3].

De nos jours, des activités de recherche sont dirigées pour définir de nouvelles techniques de réglage des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par l'extension de la théorie de commande classique.

### 3. Approximation d'un $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire par une fonction rationnelle

Selon les variations des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  dans l'intervalle  $[0, 2]$ , ils existent quatre cas pour obtenir l'approximation de la fonction de transfert du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire avec la méthode d'approximation rationnelle de Charef.

#### 3.1. Cas 1 ( $0 < \lambda < 1$ et $0 < \mu < 1$ )

Dans ce cas, et d'après l'équation (4.4), l'approximation de la fonction  $G_c(s)$  dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[w_b, w_h]$  est donnée comme suit:

$$G_c(s) = K_p + K_I \left( K_{I_{\text{apx}}} \frac{\prod_{i=0}^{n_I-1} \left( 1 + \frac{s}{z_{I_i}} \right)}{\prod_{i=0}^{n_I} \left( 1 + \frac{s}{p_{I_i}} \right)} \right) + K_D \left( K_{D_{\text{apx}}} \frac{\prod_{i=0}^{n_D} \left( 1 + \frac{s}{z_{D_i}} \right)}{\prod_{i=0}^{n_D} \left( 1 + \frac{s}{p_{D_i}} \right)} \right) \quad (4.7)$$

#### 3.2. Cas 2 ( $1 < \lambda < 2$ et $0 < \mu < 1$ )

Dans ce cas l'équation (4.4) du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire  $G_c(s)$  devient :

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \left( \frac{1}{s^{\lambda-1}} \right) + K_D (s^\mu) \quad (4.8)$$

L'approximation de la fonction  $G_c(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[w_b, w_h]$  est donnée comme suit:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \left( K_{I_{\text{apx}}} \frac{\prod_{i=0}^{n_I-1} \left( 1 + \frac{s}{z_{I_i}} \right)}{\prod_{i=0}^{n_I} \left( 1 + \frac{s}{p_{I_i}} \right)} \right) + K_D \left( K_{D_{\text{apx}}} \frac{\prod_{i=0}^{n_D} \left( 1 + \frac{s}{z_{D_i}} \right)}{\prod_{i=0}^{n_D} \left( 1 + \frac{s}{p_{D_i}} \right)} \right) \quad (4.9)$$



### 3.3. Cas 3 ( $0 < \lambda < 1$ et $1 < \mu < 2$ )

Dans ce cas l'équation (4.4) de  $G_c(s)$  devient :

$$G_c(s) = K_p + K_I \left( \frac{1}{s^\lambda} \right) + K_D s (s^{\mu-1}) \quad (4.10)$$

L'approximation de la fonction  $G_c(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans une bande de fréquence donnée d'intérêt pratique  $[w_b, w_h]$  est donnée comme suit:

$$G_c(s) = K_p + K_I \left( K_{I_{\text{app}}} \frac{\prod_{i=0}^{n_I-1} \left( 1 + \frac{s}{z_{I_i}} \right)}{\prod_{i=0}^{n_I} \left( 1 + \frac{s}{p_{I_i}} \right)} \right) + K_D s \left( K_{D_{\text{app}}} \frac{\prod_{i=0}^{n_D} \left( 1 + \frac{s}{z_{D_i}} \right)}{\prod_{i=0}^{n_D} \left( 1 + \frac{s}{p_{D_i}} \right)} \right) \quad (4.11)$$

### 3.4. Cas 4 ( $1 < \lambda < 2$ et $1 < \mu < 2$ )

Considérons le cas plus généralisé où  $1 < \lambda < 2$  et  $1 < \mu < 2$ , l'équation (4.4) devient :

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \left( \frac{1}{s^{\lambda-1}} \right) + K_D s (s^{\mu-1}) \quad (4.12)$$

Dans une bande de fréquences  $[w_b, w_h]$ , l'action intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire sont réalisées respectivement par un PPF et ZPF. On obtient l'approximation du  $PI^\lambda D^\mu$  par la méthode de Charef :

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \left( K_{I_{\text{app}}} \frac{\prod_{i=0}^{n_I-1} \left( 1 + \frac{s}{z_{I_i}} \right)}{\prod_{i=0}^{n_I} \left( 1 + \frac{s}{p_{I_i}} \right)} \right) + K_D s \left( K_{D_{\text{app}}} \frac{\prod_{i=0}^{n_D} \left( 1 + \frac{s}{z_{D_i}} \right)}{\prod_{i=0}^{n_D} \left( 1 + \frac{s}{p_{D_i}} \right)} \right) \quad (4.13)$$

Les pôles  $p_{I_i}$ , les zéros  $z_{I_i}$  et les paramètres  $K_{I_{\text{app}}}$  et  $n_I$  de l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire dans les quatre cas peuvent être calculés à partir du chapitre 3, section (2.1).

Les pôles  $p_{D_i}$ , les zéros  $z_{D_i}$  et les paramètres  $K_{D_{\text{app}}}$  et  $n_D$  de l'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire dans les quatre cas peuvent être calculés à partir du chapitre 3, section (2.3).

### 3.5. Exemple illustratif

Considérons le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  défini par sa fonction de transfert suivante :

$$C(s) = 2.4 + \left( \frac{0.18}{s^{1.7}} \right) + 6(s^{1.7})$$

Et qui s'écrit donc :

$$C(s) = 2.4 + \frac{0.18}{s} \left( \frac{1}{s^{0.7}} \right) + 6s(s^{0.7})$$



En utilisant la formule (4.13), nous obtenons l'approximation rationnelle du  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  en approximant les opérateurs  $\frac{1}{s^{0.7}}$  et  $s^{0.7}$  sur la même bande fréquentielle  $[w_b, w_h] = [0.1 \text{ rad/sec}, 10 \text{ rad/sec}]$ . Les paramètres d'approximation utilisés sont  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $\gamma = 1$ . Les pôles et zéros de l'approximation peuvent être calculés à partir du chapitre 3, sections (2.1) et (2.3). D'où la fonction de transfert rationnelle suivante :

$$C(s) = 2.4 + \frac{0.18}{s} \left\{ \frac{\prod_{i=0}^{14} \left[ 1 + \left( \frac{s}{4.6060 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]}{\prod_{i=0}^{15} \left[ 1 + \left( \frac{s}{2.1379 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]} \right\} + 6s \left\{ \frac{\prod_{i=0}^{15} \left[ 1 + \left( \frac{s}{2.1379 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]}{\prod_{i=0}^{15} \left[ 1 + \left( \frac{s}{4.6060 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]} \right\}$$

La figure (4.7) représente le tracé de Bode, amplitude et phase, de la fonction de transfert du  $PI^{1.7}D^{1.7}$  et son approximation rationnelle, on remarque la bonne approximation sur la bande  $[0.1, 10 \text{ rad/s}]$ .

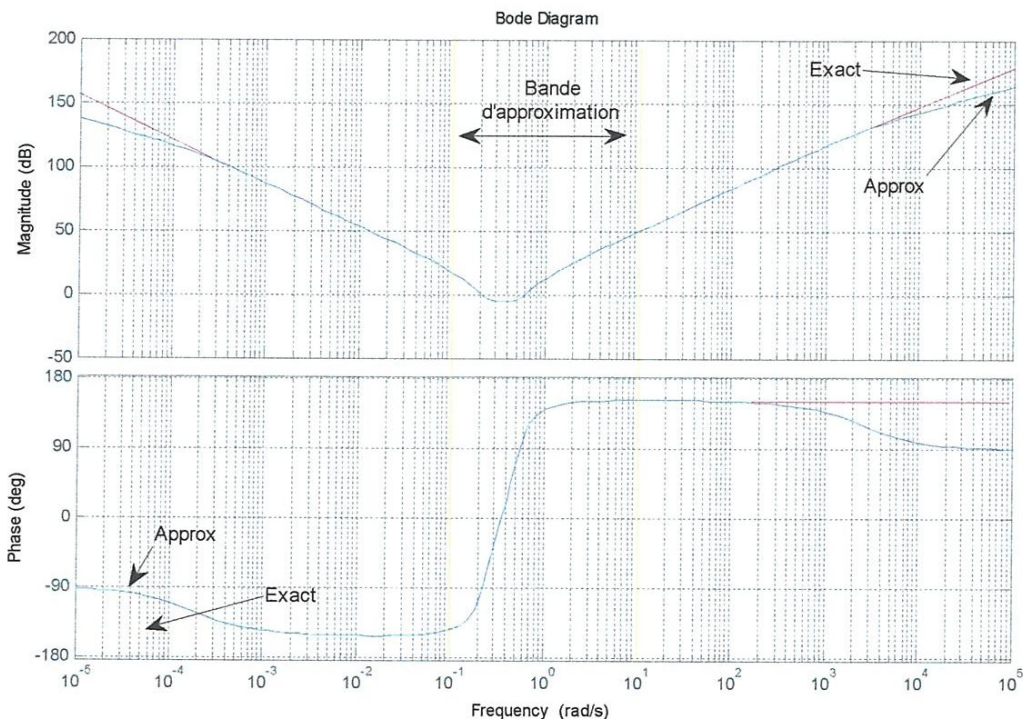


Figure (4.7) Tracé de Bode de la fonction de transfert du  $PI^{1.7}D^{1.7}$  et son approximation

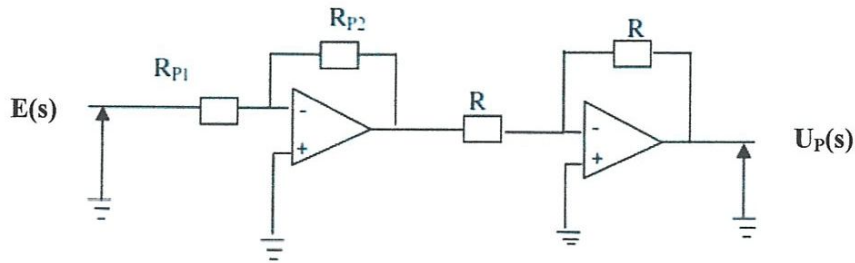
#### 4. Implémentation analogique du correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$

La structure du  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire est constituée d'une connexion parallèle des trois actions, proportionnelle, intégrale et dérivée, comme présentée dans la figure (4.2), son équation est donnée par (4.4). Dans cette section, nous considérons le 4<sup>ème</sup> cas où  $1 < \lambda < 2$  et  $1 < \mu < 2$ , les 3 éléments du correcteur peuvent être réalisés comme suit :

**4.1. Réalisation de l'action proportionnelle**

L'action proportionnelle peut être réalisée par un simple amplificateur comme le représente la figure (4.8), tel que :

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p = \frac{R_{P1}}{R_{P2}} \text{ où } R_{P1} \text{ et } R_{P2} \text{ sont des résistances} \tag{4.14}$$



**Figure (4.8)** Réalisation analogique de l'action proportionnelle

**4.2. Réalisation de l'action intégrale**

L'action intégrale est donnée par le transfert suivant :

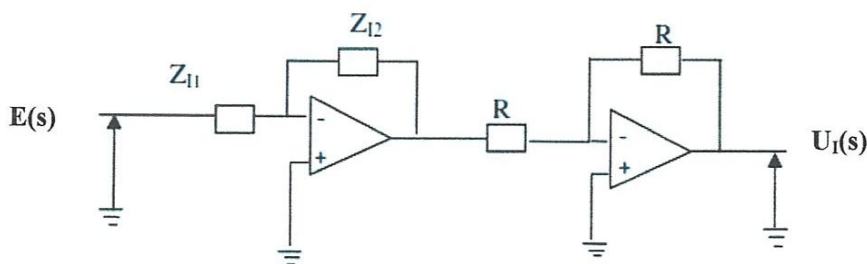
$$\frac{K_I}{s^\lambda} = \frac{K_I}{s} \left( K_{I_{exp}} \frac{\prod_{i=0}^{n_I-1} \left( 1 + \frac{s}{z_{I_i}} \right)}{\prod_{i=0}^{n_I} \left( 1 + \frac{s}{p_{I_i}} \right)} \right) \tag{4.15}$$

Cette fonction rationnelle peut être décomposée en éléments simples, d'où la fonction :

$$\frac{K_I}{s^\lambda} = \frac{K_I}{s} \left( \sum_{i=0}^{n_I} \frac{h_i}{\left( 1 + \frac{s}{p_{I_i}} \right)} \right) \tag{4.16}$$

Où les  $h_i$  peuvent être calculés à partir de l'équation (3.10).

L'intégrateur fractionnaire est implémenté sur un circuit analogique comme représenté sur la figure (4.9) suivante:



**Figure (4.9)** Réalisation analogique de l'action intégrale I<sup>λ</sup>

Donc :

$$\frac{U_I(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s^\lambda} = \frac{Z_{I_2}}{Z_{I_1}} \quad (4.17)$$

Tel que :

$$Z_{I_1} = \left( \frac{1}{K_I} \right) s = L_I s \quad (4.18)$$

Est l'impédance d'une bobine d'inductance  $L_I$ .

Et :

$$Z_{I_2} = \sum_{i=0}^{n_I} \frac{h_i}{\left( 1 + \frac{s}{p_{I_i}} \right)} = \sum_{i=0}^{n_I} \frac{R_{I_i}}{\left( 1 + R_{I_i} C_{I_i} s \right)} \quad (4.19)$$

Est l'impédance du circuit de la figure (3.3)

Avec :

$$R_{I_i} = h_i \quad \text{et} \quad C_{I_i} = \frac{1}{h_i s} \quad (4.20)$$

### 4.3. Réalisation de l'action dérivée

L'action dérivée est donnée pas le transfert suivant :

$$K_D s^\mu = K_D s \left( K_{D_{aux}} \frac{\prod_{i=0}^{n_D} \left( 1 + \frac{s}{z_{D_i}} \right)}{\prod_{i=0}^{n_D} \left( 1 + \frac{s}{p_{D_i}} \right)} \right) \quad (4.21)$$

Cette fonction rationnelle peut être décomposée en éléments simples, d'où la fonction :

$$K_D s^\mu = K_D s \left( G_D + \sum_{i=0}^{n_D} \frac{g_i s}{\left( 1 + \frac{s}{p_{D_i}} \right)} \right) \quad (4.22)$$

Où les  $g_i$  et  $G_D$  peuvent être calculés à partir des formules (3.20) et (3.21).

Le dérivateur fractionnaire est implémenté sur un circuit analogique comme représenté sur la figure (4.10) :

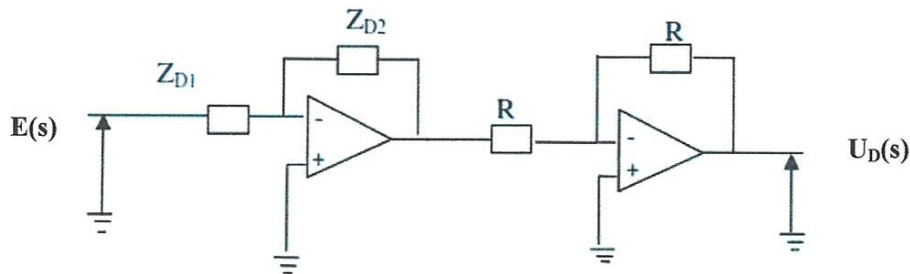


Figure (4.10) Réalisation analogique de l'action dérivée D<sup>μ</sup>



Donc :

$$\frac{U_D(s)}{E(s)} = K_D s^\mu = \frac{Z_{D_2}}{Z_{D_1}} \quad (4.23)$$

Tel que :

$$Z_{D_2} = K_D s = L_D s \quad (4.24)$$

Est l'impédance d'une bobine d'inductance  $L_D = K_D$ .

Et :

$$\frac{1}{Z_{D_1}} = G_D + \sum_{i=0}^{n_D} \frac{g_i}{\left(1 + \frac{s}{p_{D_i}}\right)} = \frac{1}{R_D} + \sum_{i=0}^{n_D} \frac{C_{D_i} s}{(1 + R_{D_i} C_{D_i} s)} \quad (4.25)$$

est l'admittance du circuit de la figure (3.4).

Avec :

$$R_D = \frac{1}{G_D} \quad C_{D_i} = g_i \quad (4.26)$$

Et :

$$R_{D_i} = \frac{1}{p_{D_i} g_i} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n_D \quad (4.27)$$

#### 4.4. Réalisation du régulateur PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup>

Alors après réalisation de l'action I<sup>λ</sup> et D<sup>μ</sup> on peut facilement implémenter le correcteur PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> comme dans la figure (4.11) :

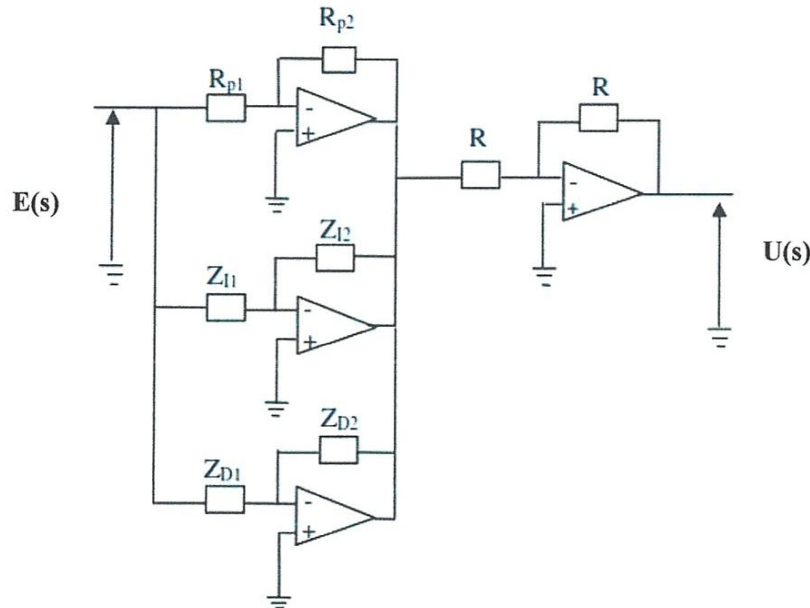


Figure (4.11) Réalisation analogique du correcteur PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup>

## 5. Réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

Contrairement au correcteur PID classique, il n'y a aucune méthode de réglage systématique existante pour le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Donc, la motivation de base dans les méthodes de conception du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est le développement de règles empiriques de réglage aussi simples et pratiques que les règles de Ziegler-Nichols pour améliorer la qualité de commande des systèmes comparée au correcteur PID classique. Autrement dit, exprimer les cinq paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire en fonction des caractéristiques du système à commander.

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode de conception du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire d'un système de commande à retour unitaire classique, montré dans la figure (4.1). La méthode de réglage de Ziegler-Nichols sera utilisée pour l'ajustement des trois paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire pour  $\lambda = \mu = 1$ .

Pour cela, la fonction de transfert  $G(s)$  du système à commander est un système de premier ordre avec ou sans temps de retard :

$$G_p(s) = \frac{K_0}{(1 + \tau s)} e^{-Ls} \quad (4.28)$$

Ou un système de premier ordre avec intégrateur avec ou sans temps de retard :

$$G_p(s) = \frac{K_0}{s(1 + \tau s)} e^{-Ls} \quad (4.29)$$

Où  $K_0$  est le gain statique,  $\tau$  est la constante de temps et  $L$  est le temps de retard qui peut être zéro. Nous utiliserons la forme (4.3) du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire donnée par sa fonction de transfert  $C(s)$  :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad (4.29)$$

Où  $K_p$  est la constante proportionnel,  $T_I$  est la constante d'intégration,  $T_D$  est la constante de différentiation,  $\lambda$  est l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration tel que  $0 < \lambda < 2$  et  $\mu$  est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation tel que  $0 < \mu < 2$ .

### 5.1. Ajustement des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

La méthode proposée pour l'ajustement des paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  est composée de deux étapes. La première sert à ajuster les paramètres  $K_p$ ,  $T_I$  et  $T_D$  d'un correcteur PID classique pour  $\lambda = \mu = 1$  et la deuxième sert à ajuster les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ .

### 5.1.1. Ajustement des paramètres $K_P$ , $T_I$ et $T_D$

Dans la première étape de cette méthode de conception, nous allons utiliser les règles de la méthode de Ziegler-Nichols pour l'ajustement des paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire donné par l'équation (4.29), avec  $\lambda=\mu=1$ , ce qui signifie l'ajustement des paramètres d'un simple correcteur PID classique.

Cette méthode de conception peut être généralisée par l'utilisation des paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  ajustés par d'autres méthodes de conception qui existent dans la littérature.

### 5.1.2. Ajustement des paramètres $\lambda$ et $\mu$

Par l'utilisation des paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  obtenus dans la première étape de conception, la deuxième étape sert à ajuster les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire.

Dans notre travail, nous avons essayé deux méthodes pour l'ajustement des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ . Une se base sur la minimisation d'un critère de performances (Critère intégral) [32], et l'autre consiste à déterminer ces paramètres pour satisfaire des contraintes bien déterminées (Cahier de charge).

#### 5.1.2.1. Minimisation d'un critère de performance

Au cours des années, beaucoup de méthodes d'optimisation ont été étudiées se basant sur des critères intégraux, une approche commune est de réduire au minimum un index de performance. Ces méthodes s'appuient sur des critères d'optimisation d'une des performances désirée. Elles sont applicables à condition que l'on puisse avoir une paramétrisation du critère en fonction des paramètres du correcteur.

Le but d'une méthode de réglage est de déterminer les valeurs des paramètres du correcteur qui minimisent un certain critère  $J$ . Ce critère est une fonction du vecteur  $P$  des paramètres du correcteur et, par conséquent, ce but peut être exprimé mathématiquement par :

$$\underset{P}{\text{Min}} J(P) \quad (4.30)$$

Les critères les plus connus peuvent être décrits par leurs dénominations suivantes :

- **Integrated Square Error (ISE)**

Il représente l'intégrale de l'erreur quadratique, il est donné par :

$$ISE = \int_0^{+\infty} e^2(t) dt \quad (4.31)$$

- **Integrated Absolute Error (IAE)**

Il représente l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur, il est donné par :

$$IAE = \int_0^{+\infty} |e(t)| dt \quad (4.32)$$



- **Integrated Time multiplied Square Error (ITSE)**

Il représente l'intégrale de l'erreur quadratique multipliée par le temps :

$$ITSE = \int_0^{+\infty} t[e(t)]^2 dt \quad (4.33)$$

- **Integrated Time multiplied Absolute Error (ITAE)**

Il représente l'intégrale de l'erreur absolue multipliée par le temps :

$$ITAE = \int_0^{+\infty} t|e(t)|dt \quad (4.34)$$

Avec  $e(t)=[r(t) - y(t)]$  est le signal d'erreur du système bouclé, où  $r(t)$  est la consigne et  $y(t)$  est la sortie du système.

Pour n'importe lequel des critères précédemment cités, la meilleure réponse correspond à la valeur minimale du critère choisi. IAE est souvent employé pour la simulation numérique des systèmes, cependant il est inapplicable pour le travail analytique du fait que la valeur absolue d'une fonction erreur n'est pas toujours exprimable sous forme analytique. Ce problème est surmonté par le critère d'ISE. Les critères ITAE et ITSE ont un multiplicateur additionnel qui est le temps de la fonction erreur et qui souligne les erreurs de longue durée. Ces critères sont le plus souvent appliqués dans les systèmes ayant besoin d'un temps de réponse rapide.

Afin de calculer l'intégrale complexe  $J$ , des méthodes fréquentielles analytiques peuvent être utilisées [33], tel que la méthode de Hall-Sartorius [34], comme dans [32]. Un défaut majeur de cette technique est son applicabilité limitée à une classe bien précise de systèmes (selon l'ordre du système), aussi faut-il signaler qu'elle n'est valable que pour le critère ISE.

Pour remédier à ce problème, nous avons opté pour le calcul numérique des critères intégraux par le logiciel de calcul et de simulation MATLAB. L'idée de base est d'extraire le signal d'erreur du système bouclé puis d'effectuer les opérations requises sur ce dernier pour obtenir la valeur du critère voulu. La figure (4.12) illustre ce procédé de calcul pour les critères ISE et IAE sous l'environnement SIMULINK de MATLAB.

Toutefois, il est impossible d'effectuer ce calcul sous SIMULINK dans notre cas pour la simple raison que SIMULINK ne prend pas en charge les systèmes d'ordre fractionnaire, donc il nous est impossible d'utiliser les ordres fractionnaires du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Une solution est celle de reproduire le même principe de SIMULINK pour le calcul de l'erreur sous MATLAB en utilisant cette fois les approximations rationnelles que nous avons programmé (Charef et Oustaloup) pour introduire le correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire. Une fois l'erreur calculée, les différents critères de minimisation peuvent être obtenus facilement.

MAMINE

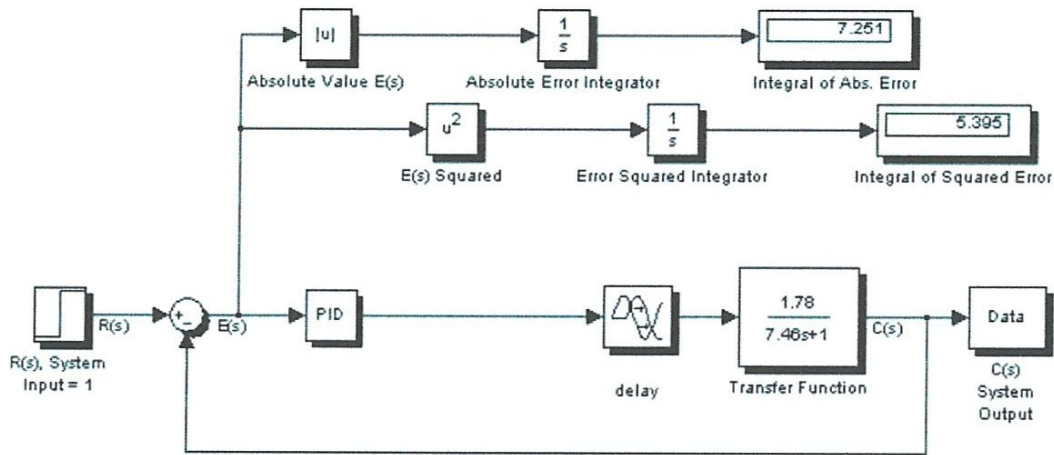


Figure (4.12) Calcul des critères ISE et IAE sous l'environnement SIMULINK

Pour la tâche de minimisation, et à l'aide d'un algorithme développé sous MATLAB, nous avons effectué un balayage des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  avec un pas de 0.01 où nous avons calculé à chaque fois le critère  $J(\lambda, \mu)$  correspondant, une simple comparaison permettra par la suite d'obtenir le meilleur couple  $(\lambda, \mu)$  qui minimise le critère  $J$  voulu.

#### 5.1.2.2. Méthode de détermination sous contraintes

Une deuxième approche, que nous avons introduit, consiste à déterminer les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  en essayant de réaliser des performances requises en temps de réponse, en dépassement et/ou en marge de phase désirés en boucle fermée. Ces performances seront obtenues en tenant compte d'un ordre de priorité choisi par l'utilisateur. L'organigramme de la figure (4.13) représente les étapes de cette méthode.

L'idée est d'effectuer, à l'aide d'un programme réalisé sous MATLAB, un balayage des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  tout comme pour la méthode de minimisation, sauf qu'ici nous avons procédé à une extraction des caractéristiques temporelles et fréquentielles du système corrigé par le correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire à chaque itération. Pour cela, nous avons utilisé des fonctions MATLAB bien connues comme *stepinfo* en temporel et *margin* en fréquentiel. Le correcteur est bien évidemment approximé par une fonction de transfert rationnelle à l'aide de l'une des méthodes précédemment citées. Une fois, toutes les itérations terminées, l'algorithme détermine le meilleur couple  $(\lambda, \mu)$  qui vérifie les contraintes imposées en tenant compte de l'ordre de priorité choisi.

La priorité est un paramètre additionnel affecté par l'utilisateur aux contraintes introduites, dont l'intérêt est de réaliser au moins l'une des performances désirées selon un ordre, si toutefois les trois sont irréalisables ensemble avec ce type de correcteur. Nous avons vérifié l'utilité et l'efficacité de ce concept en utilisant des exemples de simulations.



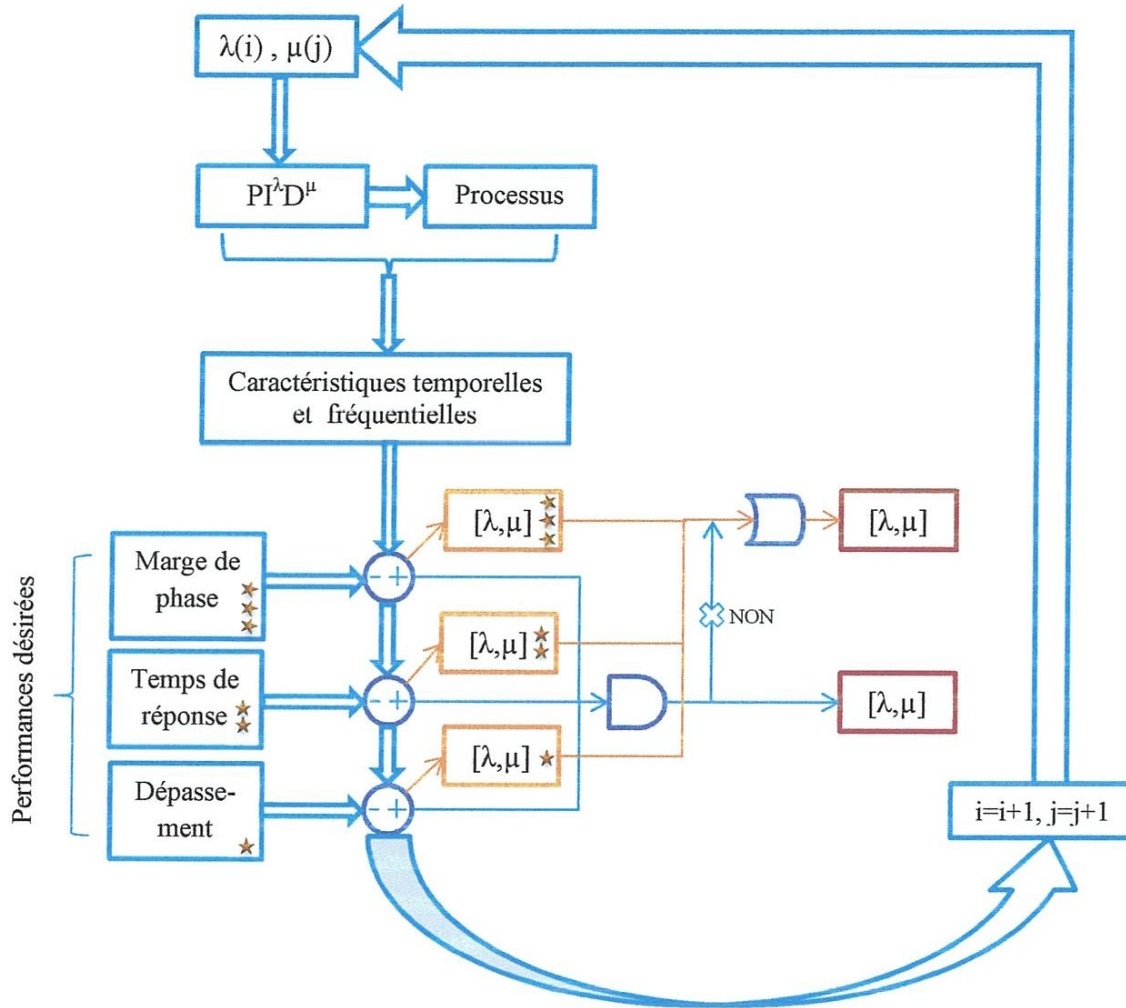


Figure (4.13) Organigramme de la méthode sous contraintes

Dans ces deux méthodes, le temps de calcul est considérable du au nombre important d'itérations. Pour minimiser ce temps, nous avons fait en sorte que l'algorithme de calcul fonctionne de façon adaptative, minimisant ainsi le pas pour les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  selon que les résultats s'améliorent ou pas, ceci permet de raffiner et étendre la recherche vers de plus petites valeurs et d'optimiser le temps de recherche.

### 5.2. Exemple de simulation

Afin de mieux comprendre ces deux méthodes et vérifier leurs résultats, considérons un exemple de simulation dont la fonction de transfert du système est comme suit :

$$G_p(s) = \frac{1}{(1+20s)} e^{-5s}$$



Pour l'ajustement des paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, nous considérons le cas d'un correcteur PID classique où  $\lambda = \mu = 1$ . Par l'utilisation des règles de la méthode de Ziegler-Nichols, les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  s'avèrent :

$$K_P = 5.4, T_I = 7.5, T_D = 1.875.$$

Et la fonction de transfert  $C(s)$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire devient :

$$C(s) = 5.4 \left( 1 + \frac{1}{7.5s^\lambda} + 1.875s^\mu \right)$$

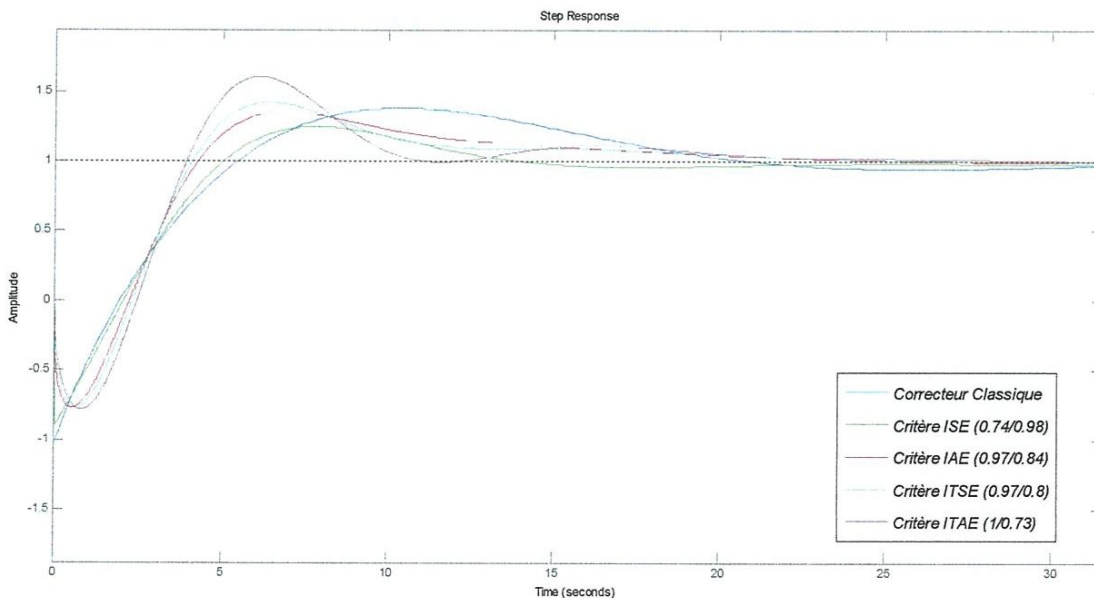
Nous passons à la détermination des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur fractionnaire en utilisant les deux méthodes présentées ; d'abord la minimisation du critère de performance puis la recherche sous contraintes.

- **Minimisation d'un critère de performance**

Le tableau (4.1) contient les différentes valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  obtenues en minimisant tous les critères de performances et les réponses correspondantes sont représentées dans la figure (4.14).

	$\lambda$	$\mu$	Temps de réponse (sec)	Dépassement (%)	Marge de phase (deg)
<b>ISE</b>	0.74	0.98	17.55	24.8	36.2
<b>IAE</b>	0.97	0.84	20.9	35.3	34.8
<b>ITSE</b>	0.97	0.8	21.4	42.1	33.1
<b>ITAE</b>	1	0.73	21.2	60.6	28.1
<b>Avec PID classique</b>			29.6	38.3	33.2

**Tableau (4.1)** Résultats obtenus pour les différents critères intégraux



**Figure (4.14)** Réponse indicielle pour les différents critères

Pour cet exemple, les meilleurs résultats, dans le sens qu'ils améliorent toutes les performances du système, sont obtenus avec le critère ISE, soit pour  $[\lambda, \mu] = [0.74, 0.98]$ . Donc, la fonction de transfert du correcteur  $PI^{0.74}D^{0.98}$  d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$C(s) = 5.4 \left( 1 + \frac{1}{7.5s^{0.74}} + 1.875s^{0.98} \right)$$

La figure (4.15) représente la réponse indicielle du système corrigé par le correcteur classique et par le correcteur  $PI^{0.74}D^{0.98}$  d'ordre fractionnaire.

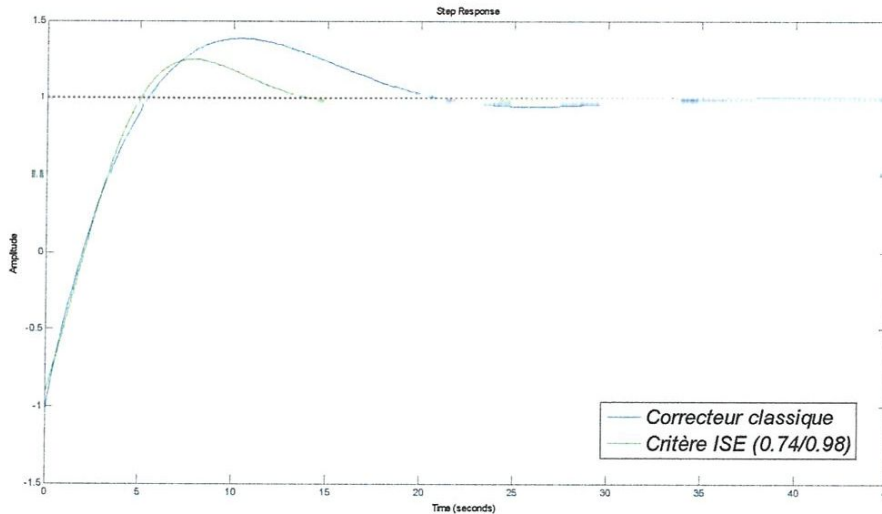


Figure (4.15) réponse indicielle du système corrigé le correcteur  $PI^{0.74}D^{0.98}$

#### • Optimisation sous contraintes

Comme exemple, considérons les performances (contraintes) à vérifier, dans l'ordre de priorité, suivantes :

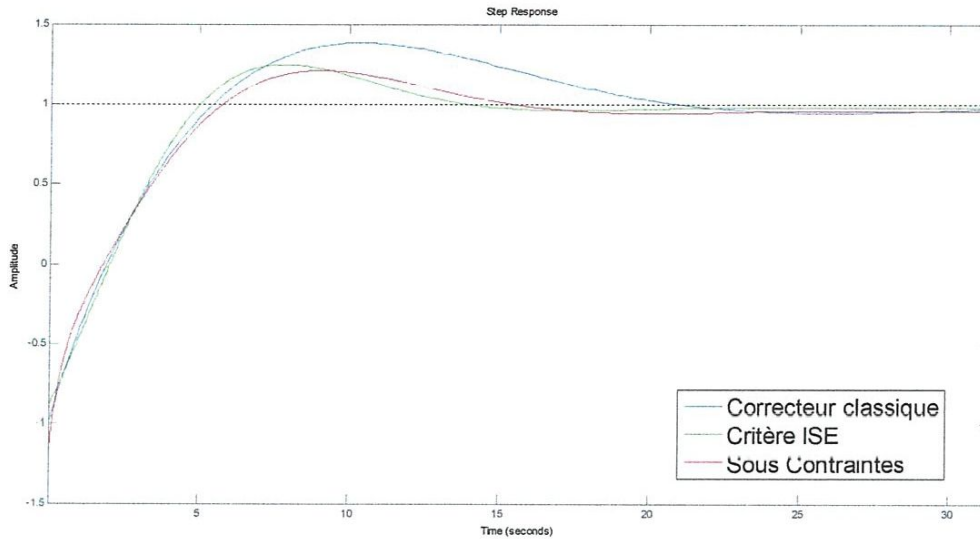
1. Temps de réponse  $< 15$  sec.
2. Dépassement  $< 25\%$ .
3. Marge de phase  $> 45$  deg.

En exécutant l'algorithme de calcul pour les contraintes voulues, les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  obtenues sont  $[\lambda, \mu] = [0.7, 1.07]$ . Le tableau (4.2) montre que les performances réalisées par le correcteur fractionnaire  $PI^{0.7}D^{1.07}$  sont meilleurs que ceux du  $PI^{0.74}D^{0.98}$  du critère optimal ISE. Les réponses correspondantes sont représentées dans la figure (4.16).

	$\lambda$	$\mu$	Temps de réponse (sec)	Dépassement (%)	Marge de phase (deg)
ISE	0.74	0.98	17.55	24.8	36.2
Sous contraintes	0.7	1.07	12.25	21.02	38.59
Correcteur classique			21.4	42.1	33.1

Tableau (4.2) Résultats obtenues sous contraintes et comparaison avec ISE





On remarque d'après le tableau (4.2) que les contraintes choisies ne sont pas toutes vérifiées ; la marge de phase est de 38 degrés alors qu'en réalité nous requérons plus de 45 degrés. L'explication de ceci est que le correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire n'est pas en mesure de réaliser, dans ce cas, la marge de phase demandée quelque soient  $\lambda$  et  $\mu$  compris entre 0 et 2. Cependant, il est possible de réaliser les deux autres performances demandées pour des valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire. C'est justement là où intervient le paramètre de priorité qui impose à l'algorithme de rechercher l'ordre selon lequel il doit procéder pour déterminer le couple  $[\lambda, \mu]$  dans le cas où les trois contraintes ne peuvent pas être vérifiées ensemble. Dans notre exemple, le temps de réponse vient en premier suivi par le dépassement et enfin la marge de phase, d'où les résultats obtenues qui vérifient la contrainte du temps de réponse et du dépassement uniquement.

Toutefois, le correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  obtenu par cette méthode est plus performant que celui obtenu grâce au critère intégral ISE, comme nous pouvons le remarquer sur le Tableau (4.2).

## 6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la notion du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire, celui-ci étant un correcteur PID classique avec deux paramètres complémentaires qui sont l'ordre d'intégration et de dérivation. Ces derniers, ont été approximés par une fonction rationnelle par la méthode de Charef. Nous avons aussi donné l'approximation du  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire pour les quatre cas de  $\lambda$  et  $\mu$  compris entre 0 et 2. Une partie a été réservée à l'implémentation analogique du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  ce qui revient à réaliser analogiquement les trois actions, proportionnelle, intégrale et dérivée du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire.

Nous avons aussi présenté deux méthodes pour la détermination des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire, se basant sur les règles de la méthode de Ziegler-Nichols pour l'obtention des paramètres du PID classique. La première méthode consiste à minimiser un critère intégral donné (ISE, IAE, ITSE, ITAE) selon le choix. La deuxième méthode que nous avons introduit permet d'effectuer une recherche des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire qui réalise certaines contraintes imposées (cahier de charge). Les deux méthodes ont donné de bons résultats ; l'exemple de simulation en est la preuve.



# Chapitre 5

## Applications

### 1. Introduction

Le correcteur standard le plus utilisé dans l'industrie est le correcteur PID, car il permet de régler à l'aide de ses trois paramètres les performances du système de commande. Dans ce mémoire, nous avons présenté la nouvelle extension de ce correcteur, très utilisé, qui est le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. Avec ses deux paramètres additionnels  $\lambda$  et  $\mu$ , qui représentent l'ordre d'intégration et de dérivation respectivement, il permet de mieux commander la dynamique des systèmes.

Pour mettre en évidence l'efficacité de ce type de correcteurs, nous nous proposons d'étudier quelques exemples d'applications réels et nous essayons de synthétiser les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordres fractionnaires qui commandent et améliorent le mieux possible les performances des systèmes. Comme applications, nous avons choisi :

- ✓ Un asservissement de niveau.
- ✓ Un moteur à courant continu.
- ✓ Un Train, ou plus exactement, un véhicule composé d'une machine motrice et d'une remorque.
- ✓ Un système Electrohydraulique.

L'objectif de ce chapitre est d'apercevoir les qualités et les améliorations obtenues en utilisant un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes précédemment cités. Par ailleurs, nous nous intéresserons le moins possible à l'aspect modélisation.

### 2. Asservissement de niveau

Comme première application nous avons considéré l'asservissement de niveau de la figure (5.1). Le processus est composé d'un réservoir contenant du liquide, le niveau de ce dernier est commandé par une valve. Le signal d'entrée (consigne) dicte le niveau du liquide désiré dans le réservoir.

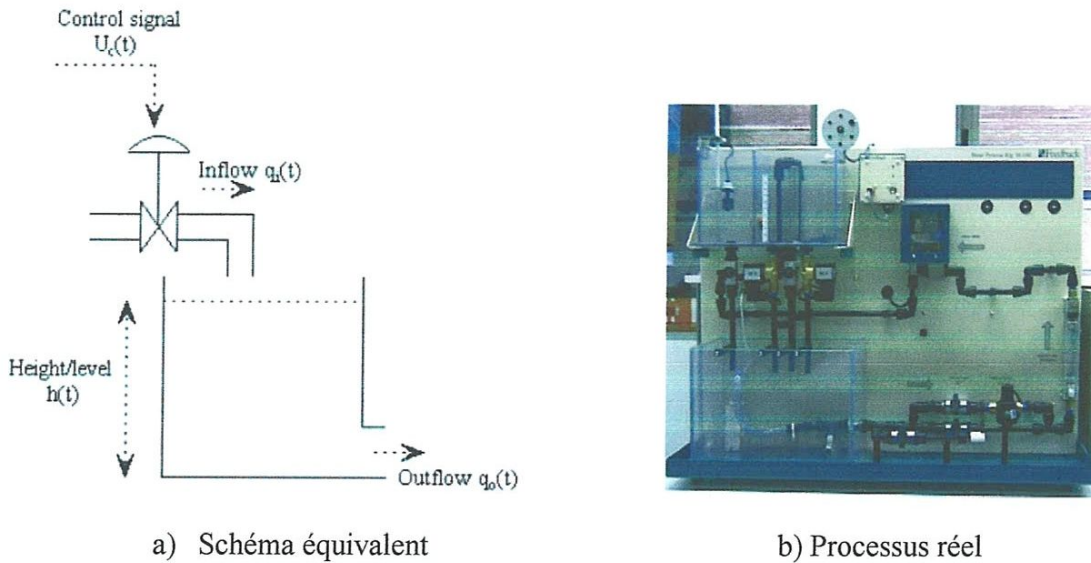


Figure (5.1) Asservissement de niveau

Ce processus peut être modélisé par une fonction de transfert de la forme suivante [35] :

$$G(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)} e^{-Ls} \tag{5.1}$$

Donc, un système du premier ordre avec retard. En introduisant les paramètres réels du système, la fonction de transfert obtenue est donnée par :

$$G(s) = \frac{1}{(21.33s + 1)} e^{-5s} \tag{5.2}$$

Par l'utilisation des règles de la méthode de Ziegler-Nichols, les paramètres  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  du correcteur classique s'avèrent :  $K_p = 4.0588$ ,  $T_i = 9.2500$ ,  $T_d = 2.3125$ .

En lançant l'algorithme de recherche des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire par les méthodes proposées dans ce mémoire, nous obtenons le couple  $[\lambda, \mu] = [0.81, 1]$ . D'où, les figures (5.2) et (5.3) qui représentent la réponse indicielle et le tracé de Bode du système corrigé par un correcteur PID classique et un correcteur  $PI^{0.81}D$  d'ordre fractionnaire. Le tableau (5.1) contient une comparaison chiffrée entre les performances obtenues par les deux correcteurs.

	Temps de réponse (sec)	Dépassement (%)	Marge de phase (deg)
PID classique	28.25	21.82	46.47
$PI^{0.81}D$ fractionnaire	18.34	6.92	53.07

Tableau (5.1) Performances obtenues pour l'asservissement de niveau

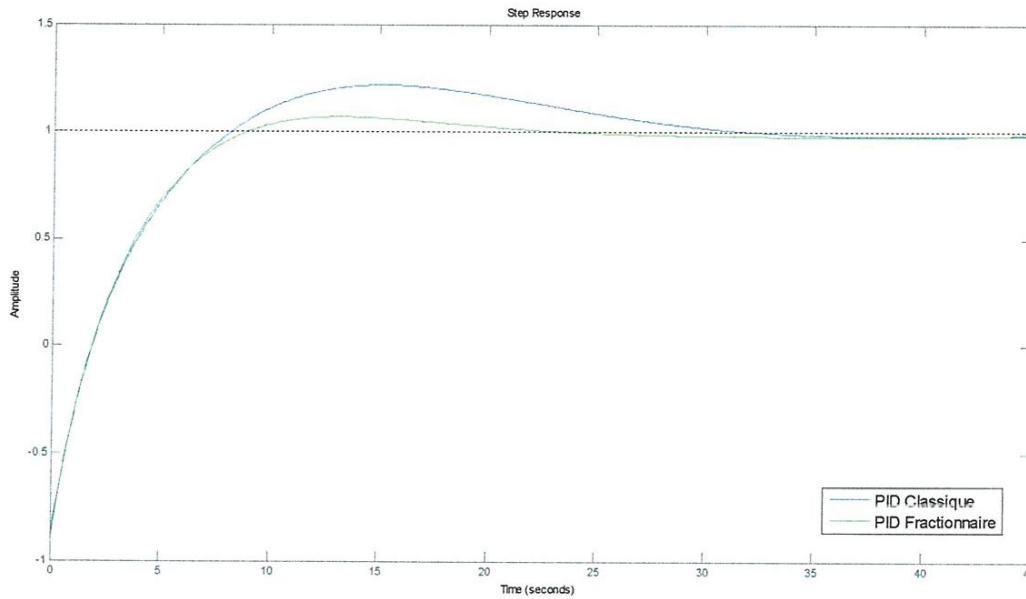


Figure (5.2) Réponse indicielle de l’asservissement de niveau après correction

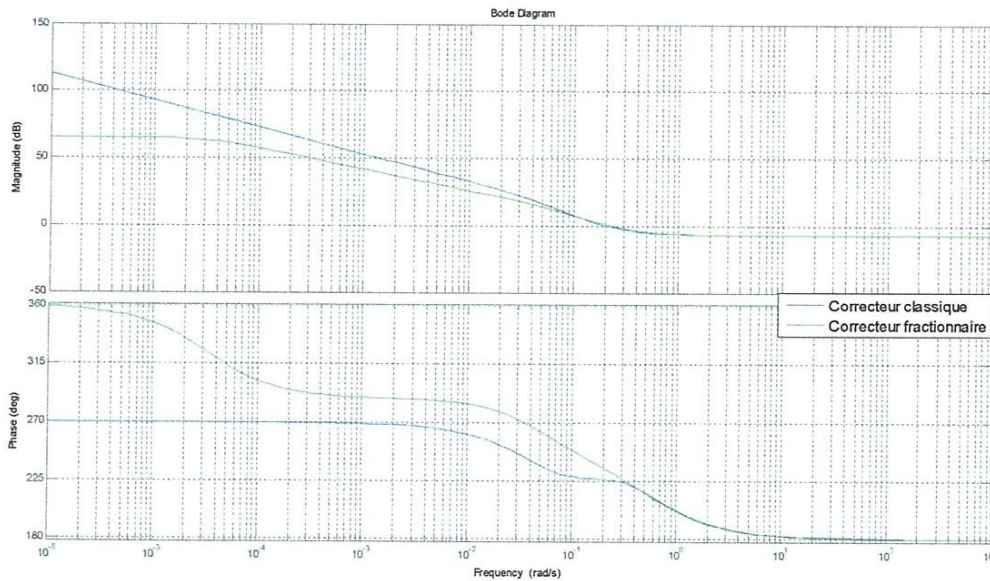


Figure (5.3) Tracé de Bode de l’asservissement de niveau après correction

On s’aperçoit bien évidemment du changement obtenu grâce au correcteur  $PI^{0.81}D$  d’ordre fractionnaire : une diminution du temps de réponse de 10 secondes ainsi qu’une baisse du dépassement jusqu’à 7% et la marge de phase a bénéficié d’une augmentation de presque 10 degrés.

### 3. Commande d’un moteur à courant continu

Un moteur à courant continu est une machine électrique. Il s’agit d’un convertisseur électromécanique permettant la conversion bidirectionnelle d’énergie entre une installation électrique



parcourue par un courant continu et un dispositif mécanique, d'où l'énergie électrique est transformée en énergie mécanique.

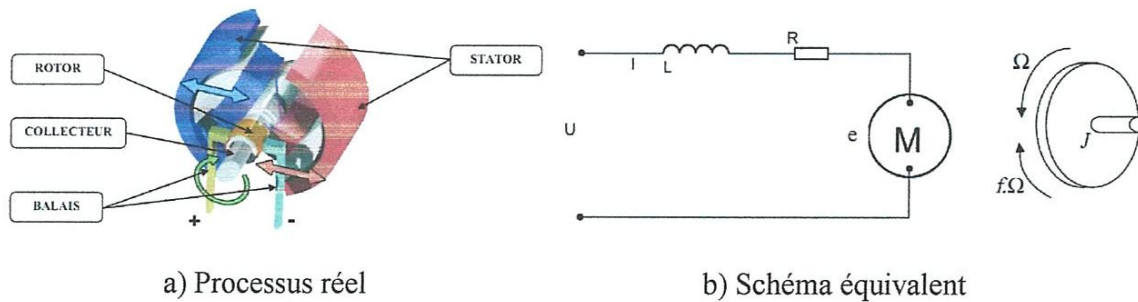


Figure (5.4) Le moteur à courant continu

La fonction de transfert cherchée  $G(s)$  est entre la tension entrante dans le moteur  $U(s)$  et la vitesse de sortie  $\Omega(s)$ [36], les valeurs numériques sont données dans le tableau (5.2).

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_c}{(R + Ls)(f + Js) + K_c K_e} \tag{5.3}$$

Tension nominale	$U_{nom} = 24 \text{ V}$
Tension maximale	$U_{max} = 32 \text{ V}$
Courant permanent maximal	$I_{max} = 2.2 \text{ A}$
Résistance aux bornes	$R = 1.91 \Omega$
Constante de couple	$K_c = 60.3 \text{ mNm.A}^{-1}$
Constance de vitesse	$K_e = 60.3 \text{ mNm.A}^{-1}$
Inductance	$L = 0.63 \text{ mH}$
Moment d'inertie rapporté au rotor	$J = 10^{-4} \text{ kg.m}^2$
Coefficient de frottement visqueux	$f = 2.5 \times 10^{-6}$

Tableau (5.3) Valeurs numériques d'un moteur à courant continu  
(Maxon : Référence F2260/813)

En procédant à un asservissement en vitesse et en position du MCC, nous pouvons établir le modèle mathématique de la réponse en vitesse du moteur électrique et celui de la réponse en position, qui sont donnés par les figures (5.5) et (5.6), respectivement.

Les fonctions de transferts, de l'asservissement en vitesse et en position obtenues avec les valeurs numériques du tableau (5.3) sont données, respectivement, par [36]:

$$G_v(s) = \frac{0.0603}{6.3 \times 10^{-8} s^2 + 1.91 \times 10^{-4} s + 36.41 \times 10^{-4}} \tag{5.4}$$

$$G_p(s) = \frac{0.0603}{6.3 \times 10^{-8} s^3 + 1.91 \times 10^{-4} s^2 + 36.41 \times 10^{-4} s} \tag{5.5}$$

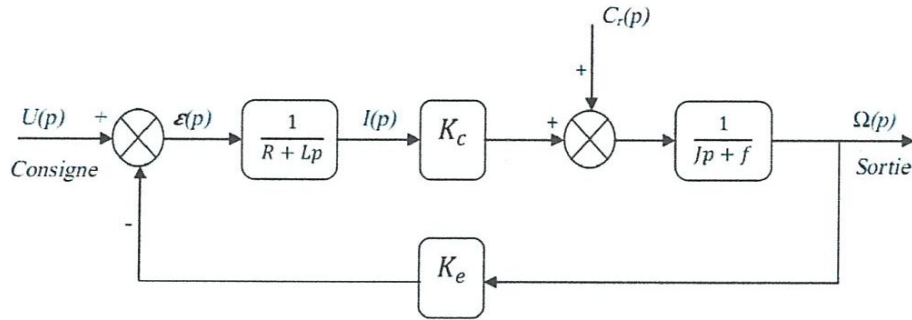


Figure (5.5) Schéma bloc du Modèle de moteur électrique en vitesse

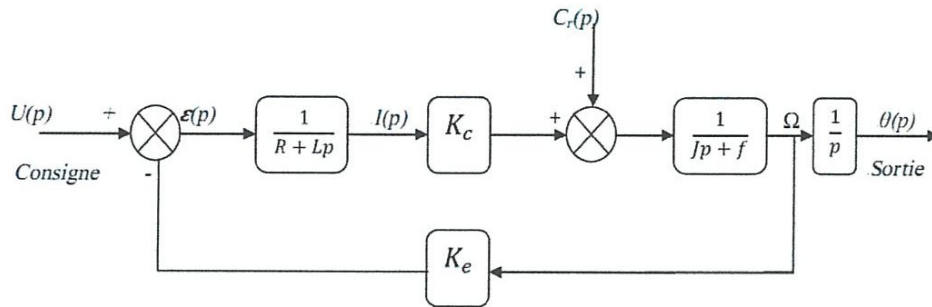


Figure (5.6) Schéma bloc du Modèle de moteur électrique en position.

Le MCC peut fonctionner sous plusieurs modes, dans ce qui suit, nous considérons un moteur à courant continu à excitation séparée, l'objectif est d'annuler l'erreur statique, diminuer le dépassement et diminuer le temps de réponse et le temps de montée afin d'obtenir une réponse adéquate du procédé et de la régulation et d'avoir un système précis, rapide, stable et robuste.

### 3.1. Régulation en vitesse

Après avoir essayé les différentes valeurs de  $K_u$ , nous avons relevé le gain d'oscillation  $K_u=25$  et la période d'oscillation  $T_u=3.6 \times 10^{-4}$ . En appliquant les règles de la méthode de Ziegler-Nichols, nous déduisons les valeurs des paramètres :  $K_p=20.83$ ,  $T_i=0.0037$ ,  $T_d=0.000048$ .

Pour déterminer les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, nous utilisons les méthodes déjà abordées. Les meilleurs résultats étant obtenus avec le critère ISE pour le couple  $[\lambda, \mu] = [1.87, 1.03]$ . Une comparaison entre les performances obtenues par les deux correcteurs classique et fractionnaire sont dans le tableau (5.3). La figure (5.7) représente la réponse indicielle du système corrigé.

	Temps de réponse (sec)	Dépassement (%)	Marge de phase (deg)
PID classique	0.00277	27.60	44.32
$PI^{1.87} D^{1.03}$ fractionnaire	0.00185	20.21	49.06

Tableau (5.4) Performances obtenues pour la régulation en vitesse



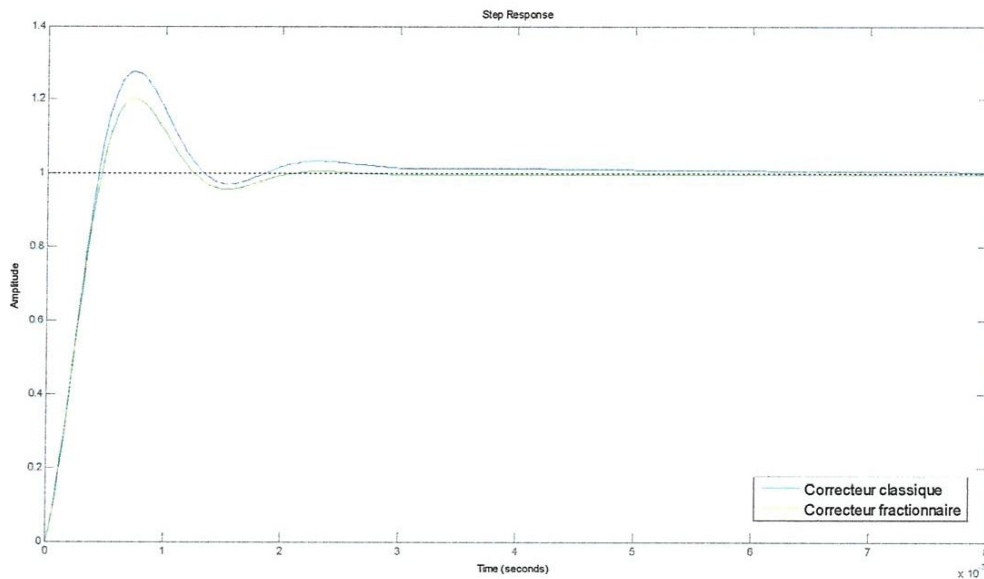


Figure (5.7) Réponse indicielle de la régulation en vitesse

Nous remarquons que l'introduction du correcteur  $PI^{1.87}D^{1.03}$  d'ordre fractionnaire a engendré une baisse du temps de réponse jusqu'à 0.001 secondes ainsi qu'une diminution du dépassement à 20%. Ces améliorations sont très impressionnantes et très utiles, la stabilité s'est améliorée aussi avec l'augmentation de la marge de phase de 5 degrés.

### 3.2. Régulation en position

En appliquant la même procédure pour la régulation PID de position, nous avons relevé le gain d'oscillation  $K_u=6$  et la période d'oscillation  $T_u=0.0401$ . En appliquant les règles de Ziegler-Nichols, nous obtenons les valeurs des paramètres :  $K_p=5$ ,  $T_i=0.1$ ,  $T_d=0.018$ .

Les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire optimal sont obtenus avec le critère IAE, d'où le couple  $[\lambda, \mu] = [0.1, 1.3]$ . Une comparaison entre les performances obtenues par les deux correcteurs classique et fractionnaire sont dans le tableau (5.5).

Un effet considérable est immédiatement aperçu sur la réponse indicielle de la figure (5.7) ainsi que sur le tracé de Bode de la figure (5.8) ; Le temps de montée, le temps de réponse, le dépassement et la marge de phase ont été largement améliorés.

	Temps de réponse (sec)	Dépassement (%)	Marge de phase (deg)
<b>PID classique</b>	0.0788	14.91	71.60
<b><math>PI^{0.1}D^{1.3}</math> fractionnaire</b>	0.0367	7.24	100.06

Tableau (5.4) Performances obtenues pour la régulation en position



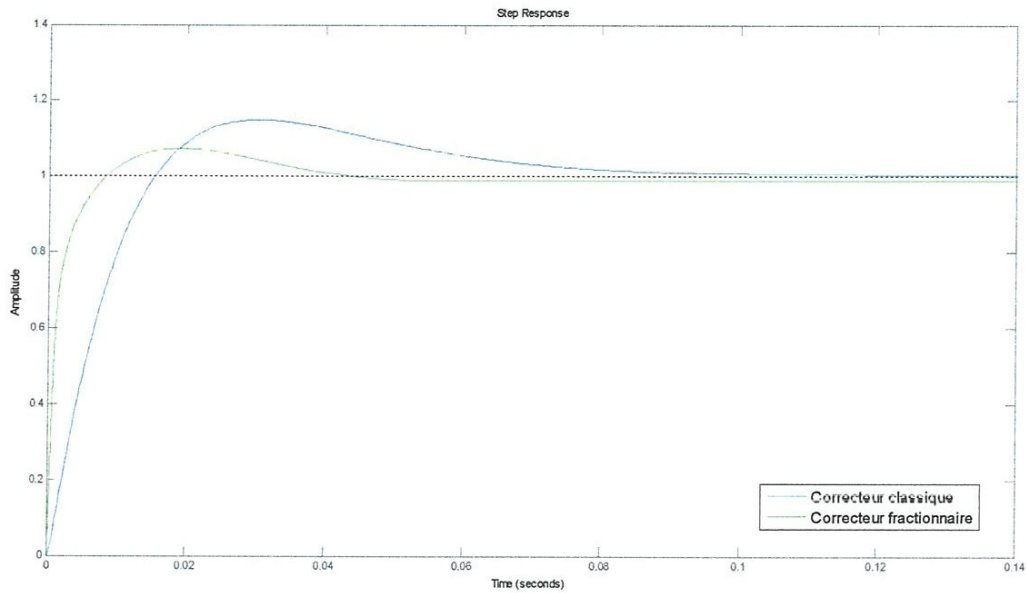


Figure (5.7) Réponse indicielle de la régulation en position

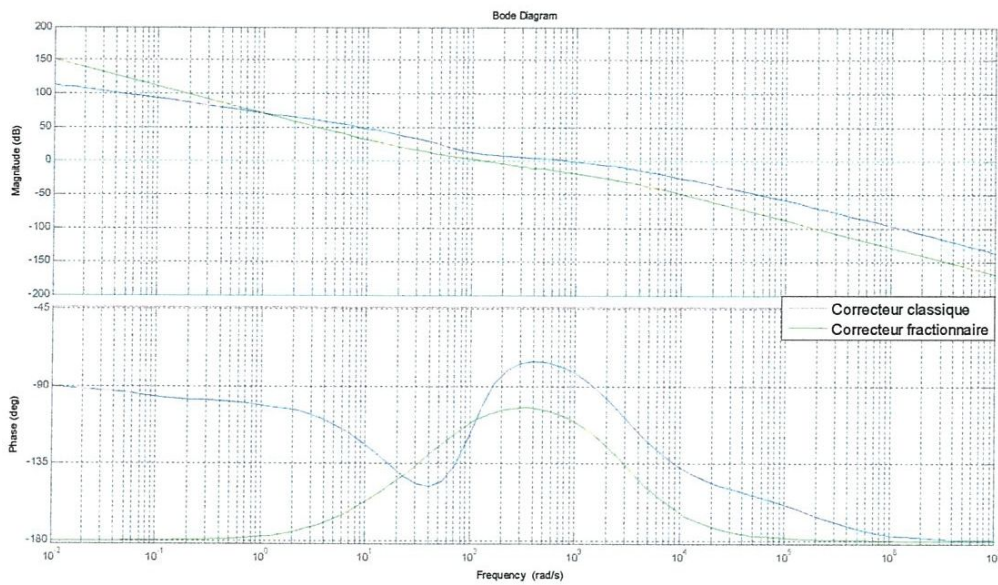


Figure (5.8) Tracé de Bode de la régulation en position

#### 4. Commande d'un train

Dans cette partie, on considère un véhicule composé d'une machine motrice et d'une remorque (wagon). Supposons que le véhicule se déplace seulement dans une direction donnée, nous voulons commander ce véhicule pour qu'il démarre et s'arrête sans heurt, avec une vitesse constante.

Les masses de la machine motrice et de la remorque sont représentées respectivement par  $M1$  et  $M2$ . Les deux éléments sont liés par un ressort de coefficient de rigidité  $k$ .  $F$  représente la force appliquée par la machine motrice et  $\mu$  représente le coefficient de frottement du roulement.

Le système peut être représenté par le diagramme de la figure (5.9)

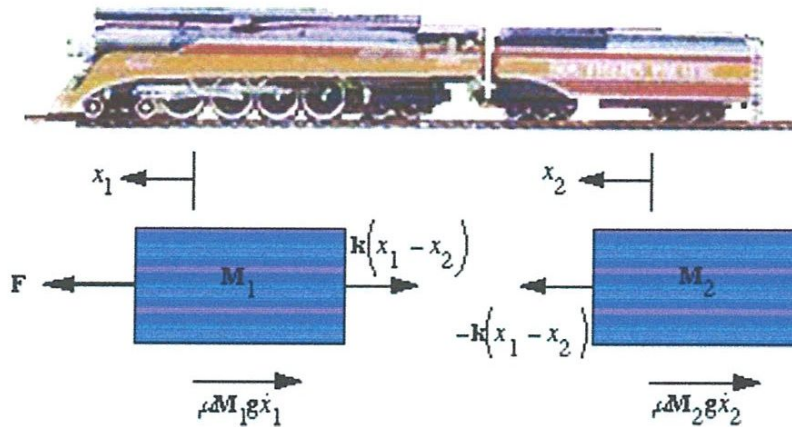


Figure (5.9) Diagramme du train à commander

Les équations différentielles de ce système mécanique peuvent être obtenues en appliquant la loi de Newton à la machine motrice et à la remorque, elles sont données par :

$$\begin{aligned}
 M_1 \ddot{x}_1 &= F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 \\
 M_2 \ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) - \mu M_2 g \dot{x}_2
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

Si on prend la sortie comme étant la vitesse de la machine motrice M1, la fonction de transfert du système sera donnée alors par :

$$G(s) = \frac{M_2 s^2 + M_2 \mu g s + 1}{M_1 M_2 s^3 + (2M_1 M_2 \mu g) s^2 + (M_1 k + M_1 M_2 (\mu g)^2 + M_2 k) s + k \mu g (M_1 + M_2)}
 \tag{5.7}$$

L'introduction des valeurs numériques des paramètres de l'équation (5.7), nous permet d'obtenir la fonction de transfert du train à commander en vitesse donnée par :

$$G(s) = \frac{0.5s^2 + 0.0098s + 1}{0.5s^3 + 0.0196s^2 + 1.5s + 0.0294}
 \tag{5.8}$$

Les paramètres  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  du correcteur classique à utiliser sont donnés par:  $K_p = 0.038$ ,  $T_i = 3.8$ ,  $T_d = 0.01$ .

Nous déterminons ensuite les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire à l'aide de l'algorithme d'optimisation. En utilisant la méthode d'optimisation avec les contraintes suivantes :

- ✓ Une marge de phase > 45 degrés.
- ✓ Un dépassement < 10%.

Nous obtenons :  $[\lambda, \mu] = [0.59, 0.01]$ .

Le tableau (5.5) représente les performances obtenues après la régulation par les deux correcteurs ; le PID classique et le  $PI^{0.59}D^{0.01}$  d'ordre fractionnaire. Les figures (5.10) et (5.11) représentent, respectivement, la réponse indicielle et le tracé de Bode du système corrigé.

	Temps de réponse (sec)	Dépassement (%)	Marge de phase (deg)
PID classique	166.88	43.05	30.78
$PI^{0.59}D^{0.01}$ fractionnaire	67	2.81	72.25

Tableau (5.5) Performances obtenues pour la régulation en vitesse du train

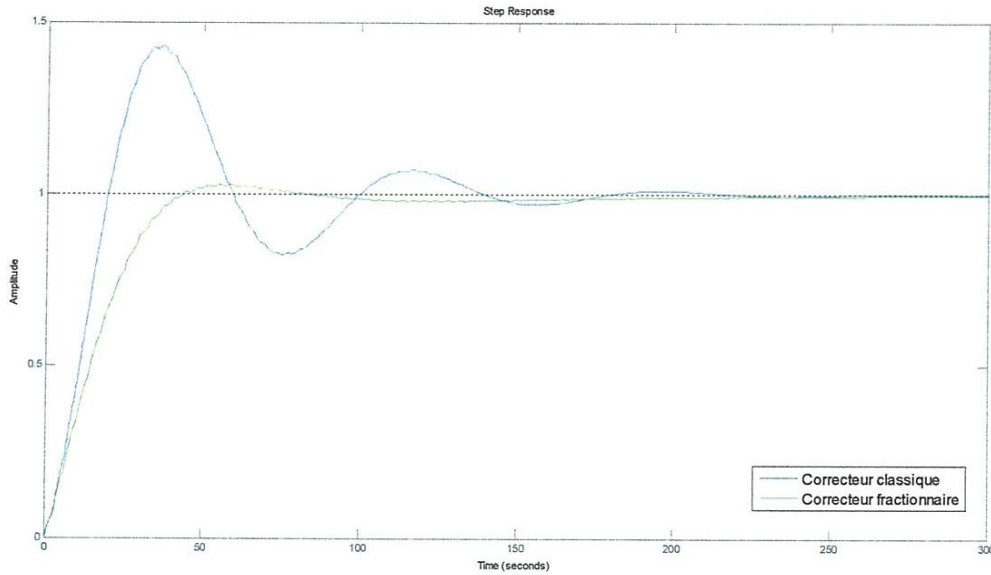


Figure (5.10) Réponse indicielle de la régulation en vitesse du train

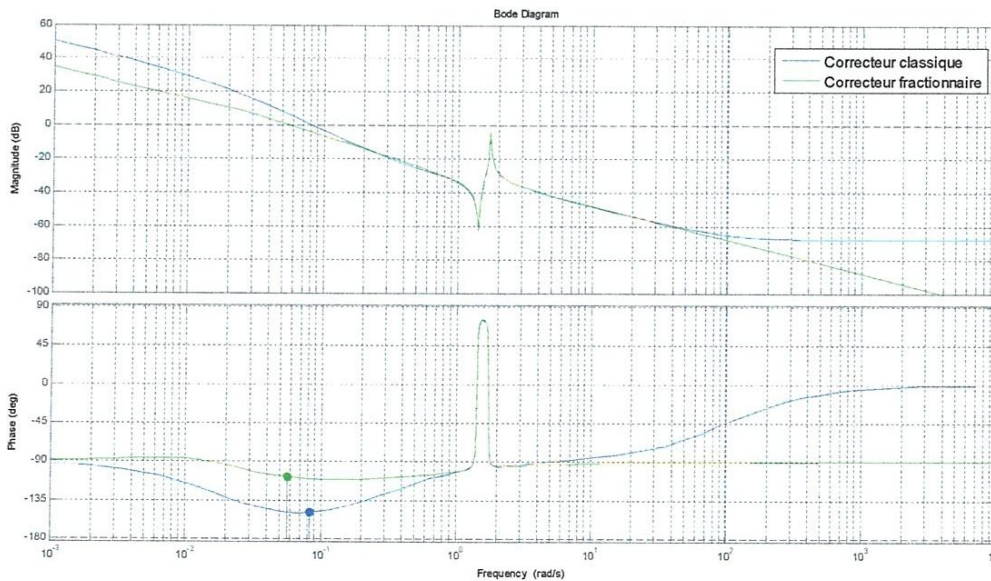


Figure (5.11) Tracé de Bode la régulation en vitesse du train



A partir du tableau (5.5) et des figures (5.10) et (5.11), il paraît très clairement que le correcteur  $PI^{0.59}D^{0.01}$  d'ordre fractionnaire a apporté de très importantes améliorations sur toutes les performances du système ; La marge de phase a augmenté de plus de 100%, le temps de réponse a diminué de 100 secondes et le dépassement est légèrement supérieur à 0.

## 5. Commande d'un système électrohydraulique

Considérons maintenant un système plus ou moins complexe, il s'agit d'un système électrohydraulique [37], tel que présenté dans la figure (5.12). Un système électrohydraulique typique est constitué principalement des composants suivants :

- ✓ Un moteur électrique qui entraîne la pompe.
- ✓ Une pompe qui aspire de l'huile contenu dans le réservoir pour l'emmener dans le système
- ✓ Un limiteur de pression servant à fixer la pression de service dans les systèmes.
- ✓ Un accumulateur hydraulique qui a pour but de recevoir un volume de liquide sous pression et de le restituer en cas de besoin.
- ✓ Deux servovalves qui sont des composantes actives; l'un distribuant le flux d'énergie vers le moteur hydraulique pour le faire démarrer, l'arrêter ou inverser son sens de rotation, l'autre distribuant le flux d'énergie vers le deuxième moteur servant de charge.
- ✓ Deux moteurs hydrauliques (l'un principal et l'autre pour la charge) transmettant le couple suivant un mouvement de rotation. Ils transforment l'énergie hydraulique en énergie mécanique.

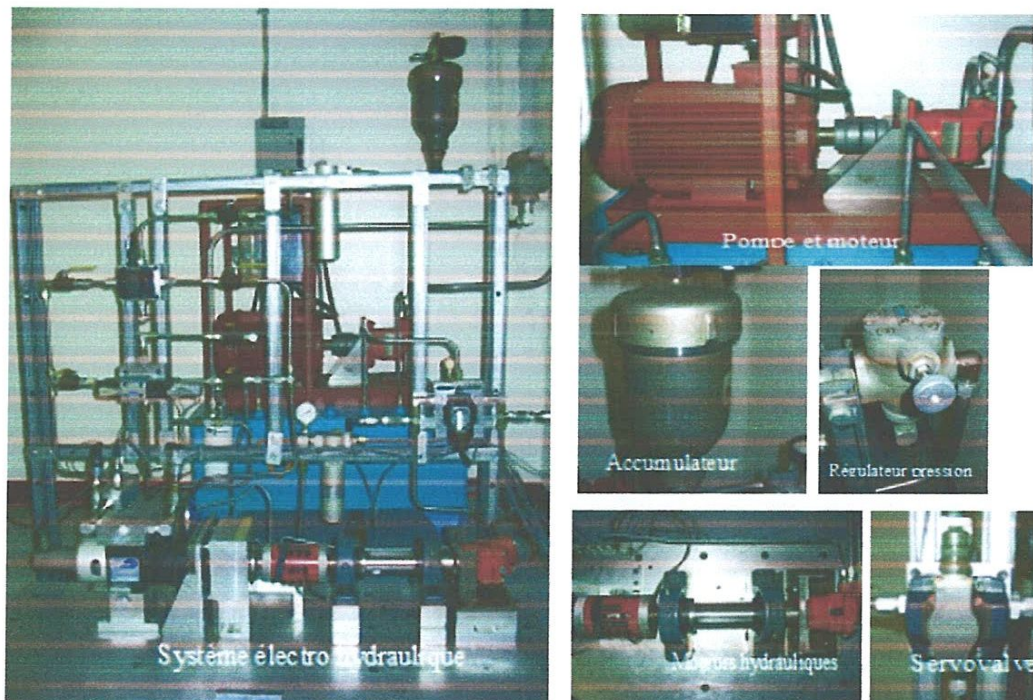


Figure (5.11.a) Système électrohydraulique (Processus réel)

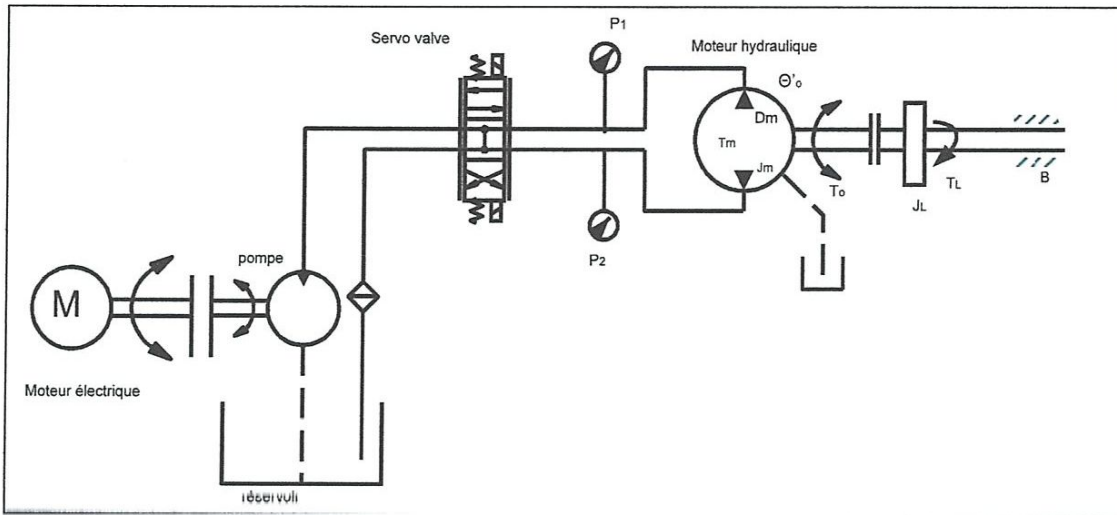


Figure (5.11.b) Système électrohydraulique (schéma équivalent)

Après la modélisation, on procède à la linéarisation du système et à partir des paramètres du système, on obtient les matrices [A,B,C,D] de la représentation d'état du système comme suit :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 173.4522 & 0 & 0 \\ 0 & -15.888 & 29.2527 & 0 \\ 0 & -657.4511 & -10.6840 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2.65 & 0 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 173.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.73 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.94 \times 10^{-6} \end{bmatrix} ; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Avec les matrices ainsi trouvées, nous pouvons déterminer les fonctions de transfert pour chacune des sorties. Ainsi, nous avons procédé à deux types de régulations :

- ✓ Contrôle en position angulaire du moteur hydraulique.
- ✓ Contrôle en vitesse angulaire du moteur hydraulique.

### 5.1. Régulation en position du moteur hydraulique

La fonction de transfert de la sortie en position angulaire est donnée par [37] :

$$G_1(s) = \frac{3.3359 \times 10^7}{100s^3 + 22100s^2 + 1.9402 \times 10^6 s} \quad (5.10)$$

Les paramètres du PID classique sont obtenus en appliquant les règles de la méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée pour  $K_u = 12.85$  et  $T_u = 0.045$ . D'où :

$$K_P = 7.71, T_I = 0.0225, T_D = 0.00565.$$

En minimisant le critère ISE, les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sont déterminés tel que  $[\lambda, \mu] = [0.07, 1.7]$ . Les performances obtenues après la correction sont donnés dans le tableau (5.6). Les figures (5.12) et (5.13) montrent bien la nette amélioration apportée par le correcteur  $PI^{0.07}D^{1.7}$  fractionnaire ; la figure (5.13) étant une dilatation de la courbe de réponse du système régulé par le  $PI^{0.07}D^{1.7}$  fractionnaire.

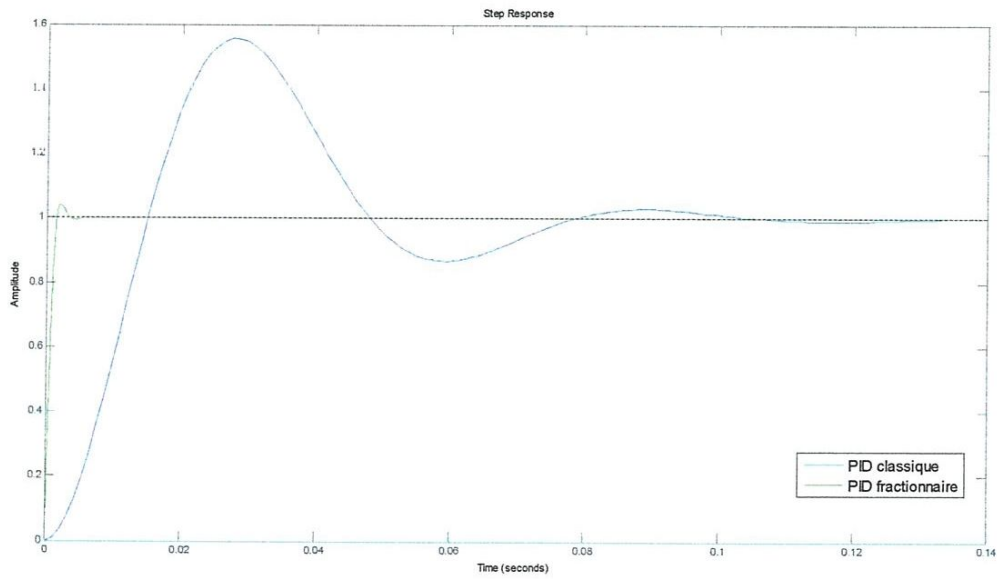


Figure (5.12) Réponse indicielle de la régulation en position du moteur hydraulique

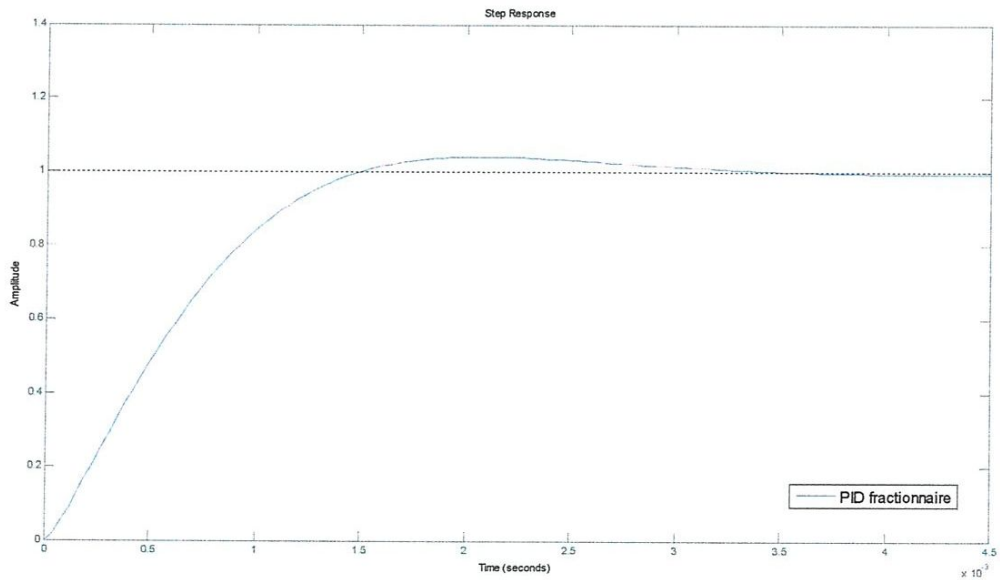


Figure (5.13) Réponse indicielle de la régulation en position du moteur hydraulique par le correcteur  $PI^{0.07}D^{1.7}$  fractionnaire.



	Temps de réponse (sec)	Dépassement (%)	Marge de phase (deg)
PID classique	0.0435	42.44	29.38
$PI^{0.07}D^{1.7}$ fractionnaire	0.0272	4.20	107.46

Tableau (5.7) Performances obtenues pour la régulation en vitesse du moteur hydraulique

Nous remarquons une amélioration considérable des qualités du système ; le temps de réponse a diminué du demi, le dépassement n'atteint que 4.2% et la marge de phase s'est presque quadruplée.

## 6. Test de robustesse

La robustesse des systèmes de commande aux perturbations et aux incertitudes est un objectif important dans les boucles de commande. La rétroaction ne serait pas nécessaire pour la plupart des systèmes de commande s'il n'y avait aucune perturbation et incertitude. En général, la conception des correcteurs est effectuée en utilisant les valeurs nominales des paramètres du processus à commander. Cependant, ils existent toujours des incertitudes sur les valeurs de ces paramètres. Nous pouvons dire qu'une conception est robuste, si elle garde les performances du système de commande pour la variation substantielle en valeurs des paramètres du processus.

Nous effectuerons un test de robustesse à l'exemple de régulation en position du moteur à courant continu, nous comparerons les performances du système de commande pour les deux correcteurs, le correcteur PID classique et le correcteur  $PI^{0.1}D^{1.3}$  d'ordre fractionnaire, avec une variation du gain  $K_c$  du processus de  $\pm 50\%$ .

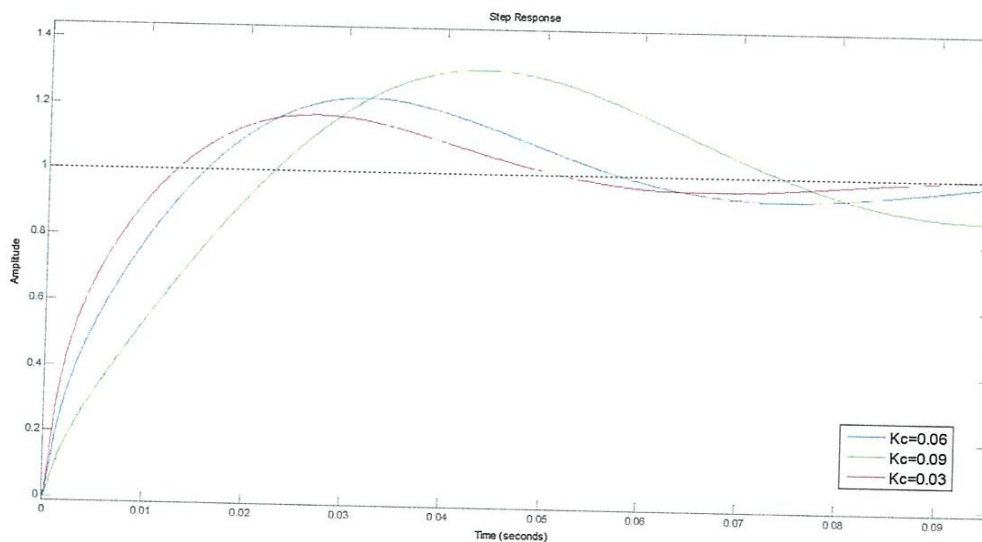
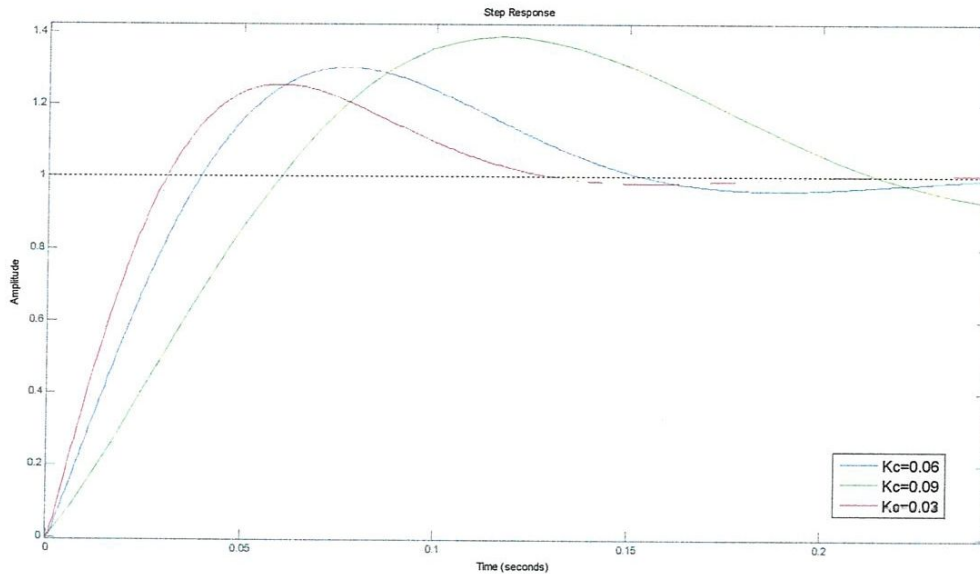


Figure (5.17) Réponse indicielle de la régulation en position par un  $PI^{0.1}D^{1.3}$  fractionnaire avec variation du gain du processus



**Figure (5.18)** Réponse indicielle de la régulation en position par un PID classique avec variation du gain du processus

A partir des figures (5.17) et (5.18), nous pouvons remarquer que le système corrigé par un  $PI^{0.1}D^{1.3}$  fractionnaire présente légèrement moins de variations par rapport au changement du gain  $K_c$  comparé au correcteur PID classique. Nous pouvons donc dire que l'utilisation d'un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire fournit une meilleure robustesse et de bonnes performances.

## 7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques exemples de corrections de systèmes réels par un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, une comparaison est faite à chaque fois avec les résultats obtenus par la correction PID classique.

Afin de prouver les performances du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, nous avons considéré une assez large variété de systèmes, simples et complexes. Des résultats très intéressants, et même impressionnants parfois, ont été trouvés. A la fin de ce chapitre, nous avons mis en évidence la robustesse de la commande du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.

## Chapitre 6

# Le Simulateur de Correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ Fractionnaires

### 1. Introduction

Durant ces dernières années, plusieurs améliorations ont été apportées à la correction d'ordre fractionnaire, notamment aux méthodes de réglages du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire. Cependant, il existe toujours des difficultés dans l'utilisation de ces correcteurs dues au manque d'outils et de programmes de simulation appropriés. Pour pallier à ce manque, nous avons entamé la conception et la réalisation d'une plateforme de simulation de correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaires.

En effet, nous avons programmé toutes les fonctions de base nécessaires pour cet outil ; de l'approximation, au calcul de l'erreur, à la détermination des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par les méthodes présentées dans ce mémoire et jusqu'à l'algorithme de minimisation. Pour former l'outil « simulateur de correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaires », nous avons associé ces fonctions à une interface graphique. Dans ce chapitre, nous allons présenter ce simulateur avec le principe de fonctionnement.

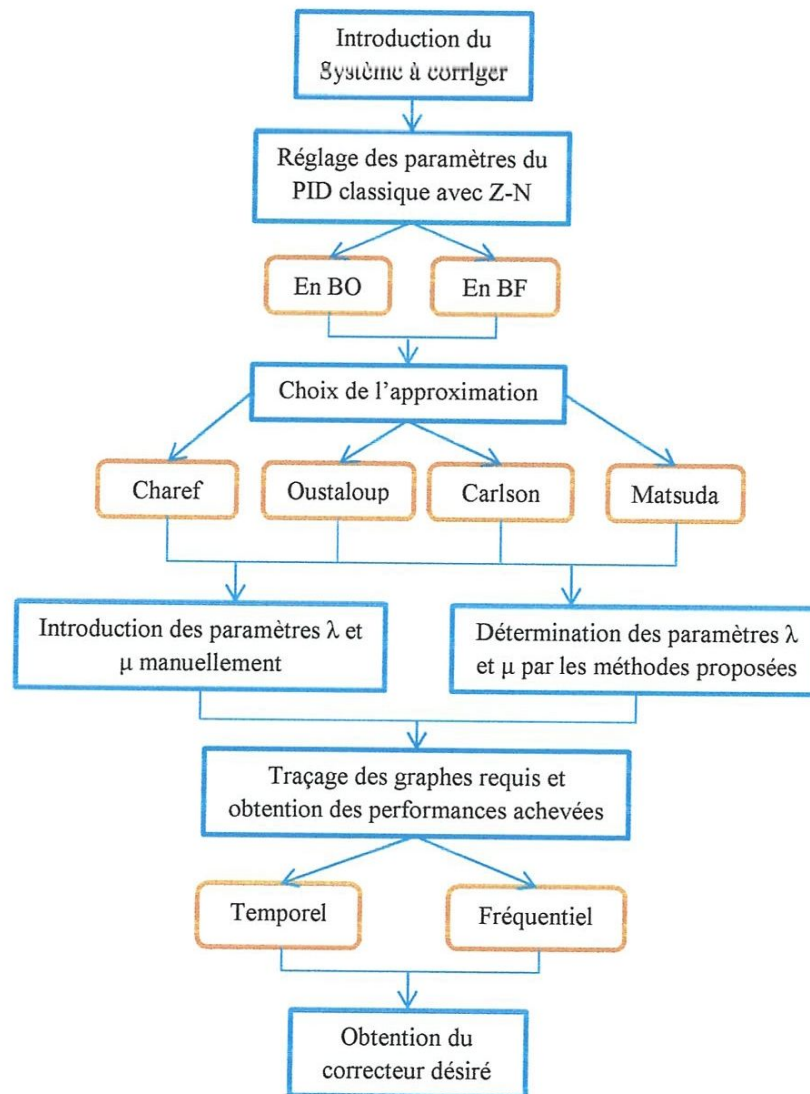
### 2. Présentation du Simulateur

Il est clair que SIMULINK avec son environnement graphique simplifié est plus facile à utiliser que MATLAB, puisqu'on n'a pas à utiliser toutes ces fonctions MATLAB avec leurs différentes appellations, syntaxes et paramètres de sortie et d'entrée. Notre simulateur de correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaires a, justement, le même objectif ; C'est une interface graphique (GUI Graphic User Interface) sous MATLAB qui comporte tous les outils nécessaires pour faire une correction avec un  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire.

L'organigramme de la figure (6.1) présente le principe de fonctionnement du simulateur. Cet environnement graphique est composé de plusieurs parties où chacune de ces parties a plusieurs tâches à réaliser. Les principales parties sont les suivantes:



- ✓ Une partie dédiée aux approximations.
- ✓ Une partie pour la détermination des paramètres du PID classique avec Ziegler-Nichols.
- ✓ Une partie réservée au traitement de données, d'entrée et de sortie.
- ✓ Une partie pour la détermination des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire.
- ✓ Une partie pour le traitement des paramètres du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire.
- ✓ Et une partie pour le traçage des graphes et ses différents outils.



**Figure (6.1)** Organigramme des tâches réalisées par le simulateur dans l'ordre logique

La figure (6.2) représente un aperçu général de l'interface graphique du simulateur. Nous détaillerons, ci-après, l'utilisation de cet outil bien évidemment dans l'ordre logique d'utilisation, de l'introduction du système jusqu'à la correction de celui-ci.

Notons que pour lancer le simulateur, il faut exécuter, depuis l'espace de travail de MATLAB (Workspace), la fonction :

```
>> pidfracgui
```

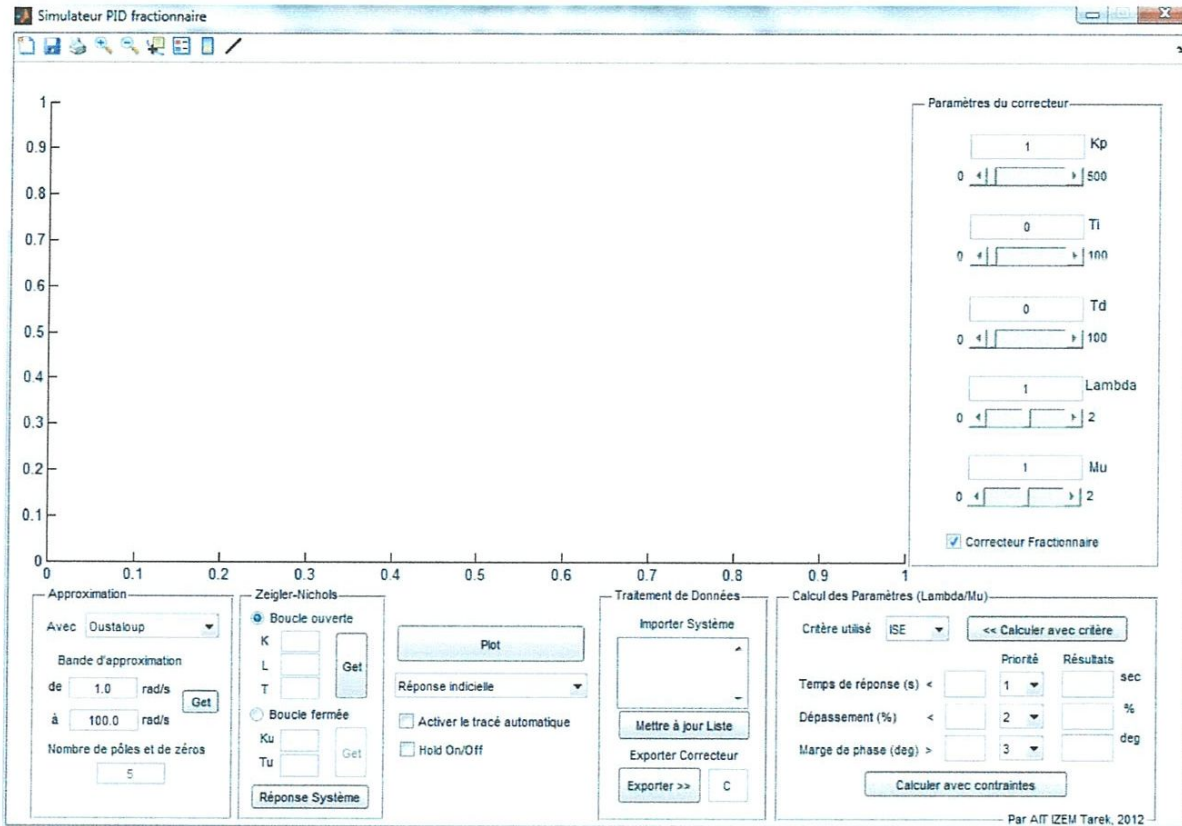


Figure (6.2) Aperçu général de l'interface graphique du simulateur

### 3. Différentes fonctions du Simulateur

#### 3.1. Traitement des Données

Il s'agit de la partie chargée de l'importation des systèmes à partir du Workspace et l'exportation des correcteurs vers celui-ci. Pour cela, il suffit d'entrer le système à corriger dans l'environnement MATLAB comme nous en avons l'habitude de le faire.

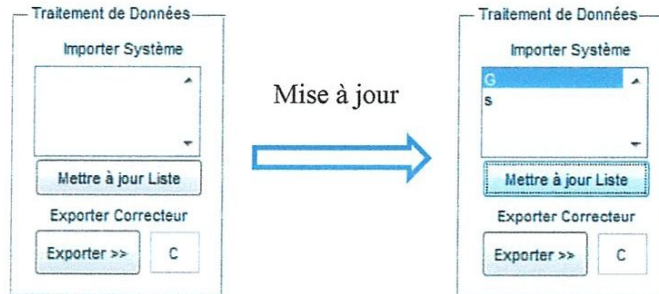
Pour illustrer cette étape, considérons l'exemple d'application du système donnée par :

$$G(s) = \frac{0.5}{s(s+1)(2s+1)} \quad (6.1)$$

Pour introduire ce système, on procède de la façon suivante :

```
>> s=tf('s')
>> G=0.5/(s*(1+s)*(1+2*s))
```

Ensuite, il faut actualiser la liste des variables dans la partie traitement de données du simulateur en cliquant sur le bouton « Mettre à jour liste ». Les variables récemment introduites dans MATLAB apparaissent, ainsi, sur la liste, comme montré dans la figure (6.3). Nous choisissons, bien évidemment, la variable « G » qui correspond à notre système à corriger.



**Figure (6.3)** Introduction du système dans le simulateur

Dorénavant, toutes les manipulations faites par le simulateur porteront sur le système « G » sélectionné dans la liste.

La partie exportation du correcteur intervient vers la fin du travail. Après avoir déterminé tous les paramètres de ce dernier, l'utilisateur n'a qu'à choisir le nom sous lequel sera sauvegardé ce correcteur sous MATLAB et cliquer sur « Exporter » pour faire cette action. Le nom par défaut sous lequel le correcteur sera sauvegardé est « C ».

### 3.2. Ziegler-Nichols

Nous avons présenté, dans ce mémoire, deux méthodes pour la détermination du correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire qui se basent sur les méthodes de réglages empiriques des paramètres d'un correcteur PID classique de Ziegler-Nichols. Donc, il est primordial de réserver une partie de ce simulateur pour cet outil.

En effet, la partie nommée « Ziegler-Nichols » du simulateur aide l'utilisateur à obtenir les paramètres du PID classique par les méthodes de réglage de Ziegler-Nichols, elle se divise en deux parties :

- ✓ Une partie pour la méthode en boucle ouverte.
- ✓ Une partie pour la méthode en Boucle fermée.

L'utilisateur a le choix entre l'utilisation de l'une des méthodes de Ziegler-Nichols la mieux adaptée au système introduit, comme le montre la figure (6.4).



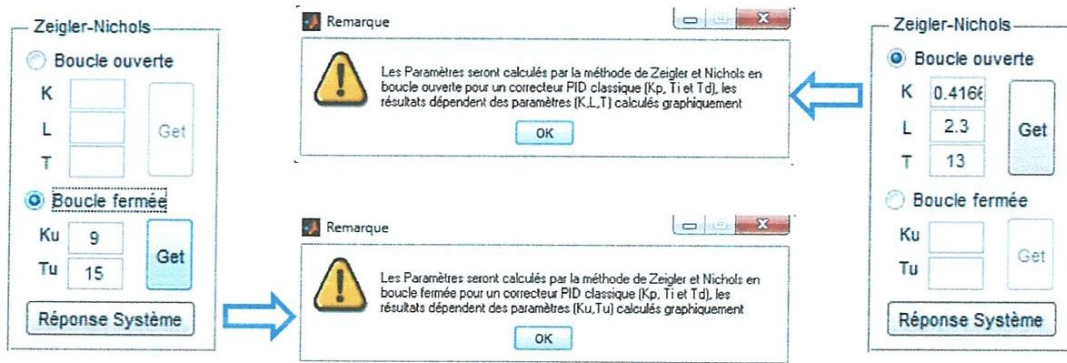


Figure (6.4) Choix de la méthode de réglage de Ziegler-Nichols à utiliser

Les méthodes de réglages de Ziegler-Nichols sont des méthodes graphiques ; l'obtention des paramètres du correcteur PID classique,  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  se fait à base des paramètres obtenus graphiquement de la réponse indicielle du système. Le bouton « Réponse système » est justement là pour nous aider à effectuer cette tâche, ce dernier s'adapte selon le choix de la méthode choisie et trace la réponse du système soit en BF soit en BO.

Les paramètres requis pour cette méthode étant :

- ✓  $K$ ,  $L$  et  $T$  pour la méthode en boucle ouverte.
- ✓  $K_u$  et  $T_u$  pour la méthode en boucle fermée.

Deux fonctionnalités supplémentaires ont été ajoutées dans cette partie, l'une est l'obtention automatique du gain  $K$  en boucle ouverte et la deuxième est l'assistance pour la détermination du gain critique  $K_u$  en boucle fermée. Pour cette dernière, nous utilisons la barre de défilement du paramètre  $K_p$  pour augmenter le gain et s'apercevoir ainsi de la valeur de celui-ci qui amène le système au phénomène de pompage afin de déterminer la période d'oscillation  $T_u$ .

Une fois tous les paramètres insérés dans la partie « Ziegler-Nichols » du simulateur, un clic sur le bouton « Get » permet d'obtenir les paramètres  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  du correcteur classique et les insérer automatiquement dans leurs endroits spécifiques de la partie « Paramètres du correcteur ».

### 3.3. Approximation

Cette partie, représentée dans la figure (6.5), se charge d'approximer le correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire par une fonction de transfert rationnelle selon le choix de l'approximation à utiliser. Les approximations disponibles sont :

- ✓ Approximation de Charef.
- ✓ Approximation d'Oustaloup.
- ✓ Approximation de Carlson.
- ✓ Approximation de Matsuda.

L'approximation étant valable sur la bande de fréquences utile du système, notée  $[w_b, w_h]$ . Le simulateur offre la possibilité de l'introduite manuellement dans son espace réservé ou bien de l'obtenir automatiquement en cliquant sur le bouton « Get ».

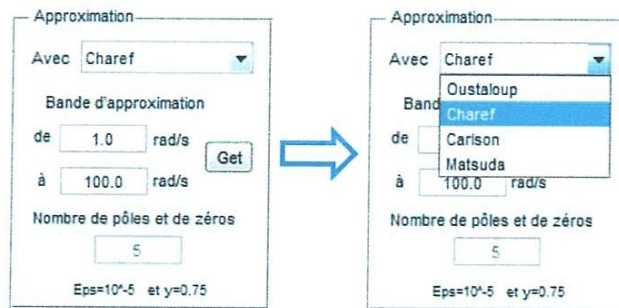


Figure (6.5) Choix de l'approximation rationnelle à utiliser

Un autre paramètre à introduire est le « nombre de pôles et zéros », spécifiques à toutes les approximations sauf celle de Charef où il est calculé automatiquement, qui définit le nombre d'alternances de pentes correspondant à une alternance de pôles et de zéros propre à l'approximation. Pour plus d'informations sur les paramètres de l'approximation, se référer au Chapitre 3 dédié à l'approximation rationnelle des opérateurs fractionnaires.

### 3.4. Calcul des paramètres $\lambda$ et $\mu$

Dans cette partie, que nous jugeons la plus importante dans notre travail, nous avons introduit les outils nécessaires pour la détermination des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire avec les méthodes présentées dans ce mémoire, en l'occurrence :

- ✓ Une méthode basée sur la minimisation du critère intégral de performance.
- ✓ Une méthode basée sur la détermination des paramètres selon des contraintes imposées.

Cette partie spécialisée dans la détermination des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est représentée dans la figure (6.6).

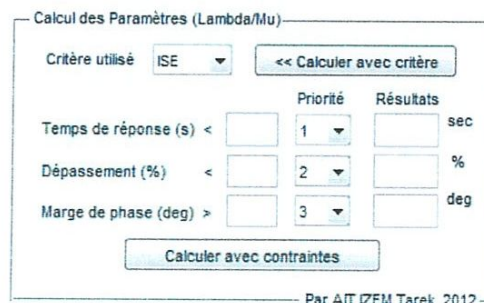


Figure (6.6) partie réservée aux méthodes de recherches des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$



### 3.4.1. Calcul avec critère

Cette fonctionnalité utilise les critères intégraux, précédemment cités dans ce mémoire, chapitre 4, section (5.1.2.1), comme critères de performances à minimiser afin d’obtenir les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d’ordre fractionnaire. Après avoir choisi le critère à utiliser, un simple clic sur le bouton « Calculer avec critère » démarre l’algorithme de calcul des paramètres nécessaires. Un message, comme sur la figure (6.7), nous prévient pour signaler que le calcul a commencé. Une fois le calcul terminé, les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  obtenus, en minimisant le critère voulu, sont insérées automatiquement dans leurs champs spécifiques de la partie « Paramètres du correcteur ».

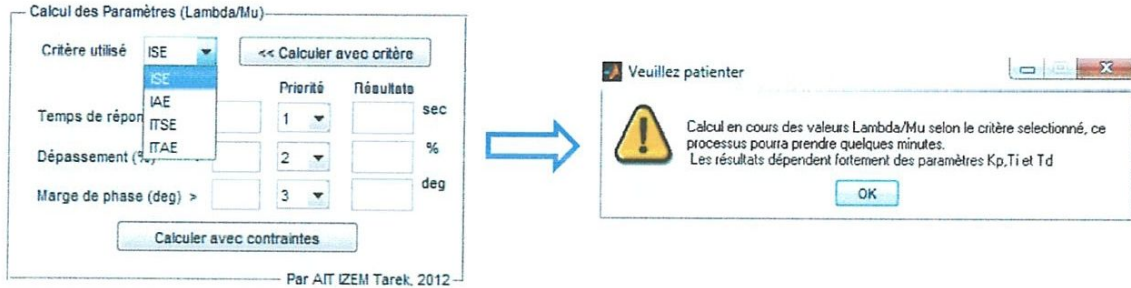


Figure (6.7) Calcul de  $\lambda$  et  $\mu$  par la minimisation du critère intégral

### 3.4.2. Calcul sous contraintes

Cet outil du simulateur nous permet de calculer les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d’ordre fractionnaire en prenant en compte des contraintes, dans le sens de performances désirées, introduites par l’utilisateur.

Tout commence par l’introduction des contraintes, de temps de réponse, de dépassement et de marge de phase dans leurs emplacements réservés, ensuite l’ordre de priorité de ces contraintes qui sert, essentiellement, dans le cas où les contraintes ne peuvent pas être réalisées toutes à la fois. Dans ce cas, l’algorithme essaie de réaliser au moins la performance de priorité 1. Pour mieux comprendre cette méthode, se référer au chapitre 4 dédié aux méthodes de calcul des paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d’ordre fractionnaire. La figure (6.8) illustre l’utilisation de cette partie.

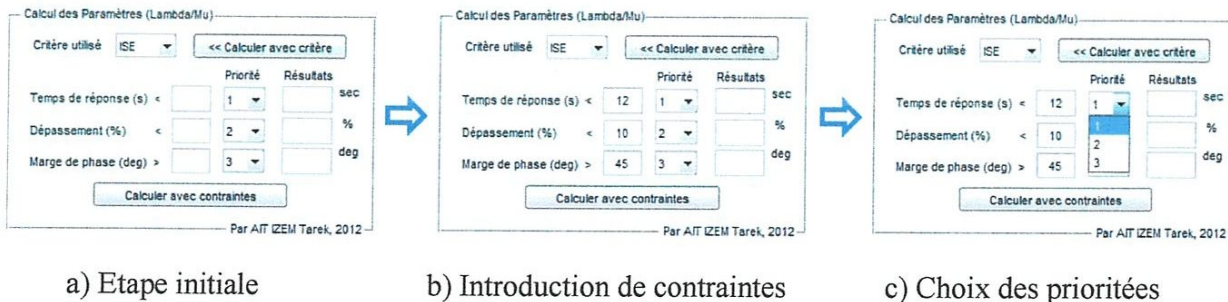


Figure (6.8) Calcul de  $\lambda$  et  $\mu$  avec contraintes.

Une fois le calcul terminé, les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  obtenus sont insérés automatiquement dans leurs champs spécifiques de la partie « Paramètres du correcteur ».



### 3.5. Paramètres du correcteur

Cette partie contient les champs réservés aux paramètres  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire. La case à cocher « Correcteur Fractionnaire », nous permet d'activer et de désactiver les champs  $\lambda$  et  $\mu$  selon le besoin d'utiliser les ordres fractionnaire du correcteur ou non. Si, par exemple, cette case n'est pas cochée, le correcteur à utiliser sera le correcteur PID classique.

Au-dessous de chaque champ se trouve une barre de défilement synchronisé avec ce dernier. Elle permet de varier, de façon très pratique, les paramètres choisis selon une certaine précision. Une fonctionnalité très intéressante de cette barre peut être activée en cochant la case « Activer le tracé automatique » ; ainsi, le simulateur trace automatiquement la réponse désirée instantanément selon la variation de la barre de défilement du paramètre sélectionné. Donc, l'utilisateur n'a pas à cliquer sur le bouton « Plot » à chaque fois pour apercevoir les résultats d'une part et d'autre part, il constate la variation de la réponse du système en temps réel en fonction des variations des différents paramètres. La figure (6.9) représente un aperçu de cette partie du simulateur.

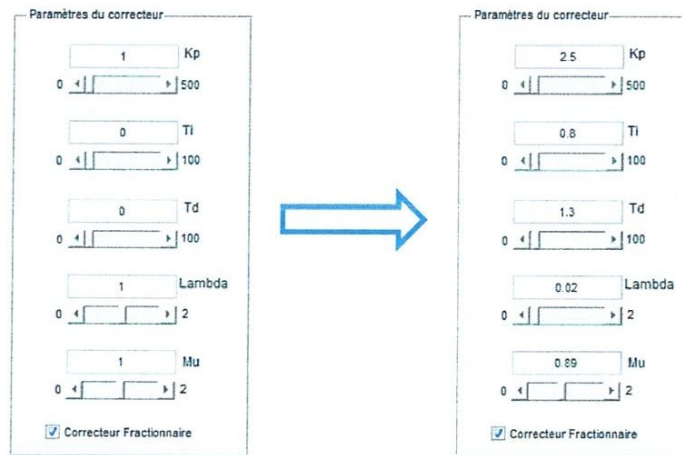


Figure (6.9) Introduction des paramètres du correcteur dans le Simulateur

### 3.6. Outil de représentation graphique

L'une des principales tâches d'un simulateur est de représenter le comportement du système à étudier sous forme graphique. De ce fait, nous avons réservé, dans notre simulateur, un espace considérable aux tracés où il suffit de choisir le type du graphe désiré et cliquer sur le bouton « Plot » pour que le simulateur représente la courbe choisie. Comme le montre la figure (6.10), plusieurs types de tracés sont pris en charges, nous citons :

- ✓ La réponse indicielle.
- ✓ La réponse impulsionnelle.
- ✓ Le plan des pôles et des zéros.
- ✓ Le tracé de Bode.
- ✓ Le tracé de Nyquist.
- ✓ L'abaque de Black-Nichols.

Les fonctionnalités ajoutées à cette partie du simulateur sont : la case « Hold on » qui, une fois activée, permet de tracer les réponses en superposition et la case « Activer le tracé automatique » précédemment expliquée.

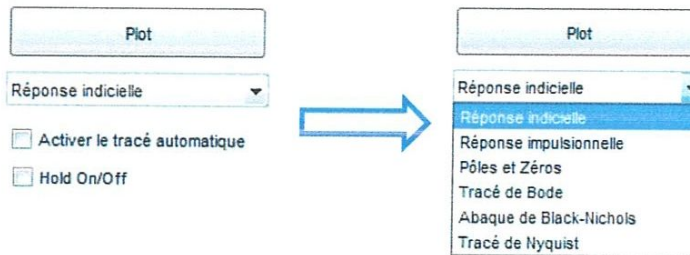


Figure (6.10) Types de tracés pris en charge

Pour une meilleure vision de l’outil de représentation graphique du Simulateur, nous avons effectué une correction d’un système par un correcteur PID classique ainsi qu’un correcteur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d’ordre fractionnaire. Prenons l’exemple (6.1) précédent.

Les paramètres du correcteur classique ont été obtenus avec la méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée pour  $K_u=3$  et  $T_u=9$  d’où  $K_p=1.8$ ,  $T_i=4.5$  et  $T_d=1.125$ . En utilisant le critère ISE comme critère à minimiser, les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  obtenues sont 0.1 et 1.2 respectivement. Les résultats sont présentés sur la figure (6.11).

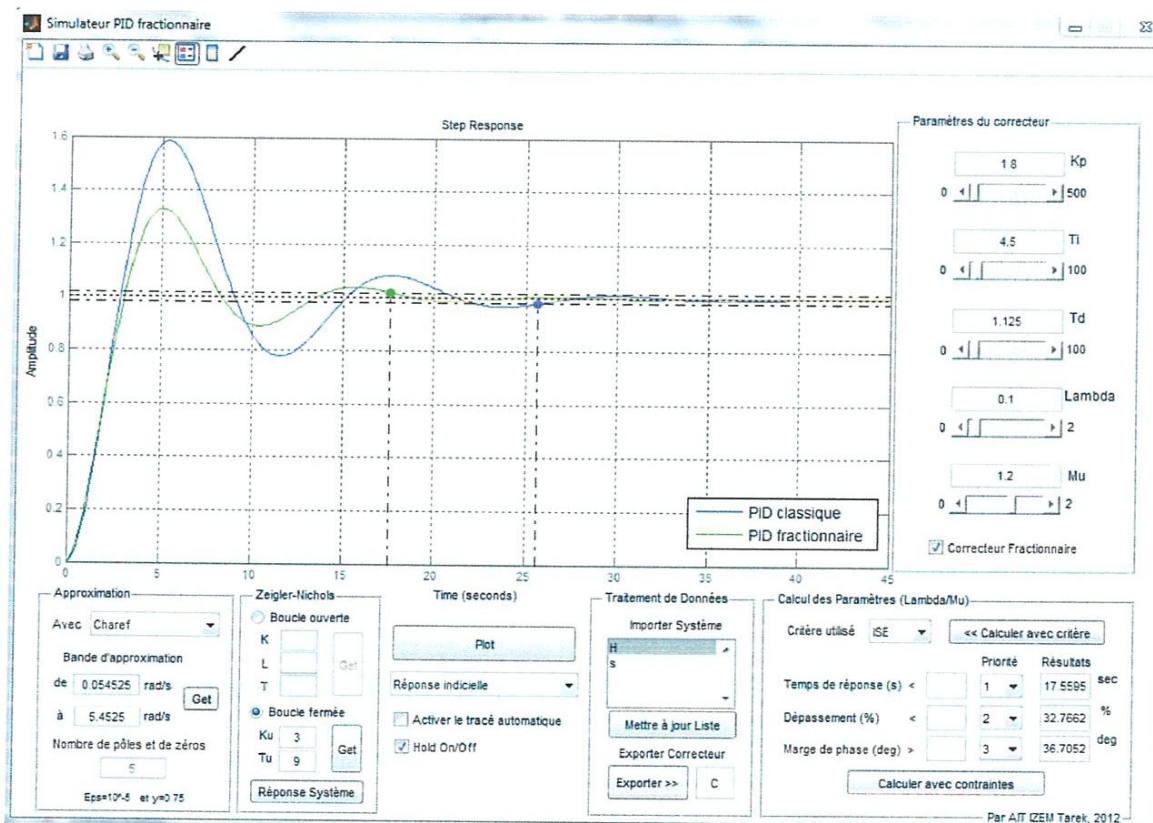


Figure (6.11) Résultats de la simulation

**Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté la plateforme de simulation de correcteurs  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordres fractionnaires que nous avons conçue et réalisée dans ce travail. Les très bons résultats obtenus montrent qu'il peut servir d'un véritable outil de simulation de correcteurs pour des applications industrielles. Cependant, comme tout travail initial, il peut être amélioré en ajoutant d'autres méthodes, plus efficaces et plus rapides, d'optimisation.



## Chapitre 7

### Conclusion générale et perspectives

Ce travail a porté essentiellement sur l'introduction de nouvelles techniques de réglage de correcteurs d'ordre fractionnaire dans une structure de commande PID classique. Le principe consiste à généraliser le correcteur PID d'ordre entier au cas fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$ , dans lequel les ordres des actions dérivée et intégrale sont fractionnaires. Pour la mise en œuvre nous avons considéré plusieurs procédés. D'autre part, nous avons conçu et réalisé un simulateur de correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordres fractionnaires.

L'idée de base des méthodes de réglage proposées est d'utiliser le correcteur PID d'ordre entier déjà existant. Autrement dit, régler les paramètres  $K_P$ ,  $T_I$  et  $T_D$  avant d'ajuster les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  soit :

- En minimisant un critère intégral de l'erreur ; pour cela nous avons choisi les quatre critères intégraux : l'intégrale de l'erreur quadratique (ISE), l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur (IAE), l'intégrale de l'erreur quadratique multipliée par le temps (ITSE) et l'intégrale de l'erreur absolue multipliée par le temps (ITAE).
- En vérifiant des contraintes imposées, en l'occurrence : le temps de réponse, le dépassement et la marge de phase.

Une étude comparative avec la structure de commande PID classique déjà existante nous a montré que cette nouvelle technique de réglage donne des résultats remarquables.

La conception des correcteurs d'ordre fractionnaire est un domaine sans frontières. Ce mémoire couvre seulement quelques aspects de leur réglage. Les recherches peuvent être conduites dans le sens de développer des méthodes de conception systématique de correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, en considérant les cinq paramètres simultanément. D'autre part, l'algorithme de conception des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, utilisé dans ce mémoire, peut être amélioré en employant d'autres algorithmes d'optimisation telle que la méthode d'optimisation par essaim particulaires PSO.

## Références Bibliographiques

- [1] L. Debnath, *A brief historical introduction to fractional calculus*, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 35(4): 487–501, 2004.
- [2] A. Oustaloup, *La dérivation non entière*, Hermès, Paris, 1995.
- [3] I. Podlubny, *Fractional Order Systems and  $PI^2D^\mu$  Controllers*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1), pp 208–214, 1999.
- [4] R. Caponetto and L. Fortuna, *A new tuning strategy for a non-integer order PID Controller*, Proc of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, FDA'04 Bordeaux, France, July 19-21, 2004..
- [5] C. A. Monje, *Design Methods of Fractional Order Controllers for Industrial Applications*, PHD thesis, Universidad de Extremadura, 2006.
- [6] K. Bettou.K , A. Charef, *A New design method for fractional  $PI^2D^\mu$  controller*, *IJSTA*, vol.2, No1, pp 414-429, July 2008.
- [7] I.A. Brin, *On the stability of certain systems with distributed and lumped parameters*, *Automatic Remote Control*, N° 23, 1962.
- [8] A.M.A. El-Sayed and F.M. Gaafar, *Fractional calculus and some intermediate physical processes*. *Applied Mathematics and Computation*, 144, 2003.
- [9] H.M. Srivastava and R.K. Saxena, *Operators of fractional integration and their applications*. *Applied Mathematics and Computation*, 118, 2001.
- [10] I. Podlubny, *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and fractional Differentiation*, *Fractional calculus and applied analysis*, 5, N° 4, 2002.
- [11] M. Caputo. *Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent*. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 2(13) : 529-539, 1967.
- [12] K. B. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus*, Academic press, New York, 1974.
- [13] S. C. D. Roy, *On the realisation of a constant-argument immitance or fractional operator*, *IEEE, Trans. On circuit theory*, Vol. 14, no. 3, 264-274, 1967.
- [14] I. Petras, I. Podlubny, P. O'Leary, L. Dorcak, and B.M. Vingre. *Analogue realisations of fractional order controllers*. *Faculta Berg, TU Koosice*, 2002.
- [15] Conway J. H., Guy R. K. (1996), *Continued Fractions*, *In: The Book of Numbers*. New York: Springer-Verlag, 176-179, 1996.
- [16] Gupta K. C., S. Handa, S. L. Kalla, *A study of generalized Laplace transform involving two variables*, *Univ. Nac. Tucuman. Rev. Ser. A26* (1976) 91-104, 1976.



- [17] Carlson Gordon E., *Signal and Linear System Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-471-12465-6, 768 p, 1998.
- [18] Matsuda K., Fujii H.,  *$H_\infty$ -optimized wave-absorbing control: analytical and experimental results*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 16, 1146–1153, 1993.
- [19] Oustaloup A., *La commande CRONE (commande robuste d'ordre non entier)*, ©Hermes (Traité des Nouvelles Technologies - Série Automatique), Paris, 495 p, 1991.
- [20] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral, *Fractal system as represented by singularity function*. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 37 : 1465-1470, Sept.1992.
- [21] A. Charef, *Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional  $PI^\lambda D^\mu$  controllers*, *IEE Proceeding on Control Theory Applications*, 135(6) : 714-720, 2006.
- [22] B.M. Vinagre, I. Petráš, P. Merchan, and L. Dorcak. *Two digital realisations of fractional controllers: Application to temperature control of a solid*. Proc. European Control Conference (ECC2001), pages 1764-1767, Porto, Portugal, 2001.
- [23] Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny, *A new discretization method for fractional order differentiators via continued fraction expansion*. Proceedings of ASME, Desi. Eng. Tech. Conferences, Chicago, Illinios, USA, Sept 2-6, 2003.
- [24] Nikolov E., *Algorithmes fractionnaires et régulateurs réjecteurs*, of Technical University Sofia, Sofia, ISBN 954-438-334-4, 358 p, 2004.
- [25] K. Ogata, *Discrete-time control systems*, Prentice Hall, Englewood, Cliffs, USA, 1987.
- [26] J. G. Ziegler and N.B.Nichols, *Optimum Settings for Automatic Controllers*, Transactions of the A.S.M.E. Vol. 64, N° 8, pp 759-768, 1942.
- [27] A. Djouambi, A. Charef and T. Bouktir, *Fractional Order Robust Control and  $PI^\lambda D^\mu$  Controllers*, WSEAS Transactions on Circuits and Systems, Issue 8, Volume 4, pp 850- 857, 2005.
- [28] C. A. Monje et al, *Proposals for fractional  $PI^\lambda D^\mu$  tuning*, Proc. of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its applications, FDA'04, Bordeaux, France, July 19-21, 2004.
- [29] D. Valério and José Sà da Costa, *Tuning of fractional PID controllers with Ziegler- Nichols type rules*, Signal Processing, 86, pp 2771-2784, 2006.
- [30] M. Ramasamy and S. Sundaramoorthy, *PID controller tuning for desired closed-loop responses for SISO systems using impulse response*, Computers and Chemical Engineering, 32, pp 1773–1788, 2008.
- [31] K. Aström and T. Häggglund, *PID controllers: theory, design and tuning*. Instrument Society of America. 2nd edition, 1995.



- [32] K.Bettou, *Analyse Et Réalisation De Correcteur analogiques d'ordre fractionnaire*, Thèse de Doctorat, Université Mentouri, Constantine, 2011.
- [33] Tony Kealy and Aidan O'Dwyer, *Analytical ISE calculation and optimum controlsystem design* .of the Irish Signals andSystems Conference, pp. 418-423, University of Limerick, July, 2003.
- [34] P. Borne, *Analyse et régulation des processus industriels. Tome 1 : Régulation Continue*, Editions Technip, Paris, pages 258-261, 1993.
- [35] Alicia Monje Micharet, *Design Methods of Fractional Order Controllers for Industrial Applications*. Ph.D. Thesis. Universidad de Extremadura .Badajoz, July 2006.
- [36] Bouiche Hachemi et Brahami Mohamed, *Commande PID d'un moteur à courant continu*. Mini projet. Université Abderrahmane Mira, Bejaia, 2009.
- [37] Alphonse Marie Lenga, *Etude de la commande adaptative d'un système électrohydraulique*. Mémoire de maitrise en GE. Ecole de technologie supérieure Montréal, 2010.

## Résumé

Le correcteur PID est la technique la plus utilisée dans l'asservissement des processus industriels depuis des décennies. En 1999, un correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire, qui est une généralisation du correcteur PID classique, a été proposé. L'intérêt de ce type de correcteurs est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il introduit deux paramètres en plus ; les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis. Le travail réalisé dans ce mémoire présente essentiellement le principe de réglage et l'implémentation des correcteurs d'ordre fractionnaire. Le réglage se fait en deux étapes ; En premier lieu, nous calculons les paramètres  $K_P$ ,  $K_I$  et  $K_D$  du correcteur classique (pour  $\lambda=\mu=1$ ), en se basant sur la méthode d'ajustement de Ziegler- Nichols, et en deuxième étape, nous calculons les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  soit en minimisant un critère de performances soit en vérifiant des contraintes spécifiées par un cahier de charge. Les critères de performances utilisés sont les critères intégraux de l'erreur et les contraintes adoptées sont le temps de réponse, le dépassement et la marge de phase. Notre contribution a porté essentiellement sur ces deux méthodes ainsi que la réalisation d'un simulateur de correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordres fractionnaires. La comparaison des résultats obtenus avec ceux du PID classique ont montré une nette amélioration des performances fréquentielles et temporelles et une meilleure robustesse aux incertitudes des paramètres des modèles des processus.

### Mots Clés :

Intégrateur d'Ordre Fractionnaire, Différentiateur d'Ordre Fractionnaire, Correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, Réglage de Correcteurs.