

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté : Sciences et technologies
Département : Génie Mécanique

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT EN SCIENCE

Filière : Génie Mécanique

Présentée par

BOUZIANI Ryad

Intitulée

Comportement dynamique et stabilité des rotors

Soutenue le : 15 décembre 2018

Devant le Jury composé de :

Mr K. Chaoui	Professeur	Univ. Badji mokhtar Annaba	Président
Mr N. Ouelaa	Professeur	Univ. 8 Mai 1945 Guelma	Rapporteur
Mr M.C. Djamaa	Professeur	Univ. 8 Mai 1945 Guelma	Examineur
Mr A.H. Miloudi	Professeur	U.S.T.H.B Alger	Examineur

Année Universitaire : 2018-2019

TABLE DES MATIERES

Résumé.	i
Table de matières.	iv
Nomenclature.	vii
Introduction générale.	1
CHAPITRE 1 Bibliographie et état de l’art.	3
1.1 Introduction.	4
1.2 Bref historique.	4
1.3 Phénomènes rencontrés en dynamique des rotors.	5
1.2.1 Vitesses critiques et effet gyroscopique.	5
1.2.2 Amortissement interne.	6
1.2.3 Instabilité de paliers hydrodynamiques.	6
1.4 Rotors dissymétriques.	7
1.5 Rotors embarqués.	9
1.6 Stabilité.	11
1.7 Régime instationnaire.	12
1.8 Conclusion.	12
CHAPITRE 2 Modélisation du système rotor-palier.	14
2.1 Introduction.	16
2.2 Référentiels et transformation de repères.	17
2.2.1 Transformation du repère lié à la base au repère courant lié au rotor.	18
2.2.2 Transformation du repère absolu au repère lié à la base.	20
2.3 Vecteur position de l’origine du repère lié à la base.	21
2.4 Vecteur rotation instantanée.	22
2.5 Vecteur position d’un point de la ligne moyenne de l’arbre.	23
2.6 Calcul des énergies et des travaux virtuels.	23
2.6.1 Disque.	24
2.6.1.1 Energie cinétique.	24
2.6.1.2 Travail virtuel du poids propre.	25
2.6.2 Arbre.	26
2.6.2.1 Energie cinétique.	26
2.6.2.2 Energie de déformation.	28
2.6.2.3 Travail virtuel du poids propre.	30
2.6.3 Balourd.	31

2.6.4 Palier.	32
2.7 Equations du mouvement.	33
2.7.1 Introduction.	33
2.7.2 Modèle simple basé sur la méthode de Rayleigh-Ritz.	33
2.7.3 Modèle éléments finis.	36
2.7.3.1 Disque.	36
2.7.3.2 Arbre.	38
2.7.3.3 Palier.	40
2.7.3.4 Equations du mouvement.	41
2.8 Méthode de Newmark pour la résolution des équations du mouvement.	42
2.9 Conclusion.	42
CHAPITRE 3 Dynamique et stabilité des rotors sous l'effet d'une excitation paramétrique.	44
3.1 Introduction.	45
3.2 Rotor dissymétrique.	45
3.2.1 Equation du mouvement.	45
3.2.2 Méthode de Hill pour la détermination des valeurs et des vecteurs propres.	46
3.2.3 Vibrations dues au balourd.	49
3.2.4 Vibrations dues au poids propre.	50
3.3 Rotor symétrique soumis à une rotation sinusoïdale de sa base.	51
3.3.1 Equation du mouvement.	51
3.3.2 Méthode de Hill pour la détermination des valeurs et des vecteurs propres.	52
3.3.3 Vibrations dues au balourd.	53
3.3.4 Vibrations dues au mouvement de rotation sinusoïdale de la base.	53
3.3.5 Vibrations dues au poids propre.	54
3.4 Etude numérique.	55
3.4.1 Rotor dissymétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides.	55
3.4.2 Rotor dissymétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides et un palier auxiliaire élastique.	60
3.4.3 Rotor symétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base soumise à une rotation sinusoïdale.	64
3.5 Conclusion.	71
CHAPITRE 4 Simulations du comportement dynamique des rotors embarqués.	73
4.1 Introduction.	74
4.2 Modèle éléments finis.	74
4.2.1 Validation pour une vitesse de rotation constante.	74

4.2.2 Vitesse de rotation variable.	77
4.2.2.1 Loi de variation linéaire.	78
4.2.2.2 Loi de variation exponentielle.	84
4.3 Modèle de Rayleigh-Ritz.	87
4.3.1 Vitesse de rotation constante.	87
4.3.2 Vitesse de rotation variable.	87
4.3.2.1 Loi de variation linéaire.	88
4.3.2.2 Loi de variation exponentielle.	91
4.4 Conclusion.	93
Conclusion générale.	95
Références bibliographiques.	97
Annexe A.	103
Annexe B.	105
Annexe C.	106
Annexe D.	114

Bibliographie et état de l'art

Sommaire

1.1	Introduction.	4
1.2	Bref historique.	4
1.3	Phénomènes rencontrés en dynamique des rotors.	5
	1.3.1 Vitesses critiques et effet gyroscopique.	5
	1.3.2 Amortissement interne.	6
	1.3.3 Instabilités de paliers hydrodynamiques.	6
1.4	Rotors dissymétriques.	7
1.5	Rotors embarqués.	9
1.6	Stabilité.	11
1.7	Régime instationnaire.	12
1.8	Conclusion.	12

1.1 Introduction

Les vibrations dans les structures et les machines constituent un phénomène généralement indésirable car, il peut provoquer une rupture par fatigue des éléments du système, un manque de fiabilité et une pollution sonore. Afin de faire face à ce problème et de s'assurer que les niveaux de vibrations sont suffisamment faibles pour éviter des dommages et des pertes, beaucoup de travaux de recherches théoriques et expérimentaux ont été développés [29], [48].

Parmi les structures d'ingénierie, les machines tournantes, telles que les pompes, les compresseurs, les générateurs et les turboréacteurs, sont largement utilisées dans divers domaines de l'industrie. Les défaillances dans les machines tournantes en raison de fortes vibrations entraîne d'énormes coûts de réparation et, peut même mettre la vie humaine en danger : il est inutile de souligner l'importance de la sécurité des turboréacteurs dans un avion, ou à quel point ce serait coûteuse une défaillance d'une pale dans une turbine à vapeur. Une bonne prédiction du comportement dynamique des rotors est donc primordiale [27].

1.2 Bref historique

L'histoire de la dynamique des rotors s'étale sur près d'un siècle et demi.

Rankine en 1869 a noté et discuté l'existence d'une vitesse critique. Cependant, il a fait la conclusion erronée qu'un fonctionnement du rotor au-delà de cette vitesse n'est pas possible. Föppl en 1895, dans un article, publié dans un journal allemand très peu connu par la communauté de la dynamique des rotors, a proposé le premier modèle de rotor et a démontré la possibilité d'un fonctionnement supercritique [54]. De leurs parts, De Laval en 1889 et Dunkerley en 1894 ont montré expérimentalement la possibilité d'un fonctionnement supercritique du rotor. Kerr en 1916 a publié un résultat expérimental relevant la présence d'une seconde vitesse critique [6].

En 1919, Jeffcott a été chargé par la « Royal Society of London » pour résoudre le conflit entre la théorie et la pratique. Il a publié un article dans lequel il a confirmé l'existence de vitesses supercritiques stables [68]. Depuis, le rotor de Jeffcott a été analysé analytiquement et numériquement par un très grand nombre de chercheurs, et beaucoup de

livres l'ont utilisé pour modèle afin d'étudier les différents phénomènes rencontrés dans la dynamique des rotors [9], [26]-[29], [39], [46].

En 1924, Kimball [37] a utilisé l'amortissement interne pour expliquer l'instabilité dans la région supercritique de certains rotors pratiques. Et en 1925, Newkirk et Taylor [55] ont décrit une instabilité due aux paliers.

L'étude des rotors dissymétriques a commencé une décennie après. Ces systèmes dits paramétriquement excités, ont la propriété d'être instables pour certaines plages de vitesses de fonctionnement. Le rapport de Smith (1933) est le premier travail rapporté sur cette catégorie de rotors [68]. Depuis, les instabilités dues aux différentes dissymétries dans les systèmes rotor-paliers ont été étudiées par un grand nombre de chercheurs [1], [15], [27], [39], [41]-[43], [51], [56], [57].

L'étude des rotors embarqués est relativement récente. Le premier travail répertorié est celui de Lin et Meng (2003) [47]. Durant la dernière décennie, ce type de rotors commence à gagner un intérêt de plus en plus accru des chercheurs dans le domaine [4], [7], [10]-[16], [20]-[23], [32]-[34], [69].

Les phénomènes instationnaires lors du passage des vitesses critiques ont été étudiés depuis le rapport de Lewis (1932). Ces études sont classées en deux groupes : des analyses qui considèrent la vitesse de rotation comme imposée selon une loi de vitesse de type linéaire ou exponentielle [40]. Dans d'autres travaux, la vitesse de rotation est calculée en fonction du couple moteur [62].

1.3 Phénomènes rencontrés en dynamique des rotors

1.3.1 Vitesse critique et effet gyroscopique

Dans la dynamique des rotors, la notion de vitesse critique est primordiale. Selon Nelson [54], l'une des premières citations remonte à Dunkerley. Elle est définie comme la vitesse qui produit une résonance. Elle correspond à la vitesse où l'excitation par balourd coïncide avec une des fréquences propres du système. D'autres vitesses critiques liés au comportement dynamique des rotors en flexion, et qui sont d'habitude moins dangereuses, sont appelées souvent vitesses critiques secondaires [27].

Pour les machines constituées d'organes avec des moments d'inertie polaires importants, l'on constate une forte dépendance des modes propres vis-à-vis de la vitesse de rotation, due aux effets gyroscopiques, se traduisant par [40], [66]:

- . Une précession directe où le rotor tourne dans le même sens que son mouvement de précession. Alors, sous les effets gyroscopiques, la fréquence naturelle directe croît.
- . Une précession rétrograde, où le rotor tourne en sens inverse par rapport à son mouvement de précession, ce qui engendre un effet d'assouplissement et un décroissement de la fréquence naturelle inverse.

1.3.2 Amortissement interne

Le frottement, inévitable dans les systèmes à rotor, est généré entre deux parties en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre. Il est classé en deux catégories. La première est le frottement qui a lieu entre une partie mobile et une partie fixe, comme un disque rotatif et l'air ambiant [68], ou un arbre tournant et l'huile d'un palier hydrodynamique. Ce type de frottement, appelé frottement externe ou amortissement externe, stabilise généralement le système. La deuxième catégorie est le frottement qui a lieu entre deux parties en rotation telles que : les interfaces entre les disques et les arbres, les joints d'accouplement constitués d'éléments en caoutchouc, etc. Ce type de frottement, appelé frottement interne ou amortissement interne, stabilise le système dans la plage de vitesses inférieure à la première vitesse critique mais le déstabilise dans la plage post-critique [63].

1.3.3 Instabilité de paliers hydrodynamiques

Newkirk, en 1924, fut le premier à démontrer l'existence d'une vibration induite uniquement par le support de paliers fluides. Elles apparaissaient lorsque la vitesse de rotation était voisine du double de la première vitesse critique et persistait à fréquence constante lorsque la vitesse de rotation de l'arbre augmentait. Elle fut appelée fouettement d'huile (Oil whip). Elle correspond physiquement à un couplage des mouvements excités par un balourd selon les axes transversaux x et z d'un palier [61].

En 1947, Haag a mis en évidence sur un palier long, peu chargé, un petit tourbillon naissant de l'équilibre des écoulements du film fluide entrant et sortant (Oil whirl). Cet équilibre s'établit lorsque la fréquence de précession du rotor est égale à la moitié de sa fréquence de rotation. En pratique, on observe plutôt le phénomène pour des valeurs typiquement égales à 0.47-0.48 donc juste en dessous de l'harmonique 1/2 [61].

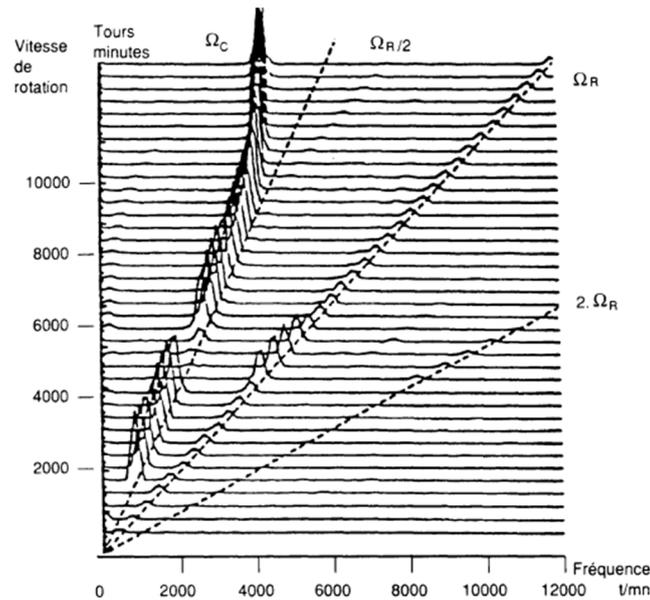


Figure 1.1 Tourbillonnement et fouettement d'huile

1.4 Rotors dissymétriques

La dissymétrie peut se trouver au niveau des parties rotatives du rotor telles que le disque et l'arbre, ou au niveau des parties non rotatives telles que le palier. Le disque considéré comme rigide peut posséder des inerties de masse différentes selon ses axes principaux d'inertie. L'arbre présente une dissymétrie géométrique s'il n'est pas de section circulaire sur toute sa longueur. C'est, par exemple, le cas de certaines machines électriques qui possèdent des rainures ou des méplats pour permettre l'enroulement des bobinages de l'inducteur. Ceci entraîne principalement une différence d'inerties de section suivant les axes principaux d'inertie de section de l'arbre.

Le palier est dissymétrique ou anisotrope s'il a des caractéristiques de raideur et d'amortissement différentes par rapport aux deux directions orthogonales (horizontale et verticale) [40].

L'influence des dissymétries en raideur des paliers sur la dynamique des rotors est bien connue [15], [18], [27], [39], [40]. En effet, si les raideurs transversales dans deux directions principales sont différentes, les modes propres dans les plans vertical et horizontal, à l'arrêt, ont des fréquences naturelles distinctes, contrairement aux rotors à paliers isotropes. Les modes doubles laissent place à deux modes simples de fréquences distinctes menant, comme dans le cas axisymétrique, à un mode direct et un mode

rétrograde [15], [40]. Dans ce cas, les modes rétrogrades sont sollicités par l'excitation synchrone et le nombre de vitesses critiques est multiplié par 2, par rapport au cas axisymétrique [27], [39], [40]. De plus, la réponse du rotor à un balourd décrit des orbites de précession elliptiques et non circulaires. Lors d'une réponse au balourd, on observe donc non plus un pic de résonance mais deux : le mode rétrograde est aussi excité [40].

Dans le cas où la dissymétrie géométrique du disque ou de l'arbre est présente conjointement avec une anisotropie de palier, les équations de mouvement en flexion d'un rotor sont des équations de type particulier. En effet, une des matrices, au moins, du système étudié possède des termes variant périodiquement en fonction du temps [15]. Ces équations sont des équations différentielles à coefficients périodiques qui peuvent être producteurs d'instabilité dynamique latérale [6], [27]-[29].

Il faut préciser que les dissymétries dans les rotors peuvent apparaître au cours du temps avec la création de fissures dans l'arbre entraînant la modification des caractéristiques élastiques de l'arbre, devenant ainsi anisotropes [41].

Les études traitant de la dissymétrie des rotors remontent à environ un siècle. Selon Krämer [39], c'est Prandtl qui publia en 1918, le premier travail sur un rotor de Jeffcott avec un arbre de section transversale non circulaire. Une étude fondamentale a également été menée par Smith en 1933. D'autres publications l'ont suivie dont celle de Taylor en 1940 et de Tondl en 1965. D'autres travaux plus récents sont aussi à signaler, citons :

Genta [30] a développé une approche par éléments finis utilisant des coordonnées complexes pour l'étude dynamique de rotors dissymétriques. Dans son article, l'extension d'une solution exprimée sous forme de série, basée sur le déterminant infini de Hill à des systèmes avec de nombreux degrés de liberté a été préconisée.

Oncescu et al. [57] ont étudié le mouvement d'un rotor monté sur des paliers anisotropes et dont la section transversale de l'arbre est non circulaire, en utilisant la méthode des éléments finis. Ils ont utilisé la théorie de Floquet pour étudier la stabilité du système d'équations différentielles obtenu avec des coefficients périodiques, et ont démontré son efficacité lorsqu'elle est appliquée aux rotors dissymétriques.

Nandi et Neogy [51] ont traité de la stabilité pour des modèles éléments finis de rotor dissymétrique. Ils ont proposé un arrangement spécifique des termes dans la méthode standard de la solution supposée dans l'espace d'état pour éviter le traitement des

composantes nulles des matrices éparées. Leur travail a montré aussi qu'un amortissement visqueux isotrope suffisamment élevé peut être utilisé pour stabiliser le rotor dissymétrique instable.

Boru [6] a étudié le comportement instable des rotors dissymétriques en utilisant le modèle de Jeffcott et la méthode des éléments finis. Une étude expérimentale a aussi été réalisée.

En plus de ces travaux de recherches, plusieurs auteurs de livres ont traité la dynamique des rotors dissymétriques, nous pouvons citer entre autres : Friswell et al. [26], Genta [27], Krämer [39], Lee [46].

1.5 Rotors embarqués

La prise en compte du mouvement de la base dans la modélisation des rotors est relativement récente, et commence à intéresser de plus en plus les chercheurs de cette discipline.

Lin et Meng [47] ont utilisé le modèle simple de Jeffcott pour étudier le comportement dynamique d'un rotor d'un aéronef, tournant à une vitesse angulaire constante ou à une accélération constante pendant les manœuvres de l'aéronef dans un plan vertical, avec un angle de tangage égal à l'inclinaison de la trajectoire de vol.

Duchemin [21] a utilisé un modèle éléments finis pour étudier le comportement dynamique, en régime permanent, des rotors en flexion, excités par le mouvement de leurs bases, en parallèle avec une étude expérimentale qui vise à valider le modèle. Différentes comparaisons calculs-mesures ont été effectuées.

Duchemin et al. [22] ont étudié le comportement dynamique d'un rotor soumis à une excitation de la base. Un modèle mathématique est développé où les équations sont obtenues en utilisant la méthode Lagrange avec l'approximation de Rayleigh-Ritz. La méthode des échelles multiples a été appliquée pour l'étude des zones d'instabilité lorsque la base est soumise à une rotation sinusoïdale. Des résultats expérimentaux sont également présentés pour valider les résultats analytiques et numériques obtenus.

Driot et al. [20] ont utilisé le modèle présenté dans [22] pour développer une étude théorique basée à la fois sur la méthode de multiples échelles et sur l'approche de la forme normale. Un dispositif expérimental a été développé et la confrontation des résultats

obtenus à partir des études expérimentale et numérique s'est montrée tout à fait satisfaisante.

Das et al. [16] ont étudié le contrôle actif des vibrations avec excitateurs électromagnétiques d'un système rotor-palier monté sur une base mobile. Les résultats des simulations ont montré que l'action du contrôle a permis d'éviter la résonance paramétrique, de reporter l'instabilité due à l'amortissement interne et de réduire la réponse du rotor d'une façon significative.

Lee et al. [44] ont appliqué la méthode de modélisation par éléments finis à un système rotor-palier considérant une force de choc transféré à la base, avec le schéma d'intégration numérique de l'espace d'état de Newmark, basé sur le concept de la vitesse moyenne. Une étude expérimentale a aussi été réalisée. Les résultats obtenus par les deux approches sont en bonne concordance.

El-Saeidy et Sticher [23] ont présenté une formulation pour l'analyse dynamique des rotors rigides avec des paliers élastiques linéaires ou non linéaires soumis au balourd et à une excitation harmonique de la base le long ou autour des directions latérales. Des résolutions analytiques et numériques des équations du mouvement ont été effectuées et les résultats discutés.

Dakel et al. [10] ont utilisé un modèle éléments finis basé sur la théorie de poutre de Timoshenko pour analyser le comportement dynamique en régime permanent de rotors embarqués montés sur des paliers rigides. Le modèle prend en compte les éventuelles dissymétries géométriques du disque et/ou de l'arbre. Des exemples numériques de rotors symétriques et dissymétriques, dont la base rigide est soumise à une vitesse angulaire constante combinée à un mouvement de translation harmonique, sont étudiés.

Dakel et al. [11] ont étudié, en utilisant la méthode des éléments finis, le comportement dynamique d'un rotor embarqué monté sur paliers hydrodynamiques en présence de mouvements de support rigide. Deux modèles de paliers hydrodynamiques sont considérés: linéaire et non linéaire. L'influence des mouvements sinusoïdaux de la base sur la dynamique du système est analysée au moyen de diagrammes de stabilité, des orbites du rotor, de la réponse temporelle, des transformées de Fourier rapides, des diagrammes de bifurcation et des cartes de Poincaré.

Han et Chu [32] ont étudié le comportement dynamique d'un système de rotor-palier fissuré soumis à des mouvements angulaires harmoniques de la base en utilisant la méthode de la balance harmonique. Les spectres de réponse, les orbites du centre de l'arbre et la réponse en fréquence pour le système rotor-palier ont été discutées.

Han et Chu [33] ont étudié le comportement dynamique d'un système de rotor à engrenages soumis à des mouvements périodiques en temps de la base. Les effets des différents mouvements angulaires de la base à la fois sur la réponse en fréquence et les spectres de réponse ont été discutés.

Han et Chu [34] ont analysé l'instabilité paramétrique d'un système rotor-palier sous l'effet des mouvements angulaires périodiques de la base. Trois mouvements angulaires de la base sont considérés : roulis, tangage et lacet. La méthode de la matrice de transition d'état discret (DSTM) a été utilisée pour déterminer numériquement les régions d'instabilité. Les effets de la vitesse de rotation, des amplitudes du mouvement de base et des phases entre deux mouvements de base sur les régions d'instabilité sont discutés.

Yi et al [69] ont étudiés l'effet des mouvements angulaires périodiques de la base sur la réponse dynamique des rotors dont le disque et l'arbre ont des sections transversales dissymétriques. Un modèle éléments finis a été utilisé pour l'obtention des équations de mouvement du système rotor-palier qui sont de type paramétrique. Les régions d'instabilité et les orbites du centre du rotor sont comparées à des résultats de référence pour la validation du modèle. Ensuite, les réponses forcées du système aux différentes excitations sont obtenues. Les effets de divers types de mouvements angulaires, les amplitudes et la fréquence des mouvements de base sur les spectres de réponse et les résonances externes sont discutés.

1.6 Stabilité

Afin d'étudier la stabilité des systèmes de rotors, le critère de stabilité de Routh-Hurwitz [40], [60], [63] est largement utilisé. Ce critère est bien adapté aux systèmes à faible nombre de degrés de liberté et ne permet pas d'obtenir de manière analytique la vitesse pour laquelle l'instabilité apparaît [63]. Pour les systèmes soumis à une excitation paramétrique, les méthodes les plus utilisées sont la théorie de Floquet [24] et la méthode de Hill [35] ainsi que d'autres méthodes dérivées de ces deux méthodes [43], [59]. La méthode des échelles multiples [52], [53] est une autre alternative à ces méthodes [20]-[22].

1.7 Régime instationnaire

Avec une recherche toujours croissante de l'efficacité, les rotors tendent à devenir de plus en plus légers et flexibles et à fonctionner à des vitesses de plus en plus élevées avec de très petits jeux entre les rotors et les stators. La probabilité de frottement rotor-stator a donc considérablement augmenté, surtout dans la période de démarrage, lorsque le rotor franchit une ou plus vitesses critiques [2]. Pour éviter ce contact, la prédiction des déplacements du rotor est primordiale.

Irretier [36] a discuté les bases des vibrations instationnaires et a présenté les relations mathématiques les plus importantes pour ce type de vibrations forcées de systèmes linéaires. Les résultats essentiels présentés sont la diminution de l'amplitude à la résonance et le décalage de la fréquence de résonance.

Allezy A. [3] a étudié l'effet des sollicitations à fréquence variable sur le comportement dynamique de systèmes mécaniques. Dans son étude, à la fois analytique, numérique et expérimentale, une attention a été portée sur les phénomènes de résonance observés lorsque la fréquence d'excitation franchit une ou plusieurs fréquences propres du système. Dans son modèle, il a introduit un amortissement variable issu de la méthode métrique, ce qui a réduit d'une façon significative, les différences entre calcul et mesure au niveau de la réponse.

S. Roques S. [62] a étudié le comportement dynamique couplé rotor-stator lors d'un ralentissement accidentel d'une turbine, suite au détachement d'une ailette. La vitesse de rotation, qui n'est plus constante, a été calculée en fonction des efforts agissant sur l'arbre. Le ralentissement, s'effectuant sous l'effet de frottement dû à la présence de fluides dans la turbine, jusqu'à l'arrêt complet de la machine.

1.8 Conclusion

Plusieurs travaux dans la littérature concernent l'étude du comportement dynamique des rotors soumis à une excitation paramétrique, comme dans le cas d'un rotor dissymétrique [1], [6], [26], [27], [51], [56],[57] ou lorsque le rotor est soumis à une excitation de sa base [15],[21], [34], [69]. Dans ce travail la méthode de Hill est appliquée au modèle de

Rayleigh-Ritz pour ces deux sources d'excitation paramétrique, afin de déterminer les zones d'instabilité, l'influence de l'amortissement sur ces zones et la réponse du rotor aux différentes excitations auxquelles il est soumis.

D'un autre côté, des travaux antérieurs [10]-[16], [32]-[33] et [21]-[22] ont étudié la réponse en régime permanent de rotors embarqués. Dans ce travail, nous analysons le comportement dynamique de ce type de rotors fonctionnant à une vitesse de rotation variable, comme il est le cas lors du démarrage ou de l'arrêt des machines. Pour cet objectif, un modèle éléments finis de rotor est développé, et un code informatique est élaboré, sur la base d'un logiciel accompagnant le livre [26]. Un deuxième modèle plus simple basé sur la méthode de Rayleigh-Ritz est aussi développé et implémenté. Ces deux modèles ont permis d'effectuer des simulations numériques sur deux configurations de rotor pour différents mouvements de la base, et ceci pour deux lois de variation de la vitesse de rotation. Des résultats issus des deux modèles sont analysés et commentés. Une partie de ce travail a fait l'objet d'une publication [7] dans la revue *Mechanics&Industry*.

Nomenclature

E	Module d'Young	N/m^2
ρ	Masse volumique	
m_d	Masse du disque	Kg
$m_u d$	Balourd	Kg-m
I_{dx}, I_{dz}	Inerties massiques du disque suivant x et z	Kg/m^2
I_{dy}	Inerties massiques diamétrale et polaire du disque	Kg/m^2
I_{dm}, I_{da}	Inerties massiques moyenne et déviatorique du disque	Kg/m^2
I	Inertie diamétrale du disque de la section transversale de l'arbre	m^4
$R_0(x_0, y_0, z_0)$	Repère absolu	
$R_b(x_b, y_b, z_b)$	Repère lié à la base	
$R(x, y, z)$	Repère courant	
T_d	Energie cinétique du disque	N.m
T_s	Energie cinétique de l'arbre	N.m
T_u	Energie cinétique du balourd	N.m
u, w	Composantes du déplacement d'un point de l'arbre par rapport à R_b	m
$\dot{u}_a, \dot{v}_a, \dot{w}_a$	Composantes de la vitesse absolue d'un point de la ligne central de l'arbre exprimées dans R_b	m/s
$\dot{u}_u, \dot{v}_u, \dot{w}_u$	Composantes de la vitesse du balourd exprimées dans R_b	m/s
U	Énergie de déformation de l'arbre	N.m
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$	Paramètres associés au mouvement de R_b	
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Composantes de la vitesse angulaire absolue du repère R exprimées dans R	Hz
$\dot{\Gamma}_x, \dot{\Gamma}_y, \dot{\Gamma}_z$	Composantes de la vitesse angulaire du repère R_b par rapport à R_0 exprimées dans R_b	rd/s
α, β, γ	Angles d'Euler entre les repères R_b et R_0	rd
ϕ, θ, ψ	Angles d'Euler entre les repères R et R_b	rd
N_1, N_2, N_3, N_4	Fonctions de forme de l'élément de poutre	
$[M_d]$	Matrice masse du disque	kg
$[M_s]$	Matrice masse de l'élément d'arbre	kg
$[C_d]$	Matrice gyroscopique du disque	N.s/m

$[C_s]$	Matrice gyroscopique de l'élément d'arbre	N.s/m
$[K_d]$	Matrice de rigidité du disque	N/m
$[K_s]$	Matrice de rigidité de l'élément d'arbre	N/m
$\{\delta\}$	Vecteur des déplacements nodaux	m
$\{q\}$	Vecteur de déplacement global	m
$\{F_d\}$	Vecteur force du disque	N
$\{F_{dp}\}$	Vecteur représentant le poids propre du disque	N
$\{F_{ap}\}$	Vecteur représentant le poids propre d'un élément d'arbre	N
χ	Rapport des inerties déviatorique et moyenne d'une section de l'arbre	
Ω	Vitesse de rotation de l'arbre	rad/s
ω	Pulsation d'excitation de la base	rad/s

INTRODUCTION GENERALE

Les rotors sont des parties des machines industrielles telles que les turbines, les compresseurs, les pompes et les moteurs. Ces machines tournantes ont tendance à fonctionner à des vitesses élevées et parfois, dans des situations complexes. Des vibrations excessives de ces machines peuvent sérieusement affecter leur intégrité. Ainsi, une prédiction précise de leur comportement dynamique doit être faite pour assurer une conception fiable.

Par ailleurs, les machines tournantes actuelles, peuvent fonctionner à des régimes supercritiques. Le passage d'une ou de plusieurs vitesses critiques est alors inévitable pendant la phase de démarrage ou lors de l'arrêt de la machine. Le passage d'une vitesse critique implique un accroissement important des vibrations qui peuvent alors détériorer la machine. L'étude du comportement dynamique des rotors lors d'une variation de vitesse est donc d'une importance cruciale.

Dans la plus grande majorité des études sur la dynamique des rotors, la base du rotor est supposée fixe ; cependant dans plusieurs applications technologiques elle subit des mouvements, comme dans les turbocompresseurs de voitures, les turbines de navires ou d'avions, etc...Les rotors sont donc excités aussi bien par le balourd que par les différents mouvements de leur bases. En outre, certains mouvements de la base peuvent être la cause d'instabilités paramétriques qu'il faut prendre en considération pendant la phase de conception.

Dans ce travail de thèse, un modèle éléments finis est développé pour simuler le comportement dynamique d'un rotor flexible tournant à une vitesse de rotation constante ou variable et supporté par des paliers rigides ou flexibles caractérisés par leurs coefficients de rigidité et d'amortissement. Le tout est monté sur une base rigide qui peut subir des mouvements déterministes. Un deuxième modèle plus simple, basé sur l'approximation de Rayleigh-Ritz est aussi proposé, en vue d'être utilisé pour l'étude de quelques phénomènes rencontrés en dynamique des rotors.

Le travail élaboré dans cette thèse se répartit sur quatre chapitres

Le chapitre 1 présente un bref historique et un état de l'art concernant l'étude du comportement dynamique des rotors, tout en mettant l'accent sur quelques phénomènes rencontrés dans cette spécialité.

Le chapitre 2 est consacré à la modélisation des éléments du système rotor-palier, en prenant en compte un mouvement éventuel de sa base et une variation possible de sa vitesse de rotation. Différentes énergies des composants du système sont déterminées : l'énergie cinétique du disque, de l'arbre et du balourd ainsi que l'énergie de déformation de l'arbre. Les travaux virtuels des forces élastiques et d'amortissement des paliers ainsi que les travaux virtuels des poids propres du disque et de l'arbre sont aussi calculés.

En utilisant la méthode des équations de Lagrange, les équations du mouvement du rotor, aussi bien pour le modèle simplifié basé sur l'approximation de Rayleigh-Ritz que pour le modèle éléments finis sont déterminées.

Le chapitre 3 étudie le comportement dynamique des rotors soumis à une excitation paramétrique. Deux causes de ce type d'excitation sont considérées : une dissymétrie du rotor ou une rotation sinusoïdale de sa base. La méthode de Hill est alors appliquée pour l'étude de la stabilité, la réponse aux excitations de balourd, de la base et du poids propre du rotor.

Le chapitre 4 présente des simulations du comportement dynamique de rotors embarqués tournant à une vitesse de rotation constante ou variable (linéaire ou exponentielle), sous l'effet de l'excitation de balourd et de différents mouvements de la base. Des résultats issus des deux modèles, à savoir : le modèle éléments finis et le modèle Rayleigh-Ritz, sont présentés et commentés.

Enfin cette thèse se termine par une conclusion et des perspectives.

4

Simulation du comportement dynamique des rotors embarqués

Sommaire

4.1	Introduction.	73
4.2	Modèle éléments finis.	73
4.2.1	Validation pour une vitesse de rotation constante.	73
4.2.2	Vitesse de rotation variable.	76
4.2.2.1	Loi de variation linéaire.	77
4.2.2.2	Loi de variation exponentielle.	83
4.3	Modèle de Rayleigh-Ritz.	86
4.3.1	Vitesse de rotation constante.	86
4.3.2	Vitesse de rotation variable.	86
4.3.2.1	Loi de variation linéaire.	87
4.3.2.2	Loi de variation exponentielle.	90
4.4	Conclusion.	92

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, des simulations numériques utilisant les deux modèles obtenus dans le chapitre 3, à savoir : le modèle éléments finis et le modèle de Rayleigh-Ritz, sont effectuées pour l'étude du comportement dynamique des rotors montés sur une base en mouvement et tournant à des vitesses de rotation constante ou variable.

4.2 Modèle éléments finis

4.2.1 Validation dans le cas d'une vitesse de rotation constante

Pour valider le code éléments finis développé dans ce travail, plusieurs tests ont été réalisés sur deux configurations de rotors. Chacune de ces deux configurations consiste en un système constitué d'un seul disque symétrique placé sur un arbre symétrique flexible, supporté aux extrémités par deux paliers. Le système rotor-palier est monté sur une base qui peut être fixe ou en mouvement.

La géométrie et les propriétés des matériaux des éléments constituant chacune des deux configurations de rotor sont données dans les tableaux 4.1 et 4.2.

4.2.1.1 Première configuration de rotor

Dans le but de comparer les résultats, la première configuration de rotor choisie est celle utilisée dans [20]-[22]. Les paramètres caractérisant le rotor et le palier sont donnés dans le Tableau 5.1.

Tableau 5.1 Première configuration de rotor.
Paramètres de simulation du rotor et du palier

Symbole	Quantité	Valeur
L	Longueur de l'arbre	0.4 m
R_1	Rayon de l'arbre	0.005 m
R_2	Rayon du disque	0.1 m
h	Épaisseur du disque	0.01 m
E	Module de Young	$2.05 \cdot 10^{11}$ N/m ²
ρ	Masse volumique	7800 kg/m ³
$m_r d$	Balourd résiduel	$2.5 \cdot 10^{-4}$ kg m
k_{xx}	Rigidité du palier suivant l'axe x_b	$2.1 \cdot 10^5$ N/m
k_{zz}	Rigidité du palier suivant l'axe z_b	$1.2 \cdot 10^6$ N/m
$c_{xx} = c_{zz}$	Amortissement du palier suivant les axes x_b et z_b	$15000/\Omega$ N/m/s

L'arbre est discrétisé en huit éléments de poutre à deux nœuds de même longueur. Le disque, contenant un balourd est situé au nœud 7, et les paliers aux nœuds 1 et 9, comme le montre la figure 4.1.

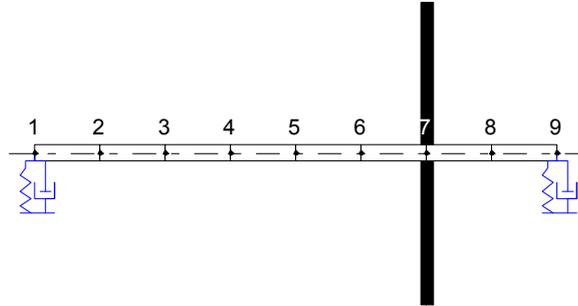


Figure 4.1 Discrétisation de la première configuration de rotor

La figure 4.2, présente les orbites décrites par le centre de l'arbre, obtenues en utilisant le code de calcul développé dans ce travail, pour une vitesse de rotation constante $\Omega = 20 \text{ Hz}$ (1200 tr/min) et une rotation sinusoïdale de la base autour de l'axe x_b , d'amplitude $2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$, et ceci pour deux fréquences: 60Hz et 80Hz.

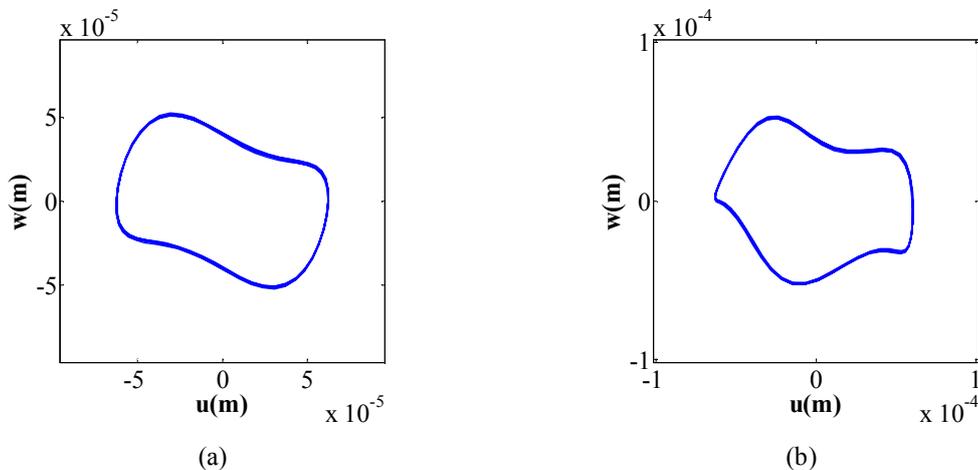


Figure 4.2 Orbites du milieu de l'arbre du rotor tournant à $\Omega = 20 \text{ Hz}$ (1200 tr/min) et soumis à une rotation sinusoïdale de la base autour de l'axe x_b d'amplitude $2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$ et de fréquence :

(a) 60Hz, (b) 80Hz.

Les orbites de la figure 4.3 sont obtenues, pour la vitesse de rotation du rotor $\Omega = 40 \text{ Hz}$ (2400 tr/min) et pour le même mouvement de la base que dans le cas précédent, avec les fréquences: 20Hz et 26.67Hz.

Dans chacun des deux cas, les résultats sont identiques à ceux obtenus dans [22].

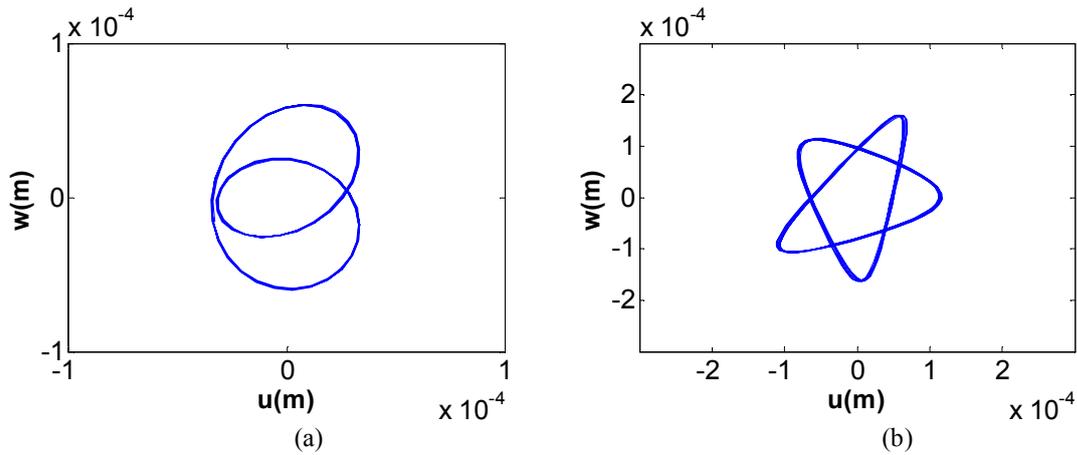


Figure 4.3 Orbits du milieu de l'arbre du rotor tournant à $\Omega = 40 \text{ Hz}$ (2400 tr/min) et soumis à une rotation sinusoïdale de la base autour de l'axe x_b d'amplitude $2 \cdot 10^{-5}$ rad et de fréquence :
(a) 20Hz, (b) 26.67Hz.

4.2.1.2 Deuxième configuration de rotor

Les paramètres de la deuxième configuration de rotor sont présentés dans le tableau 4.2 ; il s'agit de la même configuration utilisée dans [10]. L'arbre est discrétisé en 12 éléments à deux nœuds de même longueur. Le disque, contenant un balourd est situé au nœud 5 et les paliers aux nœuds 1 et 13 comme le montre la figure 4.4.

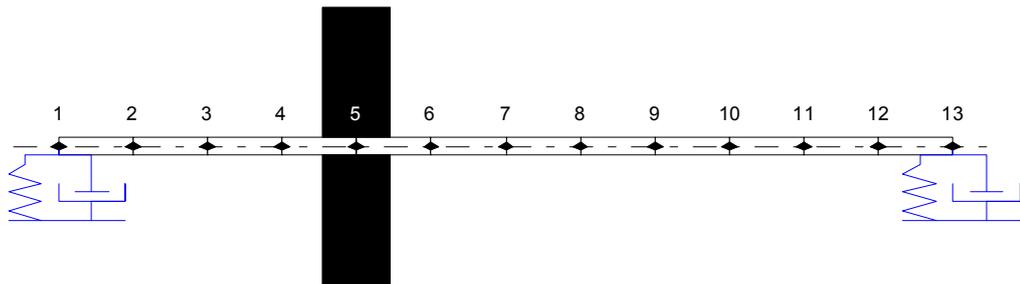


Figure 4.4 Discrétisation de la deuxième configuration de rotor

Cette configuration de rotor est utilisée en vue d'une validation du code élaboré dans un autre cas du mouvement de la base. Il s'agit de la détermination des orbites décrites par le milieu de l'arbre tournant à une vitesse de 25 Hz (1500tr/min), dans trois cas de mouvements de la base, qui consistent en une rotation de vitesse constante de 5 Hz autour de l'axe y_b , combinée à une

translation sinusoïdale verticale d'amplitude 10^{-6} m, et ceci pour trois valeurs de sa fréquence : 100 Hz, 120 Hz et 200 Hz. La Figure 4.5, présente ces orbites; elles sont identiques à celles obtenues dans [10].

Tableau 4.2 Deuxième configuration de rotor :

Paramètres de simulation		
Symbole	Quantité	Valeur
L	Longueur de l'arbre	0.4 m
R_1	Rayon de l'arbre	0.01 m
R_2	Rayon du disque	0.15 m
h	Épaisseur du disque	0.03 m
E	Module de Young	$2 \cdot 10^{11}$ N/m ²
ρ	Masse volumique	7800 kg/m ³
m_{rd}	Balourd résiduel	$1.5 \cdot 10^{-4}$ kg m

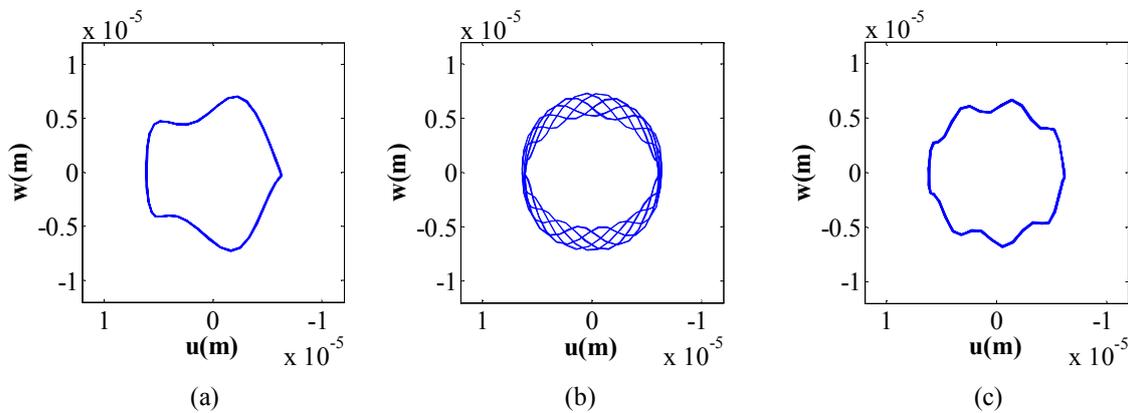


Figure 4.5 Orbites du milieu de l'arbre du rotor tournant à 25 Hz (1500tr/min) et soumis à un mouvement combiné de la base : une rotation autour de l'axe y_b de vitesse constante (5 Hz) et une translation sinusoïdale verticale d'amplitude 10^{-6} m et de fréquence (a) 100 Hz, (b) 120 Hz, (c) 200 Hz.

4.2.2 Vitesse de rotation variable

Après la validation du modèle pour une vitesse de rotation constante, nous traitons le cas d'une vitesse de rotation variable. Deux lois de variation de la vitesse de rotation du rotor sont considérées : linéaire et exponentielle.

4.2.2.1 Loi de variation linéaire de la vitesse de rotation

Les paramètres de la configuration du rotor utilisée dans les simulations, dans ce cas, sont donnés dans le tableau 4.1. Le diagramme de Campbell correspondant est présenté dans la figure 4.6.

Avant d'étudier la réponse du rotor, tournant à une vitesse à variation linéaire et dont la base subit différents mouvements, considérons tout d'abord sa réponse dans le cas d'une base fixe.

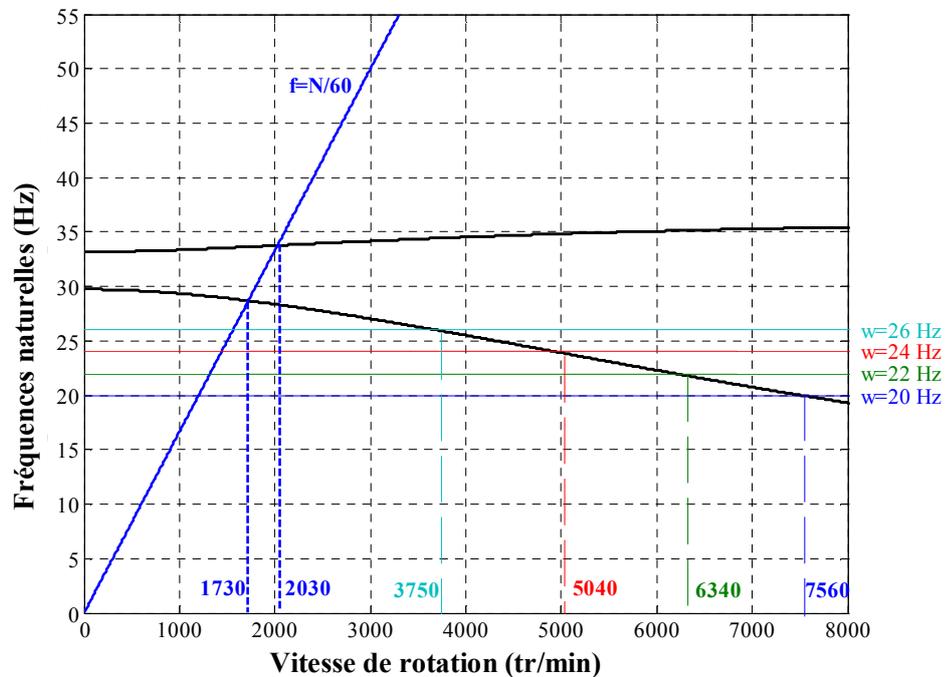


Figure 4.6 Diagramme de Campbell pour la première configuration de rotor (Tableau 4.1)

Test 1: Rotor monté sur une base fixe tournant à une vitesse à variation linéaire : en accélération et en décélération.

La figure 4.7 représente la réponse suivant les axes : horizontal et vertical ainsi que l'amplitude de la réponse au milieu de l'arbre du rotor décrit dans le Tableau 4.1 et monté sur une base fixe, tournant, pendant 5s, à une vitesse variable à accélération constante (Figure 4.7a), et à décélération constante (Figure 4.7b) égales en valeur absolue (100rad/s^2); et dans la

figure 4.8, les deux graphes représentant l'amplitude de la réponse en accélération et en décélération en fonction de la vitesse de rotation du rotor sont superposés.

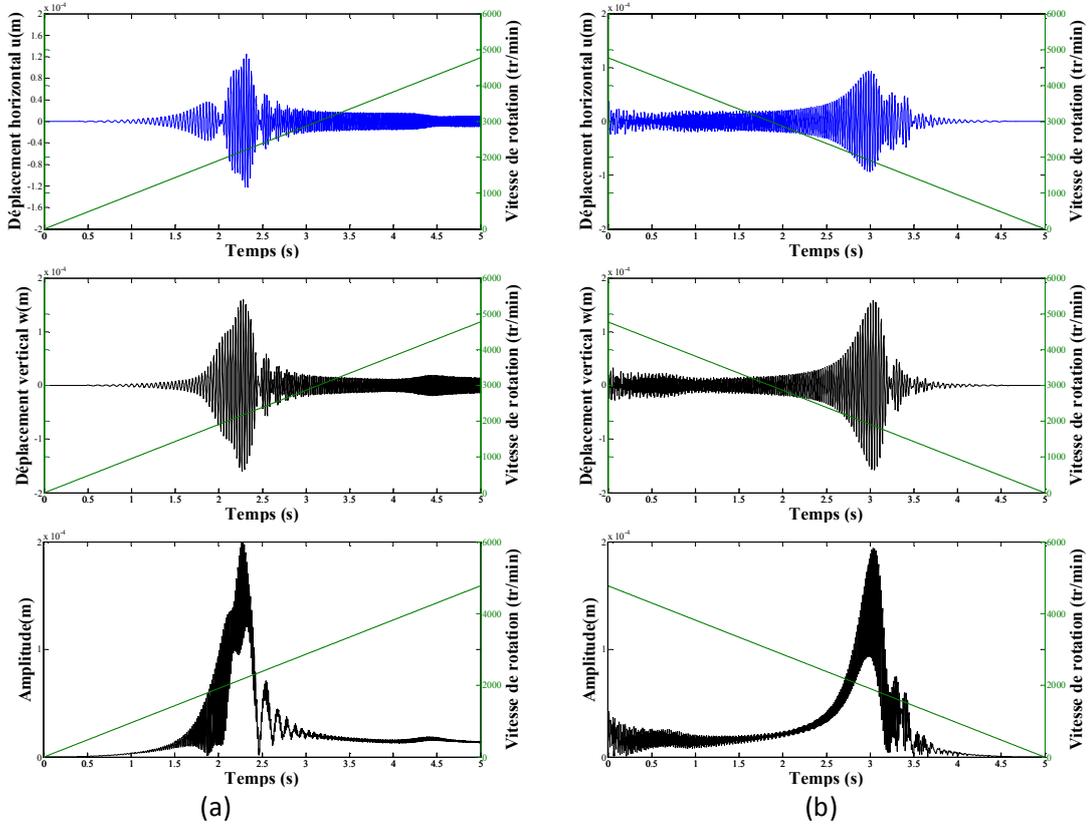


Figure 4.7 Rotor monté sur une base fixe et tournant à une vitesse variable à :
 (a) accélération constante (b) décélération constante

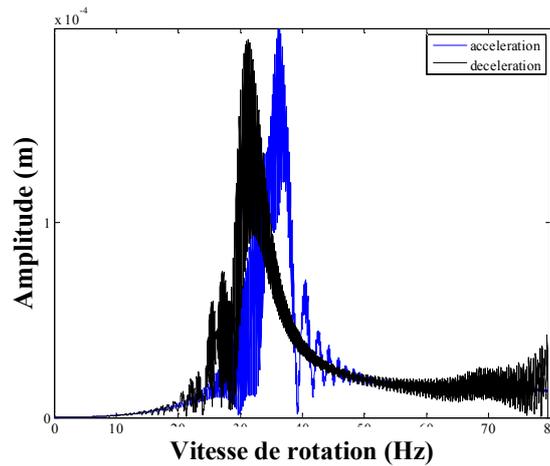


Figure 4.8 Amplitude du déplacement en accélération et en décélération

La figure 4.8 montre clairement que le maximum de la réponse ne se produit pas à la même vitesse de rotation en accélération et en décélération. De plus, les amplitudes ne sont pas les mêmes. Ces faits sont bien mentionnés dans la littérature [36], [68].

Test 2: variation linéaire de la vitesse de rotation du rotor avec une rotation sinusoïdale de la base autour de l'axe x_b .

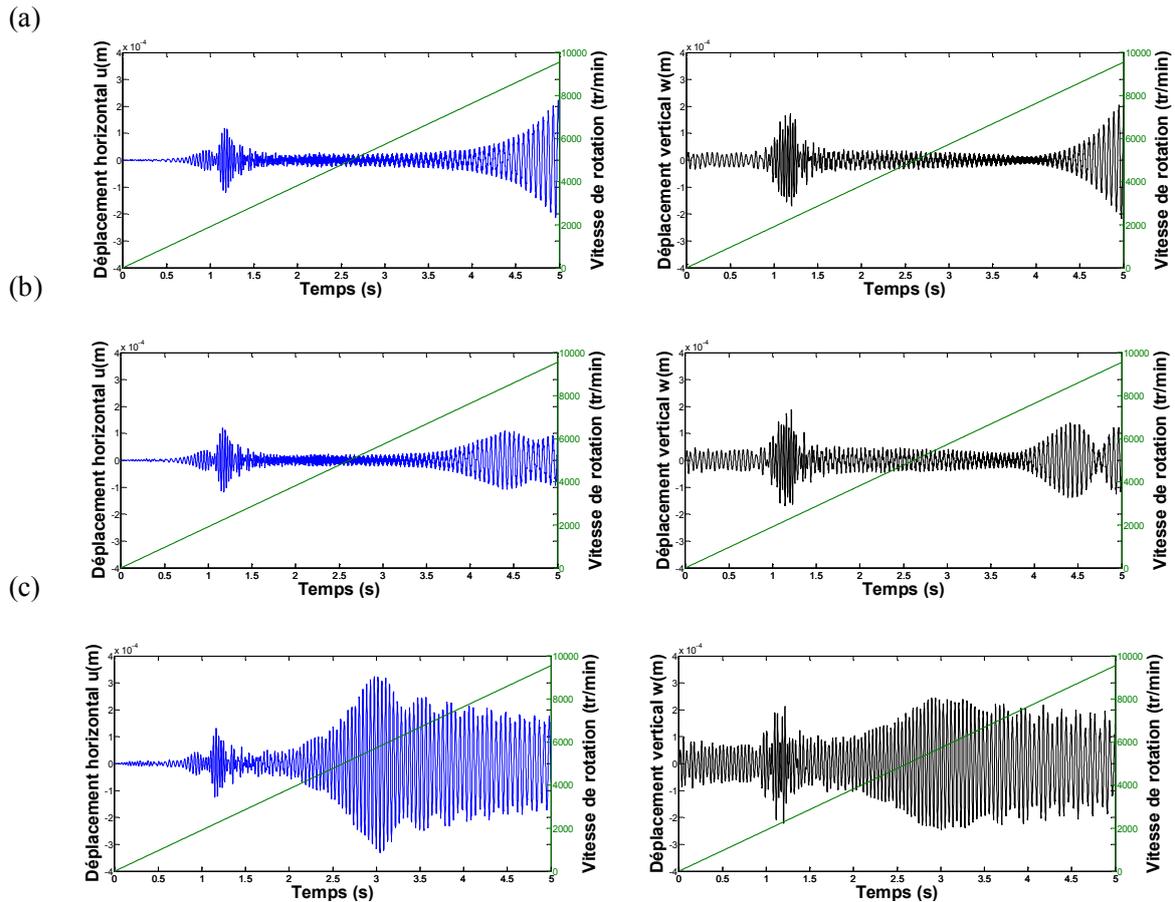


Figure 4.9 Variation linéaire de la vitesse de rotation du rotor $\dot{\phi}(t) = 200t$ rad/s avec une rotation sinusoïdale de la base autour de l'axe x d'amplitude 2.10^{-4} rad pour différentes fréquences :

(a) 18Hz; (b) 20Hz; (c) 24Hz

Dans la figure 4.9 sont présentés les réponses au milieu de l'arbre du rotor, décrit dans le tableau 4.1, tournant à une vitesse de rotation variant linéairement $\dot{\phi}(t) = 200t$ rd/s pendant 5s et soumis à une rotation sinusoïdale de la base autour de l'axe x_b d'amplitude 2.10^{-4} rd pour différentes fréquences: 18 Hz, 20 Hz and 24 Hz. Nous pouvons remarquer qu'il y a des pics dont les positions sur l'axe du temps restent inchangées (dans le voisinage de 1s) et ceci

indépendamment de la fréquence de la base; ils correspondent aux vitesses critiques directe et inverse (fréquences naturelles directe et inverse excitées par le balourd). En plus de ces pics, un autre pic est observé dans chaque cas ; sa position change dans l'axe du temps en fonction de la fréquence du mouvement de la base : elle se déplace à gauche lorsque la fréquence augmente (elle correspond à une fréquence naturelle excitée par le mouvement de la base).

Sur le diagramme de Campbell, présenté dans la figure 4.6, sont indiquées les valeurs des vitesses critiques dues au balourd (1730 tr/min et 2030 tr/min), lorsque la base est fixe. La figure montre aussi les intersections entre les graphes des fréquences naturelles, dans la plage de fréquences considérée, avec les lignes horizontales représentant les fréquences de la base.

On peut remarquer que les valeurs des vitesses de rotation correspondant à ces intersections décroissent pour des valeurs croissantes de la fréquence de la base : 20Hz (7560 tr/min), 22 Hz (6340 tr/min), 24 Hz (5040 tr/min), 26 Hz (3750 tr/min).

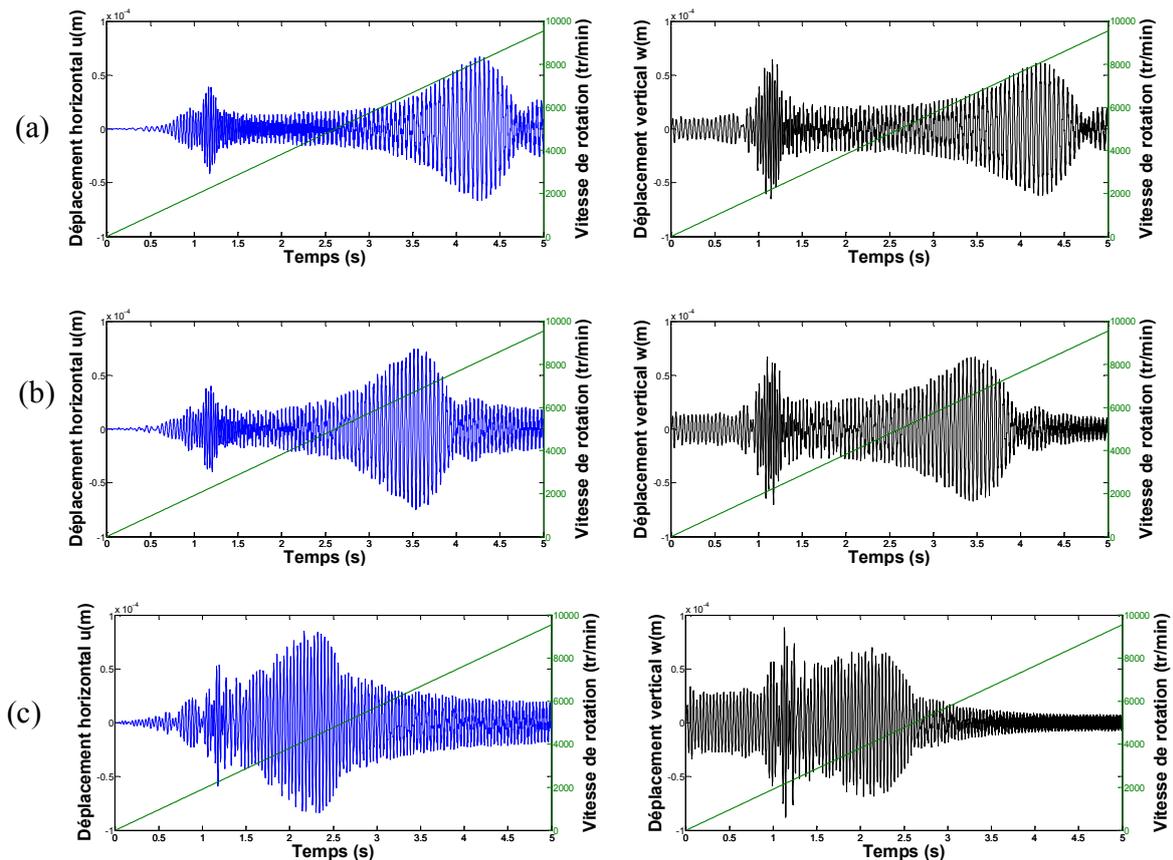


Figure 4.10 Variation linéaire de la vitesse de rotation du rotor ($\dot{\phi}(t) = 200t$ rad/s), soumis à une translation sinusoïdale verticale de la base d'amplitude $1,5 \cdot 10^{-5}$ m pour différentes fréquences :

(a) 20Hz; (b) 22Hz; (c) 26Hz

Test 3: Variation linéaire de la vitesse de rotation du rotor soumis à une translation sinusoïdale de la base, pour différentes valeurs de la fréquence de la base.

La figure 4.10 présente les réponses du rotor décrit dans le tableau 4.1, tournant à une vitesse de rotation à variation linéaire $\dot{\phi}(t) = 200t$ rad/s et soumis à une translation sinusoïdale verticale de la base d'amplitude $1.5 \cdot 10^{-5}$ m, pour les fréquences: 20 Hz, 22 Hz et 26 Hz.

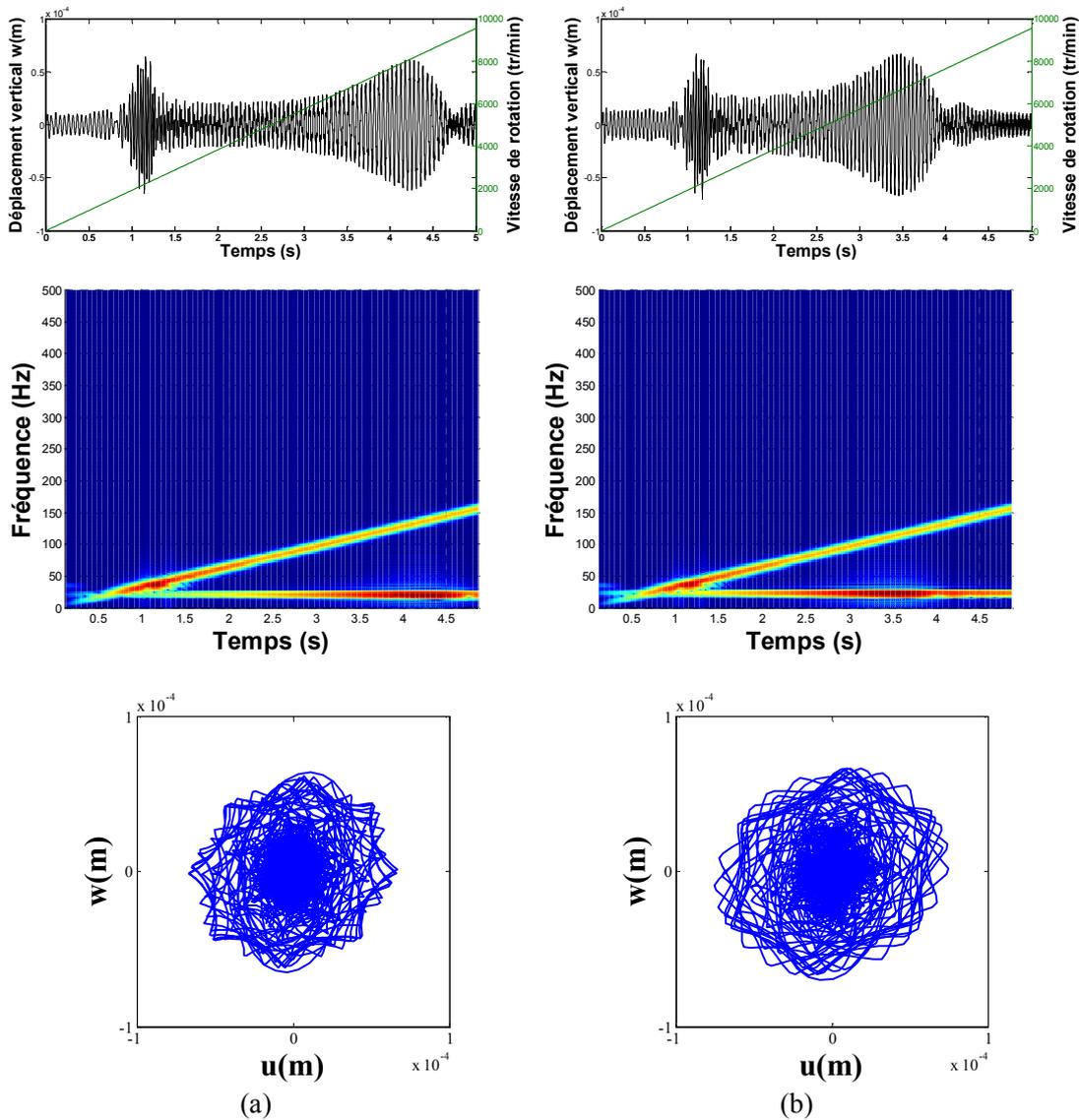


Figure 4.11 Déplacement vertical w , spectrogramme correspondant à w et orbite du centre du rotor, tournant à une vitesse à variation linéaire, $\dot{\phi}(t) = 200t$ rad/s, soumis à une translation sinusoïdale verticale de sa base d'amplitude $1.5 \cdot 10^{-5}$ m et de fréquence (a) 20Hz, (b) 22 Hz.

Les mêmes remarques concernant les deux types de pics dont la position de l'un sur l'axe du temps est fixe et l'autre variable, sont observées dans ce cas de mouvement de la base.

Dans la figure 4.11, sont présentées les réponses suivant l'axe vertical, pour deux fréquences de la base 20 Hz, 22 Hz, leurs spectrogrammes correspondants ainsi que les orbites. Les spectrogrammes montrent clairement pour chacun des deux cas que le premier pic est excité par le balourd tournant à la fréquence de rotation du rotor tandis que le deuxième est dû à l'excitation de la base. En observant les orbites, nous pouvons remarquer que leurs formes change en fonction de la fréquence du mouvement de la base, et que le nombre de sommets décroît quand la fréquence croît.

Test 4: Variation linéaire de la vitesse de rotation du rotor soumis à une translation sinusoïdale verticale de la base combinée à une rotation à vitesse constante autour de l'axe y_b .

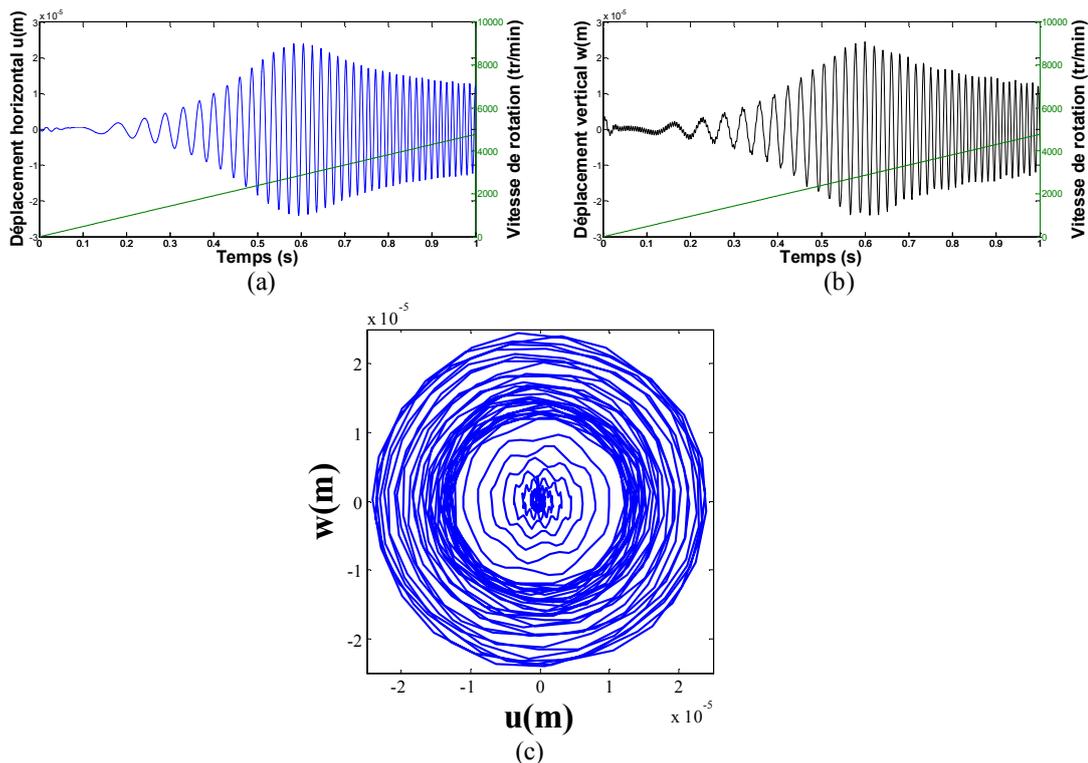


Figure 4.12 Rotor tournant à une vitesse à variation linéaire $\dot{\phi}(t) = 500t$ rad/s, monté sur une base soumise à une translation verticale sinusoïdale d'amplitude 10^{-6} m et de fréquence 200 Hz, combinée à une rotation de vitesse constante de 5 Hz, autour de l'axe y_b .

(a) Déplacement horizontal. (b) Déplacement vertical. (c) Orbite.

Dans le test 4, le rotor décrit dans le tableau 4.2, et soumis à une rotation de sa base à vitesse constante de 5 Hz autour de l'axe y_b , combinée à un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude 10^{-6} m et de fréquence 200 Hz, qui a déjà été examiné pour une vitesse de rotation constante (Fig. 4.5c), est maintenant soumis à une vitesse de rotation variable d'accélération constante: 500rad/s^2 . La figure 4.12 présente le déplacement horizontal (Figure 4.12a), le déplacement vertical (Figure 4.12b) ainsi que l'orbite décrite par le milieu de l'arbre (Figure 4.12c). Il est à noter que la forme de l'orbite est similaire à celle obtenue en régime stationnaire, avec un rayon de plus en plus grand jusqu'à atteindre son maximum correspondant à la résonance.

4.2.2.2 Variation exponentielle de la vitesse de rotation du rotor

Le modèle développé dans ce travail permet de choisir d'une façon arbitraire la loi de variation de la vitesse de rotation. Dans ce qui suit, une loi de variation exponentielle est considérée ; le cas d'une base fixe est tout d'abord traité, ensuite un cas de mouvement de la base est considéré.

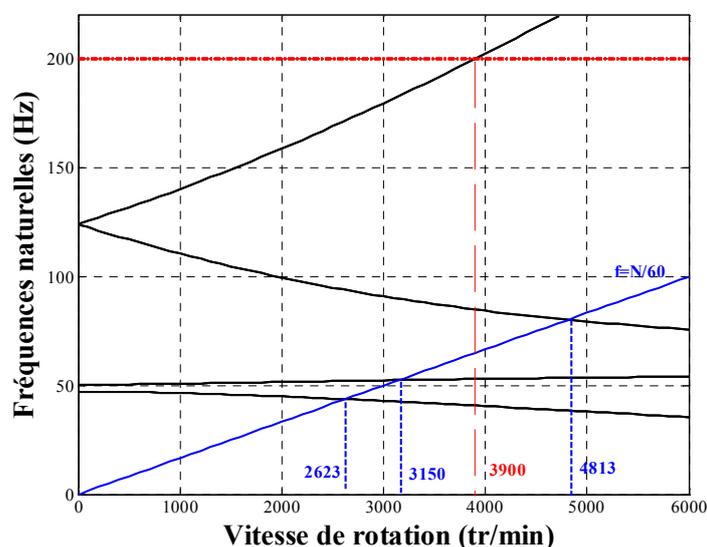


Figure 4.13 Diagramme de Campbell pour la deuxième configuration de rotor

Les paramètres de la configuration de rotor utilisée dans les simulations sont donnés dans le tableau 4.2. Un palier supplémentaire avec des caractéristiques de rigidité et d'amortissement

données par les matrices $[k_b] = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 5 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$ N/m et $[c_b] = 2 \times 10^{-4}[k_b]$ N s/m est placé à $y_b = 2L/3$. Le diagramme de Campbell correspondant est présenté dans la figure 4.13.

Test 1: Variation exponentielle de la vitesse de rotation du rotor monté sur une base fixe.

Dans ce cas, le rotor décrit dans le tableau 4.2 et monté sur une base fixe, tourne avec une vitesse variant exponentiellement pendant 5s, selon la loi: $\dot{\phi}(t) = 534(1 - e^{-0.983t})$ rad/s [40]. Les déplacements horizontal et vertical au milieu du rotor et leurs spectrogrammes correspondants sont représentés dans la figure 4.14.

Nous pouvons observer les pics correspondant aux premières vitesses critiques directe et inverse dans les graphes de u et w ainsi que leurs positions dans le spectrogramme.

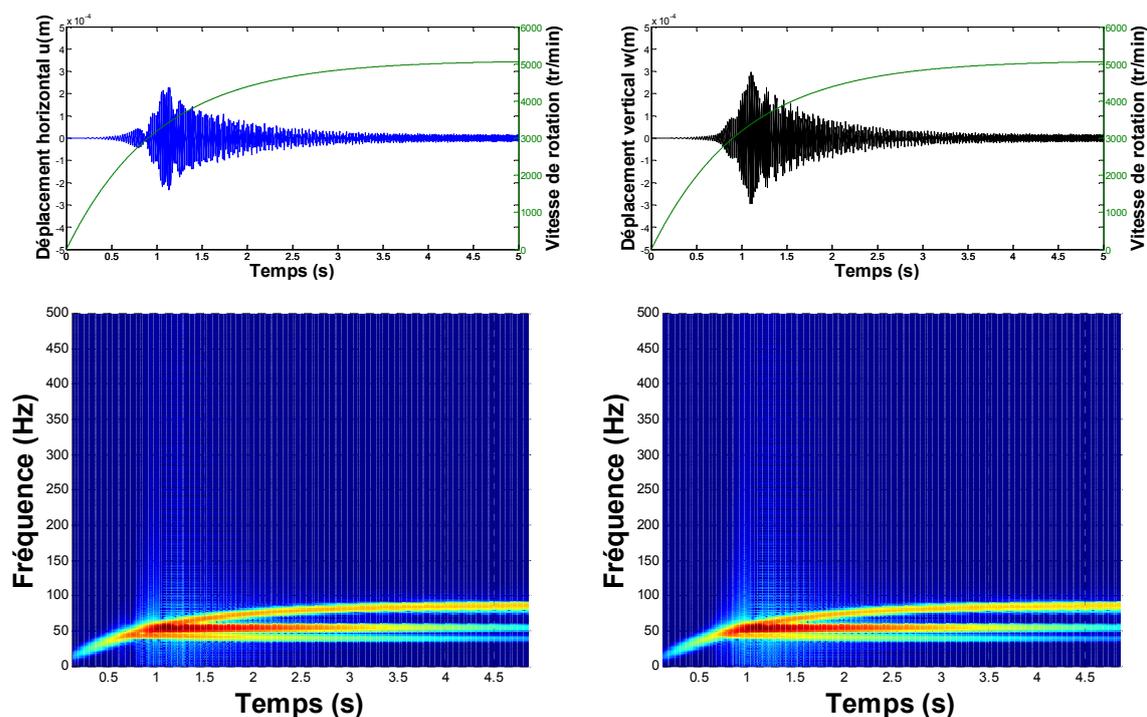


Figure 4.14 Réponse d'un rotor monté sur une base fixe et tournant à une vitesse exponentielle:

- (a) Déplacement horizontal, (b) Déplacement vertical w ,
- (c) Spectrogramme correspondant à u , (d) Spectrogramme correspondant à w

Test 2: Variation exponentielle de la vitesse de rotation du rotor soumis à une translation sinusoïdale verticale de la base.

Le rotor du test précédent est maintenant monté sur une base en translation sinusoïdale verticale d'amplitude 10^{-5} m et de fréquence 200 Hz. La vitesse de rotation varie d'une façon exponentielle suivant la loi: $\dot{\phi}(t) = 534(1 - e^{-0.983t})$ rad/s. Les déplacements horizontal et vertical du milieu du rotor ainsi que leurs spectrogrammes correspondants sont représentés sur la figure 4.15.

Les graphes des déplacements montrent des pics correspondant aux vitesses critiques directe et inverse se produisant au même instant que celles correspondant à une base fixe.

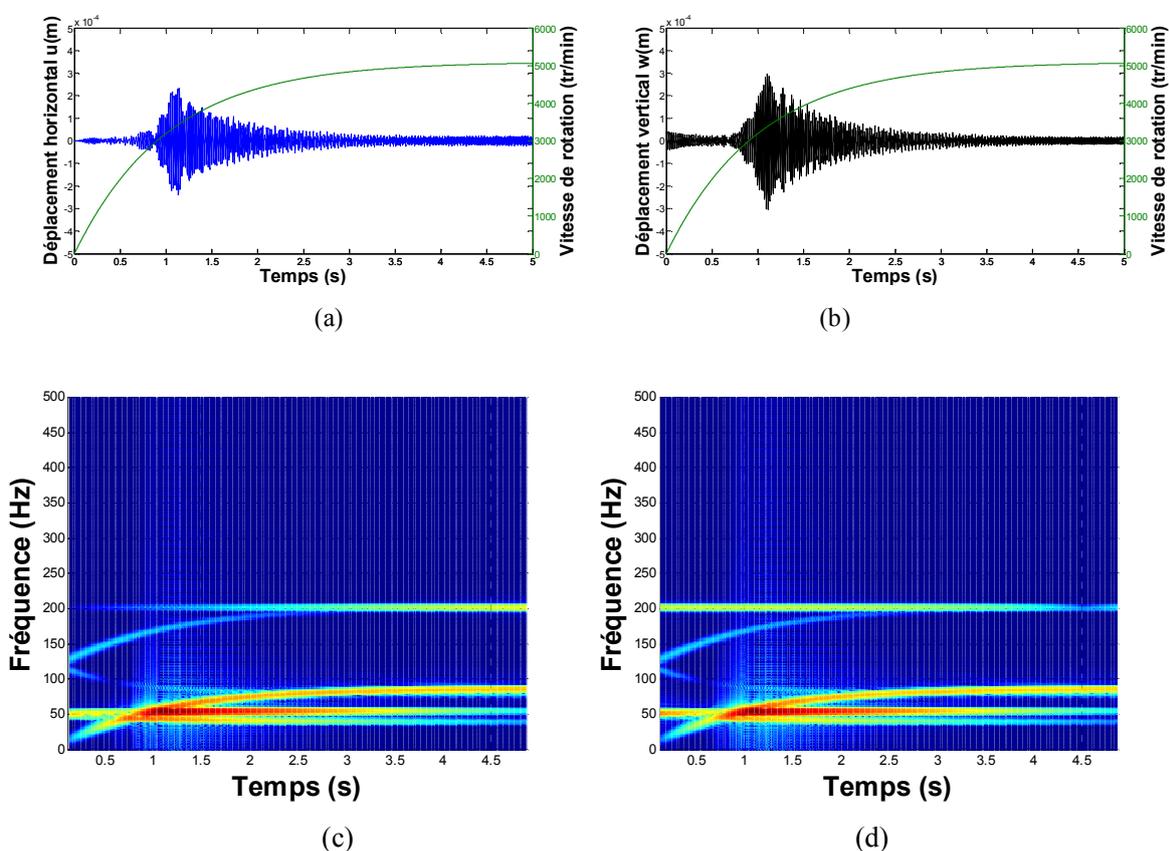


Figure 4.15 Réponse d'un rotor monté sur une base soumise à une translation sinusoïdale et tournant à une vitesse exponentielle: (a) Déplacement horizontal u , (b) Déplacement vertical w , (c) Spectrogramme correspondant à u (d) Spectrogramme correspondant à w .

De plus, des déplacements verticaux relativement grands sont observés avant que le rotor n'atteigne ses vitesses critiques données par le diagramme de Campbell; elles sont dues principalement à une superposition du mouvement de la base et des vibrations propres du rotor comme le montre le spectrogramme. Les déplacements horizontaux sont aussi influencés par le mouvement de la base dans cet intervalle. Notons que, malgré que le mouvement de la base est vertical, les déplacements horizontaux sont aussi influencés ; ceci est dû au couplage gyroscopique.

4.3 Modèle de Rayleigh-Ritz

Le système de rotor utilisé pour les simulations utilisant ce modèle a les caractéristiques données dans le tableau 4.2

4.3.1 Vitesse de rotation constante

L'exemple déjà étudié par la méthode des éléments finis, qui consiste en une rotation du rotor à vitesse constante de 25 Hz avec un mouvement combiné de la base : une rotation autour de l'axe y_b de vitesse constante de 5Hz et une translation sinusoïdale verticale d'amplitude 10^{-6} m pour des fréquences : 100 Hz, 120 Hz et 200 Hz, est maintenant repris en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz.

La figure 4.16 présente les orbites obtenues par les deux méthodes. Elles sont qualitativement similaires. Concernant les amplitudes de vibrations, le modèle de Rayleigh-Ritz étant plus rigide, elles sont légèrement inférieures à celles obtenues par la méthode des éléments finis : les écarts d'amplitude suivant les deux axes ne dépassant pas, en moyenne, 5%.

4.3.2 Vitesse de rotation variable

Dans ce qui suit, le modèle de Rayleigh-Ritz est utilisé pour la simulation du comportement dynamique des rotors embarqués tournant à une vitesse de rotation variable. Comme pour la méthode des éléments finis, deux lois de variation de la vitesse de rotation du rotor sont considérées : linéaire et exponentielle.

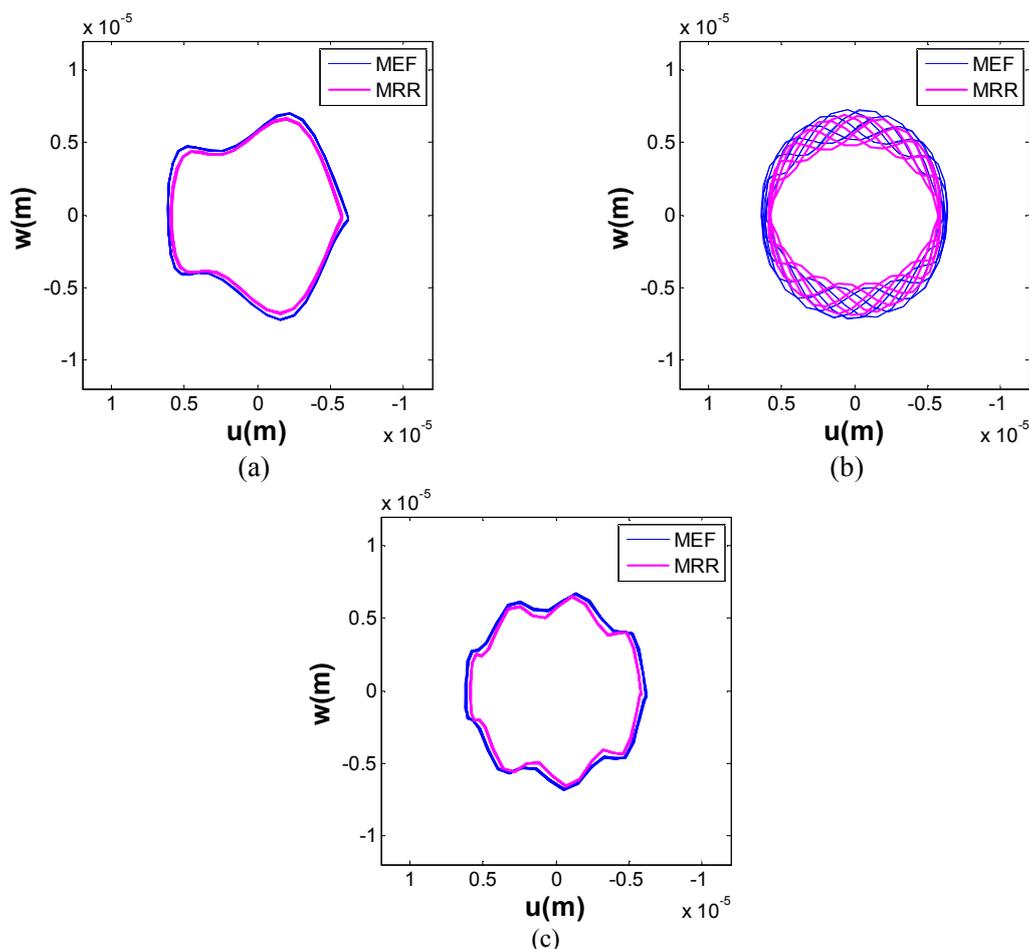


Figure 4.16 Orbites du milieu de l'arbre du rotor tournant à 25 Hz (1500 tr/min) et soumis à un mouvement combiné de la base : une rotation autour de l'axe y_b de vitesse constante (5 Hz) et une translation sinusoïdale verticale d'amplitude 10^{-6} m et de fréquence (a) 100 Hz, (b) 120 Hz, (c) 200 Hz.

Comparaison entre la MEF et la méthode de Rayleigh-Ritz

4.3.2.1 Loi de variation linéaire

La figure 4.17 présente la réponse du rotor, dont les paramètres sont donnés dans le tableau 4.2, tournant à une vitesse de rotation à variation linéaire $\dot{\phi}(t) = 200t$ rad/s, lorsqu'il est monté sur une base fixe.

Les déplacements suivant l'axe vertical, obtenues par la méthode de Rayleigh-Ritz (M.R.R) et par la méthode des éléments finis (M.E.F) sont superposés afin de permettre la comparaison des résultats. Nous pouvons constater que les déplacements obtenus par la M.R.R sont inférieurs à ceux obtenus par la M.E.F, ceci est dû à la rigidité du modèle de R.R. De plus, le pic de résonance obtenu par R.R se produit un peu en retard par rapport à celui de la M.E.F.

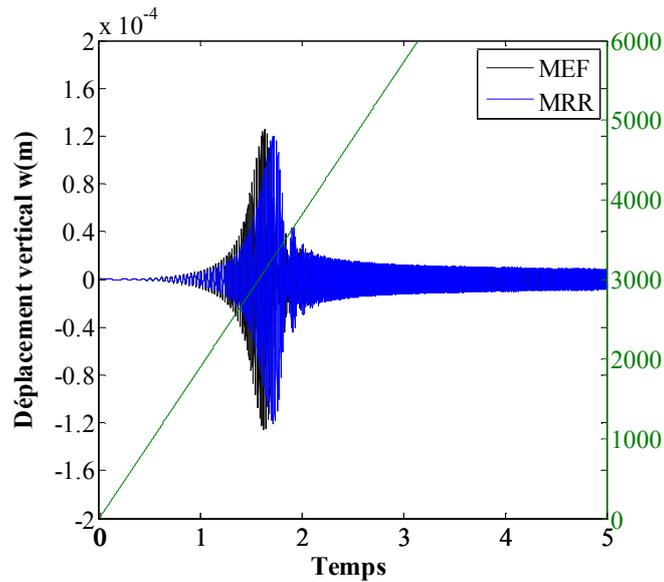


Figure 4.17 Vitesse de rotation du rotor à variation linéaire $\dot{\phi}(t) = 200t$ rad/s dans le cas d'une base fixe. Comparaison entre la M.E.F et la méthode de Rayleigh-Ritz

La figure 4.18 présente le déplacement vertical du milieu du rotor, tournant à la vitesse $\dot{\phi}(t) = 200t$ rad/s et monté sur une base soumise à une rotation sinusoïdale autour de l'axe x_b d'amplitude $2 \cdot 10^{-4}$ rad et de fréquence 33Hz (Figure 4.18a) et 35Hz (Figure 4.18b). En examinant ces figures, nous pouvons remarquer le décalage important entre la méthode des éléments finis et celle de Rayleigh-Ritz.

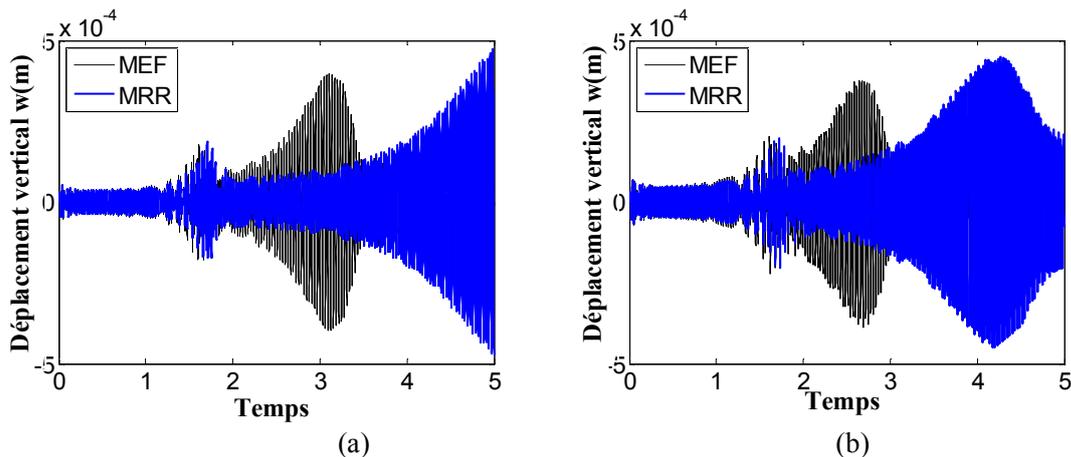


Figure 4.18 Vitesse de rotation du rotor à variation linéaire $\dot{\phi}(t) = 200t$ rad/s avec une rotation sinusoïdale de la base d'amplitude $2 \cdot 10^{-5}$ rad et de fréquences (a) 33Hz, (b) 35Hz

Les figures 4.19 et 4.20 représentent les diagrammes de Campbell obtenus par la méthode des éléments finis et la méthode de Rayleigh-Ritz, respectivement ; où la ligne horizontale représente la fréquence d'excitation de la base (35 Hz), et l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec le diagramme indique la vitesse de résonance et ceci pour chacune des deux figures.

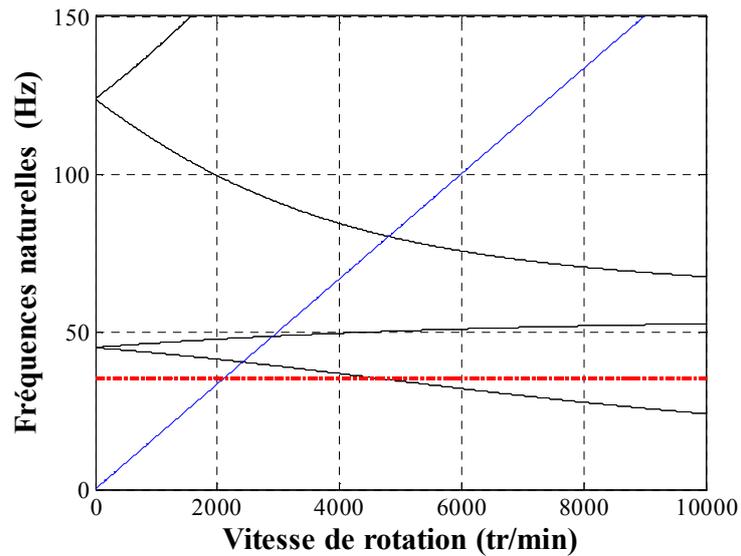


Figure 4.19 Diagramme de Campbell- Méthode des éléments finis

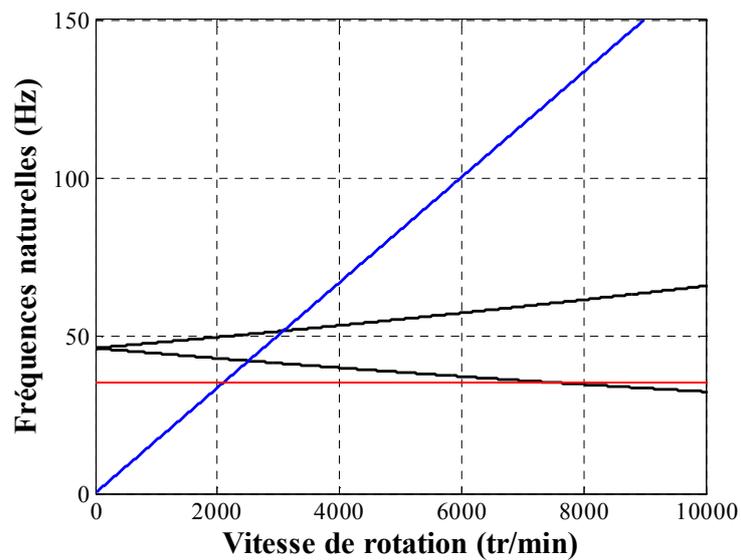


Figure 4.20 Diagramme de Campbell- Méthode de Rayleigh-Ritz

En examinant les deux diagrammes, nous pouvons remarquer que les vitesses de résonance dues à l'excitation de la base, obtenues par les deux méthodes sont très éloignées l'une de l'autre: 4720 tr/min (MEF) et 7625 tr/min (MRR), soit un décalage de 2905 tr/min (304.21 rad/s). Sachant que le rotor tourne à une vitesse $\dot{\phi}(t) = 200t$ rad/s ; le décalage sur l'axe du temps attendu est de 1.52 s.

Le tableau 4.3 présente les deux premières vitesses critiques du rotor excitées par le balourd, ainsi que quatre vitesses critiques excitées par le mouvement sinusoïdal de la base correspondant aux fréquences : 33 Hz, 35 Hz, 38 Hz et 40 Hz obtenues par la M.E.F et la méthode de Rayleigh-Ritz

Tableau 4.3 Comparaison des vitesses de résonance entre la M.E.F et la M.R.R

	V_{c1}	V_{c2}	$\omega = 33 \text{ Hz}$	$\omega = 35 \text{ Hz}$	$\omega = 38 \text{ Hz}$	$\omega = 40 \text{ Hz}$
MEF	2422	2913	5450	4720	3460	2590
MRR	2531	3013	9320	7625	5300	3872
Erreur %	4.50%	3.43%	71.01%	61.55%	53.18%	49.50%

Nous pouvons constater que les vitesses de résonance dues à l'excitation de balourd sont déterminées par la méthode de Rayleigh-Ritz avec une précision acceptable (4.50% et 3.43%) ; alors que les vitesses de résonance dues à l'excitation de la base, obtenues par la même méthode sont très éloignées de celles prédites par la méthode des éléments finis.

La figure 4.18 montre un écart supplémentaire entre les vitesses critiques dues à l'excitation de la base obtenues dans le graphe de la réponse et celles prévues par le diagramme de Campbell.

De plus, nous pouvons constater que l'amplitude des vibrations à la résonance due à l'excitation de la base est beaucoup plus importante pour la méthode de Rayleigh-Ritz par comparaison à celle obtenue par la MEF. Ceci est dû au fait que la résonance dans la méthode de RR se produit à une vitesse de rotation plus grande par rapport à la MEF; et comme la composante verticale de la force due au mouvement de la base est proportionnelle à la vitesse de rotation (Equation 4.46), et la force de balourd est proportionnelle au carré de la vitesse de rotation (Equation 4.6), l'amplitude des vibrations sera donc beaucoup plus grande.

4.3.2.2 Loi de variation exponentielle

Les mêmes cas simulés en utilisant la méthode des éléments finis, sont examinés ici en utilisant le modèle de Rayleigh-Ritz.

La figure 4.21 présente les déplacements horizontal et vertical du centre du rotor, monté sur une base fixe et tournant à une vitesse de loi de variation exponentielle.

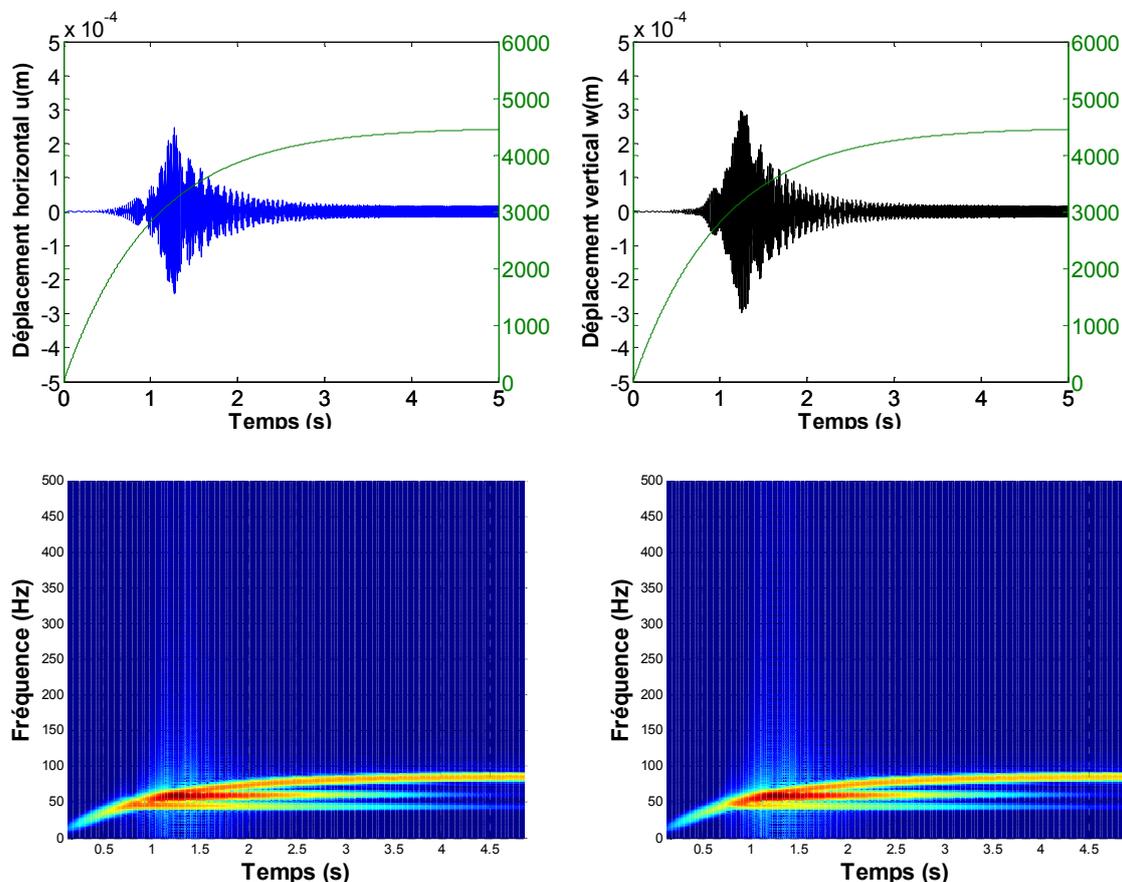


Figure 4.21 Réponse d'un rotor monté sur une base fixe et tournant à une vitesse exponentielle:

- (a) Déplacement horizontal, (b) Déplacement vertical w ,
- (c) Spectrogramme correspondant à u , (d) Spectrogramme correspondant à w

Les graphes de réponse sont pratiquement les mêmes que ceux obtenus en utilisant la M.E.F avec de légers écarts concernant les amplitudes de réponses et les instants de production de la résonance.

La figure 4.22 présente la réponse du même rotor que celui du cas précédent, mais monté sur une base soumise à une translation sinusoïdale verticale, d'amplitude $10^{-5}m$ et de fréquence 200 Hz, et tournant à une vitesse à variation exponentielle. Les spectrogrammes montrent la contribution des premiers modes direct et inverse ainsi que le mouvement de la base à la réponse. Contrairement au modèle éléments finis, les modes supérieurs ne sont pas représentés ici, ce qui est inhérent à la méthode.

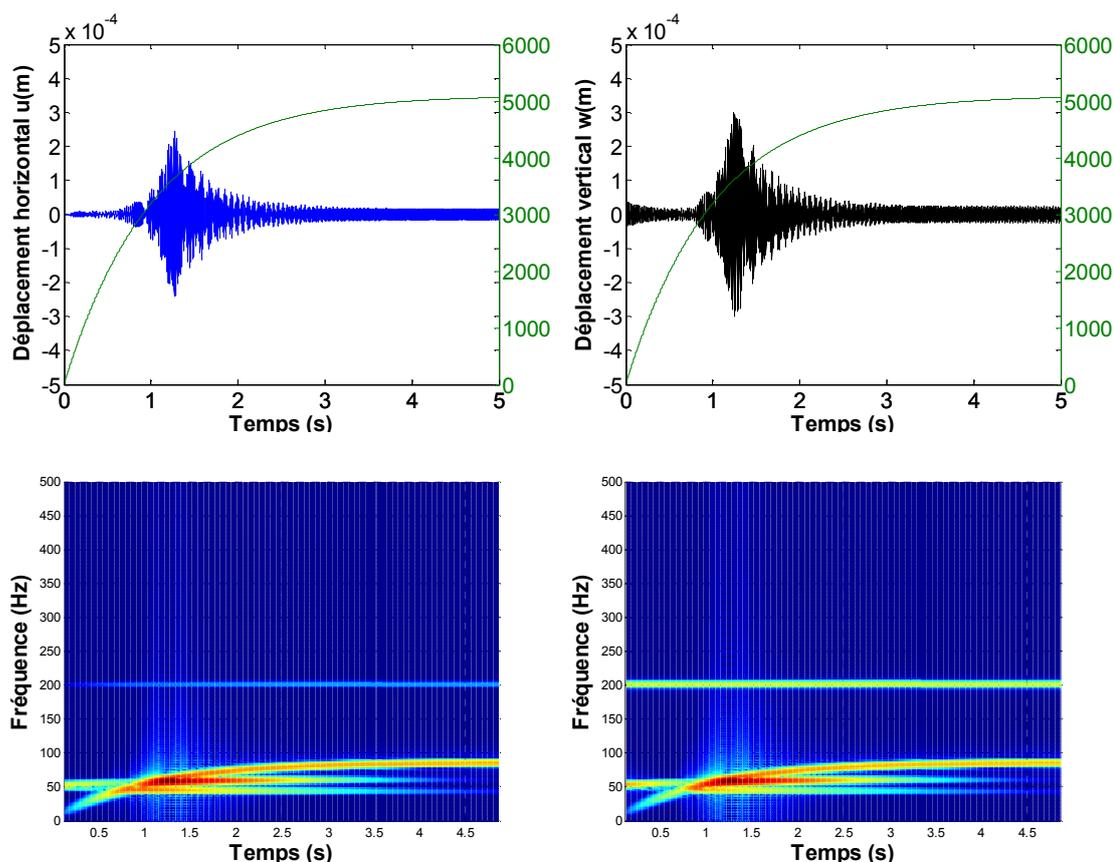


Figure 4.22 Réponse d'un rotor monté sur une base soumise à une translation sinusoïdale verticale, d'amplitude 10^{-5} m et de fréquence 200 Hz, et tournant à une vitesse à variation exponentielle:
 (a) Déplacement horizontal u , (b) Déplacement vertical w , (c) Spectrogramme correspondant à u
 (d) Spectrogramme correspondant à w .

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, des simulations du comportement dynamique de rotors embarqués tournant à une vitesse constante ou variable pour différents cas de mouvements de la base sont présentées et discutées. La méthode des éléments finis est tout d'abord considérée. Après des tests de validation du modèle pour des vitesses de rotations constantes, le cas de vitesses variables est traité. Pour une variation linéaire de la vitesse de rotation, il a été constaté, dans les cas d'une rotation ou d'une translation sinusoïdale de la base, l'existence de deux résonances, dans la plage de fréquences considérée, la première est excitée par le balourd et elle se produit toujours au même instant, tandis que la deuxième est excitée par le mouvement de la base et elle change sa position dans l'axe du temps en fonction de la fréquence du mouvement de la base.

Pour une variation exponentielle de la vitesse de rotation, les courbes représentant les déplacements horizontal et vertical, montrent l'existence de deux pics correspondant aux vitesses critiques directe et inverse excitées par le balourd. En outre, dus au mouvement de la base, en plus des déplacements verticaux, des déplacements horizontaux croissants sont induits par couplage gyroscopique.

Des simulations basées sur le modèle de Rayleigh-Ritz sont ensuite effectuées. Pour une loi de variation linéaire de la vitesse de rotation, les deux types de résonances constatées en utilisant le modèle éléments finis sont observés pour ce modèle, avec des décalages entre les deux méthodes. L'écart enregistré pour les vitesses critiques dues à l'excitation de balourd est inférieur à 5%, alors que celui des vitesses critiques dues à l'excitation de la base est très grand (plus de 70% pour certaines fréquences de la base). De plus, l'écart des amplitudes à ces vitesses est aussi grand. Ceci limite l'utilisation du modèle de Rayleigh-Ritz pour la prédiction de ce type de résonances.

Pour une loi de variation exponentielle de la vitesse de rotation, les simulations effectuées en utilisant la méthode des éléments finis sont reproduites pour le modèle de Rayleigh-Ritz. Les mêmes pics correspondant aux premières vitesses critiques sont observés, avec de faibles écarts. Cependant, nous pouvons constater que lorsque le rotor est excité par un mouvement de la base de fréquence élevée (supérieure à la plus grande fréquence naturelle donnée par le modèle de RR), dans la plage de vitesses considérée, la méthode de Rayleigh-Ritz ne peut détecter aucune résonance. Cette remarque reste valable pour toute loi de variation des vitesses. Ceci constitue une limitation inhérente à l'utilisation de cette méthode.

2

Modélisation du système rotor-palier

Sommaire

2.1	Introduction.	16
2.2	Référentiels et transformation de repères.	17
2.2.1	Transformation du repère lié à la base au repère courant lié au rotor.	18
2.2.2	Transformation du repère absolu au repère lié à la base.	20
2.3	Vecteur position de l'origine du repère lié à la base.	21
2.4	Vecteur rotation instantanée.	22
2.5	Vecteur position d'un point de la ligne moyenne de l'arbre.	23
2.6	Calcul des énergies et des travaux virtuels.	23
2.6.1	Disque.	24
2.6.1.1	Energie cinétique.	24
2.6.1.2	Travail virtuel du poids propre.	25
2.6.2	Arbre.	26
2.6.2.1	Energie cinétique.	26
2.6.2.2	Energie de déformation.	28
2.6.2.3	Travail virtuel du poids propre.	30
2.6.3	Balourd.	31
2.6.4	Palier.	32
2.7	Equations du mouvement.	33
2.7.1	Introduction.	33
2.7.2	Modèle simple basé sur la méthode de Rayleigh-Ritz.	33
2.7.3	Modèle éléments finis.	36

2.7.3.1	Disque.	36
2.7.3.2	Arbre.	38
2.7.3.3	Palier.	40
2.7.3.4	Equations du mouvement.	41
2.8	Méthode de Newmark pour la résolution des équations du mouvement. .	42
2.9	Conclusion.	42

2.1 Introduction

En général, les machines tournantes sont constituées de disques de différentes formes, d'arbres dont les diamètres changent en fonction de leur position longitudinale, et de paliers situés à différentes positions. Dans les analyses de vibrations, un système de rotor aussi complexe est simplifié et un modèle mathématique approprié est adopté [68].

Le but de ce chapitre est la modélisation d'un système rotor-palier avec la prise en compte d'un mouvement éventuel de sa base, supposée indéformable, et dont la vitesse de rotation pouvant varier en fonction du temps suivant une loi arbitraire.

Les éléments essentiels du système considéré sont (Figure 2.1) : le disque, l'arbre, le balourd, le palier et la base.

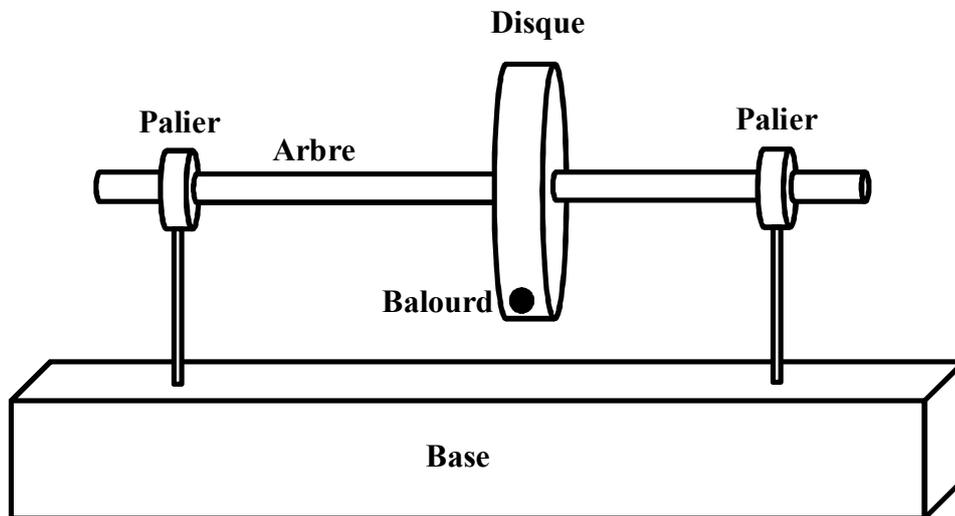


Figure 2.1 - Eléments composant le rotor

Dans ce travail, les hypothèses retenues sur les éléments du rotor sont les suivantes :

Le disque est supposé rigide, l'arbre flexible, le disque et l'arbre peuvent être symétriques ou dissymétriques ; les paliers supportant l'arbre peuvent être rigides ou flexibles avec ou sans amortissement, la base du rotor est rigide et peut être fixe ou mobile, et la vitesse de rotation du rotor peut être constante ou variable.

Pour la modélisation du rotor avec prise en compte du mouvement de sa base, la méthode utilisée par Duchemin [22] est adoptée, tout en tenant compte d'une variation éventuelle de la vitesse de rotation du rotor. Tout d'abord, les systèmes de référence nécessaires à la description du mouvement du rotor sont définis et les équations exprimant les transformations entre ceux-ci sont déterminées. Ensuite, les différentes énergies et travaux virtuels des composants du rotor sont calculés; il s'agit de

- l'énergie cinétique et le travail virtuel du poids propre du disque
- l'énergie cinétique, l'énergie de déformation et le travail virtuel du poids propre d'un élément d'arbre,
- l'énergie cinétique du balourd,
- Et enfin, le travail virtuel des forces extérieures dues au palier.

Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant la méthode de Lagrange. Deux modèles sont utilisés :

- Un modèle basé sur l'approximation de Rayleigh-Ritz : il s'agit d'un modèle simplifié qui permet d'étudier des cas simples, pour mettre en évidence les phénomènes de base de la dynamique des rotors,
- Un modèle éléments finis qui permet l'étude des systèmes réels et des applications industrielles.

Dans ce travail, l'étude du comportement dynamique du rotor comprend

- La détermination des fréquences naturelles, des vitesses critiques et l'étude de stabilité,
- La détermination de la réponse aux excitations de balourd, du poids propre du rotor et éventuellement, du mouvement de la base en régime stationnaire (vitesse de rotation constante) et instationnaire (vitesse de rotation variable) du rotor.

2.2 Référentiels et transformations de repères

De manière générale pour décrire la dynamique d'un système mécanique, l'étape préliminaire de la modélisation consiste à définir les repères associés au mouvement du système.

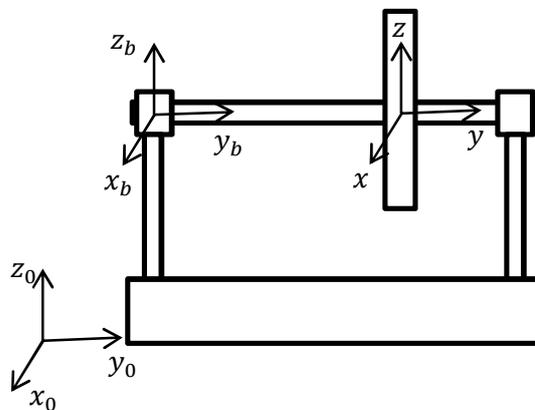


Figure 2.2 - Systèmes de coordonnées pour la description du mouvement du rotor

Ainsi, pour décrire le mouvement du rotor monté sur une base rigide mobile, trois référentiels sont considérés

$R_0(x_0, y_0, z_0)$: Repère absolu,

$R_b(x_b, y_b, z_b)$: Repère fixé à la base,

$R(x, y, z)$: Repère courant lié au rotor.

Pour déterminer les expressions des énergies et du travail virtuel des composants du rotor, le vecteur vitesse ainsi que le vecteur rotation instantanée du repère R par rapport à R_0 doivent être calculés.

2.2.1 Transformation du repère lié à la base au repère courant lié au rotor

La rotation du repère courant R lié au rotor par rapport au repère R_b lié à la base se fait en passant par trois rotations successives représentées par les trois angles d'Euler ψ , θ et ϕ en utilisant deux repères intermédiaires $R_1(x_1, y_1, z_1)$ et $R_2(x_2, y_2, z_2)$, où

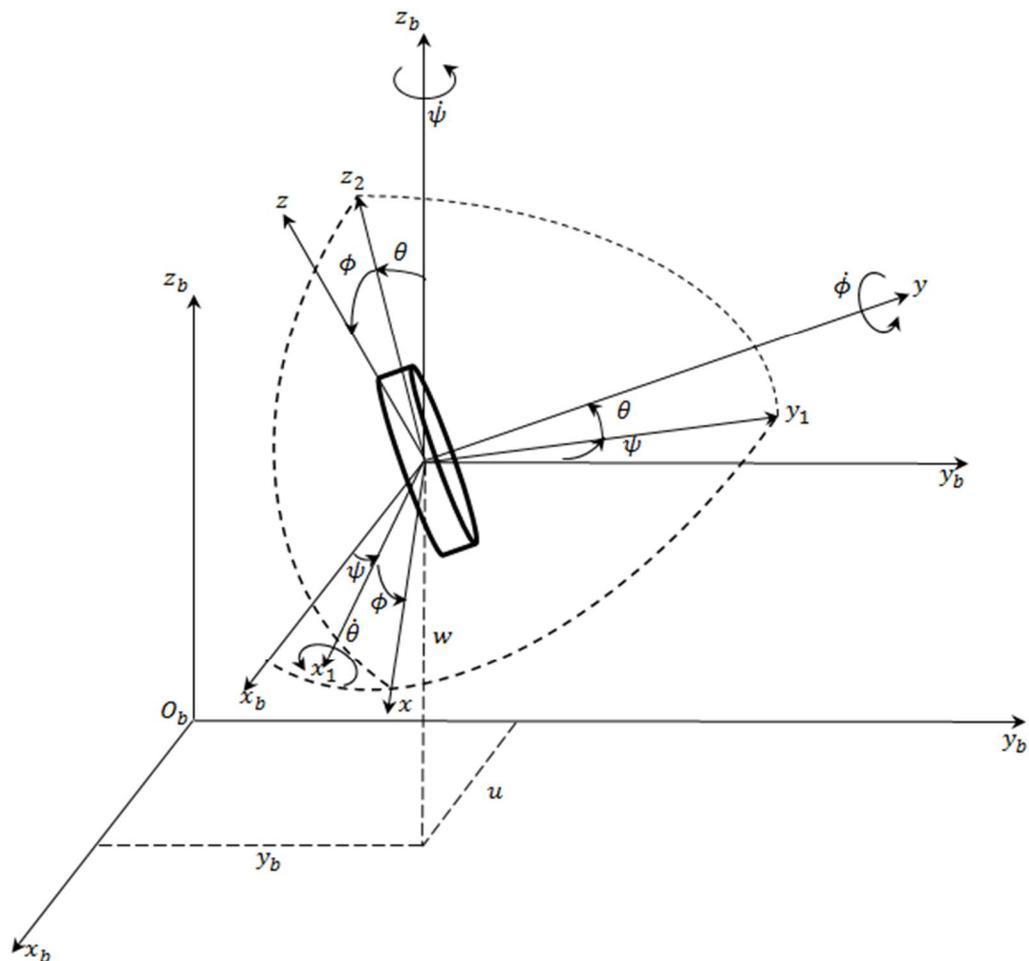


Figure 2.3 - Passage du repère R_b lié à la base au repère local R lié au rotor

- ψ , angle de précession, représente la rotation autour de Oz_b , qui transforme le repère $R_b(x_b, y_b, z_b)$ au repère intermédiaire $R_1(x_1, y_1, z_1)$.
- θ , angle de nutation, représente la rotation autour de l'axe Ox_1 du repère intermédiaire $R_1(x_1, y_1, z_1)$, et qui transforme le repère $R_1(x_1, y_1, z_1)$ au repère $R_2(x_2, y_2, z_2)$.
- ϕ , angle de rotation propre, représente la rotation autour de l'axe Oy_2 qui coïncide avec l'axe Oy du repère courant, $R(x, y, z)$.

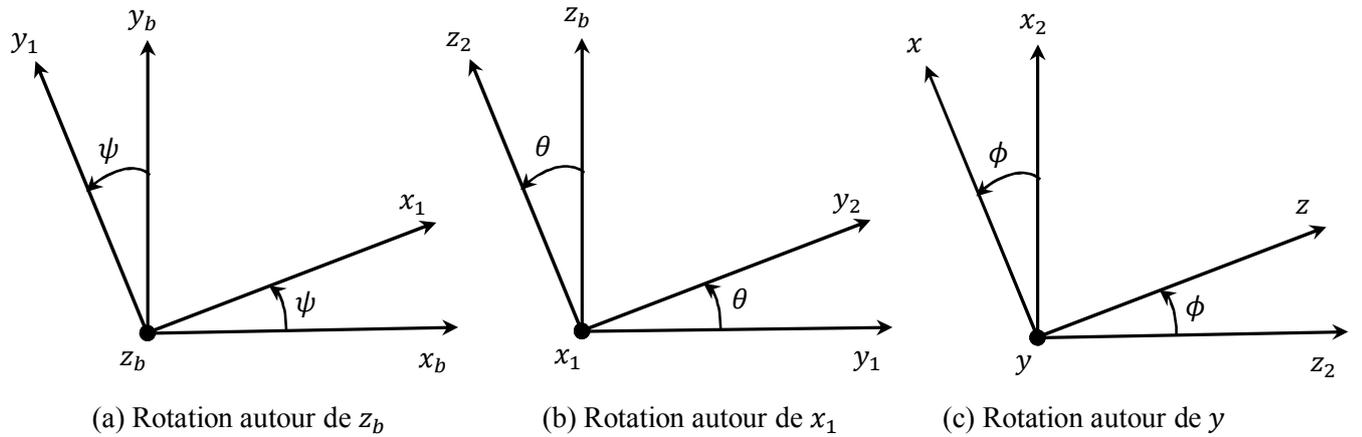


Figure 2.4 - Angles d'Euler. Passage de R_b à R

- Rotation ψ (Figure 2.4a)

$$\begin{aligned}\vec{x}_b &= \cos \psi \vec{x}_1 - \sin \psi \vec{y}_1 \\ \vec{y}_b &= \sin \psi \vec{x}_1 + \cos \psi \vec{y}_1 \\ \vec{z}_b &= \vec{z}_1\end{aligned}\tag{2.1}$$

- Rotation θ (Figure 2.4b)

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{x}_2 \\ \vec{y}_1 &= \cos \theta \vec{y}_2 - \sin \theta \vec{z}_2 \\ \vec{z}_1 &= \sin \theta \vec{y}_2 + \cos \theta \vec{z}_2\end{aligned}\tag{2.2}$$

- Rotation ϕ (Figure 2.4c)

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &= \cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{z} \\ \vec{y}_2 &= \vec{y} \\ \vec{z}_2 &= -\sin \phi \vec{x} + \cos \phi \vec{z}\end{aligned}\tag{2.3}$$

En substituant les équations (2.3) dans (2.2) et les équations obtenues dans (2.1), la relation qui lie les vecteurs unitaires du repère R_b et ceux du repère courant R est donnée par

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_b \\ \vec{y}_b \\ \vec{z}_b \end{pmatrix} = [\mathbf{T}_{R_b}^R] \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Avec

$$[\mathbf{T}_{R_b}^R] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\sin \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \phi - \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Où : $[\mathbf{T}_{R_b}^R]$ est la matrice de passage du repère lié à la base R_b au repère local R

La relation inverse entre les vecteurs unitaires des deux repères R et R_b est obtenue en inversant l'équation (2.4)

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = [\mathbf{R}_R^{R_b}] \begin{pmatrix} \vec{x}_b \\ \vec{y}_b \\ \vec{z}_b \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Avec

$$[\mathbf{R}_R^{R_b}] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ -\sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \phi - \cos \psi \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$[\mathbf{R}_R^{R_b}]$ est la matrice de rotation du repère local R lié au rotor par rapport au repère lié à la base R_b .

Il est clair que la matrice $[\mathbf{R}_R^{R_b}]$ est l'inverse de la matrice $[\mathbf{T}_{R_b}^R]$, et comme de plus la matrice $[\mathbf{T}_{R_b}^R]$ est orthogonale, on a :

$$[\mathbf{R}_R^{R_b}] = [\mathbf{T}_{R_b}^R]^T \quad (2.8)$$

2.2.2 Transformation du repère absolu au repère lié à la base

Le mouvement de la base est défini par les coordonnées de l'origine O_b du repère R_b exprimées dans le repère R_0 , et par les angles de rotation α , β et γ permettant le passage du repère R_0 au repère R_b .

La relation entre les vecteurs unitaires du repère absolu R_0 et ceux du repère lié à la base R_b est obtenue en suivant la même démarche que dans le cas précédent, c'est à dire lors du calcul de la relation entre les vecteurs unitaires du repère R_b lié à la base et ceux du repère R . Elle est donnée par

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_b \\ \vec{y}_b \\ \vec{z}_b \end{pmatrix} = [\mathcal{R}_{R_b}^{R_0}] \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

avec

$$[\mathcal{R}_{R_b}^{R_0}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

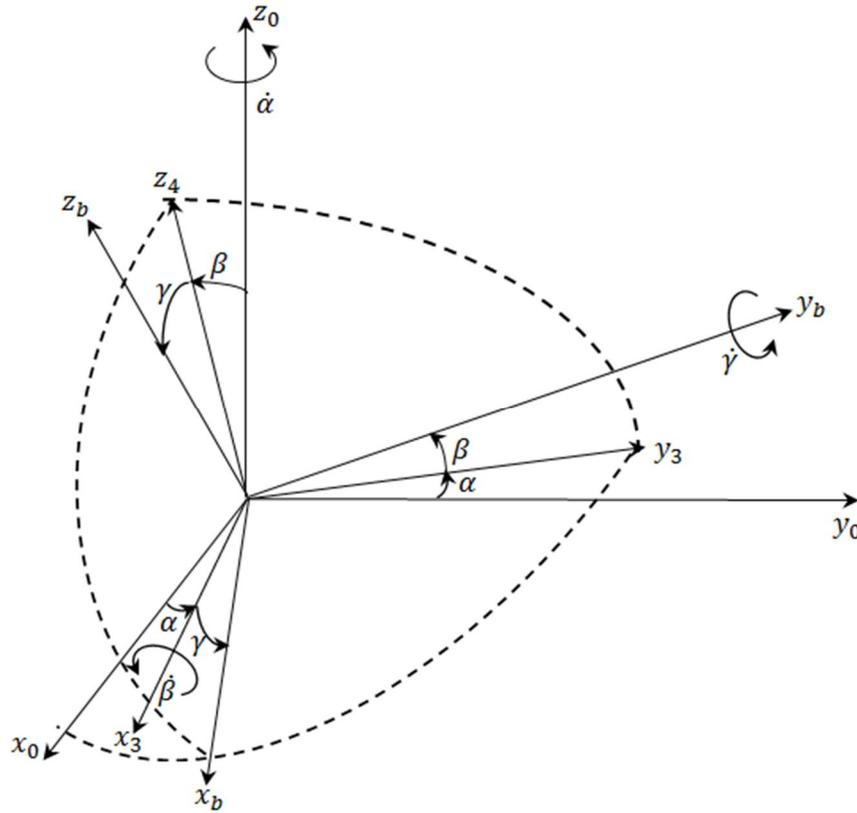


Figure 2.5 - Passage du repère absolu R_0 au repère lié à la base R_b

2.3 Vecteur position de l'origine du repère lié à la base

Le vecteur position de l'origine O_b du repère lié à la base R_b est

$$\overrightarrow{O_0 O_b} = \begin{pmatrix} x_{0b} \\ y_{0b} \\ z_{0b} \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}_{R_b} \quad (2.11)$$

En utilisant l'équation (2.9), les relations entre les composantes du vecteur position exprimées dans les deux repères R_b et R_0 sont obtenues

$$\begin{Bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{Bmatrix} = [\mathcal{R}_{R_b}^{R_0}] \begin{Bmatrix} x_{0b} \\ y_{0b} \\ z_{0b} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} x_b &= (x_{0b} \cos \alpha + y_{0b} \sin \alpha) \cos \gamma - ((x_{0b} \sin \alpha - y_{0b} \cos \alpha) \sin \beta + z_{0b} \cos \beta) \sin \gamma \\ y_b &= -(x_{0b} \sin \alpha - y_{0b} \cos \alpha) \cos \beta + z_{0b} \sin \beta \\ z_b &= (x_{0b} \cos \alpha + y_{0b} \sin \alpha) \sin \gamma + ((x_{0b} \sin \alpha - y_{0b} \cos \alpha) \sin \beta + z_{0b} \cos \beta) \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.4 Vecteur rotation instantanée

Le vecteur rotation de R par rapport R_0 est

$$\vec{\omega}_R^{R_0} = \vec{\omega}_R^{R_b} + \vec{\omega}_{R_b}^{R_0} \quad (2.14)$$

Où

$$\vec{\omega}_R^{R_b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_b} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{Bmatrix}_R \quad (2.15)$$

Et

$$\vec{\omega}_{R_b}^{R_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{R_0} + \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_3} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_b} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \cos \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \end{Bmatrix}_{R_b} = \begin{Bmatrix} \dot{\Gamma}_x \\ \dot{\Gamma}_y \\ \dot{\Gamma}_z \end{Bmatrix}_{R_b} \quad (2.16)$$

En tenant compte de (2.15) et (2.26) dans (2.14), on aura

$$\vec{\omega}_R^{R_0} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} \dot{\Gamma}_x \\ \dot{\Gamma}_y \\ \dot{\Gamma}_z \end{Bmatrix}_{R_b} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{Bmatrix}_R \quad (2.17)$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = [\mathcal{R}_R^{R_b}] \begin{Bmatrix} \dot{\Gamma}_x \\ \dot{\Gamma}_y \\ \dot{\Gamma}_z \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \omega_x &= (\dot{\theta} + \dot{\Gamma}_x \cos \psi + \dot{\Gamma}_y \sin \psi) \cos \phi - (\dot{\Gamma}_x \sin \psi - \dot{\Gamma}_y \cos \psi) \sin \theta \sin \phi - (\dot{\Gamma}_z + \dot{\psi}) \cos \theta \sin \phi \\ \omega_y &= -(\dot{\Gamma}_x \sin \psi - \dot{\Gamma}_y \cos \psi) \cos \theta + (\dot{\Gamma}_z + \dot{\psi}) \sin \theta + \dot{\phi} \\ \omega_z &= (\dot{\theta} + \dot{\Gamma}_x \cos \psi + \dot{\Gamma}_y \sin \psi) \sin \phi + (\dot{\Gamma}_x \sin \psi - \dot{\Gamma}_y \cos \psi) \sin \theta \cos \phi + (\dot{\Gamma}_z + \dot{\psi}) \cos \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (2.19)$$

Où

\dot{I}_x , \dot{I}_y et \dot{I}_z sont les composantes du vecteur rotation instantanée de R_b par rapport à R_0 exprimé dans R_b .

2.5 Vecteur position d'un point de la ligne moyenne de l'arbre

Durant le mouvement du rotor, la ligne moyenne de l'arbre se déplace de sa position initiale. Soit $C(u, y, w)$ un point de cette ligne moyenne.

u et w étant les coordonnées en mouvement transversal du point C .

y est la position du point considéré sur la ligne moyenne de l'arbre, qui est supposée constante car seuls les mouvements de flexion sont considérés.

Le vecteur position du point C est

$$\overrightarrow{OC} = \begin{Bmatrix} x_b + u \\ y_b + y \\ z_b + w \end{Bmatrix}_{R_b} \quad (2.20)$$

Le vecteur vitesse du point C , relativement au repère R_0 est déterminé en utilisant la formule de Bour

$$\vec{V}_{R_0}(C) = \left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right)_{R_b} + \vec{\omega}_{R_b}^{R_0} \wedge (\overrightarrow{OC})_{R_b} \quad (2.21)$$

Soit

$$\vec{V}_{R_0}(C) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_b + \dot{u} \\ \dot{y}_b \\ \dot{z}_b + \dot{w} \end{Bmatrix}_{R_b} + \begin{Bmatrix} \dot{I}_x \\ \dot{I}_y \\ \dot{I}_z \end{Bmatrix}_{R_b} \wedge \begin{Bmatrix} x_b + u \\ y_b + y \\ z_b + w \end{Bmatrix}_{R_b} \quad (2.22)$$

Ce qui donne

$$\vec{V}_{R_0}(C) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_b + \dot{u} + \dot{I}_y(z_b + w) - \dot{I}_z(y_b + y) \\ \dot{y}_b - \dot{I}_x(z_b + w) + \dot{I}_z(x_b + u) \\ \dot{z}_b + \dot{w} + \dot{I}_x(y_b + y) - \dot{I}_y(x_b + u) \end{Bmatrix}_{R_b} \quad (2.23)$$

2.6 Calcul des énergies et des travaux virtuels

L'application de la méthode de Lagrange pour l'obtention des équations de mouvement du système rotor-palier requiert la détermination des énergies cinétiques du disque, de l'arbre et du balourd, de l'énergie potentielle de l'arbre, ainsi que les travaux virtuels des forces du palier et du poids propre du rotor.

2.6.1 Disque

2.6.1.1 Energie cinétique

Le disque de centre C situé à la position $y = y_d$, étant supposé rigide, seule son énergie cinétique sera calculée.

Le vecteur position du centre du disque est

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} x_b + u \\ y_b + y_d \\ z_b + w \end{pmatrix}_{R_b} \quad (2.24)$$

Et son vecteur vitesse, compte tenu de l'équation (2.23), est

$$\vec{V}_{R_0}(C)_{y=y_d} = \begin{pmatrix} \dot{x}_b + \dot{u} + \dot{I}_y(z_b + w) - \dot{I}_z(y_b + y_d) \\ \dot{y}_b - \dot{I}_x(z_b + w) + \dot{I}_z(x_b + u) \\ \dot{z}_b + \dot{w} + \dot{I}_x(y_b + y_d) - \dot{I}_y(x_b + u) \end{pmatrix}_{R_b} \quad (2.25)$$

L'énergie cinétique du disque s'écrit alors

$$T_d = \frac{1}{2} m_d (\vec{V}_{R_0}(C)_{y=y_d})^2 + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad (2.26)$$

m_d étant la masse du disque, et I_{dx} , I_{dy} et I_{dz} ses moments d'inertie principaux.

Afin de distinguer les effets dus à l'inertie moyenne massique du disque de ceux dus à son inertie déviatorique causée par sa dissymétrie géométrique, on pose

$$I_{dm} = \frac{I_{dx} + I_{dz}}{2} \quad (2.27)$$

$$I_{da} = \frac{I_{dx} - I_{dz}}{2} \quad (2.28)$$

Ce qui donne

$$I_{dx} = I_{dm} + I_{da} \quad (2.29)$$

$$I_{dz} = I_{dm} - I_{da} \quad (2.30)$$

En reportant (2.29) et (2.30) dans (2.26), on obtient

$$T_d = \frac{1}{2} m_d t_1(y, t) + \frac{1}{2} (I_{dm} t_2(y, t) + I_{dy} t_3(y, t) + I_{da} t_4(y, t)) \quad (2.31)$$

Les fonctions $t_i(y, t)$, $i=1, 4$ sont calculées dans l'annexe A, en prenant en compte que les angles de précession ψ et de nutation θ et leurs dérivées sont infiniment petits.

L'énergie cinétique du disque s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 T_d = & \frac{1}{2} m_d \left(2 \left(\dot{I}_x (\dot{z}_b + \dot{w} + \dot{I}_x y_b - \dot{I}_y (x_b + u)) - \dot{I}_z (\dot{x}_b + \dot{u} - \dot{I}_z y_b + \dot{I}_y (z_b + w)) \right) y_d \right) + \\
 & (\dot{I}_x^2 + \dot{I}_z^2) y_d^2 + (\dot{x}_b + \dot{u} + \dot{I}_y (z_b + w) - \dot{I}_z y_b)^2 + (\dot{y}_b + \dot{I}_z (x_b + u) - \dot{I}_x (z_b + w))^2 + \\
 & (\dot{z}_b + \dot{w} + \dot{I}_x y_b - \dot{I}_y (x_b + u))^2 \\
 & + \frac{1}{2} I_{dm} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{I}_x^2 + \dot{I}_z^2 + \theta^2 (\dot{I}_y^2 - \dot{I}_z^2) + \psi^2 (\dot{I}_y^2 - \dot{I}_x^2) \right. \\
 & \quad \left. + 2(\dot{I}_x \dot{\theta} + \dot{I}_z \dot{\psi} + \dot{I}_y (\psi \dot{\theta} - \theta \dot{\psi}) + \dot{I}_y (\dot{I}_x \dot{\psi} - \dot{I}_z \dot{\theta}) + \dot{I}_x \dot{I}_z \dot{\theta} \dot{\psi}) \right) \\
 & + \frac{1}{2} I_{dy} \left((\dot{I}_y + \dot{\phi} + \dot{I}_z \dot{\theta} - \dot{I}_x \dot{\psi})^2 + (\dot{I}_y + \dot{\phi}) (2\theta \dot{\psi} - \dot{I}_y (\theta^2 + \psi^2)) \right) \\
 & + \frac{1}{2} I_{da} \left((2(\dot{I}_y (\dot{I}_x \dot{\psi} + \dot{I}_z \dot{\theta}) + \dot{I}_x \dot{\theta} - \dot{I}_z \dot{\psi}) + \dot{I}_y^2 (\psi^2 - \theta^2) + \dot{I}_x^2 - \dot{I}_z^2 + \dot{\theta}^2 - \dot{\psi}^2 + \dot{I}_z^2 \theta^2 - \right. \\
 & \left. \dot{I}_x^2 \psi^2 + 2\dot{I}_y (\psi \dot{\theta} + \theta \dot{\psi}) - 2\dot{I}_x \dot{I}_z \dot{\theta} \dot{\psi}) \cos 2\phi - (2\dot{I}_x \dot{I}_z + 2\dot{I}_y (\dot{I}_z \dot{\psi} - \dot{I}_x \dot{\theta}) + 2\dot{I}_x \dot{\psi} + 2\dot{I}_z \dot{\theta} + \right. \\
 & \left. 2(\dot{I}_x^2 - \dot{I}_y^2) \theta \dot{\psi} - \dot{I}_x \dot{I}_z (\theta^2 + \psi^2) + 2\dot{I}_y (\psi \dot{\psi} - \theta \dot{\theta}) + 2\dot{\psi} \dot{\theta}) \sin 2\phi \right) \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
 \frac{m_d}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) & : \text{représente l'énergie cinétique de translation du disque.} \\
 \frac{I_{dm}}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) & : \text{l'énergie cinétique de rotation du disque autour des} \\
 & \text{axes x et z} \\
 \rho I_{dy} \dot{\phi}^2 & : \text{représente l'énergie de rotation propre du disque.} \\
 I_{dy} \dot{\phi} \dot{\psi} \dot{\theta} & : \text{terme représentant l'effet gyroscopique}
 \end{aligned}$$

Les autres termes sont dus au mouvement de la base du rotor

Dans le cas d'un disque symétrique : $I_{dx} = I_{dz} = I_d$, et on a : $I_{dm} = I_d$ et $I_{da} = 0$

2.6.1.2 Travail virtuel du poids propre

Le vecteur représentant le poids propre du disque, dans le repère absolu s'écrit

$$\{P_d\}_{R_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_d g \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

En utilisant l'équation (2.9), il est transformé dans le repère lié à la base par

$$\{P_d\}_{R_b} = [\mathcal{R}_{R_b}^{R_0}] \{P_d\}_{R_0} \quad (2.34)$$

Soit

$$\{P_d\}_{R_b} = -m_d g \begin{Bmatrix} -\cos\beta \sin\gamma \\ \sin\beta \\ \cos\beta \cos\gamma \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Compte tenu que les déplacements suivant l'axe du rotor sont négligés, le travail virtuel du poids propre du disque exprimé dans le repère lié à la base s'écrit

$$\delta W_{pd} = -m_d g (-\cos\beta \sin\gamma \delta u(y = y_d) + \cos\beta \cos\gamma \delta w(y = y_d)) \quad (2.36)$$

2.6.2 Arbre

L'arbre étant considéré flexible, il est caractérisé par ses énergies : cinétique et de déformation, ainsi que par le travail virtuel de son poids propre.

2.6.2.1 Energie cinétique

La formulation de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre peut être déduite de celle du disque en considérant une section d'arbre infiniment mince d'épaisseur dy , de masse volumique ρ , de section droite A dont les moments d'inertie sont I_x et I_z (Figure 2.6).

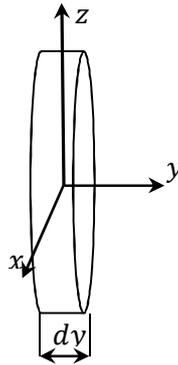


Figure 2.6 - Élément infinitésimal de l'arbre

La masse élémentaire dm de l'arbre et ses inerties élémentaires s'écrivent

$$dm = \rho A dy \quad (2.37)$$

$$dI_{ax} = \int_m (y^2 + z^2) dm = \int_A z^2 dA \rho dy = \rho I_x dy \quad (2.38)$$

$$dI_{ay} = \int_m (z^2 + x^2) dm = \left(\int_A z^2 dA + \int_A x^2 dA \right) \rho dy = \rho (I_x + I_z) dy \quad (2.39)$$

$$dI_{az} = \int_m (x^2 + y^2) dm = \int_A x^2 dA \rho dy = \rho I_z dy \quad (2.40)$$

L'énergie cinétique élémentaire d'un élément infinitésimal d'arbre s'écrit alors

$$dT_a = \left(\frac{1}{2} \rho A (\dot{u}_a^2 + \dot{v}_a^2 + \dot{w}_a^2) + \frac{1}{2} (\rho I_x \omega_x^2 + \rho (I_x + I_y) \omega_y^2 + \rho I_z \omega_z^2) \right) dy \quad (2.41)$$

Les moments d'inertie surfaciques, moyen et déviatorique, d'une section transversale de l'arbre s'écrivent

$$I_m = \frac{I_x + I_z}{2} \quad (2.42)$$

$$I_a = \frac{I_x - I_z}{2} \quad (2.43)$$

Ce qui donne

$$I_x = I_m + I_a \quad (2.44)$$

$$I_z = I_m - I_a \quad (2.45)$$

Afin d'obtenir l'énergie cinétique d'un élément d'arbre de longueur L , il suffit d'intégrer sur la longueur L

$$T_a = \int_0^L dT_a = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\vec{V}_{R_0}(C))^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^L \rho (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) dy \quad (2.46)$$

L'énergie cinétique de l'arbre s'écrit alors

$$\begin{aligned} T_a = & \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(2 \left(\dot{I}_x (\dot{z}_b + \dot{w} + \dot{I}_x y_b - \dot{I}_y (x_b + u)) \right. \right. \\ & \left. \left. - \dot{I}_z (\dot{x}_b + \dot{u} - \dot{I}_z y_b + \dot{I}_y (z_b + w)) \right) y \right) + (\dot{I}_x^2 + \dot{I}_z^2) y^2 \\ & + (\dot{x}_b + \dot{u} + \dot{I}_y (z_b + w) - \dot{I}_z y_b)^2 + (\dot{y}_b + \dot{I}_z (x_b + u) - \dot{I}_x (z_b + w))^2 \\ & + (\dot{z}_b + \dot{w} + \dot{I}_x y_b - \dot{I}_y (x_b + u))^2 \Big) dy \\ & + \frac{1}{2} \rho I_m \int_0^L \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{I}_x^2 + \dot{I}_z^2 + \theta^2 (\dot{I}_y^2 - \dot{I}_z^2) + \psi^2 (\dot{I}_y^2 - \dot{I}_x^2) \right. \\ & \left. + 2(\dot{I}_x \dot{\theta} + \dot{I}_z \dot{\psi} + \dot{I}_y (\psi \dot{\theta} - \theta \dot{\psi}) + \dot{I}_y (\dot{I}_x \dot{\psi} - \dot{I}_z \dot{\theta}) + \dot{I}_x \dot{I}_z \theta \psi) \right) dy \\ & + \rho I_m \int_0^L \left((\dot{I}_y + \dot{\phi} + \dot{I}_z \theta - \dot{I}_x \psi)^2 + (\dot{I}_y + \dot{\phi}) (2\theta \dot{\psi} - \dot{I}_y (\theta^2 + \psi^2)) \right) dy \\ & + \frac{1}{2} \rho I_a \int_0^L \left((2(\dot{I}_y (\dot{I}_x \dot{\psi} + \dot{I}_z \dot{\theta}) + \dot{I}_x \dot{\theta} - \dot{I}_z \dot{\psi}) + \dot{I}_y^2 (\psi^2 - \theta^2) + \dot{I}_x^2 - \dot{I}_z^2 + \dot{\theta}^2 - \dot{\psi}^2 \right. \\ & + \dot{I}_z^2 \theta^2 - \dot{I}_x^2 \psi^2 + 2\dot{I}_y (\psi \dot{\theta} + \theta \dot{\psi}) - 2\dot{I}_x \dot{I}_z \theta \psi) \cos 2\phi \\ & - (2\dot{I}_x \dot{I}_z + 2\dot{I}_y (\dot{I}_z \dot{\psi} - \dot{I}_x \dot{\theta}) + 2\dot{I}_x \dot{\psi} + 2\dot{I}_z \dot{\theta} + 2(\dot{I}_x^2 - \dot{I}_y^2) \theta \psi \\ & \left. - \dot{I}_x \dot{I}_z (\theta^2 + \psi^2) + 2\dot{I}_y (\psi \dot{\psi} - \theta \dot{\theta}) + 2\dot{\psi} \dot{\theta}) \sin 2\phi \right) dy \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\frac{\rho A}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy \quad : \text{expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.}$$

$$\frac{\rho I_m}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy \quad : \text{représente l'effet secondaire de l'inertie de rotation}$$

$$\rho I_m L \dot{\phi}^2 \quad : \text{représente l'énergie de rotation propre de l'arbre.}$$

$$2\rho I \dot{\phi} \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \quad : \text{terme représentant l'effet gyroscopique}$$

Les autres termes sont dus au mouvement de la base du rotor

2.6.2.2 Energie de déformation

Le point C est le centre géométrique de la section droite de la poutre, $P(x, z)$ est un point de cette section (Figure 2.7), u^* et w^* sont les déplacements du centre géométrique par rapport aux axes x et z .

La déformation en flexion du point P s'écrit

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad (2.48)$$

avec

$$\varepsilon_l = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (2.49)$$

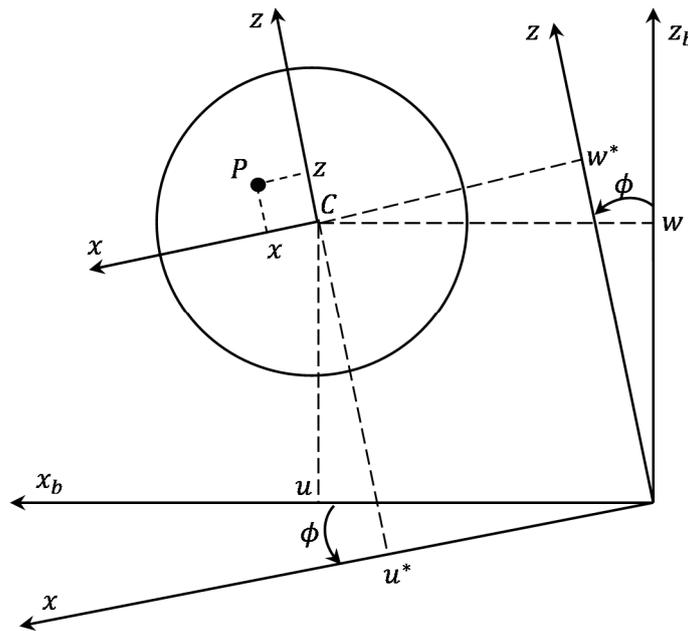


Figure 2.7 – Coordonnées du centre et d'un point arbitraire de la section droite de l'arbre

Et

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (2.50)$$

ε_l et ε_{nl} sont les déformations linéaire et non linéaire, respectivement.

L'énergie de déformation est donnée par

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dV \quad (2.51)$$

Où, V est le volume de l'arbre et σ est la contrainte de flexion.

La relation entre contrainte et déformation est :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.52)$$

donc

$$U = \frac{E}{2} \int_V (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l\varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) dSdy \quad (2.53)$$

A cause de la symétrie de l'arbre par rapport aux axes x et z

$$\int_A x dA = 0 \quad (2.54)$$

$$\int_A z dA = 0 \quad (2.55)$$

Ce qui implique que

$$\int_V \varepsilon_l \varepsilon_{nl} dV = 0 \quad (2.56)$$

Le troisième terme de l'intégrale est un terme du second ordre, il est négligé.

L'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_A \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dA dy \quad (2.57)$$

Soit, après développement

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_A \left(x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dA dy \quad (2.58)$$

En prenant en compte que le repère tournant est celui des axes principaux d'inertie de l'élément d'arbre, le produit d'inertie dans le troisième terme de l'intégrale de (2.58) est nul.

Soit

$$I_{xz} = \int_A xz dA = 0 \quad (2.59)$$

En introduisant les inerties diamétrales de la section

$$I_x = \int_A z^2 dA \quad (2.60)$$

Et

$$I_z = \int_A x^2 dA \quad (2.61)$$

L'énergie de déformation a pour expression

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2.62)$$

Pour exprimer l'énergie de déformation en fonction des composantes des déplacements u et w dans le repère R_0 , on remplace u^* et w^* par leurs expressions

$$u^* = u \cos \phi - w \sin \phi \quad (2.63)$$

$$w^* = u \sin \phi + w \cos \phi \quad (2.64)$$

Soit

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_z \left(\cos \phi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \phi \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \phi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \phi \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2.65)$$

En substituant (2.44) et (2.45) dans (2.62), l'énergie de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} U &= \frac{E}{2} \int_0^L I_m \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \\ &+ \frac{E}{2} \int_0^L I_a \left(\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right) \cos 2\phi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin 2\phi \right) dy \end{aligned} \quad (2.66)$$

Dans le cas d'un arbre symétrique

$$I_m = I_x = I_z = I \quad \text{et} \quad I_a = 0 \quad (2.67)$$

Et l'énergie de déformation se réduit à

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2.68)$$

2.6.2.3 Travail virtuel du poids propre

Le travail virtuel du poids propre d'un élément infinitésimal de l'arbre (Figure 2.6), exprimé dans le repère lié à la base, est obtenu en suivant la même démarche que pour le

disque (2.33)-(2.36). Le travail virtuel du poids propre d'un arbre de longueur L est obtenu après intégration

$$\delta W_{pa} = - \int_0^L \rho A g (-\cos\beta \sin\gamma \delta u + \cos\beta \cos\gamma \delta w) dy \quad (2.69)$$

2.6.3 Balourd

Le balourd est représenté par une masse ponctuelle m_u placée à une distance d du centre du disque au point D , (Figure 2.8).

Le vecteur position du point D , dans le repère R_b , est

$$\overrightarrow{O_b D} = \begin{Bmatrix} x_b + u + d \sin(\phi + \delta) \\ y_b + y_d \\ z_b + w + d \cos(\phi + \delta) \end{Bmatrix}_{R_b} \quad (2.70)$$

Et sa vitesse est calculée en utilisant la formule de Bour

$$\vec{V}_{R_0}(D) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_b D}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_b D}}{dt} \right)_{R_b} + \vec{\omega}_{R_b}^{R_0} \wedge (\overrightarrow{O_b D})_{R_b} \quad (2.71)$$

Ce qui donne

$$\vec{V}_{R_0}(D) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_b + \dot{u} + \dot{\Gamma}_y(z_b + w + d \cos(\phi + \delta)) - \dot{\Gamma}_z(y_b + y_d) + d \dot{\phi} \cos(\phi + \delta) \\ \dot{y}_b - \dot{\Gamma}_x(z_b + w + d \cos(\phi + \delta)) + \dot{\Gamma}_z(x_b + u + d \sin(\phi + \delta)) \\ \dot{z}_b + \dot{w} + \dot{\Gamma}_x(y_b + y_d) - \dot{\Gamma}_y(x_b + u + d \sin(\phi + \delta)) - d \dot{\phi} \sin(\phi + \delta) \end{Bmatrix}_{R_b} \quad (2.72)$$

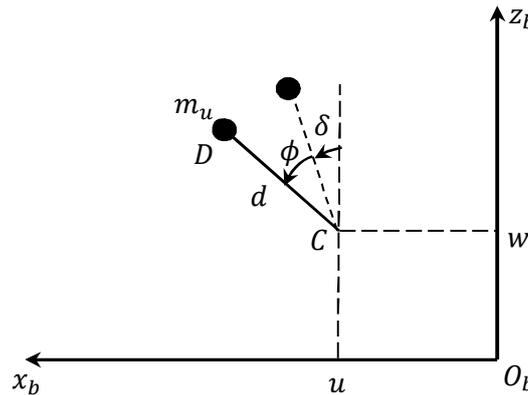


Figure 2.8 - Coordonnées du balourd dans le repère R_b

L'énergie cinétique du balourd est donnée par

$$T_u = \frac{1}{2} m_u (\vec{V}_{R_0}(D))^2 \quad (2.73)$$

En reportant l'équation (2.72) dans (2.73), on obtient

$$\begin{aligned}
 T_u = \frac{1}{2} m_u & \left(2 \left(\dot{I}_x \left(\dot{z}_b + \dot{w} + \dot{I}_x y_b - \dot{I}_y (x_b + u) \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \dot{I}_z \left(\dot{x}_b + \dot{u} - \dot{I}_z y_b + \dot{I}_y (z_b + w) \right) y_d \right) + (\dot{I}_x^2 + \dot{I}_z^2) y_d^2 \right. \\
 & \left. + (\dot{x}_b + \dot{u} + \dot{I}_y (z_b + w) - \dot{I}_z y_b)^2 + (\dot{y}_b + \dot{I}_z (x_b + u) - \dot{I}_x (z_b + w))^2 \right. \\
 & \left. + (\dot{z}_b + \dot{w} + \dot{I}_x y_b - \dot{I}_y (x_b + u))^2 \right) \\
 & + \frac{1}{2} m_u d^2 \left((\dot{I}_y + \dot{\phi})^2 + (\dot{I}_z \sin(\phi + \delta) - \dot{I}_x \cos(\phi + \delta))^2 \right) \\
 & + m_u d \left((\dot{x}_b + \dot{u} - \dot{I}_z (y_b + y_d) + \dot{I}_y (z_b + w)) (\dot{I}_y + \dot{\phi}) \cos(\phi + \delta) \right. \\
 & \left. + (\dot{y}_b + \dot{I}_z (x_b + u) - \dot{I}_x (z_b + w)) (\dot{I}_z \sin(\phi + \delta) - \dot{I}_x \cos(\phi + \delta)) \right. \\
 & \left. - (\dot{z}_b + \dot{w} + \dot{I}_x (y_b + y_d) - \dot{I}_y (x_b + u)) (\dot{I}_y + \dot{\phi}) \sin(\phi + \delta) \right)
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Où, y_d désigne la position du disque sur l'axe y_b , δ l'angle de balourd et d la distance du balourd par rapport au centre géométrique de la section considérée.

2.6.4 Paliers

Les caractéristiques de raideur et d'amortissement du palier étant supposées connues (Figure 2.9), le travail virtuel δW des forces extérieures exercées par le palier sur l'arbre se met sous la forme

$$\begin{aligned}
 \delta W = -k_{xx} u \delta u - k_{xz} w \delta u - k_{zz} w \delta w - k_{zx} u \delta w \\
 -c_{xx} \dot{u} \delta u - c_{xz} \dot{w} \delta u - c_{zz} \dot{w} \delta w - c_{zx} \dot{u} \delta w
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

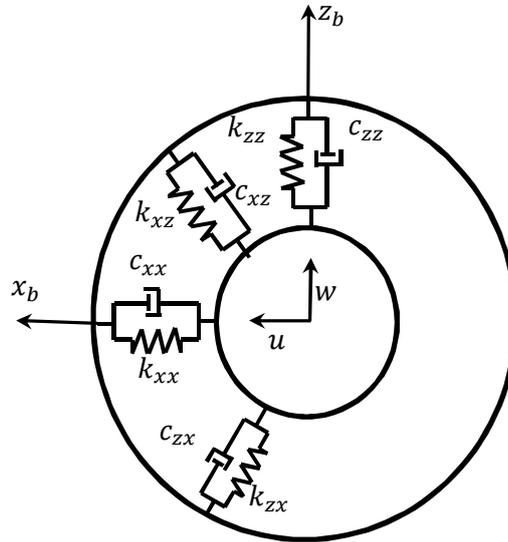


Figure 2.9 - Caractéristiques de raideur et d'amortissement d'un palier

Ou sous une forme plus compacte :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \tag{2.76}$$

F_u et F_w sont les composantes de la force généralisée et s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

Dans les chapitres suivants, les matrices représentant la rigidité et l'amortissement du palier sont désignées, respectivement, par

$$[k_b] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Et

$$[c_b] = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

2.7 Equations du mouvement

2.7.1 Introduction

Après la détermination des énergies cinétique et de déformation et les travaux virtuels des forces généralisées des éléments du système rotor-palier, deux méthodes d'approximation du champ de déplacements sont présentées afin d'établir les équations différentielles du mouvement de vibrations de flexion du rotor en tenant compte du mouvement de sa base :

- La méthode de Rayleigh-Ritz, qui utilise un ou quelques degrés de liberté pour écrire les équations du mouvement. Cette méthode est appliquée aux systèmes simples pour l'étude des phénomènes de base.
- La méthode des éléments finis, qui permet de décrire d'une façon plus précise le système étudié et est utilisée pour l'étude des systèmes de rotors industriels.

2.7.2 Modèle simple basé sur la méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz construit une approximation des déplacements continus u et w sous la forme d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions de forme supposées, cinématiquement admissibles. Si les fonctions supposées sont convenablement choisies, cette méthode fournit non seulement une valeur approximative de la fréquence fondamentale mais également les valeurs approximatives des fréquences naturelles supérieures ainsi que les formes modales correspondantes. Un nombre arbitraire de fonctions peut être utilisé, et le nombre de fréquences pouvant être obtenu est égal au nombre de fonctions utilisées [60]. Dans ce qui suit, afin de simplifier le modèle, une seule fonction de forme est utilisée. Ceci est justifié par le fait que le but principal de l'utilisation

de ce modèle étant l'étude des phénomènes de base et non pas de rechercher une meilleure précision des résultats.

Le rotor étudié est composé d'un arbre de longueur L et d'un disque avec un balourd situé à $y_b = l_1$. Le rotor est supporté aux extrémités par deux paliers parfaitement rigides, et par un palier auxiliaire situé à $y_b = l_2$ (Figure 2.10), caractérisé par ses coefficients de rigidité et d'amortissement.

En utilisant cette méthode, les déplacements dans les directions x et z sont donnés par:

$$u(y, t) = f(y)q_1(t) \quad (2.80)$$

$$w(y, t) = f(y)q_2(t) \quad (2.81)$$

La fonction $f(y)$ est la déformée modale choisie ; elle représente ici le mode fondamental des vibrations en flexion d'une poutre appuyée-appuyée de section transversale constante.

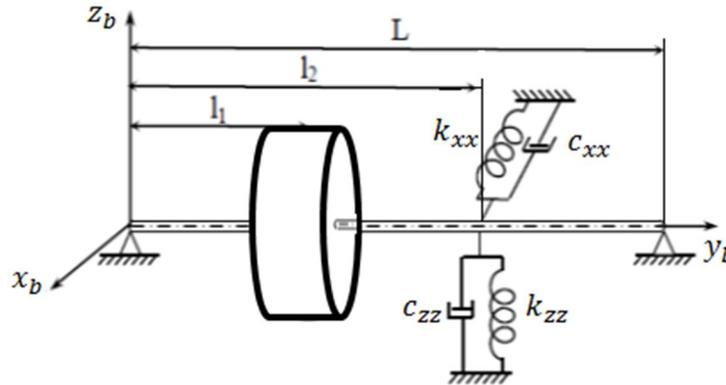


Figure 2.10 Système rotor-paliers

En substituant les équations (2.80) et (2.81) dans les expressions des énergies cinétiques du disque (2.32), de l'arbre (2.47), et du balourd (2.74), et dans l'énergie de déformation de l'arbre (2.66) ainsi que dans les expressions des travaux virtuels des forces du palier (2.75) et du poids propre du disque (2.36) et de l'arbre (2.69), obtenues dans le chapitre précédent ; et en appliquant les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F q_i \quad (2.82)$$

Le système d'équations différentielles suivant est obtenu

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{F}(t)\} \quad (2.83)$$

Les composantes des matrices et du vecteur force contenues dans l'équation (2.83), sont données ci-après

- Matrice masse $[\mathbf{M}]$

$$\begin{aligned} m_{11} &= M_2 + I_{m2} - I_{a2} \cos 2\phi, \\ m_{22} &= M_2 + I_{m2} + I_{a2} \cos 2\phi, \\ m_{12} &= m_{21} = I_{a2} \sin 2\phi \end{aligned} \quad (2.84)$$

- Matrice $[\mathbf{C}]$, regroupant l'effet gyroscopique du rotor dissymétrique soumis au mouvement de sa base et l'amortissement du palier

$$\begin{aligned} c_{11} &= -c_{22} = 2I_{a2}\dot{\phi} \sin 2\phi + c_{xx}f^2(l_2) \\ c_{12} &= \dot{I}_y(2M_2 + 2I_{m2} - I_{y2}) - \dot{\phi}I_{y2} + 2I_{a2}\dot{\phi} \cos 2\phi + c_{xz}f^2(l_2) \\ c_{21} &= -\dot{I}_y(2M_2 + 2I_{m2} - I_{y2}) + \dot{\phi}I_{y2} + 2I_{a2}\dot{\phi} \cos 2\phi + c_{zx}f^2(l_2) \end{aligned} \quad (2.85)$$

- Matrice de rigidité $[\mathbf{K}]$, regroupant la rigidité de l'arbre du rotor fixe, la rigidité du rotor due au mouvement de sa base et celle du palier

$$\begin{aligned} k_{11} &= k + \dot{I}_x^2(I_{m2} - I_{y2}) - \dot{I}_y^2(M_2 + I_{m2} - I_{y2}) - \dot{I}_z^2M_2 + \dot{I}_y\dot{\phi}I_{y2} + \\ &+ \left((\dot{I}_x^2 - \dot{I}_y^2 - 2\dot{\phi}\dot{I}_y)I_{a2} - k_a \right) \cos 2\phi - (\dot{I}_y + \dot{I}_x\dot{I}_z)I_{a2} \sin 2\phi + k_{xx}f^2(l_2) \\ k_{22} &= k + \dot{I}_z^2(I_{m2} - I_{y2}) - \dot{I}_y^2(M_2 + I_{m2} - I_{y2}) - \dot{I}_x^2M_2 + \dot{I}_y\dot{\phi}I_{y2} \\ &+ \left((-\dot{I}_z^2 + \dot{I}_y^2 + 2\dot{\phi}\dot{I}_y)I_{a2} + k_a \right) \cos 2\phi - (\dot{I}_y - \dot{I}_x\dot{I}_z)I_{a2} \sin 2\phi + k_{zz}f^2(l_2) \\ k_{12} &= (\dot{I}_y + \dot{I}_x\dot{I}_z)(M_2 + I_{m2} - I_{y2}) - I_{y2}\ddot{\phi} \\ &+ \left((\dot{I}_y^2 - \dot{I}_x^2 + 2\dot{\phi}\dot{I}_y)I_{a2} + k_a \right) \sin 2\phi - (\dot{I}_y + \dot{I}_x\dot{I}_z)I_{a2} \cos 2\phi + k_{xz}f^2(l_2) \\ k_{21} &= (-\dot{I}_y + \dot{I}_x\dot{I}_z)(M_2 + I_{m2}) - I_{y2}\dot{I}_x\dot{I}_z \\ &+ \left((\dot{I}_y^2 - \dot{I}_x^2 + 2\dot{\phi}\dot{I}_y)I_{a2} + k_a \right) \sin 2\phi - (\dot{I}_y + \dot{I}_x\dot{I}_z)I_{a2} \cos 2\phi + k_{zx}f^2(l_2) \end{aligned} \quad (2.86)$$

- Vecteur des forces extérieures $\{\mathbf{F}\}$, dues au balourd, au mouvement de la base, et au poids propre du rotor

$$\begin{aligned}
 F_1 = & m_u df(l_1) \left(-(\ddot{\phi} + \ddot{I}_y + \dot{I}_x \dot{I}_z) \cos \phi + \left((\dot{I}_y + \dot{\phi})^2 + \dot{I}_z^2 \right) \sin \phi \right) + (M_5 + I_{m1})(\ddot{I}_z - \dot{I}_x \dot{I}_y) \\
 & + I_{y1} \dot{I}_x (\dot{I}_y + \dot{\phi}) + M_1 (\dot{I}_z (2\dot{y}_b + \dot{I}_z x_b - \dot{I}_x z_b) - \dot{I}_y (2\dot{z}_b + \dot{I}_x y_b - \dot{I}_y x_b) - \ddot{x}_b - \ddot{I}_y z_b + \ddot{I}_z y_b) \\
 & + I_{a1} \left((-\ddot{I}_z + \dot{I}_x \dot{I}_y + 2\dot{\phi} \dot{I}_x) \cos 2\phi + (-\ddot{I}_x + \dot{I}_y \dot{I}_z + 2\dot{\phi} \dot{I}_z) \sin 2\phi \right) + \cos \beta \sin \gamma M_1 g \quad (2.87)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 = & m_u df(l_1) \left((\ddot{\phi} + \ddot{I}_y - \dot{I}_x \dot{I}_z) \sin \phi + \left((\dot{I}_y + \dot{\phi})^2 + \dot{I}_x^2 \right) \cos \phi \right) - (M_5 + I_{m1})(\ddot{I}_x - \dot{I}_y \dot{I}_z) \\
 & + I_{y1} \dot{I}_z (\dot{I}_y + \dot{\phi}) + M_1 (-\dot{I}_x (2\dot{y}_b + \dot{I}_z x_b - \dot{I}_x z_b) + \dot{I}_y (2\dot{x}_b + \dot{I}_y z_b - \dot{I}_z y_b) - \ddot{z}_b + \ddot{I}_y x_b - \ddot{I}_x y_b) \\
 & + I_{a1} \left((-\ddot{I}_x + \dot{I}_y \dot{I}_z + 2\dot{\phi} \dot{I}_z) \cos 2\phi + (\ddot{I}_z + \dot{I}_x \dot{I}_y + 2\dot{\phi} \dot{I}_x) \sin 2\phi \right) - \cos \beta \cos \gamma M_1 g
 \end{aligned}$$

Les paramètres utilisés dans les équations (2.84)-(2.87) sont donnés en annexe B.

2.7.3 Modèle éléments finis

Dans ce qui suit, la méthode des éléments finis est appliquée aux éléments du système rotor-palier. Ceci permet de déterminer les équations du mouvement et d'obtenir un modèle permettant d'étudier le comportement dynamique des rotors complexes, fonctionnant à une vitesse de rotation variable, en prenant en compte les mouvements éventuels de leurs bases.

2.7.3.1 Disque

Le disque est modélisé par un élément fini contenant un nœud, situé au centre de masse du disque. Ce nœud a quatre degrés de liberté: u , w , θ et ψ ; et son vecteur déplacement est

$$\{\delta\} = [u, w, \theta, \psi]^T \quad (2.88)$$

L'application des équations de Lagrange au disque avec son balourd, dont les énergies cinétiques sont données par les équations (2.32) et (2.74), respectivement, et le travail virtuel de son poids propre par (2.36), donne

$$[M_d]\{\ddot{\delta}\} + [C_d]\{\dot{\delta}\} + [K_d]\{\delta\} = \{F_b\} + \{F_d\} + \{F_{ap}\} \quad (2.89)$$

Où

$$[M_d] = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dm} + I_{da} \cos 2\phi & -I_{da} \sin 2\phi \\ 0 & 0 & -I_{da} \sin 2\phi & I_{dm} - I_{da} \cos 2\phi \end{bmatrix}, \quad (2.90)$$

$$[C_d] = \dot{\phi}[G_{d_1}] + \dot{I}_y[G_{d_2}] \quad (2.91)$$

avec

$$[\mathbf{G}_{d_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2I_{da} \sin 2\phi & -I_{dy} - 2I_{da} \cos 2\phi \\ 0 & 0 & I_{dy} - 2I_{da} \cos 2\phi & -2I_{da} \sin 2\phi \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

$$[\mathbf{G}_{d_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 2m_d & 0 & 0 \\ -2m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2I_{dm} - I_{dy} \\ 0 & 0 & -2I_{dm} + I_{dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Et

$$[\mathbf{K}_d] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{d_1}] & [0] \\ [0] & [\mathbf{K}_{d_2}] \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

avec

$$[\mathbf{K}_{d_1}] = m_d \begin{bmatrix} -(\dot{I}_y^2 + \dot{I}_z^2) & \dot{I}_x \dot{I}_z + \ddot{I}_y \\ \dot{I}_x \dot{I}_z - \ddot{I}_y & -(\dot{I}_x^2 + \dot{I}_y^2) \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

$$[\mathbf{K}_{d_2}] = [\mathbf{K}_{dm2}] + [\mathbf{K}_{da2}^s] \sin 2\phi + [\mathbf{K}_{da2}^c] \cos 2\phi \quad (2.96)$$

$$[\mathbf{K}_{dm2}] = (I_{dm} - I_{dy}) \begin{bmatrix} \dot{I}_z^2 - \dot{I}_y^2 & -\dot{I}_x \dot{I}_z + \ddot{I}_y \\ -\dot{I}_x \dot{I}_z - \ddot{I}_y & \dot{I}_x^2 - \dot{I}_y^2 \end{bmatrix} + I_{dy} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \dot{I}_y & \ddot{I}_y \\ \ddot{\phi} & \dot{\phi} \dot{I}_y \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$[\mathbf{K}_{da2}^s] = I_{da} \begin{bmatrix} \ddot{I}_y - \dot{I}_x \dot{I}_z & \dot{I}_x^2 - \dot{I}_y^2 - 2\dot{\phi} \dot{I}_y \\ \dot{I}_x^2 - \dot{I}_y^2 - 2\dot{\phi} \dot{I}_y & -\ddot{I}_y - \dot{I}_x \dot{I}_z \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$[\mathbf{K}_{da2}^c] = I_{da} \begin{bmatrix} \dot{I}_y^2 - \dot{I}_z^2 + 2\dot{\phi} \dot{I}_y & \ddot{I}_y + \dot{I}_x \dot{I}_z \\ \ddot{I}_y + \dot{I}_x \dot{I}_z & \dot{I}_x^2 - \dot{I}_y^2 - 2\dot{\phi} \dot{I}_y \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

$$\{\mathbf{F}_b\} = m_u d \begin{Bmatrix} -(\dot{\phi} + \dot{I}_y)^2 - \dot{I}_z^2 \\ -\ddot{\phi} - \ddot{I}_y + \dot{I}_x \dot{I}_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin(\phi + \delta) + m_u d \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} + \ddot{I}_y + \dot{I}_x \dot{I}_z \\ -(\dot{\phi} + \dot{I}_y)^2 - \dot{I}_x^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\phi + \delta) \quad (2.100)$$

$$\{\mathbf{F}_d\} = - \begin{Bmatrix} m_d(\lambda_1 + \lambda_3 y_d) \\ m_d(\lambda_2 + \lambda_4 y_d) \\ -I_p \dot{\Gamma}_z (\dot{\Gamma}_y + \dot{\phi}) + I_d \lambda_4 \\ I_p \dot{\Gamma}_x (\dot{\Gamma}_y + \dot{\phi}) - I_d \lambda_3 \end{Bmatrix} - I_{da} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_5 \\ -\lambda_6 \end{Bmatrix} \sin 2\phi + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_6 \\ -\lambda_5 \end{Bmatrix} \cos 2\phi \right) \quad (2.101)$$

$\{\mathbf{F}_d\}$ et $\{\mathbf{F}_b\}$ sont obtenus par l'application des équations de Lagrange à l'énergie cinétique du disque et du balourd respectivement.

Le vecteur représentant le poids propre du disque est obtenu, à partir de l'expression du travail virtuel (2.36), en tenant compte du vecteur déplacement associé au disque (2.88) ; le vecteur ainsi obtenu s'écrit

$$\{\mathbf{F}_{dp}\} = -m_d g \begin{Bmatrix} -\cos\beta \sin\gamma \\ \cos\beta \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.102)$$

Les paramètres utilisés dans l'expression de $\{\mathbf{F}_d\}$ sont donnés en annexe D

2.7.3.2 Arbre

L'arbre est modélisé par une poutre de section constante.



Figure 2.11 Élément poutre à 4 d.d.l

Le vecteur des déplacements nodaux de l'élément est

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T \quad (2.103)$$

qui inclut les déplacements

$$\{\boldsymbol{\delta}_u\} = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \quad (2.104)$$

$$\{\boldsymbol{\delta}_w\} = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \quad (2.105)$$

L'élément fini est construit à partir de

$$\{\mathbf{u}\} = \langle \mathbf{N}_1(y) \rangle \{\delta_{\mathbf{u}}\} \quad (2.106)$$

$$\{\mathbf{w}\} = \langle \mathbf{N}_2(y) \rangle \{\delta_{\mathbf{w}}\} \quad (2.107)$$

Où

$$\langle \mathbf{N}_1(y) \rangle = \langle N_1 \quad -N_2 \quad N_3 \quad -N_4 \rangle \quad (2.108)$$

$$\langle \mathbf{N}_2(y) \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \quad (2.109)$$

avec

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} \\ N_2 &= -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \\ N_3 &= \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} \\ N_4 &= \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \end{aligned} \quad (2.110)$$

les fonctions de forme d'un élément de poutre en flexion, selon la théorie d'Euler-Bernoulli.

L'application des équations de Lagrange à l'élément d'arbre, dont l'énergie cinétique est donnée par l'équation (2.47), l'énergie de déformation par (2.66) et le travail virtuel de son poids propre par (2.69), donne

$$[\mathbf{M}_s] \{\ddot{\delta}\} + [\mathbf{C}_s] \{\dot{\delta}\} + [\mathbf{K}_s] \{\delta\} = \{\mathbf{F}_s\} + \{\mathbf{F}_{sp}\} \quad (2.111)$$

Où

$$[\mathbf{M}_s] = [\mathbf{M}_t] + [\mathbf{M}_r] + \chi ([\mathbf{M}_1] \sin 2\phi - [\mathbf{M}_2] \cos 2\phi) \quad (2.112)$$

$$[\mathbf{C}_s] = 2\dot{\phi}[\mathbf{G}_1] + 2\dot{I}_y[\mathbf{G}_2] + 2\dot{\phi}\chi([\mathbf{M}_2] \sin 2\phi + [\mathbf{M}_1] \cos 2\phi) \quad (2.113)$$

$$[\mathbf{K}_s] = [\mathbf{K}_s^0] + \chi([\mathbf{K}_s^s] \sin 2\phi + [\mathbf{K}_s^c] \cos 2\phi) \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_s^0] &= [\mathbf{K}_{st1}] + [\mathbf{K}_1] - [\mathbf{K}_3] + \dot{I}_y[\mathbf{M}_2^c] + \dot{I}_x\dot{I}_z[\mathbf{M}_3] + 2\dot{I}_y(\dot{\phi} + \dot{I}_y)[\mathbf{M}_r] \\ &\quad - (\dot{I}_y + \dot{I}_x\dot{I}_z)[\mathbf{M}_1] + \ddot{\phi}[\mathbf{K}_5] \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$[\mathbf{K}_s^s] = ([\mathbf{K}_{st2}] - (\dot{I}_x^2 - \dot{I}_y^2 - 2\dot{I}_y\dot{\phi})[\mathbf{M}_1] - \dot{I}_x\dot{I}_z[\mathbf{M}_r] - \dot{I}_y[\mathbf{M}_2]) \quad (2.116)$$

$$[\mathbf{K}_s^c] = ([\mathbf{K}_{st3}] + [\mathbf{K}_2] + (\ddot{I}_y + \dot{I}_x\dot{I}_z)[\mathbf{M}_1] + 2\dot{I}_y\dot{\phi}[\mathbf{M}_2]) \quad (2.117)$$

$$\chi = \frac{I_a}{I_m} \quad (2.118)$$

où χ est le rapport des inerties déviatorique et moyenne. Il est nul dans le cas d'un arbre symétrique.

Les matrices $[\mathbf{K}_{st1}]$, $[\mathbf{K}_{st2}]$ et $[\mathbf{K}_{st3}]$ sont obtenues par dérivation de l'énergie de déformation par rapport au vecteur déplacement.

Concernant le vecteur $\{\mathbf{F}_{sp}\}$, représentant le poids propre d'un élément d'arbre, l'expression du travail virtuel étant donnée par l'équation (2.69) et son vecteur déplacement par l'équation (2.103), le vecteur s'écrit donc dans le cas d'une section uniforme

$$\{\mathbf{F}_{sp}\} = -\frac{1}{2}\rho ALg\cos\beta \begin{Bmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \\ -\sin\gamma \\ \cos\gamma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.119)$$

Toutes les autres matrices ainsi que le vecteur force $\{\mathbf{F}_{sh}\}$ sont obtenus par application des équations de Lagrange à l'énergie cinétique de l'arbre.

Les matrices et les vecteurs figurant dans les équations (2.112)-(2.117), ainsi que les paramètres utilisés dans l'expression de $\{\mathbf{F}_s\}$ sont donnés en annexe D.

2.7.3.3 Paliers

Les forces dans les paliers sont données par l'expression

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} & 0 & 0 \\ k_{zx} & k_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} & 0 & 0 \\ c_{zx} & c_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

La première matrice est la matrice de rigidité et la seconde, la matrice d'amortissement visqueux. Ces matrices sont généralement asymétriques et peuvent dépendre de la vitesse de rotation du rotor [25], [40].

2.7.3.4 Equations du mouvement

Après assemblage des équations des éléments constituant le rotor : disques, arbre et balourd et de l'équation du palier, l'équation de mouvement du système rotor-palier s'écrit

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{F}(t)\} \quad (2.121)$$

Où

$\{\mathbf{q}(t)\}$ est un vecteur contenant tous les déplacements nodaux,

$[\mathbf{M}]$ est la matrice masse du rotor,

$[\mathbf{C}]$ est la matrice incluant l'effet gyroscopique, l'amortissement de palier et l'effet du mouvement de la base,

$[\mathbf{K}]$ est la matrice de rigidité incluant la rigidité en flexion de l'arbre, l'effet du mouvement de la base, l'effet de la variation de vitesse et les rigidités de paliers. Finalement,

$\{\mathbf{F}(t)\}$ est le vecteur force global représentant le poids propre du rotor, l'effet de balourd, des forces d'inertie dues au mouvement de la base et qui dépend de la vitesse et de l'accélération de rotation du rotor.

Il convient bien de noter que la différence entre les équations de mouvement obtenues dans ce travail et celles obtenues dans d'autres travaux prenant en compte l'effet du mouvement de la base [10]-[16], [20]-[22], [34], [69], est que la vitesse de rotation ici est variable et par conséquent, des termes contenant l'accélération de la rotation venant des équations (2.97), (2.100) and (2.115), sont présents.

2.8 Méthode de Newmark pour la résolution des équations de mouvement

La méthode de Newmark [40] est utilisée pour résoudre les systèmes d'équations différentielles obtenus pour chacun des deux modèles. Elle se résume comme suit :

En supposant que l'accélération moyenne soit constante, i.e.

$$\{\mathbf{q}(t + \Delta t)\} = \{\mathbf{q}(t)\} + \Delta t\{\dot{\mathbf{q}}(t)\} + \frac{\Delta t^2}{4}(\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + \{\ddot{\mathbf{q}}(t + \Delta t)\}) \quad (2.122)$$

Et

$$\{\dot{\mathbf{q}}(t + \Delta t)\} = \{\dot{\mathbf{q}}(t)\} + \frac{\Delta t}{2}(\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + \{\ddot{\mathbf{q}}(t + \Delta t)\}) \quad (2.123)$$

L'accélération à l'instant $t + \Delta t$ peut être déduite de l'équation (2.122)

$$\{\ddot{\mathbf{q}}(t + \Delta t)\} = \frac{4}{\Delta t^2}(\{\mathbf{q}(t + \Delta t)\} - \{\mathbf{q}(t)\} - \Delta t\{\dot{\mathbf{q}}(t)\}) - \{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} \quad (2.124)$$

L'introduction de (2.123) dans (2.122) donne

$$\{\dot{\mathbf{q}}(t + \Delta t)\} = \frac{2}{\Delta t}(\{\mathbf{q}(t + \Delta t)\} - \{\mathbf{q}(t)\}) - \{\dot{\mathbf{q}}(t)\} \quad (2.125)$$

La substitution des équations (2.122) et (2.123) dans (2.121) donne

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}(t + \Delta t) + \mathbf{K}(t + \Delta t)\right)\{\mathbf{q}(t + \Delta t)\} = \\ \left(\frac{4\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C}(t + \Delta t)\right)\{\mathbf{q}(t)\} + \left(\frac{4\mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{C}(t + \Delta t)\right)\{\dot{\mathbf{q}}(t)\} + \mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + \mathbf{F}(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (2.126)$$

Connaissant les déplacements, vitesses et accélérations du système à l'instant t , l'équation (2.126) permet de déterminer les déplacements à l'instant $t + \Delta t$, l'équation (2.125) les vitesses et l'équation (2.124) les accélérations au même instant.

2.9 Conclusion

Ce chapitre traite de la modélisation des éléments du système rotor-palier; à savoir : un disque rigide, un arbre flexible, un balourd ponctuel situé sur le disque et un palier caractérisé par ses coefficients de rigidité et d'amortissement. La modélisation prend en compte la possibilité d'une variation de la vitesse de rotation du rotor et d'un mouvement général de la base du rotor supposée rigide. Les dissymétries géométriques éventuelles du disque et de l'arbre sont aussi prises en compte. Les énergies, cinétique et de déformation et les travaux virtuels des différents éléments du rotor sont déterminés pour être utilisés par la suite afin d'obtenir les équations du mouvement du système.

L'application des équations de Lagrange a permis de déterminer les équations du mouvement pour deux modèles proposés. Le premier, basé sur l'approximation de Rayleigh-Ritz, est relativement simple et permet l'étude des rotors simples pour mettre en évidence les phénomènes rencontrés dans la dynamique des rotors. Il permet de diminuer

considérablement la taille du système d'équations différentielles et rend ainsi leur résolution numérique relativement rapide. Le deuxième modèle est un modèle éléments finis. Il donne une discrétisation et description plus complètes du système à étudier grâce à un grand nombre de degrés de liberté. Il est utilisé afin de prévoir le comportement dynamique des rotors complexes et industriels. La méthode de résolution pas à pas de Newmark est ensuite présentée en vue de son application à la résolution des équations différentielles obtenues pour chacun des deux modèles.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 Abdul Wahab A.M, Rasid Z.A, Abu A, Mohd Noor Rudin N.F, Parametric instability of shaft with discs. AEROS Conference 2017, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 270, 2017.
- 2 Al-Bedoor B. O. Transient torsional and lateral vibrations of unbalanced rotors with rotor-to-stator rubbing. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 229(3):627-645, 2000.
- 3 Allezy A, Contribution à l'analyse du comportement dynamique des machines tournantes en régime transitoire- Approches métrique et expérimentale. Thèse LDMS. Lyon : INSA de Lyon, 219 p, 2006.
- 4 Asgarisabet M., Ghazavi M. R., Shahgholi M. Stability and bifurcations analysis of rotating shafts with base excitations. *Nonlinear Dynamics*, 78: 2847-2859, 2014
- 5 Bolotin, V. V., The dynamic stability of elastic systems. Holden-Day.1964
- 6 Boru F.E. Numerical and Experimental Response and Stability Investigations of Anisotropic Rotor-Bearing Systems, Kassel University Press GmbH, 2010.
- 7 Bouziani R., Ouelaa N., Simulation of the Dynamic Behavior of a Rotor Subject to Base Motion under Variable Rotational Speed, *Mechanics & Industry*, 18, 308, 2017.
- 8 Cao J., Transient Analysis of Flexible Rotors with Nonlinear Bearings, Dampers and External Forces. Dissertation, Faculty of the School of Engineering and Applied Science. University of Virginia, 2012
- 9 Childs D. Turbomachinery Rotordynamics : Phenomena, Modeling, and Analysis. Wiley-Interscience, 1993.
- 10 Dakel M., Baguet S., Dufour R., Steady state dynamic behavior of an on-board rotor under combined base motions, *Journal of Vibration and Control*, 20: 2254-2287, 2014
- 11 Dakel M., Baguet S., Dufour R., Nonlinear dynamics of a support-excited flexible rotor with hydrodynamic journal bearings, *Journal of sound and vibration*, 333(10): 2774-2799, 2014.
- 12 Dakel M., Baguet S., Dufour R., Dynamique d'un rotor embarqué soumis à des excitations combinées de la base. Actes du 20^{ème} Congrès Français de Mécanique, 29 août au 2 septembre 2011, Besançon, France.

- 13 Dakel M., Baguet S., Dufour R., Dynamic analysis of a harmonically excited on-board rotor bearing system. Proceedings of the Tenth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, 11-13 September 2012, London, United Kingdom.
- 14 Dakel M., Baguet S., Dufour R., Vibrations non linéaires d'un rotor embarqué monté sur paliers hydrodynamiques. Actes du 21ème Congrès Français de Mécanique, 26-30 août 2013, Bordeaux, France.
- 15 Dakel M., Stabilité et dynamique non linéaire des rotors embarqués, thèse INSA-Lyon, 2014.
- 16 Das A.S., Dutt J.K., Ray K., Active vibration control of unbalanced flexible rotor-shaft systems parametrically excited due to base motion, *Applied Mathematical Modelling*, 34 (9):2353-2369, 2010.
- 17 Defilippi M. Méthodes numériques pour les systèmes différentiels à coefficients périodiques : application à un rotor industriel. (Rapport de recherche). Publications du LMA, numéro 135, LMA. 1991, 70 p.
- 18 Demaily D. Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel : application à la dynamique rotor. Thèse LTDS. Lyon : Ecole Centrale de Lyon, 213 p, 2003.
- 19 Diken H., Alnefaie K., Startup Dynamic Behaviour of a Jeffcott Rotor. *International Journal of Acoustics and Vibration*, 10 (2) : 83-88, 2005
- 20 Driot N., Lamarque C.H., Berlioz A., Theoretical and Experimental Analysis of a Base Excited Rotor, *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Trans of ASME, 1(4):257-263, 2006.
- 21 Duchemin M. Contribution à l'étude du comportement dynamique d'un rotor embarqué. Thèse LMSt. Lyon : INSA de Lyon, 128 p, 2003.
- 22 Duchemin M., Berlioz A., Ferraris G., Dynamic Behavior and Stability of a Rotor under Base Excitations, *Journal of Vibration and Acoustics*, 128(5):576-585, 2006.
- 23 El-Saeidy F.M.A, Sticher F., Dynamics of a rigid rotor linear/nonlinear bearings system subject to rotating unbalance and base excitations, *Journal of Vibration and Control* 16(3):403-438, 2010.
- 24 Floquet, G. Sur la théorie des équations différentielles. *Annales scientifiques de l'ENS*, 8 :3-132, 1879
- 25 Frêne J., Nicolas, D., Degueurce, B., Berthe, D., Godet, M. *Lubrification hydrodynamique : Paliers et butées*. Ed.Eyrolle, 1990.

- 26 Friswell M.I., Penny J.E.T., Garvey S.D., Lees A.W. Dynamics of Rotating Machines, Cambridge University Press, 2010
- 27 Genta G. Dynamics of Rotating Systems, Springer, New York, 2005.
- 28 Genta G. Vibration of Structures and Machines: Practical Aspects, Springer-Verlag New York, Inc., 1999.
- 29 Genta G. Vibration Dynamics and Control, Springer Science+Business Media, LLC, 2009.
- 30 Genta G. Whirling of Unsymmetrical Rotors: A Finite Element Approach Based on Complex Coordinates. *Journal of Sound and Vibration* 124(1), 27-53,1988
- 31 Genta G, Delprete C., Acceleration Through Critical Speeds of an Anisotropic, Non-Linear, Torsionally Stiff Rotor with Many Degrees of Freedom, *Journal of Sound and Vibration* 180(3) : 369-386, 1995.
- 32 Han Q., Chu F., Dynamic response of cracked rotor-bearing system under time-dependent base movements, *Journal of Sound and Vibration*, 332(25):6847–6870, 2013.
- 33 Han Q., Chu F., Dynamic behaviors of a geared rotor system under time-periodic base angular motions, *Mechanism and Machine Theory*, 78:1–14, 2014.
- 34 Han Q., Chu F., Parametric instability of flexible rotor-bearing system under time-periodic base angular motions, *Applied Mathematical Modelling*, 39(15):4511–4522, 2015.
- 35 Hill G. W., On the Part of the Motion Of The Lunar Perigee Which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon, *Acta Mathematica*, 8(1):1-36, 1886.
- 36 Irretier, H, Vibrations in Variable Speed Machines, in: CISM Courses and Lectures No 297 : Rotordynamics 2, Problems in Turbomachinery, edited by N.F.Riege, Springer-Verlag Wien New York, 571-586, 1988
- 37 Kimball, A. L., Internal friction theory of shaft whirling, *General Electric Review*, 27(4): 244-251, 1924.
- 38 Kirk R. G., Gunter E. J., Transient Response of Rotor-Bearing Systems. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 96 (2): 682–690, 1974
- 39 Krämer E. Dynamics of Rotors and Foundations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1993.
- 40 Lalanne M., Ferraris G. Rotordynamics prediction in engineering, John Wiley, New York, 1998.

-
- 41 Lazarus, A., Influence des défauts sur le comportement vibratoire linéaire des systèmes tournants. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, 129p, 2009.
 - 42 Lazarus A., Prabel B., Combescure D., A 3D finite element model for the vibration analysis of asymmetric rotating machines, *Journal of Sound and Vibration*, 329 (18):3780-3797, 2010.
 - 43 Lazarus A., Thomas O. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *C.R. Mec.*, 338(9):510 – 517, 2010.
 - 44 Lee A. S., Kim B. O., Kim Y.-C., A finite element transient response analysis method of a rotor bearing system to base shock excitations using the state-space Newmark scheme and comparisons with experiments, *Journal of Sound and Vibration* 297 (3-5): 595-615, 2006.
 - 45 Lee C. F., Tan Y. W., Krodkiwski J. M. Numerical Study of an Anisotropically Supported Rotor with Parametric Excitation, *The Institution of Engineers, Malaysia*, 72(3): 35-45, 2009
 - 46 Lee C. W. *Vibration Analysis of Rotors*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993
 - 47 Lin F., Meng G., Study on the dynamics of a rotor in a manoeuvring aircraft, *Trans. ASME J. Vib. Acoust.* 125, 324–327, 2003.
 - 48 Meirovitch L. *Computational Methods in Structural Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1980.
 - 49 Meirovitch L. *Principles and Techniques of Vibrations*. Pearson Education, 1996.
 - 50 Muszynska A., *Rotordynamics*. Boca Raton : Taylor & Francis, 2005.
 - 51 Nandi, A. and Neogy, S. An efficient scheme for stability analysis of finite element asymmetric rotor models in a rotating frame. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41 :1343-1364, 2005
 - 52 Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*, Wiley Interscience, New York, 1993.
 - 53 Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear Oscillations*. Wiley-Interscience, 1995.
 - 54 Nelson F.C. A brief history of early rotor dynamics, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 37, no. 6, pp. 8–11, 2003.
 - 55 Newkirk, B.L. and Taylor, H.D. Shaft whirling due to oil action in journal bearings. *General Electric Revue*, 28 (7), 559–568, 1925.
 - 56 Oncescu F. *Etude des systèmes Dynamiques à Caractéristiques Périodiques et des*

- Rotors Asymétriques, Mémoire de Maitrise ès Sciences Appliquées, Ecole polytechnique de Montréal, 1998
- 57 Oncescu F., Lakis A. A., Ostiguy G., Investigation of the stability and steady state response of asymmetric rotors, using finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration* 245(2), 303-328, 2001.
- 58 Peletan L. Stratégie de modélisation simplifiée et de résolution accélérée en dynamique non linéaire des machines tournantes-Application au contact rotor-stator. Thèse LaMCoS. Lyon : INSA de Lyon, 163 p, 2012.
- 59 Peletan L., Baguet S., Torkhani M., Richardet G. J. Calcul de la Stabilité de Vibrations Périodiques de Structures : Etude Comparative de Quelques Méthodes Numériques. 11e Colloque National en Calcul des Structures. CSMA 2013
- 60 Rao S.S. Mechanical vibrations. Pearson Education Inc, Prentice Hall, 5th ed., 2011.
- 61 Ronceray F., Etude des instabilités subsynchrones sur machines tournantes. Rapport de stage de DEA Mécanique des solides. Université Paris VI, 1994.
- 62 Roques S. Modélisation du comportement dynamique couplé rotor-stator d'une turbine en situation accidentelle, Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes et Université de Nantes, 2007.
- 63 Sino, R., Comportement Dynamique et Stabilité Des Rotors: Application Aux Rotor Composites, Thèse de doctorat, INSA LYON, 2007.
- 64 Slane J., Tragesser S., Analysis of Periodic Nonautonomous Inhomogeneous systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 11 (2): 183–198, 2011.
- 65 Sousa M.S. Jr., Cavalini A.A. Jr., Steffen V. Jr., Analysis of the Dynamic Behavior of a Rotor System under Base Excitation. 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering, December 6-11, 2015, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- 66 Villa C. V. S. Dynamique non Linéaire des Rotors : Applications Numériques et Expérimentales à un Rotor Flexible, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2005.
- 67 Wang R., Guo X., Wang Y. Nonlinear analysis of rotor system supported by oil lubricated bearings subjected to base movements. *Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science* 230(4) : 543-558
- 68 Yamamoto T., Ishida Y., Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications. Wiley-VCH Verlag & Co. KGaA, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany, 2012
- 69 Yi Y., Qiu Z., Han Q., The effect of Time-Periodic Base Angular Motions upon

-
- Dynamic Response of Asymmetric Rotor Systems. *Advances in Mechanical Engineering*. 10(3): 1-12, 2018.
- 70 Yu T J., Zhou S., Yang X. D., Zhang W. Global dynamics of a flexible asymmetrical rotor. *Nonlinear Dynamics* · November 2017.
- 71 Yusof Z., Z. Rasid A., Numerical modelling of parametric instability problem for composite plate using finite element method. *AIP Conference Proceedings* 1750, 030044, 2016.
- 72 Zapomel J., Ferfecki P., A computational investigation of vibration attenuation of a rigid rotor turning at a variable speed by means of short magnetorheological dampers. *Applied and Computational Mechanics* 3, 411–422, 2009
- 73 Zhou S., Shi J., The Analytical Imbalance Response of Jeffcott Rotor During Acceleration. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*. Vol 123 : 299-302, 2001.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, une modélisation de rotor monté sur une base rigide en mouvement, et tournant à une vitesse variable est réalisée. Le mouvement de la base est général (3 rotations et 3 translations)

Tout d'abord les énergies cinétiques du disque, de l'arbre et du balourd ainsi que l'énergie de déformation de l'arbre sont calculées. Les travaux virtuels des efforts du palier et des poids propre du disque et de l'arbre sont aussi déterminés.

Deux modèles sont développés

- un modèle simple basé sur l'approximation de Rayleigh-Ritz, pour l'étude des systèmes simples et mettre en évidence quelques phénomènes rencontrés dans la dynamique des rotors ; et
- un modèle éléments finis pour l'étude des systèmes complexes.

L'application des équations de Lagrange a permis de déterminer les équations du mouvement pour chacun des deux modèles.

Ensuite, une étude du comportement dynamique des rotors soumis à une excitation paramétrique a été réalisée en utilisant le modèle de Rayleigh-Ritz. Deux sources d'excitation paramétrique sont considérées : la dissymétrie du rotor et le mouvement de rotation sinusoïdale de la base. Pour chacun de ces cas, les équations du mouvement sont des équations différentielles à coefficients périodiques. La méthode de Hill a été utilisée pour la détermination des valeurs propres, et prédire ainsi les zones d'instabilité. Elle a permis aussi la détermination de la réponse aux excitations de balourd, de la base et du poids propre du rotor.

La simulation numérique des rotors embarqués en régime stationnaire ou lors d'une variation de vitesse est ensuite considérée. Deux programmes Matlab sont élaborés, correspondant chacun à un des deux modèles développés.

Pour valider le modèle éléments finis, des simulations de configurations particulières de rotor tournant à une vitesse constante sont présentées et les résultats sont comparés avec ceux obtenus dans d'autres travaux. Une totale concordance est observée.

De plus, des simulations du comportement dynamique des rotors embarqués tournant à une vitesse variable pour différents cas du mouvement de la base sont présentées.

Dans le cas d'une variation linéaire de la vitesse de rotation, pour une rotation ou une

translation sinusoïdale de la base, il a été noté, dans la plage de fréquences considérée, l'existence de deux résonances : la première est excitée par le balourd et elle se produit toujours au même instant, tandis que la deuxième est excitée par le mouvement de la base et elle change de position dans l'axe du temps en fonction de la fréquence du mouvement de la base.

Pour une variation exponentielle de la vitesse de rotation, des simulations ont été faites dans le cas d'une base fixe ou mobile, où les spectrogrammes correspondant aux déplacements horizontal et vertical montrent la contribution des différentes fréquences dans les réponses suivant les axes correspondants.

Des simulations numériques utilisant le modèle de Rayleigh-Ritz sont aussi réalisées et les résultats sont comparés avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Il est à noter que, pour une vitesse de rotation constante du rotor, les résultats obtenus sont qualitativement identiques (les orbites sont pratiquement les mêmes) et quantitativement peu différents : l'écart d'amplitude ne dépassant pas 5%.

Pour une vitesse de rotation variable, il a été constaté que la résonance due au balourd se produit pratiquement au même instant pour les deux modèles (à un petit écart près). Cependant, des écarts importants sont observés entre les instants où se produisent les résonances dues au mouvement de la base, pour les deux modèles ; Ce qui nous impose plus de précaution lorsqu'on utilise le modèle de Rayleigh-Ritz pour la prédiction du comportement dynamique des rotors soumis à une excitation de la base, et particulièrement lorsque la vitesse de rotation varie.

Une autre limitation de l'utilisation du modèle de Rayleigh-Ritz est lorsqu'un mode supérieur est excité par le mouvement de la base : dans ce cas le modèle de Rayleigh-Ritz ne peut détecter cette résonance.

Le code éléments finis développé dans ce travail est un outil important pour l'étude des rotors embarqués tournant à une vitesse constante ou variable et soumis à différentes combinaisons du mouvement de la base

Comme suite à ce travail, une validation expérimentale des résultats obtenus est recommandée.

Aussi, en vue d'obtenir un modèle plus précis, une prise en compte des non-linéarités dues aux grandes déformations en flexion que l'arbre peut subir est préconisée, surtout lorsque le rotor fonctionne au voisinage des vitesses critiques ou en les traversant.

3

Dynamique et stabilité des rotors sous l'effet d'une excitation paramétrique

Sommaire

3.1	Introduction.	45
3.2	Rotor dissymétrique.	45
3.2.1	Equation du mouvement.	45
3.2.2	Méthode de Hill pour la détermination des valeurs et des vecteurs propres.	46
3.2.3	Vibrations dues au balourd.	49
3.2.4	Vibrations dues au poids propre.	50
3.3	Rotor symétrique soumis à une rotation sinusoïdale de sa base.	51
3.3.1	Equation du mouvement.	51
3.3.2	Méthode de Hill pour la détermination des valeurs et des vecteurs propres.	52
3.3.3	Vibrations dues au balourd.	53
3.3.4	Vibrations dues au mouvement de rotation sinusoïdale de la base.	53
3.3.5	Vibrations dues au poids propre.	54
3.4	Etude numérique.	55
3.4.1	Rotor dissymétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides.	55
3.4.2	Rotor dissymétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides et un palier auxiliaire élastique.	60
3.4.3	Rotor symétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base soumise à une rotation sinusoïdale.	64
3.5	Conclusion.	71

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des rotors soumis à une excitation paramétrique. Les équations du mouvement sont des équations différentielles du second ordre à coefficients périodiques et ne peuvent pas être donc résolues en utilisant les méthodes de résolution standards. La méthode de Hill [6], [35] permet de résoudre de telles équations pour la détermination des valeurs et des vecteurs propres, l'analyse de stabilité, ainsi que pour la détermination de la réponse à une excitation harmonique et au poids propre du rotor.

Dans ce qui suit, la méthode de Hill⁽¹⁾ est appliquée aux équations du mouvement de rotor, pour deux cas d'excitation paramétrique :

- Une dissymétrie du rotor,
- Une rotation sinusoïdale de la base du rotor autour de l'axe z_b .

Les équations de mouvement sont obtenues après les simplifications nécessaires, correspondant aux cas étudiés, des équations issues du modèle de Rayleigh-Ritz obtenues dans le chapitre précédant. Elles s'écrivent sous la forme

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{F\} \quad (3.1)$$

3.2 Rotor dissymétrique

3.2.1 Equation du mouvement

Pour l'étude du comportement dynamique du rotor dissymétrique, les équations du mouvement sont obtenues après annulation des mouvements de la base ($x_b = y_b = z_b = 0$ et $\dot{x}_b = \dot{y}_b = \dot{z}_b = 0$), et en considérant la vitesse de rotation du rotor constante ($\dot{\phi} = \Omega$, soit $\phi = \Omega t$). Les équations du mouvement ainsi obtenues s'écrivent sous la forme matricielle (3.1), où

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_2 + I_{m2} - I_{a2} \cos 2\Omega t & I_{a2} \sin 2\Omega t \\ I_{a2} \sin 2\Omega t & M_2 + I_{m2} + I_{a2} \cos 2\Omega t \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

est la a matrice masse, et

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 2I_{a2}\Omega \sin 2\Omega t & -\Omega I_{y2} + 2I_{a2}\Omega \cos 2\Omega t \\ \Omega I_{y2} + 2I_{a2}\Omega \cos 2\Omega t & -2I_{a2}\Omega \sin 2\Omega t \end{bmatrix} + [c_b]f^2(l_2) \quad (3.3)$$

⁽¹⁾ La formulation générale de la méthode de Hill est développée en annexe C

est la matrice regroupant l'effet gyroscopique et l'amortissement du palier,

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k - k_a \cos 2\Omega t & k_a \sin 2\Omega t \\ k_a \sin 2\Omega t & k + k_a \cos 2\Omega t \end{bmatrix} + [k_b]f^2(l_2) \quad (3.4)$$

est la matrice regroupant la rigidité de l'arbre et du palier,

et

$$\{F\} = \{F_b\} + \{F_p\} \quad (3.5)$$

est le vecteur des forces extérieures regroupant la force de balourd et le poids propre

où

$$\{F_b\} = m_u df(l_1) \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t + \delta) \\ \cos(\Omega t + \delta) \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

est le vecteur force de balourd, et

$$\{F_p\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -M_1 g \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

est le vecteur représentant le poids propre du rotor.

Il est à noter que l'équation du mouvement obtenue est une équation différentielle du second ordre à coefficients périodiques, dont la résolution sera effectuée en utilisant la méthode de Hill.

3.2.2 Méthode de Hill pour la détermination des valeurs et des vecteurs propres

L'équation différentielle homogène du rotor dissymétrique est obtenue en annulant le second membre de l'équation (3.1), et s'écrit

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}] \{\dot{q}\} + [\mathbf{K}] \{q\} = \{0\} \quad (3.8)$$

Ecrivons chacune des matrices périodiques de l'équation (3.8) comme la somme d'une matrice moyenne constante et de deux matrices déviatoriques harmoniques⁽²⁾. Ainsi pour la matrice masse, on a

⁽²⁾ En utilisant les identités $\cos \bar{\Omega}t = \frac{e^{i\bar{\Omega}t} + e^{-i\bar{\Omega}t}}{2}$; $\sin \bar{\Omega}t = -i \frac{e^{i\bar{\Omega}t} - e^{-i\bar{\Omega}t}}{2}$

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{M}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{M}_0] + [\mathbf{M}_p]e^{i\bar{\Omega}t} \quad (3.9)$$

Avec
$$\bar{\Omega} = 2\Omega \quad (3.10)$$

Ω , étant la vitesse de rotation du rotor,

$$[\mathbf{M}_0] = \begin{bmatrix} M_2 + I_{m2} & 0 \\ 0 & M_2 + I_{m2} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$[\mathbf{M}_m] = \frac{I_{a2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Et
$$[\mathbf{M}_p] = \frac{I_{a2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Pour la matrice regroupant l'effet gyroscopique et l'amortissement du palier

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{C}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{C}_0] + [\mathbf{C}_p]e^{i\bar{\Omega}t} \quad (3.14)$$

Avec

$$[\mathbf{C}_0] = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega I_{y2} \\ \Omega I_{y2} & 0 \end{bmatrix} + [c_b]f^2(l_2), \quad (3.15)$$

$$[\mathbf{C}_m] = I_{a2} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Et
$$[\mathbf{C}_p] = I_{a2} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Et pour la matrice de rigidité

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_p]e^{i\bar{\Omega}t} \quad (3.18)$$

Avec

$$[\mathbf{K}_0] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} + [k_b]f^2(l_2), \quad (3.19)$$

$$[\mathbf{K}_m] = \frac{k_a}{2} \begin{bmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Et
$$[\mathbf{K}_p] = \frac{k_a}{2} \begin{bmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Pour résoudre le problème aux valeurs propres associé à l'équation homogène (3.8), une solution périodique est supposée de la forme

$$\{q\} = \{\Phi\}e^{\lambda t} \quad (3.22)$$

Où

$$\{\Phi\} = \{\Phi(t)\} = \{\Phi(t + \bar{T})\} \quad (3.23)$$

Avec
$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (3.24)$$

En calculant les dérivées de l'équation (3.22) par rapport au temps, et en les insérant dans l'équation (3.8) tout en tenant compte des équations (3.9), (3.14) et (3.18), on obtient

$$\begin{aligned} & ([\mathbf{M}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{M}_0] + [\mathbf{M}_p]e^{i\bar{\Omega}t})(\{\ddot{\Phi}\} + 2\lambda\{\dot{\Phi}\} + \lambda^2\{\Phi\}) \\ & + ([\mathbf{C}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{C}_0] + [\mathbf{C}_p]e^{i\bar{\Omega}t})(\{\Phi\}\lambda + \{\dot{\Phi}\}) \\ & + ([\mathbf{K}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_p]e^{i\bar{\Omega}t})\{\Phi\} = \{0\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Comme la solution est supposée périodique, le vecteur $\{\Phi\}$ peut être développé en séries de Fourier comme

$$\{\Phi\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (3.26)$$

La substitution de l'équation (3.26) et de ses dérivées dans (3.25) donne

$$\begin{aligned} & ([\mathbf{M}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{M}_0] + [\mathbf{M}_p]e^{i\bar{\Omega}t}) \sum_{u=-\infty}^{\infty} (-u^2\bar{\Omega}^2 + 2\lambda iu\bar{\Omega} + \lambda^2)\{\Phi_u\}e^{iu\bar{\Omega}t} \\ & + ([\mathbf{C}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{C}_0] + [\mathbf{C}_p]e^{i\bar{\Omega}t}) \sum_{u=-\infty}^{\infty} (iu\bar{\Omega} + \lambda)\{\Phi_u\}e^{iu\bar{\Omega}t} \\ & + ([\mathbf{K}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_p]e^{i\bar{\Omega}t}) \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u\}e^{iu\bar{\Omega}t} = \{0\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Pour que l'équation (3.27) soit vérifiée, il faut que la somme de tous les termes ayant des facteurs exponentiels de même exposant soit nulle. A partir de cette condition, les équations suivantes sont obtenues

$$(\lambda^2[\bar{\mathbf{M}}] + \lambda[\bar{\mathbf{C}}] + [\bar{\mathbf{K}}])\{\bar{\Phi}\} = \{0\} \quad (3.28)$$

Les matrices $[\bar{\mathbf{M}}]$, $[\bar{\mathbf{C}}]$ et $[\bar{\mathbf{K}}]$, ainsi que le vecteur $\{\bar{\Phi}\}$ sont donnés en annexe C ⁽³⁾

⁽³⁾ Les matrices $[\bar{\mathbf{M}}]$, $[\bar{\mathbf{C}}]$ et $[\bar{\mathbf{K}}]$ sont obtenues en posant $\bar{\Omega} = 2\Omega$ dans les équations (C.18), (C.19) et (C.20) de l'annexe C

3.2.3 Vibrations dues au balourd

Dans ce qui suit, la réponse du rotor avec un arbre dissymétrique à l'excitation de balourd est considérée. L'équation du mouvement est obtenue en insérant le vecteur représentant la force de balourd $\{F_b\}$ dans le second membre de l'équation (3.1)

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{F_b\} \quad (3.29)$$

Le vecteur $\{F_b\}$, peut s'écrire sous la forme⁽⁴⁾

$$\{F_b\} = \{F_b^-\}e^{-i\Omega t} + \{F_b^+\}e^{i\Omega t} \quad (3.30)$$

Avec

$$\{F_b^-\} = \frac{m_u df(l_1) \Omega^2}{2} \begin{Bmatrix} i \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-i\delta} \quad (3.31)$$

$$\{F_b^+\} = \frac{m_u df(l_1) \Omega^2}{2} \begin{Bmatrix} -i \\ 1 \end{Bmatrix} e^{i\delta} \quad (3.32)$$

où $\{F_b^-\}$ et $\{F_b^+\}$ sont les vecteurs amplitudes des forces complexes exprimées sous forme exponentielle à exposants imaginaires négatif et positif, respectivement, et Ω la vitesse de rotation du rotor.

Pour déterminer la réponse forcée, à chacun des deux termes de l'équation (3.30), on suppose, respectivement, des solutions périodiques de la forme

$$\{q^-\} = e^{-i\Omega t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u^-\} e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (3.33)$$

Et

$$\{q^+\} = e^{i\Omega t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u^+\} e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (3.34)$$

En substituant chacune des équations (3.33) et (3.34) dans l'équation (3.29) avec, au second membre, respectivement, le premier et le second terme de l'équation (3.30), et en comparant les termes de mêmes exponentiels dans les deux membres de l'équation, on obtient les deux systèmes d'équations linéaires

$$[\mathbf{K}^-]\{\Phi^-\} = \{F^-\} \quad (5) \quad (3.35)$$

⁽⁴⁾ En utilisant les identités $\cos(\Omega t + \delta) = \frac{e^{i(\Omega t + \delta)} + e^{-i(\Omega t + \delta)}}{2}$; $\sin(\Omega t + \delta) = -i \frac{e^{i(\Omega t + \delta)} - e^{-i(\Omega t + \delta)}}{2}$

⁽⁵⁾ L'équation développée est obtenue en posant $\bar{\Omega} = 2\Omega$, et $\varpi = \Omega$ dans l'équation (C.34) de l'annexe C.

Et
$$[\mathbf{K}^+]\{\Phi^+\} = \{F^+\} \quad (6) \quad (3.36)$$

Où, les matrices $[\mathbf{K}^-]$ et $[\mathbf{K}^+]$ ainsi que les vecteurs $\{\Phi^-\}$, $\{\Phi^+\}$ et $\{F^-\}$, $\{F^+\}$ sont donnés dans l'annexe C

Des équations (3.35) et (3.36), les vecteurs $\{\Phi_u^-\}$ et $\{\Phi_u^+\}$ sont déterminés, puis substitués dans les équations (3.33) et (3.34). Les équations ainsi obtenues permettent de déterminer la réponse à l'excitation de balourd, donnée par l'équation

$$\{q\} = \{q^-\} + \{q^+\} \quad (3.37)$$

$\{\Phi_u^-\}$ et $\{\Phi_u^+\}$ étant des sous-vecteurs des vecteurs $\{\Phi^-\}$ et $\{\Phi^+\}$, respectivement.

3.2.4 Vibrations dues au poids propre

L'équation du mouvement du rotor, est obtenue en mettant le vecteur représentant son poids propre $\{F_p\}$, dans le second membre de l'équation (3.1)

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{F_p\} \quad (3.38)$$

Pour déterminer la réponse au poids propre, une solution périodique est supposée de la forme

$$\{q^p\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u^p\} e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (3.39)$$

En substituant (3.39) dans l'équation du mouvement (3.38), et en comparant les termes exponentiels de mêmes exposants dans les deux membres de l'équation, on obtient le système d'équations linéaires⁽⁷⁾

$$[\mathbf{K}^p]\{\Phi^p\} = \{F^p\} \quad (3.40)$$

De l'équation (3.40), les vecteurs $\{\Phi_u^p\}$ sont déterminés, ensuite remplacés dans l'équation (3.39) pour déterminer la réponse au poids propre du rotor.

Remarque : Les matrices et les vecteurs dans les équations (3.28), (3.35), (3.36) et (3.40) sont de dimensions infinies, qui peuvent être réduites, pour un ordre de troncature choisi n, à $2(2n+1) \times 2(2n+1)$ et $2(2n+1)$ respectivement.

⁽⁶⁾ L'équation développée est obtenue en posant $\bar{\Omega} = 2\Omega$, et $\varpi = \Omega$ dans l'équation (C.47) de l'annexe C.

⁽⁷⁾ L'équation développée est obtenue en posant $\bar{\Omega} = 2\Omega$ dans l'équation (C.57) de l'annexe C.

3.3 Rotor symétrique soumis à une rotation sinusoïdale de sa base

3.3.1 Equation du mouvement

Les équations du mouvement d'un rotor symétrique soumis à une rotation sinusoïdale de sa base autour de l'axe z_b , définie dans le repère absolu par : $\alpha = a \sin(\omega t + \varphi)$, sont obtenues, en annulant les mouvements de translation de la base : $x_b = y_b = z_b = 0$ et en posant $\dot{I}_z = a\omega \cos(\omega t + \varphi)$ et $\dot{I}_x = \dot{I}_y = 0$. En tenant compte que la vitesse de rotation du rotor est constante ($\dot{\phi} = \Omega$, soit $\phi = \Omega t$), les équations ainsi obtenues sont de la forme (3.1)

Où

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{M}_0] \quad (3.41)$$

est la matrice masse ; $[\mathbf{M}_0]$ étant définie par l'équation (3.11),

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{C}_0] \quad (3.42)$$

est la matrice regroupant l'effet gyroscopique et l'amortissement du palier ; $[\mathbf{C}_0]$ étant définie par l'équation (3.15),

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k - a^2 \omega^2 M_2 \cos^2(\omega t + \varphi) & 0 \\ 0 & k + a^2 \omega^2 (I_{m2} - I_{y2}) \cos^2(\omega t + \varphi) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

est la matrice de rigidité, et

$$\{F\} = \{F_b\} + \{F_{rb}\} + \{F_c\} + \{F_p\} \quad (3.44)$$

est le vecteur des forces extérieures appliquées au rotor,

Où

$\{F_b\}$, est le vecteur représentant la force de balourd, défini dans (3.6),

$$\{F_{rb}\} = \begin{Bmatrix} -(M_5 + I_{m1})a \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ I_{y1}a \Omega \omega \cos(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

est le vecteur force représentant l'excitation due à la rotation sinusoïdale de la base,

$$\{F_c\} = m_u df(l_1) a^2 \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos^2(\omega t + \varphi) \sin(\Omega t + \delta) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

le vecteur force représentant l'effet combiné du balourd et du mouvement de la base

Et le vecteur

$\{F_p\}$, représentant le poids propre du rotor qui est défini dans (3.7).

Dans ce qui suit, vu que l'amplitude de la rotation sinusoïdale pouvant être réalisée expérimentalement est petite [22], le vecteur force $\{F_c\}$ est négligé devant $\{F_b\}$.

3.3.2 Méthode de Hill pour la détermination des valeurs et des vecteurs propres

L'équation différentielle homogène du rotor symétrique soumis à une rotation sinusoïdale de la base autour de l'axe z_b s'écrit

$$[\mathbf{M}_0] \{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}_0] \{\dot{q}\} + [\mathbf{K}] \{q\} = \{0\} \quad (3.47)$$

Dans ce cas, seule la matrice $[\mathbf{K}]$ est une fonction périodique dépendant du temps.

Ecrivons cette matrice comme la somme d'une matrice moyenne constante et de deux matrices déviatoriques harmoniques⁽⁸⁾, telle que

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_m] e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_p] e^{i\bar{\Omega}t} \quad (3.48)$$

Avec

$$[\mathbf{K}_0] = \begin{bmatrix} k - \frac{1}{2} a^2 \omega^2 M_2 & 0 \\ 0 & k + \frac{1}{2} a^2 \omega^2 (I_{m2} - I_{y2}) \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$[\mathbf{K}_m] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -a^2 \omega^2 M_2 & 0 \\ 0 & a^2 \omega^2 (I_{m2} - I_{y2}) \end{bmatrix} e^{-i2\varphi}, \quad (3.50)$$

Et
$$[\mathbf{K}_p] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -a^2 \omega^2 M_2 & 0 \\ 0 & a^2 \omega^2 (I_{m2} - I_{y2}) \end{bmatrix} e^{i2\varphi} \quad (3.51)$$

Où

$$\bar{\Omega} = 2\omega \quad (3.52)$$

ω étant la pulsation de la rotation sinusoïdale de la base.

Pour déterminer les valeurs propres correspondant à l'équation homogène (3.47), une solution périodique est supposée de la forme

⁽⁸⁾ En utilisant les identités $\cos(\omega t + \varphi) = \frac{e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2}$; $\sin(\omega t + \varphi) = -i \frac{e^{i(\omega t + \varphi)} - e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2}$

$$\{q\} = \{\Phi\}e^{\lambda t} \quad (3.53)$$

Où

$$\{\Phi\} = \{\Phi(t)\} = \{\Phi(t + \bar{T})\} \quad (3.54)$$

Avec

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\Omega}} \quad (3.55)$$

En procédant de la même manière que pour le cas du rotor dissymétrique, on aboutit au problème aux valeurs propres décrit par l'équation⁽⁹⁾

$$(\lambda^2[\bar{\mathbf{M}}] + \lambda[\bar{\mathbf{C}}] + [\bar{\mathbf{K}}])\{\bar{\Phi}\} = \{0\} \quad (3.56)$$

Les matrices $[\bar{\mathbf{M}}]$, $[\bar{\mathbf{C}}]$ et $[\bar{\mathbf{K}}]$, ainsi que le vecteur $\{\bar{\Phi}\}$ sont donnés dans l'annexe C

3.3.3 Vibrations forcées dues au balourd

La démarche suivie pour la détermination de la réponse à l'excitation de balourd est la même que pour le cas du rotor dissymétrique, avec les matrices $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{K}]$ données par les équations (3.41), (3.42) et (3.43) respectivement, et $\bar{\Omega} = 2\omega$.

3.3.4 Vibrations dues au mouvement de rotation sinusoïdale de la base

L'équation du mouvement du rotor soumis à l'excitation de sa base, qui subit une rotation sinusoïdale autour de l'axe z_b s'écrit

$$[\mathbf{M}_0]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}_0]\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{F_{rb}\} \quad (3.57)$$

Où, $\{F_{rb}\}$ est le vecteur force représentant l'excitation de la base, donné par (3.45), qui peut être décomposé en la somme

$$\{F_{rb}\} = \{F_{rb}^{-}\}e^{-i\omega t} + \{F_{rb}^{+}\}e^{i\omega t} \quad (3.58)$$

Où

$$\{F_{rb}^{-}\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} -i(M_5 + I_{m1})a\omega^2 \\ I_{y1}a\Omega\omega \end{array} \right\} e^{-i\varphi} \quad (3.59)$$

$$\{F_{rb}^{+}\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} i(M_5 + I_{m1})a\omega^2 \\ I_{y1}a\Omega\omega \end{array} \right\} e^{i\varphi} \quad (3.60)$$

$\{F_{rb}^{-}\}$ et $\{F_{rb}^{+}\}$ étant les vecteurs amplitude des forces harmoniques exprimées par des fonctions exponentielles à exposants imaginaires positif et négatif, respectivement, dues à la rotation sinusoïdale de la base et ω la pulsation d'excitation de la base.

⁽⁹⁾ Les matrices $[\bar{\mathbf{M}}]$, $[\bar{\mathbf{C}}]$ et $[\bar{\mathbf{K}}]$ sont obtenues en posant $\bar{\Omega} = 2\omega$ dans les équations (C.18), (C.19) et (C.20) de l'annexe C

Pour déterminer la réponse forcée, à chacun des deux termes de l'équation (3.58), respectivement, on suppose des solutions périodiques de la forme

$$\{q^-\} = e^{-i\omega t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u^-\} e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (3.61)$$

Et

$$\{q^+\} = e^{i\omega t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u^+\} e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (3.62)$$

La substitution des équations (3.61) et (3.62) dans (3.57), et la comparaison des termes exponentiels de mêmes exposants dans les deux membres de l'équation, mène aux deux systèmes d'équations linéaires

$$[K^-]\{\Phi^-\} = \{F^-\} \quad (10) \quad (3.63)$$

Et

$$[K^+]\{\Phi^+\} = \{F^+\} \quad (11) \quad (3.64)$$

Des équations (3.63) et (3.64), les vecteurs $\{\Phi_u^-\}$ et $\{\Phi_u^+\}$ sont déterminés, puis substitués dans les équations (3.61) et (3.62), respectivement. Les équations ainsi obtenues permettent de déterminer la réponse à l'excitation de la base, donnée par l'équation

$$\{q\} = \{q^-\} + \{q^+\} \quad (3.65)$$

$\{\Phi_u^-\}$ et $\{\Phi_u^+\}$ étant des sous-vecteurs des vecteurs $\{\Phi^-\}$ et $\{\Phi^+\}$, respectivement.

3.3.5 Vibrations dues au poids propre

La démarche suivie pour la détermination de la réponse à l'excitation du poids propre du rotor, est la même que pour le cas du rotor dissymétrique, avec les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ données par les équations (3.41), (3.42) et (3.43) respectivement, et $\bar{\Omega} = 2\omega$.

Remarque : Les matrices et les vecteurs dans les équations (3.56), (3.63) et (3.64) sont de dimensions infinies, qui peuvent être réduites, pour un ordre de troncature choisi n , à $2(2n+1) \times 2(2n+1)$ et $2(2n+1)$ respectivement [6], [41].

⁽¹⁰⁾ L'équation développée est obtenue en posant $\bar{\Omega} = 2\omega$, et $\varpi = \omega$ dans l'équation (C.34) de l'annexe C.

⁽¹¹⁾ L'équation développée est obtenue en posant $\bar{\Omega} = 2\omega$, et $\varpi = \omega$ dans l'équation (C.47) de l'annexe C.

3.4 Etude numérique

Dans ce qui suit, une étude numérique est réalisée sur trois cas de rotors, dans chacun de ces cas, le rotor est composé d'un arbre, un disque symétrique contenant un balourd, deux paliers parfaitement rigides situés aux extrémités de l'arbre et éventuellement, un palier auxiliaire situé à $y = l_2$, caractérisé par ses coefficients de rigidité et d'amortissement (Figure 3.1), l'ensemble rotor-palier est monté sur une base qui peut subir des mouvements. Les caractéristiques du rotor sont données dans le Tableau 3.1.

- Dans le premier cas, l'arbre du rotor, dont le profil de la section droite est représenté dans la figure 3.1, est dissymétrique, avec $H/D = 0.75$, ce qui correspond à un coefficient de dissymétrie, $\mu = \frac{k_a}{k} = 0.24$ (k et k_a sont les rigidités moyenne et déviatorique de l'arbre). Le palier auxiliaire dont les coefficients de rigidité sont tous nuls, sert uniquement à l'application d'un amortissement, caractérisé par la matrice $[c_b] = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix}$, où : $c_{xx} = c_{zz} = c$ et $c_{xz} = c_{zx} = 0$; le coefficient d'amortissement isotrope c , est donné par : $c = \eta c_0$, où : $c_0 = 100 \text{ N.s/m}$ et η un coefficient multiplicateur. Le système rotor-palier est monté sur une base fixe.
- Le deuxième rotor est identique au premier, sauf que le palier auxiliaire est caractérisé, en plus de sa matrice d'amortissement, par une matrice de rigidité $[k_b]$ dont le coefficient de rigidité $k_{zz} = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$, les autres coefficients étant tous nuls.
- Le troisième rotor diffère du premier par le fait que son arbre est symétrique et que sa base subit une rotation sinusoïdale autour de l'axe vertical, définie dans le repère absolu par : $\alpha = a \sin(\omega t + \varphi)$. Ce qui conduit, dans le repère lié à la base à : $\dot{\Gamma}_z = a\omega \cos(\omega t + \varphi)$ et $\dot{\Gamma}_x = \dot{\Gamma}_y = 0$.

3.4.1 Rotor dissymétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides

Le rotor, composé d'un arbre dissymétrique et d'un disque symétrique contenant un balourd, est supporté aux extrémités par deux paliers parfaitement rigides. Dans ce qui suit, les valeurs propres du système sont tout d'abord calculées, et les vitesses de fonctionnement instable sont obtenues pour le rotor non amorti puis amorti ; les réponses au balourd et au poids propre sont ensuite déterminées.

Tableau 3.1: Paramètres du rotor

Symbole	Quantité	Valeur
L	Longueur de l'arbre	0.4 m
R_1	Rayon de l'arbre	0.01 m
$R_2=D/2$	Rayon du disque	0.15 m
h	Épaisseur du disque	0.03 m
E	Module d'Young	$2 \cdot 10^{11}$ N/m ²
ρ	Masse volumique	7800 kg/m ³
$m_u d$	Balourd résiduel	$1.5 \cdot 10^{-4}$ kg m

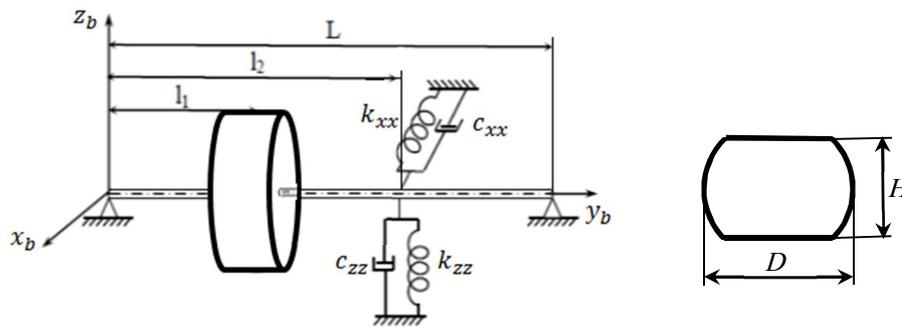


Figure 3.1 Rotor dissymétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides et un palier auxiliaire

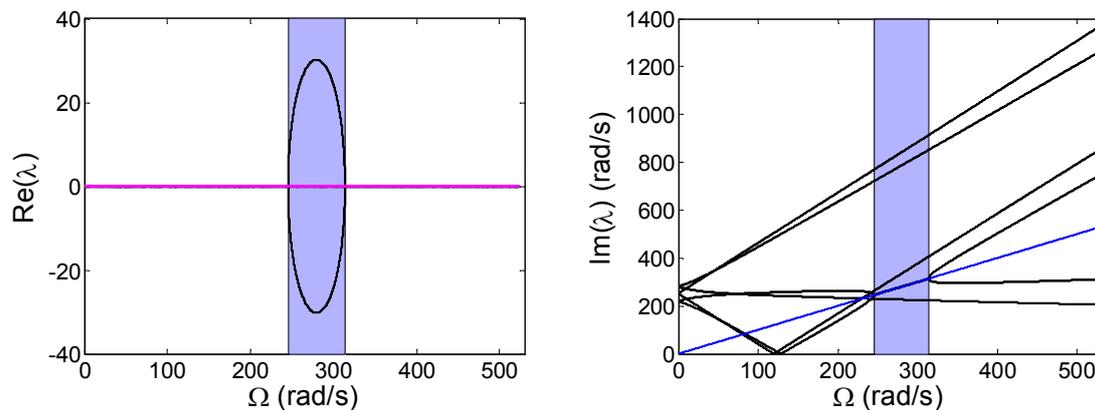


Figure 3.2 Parties réelles et imaginaires des valeurs propres du rotor non amorti, supporté par deux paliers parfaitement rigides

La figure 3.2 représente les parties réelle et imaginaire des valeurs propres en fonction de la vitesse de rotation correspondant au rotor non amorti. Elle montre que le rotor est instable dans la plage de vitesses de 245.4-313.8 rad/s, où des valeurs propres ont leur partie réelle positive. Les parties réelles des valeurs propres, dans les autres plages de vitesses de fonctionnement, sont nulles.

Les parties imaginaires des valeurs propres dans la plage d'instabilité du rotor sont égales à la vitesse de fonctionnement du rotor (Figure 3.2b).

La figure 3.3 montre l'influence de l'amortissement du palier sur l'intervalle d'instabilité. En effet, son augmentation, implique une diminution du domaine d'instabilité (Figure 3.3a) qui peut aller jusqu'à sa disparition totale (Figure 3.3b).

La figure 3.4 présente l'évolution de la zone de fonctionnement instable en fonction de la dissymétrie de l'arbre et ceci pour différents amortissements. La figure montre que pour ce cas de rotor, une seule zone d'instabilité est observée, et que la valeur du coefficient de dissymétrie influence l'étendue du domaine d'instabilité : plus l'arbre est dissymétrique, plus le domaine d'instabilité est large. La figure montre aussi qu'une augmentation de l'amortissement du palier a un effet positif sur la stabilité du rotor. Une augmentation suffisamment grande de ce facteur stabilisera complètement le rotor.

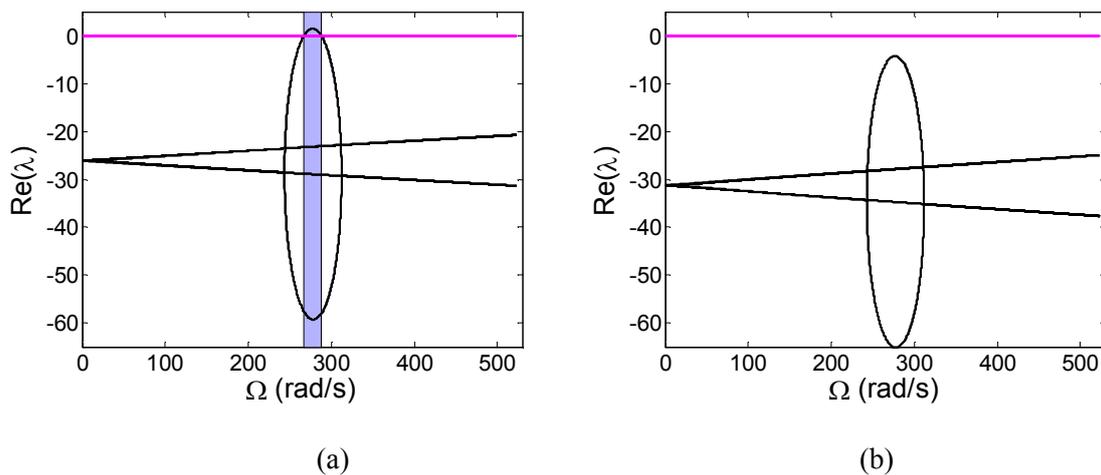


Figure 3.3 Partie réelle des valeurs propres du rotor dissymétrique supporté par deux paliers rigides pour (a) $\eta = 10$, (b) $\eta = 12$.

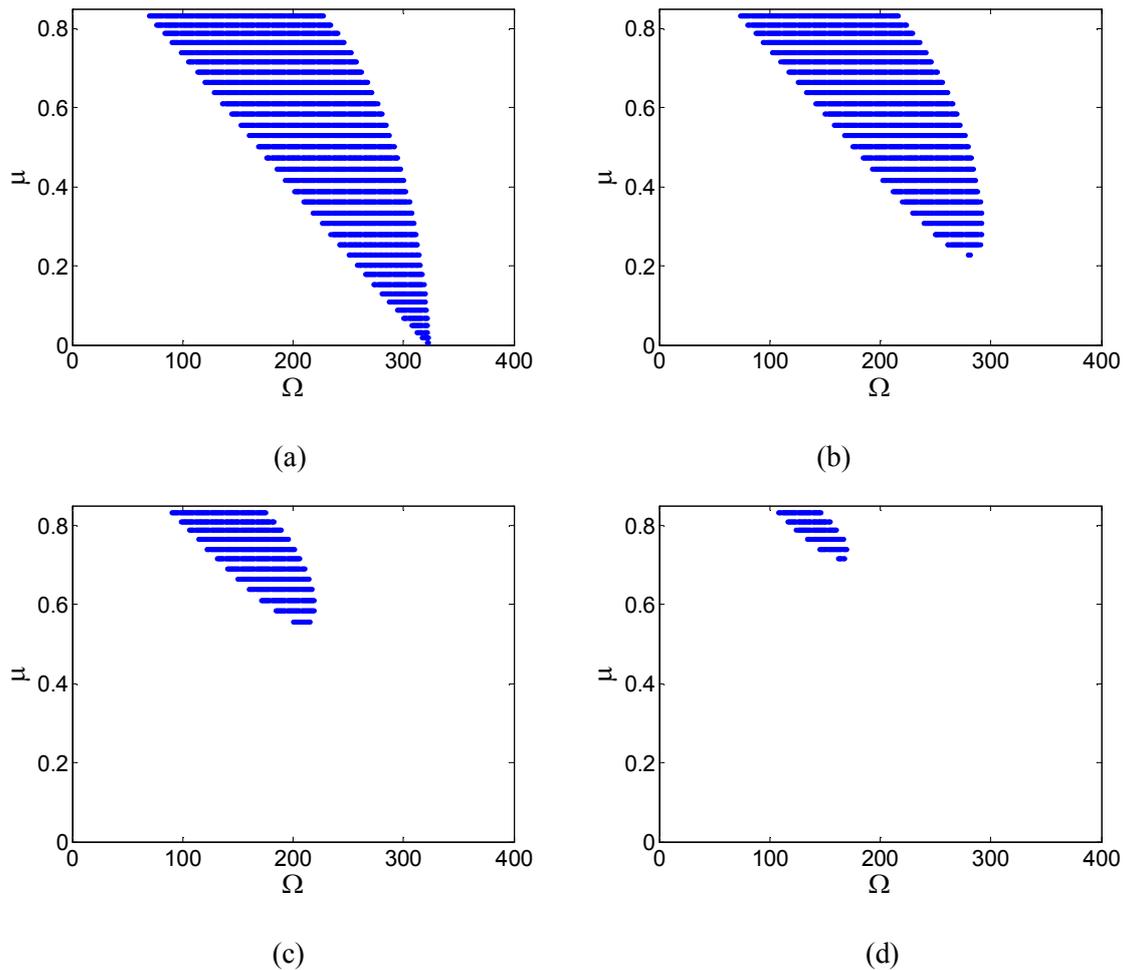


Figure 3.4 Effet de l'amortissement sur la plage d'instabilité du rotor dissymétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides. (a) $\eta = 0$, (b) $\eta = 10$, (c) $\eta = 20$, (d) $\eta = 23$

La figure 3.5 présente les réponses du rotor non amorti au balourd et à son poids propre en fonction de la vitesse de fonctionnement. La réponse au balourd (Figure 3.5a) permet de noter l'existence de deux vitesses de résonance, 245.4 rad/s et 313.8 rad/s. La figure représente la réponse même entre ces deux vitesses critiques. L'existence d'une instabilité dans cette plage de vitesses implique que cette réponse ne peut être obtenue en pratique [39]. La réponse au poids propre (Figure 3.5b) montre l'existence d'une seule vitesse de résonance à 128.8 rad/s. Une valeur approximative de cette vitesse est obtenue, en prenant la moitié de la moyenne des vitesses de résonance dues au balourd [6], soit 139.8 rad/s. L'erreur alors commise étant de 8.54%.

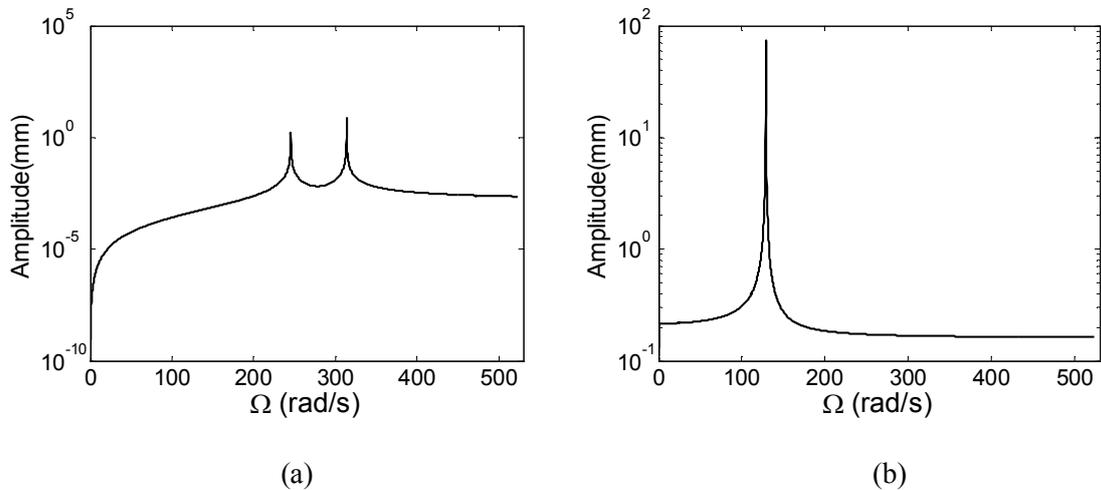


Figure 3.5 Réponse du rotor dissymétrique non amorti supporté par deux paliers parfaitement rigides au : (a) balourd et (b) poids propre

Les figures 3.6 et 3.7 représentent la réponse du rotor aux excitations de balourd et du poids propre, respectivement, pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement du palier. La figure 3.6 montre qu'une augmentation de l'amortissement tend à rapprocher les deux pics de résonances dues au balourd, l'un de l'autre et à diminuer leurs amplitudes jusqu'à leur disparition. La figure 3.7 montre l'effet d'un accroissement de l'amortissement sur la diminution de l'amplitude à la résonance due au poids propre.

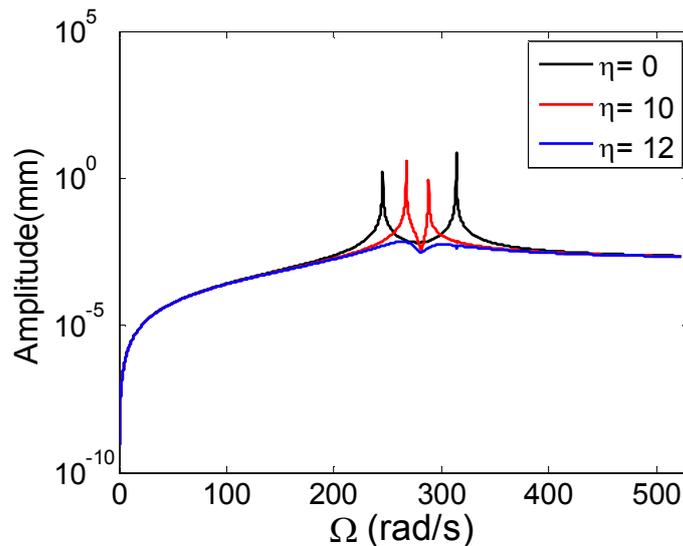


Figure 3.6 Réponse au balourd du rotor dissymétrique amorti supporté par deux paliers parfaitement rigides

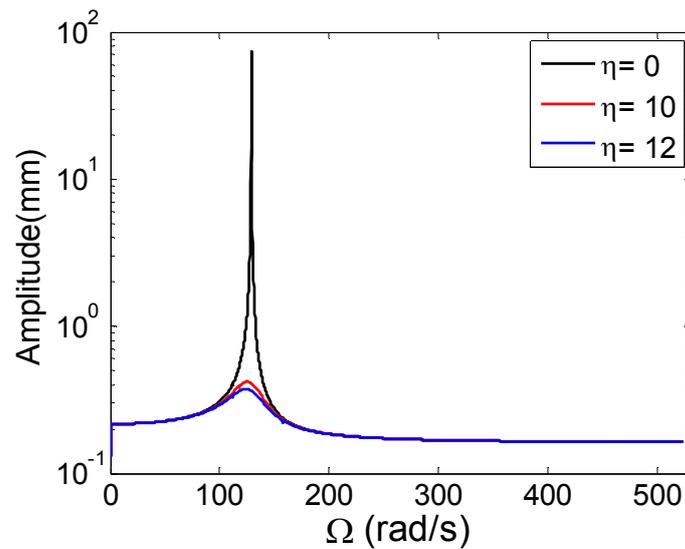


Figure 3.7 Réponse au poids propre du rotor dissymétrique amorti supporté par deux paliers parfaitement rigides

3.4.2 Rotor dissymétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides et un palier auxiliaire élastique

Le rotor considéré dans cette section est le même que celui du cas précédent, dont le palier auxiliaire est caractérisé, en plus des coefficients d'amortissement, par un coefficient de rigidité $k_{zz} = 5 \cdot 10^5 N/m$, les autres coefficients de rigidité étant tous nuls.

La figure 3.8 représente les parties réelle et imaginaire, respectivement, des valeurs propres du rotor non amorti. Nous pouvons constater que dans certaines plages de vitesses, l'une des parties réelles est positive, ce qui entraîne un comportement instable du rotor.

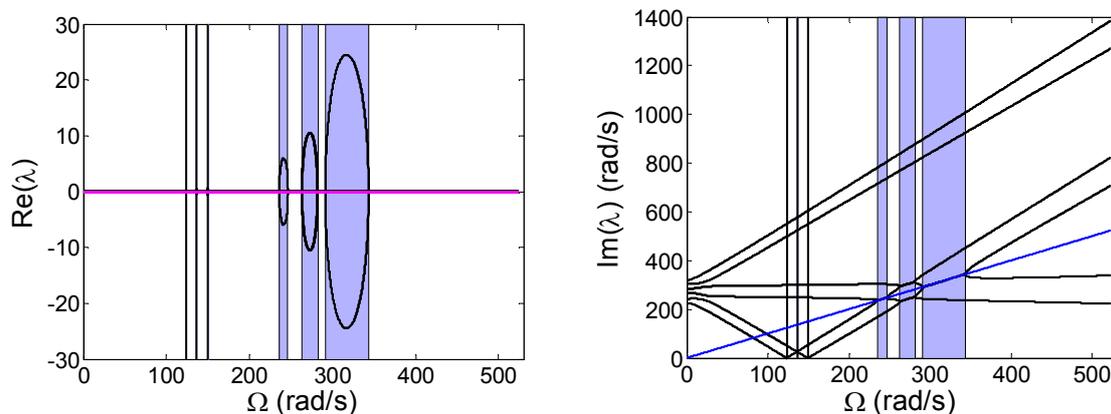


Figure 3.8 Parties réelle et imaginaire des valeurs propres du rotor non amorti, supporté par deux paliers parfaitement rigides et un palier auxiliaire élastique

Les vitesses de fonctionnement correspondant à des parties réelles positives s'étendent sur six plages : trois plages principales situées dans les intervalles 235.6-246.6 rad/s, 262.8-282.4 rad/s et 291.4-343.6 rad/s et trois plages secondaires, dans les intervalles 123.2-124.0 rad/s, 136.2-137.0 rad/s, 149.4-150.4 rad/s ; leurs moyennes (123.6 rad/s, 136.6 rad/s et 149.9 rad/s, respectivement), sont approximativement égales à la moitié des moyennes des plages principales instables [6] (241.1 rad/s, 272.6 rad/s et 317.5 rad/s, respectivement). Des erreurs de -2.47%, -0.22% et 5.9%, respectivement, sont commises en faisant cette approximation.

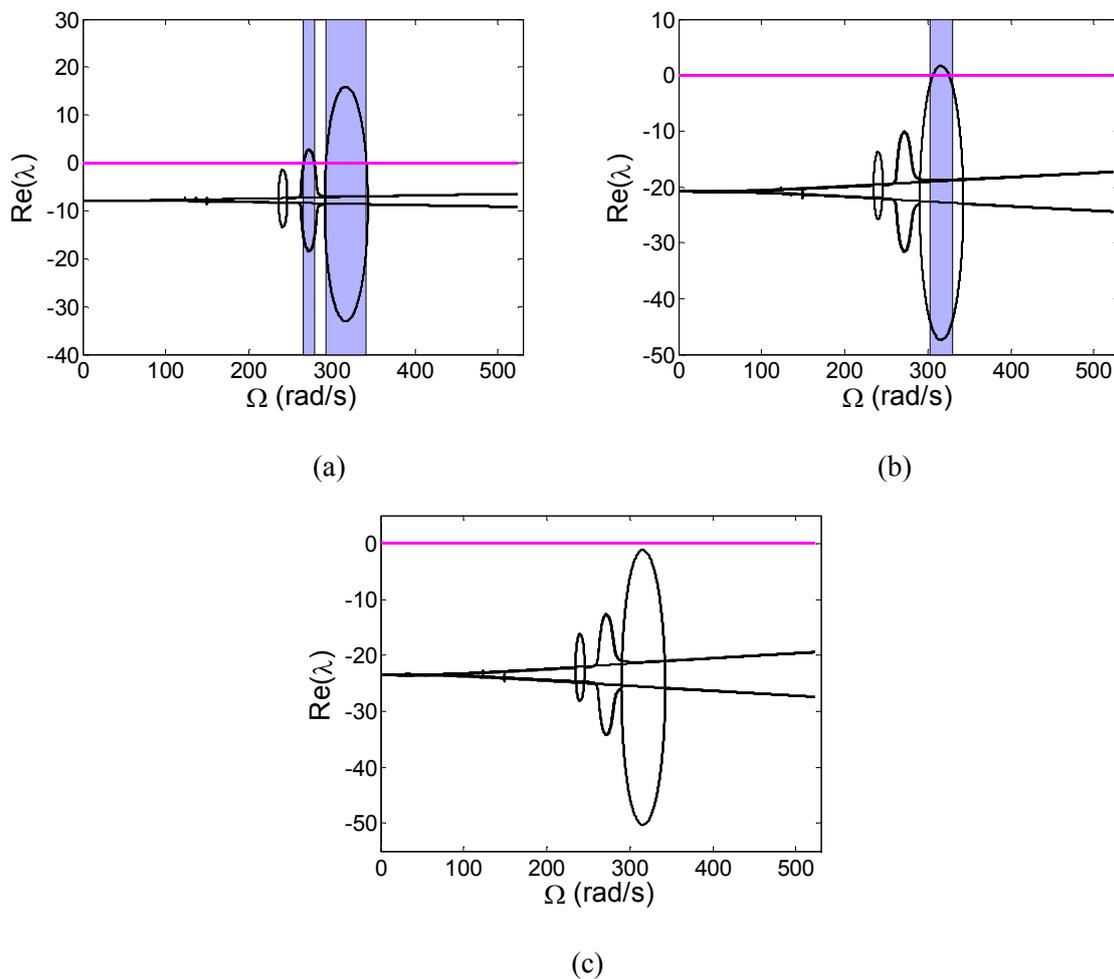


Figure 3.9 Parties réelles des valeurs propres d'un arbre dissymétrique supporté par deux paliers rigides et un palier auxiliaire élastique, pour ; (a) $\eta = 3$, (b) $\eta = 8$ et (c) $\eta = 9$.

La figure 3.9 représente les parties réelles des valeurs propres en fonction de la vitesse de rotation du rotor pour les valeurs du coefficient multiplicateur de l'amortissement de palier $\eta = 3$, $\eta = 8$ et $\eta = 9$, respectivement. Elle montre clairement l'effet de l'amortissement sur la réduction des zones de fonctionnement instable du rotor.

La figure 3.10 représente l'évolution des domaines d'instabilité en fonction du coefficient de dissymétrie de l'arbre et ceci pour différentes valeurs de l'amortissement du palier. Nous pouvons remarquer que, contrairement au cas du rotor supporté uniquement par deux paliers parfaitement rigides, qui n'a qu'une seule zone d'instabilité, ce rotor présente plusieurs zones d'instabilité pouvant aller jusqu'à six (trois principales et trois secondaires), pour certaines valeurs relativement faibles du coefficient de dissymétrie de l'arbre. Il est à remarquer que, pour des coefficients d'amortissement du palier de plus en plus grands, il y a disparition, tout d'abord, des zones d'instabilité secondaires, puis des zones principales et ceci en allant des dissymétries les plus petites aux plus grandes, jusqu'à stabilisation totale du rotor.

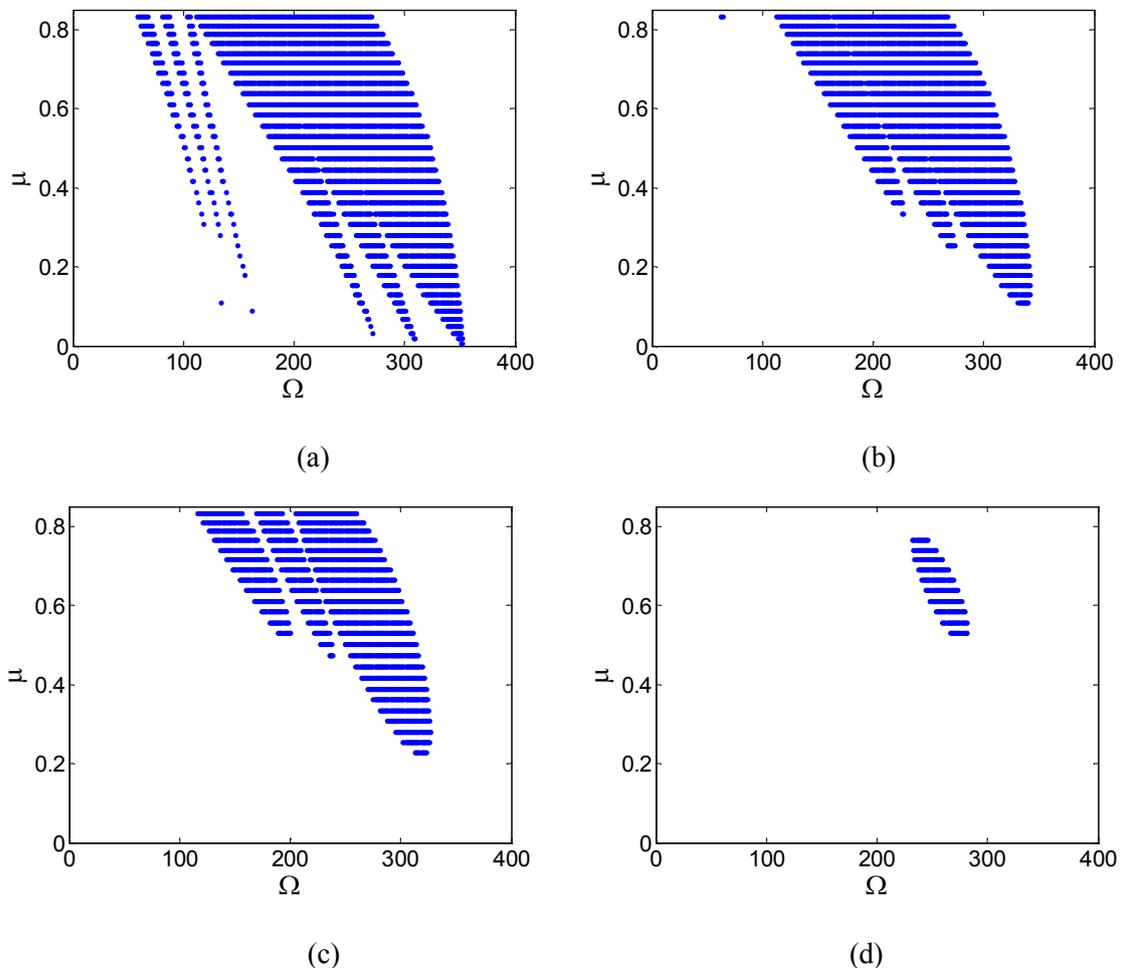


Figure 3.10 Domaines d'instabilité du rotor dissymétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides et un palier auxiliaire élastique, pour: (a) $\eta = 0$, (b) $\eta = 4$, (c) $\eta = 8$, (d) $\eta = 12$

Les réponses du rotor non amorti au balourd (Figure 3.11a) et à son poids propre (Figure 3.11b) sont ensuite déterminées. La figure 3.11a montre deux maxima locaux à 82.6 rad/s et 99.0 rad/s en plus des quatre vitesses de résonance au balourd attendues à 235.8 rad/s, 246.4 rad/s, 291.4 rad/s et 343.6 rad/s. Les maxima locaux sont obtenus à environ un tiers de la moyenne de chaque paire de vitesses de résonance au balourd [6], soient à 80.37 rad/s et 90.87 rad/s. Les erreurs commises sont alors de -2.7% et -8.21% respectivement.

Enfin, la réponse au poids propre est représentée dans la figure 3.11b donnant deux résonances à 123.8 rad/s et 150.4 rad/s. Là encore, ces vitesses sont proches de la moitié de la moyenne des vitesses de résonance dues au balourd [6], c'est-à-dire de 120.55 rad/s et 158.75 rad/s. Les erreurs alors commises sont de 0.21% et 5.55%, respectivement.

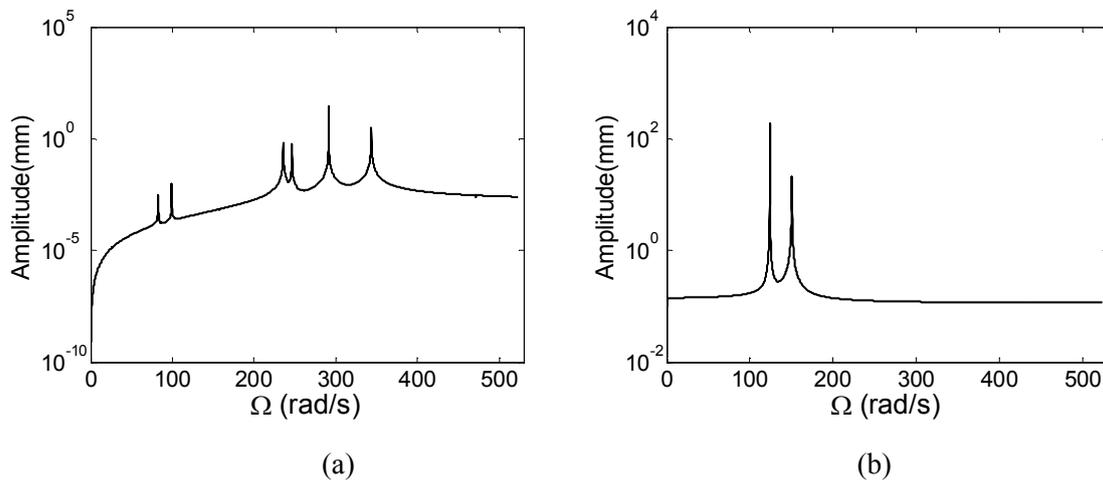


Figure 3.11: Réponse du rotor non amorti supporté par des paliers parfaitement rigides et un palier auxiliaire élastique au : (a) balourd et (b) poids propre

Les figures 3.12 et 3.13 représentent les réponses aux excitations de balourd et de poids propre et ceci pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement du palier. La figure 3.12 montre la disparition rapide des maxima locaux avec l'accroissement de l'amortissement, ainsi que le rapprochement des pics correspondant à chacune des paires de résonance dues au balourd et la diminution de leurs amplitudes jusqu'à leur disparition complète.

La figure 3.13 montre l'effet d'un accroissement de l'amortissement du palier sur l'atténuation de l'amplitude à la résonance due au poids propre du rotor.

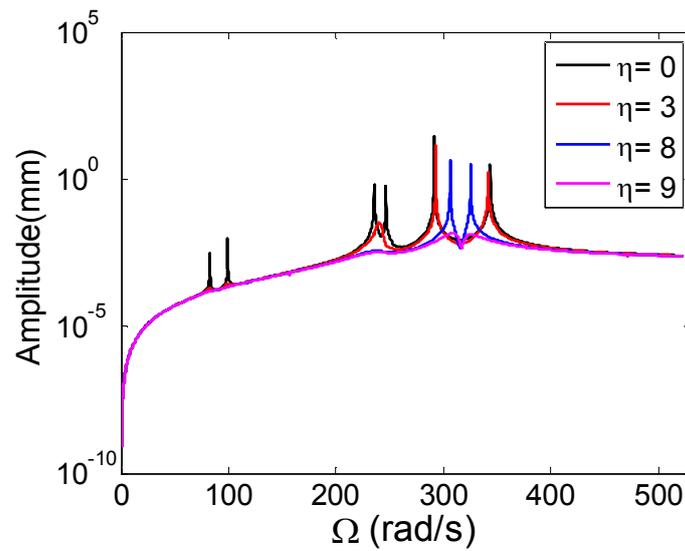


Figure 3.12 Réponse au balourd du rotor supporté par deux paliers parfaitement rigides et un palier auxiliaire élastique, pour différents facteurs de la matrice d'amortissement

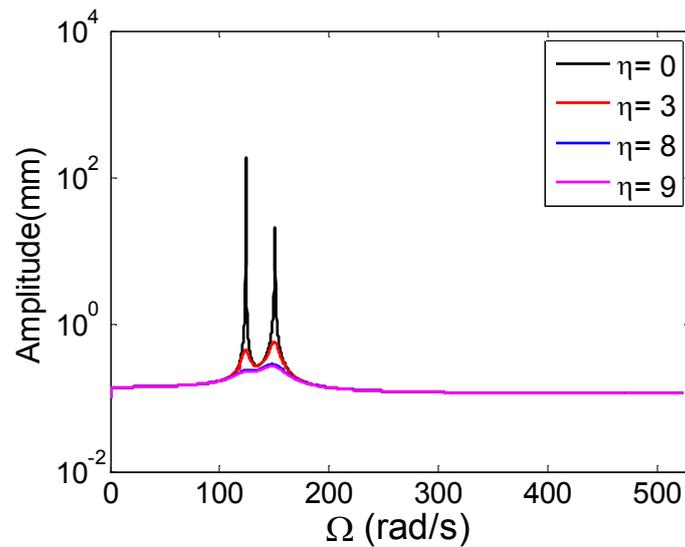


Figure 3.13 Réponse au poids propre du rotor supporté par deux paliers parfaitement rigides et un palier auxiliaire élastique, pour différents facteurs de la matrice d'amortissement

3.4.3 Rotor symétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base soumise à une rotation sinusoïdale

Dans cette section, le rotor considéré, décrit dans le Tableau 3.1, est symétrique, supporté par deux paliers parfaitement rigides, et monté sur une base rigide soumise à une rotation sinusoïdale autour de l'axe z_b .

Le diagramme de Campbell, en l'absence de mouvement de la base est présenté dans la figure 3.14, où les fréquences naturelles du rotor, tournant à la vitesse $\Omega = 251.33$ rad/s (2400 tr/min), sont précisées.

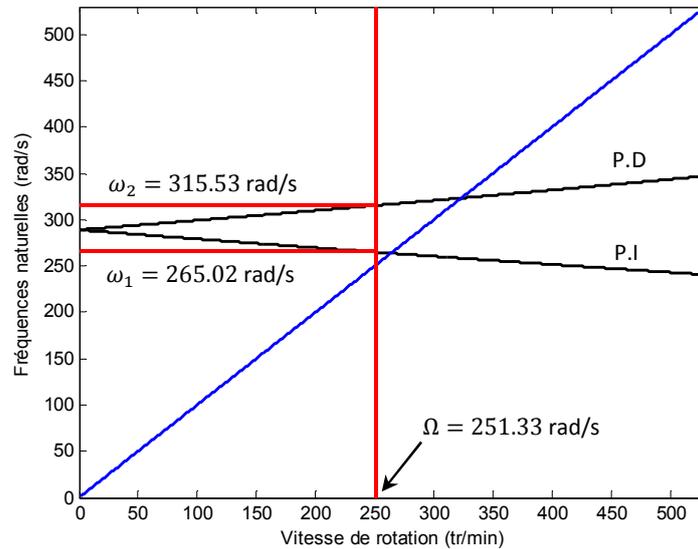


Figure 3.14 Diagramme de Campbell du rotor symétrique supporté par deux paliers parfaitement rigides, sans mouvement de la base

La figure 3.15 représente les parties réelle et imaginaire des valeurs propres du rotor non amorti, en fonction de la pulsation d'excitation de sa base, pour une amplitude $a = 0.5$ rad.

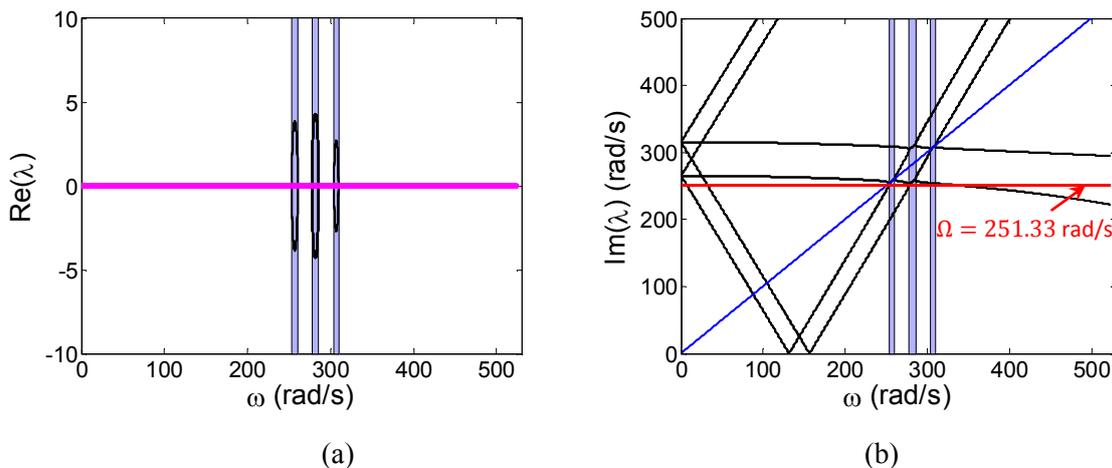


Figure 3.15 Parties (a) réelle, (b) imaginaire des valeurs propres du rotor symétrique non amorti, supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base en rotation sinusoïdale d'amplitude $a=0.5$ rad

La figure 3.16 présente une vue rapprochée des zones d'instabilité représentés dans la figure 3.15. Elle montre l'existence de trois plages de fonctionnement instable 253.4-260.6 rad/s, 277.6-286.2 rad/s et 304.4-309.6 rad/s correspondant à des parties réelles positives des valeurs propres.

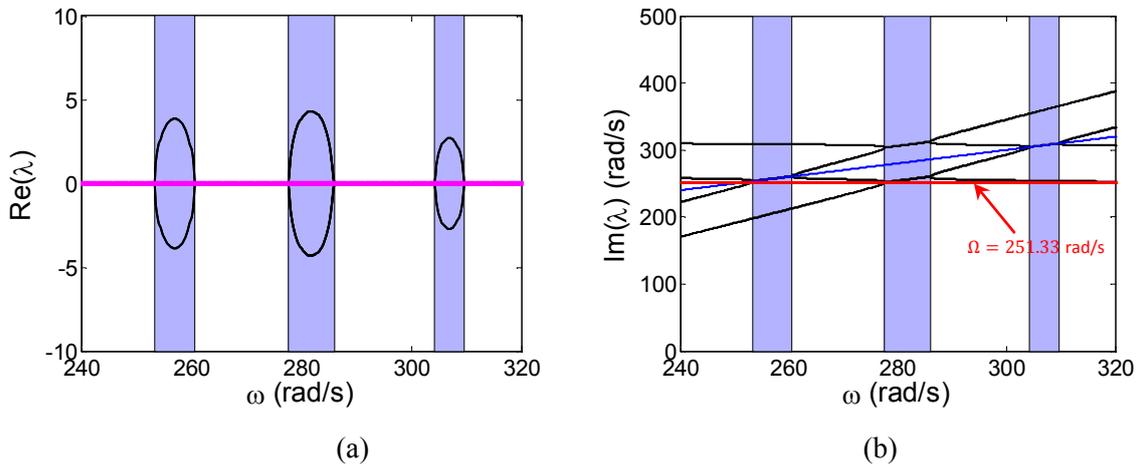


Figure 3.16 Parties (a) réelle, (b) imaginaire des valeurs propres du rotor symétrique non amorti, supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base en rotation sinusoïdale d'amplitude $a=0.5$ rad. Vue rapprochée des zones d'instabilité.

La figure 3.17 représente la partie réelle du même rotor pour les valeurs du coefficient multiplicateur de l'amortissement de palier $\eta = 1.5$ et $\eta = 2$ respectivement. La figure montre clairement la diminution de l'étendue des plages instables lorsque le rotor est amorti (Figure 3.17a), jusqu'à leur disparition totale (Figure 3.17b).

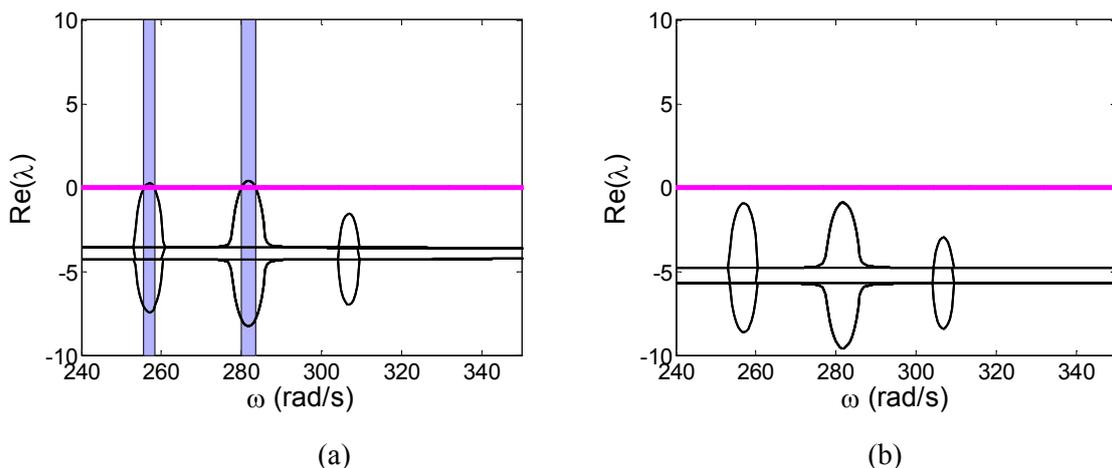


Figure 3.17 Parties réelles des valeurs propres du rotor symétrique amorti, supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base soumise à une rotation sinusoïdale d'amplitude $a=0.5$ rad, pour (a) $\eta = 1.5$ (b) $\eta = 2$

La figure (3.18a) représente les zones des pulsations du mouvement de la base, produisant une instabilité du rotor selon l'amplitude du mouvement de la base. Les zones d'instabilité correspondant à une rotation sinusoïdale de la base autour de x_b ou z_b sont identiques [34]. La figure 3.18b présente le graphe de stabilité correspondant au cas étudié par Duchemin [22], en utilisant la méthode des échelles multiples (M.E.M) [52], [53]. Il est clair que les deux graphes sont quasiment les mêmes. Le Tableau 3.2 présente les résultats numériques issus des deux méthodes. La comparaison des résultats montre un écart ne dépassant pas 1.2 %.

Tableau 3.2 Limites des zones d'instabilité obtenues par la méthode de Hill et la M.E.M

a	0.1		0.2		0.3		0.4		0.5	
M.E.M	264.7	264.9	263.5	264.4	261.7	263.6	259.0	262.5	255.6	261.0
M. Hill	264.4	265.0	263.2	264.4	261.0	263.6	257.6	262.2	253.4	260.6
M.E.M	289.7	290.1	288.1	289.6	285.5	288.8	281.7	287.7	276.9	286.3
M. Hill	289.6	290.2	288.0	289.6	285.4	288.8	281.8	287.6	277.6	286.0
M.E.M	314.9	315.3	313.1	314.5	310.1	313.2	306.0	311.4	300.6	309.1
M. Hill	314.8	315.4	313.2	314.6	310.6	313.4	307.6	311.6	304.2	309.6

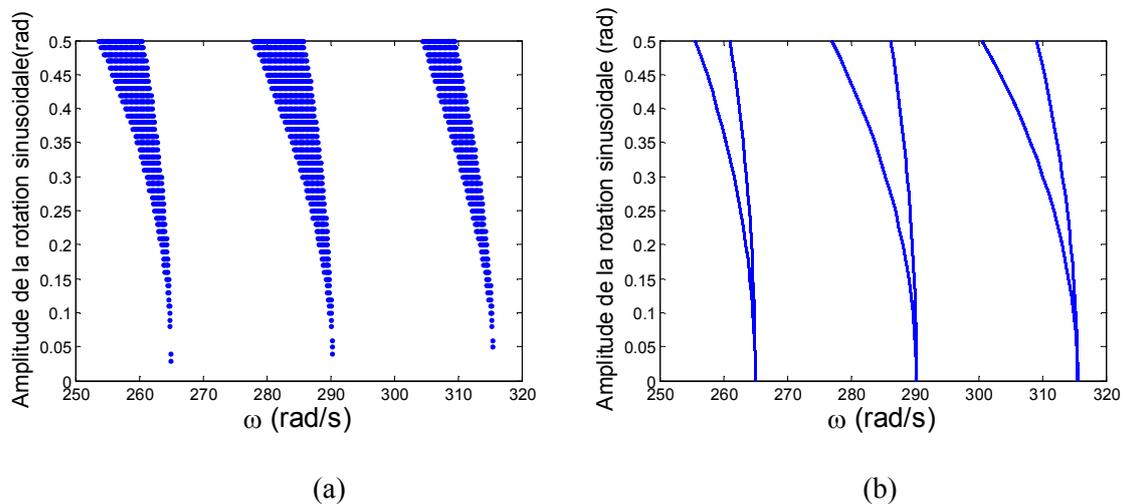


Figure 3.18 Domaines d'instabilité du rotor symétrique, soumis à une rotation sinusoïdale de la base, pour une vitesse de rotation $\Omega = 251.33 \text{ rad/s}$ (2400 tr/min).

(a) Méthode de Hill. (b) Méthode des échelles multiples [22].

La figure 3.19 représente l'évolution des zones d'instabilité en fonction de l'amplitude de la rotation sinusoïdale pour différentes valeurs de l'amortissement isotrope du palier. La figure montre clairement l'effet positif d'une augmentation du facteur d'amortissement sur la stabilisation du rotor.

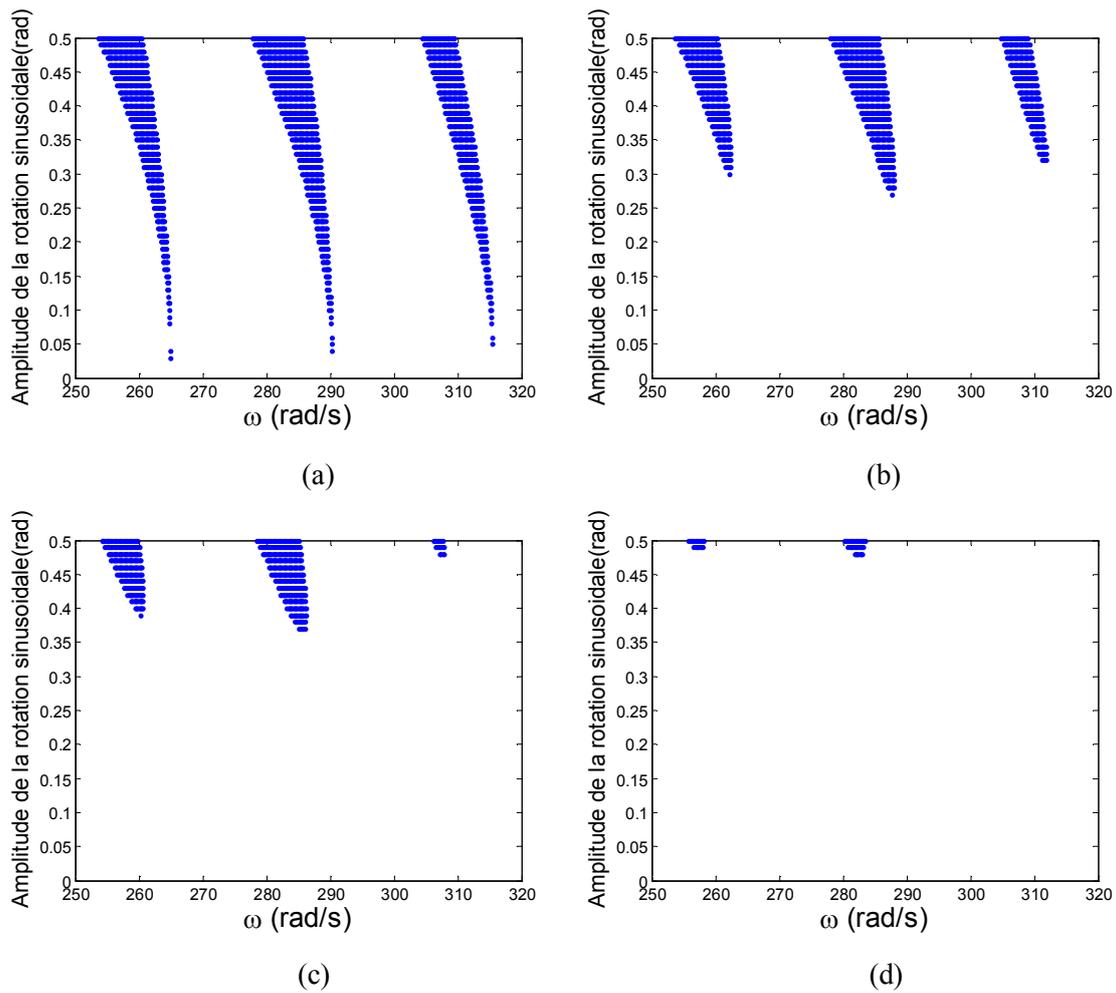


Figure 3.19 Domaines d'instabilité du rotor symétrique soumis à une rotation sinusoïdale de la base, à une vitesse de rotation $\Omega = 251.33 \text{ rad/s}$ pour : (a) $\eta = 0$, (b) $\eta = 0.5$, (c) $\eta = 0.9$, (d) $\eta = 1.5$

Les réponses aux excitations de balourd, de la base et du poids propre sont maintenant déterminées. La figure 3.20a présente la réponse au balourd où des pics de résonance sont observés à 253.4, 277.8 et 333.6 rad/s; un maximum local est observé à 32.0 rad/s. La figure 3.20b présente la réponse à l'excitation de la base. Elle montre seulement deux pics de résonance correspondant aux vitesses 260.6 rad/s et 309.6 rad/s (le diagramme de Campbell présenté dans la figure 3.14 pour une base fixe prédit les vitesses 265.02 rad/s et 315.53 rad/s), parmi les quatre vitesses de résonance attendues à 253.4 rad/s, 260.6 rad/s, 304.4 rad/s et 309.6 rad/s (Figure 3.16b). De plus elle montre deux maxima locaux à 88.0 rad/s et 104.8 rad/s ; ces maxima locaux sont, comme dans le cas du rotor dissymétrique, approximativement égaux au tiers de la moyenne de chaque paire de vitesses de résonance

dues à l'excitation de la base, c'est-à-dire 85.67 rad/s et 102.33 rad/s : des erreurs de -2.65% et -2.35% sont alors commises.

Enfin, la réponse au poids propre est présentée dans la figure 3.20c donnant deux résonances à 131.6 rad/s et 156.4 rad/s. Ces vitesses de résonance sont proches de la moitié de la moyenne des vitesses de résonance dues à l'excitation de la base ; c'est-à-dire à 128.5 rad/s et 153.5 rad/s, avec des erreurs commises de -2.35% et -1.85%, respectivement.

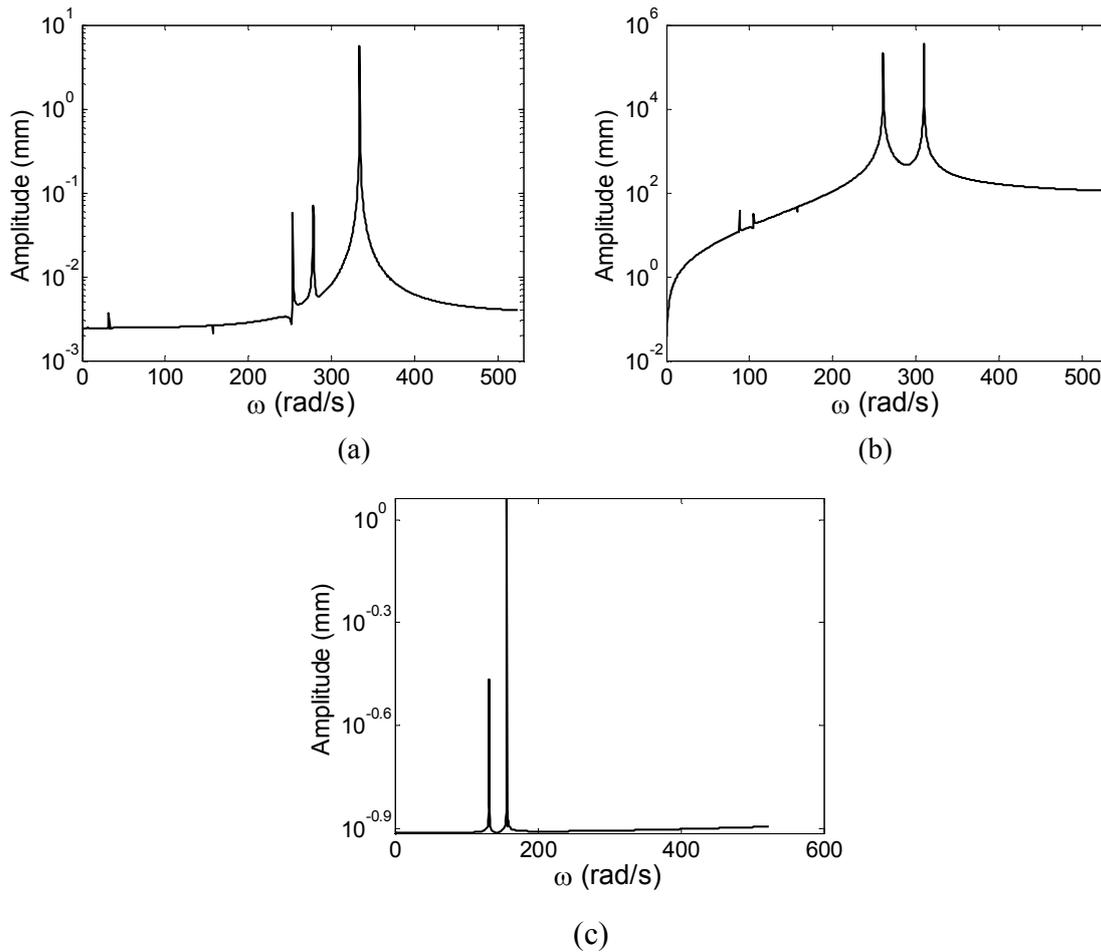


Figure 3.20 Réponse au (a) balourd, à (b) l'excitation de la base et au (c) poids propre du rotor symétrique non amorti supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base soumise à une rotation sinusoïdale

La figure 3.21 représente la réponse du rotor à l'excitation de balourd pour différents amortissements du palier. Elle montre une diminution de l'amplitude de vibrations à la résonance lorsque l'amortissement croît. La figure 3.22 représente la réponse du rotor à l'excitation de la base. La figure 3.23 montre que la présence d'un faible amortissement de palier permet de faire apparaître un pic non visible sur la courbe de réponse du rotor non

amorti (pourtant prédit par le diagramme de la figure 3.16b), et qu'un accroissement de cet amortissement, permet de rapprocher les pics de chaque paire l'un de l'autre, et de diminuer leurs amplitudes, jusqu'à leurs disparitions.

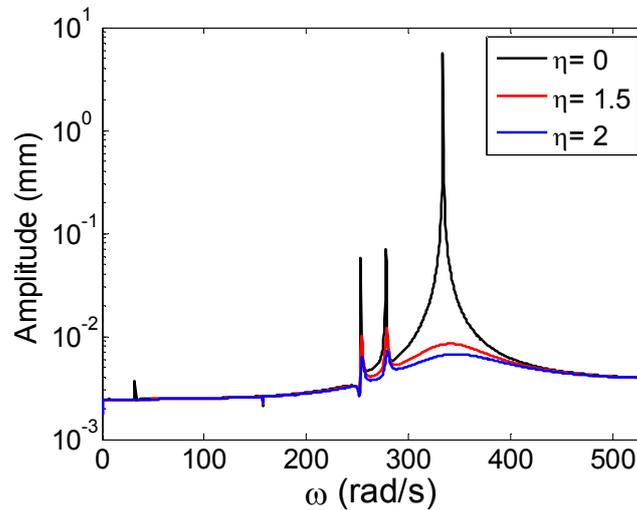


Figure 3.21 Réponse au balourd du rotor symétrique amorti supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base soumise à une rotation sinusoïdale.

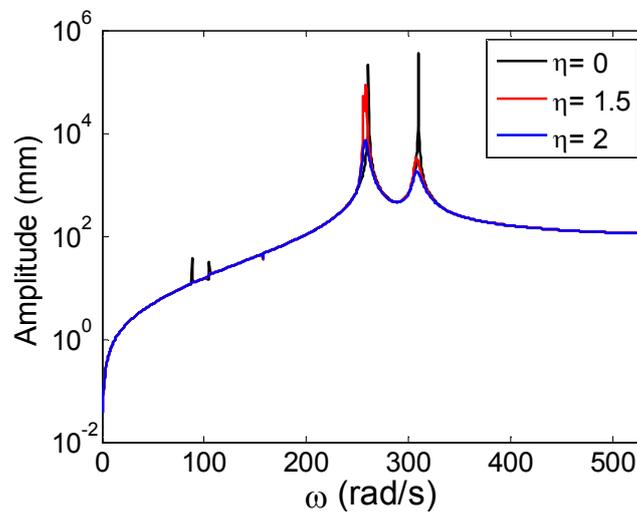


Figure 3.22 Réponse à l'excitation de la base, du rotor symétrique amorti, supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base soumise à une rotation sinusoïdale.

Enfin, la figure (3.24) montre le rôle positif de l'amortissement sur l'atténuation de l'amplitude à la résonance dans la réponse du rotor à son poids propre.

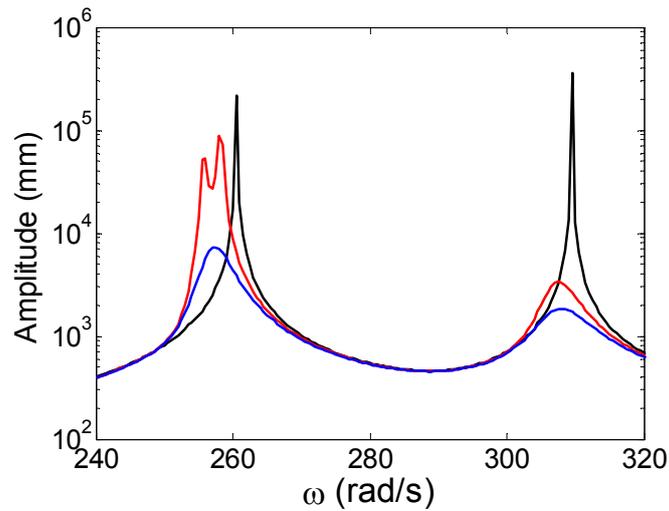


Figure 3.23 Vue rapprochée de la réponse à l'excitation de la base, du rotor symétrique amorti, supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base soumise à une rotation sinusoïdale.

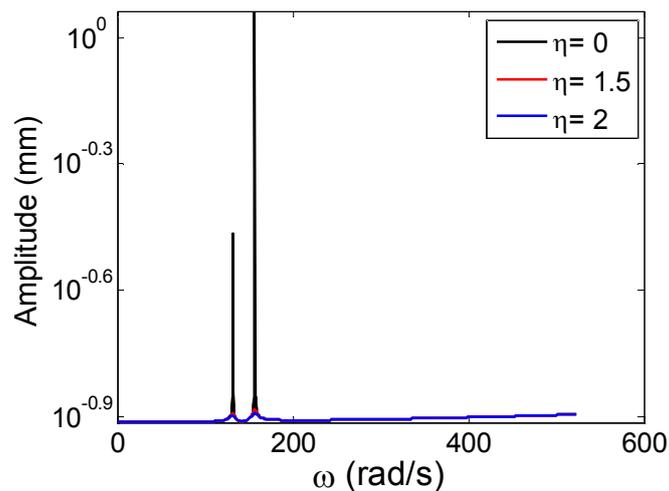


Figure 3.24 Réponse au poids propre du rotor symétrique amorti supporté par deux paliers parfaitement rigides et monté sur une base soumise à une rotation sinusoïdale.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une attention particulière a été accordée au comportement dynamique des rotors soumis à l'effet d'une excitation paramétrique. Deux types d'excitation paramétrique sont étudiés : le premier concerne la dissymétrie du rotor, et le deuxième, une rotation sinusoïdale de la base autour de l'axe z_b . Les équations du mouvement du rotor ont été obtenues au chapitre précédant, en utilisant le modèle de Rayleigh-Ritz. Il s'agit d'équations différentielles du second ordre à coefficients

périodiques. La méthode de résolution de Hill a été appliquée et son implémentation a permis la prédiction des plages d'instabilité, ainsi que la réponse aux excitations harmoniques de balourd et/ou de la base et au poids propre du rotor. L'influence de l'amortissement sur la diminution de l'étendue des zones d'instabilité et de l'amplitude du mouvement à la résonance a été montrée dans les différents cas étudiés.

Annexe A

Calcul des fonctions t_1 , t_2 , t_3 et t_4

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad t_1(y, t) &= u_c^2 + v_c^2 + w_c^2 = \left(\dot{x}_b + \dot{u} + \dot{\Gamma}_y(z_b + w) - \dot{\Gamma}_z(y_b + y) \right)^2 + \left(\dot{y}_b - \dot{\Gamma}_x(z_b + w) + \right. \\
&\quad \left. \dot{\Gamma}_z(x_b + u) \right)^2 + \left(\dot{z}_b + \dot{w} + \dot{\Gamma}_x(y_b + y) - \dot{\Gamma}_y(x_b + u) \right)^2 \\
&= (\dot{x}_b + \dot{\Gamma}_y z_b - \dot{\Gamma}_z y_b)^2 + (\dot{y}_b + \dot{\Gamma}_z x_b - \dot{\Gamma}_x z_b)^2 + (\dot{z}_b + \dot{\Gamma}_x y_b - \dot{\Gamma}_y x_b)^2 + (\dot{\Gamma}_x^2 + \dot{\Gamma}_z^2) y^2 \\
&\quad + 2 \left(-\dot{\Gamma}_z (\dot{x}_b + \dot{\Gamma}_y z_b - \dot{\Gamma}_z y_b) + \dot{\Gamma}_x (\dot{z}_b + \dot{\Gamma}_x y_b - \dot{\Gamma}_y x_b) \right) y + 2 \left(-\dot{\Gamma}_z (\dot{u} + \dot{\Gamma}_y w) + \dot{\Gamma}_x (\dot{w} - \dot{\Gamma}_y u) \right) y \\
&\quad + 2 \left((\dot{x}_b + \dot{\Gamma}_y z_b - \dot{\Gamma}_z y_b) (\dot{u} + \dot{\Gamma}_y w) + (\dot{y}_b + \dot{\Gamma}_z x_b - \dot{\Gamma}_x z_b) (\dot{\Gamma}_z u - \dot{\Gamma}_x w) \right. \\
&\quad \left. + (\dot{z}_b + \dot{\Gamma}_x y_b - \dot{\Gamma}_y x_b) (\dot{w} - \dot{\Gamma}_y u) + (\dot{u} + \dot{\Gamma}_y w)^2 + (\dot{\Gamma}_z u - \dot{\Gamma}_x w)^2 + (\dot{w} - \dot{\Gamma}_y u)^2 \right)
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad t_2(y, t) &= \omega_x^2 + \omega_z^2 = \\
&\quad \left((\dot{\theta} + \dot{\Gamma}_x \cos \psi + \dot{\Gamma}_y \sin \psi) \cos \phi - (\dot{\Gamma}_x \sin \psi - \dot{\Gamma}_y \cos \psi) \sin \theta \sin \phi - (\dot{\Gamma}_z + \dot{\psi}) \cos \theta \sin \phi \right)^2 + \\
&\quad \left((\dot{\theta} + \dot{\Gamma}_x \cos \psi + \dot{\Gamma}_y \sin \psi) \sin \phi + (\dot{\Gamma}_x \sin \psi - \dot{\Gamma}_y \cos \psi) \sin \theta \cos \phi + (\dot{\Gamma}_z + \dot{\psi}) \cos \theta \cos \phi \right)^2 = \\
t_2(y, t) &= \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\Gamma}_x^2 + \dot{\Gamma}_z^2 + \theta^2 (\dot{\Gamma}_y^2 - \dot{\Gamma}_z^2) + \psi^2 (\dot{\Gamma}_y^2 - \dot{\Gamma}_x^2) + 2\dot{\Gamma}_x \dot{\theta} + 2\dot{\Gamma}_y (\psi \dot{\theta} - \theta \dot{\psi}) + 2\dot{\Gamma}_z \dot{\psi} \\
&\quad + 2\dot{\Gamma}_y (\dot{\Gamma}_x \psi - \dot{\Gamma}_z \theta) + 2\dot{\Gamma}_x \dot{\Gamma}_z \theta \psi
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad t_3(y, t) &= \omega_y^2 = \left(-(\dot{\Gamma}_x \sin \psi - \dot{\Gamma}_y \cos \psi) \cos \theta + (\dot{\Gamma}_z + \dot{\psi}) \sin \theta + \dot{\phi} \right)^2 = \\
&\quad (\dot{\Gamma}_y + \dot{\phi})^2 + (\dot{\Gamma}_y + \dot{\phi}) \left(2\theta \dot{\psi} - \dot{\Gamma}_y (\psi^2 + \theta^2) + 2(\dot{\Gamma}_z \theta - \dot{\Gamma}_x \psi) \right) + \dot{\Gamma}_x^2 \psi^2 + \dot{\Gamma}_z^2 \theta^2 - 2\dot{\Gamma}_x \dot{\Gamma}_z \theta \psi
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad t_4(y, t) &= \omega_x^2 - \omega_z^2 = \\
&\quad \left((\dot{\theta} + \dot{\Gamma}_x \cos \psi + \dot{\Gamma}_y \sin \psi) \cos \phi - (\dot{\Gamma}_x \sin \psi - \dot{\Gamma}_y \cos \psi) \sin \theta \sin \phi - (\dot{\Gamma}_z + \dot{\psi}) \cos \theta \sin \phi \right)^2 - \\
&\quad \left((\dot{\theta} + \dot{\Gamma}_x \cos \psi + \dot{\Gamma}_y \sin \psi) \sin \phi + (\dot{\Gamma}_x \sin \psi - \dot{\Gamma}_y \cos \psi) \sin \theta \cos \phi + (\dot{\Gamma}_z + \dot{\psi}) \cos \theta \cos \phi \right)^2 \\
&= \left(\dot{\theta}^2 - \dot{\psi}^2 + 2\dot{\Gamma}_x \dot{\theta} + 2\dot{\Gamma}_y (\psi \dot{\theta} + \theta \dot{\psi}) - \dot{\Gamma}_z \dot{\psi} + \dot{\Gamma}_x^2 (1 - \psi^2) + \dot{\Gamma}_y^2 (\psi^2 - \theta^2) - \dot{\Gamma}_z^2 (1 - \theta^2) \right. \\
&\quad \left. - 2\dot{\Gamma}_x \dot{\Gamma}_z \theta \psi + 2\dot{\Gamma}_y (\dot{\Gamma}_x \psi + \dot{\Gamma}_z \theta) \right) \cos 2\phi \\
&\quad - \left(2\psi \dot{\theta} + 2\dot{\Gamma}_x \dot{\psi} + 2\dot{\Gamma}_y (\psi \dot{\psi} - \theta \dot{\theta}) + 2\dot{\Gamma}_z \dot{\theta} + 2(\dot{\Gamma}_x^2 - \dot{\Gamma}_y^2) \theta \psi - \dot{\Gamma}_x \dot{\Gamma}_z (\theta^2 + \psi^2 - 2) + \right. \\
&\quad \left. 2\dot{\Gamma}_y (\dot{\Gamma}_z \psi - \dot{\Gamma}_x \theta) \right) \sin 2\phi
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Remarque : Dans les expressions finales de $t_2(\mathbf{y}, t)$, $t_3(\mathbf{y}, t)$ et $t_4(\mathbf{y}, t)$, les angles de précession ψ et de nutation θ et leurs dérivées étant infiniment petits, les approximations suivantes sont utilisées :

$$\cos \psi \cong 1 - \frac{\psi^2}{2} ; \quad \sin \psi \cong \psi ; \quad \cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} ; \quad \sin \theta \cong \theta$$

Et les termes d'ordre supérieur à deux sont négligés

Annexe B

Expressions des paramètres utilisés dans le modèle de Rayleigh-Ritz

$$I_{m1} = I_{dm}g(l_1) + \int_0^L \rho I_m g(y) dy,$$

$$I_{m2} = I_{dm}g^2(l_1) + \int_0^L \rho I_m g^2(y) dy$$

$$I_{a1} = I_{dm}g(l_1) + \int_0^L \rho I_a g(y) dy,$$

$$I_{a2} = I_{dm}g^2(l_1) + \int_0^L \rho I_a g^2(y) dy$$

$$I_{y1} = I_{dy}g(l_1) + 2 \int_0^L \rho I_m g(y) dy,$$

$$I_{y2} = I_{dy}g^2(l_1) + 2 \int_0^L \rho I_m g^2(y) dy$$

$$M_1 = m_d f(l_1) + \int_0^L \rho A f(y) dy,$$

$$M_2 = m_d f^2(l_1) + \int_0^L \rho A f^2(y) dy$$

$$M_5 = m_d l_1 f(l_1) + \int_0^L \rho A y f(y) dy$$

$$k = E \int_0^L I_m h^2(y) dy$$

$$k_a = E \int_0^L I_a h^2(y) dy$$

Où

$$g(y) = \frac{df(y)}{dy}$$

$$h(y) = \frac{d^2 f(y)}{dy^2}$$

Annexe C

Méthode de Hill

Considérons une équation différentielle du second ordre

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{F\} \quad (\text{C.1})$$

Où : $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{K}]$ sont des matrices périodiques dépendant du temps.

Dans ce qui suit, la méthode de Hill [3] est appliquée à ce type d'équation, pour la détermination des valeurs et des vecteurs propres ainsi que la réponse à une excitation harmonique ou constante.

C.1 Méthode de Hill pour la détermination des valeurs et des vecteurs propres

L'équation différentielle homogène s'écrit

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{0\} \quad (\text{C.2})$$

Supposons que chacune de ces matrices périodiques, de période \bar{T} telle que

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (\text{C.3})$$

peut être écrite comme la somme d'une matrice moyenne constante et de deux matrices déviatoriques harmoniques. Ainsi, on a

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{M}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{M}_0] + [\mathbf{M}_p]e^{i\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.4})$$

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{C}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{C}_0] + [\mathbf{C}_p]e^{i\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.5})$$

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_p]e^{i\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.6})$$

Compte tenu des équations (C.4)-(C.6), l'équation (C.2) s'écrit

$$\begin{aligned} & ([\mathbf{M}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{M}_0] + [\mathbf{M}_p]e^{i\bar{\Omega}t})\{\ddot{q}\} \\ & + ([\mathbf{C}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{C}_0] + [\mathbf{C}_p]e^{i\bar{\Omega}t})\{\dot{q}\} \\ & + ([\mathbf{K}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_p]e^{i\bar{\Omega}t})\{q\} = \{0\} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Pour résoudre l'équation (C.7) pour les valeurs et vecteurs propres, une solution périodique est supposée de la forme

$$\{q\} = \{\Phi\}e^{\lambda t} \quad (\text{C.8})$$

Où

$$\{\Phi\} = \{\Phi(t)\} = \{\Phi(t + \bar{T})\} \quad (\text{C.9})$$

En calculant les première et deuxième dérivées de l'équation (C.8) par rapport au temps,

$$\{\dot{q}\} = \{\Phi\}\lambda e^{\lambda t} + \{\dot{\Phi}\}e^{\lambda t} \quad (\text{C.10})$$

$$\{\ddot{q}\} = (\{\ddot{\Phi}\} + 2\lambda\{\dot{\Phi}\} + \lambda^2\{\Phi\})e^{\lambda t} \quad (\text{C.11})$$

Et en insérant les équations (C.8), (C.10) et (C.11) dans l'équation (C.7) tout en divisant par $e^{\lambda t}$, on obtient

$$\begin{aligned} & ([\mathbf{M}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{M}_0] + [\mathbf{M}_p]e^{i\bar{\Omega}t})(\{\ddot{\Phi}\} + 2\lambda\{\dot{\Phi}\} + \lambda^2\{\Phi\}) \\ & + ([\mathbf{C}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{C}_0] + [\mathbf{C}_p]e^{i\bar{\Omega}t})(\{\Phi\}\lambda + \{\dot{\Phi}\}) \\ & + ([\mathbf{K}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_p]e^{i\bar{\Omega}t})\{\Phi\} = \{0\} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Comme la solution est supposée périodique, le vecteur $\{\Phi\}$ et ses dérivées peuvent être développés en séries de Fourier comme

$$\{\Phi\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.13})$$

$$\{\dot{\Phi}\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} iu\bar{\Omega}\{\Phi_u\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.14})$$

$$\{\ddot{\Phi}\} = - \sum_{u=-\infty}^{\infty} u^2\bar{\Omega}^2\{\Phi_u\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.15})$$

La substitution des équations (C.13)-(C.15) dans l'équation (C.12) donne

$$\begin{aligned} & ([\mathbf{M}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{M}_0] + [\mathbf{M}_p]e^{i\bar{\Omega}t}) \sum_{u=-\infty}^{\infty} (-u^2\bar{\Omega}^2 + 2\lambda iu\bar{\Omega} + \lambda^2)\{\Phi_u\}e^{iu\bar{\Omega}t} \\ & + ([\mathbf{C}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{C}_0] + [\mathbf{C}_p]e^{i\bar{\Omega}t}) \sum_{u=-\infty}^{\infty} (iu\bar{\Omega} + \lambda)\{\Phi_u\}e^{iu\bar{\Omega}t} \\ & + ([\mathbf{K}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_p]e^{i\bar{\Omega}t}) \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u\}e^{iu\bar{\Omega}t} = \{0\} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Pour que l'équation (C.16) soit vérifiée, les termes contenant les mêmes exponentiels dans les deux membres de l'équation doivent être égaux. A partir de cette condition, les équations suivantes sont obtenues

$$(\lambda^2[\bar{\mathbf{M}}] + \lambda[\bar{\mathbf{C}}] + [\bar{\mathbf{K}}])\{\bar{\Phi}\} = \{0\} \quad (\text{C.17})$$

Avec

$$[\overline{M}] = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & M_0 & M_m & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & M_p & M_0 & M_m & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & M_p & M_0 & M_m & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & M_p & M_0 & M_m & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & M_p & M_0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

$$[\overline{C}] = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & C_0 - i4\overline{\Omega} M_0 & C_m - i2\overline{\Omega} M_m & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & C_p - i4\overline{\Omega} M_p & C_0 - i2\overline{\Omega} M_0 & C_m & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & C_p - i2\overline{\Omega} M_p & C_0 & C_m + i2\overline{\Omega} M_m & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \Delta C_{+1} & C_0 + i2\overline{\Omega} M_0 & C_m + i4\overline{\Omega} M_m & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & C_p + i2\overline{\Omega} M_p & C_0 + i4\overline{\Omega} M_0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

$$[\overline{K}] = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & K_0 - i2\overline{\Omega} C_0 - 4\overline{\Omega}^2 M_0 & K_m - i\overline{\Omega} C_m - \overline{\Omega}^2 M_m & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & K_p - i2\overline{\Omega} C_p - 4\overline{\Omega}^2 M_p & K_0 - i\overline{\Omega} C_0 - \overline{\Omega}^2 M_0 & K_m & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & K_p - i\overline{\Omega} C_p - \overline{\Omega}^2 M_p & K_0 & K_m + i\overline{\Omega} C_m - \overline{\Omega}^2 M_m & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & K_p & K_0 + i\overline{\Omega} C_0 - \overline{\Omega}^2 M_0 & K_m + i2\overline{\Omega} C_m - 4\overline{\Omega}^2 M_m & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & K_p + i\overline{\Omega} C_p - \overline{\Omega}^2 M_p & K_0 + i2\overline{\Omega} C_0 - 4\overline{\Omega}^2 M_0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

C.2 Réponse à une force harmonique

Dans cette section, la réponse à l'excitation d'une force harmonique de pulsation ϖ est calculée. L'équation du mouvement est

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{F_h\} \quad (\text{C.21})$$

avec

$$\{F_h\} = \{F_h^-\}e^{-i\varpi t} + \{F_h^+\}e^{i\varpi t} \quad (\text{C.22})$$

et $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{K}]$ sont des matrices périodiques dépendant du temps.

C.2.1 Réponse à une force harmonique exprimée par une fonction exponentielle à exposant imaginaire négatif

Lorsque le système est excité par une force harmonique complexe exprimée par une fonction exponentielle à exposant imaginaire négatif, l'équation du mouvement s'écrit

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{F_h^-\}e^{-i\varpi t} \quad (\text{C.23})$$

La solution est supposée de la forme

$$\{q^-\} = \{\Phi_-\}e^{-i\varpi t} \quad (\text{C.24})$$

$$\{\Phi_-\}(t) = \{\Phi_-\}(t + \bar{T}) \quad (\text{C.25})$$

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (\text{C.26})$$

Comme la solution est supposée périodique, le vecteur $\{\Phi_-\}$ peut être développé en séries de Fourier comme

$$\{\Phi_-\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u^-\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.27})$$

dont les première et deuxième dérivées par rapport au temps sont respectivement

$$\{\dot{\Phi}_-\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} iu\bar{\Omega}\{\Phi_u^-\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.28})$$

Et

$$\{\ddot{\Phi}_-\} = - \sum_{u=-\infty}^{\infty} u^2\bar{\Omega}^2\{\Phi_u^-\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.29})$$

La réponse forcée périodique et ses dérivées deviennent alors

$$\{q^-\} = e^{-i\varpi t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u^-\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.30})$$

$$\{\dot{q}^-\} = e^{-i\varpi t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} i(u\bar{\Omega} - \varpi)\{\Phi_u^-\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.31})$$

$$\{\ddot{q}^-\} = -e^{-i\varpi t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} (u\bar{\Omega} - \varpi)^2\{\Phi_u^-\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.32})$$

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{F_h^+\}e^{i\varpi t} \quad (\text{C.36})$$

où $\{F_h^+\}$ est le vecteur amplitude de la force à exposant imaginaire positif et ϖ la pulsation d'excitation.

Pour déterminer la réponse forcée, on suppose une solution périodique de la forme

$$\{q^+\} = \{\Phi_+\}e^{i\varpi t} \quad (\text{C.37})$$

$$\{\Phi_+(t)\} = \{\Phi_+(t + \bar{T})\} \quad (\text{C.38})$$

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (\text{C.39})$$

Puisque la solution est supposée périodique, le vecteur $\{\Phi_+\}$ peut-être développé en séries de Fourier comme

$$\{\Phi_+\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u^+\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.40})$$

dont la première et la deuxième dérivées par rapport au temps sont respectivement

$$\{\dot{\Phi}_+\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} iu\bar{\Omega}\{\Phi_u^+\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.41})$$

Et

$$\{\ddot{\Phi}_+\} = - \sum_{u=-\infty}^{\infty} u^2\bar{\Omega}^2\{\Phi_u^+\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.42})$$

La réponse forcée périodique et ses dérivées s'écrivent donc

$$\{q^+\} = e^{i\varpi t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u^+\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.43})$$

$$\{\dot{q}^+\} = e^{i\varpi t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} i(u\bar{\Omega} + \varpi)\{\Phi_u^+\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.44})$$

$$\{\ddot{q}^+\} = -e^{i\varpi t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} (u\bar{\Omega} + \varpi)^2\{\Phi_u^+\}e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (\text{C.45})$$

En remplaçant l'équation (C.43)-(C.45) dans l'équation du mouvement (C.36), tout en tenant compte des équations (C.4)-(C.6), on arrive à

$$\begin{aligned} & -([\mathbf{M}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{M}_0] + [\mathbf{M}_p]e^{i\bar{\Omega}t})e^{i\varpi t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} (u\bar{\Omega} + \varpi)^2\{\Phi_u^+\}e^{iu\bar{\Omega}t} \\ & + ([\mathbf{C}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{C}_0] + [\mathbf{C}_p]e^{i\bar{\Omega}t})e^{i\varpi t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} i(u\bar{\Omega} + \varpi)\{\Phi_u^+\}e^{iu\bar{\Omega}t} \\ & + ([\mathbf{K}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_p]e^{i\bar{\Omega}t})e^{i\varpi t} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u^+\}e^{iu\bar{\Omega}t} = \{F_h^+\}e^{i\varpi t} \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Ce qui mène, en suivant la même procédure que dans le cas précédant, à une équation matricielle finale de la forme

$$\{\Phi\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u\} e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (C.53)$$

dont la première et la deuxième dérivées par rapport au temps sont respectivement

$$\{\dot{\Phi}\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} iu\bar{\Omega}\{\Phi_u\} e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (C.54)$$

Et

$$\{\ddot{\Phi}\} = - \sum_{u=-\infty}^{\infty} u^2\bar{\Omega}^2\{\Phi_u\} e^{iu\bar{\Omega}t} \quad (C.55)$$

La substitution des équations (C.53)-(C.55) dans l'équation du mouvement (C.49) tout en tenant compte des équations (C.4)-(C.6) donne

$$\begin{aligned} & -([\mathbf{M}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{M}_0] + [\mathbf{M}_p]e^{i\bar{\Omega}t}) \sum_{u=-\infty}^{\infty} u^2\bar{\Omega}^2\{\Phi_u\} e^{iu\bar{\Omega}t} \\ & + ([\mathbf{C}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{C}_0] + [\mathbf{C}_p]e^{i\bar{\Omega}t}) \sum_{u=-\infty}^{\infty} iu\bar{\Omega}\{\Phi_u\} e^{iu\bar{\Omega}t} \\ & + ([\mathbf{K}_m]e^{-i\bar{\Omega}t} + [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_p]e^{i\bar{\Omega}t}) \sum_{u=-\infty}^{\infty} \{\Phi_u\} e^{iu\bar{\Omega}t} = \{F_p\} \end{aligned} \quad (C.56)$$

La comparaison des termes exponentiels dans l'équation (C.56) mène à des équations qui, en les regroupant en une seule équation matricielle donnent

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ \dots & \mathbf{K}_0 - i2\bar{\Omega}\mathbf{C}_0 - 4\bar{\Omega}^2\mathbf{M}_0 & \mathbf{K}_m - i\bar{\Omega}\Delta\mathbf{C}_{-1} - \bar{\Omega}^2\mathbf{M}_m & & 0 \\ \dots & \mathbf{K}_p - i2\bar{\Omega}\mathbf{C}_p - 4\bar{\Omega}^2\mathbf{M}_p & \mathbf{K}_0 - i\bar{\Omega}\mathbf{C}_0 - \bar{\Omega}^2\mathbf{M}_0 & & \mathbf{K}_m \\ \dots & 0 & \mathbf{K}_p - i\bar{\Omega}\mathbf{C}_p - \bar{\Omega}^2\mathbf{M}_p & & \mathbf{K}_0 \\ \dots & 0 & 0 & & \mathbf{K}_p \\ \dots & 0 & 0 & & 0 \\ \ddots & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{K}_m + i\bar{\Omega}\mathbf{C}_m - \bar{\Omega}^2\mathbf{M}_m \\ \mathbf{K}_0 + i\bar{\Omega}\mathbf{C}_0 - \bar{\Omega}^2\mathbf{M}_0 \\ \mathbf{K}_p + i\bar{\Omega}\mathbf{C}_p - \bar{\Omega}^2\mathbf{M}_p \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \{\phi_{-2}\} \\ \{\phi_{-1}\} \\ \{\phi_0\} \\ \{\phi_1\} \\ \{\phi_2\} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{F_p\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (C.57)$$

L'équation (C.57) représente un système d'équations linéaires de la forme

$$[\mathbf{K}^p]\{\Phi^p\} = \{F^p\} \quad (C.58)$$

La résolution de l'équation (C.58) permet de déterminer les vecteurs $\{\Phi_u\}$ qui, remplacés dans l'équation (C.53) puis (C.50), permet d'obtenir la réponse à une force constante.

Annexe D

Matrices et vecteurs de l'élément d'arbre utilisés dans le modèle éléments finis

$$[\mathbf{M}_t] = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$[\mathbf{M}_r] = \frac{\rho I_m}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

$$[\mathbf{M}_1] = \frac{\rho I_m}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

$$[\mathbf{M}_2] = \frac{\rho I_m}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

$$[\mathbf{G}_1] = \frac{\rho I_m}{30L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$[\mathbf{G}_2] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ -156 & 0 & 0 & 22L & -54 & 0 & 0 & -13L \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 0 & -22L & -4L^2 & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ -54 & 0 & 0 & 13L & -156 & 0 & 0 & -22L \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \\ 0 & 13L & 3L^2 & 0 & 0 & 22L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

$$[\mathbf{K}_1] = \dot{I}_x^2 [\mathbf{M}_{t1}] - \dot{I}_y^2 [\mathbf{M}_t] + \dot{I}_z^2 [\mathbf{M}_{t2}] \quad (\text{D.7})$$

$$[\mathbf{M}_{t1}] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -156 & -22L & 0 & 0 & -54 & 13L & 0 \\ 0 & -22L & -4L^2 & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -54 & -13L & 0 & 0 & -156 & 22L & 0 \\ 0 & 13L & 3L^2 & 0 & 0 & 22L & -4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$[\mathbf{M}_{t2}] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} -156 & 0 & 0 & 22L & -54 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22L & 0 & 0 & -4L^2 & 13L & 0 & 0 & 3L^2 \\ -54 & 0 & 0 & 13L & -156 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13L & 0 & 0 & 3L^2 & -22L & 0 & 0 & -4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$[\mathbf{M}_3] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 22L & 0 & 0 & -4L^2 & 13L & 0 & 0 & 3L^2 \\ 0 & -22L & -4L^2 & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ -13L & 0 & 0 & 3L^2 & -22L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 13L & 3L^2 & 0 & 0 & 22L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

$$[\mathbf{K}_3] = \dot{I}_x^2 [\mathbf{M}_{r1}] + \dot{I}_y^2 [\mathbf{M}_r] + \dot{I}_z^2 [\mathbf{M}_{r2}] \quad (\text{D.10})$$

$$[\mathbf{M}_{r1}] = \frac{\rho I_m}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

$$[\mathbf{M}_{r2}] = \frac{\rho I_m}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

$$[\mathbf{K}_4] = \dot{r}_x^2 [\mathbf{M}_{r1}] - \dot{r}_y^2 [\mathbf{M}_2] - \dot{r}_z^2 [\mathbf{M}_{r2}] \quad (\text{D.13})$$

$$[\mathbf{K}_5] = -\frac{2\rho l}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

$$[\mathbf{K}_{st1}] = \frac{EI_m}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

$$[\mathbf{K}_{st2}] = \frac{EI_m}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 6L & 0 & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & 0 & -2L^2 \\ 0 & -6L & -4L^2 & 0 & 0 & 6L & -2L^2 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 6L & 0 & 0 & -2L^2 & -6L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -6L & -2L^2 & 0 & 0 & 6L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

$$[\mathbf{K}_{st3}] = \frac{EI_m}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & -4L^2 & -6L & 0 & 0 & -2L^2 \\ 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & -2L^2 & -6L & 0 & 0 & -4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.17})$$

$$\{\mathbf{F}_s\} = -\rho A \begin{pmatrix} \frac{L}{2}\lambda_1 + \frac{3L^2}{20}\lambda_3 \\ \frac{L}{2}\lambda_2 + \frac{3L^2}{20}\lambda_4 \\ \frac{L^2}{12}\lambda_2 + \frac{L^3}{30}\lambda_4 \\ -\frac{L^2}{12}\lambda_1 - \frac{L^3}{30}\lambda_3 \\ \frac{L}{2}\lambda_1 + \frac{7L^2}{20}\lambda_3 \\ \frac{L}{2}\lambda_2 + \frac{7L^2}{20}\lambda_4 \\ -\frac{L^2}{12}\lambda_2 - \frac{L^3}{20}\lambda_4 \\ \frac{L^2}{12}\lambda_1 + \frac{L^3}{20}\lambda_3 \end{pmatrix} - \rho I_m \begin{pmatrix} 2\dot{\Gamma}_x(\dot{\Gamma}_y + \dot{\phi}) - \lambda_3 \\ 2\dot{\Gamma}_z(\dot{\Gamma}_y + \dot{\phi}) - \lambda_4 \\ 0 \\ 0 \\ -2\dot{\Gamma}_x(\dot{\Gamma}_y + \dot{\phi}) + \lambda_3 \\ -2\dot{\Gamma}_z(\dot{\Gamma}_y + \dot{\phi}) + \lambda_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \rho \chi I_m \left(\begin{pmatrix} -\lambda_6 \\ \lambda_7 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_6 \\ -\lambda_7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2\phi + \begin{pmatrix} -\lambda_7 \\ -\lambda_6 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_7 \\ \lambda_6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2\phi \right) \quad (\text{D.18})$$

$$\{\mathbf{F}_{sp}\} = -\rho Ag \cos \beta \begin{Bmatrix} -\sin \gamma \int_0^L N_1(y) dy \\ \cos \gamma \int_0^L N_3(y) dy \\ 0 \\ 0 \\ -\sin \gamma \int_0^L N_1(y) dy \\ \cos \gamma \int_0^L N_3(y) dy \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \rho ALg \cos \beta \begin{Bmatrix} -\sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \\ 0 \\ -\sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.19})$$

Paramètres utilisés dans les expressions des vecteurs force

$$\lambda_1 = \ddot{x}_b - 2\dot{\Gamma}_z \dot{y}_b + 2\dot{\Gamma}_y \dot{z}_b - (\dot{\Gamma}_y^2 + \dot{\Gamma}_z^2) x_b + (\dot{\Gamma}_x \dot{\Gamma}_y - \ddot{\Gamma}_z) y_b + (\dot{\Gamma}_x \dot{\Gamma}_z + \ddot{\Gamma}_y) z_b \quad (\text{D.20})$$

$$\lambda_2 = \ddot{z}_b - 2\dot{\Gamma}_y \dot{x}_b + 2\dot{\Gamma}_x \dot{y}_b - (\dot{\Gamma}_x^2 + \dot{\Gamma}_y^2) z_b + (\dot{\Gamma}_x \dot{\Gamma}_z - \ddot{\Gamma}_y) x_b + (\dot{\Gamma}_y \dot{\Gamma}_z + \ddot{\Gamma}_x) y_b \quad (\text{D.21})$$

$$\lambda_3 = \dot{\Gamma}_x \dot{\Gamma}_y - \ddot{\Gamma}_z \quad (\text{D.22})$$

$$\lambda_4 = \dot{\Gamma}_y \dot{\Gamma}_z + \ddot{\Gamma}_x \quad (\text{D.23})$$

$$\lambda_5 = \ddot{\Gamma}_z - \dot{\Gamma}_x \dot{\Gamma}_y - 2\dot{\phi} \dot{\Gamma}_x \quad (\text{D.24})$$

$$\lambda_6 = \ddot{\Gamma}_x - \dot{\Gamma}_y \dot{\Gamma}_z - 2\dot{\phi} \dot{\Gamma}_z \quad (\text{D.25})$$

$$\lambda_7 = \ddot{\Gamma}_z + \dot{\Gamma}_x \dot{\Gamma}_y + 2\dot{\phi} \dot{\Gamma}_x \quad (\text{D.26})$$

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Pr. OUELAA Noureddine, qui a accepté la direction de ma thèse, pour son soutien assidu, son intérêt sincère et constant, pour les nombreux échanges fructueux qui m'ont énormément aidé à réaliser ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Pr. CHAOUI Kamel qui a accepté de présider mon jury de thèse.

Mes remerciements chaleureux vont également à Pr. DJEMAA Med Chérif et à Pr. MILOUDI Abdelhamid qui ont eu la gentillesse d'accepter de faire partie du jury.

RESUME

Ce travail a pour objet l'étude du comportement dynamique et de la stabilité des rotors. Dans la majorité des études rencontrées dans la littérature, le mouvement de la base sur laquelle est monté le système rotor-palier n'est pas pris en compte dans la modélisation. Les rares études considérant le mouvement de la base sont intéressées au régime stationnaire. Afin d'obtenir un modèle plus complet, aussi bien le mouvement de la base que la variation éventuelle de la vitesse de rotation doivent être pris en considération. Ceci permet d'étudier le comportement dynamique des rotors dont la base est en mouvement lors de la traversée des vitesses critiques pendant les phases de démarrage et d'arrêt ; car un accroissement important des vibrations peut avoir des conséquences néfastes sur la machine.

Le présent travail a pour objectif de prévoir le comportement dynamique d'un système rotor-palier monté sur une base rigide soumise à des mouvements déterministes. La vitesse de rotation du rotor peut être variable selon une loi prédéfinie. Les sources d'excitation considérées sont : le balourd tournant à la vitesse de rotation du rotor, les mouvements de la base et le poids propre du rotor.

Les énergies, cinétique et de déformation ainsi que le travail virtuel des composants d'un rotor flexible sont calculés. Le premier modèle proposé est un modèle relativement simple basé sur la méthode de Rayleigh-Ritz, le second est basé sur la méthode des éléments finis. Pour les deux modèles six types de mouvements de la base sont considérés : 3 rotations et 3 translations.

L'utilisation des équations de Lagrange fournit les équations différentielles du mouvement du rotor en flexion par rapport à la base rigide en mouvement. La méthode d'intégration temporelle utilisée est la méthode pas à pas de Newmark.

Des simulations numériques du comportement dynamique de rotors tournant à vitesse constante ou variable pour différents mouvements de la base sont présentées et discutées.

Une étude de stabilité est aussi réalisée. Elle concerne les rotors soumis à une excitation paramétrique due à la dissymétrie du rotor ou à une rotation sinusoïdale de la base. La méthode de Hill a été utilisée pour prévoir les zones d'instabilité et aussi pour déterminer la réponse du rotor aux différentes excitations auxquelles il est soumis, et ceci pour différents amortissements.

Mots clés : Dynamique des rotors, méthode de Rayleigh-Ritz, méthode des éléments finis, mouvement de la base, dissymétrie, excitation paramétrique, stabilité, vitesse variable.

ABSTRACT

This work aims to study the dynamic behavior and stability of rotors. In most of studies found in the literature, the movement of the base on which the rotor-bearing system is mounted is not taken into account in the modeling. The few studies considering the movement of the base have been interested only by steady-state behavior. In order to obtain a more complete model, both the movement of the base and the possible variation of the spin-speed must be taken into consideration. This allows the study of the dynamic behavior of rotor-bearing systems mounted on moving base when crossing critical speeds during start-up and shut-down of the machine, since a significant increase in the vibrations can have catastrophic consequences on the machine.

The present work aims to predicting the dynamic behavior of a rotor-bearing system mounted on a rigid base subjected to deterministic movements. The rotational speed of the rotor may be variable according to a predefined law. The excitation sources considered are: mass unbalance, movements of the base and rotor weight.

The kinetic and strain energies, as well as the virtual work of the components of the flexible rotor are calculated. The first model proposed is a relatively simple model based on Rayleigh-Ritz method, the second, on the finite element method. For both models, six types of movements of the base are considered: 3 rotations and 3 translations. The use of Lagrange's equations provides the differential equations of the rotor motion in bending with respect to the moving rigid base. The equations are solved using the step by step Newmark time integration method.

Numerical simulations of the dynamic behavior of rotors rotating at constant or variable speed for different cases of base motion are presented and discussed.

A stability study is also achieved. It concerns rotors subjected to parametric excitation due to asymmetry of the rotor or to a sinusoidal rotation of the base. Hill's method was used to predict instability zones and rotor response to different excitations, for different damping values.

Keywords : Rotor dynamics, Rayleigh-Ritz method, finite element method, base motion, asymmetry, parametric excitation, stability, variable spin speed.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة السلوك الديناميكي للدورات واستقرارها. في معظم الدراسات التي وجدت في أدبيات هذا التخصص، فإن حركة القاعدة التي وضع عليها النظام المكون من دوار وحامل لا تؤخذ بعين الاعتبار في النمذجة. والدراسات القليلة التي عُنيت بحركة القاعدة، اهتمت فقط بحالة السرعة الثابتة. ومن أجل الحصول على نموذج أكثر اكتمالا، يجب أن تُؤخذ في الاعتبار كل من حركة القاعدة والتغير المحتمل في سرعة الدوران. وبهذا يمكن دراسة السلوك الديناميكي للدورات ذات القاعدة المتحركة أثناء عبور السرعات الحرجة خلال مراحل التشغيل والإيقاف، لأن زيادة كبيرة في الاهتزازات يمكن أن يكون لها عواقب وخيمة على الجهاز.

يهدف هذا العمل إلى التنبؤ بالسلوك الديناميكي لنظام دوار و حامل، مركب على قاعدة صلبة تتعرض لحركات حتمية. يُمكن أن تكون سرعة دوران الدوار متغيرة وفقا لقانون محدد. وقد أخذ بعين الاعتبار مصدران للإثارة: كتلة عدم التوازن التي تدور بسرعة دوران الدوار، وكذا الحركات المختلفة التي يمكن أن تخضع لها قاعدته.

لقد تمّ حساب الطّاقات الحركية والكامنة، وكذا العمل الافتراضي لمكونات الدوار المرن. وبناءً على ذلك تمّ اقتراح نموذجين: النموذج الأول نموذج بسيط نسبياً يعتمد على طريقة رايلي-ريتز، أما الثاني فيعتمد على طريقة العناصر المنتهية. وبالنسبة لكلا النموذجين، تمّ احتساب ستة أنواع من حركة القاعدة: 3 دورانية و 3 انسابية.

استخدام معادلات لاغرانج مكن من الحصول على المعادلات التفاضلية لحركة الدوار الانحنائية بالنسبة للقاعدة الصلبة المتحركة. وقد تمّ استعمال طريقة التّكامل الزمني خطوة خطوة لنيومارك لحلّ هذه المعادلات.

وتّم عرض ومناقشة المحاكاة العددية للسلوك الديناميكي لدورات ذات سرعة ثابتة أو متغيرة لحالات مختلفة من حركة القاعدة.

كما تمّ أيضا إنجاز دراسة حول ثبات الدورات. ويتعلق الأمر بالدورات المتعرضة لإثارة وسيطية ناتجة عن عدم تناظرها أو عن تعرض قاعدتها لحركة دورانية جيبيية. استعمال طريقة هيل مكنت من تحديد مجالات عدم الثبات وكذا إيجاد ردة فعل الدوار لمختلف الإثارات، وذلك من أجل قيم مختلفة لثابت الإخماد.

كلمات مفتاحية : دينامكا الدورات، طريقة رايلي ريتز، طريقة العناصر المنتهية، حركة القاعدة، عدم التناظر، الإثارة الوسيطة، الثبات، سرعة متغيرة.