الجمـــهورية الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 08 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière

Département des Mathématiques

Polycopié de Cours

Dr : BENRABAH Abderafik

Théorie de la Mesure et de l'Intégration

(cours et exercices corrigés)

Troisième Année Licence Mathématiques

2015/2016

Table des matières

0.1 Introduction

L'objectif de ce cours est de donner une vue d'ensemble de la théorie de la mesure, de l'intégration et des probabilités correspondant à un niveau de troisième année de licence ou de première année de master (en mathématiques). La lecture de ce cours requiert la connaissance des notions d'analyse réelle, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel enseignées en première et deuxième année de licence de mathématiques dans la plupart des universités algériennes.
Nous nous sommes attachés à introduire le vocabulaire de la théorie des probabilités en parallèle à celui de l'analyse. Nous espérons ainsi faciliter l'accès conjoint à des études ultérieures dans ces deux branches des mathématiques, ce qui semble devenir indispensable aux mathématiciens se formant en vue d'appliquer ces théories. Nous attachons une importance considérable aux exercices qui sont proposés dans ce cours, certains sont des applications directes du cours, d'autres contiennent des développements importants.
Ce cours, issu d'un polycopié de cours amélioré et complété sur plus de 5 ans, a bénéficié de nombreuses remarques ou questions de nos étudiants et de discussions avec nos collègues (en particulier probabilistes). Nous tenons à les en remercier chaleureusement.
Une thèorie de l'intégration est un procédé qui associe à toute fonction f un nombre $I(f)$, appelé intégrale de f et qui vérifie certaines propriétés (linéarité, positivité).

0.1.1 Exemple fondamental

On retrouve pour la premiere fois l'exemple suivant (actuellement connu comme l'integrale de **Riemann** [1]) dans le cours de **Cauchy** [2] en 1820.
Soit $C^0([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ a valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, la limite suivante existe :

$$I(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N} f\left(a + i\frac{b-a}{N}\right) \tag{0.1.1}$$

La relation (0.1.1) est :

- **linéraire** :

  1. $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2),\ \forall\ f_1,\ f_2 \in C^0([a,b],\mathbb{R})$
  2. $I(\lambda f) = \lambda I(f),\ \forall\ f \in C^0([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

- **positive** : Si $f > 0$, alors $I(f) > 0$.

Dans ce cas, $I(f)$ a une interprétation graphique : c'est l'aire sous le graphe de f.

1. Bernhard Riemann, mathématicien allemand (1826-1866), dont les contributions furent fondamentales en analyse, en théorie des nombres et en géométrie différentielle.
2. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps, quoique devancé par Leonhard Euler et Paul Erdos, avec près de 800 parutions et sept ouvrages, sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque.

Remarque 0.1.1. Il n'est pas nécessaire d'utiliser une subdivision régulière pour calculer $I(f)$.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$ tel que $\max\limits_{i=1,...,N}(x_i - x_{i-1}) \leq \delta$ et pour tous points $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., N$ on a :

$$\left| I(f) - \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \epsilon \tag{0.1.2}$$

Mais pourquoi appelle-t-on cela l'intégrale de Riemann ? Riemann s'est demandé pour quelles classes de fonctions les procédés (0.1.1) et (0.1.2) permettent de définir l'intégrale. Est-il nécessaire de se limiter aux fonctions continues ? Il a remarqué en 1854 que l'on pouvait utiliser ces procédés pour une certaine classe de fonctions non continues. Les fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pour lesquelles on peut définir $I(f)$ par (0.1.1) et (0.1.2) sont appelées des fonctions **intégrables au sens de Riemann.** L'intégrale $I(f)$ est souvent notée $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx.$ [3]

Limitations de l'intégrale de Riemann.

Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann est bornée. En pratique, ce n'est pas très gênant, on peut généraliser un peu le procédé pour intégrer certaines fonctions non bornées.

Exemple. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ peut être définie comme $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{0.1.3}$$

C'est la fonction indicatrice des rationnels, et f n'est *pas intégrable* au sens de Riemann. En effet, dans le procédé (0.1.2) on peut choisir tous les ξ_i rationnels (respectivement irrationnels) et on en déduit que $I(f)$ vaudrait 1 (resp. 0)...

Henri Lebesgue [4] (mathématicien français du début du XXème siècle) a montré qu'une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable.

Intégrales et primitives. Soit $F \in C^0([a, b], \mathbb{R})$. Si F est dérivable sur $]a, b[$ et si $f = F'$, a-t-on nécessairement le théorème fondamental du calcul intégral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$?

3. Le symbole $\int$ d'intégration est une forme italique alongée du caractère typgraphique ancien (**s long**). Il a été utilisé dès le xviie siècle par **Leibniz**, comme abbréviation de **summa**, qui veut dire (**somme**) en latin.

4. Henri Lebesgue, mathématicien français (1875-1941), surtout célèbre pour sa théorie de l'intégration, mais dont l'influence fut considérable dans tout le domaine de l'analyse réelle.

La réponse est non, il n'y a aucune raison que f soit intégrable au sens de Riemann.

Limites simples. Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann. On suppose que $\forall x \in [a, b]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. A-t-on que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$? Si il y a convergence uniforme, on sait que cela est vrai, sinon un contre exemple est facile a trouver. En fait, la question est mal posée : même si l'on suppose que $|f_n(x)| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a, b]$, la limite f n'est en général pas intégrable au sens de Riemann.

L'objectif de Lebesgue est le suivant : **tenter de généraliser la notion de longueur (aire, volume,...) à une famille de parties plus grandes que les intervalles (pavés). Plus précisément, il cherche une fonction**

$$\lambda : P(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty],$$

vérifiant les 3 propriétés suivantes

- invariance par translation $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(A + v) = \lambda(A)$
- σ-additivité $\lambda(\cup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \lambda(Ai)$, I dénombrable, A_i disjoints
- normalisation $\lambda([0, 1]^n) = 1$

Une **théorie de la mesure** est un procédé qui associe a tout ensemble A (dans une certaine classe) un nombre positif $\mu(A)$, appelé **mesure de** A, et qui vérifie certaines propriétés (monotonie, additivité, ...). En dimension 1, la mesure correspond a la longueur, a l'aire en dimension 2 et au volume au dimension 3, d'ou la généralisation.

0.1.2 L'idée de Lebesgue

Concernant l'intégration, l'idée de Lebesgue est la suivante :
plutôt que de définir les fonctions horizontalement par $f(t)$, il définit les fonctions verticalement par $f^{-1}(x)$. L'intégrale est alors une somme sur les valeurs et non sur le support.
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ et $S_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ subdivision regulière de $[0, 1]$. Rappelons le principe de l'intégrale de Riemann : on commence par noter

$$I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[\qquad 1 \leq k \leq n-1$$

$$I_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

et on considère les sommes de Darboux [5] inférieure et supérieure :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} f$$

5. Jean-Gaston Darboux, mathématicien français (1842-1917), spécialiste de géométrie différentielle et d'analyse

$$\Sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f$$

On a pour tout n l'inégalité : $\sigma_n(f) \leq \Sigma_n(f)$, et si f est Riemann intégrable, alors :

$$\lim_{n\to\infty} (\Sigma_n(f) - \sigma_n(f)) = 0.$$

Notons maintenant :

$$E_k = \left\{x \in [0,1] \,:\, \frac{k-1}{n} \leq f(x) < \frac{k}{n}\right\} \quad 1 \leq k \leq n.$$

$$E_n = \left\{x \in [0,1] \,:\, \frac{n-1}{n} \leq f(x) < 1\right\}$$

Les $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ forment clairement une partition de $[0,1]$. Cette subdivision permet d'approcher uniformément la fonction f par les fonctions :

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}.\mathbf{1}_{E_k}, \quad \psi = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}.\mathbf{1}_{E_k},$$

ou $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A, i.e. $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Les fonctions ϕ et ψ sont simples, ou étagées, c'est-à-dire qu'elle ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, et on a :

$$\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\psi(x) - \phi(x) = \frac{1}{n} \qquad \forall x \in [0,1]$$

On voudrait donc approcher l'intégrale de f sur $[0,1]$ par celles de ϕ et ψ. Ceci donne, en supposant nos fonctions Riemann intégrables :

$$\int_0^1 \phi(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 \psi(x)dx,$$

avec de façon naturelle :

$$\int_0^1 \phi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \int_0^1 \mathbf{1}_{E_k}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\lambda(E_k),$$

ou $\lambda(E_k)$ serait la mesure de E_k, i.e. sa longueur si c'est un intervalle, la somme des longueurs de ses composantes connexes si c'est une union d'intervalles disjoints, etc.

Mais si f est très chahutée, on sent que les ensembles E_k ne seront plus aussi simples et les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \mathbf{1}_{E_k}(x)dx$ ne seront plus nécessairement des intégrales de Riemann (penser à la fameuse fonction de Péano $\mathbf{1}_{Q\cap[0,1]}$). [6] Il convient donc de définir proprement ce qu'on entend par la mesure d'un ensemble, puis de l'appliquer àla construction d'une nouvelle intégrale.

6. Giuseppe Peano (1858-1932) est un mathématicien et linguiste italien de la fin du xixe et du début du xxe siècle. Pionnier de l'approche formaliste des mathématiques, il développa, parallèlement à l'allemand Richard Dedekind, une axiomatisation de l'arithmétique (1889).

0.2 Exercices

Tous les exercices de cette introduction n'ont pas un lien direct avec le cours. Par contre, ils constituent des révisions nécessaires à la suite du cours.

0.2.1 Énoncés

1. *Rappel* : Si $f : E \to F$ et $A \subset F$, $f^{-1}(A) = \{x \in E : \ f(x) \in A\}$. Si $C \subset E$, $f(C) = \{f(x), \ x \in C\}$. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$.
   – (a) Déterminer $f([-3,-1]), \ f([-3,1]), \ f(]-3,1])$.
   – (b) Déterminer $f^{-1}(]-\infty,2]), \ f^{-1}(]1,+\infty[), \ f^{-1}\left(]-1,0] \cup [1,2[\right)$.

2. Calculer les limites suivantes :
   – (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x,$
   – (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)^\alpha}{1-(1+x)^\beta}, \ \text{pour } \alpha,\beta>0.$

3. Calculer les intégrales suivantes :
   – (a) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx, \ \int_e^\infty \frac{1}{\ln^2(x)x}dx,$
   – (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)}dx, \ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}dx.$

4. **Intégrales de Wallis** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx.$$

   – (a) Calculer I_0 et I_1.
   – (b) Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
   – (c) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}, \ I_{2p} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)...1}{2p(2p-2)...2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2p(2p-2)...2}{(2p+1)(2p-1)...1}$.
   – (d) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \ I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$.
   – (e) En déduire la formule de Wallis :

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)...2}{(2p-1)(2p-3)...1}\right]^2 = \pi.$$

   – (f) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ I_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

0.2.2 Corrigés

1. – (a) triviale
   – (b)

$$f^{-1}(]-\infty,2]) = [-\sqrt{2},\sqrt{2}], \ f^{-1}(]1,+\infty[) =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,$$

$$f^{-1}(]-1,0]\cup[1,2[) = (0)\cup]-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}[.$$

2. – (a) $\dfrac{\sin(x)}{\log(1+x)} \sim_{0\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$ et $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = e^{x\log(1+\frac{2}{x})}$ et $x\log(1+\dfrac{2}{x}) \sim_{x\to+\infty}$ $\dfrac{2x}{x} \to_{x\to+\infty} 2$ donc par continuité de la fonction exp : $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x \to_{x\to+\infty} e^2$.
   – (b) $\dfrac{1-\cos(x)}{x\sin(x)} = \dfrac{(x^2/2)+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \sim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = 1/2$. et $\dfrac{1-(1+x)^\alpha}{1-(1+x)^\beta} = \dfrac{\alpha x + o(x)}{\beta x + o(x)} \sim_{x\to 0}$ $\dfrac{\alpha x}{\beta x} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.
3. – (a) on intègre par parties : $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx = 2$. et pour la deuxième intégrale on fait le changement de variable : $t = \log(z),\ z = e^t,\ dz = e^t dt$, on obtient $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{\ln^2(x)x}dx = 1$.
   – (b) On décompose $\dfrac{1}{(2-x)(1+x)} = \dfrac{1/3}{2-x} + \dfrac{1/3}{1+x}$ (toujours possible pour une fraction rationelle à pôles simples) et donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)}dx = 1$, et pour la deuxième intégrale on fait le changement de variable : $t = \tan(x),\ x = \arctan(t),\ dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$, on obtient $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}dx = 1$.
4. – (a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = 1$.
   – (b) On intègre par parties pour tout $n \geq 2$:
$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\sin(x)dx = (n+1)(I_n - I_{n+2}),$$
   d'où $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.
   – (c) Démonstration par récurrence de la formule pour I_{2p} (démonstration similaire pour I_{2p+1}) :
     – c'est vrai en $p = 0$
     – si c'est vrai jusqu'au rang p alors $I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2}I_{2p} = \dfrac{(2p+1)(2p-1)...1}{(2p+2)(2p)...2}\dfrac{\pi}{2}$.
   – (d) $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,\pi/2],\ 0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x)$ donc par intégration $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$, donc $1 \leq \dfrac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \dfrac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \dfrac{2p+1}{2p}$, donc
$$\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1.$$
   – (e) on déduit de la question précédente :
$$\lim_{p\to+\infty} \frac{\pi}{2}\left[\frac{(2p-1)(2p-3)...1}{2p(2p-2)...2}\right]^2 (2p+1) = 1,$$
   d'où la formule de Wallis.

– (f) On fait la démonstration pour n impair. Soit $n = 2p+1$:

$$\begin{aligned}
I_{2p+1} &= \frac{2p(2p-2)...2}{(2p+1)...1} \\
&= \frac{\sqrt{p}}{2p+1}\sqrt{\frac{1}{p}\left(\frac{2p(2p+2)...2}{(2p-1)...1}\right)^2} \\
&\sim_{p\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(2p+1)}}.
\end{aligned}$$

Chapitre 1

Tribus et Mesures

Le but de ce chapitre est de définir les objets que nous seront amenés à mesurer : les ensembles mesurables et les fonctions mesurables.

1.1 Introduction

1.1.1 L'idée de mesure et les expériences aléatoires

L'idée de départ de la théorie de la mesure est d'assigner, à chaque partie d'un ensemble donné, un nombre réel positif (la mesure de la partie), de manière à satisfaire certaines propriétés naturelles, notamment d'additivité. Ceci généralise les notions classiques de longueur d'une courbe, d'aire d'une surface ou de volume d'un solide.
Pour des raisons profondes, il n'est généralement pas possible de définir la mesure de toute partie de Ω : on doit se restreindre à une certaine classe (**tribu**) de parties de (dites mesurables).
Il se trouve que le concept de probabilité est mathématiquement un cas particulier de celui de mesure, correspondant au cas où la mesure de (la **masse totale**) vaut 1. A la suite des travaux de Borel [1] et de Fréchet [2] qui ont laissé entrevoir les applications de la théorie de la mesure au calcul des probabilités, puis de ceux de Lévy, [3] qui a compris le rôle fondamental de la notion de convergence en loi des suites de variables aléatoires, Kolmogorov [4] a dégagé le modèle mathématique d'une expérience aléatoire (le futile tirage d'une boule de loto, par exemple), qui comporte les trois éléments principaux suivants (dont la détermination, d'ailleurs, est souvent problématique).

1. Emile Borel, mathématicien français (18711956)
2. Maurice Fréchet, mathématicien français (18781973)
3. Paul Pierre Lévy, mathématicien français (18861971), célèbre pour ses travaus en probabilités, et notamment pour avoir introduit les martingales et les processus de Lévy.
4. Andreï Nikolaevich Kolmogorov, mathématicien russe de premier plan (19031987), célèbre pour ses travaux fondamentaux notamment en probabilité, topologie, logique, turbulence et mécanique.

1.1.2 Cas d'un problème discret

Pour introduire la série de définitions qui suivent, commençons par quelques exemples, tirés du calcul des probabilités. Le calcul des probabilités s'intéresse à mesurer la (**chance**) qu'un certain événement, résultat d'une expérience, a de se produire. Considérons par exemple l'expérience qui consiste à lancer un dé. On appelle éventualité associée à cette expérience un des résultats possibles de cette expérience, et univers des possibles l'ensemble E de ces éventualités. Dans notre exemple, les éventualités peuvent être $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6, on pourrait choisir aussi comme éventualités les résultats correspondant au dé cassé. On peut donc tout de suite remarquer que l'ensemble E des univers du possible dépend de la modélisation, c'est-à-dire de la formalisation mathématique que l'on fait du problème. Notons qu'il est parfois difficile de définir l'ensemble E.
À partir des éventualités, qui sont donc les éléments de l'univers des possibles E, on définit les événements, qui forment un ensemble de parties de E. Dans notre exemple du lancer de dé, l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$. Dans l'exemple du dé, la partie $\{2, 4, 6\}$ de E est l'événement : **le résultat du lancer est pair**. On appelle événement élémentaire un singleton, par exemple $\{6\}$ dans notre exemple du lancer de dé, événement certain l'ensemble E tout entier, et l'événement vide l'ensemble $\emptyset$, (qui a donc une chance nulle de se réaliser). Pour mesurer la chance qu'a un événement de se réaliser, on va définir une application p de l'ensemble des événements (donc de $\mathscr{P}(E)$ dans notre exemple du lancer de dé) dans $[0, 1]$ avec certaines propriétés (qui semblent naturelles...). La chance (ou probabilité) pour un événement $A \subset E$ de se réaliser sera donc le nombre $p(A)$, appartenant à $[0, 1]$.
L'exemple du lancer de dé, que nous venons de considérer, est un problème discret fini, au sens ou l'ensemble E est fini. On peut aussi envisager des problèmes discrets infinis, l'ensemble E est alors infini dénombrable [5], ou des problèmes (parfois appelés continus) où E est infini non dénombrable.

1.1.3 Exemple continu

Considérons maintenant l'expérience qui consiste à lancer une balle de ping-pong sur une table de ping-pong. Soit E l'ensemble des points de la table de ping-pong, on peut voir E comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, un événement élémentaire est alors un point $(x, y) \in E$ (le point d'impact de la balle), et un événement semble être une partie quelconque A de $\mathscr{P}(E)$. On suppose qu'on a effectué le lancer sans viser, c'est-à-dire en supposant que n'importe quel point de la table a une chance égale d'être atteint (les événements élémentaires sont dit équiprobables), et que la balle tombe forcément sur la table (on est très optimiste...). On se

5. on rappelle qu'un ensemble I est dénombrable s'il existe une bijection de I dans $\mathbb{N}$, il est au plus dénombrable s'il existe une injection de I dans $\mathbb{N}$

rend compte facilement que la probabilité pour chacun des points de E d'être atteint doit être nulle, puisque le nombre des points est infini. On peut aussi facilement deviner que la probabilité pour une partie A d'être atteinte (dans le modèle équiprobable) est le rapport entre la surface de A et la surface de E. La notion intuitive de surface correspond en fait à la notion mathématique de mesure que nous allons définir dans le prochain paragraphe. Malheureusement, comme on l'a dit dans le chapitre introductif, il ne nous sera pas mathématiquement possible de définir une application convenable, i.e. qui mesure toutes les parties de $\mathbb{R}$ (au sens intuitif de longueur) ou $\mathbb{R}^2$ (au sens intuitif de surface), ou même du sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$. On va donc définir un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$ (qu'on appelle tribu) sur lequel on pourra définir une telle application. Dans le cas d'un ensemble fini, la tribu sera, en général, $P(E)$ tout entier. Mais, dans le cas de la balle de ping-pong que vous venons de décrire, l'ensemble des événements sera une tribu strictement incluse dans $\mathscr{P}(E)$.

1.2 Définitions (Algèbre, Tribus et Mesure)

Dans toute la suite, E sera un ensemble quelconque non vide. On note alors $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E.

Définition 1.2.1. L'ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$ est une **algèbre** (de Boole[6]) si pour tout $A, B \in \mathscr{A}$

1. $\{\emptyset, E\} \in \mathscr{A}$
2. $A^c = E \backslash A \in \mathscr{A}$
3. $A \cap B \in \mathscr{A}$
4. $A \cup B \in \mathscr{A}$

Définition 1.2.2. Soient E un ensemble, T une famille de parties de E (i.e. $T \subset \mathscr{P}(E)$). La famille T est une tribu (on dit aussi une σ-algèbre) sur E si T vérifie :

1. $\emptyset \in T$, $E \in T$,
2. T est stable par union dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.
3. T est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, on a $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.
4. T est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in T$, on a $A^c \in T$ (On rappelle que $A^c = E \backslash A$).

6. Il existe une autre notion d'algèbre de Boole, qui est abstraction de celle-ci et que nous ne considérerons pas ici.

Il est clair que, pour montrer qu'une partie T de $\mathscr{P}(E)$ est une tribu, il suffit de vérifier par exemple, $\emptyset \in T$ (ou $E \in T$), 2 (ou 3) et 4.

***Exemple* 1.2.1.** *Tout ensemble E possède des tribus, par exemple :*
– $T = \{\emptyset, E\}$ *est la plus petite,*
– $T = \mathscr{P}(E)$, *est la plus grande,*
– *La classe des parties A de E qui sont dénombrables ou de complémentaire dénombrable,*
– *Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, la classe des intervalles.*

Définition 1.2.3. (Langage probabiliste) Soient E un ensemble quelconque ("*l'univers des possibles*") et T une tribu, on appelle "*éventualité*" les éléments de E et "*événements*" les éléments de T. On appelle "*événement élémentaire*" un singleton de T. On dit que deux événements $A, B \in T$ sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 1.2.1. ***(Stabilité par intersection des tribus)*** *Soient E et I deux ensembles. Pour tout $i \in I$, on se donne une tribu, T_i, sur E. Alors, la famille (de parties de E) $\cap_{i\in I} T_i = \{A \subset E, A \in T_i, \forall i \in I\}$ est encore une tribu sur E.*

Cette proposition nous permet de définir ci-après la notion de tribu engendrée.

Définition 1.2.4. (Tribu engendrée) Soient E un ensemble et $C \subset \mathscr{P}(E)$. On appelle tribu engendrée par C la plus petite tribu contenant C, c'est-à-dire la tribu $T(C)$ intersection de toutes les tribus sur E contenant C (cette intersection est non vide car $\mathscr{P}(E)$ est une tribu contenant C).

Il est parfois utile d'utiliser la notion d'algèbre, qui est indentique à celle de tribu en remplaçant "dénombrable" par "finie".

Définition 1.2.5. (Topologie) Une topologie sur E est une famille τ de parties de E telles que :

1. $\emptyset \in \tau$, $E \in \tau$
2. Si $O_1, ..., O_n \in \tau$, alors $\cap_{i=1}^n O_i \in \tau$
3. Si $O_1, ..., O_n \in \tau$, alors $\cup_{i=1}^n O_i \in \tau$

les éléments de τ s'appellent les ouverts de E. On dit que (E, τ) est un espace topologique.

Définition 1.2.6. (Tribu Borélienne) Soit E muni d'une topologie (un espace métrique, par exemple). On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de E, cette tribu sera noté $\mathscr{B}(E)$. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, cette tribu est donc notée $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 1.2.2. *On note C_1 l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $C_2 = \{]a, b[,\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ et $C_3 = \{]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$. Alors $T(C_1) = T(C_2) = T(C_3) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

(Noter que d'autres caractérisations de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, semblables, sont possibles.)

Démonstration. : On a, par définition de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, $T(C_1) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. On va démontrer ci-après que $T(C_1) = T(C_2)$ (le fait que $T(C_2) = T(C_3)$ est laissé au lecteur). Comme $C_2 \subset C_1$, on a $T(C_2) \subset T(C_1)$. Il suffit donc de démontrer l'inclusion inverse. On va montrer que $C_1 \subset T(C_2)$, on aura alors que $T(C_1) \subset T(C_2)$. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose $O \neq \emptyset$ (on sait déjà que $\emptyset \in T(C_2)$). Il existe une famille $(I_n)_{n\in A}$ d'intervalles ouverts t.q. $A \subset \mathbb{N}$ et $O = \cup_{n\in A} I_n$. Noter qu'on a aussi $O = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, en posant $I_n = \emptyset$, si $n \in \mathbb{N}\backslash A$. Comme $I_n \in C_2 \subset T(C_2)$ pour tout $n \in A$ et $\emptyset \in T(C_2)$, on en déduit, par stabilité dénombrable d'une tribu, que $O \in T(C_2)$. Donc, $C_1 \subset T(C_2)$ et donc $T(C_1) \subset T(C_2)$. On a bien montré que $T(C_1) = T(C_2)$. □

Définition 1.2.7. (Espace mesurable ou probabilisable, partie mesurable ou probabilisable) Soient E un ensemble, et T une tribu sur E. Le couple (E, T) est appelé "espace mesurable" ou (en langage probabiliste) "espace probabilisable". Les parties de E qui sont (resp. ne sont pas) des éléments de T sont dites mesurables ou probabilisables (resp. non mesurables, non probabilisables).

Définition 1.2.8. (Mesure) Soit (E, T) un espace mesurable. On appelle mesure une application $m : T \to \overline{\mathbb{R}}^+$ (avec $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup +\infty$) vérifiant :

1. $m(\emptyset) = 0$
2. m est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ de parties disjointes deux à deux, (i.e. t.q. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$), on a :

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \tag{1.2.1}$$

Remarque 1.2.1. (1.) Dans la définition précédente, la condition 1, peut être remplacée par la condition :$\exists A \in T$, $m(A) < \infty$ La vérification de cette affirmation est laissée au lecteur.
(2.) Une conséquence immédiate de la σ-additivité est l'additivité, c'est-à-dire que

$$m(\cup_{p=0}^{n} A_p) = \sum_{p=0}^{n} m(A_p),$$

pour toute famille finie $(A_p)_{p=0,\dots,n}$ d'éléments de T, disjoints 2 à 2. L'additivité se démontre avec la σ-additivité en prenant $A_p = \emptyset$ pour $p > n$ dans 1.2.1.

Définition 1.2.9. (Mesure finie) Soient E un ensemble et T une tribu sur E. On appelle mesure finie une mesure m sur T telle que $m(E) < \infty$.

Définition 1.2.10. (Probabilité) Soient E un ensemble et T une tribu sur E. On appelle probabilité une mesure p sur T t.q. $p(E) = 1$.

Définition 1.2.11. (Espace mesuré, espace probabilisé) Soient E un ensemble, T une tribu sur E et m une mesure (resp. une probabilité) sur T. Le triplet (E, T, m) est appelé "espace mesuré" (resp. "espace probabilisé").

Définition 1.2.12. (Mesure σ-finie) Soit (E, T, m) un espace mesuré, on dit que m est σ-finie (ou que (E, T, m) est σ-fini) si :

$$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,\ m(A_n) < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ et } E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Exemple (Mesure de Dirac) [7] Soient E un ensemble, T une tribu sur E et $a \in E$. On définit sur T la mesure δ_a par (pour $A \in T$) :

$$\delta_a(A) = 0,\ \text{ si } a \text{ n'appartient pas à } A$$

$$\delta_a(A) = 1,\ \text{ si } a \text{ appartient à } A$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.

Définition 1.2.13. (Partie négligeable) Soient (E, T, m) un espace mesuré et $A \subset E$. On dit que A est négligeable s'il existe un ensemble $B \in T$ tel que $A \subset B$ et $m(B) = 0$.

1.3 Propriétés des mesures

Proposition 1.3.1. *Soit (E, T, m) un espace mesuré. La mesure m vérifie les quatre propriétés suivantes :*

1. Monotonie : Soit $A, B \in T,\ A \subset B,$ alors

$$m(A) \leq m(B) \tag{1.3.1}$$

2. σ-sous-additivité : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,$ alors

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \tag{1.3.2}$$

3. Continuité croissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,$ t.q. $A_n \subset A_{n+1},$ pour tout $n \in \mathbb{N},$ alors

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)) \tag{1.3.3}$$

4. Continuité décroissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T,$ t.q. $A_{n+1} \subset A_n,$ pour tout $n \in \mathbb{N},$ et t.q. il existe $n_0 \in \mathbb{N},\ m(A_{n_0}) < \infty,$ alors

$$m(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)) \tag{1.3.4}$$

7. Paul Adrien Maurice Dirac, physicien britannique (19021984), qui eut des contributions fondamentales en m´ecanique quantique et en ´electrodynamique quantique

Démonstration. La démonstration de ces propriétés est facile : elles découlent toutes du caractère positif et du caractère σ-additif de la mesure. Attention : ces propriétés ne sont pas vérifiées par les mesures signées.

1. Monotonie. Soit $A, B \in T$, tq $A \subset B$. On a $B = A \cup (B \backslash A)$ et $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$. Comme $A \in T$ et $B \backslash A = B \cap A^c \in T$, l'additivité de m donne $m(B) = m(A) + m(B \backslash A) \geq m(A)$, car m prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Noter aussi que $m(B \backslash A) = m(B) - m(A)$ si $0 \leq m(A) \leq m(B) < \infty$ (mais cette relation n'a pas de sens si $m(A) = m(B) = \infty$).

2. σ-sous additivité. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$. On veut montrer que $m(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$. On pose $B_0 = A_0$ et, par récurrence sur n, $B_n = A_n \backslash (\cup_{i=0}^{n-1} B_i)$ pour $n \geq 1$. Par récurrence sur n on montre que $B_n \in T$ pour tout n en remarquant que, pour $n > 1$, $B_n = A_n \cap (\cap_{i=0}^{n-1} B_i^c)$. La construction des B_n assure que $B_n \cap B_m = \emptyset$, si $n \neq m$ et $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Pour vérifier cette dernière propriété, on remarque que $B_n \subset A_n$ donc $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Puis, si $x \in A_n$ et x n'appartient pas à $\cup_{i=0}^{n-1} B_i$, on a alors $x \in A_n \cap (\cap_{i=0}^{n-1} B_i^c) = B_n$. Ceci prouve que $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et donc, finalement, $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. On utilise maintenant la σ-additivité de m et la monotonie de m (car $B_n \subset A_n$) pour écrire $m(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = m(\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} m(B_n) \leq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$.

3. Continuité croissante. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_n \subset A_{n+1,}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par monotonie de m, on a $m(A_{n+1}) \geq m(A_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\lim\limits_{n \to \infty} m(A_n) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On pose $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et on définit la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ (noter que $A_{n-1} \subset A_n$). On a $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, $B_n \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $B_n \cap B_m = \emptyset$, si $n \neq m$. La σ-additivité de m nous donne

$$m(A) = m(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(B_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{p=0}^{n} m(B_p)$$

Puis, comme $A_n = \cup_{p=0}^{n} B_p$, l'additivité de m (qui se déduit de la σ-additivité) nous donne $\sum\limits_{p=0}^{n} m(B_p) = m(A_n)$ et donc $m(A) = \lim\limits_{n \to \infty} m(A_n)$.

4. Continuité décroissante. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, t.q. $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$. Par monotonie, on a $m(A_{n+1}) \leq m(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim\limits_{n \to \infty} m(A_n) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On a aussi, par monotonie, $m(A) \leq m(A_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $A = \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Comme $m(A_{n_0}) < \infty$, on a aussi $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \geq n_0$ et $m(A) < \infty$. On pose $B_n = A_{n_0} \backslash A_n = A_{n_0} \cap A_n^c \in T$, pour tout $n \geq n_0$. La suite $(B_n)_{n \geq n_0}$ est croissante ($B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$) et $B = \cup_{n \geq 0} B_n = \cup_{n \geq n_0} (A_{n_0} \backslash A_n) = A_{n_0} \backslash \cap_{n \geq n_0} A_n = A_{n_0} \backslash A$. La continuité croissante donne

$$m(A_{n_0} \backslash A) = m(B) = \lim_{n \to \infty} m(B_n) = \lim n \to \infty m(A_{n_0} \backslash A_n).$$

Comme $A \subset A_{n_0}$, on a $m(A_{n_0} \backslash A) = m(A_{n_0}) - m(A)$ (car $m(A) \leq m(A_{n_0}) < \infty$, on utilise ici la remarque à la fin de la preuve de la monotonie). De même, comme $A_n \subset A_{n_0}$ (pour

$n \geq n_0$), on a $m(A_{n_0} \backslash A_n) = m(A_{n_0}) - m(A_n)$ (car $m(A_n) \leq m(A_{n_0}) < \infty$). En utilisant une nouvelle fois que $m(A_{n_0}) < \infty$, on déduit que $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$.

1.4 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Il serait bien agréable, pour la suite du cours, de montrer l'existence d'une application λ, définie sur tout $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, t.q. l'image par λ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit la longueur de cet intervalle. Le théorème suivant donne l'existence d'une telle application définie seulement sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, notée $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (Exercice $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$). Cette application s'appelle la mesure de Lebesgue.

Théorème 1.4.1. ***(Carathéodory)*** *Il existe une et une seule mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, t.q. $\lambda(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.*

Il y a plusieurs démonstrations possibles de ce théorème. Pour la partie "existence" de ce théorème, nous donnons dans cette section une démonstration due à Carathéodory.
Soit $A \subset \mathbb{R}$. On définit $\lambda^*(A)$ par :

$$\lambda^*(A) = \inf_{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E_A} \sum_{i=1}^{n} \ell(A_i) \tag{1.4.1}$$

où E_A est l'ensemble des familles dénombrables d'intervalles ouverts dont l'union contient A, $\ell(A_i)$ représente la longueur de l'intervalle A_i.

Remarque 1.4.1. On peut montrer que l'application λ^* ainsi définie de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ n'est pas σ- additive (ce n'est donc pas une mesure).

On montre par contre dans cette section que la restriction de λ^* à $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est une mesure, qu'on note λ, mesure de Lebesgue.

Définition 1.4.1. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On pose

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n);\ (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A \right\},$$

avec

$$E_A = \left\{ (I_n)_{n\in\mathbb{N}};\ I_n =]a_n, b_n[\,, -\infty < a_n \leq b_n < +\infty, \forall n \in \mathbb{N},\ A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n \right\},$$

et $\ell(I) = b - a$ si $I =]a,b[$, $-\infty < a \leq b < 1$.

Proposition 1.4.1. ***(Propriétés de λ^*)*** *L'application $\lambda^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (définie dans la définition précédente) vérifie les propriétés suivantes :*
1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$,

2. *(Monotonie)* $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$, *pour tout* $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $A \subset B$,
3. *(σ-sous additivité) Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ *et* $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} An$, *alors*

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n),$$

4. $\lambda^*(]a, b[) = b - a$ *pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *t.q.* $-\infty < a < b < +\infty$.

Démonstration. On remarque tout d'abord que $\lambda^*(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ (car $\lambda^*(A)$ est la borne inférieure d'une partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

Propriété 1. Pour montrer que $\lambda^*(\emptyset) = 0$, il suffit de remarquer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\emptyset$, avec $I_n = \emptyset$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $0 \leq \lambda^*(\emptyset) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = 0$.

Propriété 2. Soit $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ t.q. $A \subset B$. On a $E_B \subset E_A$ et donc $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

Propriété 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il suffit de considérer le cas où $\lambda^*(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (sinon, l'inégalité est immédiate). Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(I_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \in E_{A_n}$ t.q.

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m}) \leq \lambda^*(A_n) + \epsilon/(2^n). \tag{1.4.2}$$

On remarque alors que $(I_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est un recouvrement de A par des intervalles ouverts et donc que :

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}).$$

Noter que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_{\varphi(n)})$, où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$ (cette somme ne dépend pas de la bijection choisie. Avec le lemme ci dessous, on en déduit :

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m})) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n) + 2\epsilon.$$

ce qui donne bien, quand $\epsilon \to 0$,

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n).$$

Propriété 4. Pour montrer la quatrième propriété. On commence par montrer :

$$\lambda^*([a, b]) = b - a, \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \ a < b \tag{1.4.3}$$

Soit donc $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Comme $[a, b] \subset]a-\epsilon, b+\epsilon[$, pour tout $\epsilon > 0$, on a $\lambda^*([a, b]) \leq b-a+2\epsilon$. On en déduit $\lambda^*([a, b]) \leq b - a$. Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{[a,b]}$. Par compacité de $[a, b]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $[a, b] \subset \cup_{p=0}^n I_p$. On peut alors construire (par récurrence) $i_0, i_1, ..., i_q \in \{0, ...n\}$ t.q. $a_{i_0} < a, ..., a_{i_{p+1}} < b_{i_p}$ pour tout $p \in \{0, ...q-1\}$, $b < b_{i_q}$. On en déduit que

$$b - a < \sum_{p=0}^{q} b_{i_p} - a_{i_p} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

et donc $b - a \leq \lambda^*([a, b])$. Ceci donne bien (1.4.3). En remarquant que $[a + \epsilon, b - \epsilon] \subset]a, b[\subset [a, b]$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $0 < \epsilon < (b - a)/2$, la monotonie de λ^* donne (avec (1.4.3)) que $\lambda^*(]a, b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. La monotonie de λ^* donne alors aussi que $\lambda^*([a, b[) = \lambda^*(]a, b]) = \lambda^*(]a, b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, et enfin que $\lambda^*(] - \infty, a]) = \lambda^*(] - \infty, a[) = \lambda^*(]a, +\infty]) = \lambda^*([a, +\infty]) = \infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
On introduit maintenant la tribu de Lebesgue, sur laquelle on montrera que λ^* est une mesure.

Définition 1.4.2. (Tribu de Lebesgue)
On pose $\mathscr{L} = \{E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) t.q. \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})\}$. Cet ensemble de parties de $\mathbb{R}$ notée $\mathscr{L}$ s'appelle "tribu de Lebesgue"

Remarque 1.4.2. On peut avoir une première idée de l'intérêt de la définition précédente en remarquant qu'elle donne immédiatement l'additivité de λ^* sur $\mathscr{L}$.
En effet, soit E_1, $E_2 \subset \mathbb{R}$ t.q. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, et soit $A \subset \mathbb{R}$. On suppose que $E_1 \in \mathscr{L}$ et on utilise la définition de $\mathscr{L}$ avec $A \cap (E_1 \cup E_2)$, on obtient $\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c) = \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2)$ (car $E_1 \cap E_2 = \emptyset$). Par récurrence sur n, on a donc aussi $\lambda^*(A \cap (\cup_{i=1}^n E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(A \cap E_i)$, dès que $E_1, ..., E_{n-1} \in \mathscr{L}$, A, $E_n \subset \mathbb{R}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., n\}$.
En particulier, en prenant $A = \mathbb{R}$, on obtient l'additivité de λ^* sur $\mathscr{L}$, c'est-à-dire

$$\lambda^*(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(E_i),$$

si $E_1, ..., E_{n-1} \in \mathscr{L}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Remarque 1.4.3. Pour tout $E, A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, on a, par σ-sous additivité de λ^*, $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$. Pour montrer que $E \in \mathscr{L}$, il sffit donc de montrer que $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$, pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Proposition 1.4.2. ***(Propriétés de $\mathscr{L}$)***
$\mathscr{L}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ et $\lambda^*|_{\mathscr{L}}$ est une mesure.

Démonstration. Il est immédiat que $\emptyset \in \mathscr{L}$ et que $\mathscr{L}$ est stable par "passage au complémentaire". On sait aussi que $\lambda^*(\emptyset) = 0$. Il reste donc à démontrer que $\mathscr{L}$ est stable par union dénombrable et que la restriction de λ^* à $\mathscr{L}$ est une mesure. Ceci se fait en deux étapes décrites ci-après.

Etape 1. On montre, dans cette étape, que $\mathscr{L}$ est stable par union finie et que, si $n \geq 2$ et $(E_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathscr{L}$ est t.q. $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, alors on a :

$$\lambda^*(A \cap (\cup_{i=1}^n E_i)) = \sum_{i=1}^n \lambda^*(A \cap E_i), \ \forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \tag{1.4.4}$$

(Cette dernière propriété donne l'additivité de λ^* sur $\mathscr{L}$ en prenant $A = E$, cette propriété d'additivité a déjà été signalée dans la remarque précédente)
Par une récurrence facile, il suffit de montrer que $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{L}$ si $E_1, E_2 \in \mathscr{L}$ et de montrer la propriété (1.4.4) pour $n = 2$. Soit donc $E_1, E_2 \in \mathscr{L}$. On pose $E = E_1 \cup E_2$. et soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Par σ-sous additivité de λ^* on a

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)) \leq \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2),$$

et donc

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

Comme $E_2 \in \mathscr{L}$, on a

$$\lambda^*(A \cap E_1^c) = \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

Puis, comme $E_1 \in \mathscr{L}$, on a $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c)$. On en déduit

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^*(A)$$

Ce qui prouve que $E \in \mathscr{L}$. Pour montrer (1.4.4) avec $n = 2$ si $E_1, E_2 \in \mathscr{L}$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, il suffit de remarquer que (pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$) $\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)) = \lambda^*([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1) + \lambda^*([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1^c) = \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2)$. (On a utilisé le fait que $E_1 \in \mathscr{L}$.) Ceci termine l'étape 1.
Une conséquence de cette étape (et du fait que $\mathscr{L}$ est stable par passage au complémentaire) est que $\mathscr{L}$ est stable par intersection finie.
Etape 2. On montre, dans cette étape, que $\mathscr{L}$ est stable par union dénombrable et la restriction de λ^* à $\mathscr{L}$ est une mesure (ce qui termine la démonstration de la proposition). Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ et $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. On veut montrer que $E \in \mathscr{L}$. On commence par remarquer que $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ avec $F_0 = E_0$ et, par récurrence, pour $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus \cup_{p=0}^{n-1} F_p$. L'étape 1 nous donne que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ et, comme $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on peut utiliser (1.4.4).
Pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)) + \lambda^*(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c) = \sum_{p=0}^n \lambda^*(A \cap F_p) + \lambda^*(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c) \tag{1.4.5}$$

En utilisant le fait que $E^c \subset (\cup_{p=0}^n F_p)^c$ et la monotonie de λ^*, on a $\lambda^*(A \cap (\cup_{p=0}^n F_p)^c) \geq \lambda^*(A \cap E^c)$. En faisant tendre n vers 1 dans (1.4.5) et en utilisant la σ-sous additivité de λ^*, on en déduit alors que $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$. Ce qui prouve que $E \in \mathscr{L}$, et donc que $\mathscr{L}$ est une tribu.

Il reste à montrer que λ^* est une mesure sur $\mathscr{L}$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$ t.q. $E_i \cap E_j = \emptyset$, si $i \neq j$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}}^n E_n$. Par monotonie de λ^* on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda^*(\cup_{p=0}^n E_p) \leq \lambda^*(E)$ et donc, en utilisant l'additivité de λ^* sur $\mathscr{L}$ (démontrée à l'étape 1, voir (1.4.4) avec $A = E$), $\sum_{p=0}^{n} \lambda^*(E_p) \leq \lambda^*(E)$. Ce qui donne, passant à la limite quand $n \to \infty$, $\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^*(E_p) \leq \lambda^*(E)$. D'autre part, $\lambda^*(E) \leq \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^*(E_p)$, par σ-sous additivité de λ^*. On a donc $\lambda^*(E) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^*(E_p)$. Ce qui prouve que $\lambda^*|_{\mathscr{L}}$ est une mesure. □

Démonstration de la partie "existence" du théorème (1.4.1) : Pour montrer la partie "existence" du théorème (1.4.1), il suffit, grâce aux propositions (1.4.1) et (1.4.2), de montrer que $\mathscr{L}$ contient $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Pour cela, il suffit de montrer que $]a, \infty[\subset \mathscr{L}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (car $\{]a, \infty[, a \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathscr{B}(\mathbb{R})$). Soit donc $a \in \mathbb{R}$ et $E =]a, \infty[$. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, on veut montrer que $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$. On peut supposer que $\lambda^*(A) < \infty$ (sinon l'inégalité est immédiate).

Soit $\epsilon > 0$. Par la définition de $\lambda^*(A)$, il existe $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A$ t.q. $\lambda^*(A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) - \epsilon$. Comme $A \cap E \subset (\cup_{n\in\mathbb{N}}(I_n \cap E))$ et $A \cap E^c \subset (\cup_{n\in\mathbb{N}}(I_n \cap E^c))$, la σ-sous additivité de λ^* donne

$$\lambda^*(A \cap E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n \cap E) \ \text{ et } \lambda^*(A \cap E^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(I_n \cap E^c)$$

Comme $I_n \cap E$ et $I_n \cap E^c$ sont des intervalles, la fin de la démonstration de la proposition (1.4.1) donne $\lambda^*(I_n \cap E) = \ell(I_n \cap E)$ et $\lambda^*(I_n \cap E^c) = \ell(I_n \cap E^c)$. On en déduit $\lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\ell(I_n \cap E) + \ell(I_n \cap E^c)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\ell(I_n)$ (car $\ell(I_n \cap E) + \ell(I_n \cap E^c) = \ell(I_n)$) et donc $\lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) \leq \lambda^*(A) + \epsilon$. Quand $\epsilon \to 0$ on trouve l'inégalité recherchée. On a bien montré que $E \in \mathscr{L}$. □

Remarque 1.4.4. Nous avons vu que la mesure de Lebesgue, notée λ, est régulière. Ceci ne donne pas, pour $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, l'égalité de la mesure de A avec la mesure de son intérieur ou de son adhérence. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre, par exemple, $A = \mathbb{Q}$. On a alors $\lambda(A) = 0$ et $\lambda(\overline{A}) = +\infty$.

Remarque 1.4.5. Nous avons donc, dans cette section, construit une application, notée λ^*, de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$. Cette application n'est pas une mesure mais nous avons montré que la restriction de λ^* à la tribu de Lebesgue, notée $\mathscr{L}$, est une mesure. Puis, nous avons démontré que $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}$ et obtenu ainsi, en prenant la restriction de λ^* à $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ la mesure que nous cherchions. On peut se demander toutefois quelle est la différence entre $\mathscr{L}$ et $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Du point de vue des cardinaux, cette différence est considérable car $card(\mathscr{L}) = card(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ alors que $card(\mathscr{B}(\mathbb{R})) = card(\mathbb{R})$ mais du point de vue de l'intégration, la différence est dérisoire, car l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \lambda^*_{|\mathscr{L}})$ est simplement le complété de $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda^*_{|\mathscr{B}\mathbb{R}})$.

On donne maintenant une propriété, spécifique à la mesure de Lebesgue, qui est à la base de toutes les formules de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 1.4.3. ***(Invariance par translation (généralisée))*** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, on note $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta,\ x \in A\}$. On a alors :*

1. *$A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ implique $\alpha A + \beta \in A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,*
2. *$\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

La mesure de Lebesgue est diffuse (c'est-à-dire que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc, si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, on a $\lambda(D) = 0$. Ainsi, $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$.
La réciproque est fausse. On construit par exemple un ensemble (dit **ensemble de Cantor** [8], K, qui est une partie compacte non dénombrable de $[0, 1]$, vérifiant $\lambda(K) = 0$,

Définition 1.4.3. (Mesure de Lebesgue sur un borélien de $\mathbb{R}$) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou, plus généralement, $I \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$) et $T = \{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ B \subset I\}$ (on peut montrer que $T = \mathscr{B}(I)$, où I est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Il est facile de voir que T est une tribu sur I et que la restriction de λ (définie dans le théorème précédent) à T est une mesure sur T, donc sur les boréliens de I. On note toujours par λ cette mesure.

1.5 Exercices

1.5.1 Énoncés

1. Rappel : Pour une famille d'ensemble $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $\cap_{n\geq 0} A_n = \{x :\ \forall n,\ x \in A_n\}$ et $\cup_{n\geq 0} A_n = \{x :\ \exists n,\ tq\ x \in A_n\}$
   – (a) Déterminer $\cap_{n\geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$.
   – (b) Déterminer $\cap_{n\geq 0}]1, 2 + 1/(n+1)]$.
   – (c) Déterminer $\cap_{n\geq 0}]1 - 1/(n+1), 2]$.
   – (d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}\left(\cup_{n\geq 0}[1/(n+1), +\infty[\right)$.
2. Soit $A_1, ..., A_n$ une partition de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{A} = \{\cup_{i\in I} A_i :\ I \subset (1, ..., n)\}$ est une tribu. ($\mathscr{A}$ est constitué de toutes les réunions possibles d'ensembles A_i.)
3. Soit $Card :\ P(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]\quad A \mapsto Card(A) =$ le nombre déléments de A. Montrer que $Card$ est une mesure sur $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$.

8. Georg Ferdinand Cantor, mathématicien allemand (1845 -1918), fondateur de la théorie des ensembles et découvreur des nombres transfinis.

4. On se donne un espace mesurable $(E, \mathscr{A})$.
   - (a) Soit $x \in E$, on note $\delta_x : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$, $B \mapsto \delta_x(B) = 1$ si $x \in B$ et égale à 0 sinon. Montrer que δ_x est une mesure sur $(E, \mathscr{A})$. (Cette mesure s'appelle la mesure de **Dirac** en x.)
   - (b) Soient $x_1, ..., x_k$ des éléments distincts de E et $p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$, $B \mapsto \mu(B) = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(B)$. Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathscr{A})$.
5. – (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lambda(\{x\})$ (utiliser la propriété de croissance).
   - (b) Soit $x_0, x_1, x_2, ... \in \mathbb{R}$, calculer $\lambda(\cup_{n \geq 0} \{x_n\})$ (utiliser la propriété de sous-additivité).
   - (c) En déduire que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Calculer $\lambda([0, 1] \setminus \mathbb{Q})$.

1.5.2 Corrigés

1. – (a) $\cap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)] =$ car $1 \not\in \cap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$ et $\forall x \neq 1$, $\exists n$ tel que $x \not\in]1, 1 + 1/(n+1)]$ et donc $x \not\in \cap_{n \geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$
   - (b) $\cap_{n \geq 0}]1, 2 + 1/(n+1)] =]1, 2]$
   - (c) $\cap_{n \geq 0}]1 - 1/(n+1), 2] = [1, 2]$
   - (d) $\cup_{n \geq 0} [1/(n+1), +\infty[=]0, +\infty[$ donc $f^{-1}(\cup_{n \geq 0} [1/(n+1), +\infty[) = f^{-1}(]0, +\infty[) = \mathbb{R}^*$.
2. On rappelle que $A_1, ..., A_n$ partition de $\mathbb{R}$signifie que les ensembles A_i sont 2 à 2 disjoints et que $A_1 \cup ... A_n = \mathbb{R}$.
   - $\mathscr{A} \ni A_1 \cup ... A_n = \mathbb{R}$.
   - Soit $\cup_{i \in I} A_i \in \mathscr{A}$, $(\cup_{i \in I} A_i)^c = \cup_{i \not\in I} A_i \in \mathscr{A}$.
   - Si on fait une réunion dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$

$$\cup_{n \geq 0} (\cup_{i \in I_n} A_i) = \bigsqcup_{[i \in \cup_{n \geq 0} I_n]} A_i \in \mathscr{A}.$$

3. – (a) Remarque : δ_x s'appelle la mesure de Dirac en x.
     - δ_x est bien une fonction de $\mathscr{A}$ dans $[0, +\infty]$
     - $\delta_x(\emptyset) = 0$ car $x \not\in \emptyset$.
     - Si on a des éléments 2 à 2 disjoints de $\mathscr{A}$: $A_0, A_1, ...$ $\delta_x(\cup_{n \geq 0} A_n) = 1$ si $x \in \cup_{n \geq 0} A_n$ et$\delta_x(\cup_{n \geq 0} A_n) = 0$ sinon alors $\delta_x(\cup_{n \geq 0} A_n) = 1$ si $\exists n$ tel que $x \in A_n$ et $\delta_x(\cup_{n \geq 0} A_n) = 0$ sinon, donc $\delta_x(\cup_{n \geq 0} A_n) = \sum_{n \geq 0} \delta_x(A_n)$.

     car les A_n sont 2 à 2 disjoints (et donc au plus un seul d'entre eux contient x, c'est à dire au plus un seul d'entre eux est tel que $\delta_x(A_n) = 1$).
   - (b) On remarque que $\forall i$, δ_{x_i} est une mesure par la question précédente.
     - μ est bien une fonction de $\mathscr{A}$ dans $[0, +\infty]$
     - $\mu(\emptyset) = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(\emptyset) = 0$

– Si on a des éléments 2 à 2 disjoints de $\mathscr{A}$: $A_0, A_1, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\cup_{n\geq 0} A_n\right) &= \sum_{1\leq i\leq k} p_i \delta_{x_i}\left(\cup_{n\geq 0} A_n\right) \\
&= \sum_{1\leq i\leq k} p_i \sum_{n\geq 0} \delta_{x_i}(A_n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{1\leq i\leq k} p_i \delta_{x_i}(A_n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

4. – (a) $\forall \epsilon > 0,\ \{x\} \subset [x, x+\epsilon]$ donc $\lambda(\{x\}) \leq \lambda([x, x+\epsilon]) = \epsilon$. Donc $\lambda(\{x\}) = 0$.
   – (b) $\lambda(\cup_{n\geq 0}\{x_n\}) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(\{x_n\}) = 0$ par la question précédente.
   – (c) $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc on peutécrire $\mathbb{Q} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ donc $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ par la question précédente. Nous avons $\lambda([0,1]) < \infty$ donc, par une proposition du cours, $\lambda([0,1]/\mathbb{Q}) = \lambda([0,1]) - \lambda(\mathbb{Q}) = 1$.

Chapitre 2 ✍

Fonctions mesurables, variables aléatoires

2.1 Introduction

Nous allons, dans ce chapitre, introduire différents outils nécessaires à la définition de l'intégrale de Lebesgue. De la même manière que les fonctions en escalier ont été introduites lors de la définition de l'intégrale de Riemann, nous introduisons maintenant le concept de fonction étagée sur un espace mesurable (E, T).

1. L'objectif est d'intégrer des fonctions de E (espace de départ) dans F (espace d'arrivée). Pour construire ainsi une notion d'intégrale, il faut un espace mesuré au départ et un espace topologique à l'arrivée, car nous aurons besoin dans l'espace d'arrivée d'une notion de convergence (pour les procédés de passage à la limite dans la définition de l'intégrale). Les espaces d'arrivée usuels sont (pour la théorie de l'intégration) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$ ou un espace de Banach. Le procédé de construction dû à Lebesgue donne un rôle fondamental aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (et à la notion de convergence "croissante") et nous aurons besoin d'utiliser la topologie de $\mathbb{R}^+$ (voir la définition ci-dessus).

2. Soit F un espace topologique et $G \subset F$. On appelle topologie trace sur G, ou topologie induite sur G, la topologie définie par l'ensemble des restrictions à G des ouverts de F. Si $O \subset G$, O est un ouvert de G si et seulement si il existe U ouvert de F t.q. $O = U \cap G$. Noter donc que O peut ne pas être un ouvert de F si G n'est pas un ouvert de F. Par contre, il est important de remarquer que si G est un borélien de F (c'est-à-dire $G \in \mathscr{B}(F)$, $\mathscr{B}(F)$ étant la tribu engendrée par les ouverts de F), l'ensemble des boréliens de G est exactement l'ensemble des boréliens de F inclus dans G, c'est-à-dire $\mathscr{B}(G) = \{B \subset G,\, B \in \mathscr{B}(F)\}$.

4. Un exemple fondamental de topologie sur l'ensemble F est celui de la topologie donnée par une distance sur F. Dans le cas de $F = \mathbb{R}$, nous considérerons toujours $\mathbb{R}$ muni de la topologie donnée par la structure métrique de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire par l'application "distance" définie par $d(a, b) = |b - a|$.

Définition 2.1.1. Topologie et tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}^+$ $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \infty$

1. Soit $O \subset \overline{\mathbb{R}}^+$. O est un ouvert si pour tout $a \in O$ on a :

(a) Si $0 < a < 1$, alors il existe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset O$,
(b) si $a = 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $]0, \alpha[\subset O$,
(c) si $a = \infty$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ t.q. $]\alpha, +\infty] \subset O$.
2. $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}^+)$ est la tribu (sur $\overline{\mathbb{R}}^+$) engendrée par les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}^+$. Soit $B \subset \overline{\mathbb{R}}^+$, on peut montrer que $B \in \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}^+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ($\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$).

2.2 Fonctions étagées

Définition 2.2.1. (Fonction étagée) Soient (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$.
1. On dit que f est étagée (ou T-étagée) si f est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques mesurables, c'est-à-dire s'il existe une famille finie $(A_i)_{i=1,...,n} \subset T$ et n réels $a_1, ..., a_n$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$.
2. On dit que f est étagée positive si f est étagée et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions étagées et $\mathscr{E}^+$ l'ensemble des fonctions étagées positives. La notion de fonction étagée positive va nous permettre de définir l'intégrale à partir de la notion de mesure. On se limite pour l'instant aux fonctions positives afin de donner un sens à l'addition de mesures infinies. Notons que, dans la définition d'une fonction étagée, les ensembles A_i peuvent être d'intersection non vide. On aura besoin, pour introduire facilement la notion d'intégrale d'une fonction étagée positive, de considérer une décomposition de la fonction étagée sur des ensembles d'intersection vide. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.2.1. ***(Décomposition canonique d'une fonction étagée positive)*** *Soit (E, T) un espace mesurable, et soit $f \in \mathscr{E}^+$ une fonction étagée positive, non identiquement nulle. Alors il existe une unique famille finie $(a_i, A_i)_{i=1,...,n} \subset \mathbb{R}_+^* \times T$ t.q. $0 < a_1 < ... < a_n$, $A_i \neq \emptyset$, pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$, et $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$.*

Lemme 2.2.2. *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $f \in \mathscr{E}^+$ une fonction étagée positive non nulle, t.q. $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ et $f = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{B_i}$ où $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_p$ sont des réels strictement positifs, $(A_i)_{i=1,...,n} \subset T$ et $(B_i)_{i=1,...,p} \subset T$ sont des familles de parties disjointes deux à deux, i.e. telles que $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Alors :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) = \sum_{j=1}^{p} b_j m(B_j) \tag{2.2.1}$$

Enfin, on conclut ce paragraphe en remarquant que $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.1. ***(Structure vectorielle de $\mathscr{E}$)*** *Soit (E,T) un espace mesurable, l'ensemble des fonctions étagées, $\mathscr{E}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, si $f,g\in\mathscr{E}$, on a aussi $fg\in\mathscr{E}$.*

Démonstration. Soit $f,g\in\mathscr{E}$ et soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On utilise la décomposition de f et g donnée dans le lemme précédent. Elle donne $f=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i1_{A_i}$ et $g=\sum\limits_{j=0}^{m}b_j1_{B_i}$. Comme les familles $(A_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ et $(B_j)_{j\in\{0,\dots,m\}}$ forment des partitions de $\mathscr{E}$, on a : $f=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m}a_i1_{A_i\cap B_j}$ et $g=\sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{i=0}^{n}b_j1_{A_i\cap B_j}$, de sorte que $\alpha f+\beta g=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m}(\alpha a_i+\beta b_i)1_{A_i\cap B_j}$, ce qui montre que $\alpha f+\beta g\in\mathscr{E}$, et donc que $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel. D'autre part, on remarque aussi que $fg=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m}a_ib_i1_{A_i\cap B_j}$, ce qui montre que $fg\in\mathscr{E}$. □

2.3 Fonctions mesurables et variables aléatoires

Afin d'étendre le concept d'intégrale à une classe de fonctions plus générale que celle des fonctions étagées (positives), on introduit les fonctions mesurables (positives). On pourra ensuite utiliser une technique de "passage à la limite" pour définir l'intégrale de telles fonctions. On va tout d'abord définir la notion de mesurabilité pour une fonction f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$. L'espace de départ,$\mathscr{E}$, est muni d'une tribu et l'espace d'arrivée, $\mathscr{F}$, est, en général, muni d'une topologie (et donc de sa tribu de Borel, les exemples fondamentaux sont $\mathscr{F}=\mathbb{R}$ ou $\mathscr{F}=\overline{\mathbb{R}}^{+}$). On peut aussi considérer le cas où $\mathscr{F}$ est muni d'une tribu (non donnée par une topologie sur $\mathscr{F}$).

Définition 2.3.1. (Fonction mesurable) Soient (E,T) un espace mesurable et F un ensemble muni d'une topologie (par exemple : $F=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*_+$). Une fonction f, définie de E dans F, est une fonction T-mesurable si $f^{-1}(A)\in T$, pour tout $A\in\mathscr{B}(F)$. (Ce qui est équivalent à dire que la tribu $f^{-1}(\mathscr{B}(F))=\{f^{-1}(B),B\in\mathscr{B}(F)\}$ est incluse dans T ou encore que la tribu $T_f=\{B\in\mathscr{P}(F),\ f^{-1}(B)\in T\}$ [1] contient $\mathscr{B}(F)$, (Exo : TD sur les tribus image directe et image réciproque.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "T-mesurable".

Remarque 2.3.1. Une fonction étagée est toujours mesurable.
En effet, soit (E,T) un espace mesurable. Soit $f\in\mathscr{E}$ (donc f est une application de E dans $\mathbb{R}$). Il existe $(A_0,\dots,A_n)$, partition de E, et $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ t.q. $f=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i1_{A_i}$ et $A_i\in T$ pour tout $i\in\{0,\dots,n\}$. Pour tout $B\subset\mathbb{R}$, on a donc $f^{-1}(B)=\cup_{\{i,\,a_i\in B\}}A_i\in T$. Ce qui prouve

1. Si f est une bijection, f^{-1} désigne aussi la bijection réciproque $F\to E$ de f. Mais il n'y a pas (encore) d'ambiguité puisque les arguments de ces deux applications ne sont pas de même nature : des parties de F dans le premier cas et des éléments de F dans le second. Le problème est que, pour simplifier, on note souvent $f^{-1}(y)$ à la place de $f^{-1}(\{y\})\subset E$, et il faut alors comprendre ce qu'on lit...

que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Noter que si $f \in \mathscr{E}^+$, on a donc aussi f mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.

La terminologie probabiliste utilise les termes "variable aléatoire" ou "élément aléatoire" (au lieu de "fonction mesurable" ou "application mesurable").

Définition 2.3.2. (Variable aléatoire, élément aléatoire)
1. Soit (E, T) un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire une fonction X définie de E dans $\mathbb{R}$ et T-mesurable, i.e. t.q. $X^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
2. Soit (E, T) et (F, τ) deux espaces probabilisables. Une fonction X, définie de E dans F, est un élément aléatoire si c'est une fonction (T, τ)-mesurable (c'est-à-dire si $X^{-1}(A) \in T$, pour tout $A \in \tau$). Lorsque F est un espace vectoriel, on dit que X est une variable aléatoire vectorielle ou un "vecteur aléatoire".

Définition 2.3.3. (Tribu engendrée par une fonction mesurable)
Soient (E, T) un espace mesurable (resp. probabilisable) et f (resp. X) une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (resp. une variable aléatoire) alors l'ensemble $\{f^{-1}(A),\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ (resp. $\{X^{-1}(A),\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$) est une tribu sur E qu'on appelle tribu engendrée par la fonction mesurable f (resp. la variable aléatoire X). Cette tribu est aussi la tribu image réciproque de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ par f (resp. X).

Définition 2.3.4. (Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire)
Soient (E, T, p) un espace probabilisé, X une variable aléatoire de (E, T, p) dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, on appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la probabilité p_X image de p par X, définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction de répartition de la loi de probabilité p_X.

Dans de nombreux cas, les modèles probabilistes seront déterminés par une loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définition 2.3.5. (Variable aléatoire discrète, entière, continue)
Soient (E, T, p) un espace probabilisé, X une variable aléatoire sur (E, T, p), p_X la loi de la variable aléatoire X et F_X sa fonction de répartition,
1. Si $X(E)$ est dénombrable, on dit que la variable aléatoire X est discrète.
2. Si $X(E) \subset \mathbb{N}$, on dit que la variable aléatoire X est entière.
3. Si la fonction de répartition F_X définie de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ est continue, on dit que la variable aléatoire est continue.

Définition 2.3.6. (espaces $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}_+$)
Soit (E, T) un espace mesurable, on note :
• $\mathscr{M}(E, T) = \{f : E \to \mathbb{R},\ \text{mesurable}\}$,

• $\mathscr{M}_+(E,T) = \{f : E \to \mathbb{R}_+,\ \text{mesurable}\}$.

En l'absence d'ambiguïté, on notera $\mathscr{M} = \mathscr{M}(E,T)$ et $\mathscr{M}_+ = \mathscr{M}_+(E,T)$.

2.4 Caractérisation de la mesurabilité

Proposition 2.4.1. ***(Première caractérisation de la mesurabilité)*** *Soient (E,T) un espace mesurable et $f : E \to F$, avec $F = \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $\mathscr{C}$ une partie de $\mathscr{P}(F)$ engendrant la tribu borélienne de F. On a alors : f est mesurable si et seulement $f^{-1}(C) \in T$ pour tout $C \in \mathscr{C}$. En particulier, f est mesurable si et seulement si f vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*
1. $f^{-1}(]\alpha,\beta[) \in T$, pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,
2. $f^{-1}(]\alpha,\infty[) \in T$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans cette caractérisation, l'ensemble $]\alpha,\beta[$ (ou $]\alpha,\infty[$) désigne, bien sûr, l'ensemble des éléments de F appartenant à $]\alpha,\beta[$ (ou $]\alpha,\infty[$).

Proposition 2.4.2. ***(Mesurabilité positive)*** *Soient (E,T) un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}_+$. Alors $f \in \mathscr{M}_+$ si et seulement si il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_+$, t.q. :*
1. Pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$,
2. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $x \in E$, et tout $n \in \mathbb{N}$.
les 2 conditions précédentes seront dénotées dans la suite sous la forme $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_+$, t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. On remarque que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]\alpha,+\infty]) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]\alpha,+\infty]) \tag{2.4.1}$$

Comme f_n est mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par stabilité de T par union dénombrable, $f^{-1}(]\alpha,+\infty]) \in T$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on en déduit, comme $\{]\alpha,+\infty],\ \alpha \geq 0\}$ engendre $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathscr{M}_+$.
Réciproquement, on suppose que $f \in \mathscr{M}_+$. On va construire
$(f_n)^*_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{2^n} \text{ si } f(x) \in [\dfrac{p}{2^n}, \dfrac{p+1}{2^n}[& \text{avec } p \in \{0,...,n2^n - 1\} \\ \qquad n & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

de sorte que

$$f_n = n1_{\{x\in E,\, f(x)\geq n\}} + \sum_{p=0}^{n2^n-1} \frac{p}{2^n} 1_{\{x\in E,\, f(x)\in[\frac{p}{2^n},\frac{p+1}{2^n}[\}}$$

Comme $f \in \mathscr{M}_+$, on a $\{x \in E,\ f(x) \geq n\} \in T$ et $\{x \in E,\ f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[\} \in T$ pour tout n et tout p, on a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{E}_+$.

On montre maintenant que, pour tout $x \in E$, on a $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$. Soit $x \in E$. On distingue deux cas :

Premier cas. On suppose $f(x) < \infty$. On a alors, pour $n \geq f(x)$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$.

Deuxième cas. On suppose $f(x) = \infty$. On a alors $f_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$.

On montre enfin que, pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Soit $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue trois cas :

Premier cas. On suppose $f(x) \geq n+1$. On a alors $f_{n+1}(x) = n+1 > n = f_n(x)$.

Deuxième cas. On suppose $n \leq f(x) < n+1$. Il existe alors $i \in \{n2^{n+1}, ..., (n+1)2^{n+1} - 1\}$ t.q. $f(x) \in [\frac{i}{2^{n+1}}, \frac{i+1}{2^{n+1}}]$. On a alors $f_n(x) = n \leq \frac{i}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.

Troisième cas. On suppose $f(x) < n$. Il existe alors $p \in \{0, ..., n2^n - 1\}$ t.q. $f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[= [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$. Si $f(x) \in [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} = \frac{2p}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. Si $f(x) \in [\frac{2p+1}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} < \frac{2p+1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. On a toujours $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

On a bien ainsi construit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathscr{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. □

Proposition 2.4.3. ***(Mesurabilité sans signe)*** *Soient (E,T) un espace mesurable, et $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que f est mesurable. Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}$ t.q., pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$.*

Démonstration. On définit la fonction $f^+ : E \to \mathbb{R}^+$ par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ pour tout $x \in E$. On remarque que $f^+ \in \mathscr{M}_+$ (et $f^+ \in \mathscr{M}$. En effet, f^+ prend ses valeurs dans R^+ et $(f^+)^{-1}(]\alpha, \infty]) = f^{-1}(]\alpha, \infty[) \in T$ si $\alpha > 0$. On conclut en remarquant que $\{]\alpha, \infty], \alpha > 0\}$ engendre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$. On définit également $f^- = (-f)^+$, de sorte que $f = f^+ - f^-$. On a donc aussi $f^- \in \mathscr{M}^+$. Donc il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}^+$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}^+$ t.q. $f_n \uparrow f^+$ et $g_n \uparrow f^-$ quand $n \to \infty$. On pose $h_n = f_n - g_n$, de sorte que $h_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$, pour tout $x \in E$. D'autre part, comme $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel, on a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$. □

Proposition 2.4.4. ***(Stabilité de $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}^+$)*** *Soit (E,T) un espace mesurable.*

1. Soit $I \subset \mathbb{N}$.

Soit $(f_n)_{n\in I} \subset \mathscr{M}^+$, alors $\sup_{n\in I} f_n \in \mathscr{M}^+$ et $\inf_{n\in I} f_n \in \mathscr{M}^+$.

Soit $(f_n)_{n\in I} \subset \mathscr{M}$. Si $\sup_{n\in I} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\sup_{n\in I} f_n \in \mathscr{M}$. De même, si $\inf_{n\in I} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\inf_{n\in I} f_n \in \mathscr{M}$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}^+$, alors $\limsup_{n\to\infty} f_n \in \mathscr{M}^+$ et $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathscr{M}^+$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$*. Si* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$*, alors* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$*. De même, si* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$*, alors* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$*.*

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^+$*. On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\mathbb{R}^+$*, pour tout* $x \in E$*. Alors* $f \in \mathcal{M}^+$*. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$*. On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\mathbb{R}$*, pour tout* $x \in E$*. Alors* $f \in \mathcal{M}$*.*

4. $\mathcal{M}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et si* $f, g \in \mathcal{M}$*, alors* $fg \in \mathcal{M}$*.*

Proposition 2.4.5. ***(Deuxième caractérisation de la mesurabilité)*** *Soit* (E,T) *un espace mesurable et* $f : E \to \mathbb{R}$*. Alors,* f *est mesurable si et seulement si il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ *t.q., pour tout* $x \in E$*,* $f_n(x) \to f(x)$*, quand* $n \to \infty$*.*

2.5 Convergence p.p et convergence en mesure

On introduit ici plusieurs notions de convergence de fonctions définies sur un espace mesuré à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^+$) et on donne des liens entre ces différentes convergences.

Définition 2.5.1. (Egalité presque partout) Soient (E,T,m) un espace mesuré, F un ensemble et f et g des fonctions définies de E dans F ($F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{R}^+$, par exemple), on dit que $f = g$ m-presque partout (et on note $f = g$ m-p.p.) si l'ensemble $\{x \in E,\ f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable, c'est à dire qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A^c$.

En l'absence de confusion possible, on remplace $m - p.p.$ par $p.p.$

Définition 2.5.2. (Convergence presque partout) Soient (E,T,m) un espace mesuré, F un ensemble, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans F et f une fonction de E dans F ($F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{R}^+$, par exemple), on dit que f_n converge presque partout vers f ($f_n \to f\ p.p.$) si il existe une partie A de E, négligeable, t.q., pour tout élément x de A^c, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Noter que la convergence simple entraîne la convergence presque partout.

Définition 2.5.3. (Convergence presque uniforme) Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$. On dit que f_n converge presque uniformément vers f ($f_n \to f$ $p.$unif.) si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in T$ t.q. $m(A) \leq \epsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur A^c.

La convergence presque uniforme entraîne la convergence presque partout

Définition 2.5.4. (Sup essentiel) Soient (E,T,m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}$. On dit que f est essentiellement bornée si il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f| \leq C$ $p.p.$. On appelle alors sup essentiel de $|f|$, et on le note $\|f\|_\infty$, l'infimum des valeurs C telles que $|f| \leq C$ $p.p.$. Si f n'est pas essentiellement bornée, on pose $\|f\|_\infty = 1$.

Remarquons que dans le cas où $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, le sup essentiel d'une fonction continue est la borne supérieure de sa valeur absolue.

Définition 2.5.5. (Convergence essentiellement uniforme) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}$ et $f \in \mathscr{M}$. On dit que f_n converge essentiellement uniformément vers f ($f_n \to f$ ess. unif.) si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Il est facile de voir que la convergence essentiellement uniforme entraîne la convergence presque uniforme, mais la réciproque est fausse. Le théorème suivant donne, dans le cas où la mesure est finie, un résultat très important qui fait le lien entre la convergence presque partout et la convergence presque uniforme.

Théorème 2.5.1. ***(Egorov)*** *Soient (E, T, m) un espace mesuré, tel que $m(E) < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ et $f \in \mathscr{M}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p.. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in T$ tel que $m(A) \leq \epsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur A^c. (Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque uniformément vers f.)*

Définition 2.5.6. (Convergence en mesure) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ et $f \in \mathscr{M}$. On dit que f_n converge en mesure vers f si :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E, |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

2.6 Exercices

2.6.1 Enoncés

1. Soit (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soit $f : E \to F$ et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne
   - (a) On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne).
   - (b) On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.
3. On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. La fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est-elle mesurable ?
4. – (a) Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue, montrer que $f = g\, \lambda\, p.p.$ si et seulement si $f = g$.
   – (b) Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0, montrer que $f = g\, \delta_0\, p.p.$ si et seulement si $f(0) = g(0)$.
5. Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

- (a) Montrer que s'il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g\,p.p.$. [On pourra commencer par montrer que, pour tout $\delta > 0,\ m\left(\{x \in E,\ |f(x) - g(x)| > \delta\}\right) = 0$.]
- (b) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathscr{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathscr{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathscr{M}$.
- (c) On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathscr{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ converge en mesure vers $g \subset \mathscr{M}$, alors $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ converge en mesure vers $fg \subset \mathscr{M}$. [On pourra commencer par montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathscr{M}$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \geq n_0$ et $k \geq k_0$, on a $m\left(\{x \in E,\ |f_n(x)| \geq k\}\right) \leq \epsilon$.]

6. Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = +\infty$.

2.6.2 Corrigés

1. Soit $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on remarque que $(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\varphi^{-1}(B))$. Comme $\varphi^{-1}(B) \in S$ car φ est mesurable (de F dans $\mathbb{R}$), on a donc $f^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in T$ car f est mesurable (de E dans F). Ceci montre bien que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

2. – (a) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme f est continue, $f^{-1}(O)$ est aussi un ouvert de $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}(O) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Comme l'ensemble des ouverts engendre $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est mesurable (on utilise ici la caractérisation de la mesurabilité donnée au cours).
   – (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $A = f^{-1}([\alpha, +\infty[)$. On suppose $A \neq \emptyset$, (si $A = \emptyset$, on a bien $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$). Si $x \in A$, on a $f(x) \geq \alpha$ et, comme f est croissante, on a aussi $f(y) \geq \alpha$ pour tout $y \geq x$. Donc, $[x, +\infty[\subset A$. En posant $a = \inf(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, on en déduit que $]a, +\infty[\subset A \subset [a, +\infty[$. A est donc nécessairement un intervalle (dont la borne supérieure est $+\infty$), ce qui prouve que $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Comme $\{[\alpha, +\infty[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, on en déduit que f est mesurable. (On a utilisé ici de nouveau la caractérisation de la mesurabilité donnée au cours).

3. Oui, la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est mesurable. En effet, si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ (et même si $A \in P(\mathbb{R})$), on a $1_{\mathbb{Q}}^{-1}(A) = \emptyset$, ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (selon que 1 et 0 appartiennent ou non à A). Comme ces 4 ensembles sont des boréliens, on en déduit que $1_{\mathbb{Q}}$ est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quand $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne).

4. – (a) Si $f = g$ (c'est-à-dire $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a bien $f = g\,\lambda\,p.p.$ car $f = g$ sur $\emptyset^c$ et $\lambda(\emptyset) = 0$. Pour la réciproque, on va utiliser le fait qu'un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive. En effet, si O est un ouvert non vide, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha < \beta$ et $]\alpha, \beta[\subset O$, on a donc

$0 < \beta - \alpha = \lambda(]\alpha, \beta[) \leq \lambda(O)$. On suppose maintenant que $f = g\,\lambda\, p.p.$, il existe $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c. On a alors $\{f(x) \neq g(x)\} \subset A$. Or, $\{f(x) \neq g(x)\} = (f-g)^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert car $(f-g)$ est continue (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $\{f(x) \neq g(x)\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et la monotonie de λ donne $\lambda(\{f(x) \neq g(x)\}) \leq \lambda(A) = 0$. On en déduit que $\{f(x) \neq g(x)\} = \emptyset$, (car un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive) et donc $f = g$.

- (b) Si $f(0) = g(0)$, on prend $A = \{0\}^c$. On a bien $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\delta_0(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c car $A^c = \{0\}$. Donc, $f = g\,\delta_0\, p.p.$. Réciproquement, on suppose maintenant que $f = g\,\delta_0\, p.p.$, il existe donc $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tel que $f = g$ sur A^c et $\delta_0(A) = 0$. Comme $\delta_0(A) = 0$, on a donc $0 \not\in A$, c'est-à-dire $0 \in A^c$ et donc $f(0) = g(0)$.

5. – (a) Pour $h : E \to \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on note toujours $\{h > \delta\} = \{x \in E,\ h(x) > \delta\}$, $\{h \geq \delta\} = \{x \in E,\ h(x) \geq \delta\}$, $\{h < \delta\} = \{x \in E,\ h(x) < \delta\}$, $\{h \leq \delta\} = \{x \in E,\ h(x) \leq \delta$. Soit $\delta > 0$. Pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$. On en déduit $\left\{|f - f_n| \leq \dfrac{\delta}{2}\right\} \cap \left\{|f_n - g| \leq \dfrac{\delta}{2}\right\} \subset \{|f - g| \leq \delta\}$ et donc, en passant au complémentaire,

$$\{|f - g| > \delta\} \subset \left\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\right\}. \tag{2.6.1}$$

Par sous additivité de m, on a donc

$$m\left(\{|f - g| > \delta\}\right) \leq m\left(\left\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\right\}\right).$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $m(\{|f - g| > \delta\}) = 0$. On remarque maintenant que $\{x \in E,\ f(x) \neq g(x)\} = \{|f - g| > \delta\} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{|f - g| > \dfrac{1}{n}\right\}$ et donc, par $\sigma-$sous additivité de m, on obtient $m\left(\{x \in E,\ f(x) \neq g(x)\}\right) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} m\left(\left\{|f - g| > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$ et donc $f = g\, p.p.$.

- (b) Soit $\delta > 0$. En reprenant la démonstration de (2.6.1), on montre que

$$\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\} \subset \left\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{|g - g_n| > \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Par sous additivité de m, ceci donne

$$m\left(\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\}\right) \leq m\left(\left\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{|g - g_n| > \frac{\delta}{2}\right\}\right)$$

et donc que $m(\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a bien montré que $f_n + g_n \to f + g$ en mesure quand $n \to +\infty$.

- (c) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, la démonstration de (2.6.1) donne ici

6. .

Chapitre 3

Fonctions intégrables

3.1 Introduction

À la fin du XIXe siècle, il apparut que l'intégrale de Riemann (celle qui est enseignée dans les cours de calcul différentiel) devrait être remplacée par une intégrale plus flexible et plus générale. Après plusieurs tentatives, c'est celle de Henri Lebesgue qui se montra la plus féconde.

Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Qu'est-ce que l'intégrale d'une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}$? La mesure d'une partie mesurable A de E peut être interprétée comme l'intégrale de la fonction indicatrice de A :

$$\int 1_A d\mu := (A).$$

Par linéarité, on prolonge immédiatement la définition de l'intégrale pour toute fonction "étagée". Puisque toute fonction mesurable f est limite simple d'une suite de fonctions étagées f_n, il ne reste qu' à prendre, pour l'intégrale de f, la limite des intégrales des f_n. Sauf que... cette méthode conduit à une notion d'intégration incohérente (pourquoi ? [1]). Le miracle est qu'l suffit de définir l'intégrale des fonctions par limite croissante, du moins si l'on se restreint aux fonctions positives. Il ne reste alors qu'à étendre la définitions aux fonctions de signe quelconque, par différence, quand cela est possible.

3.2 Intégrale d'une fonction étagée positive

Définition 3.2.1. (Intégrale d'une fonction de $\mathscr{E}_+$) Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit f de E dans $\mathbb{R}$ une fonction étagée positive non nulle (c'est-à-dire $f \in \mathscr{E}_+$). Soient

1. L'intégrale des f_n n'a généralement pas de limite et, même à supposer que cette limite existe, elle dépend de la suite d'approximations étagées choisie. Par exemple, 0 est la limite simple des fonctions $f_n = 1_{[n,\infty[}$, mais on ne voudrait pas définir l'intégrale de la fonction nulle comme la limite des intégrales des f_n, qui valent toutes ∞. On retrouve ici la pathologie qui mettait en défaut la propriété de continuité extérieure d'une mesure quand celle-ci n'est pas finie. Pire, 0 est aussi la limite des fonctions $g_n = (-1)^n 1_{[n,\infty[}$, mais les intégrales des g_n valent alternativement $+\infty$ et $-\infty$, donc n'ont pas de limite !

$(A_i)_{i=1,...,n} \subset T$ une famille de parties disjointes deux à deux (i.e. t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et n réels $a_1, ..., a_n$ strictement positifs tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$. On définit l'intégrale de f, qu'on note $\int f dm$, par : $\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i)$, avec la convention $0 \times \infty = 0$. D'autre part, si $f = 0$, on pose $\int f dm = 0$.

Si, plus généralement, X est un borelien de $\mathbb{R}$, l'intégrale de Lebesgue de f sur X est :

$$\int_X f dm = \int_{\mathbb{R}} f.1_X dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i \cap X).$$

On dit que f est intégrable (au sens de Lebesgue) sur X si : $\int_X f dm < +\infty$.

On notera aussi l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f dm(x)$. Remarques.

Remarque 3.2.1. Graphiquement, l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ est donc tout simplement l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la fonction f.

La valeur de l'intégrale peut donc être $+\infty$. Ceci n'est pas génant, on dira simplement que la fonction n'est pas intégrable au sens de Lebesgue.

Par contre, on s'est restreint aux fonctions positives afin d'eviter des situations problématiques de type $\infty - \infty$. On verifie que la valeur de l'integrale est indépendante du fait que f est écrite sous forme canonique ou non.

Exemple 3.2.1.

1. *La fonction $f = 1_{[0,+\infty[}$ est une fonction simple mesurable positive et $\int_{\mathbb{R}} f dm = +\infty$. Elle n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Par contre $\int_{[0,1]} f dm = 1$, donc elle est intégrable sur $[0, 1]$.*
2. *La fonction $f = 2.1_{[0,2]}$ est une fonction simple mesurable positive et $\int_{\mathbb{R}} f dm = 4$. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle l'est aussi sur $[0, 1]$, avec $\int_{[0,1]} f dm = 2$.*

Proposition 3.2.1. ***(Propriétés de l'intégrale sur $\mathscr{E}_+$)*** *Soient f, g et $h \in \mathscr{E}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, et E, E_1 et E_2 alors :*

- *Positivité : Si $f \leq g$ sur E, alors $\int_E f dm \leq \int_E g dm$.*
- *Positivité (bis) : Si $E_1 \subseteq E_2$, alors $\int_{E_1} f dm \leq \int_{E_2} f dm$.*
- *Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, alors $\int_{E_1 \cup E_2} f dm = \int_{E_1} f dm + \int_{E_2} f dm$.*
- *Si $f = 0$, alors $\int_E f dm = 0$.*
- *Si E est négligeable, alors $\int_E f dm = 0$.*
- *linéarité positive : $\alpha f + \beta g \in \mathscr{E}_+$, et $\int_E (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int_E f dm + \beta \int_E g dm$,*

Remarque 3.2.2. La fonction de Peano donne un exemple de fonction Lebesgue intégrable non Riemann intégrable. Sur $X = [0,1]$, $f = 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est simple, puisqu'elle ne prend que deux valeurs, et mesurable, puisque l'ensemble des rationnels de $[0,1]$ est un borelien (union dénombrable de points, qui sont des boreliens) et que son complémentaire l'est aussi. Par ailleurs, un ensemble dénombrable de points est de mesure de Lebesgue nulle, donc par la propriete ci-dessus :

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} dm = 0.$$

Ainsi cette fonction est intégrable d'intégrale nulle au sens de Lebesgue, alors qu'elle n'est pas Riemann intégrable.

3.3 Intégrale d'une fonction mesurable positive

Maintenant qu'on a défini l'intégrale pour les fonctions simples positives, on peut passer aux fonctions mesurables positives.

Définition 3.3.1. (Intégrale sur $\mathscr{M}_+$) Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathscr{M}_+$. D'après la proposition sur la mesurabilité positive, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$, c'est-à-dire :
- Pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to \infty$,
- $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $x \in E$, et tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit l'intégrale de f en posant :

$$\int f dm = \lim_{n\to\infty} \int f_n dm \, (\in \mathbb{R}^+) \tag{3.3.1}$$

On a aussi la caractérisation suivante, parfois bien utile, de l'intégrale d'une fonction mesurable positive à partir d'intégrales de fonctions étagées positives.

Lemme 3.3.1. *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathscr{M}_+$, alors $\int f dm = \sup\left\{\int g dm,\ g \in \mathscr{E}_+,\ g \leq f\right\}$. On dit que f est intégrable si $\int f dm < +\infty$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathscr{E}_+$ donne que $\int f_n dm = \sup\{\int g dm,\, g \in \mathscr{E}_+,\, g \leq f_n\}$. Comme $f_n \leq f$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int f_n dm = \sup\{\int g dm,\, g \in \mathscr{E}_+,\, g \leq f_n\} \leq \sup\{\int g dm,\, g \in \mathscr{E}_+,\, g \leq f\}$$

La définition de $\int f dm$ donne alors : $\int f dm \leq \sup\{\int g dm,\, g \in \mathscr{E}_+,\, g \leq f\}$. Pour montrer l'inégalité inverse, soit $g \in \mathscr{E}_+$ t.q. $g \leq f$. Comme $f_n \uparrow f$, le lemme **??** donne $\int g dm \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n dm = \int f dm$. On a donc $\sup\{\int g dm,\, g \in \mathscr{E}_+,\, g \leq f\} \leq \int f dm$. □

Proposition 3.3.1. ***(Critère d'intégrabilité)*** *Soit f et g mesurables telles que $0 \leq f \leq g$, alors :*

$$0 \leq \int f dm \leq \int g dm \leq +\infty.$$

En particulier, si g est intégrable, alors fl'est aussi.

Lemme 3.3.2. *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*
1. *Soit $f \in \mathscr{M}_+$ et $A \in T$. On note $f1_A \in \mathscr{M}_+$ la fonction définie par $f1_A(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $f1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$. On définit $\int_A f dm$ par $\int f1_A dm$. On suppose que $m(A) = 0$. Alors, $\int_A f dm = 0$.*
2. *Soit $f, g \in \mathscr{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Alors, $\int f dm = \int g dm$.*
3. *Soit $f \in \mathscr{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f dm = 0$.*

Démonstration. 1. Soit $f \in \mathscr{M}_+$ et $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. Soit I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A . On a évidemment $f1_A \leq I_A$ et donc, par monotonie, $\int f1_A dm = 0$.
2. Soit $f, g \in \mathscr{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f1_{A^c} = g1_{A^c}$. On a donc $f1_{A^c}, g1_{A^c} \in \mathscr{M}_+$ et $\int f1_{A^c} dm = \int g1_{A^c} dm$. D'autre part, comme $\int f1_A dm = \int g1_A dm = 0$, on a aussi, par linéarité positive $\int f dm = \int f1_{A^c} dm + \int f1_A dm = \int \int f1_{A^c} dm$ (et de même pour g). Donc, $\int f dm = \int g dm$.
3. Soit $f \in \mathscr{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$. □

3.4 Convergence monotone et lemme de Fatou

Théorème 3.4.1. ***(Convergence Monotone (1))*** *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}_+$ t.q. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$. On pose, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $f \in \mathscr{M}_+$ et $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration. Noter que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_+$, le fait que $\int f_n dm \to \int f dm$, lorsque $n \to \infty$, est donné par la définition de l'intégrale sur $\mathscr{M}_+$. La difficulté est donc ici de travailler avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}_+$ au lieu de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_+$.
Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}_+$ converge simplement et en croissant vers f, ce qui donne $f \in \mathscr{M}_+$. Puis, par monotonie de l'intégrale sur $\mathscr{M}_+$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dm \leq \int f dm \tag{3.4.1}$$

Il reste donc à montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dm \geq \int f dm \tag{3.4.2}$$

Pour montrer 3.4.2), on va construire une suite de fonctions $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_+$ t.q $g_p \uparrow f$, quand $p \to \infty$, et $g_p \leq f_p$, pour tout $p \in \mathscr{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{M}_+$, il existe une suite de fonctions $(f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}_+$ t.q. $f_{n,p} \uparrow f_n$ lorsque p tend vers ∞. On définit alors : $g_p = \sup\limits_{n\leq p} f_{n,p}$
On note que :
1. $g_p \in \mathscr{E}_+$ car g_p est le sup d'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{E}_+$ (donc g_p est mesurable, $Im(g_p) \subset \mathbb{R}_+$ et $card(Im(g_p)) < \infty$, ce qui donne $g_p \in \mathscr{E}_+$).
2. $g_{p+1} \geq g_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, comme $f_{n,p+1} \geq f_{n,p}$ (pour tout n et p), on a

$$g_{p+1} = \sup\{f_{p+1,p+1}, \sup_{n\leq p} f_{n,p+1}\} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p+1} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p} = g_p.$$

On peut donc définir, pour $x \in E$, $g(x) = \lim\limits_{p\to\infty} g_p(x) \in \mathbb{R}_+$ (car la suite $(g_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\mathbb{R}_+$).
3. $g = f$. En effet, on remarque que $g_p \geq f_{n,p}$ si $n \leq p$. On fixe n et on fait tendre p vers l'infini, on obtient $g \geq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to \infty$ on en déduit $g \geq f$. D'autre part, on a $f_{n,p} \leq f_n \leq f$ pour tout n et tout p. On a donc $g_p \leq f$ pour tout p. En faisant $p \to \infty$ on en déduit $g \leq f$. On a bien montré que $f = g$.
4. $g_p \leq f_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, $f_{n,p} \leq f_n \leq f_p$ si $n \leq p$. On a donc $g_p = \sup\limits_{n\leq p} f_{n,p} \leq f_p$.
Les points 1 à 3 ci dessus donnent $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}_+$ et $g_p \uparrow f$ quand $p \to \infty$. Donc, la définition de l'intégrale sur $\mathscr{M}_+$ donne $\displaystyle\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm$. Le point 4 donne (par monotonie de l'intégrale sur $\mathscr{M}_+$) $\displaystyle\int g_p dm \leq \int f_p dm$, on en déduit $\displaystyle\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm \leq \lim_{p\to\infty} \int f_p dm$.
Finalement, on obtient bien $\displaystyle\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int f_p dm$. □

Remarque 3.4.1. – Ce résultat est encore appelé Théorème de **Beppo Levi**. [2]
- La valeur commune ci-dessus est eventuellement $+\infty$, auquel cas la limite simple f des f_n n'est pas intégrable. Par exemple, prendre $f_n = 1_{[0,n]}$.
- Le résultat est encore valable si on se place sur un borélien E de $\mathbb{R}$.
- On peut donc passer la limite sous le signe somme avec la seule hypothèse de convergence simple des f_n, hypothèse moins forte que celles vues en chapitre 1 pour l'intégrale de Riemann (convergence uniforme et intervalle d'intégration borné).

Corollaire 3.4.1. ***(Séries à termes positifs ou nuls)*** *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}_+$, on pose, pour tout $x \in E$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) (\in \overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors $f \in \mathscr{M}_+$ et $\displaystyle\int f dm = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n dm$.*

On énonce maintenant un résultat d'usage surtout théorique : il servira notamment à prouver le théorème de convergence dominée de Lebesgue en section suivante.

2. Beppo Levi, mathématicien italien (18751961)

Lemme 3.4.1. ***(Fatou)***[3] *Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}_+$. On pose pour tout $x \in E$ $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(\inf_{p\geq n} f_p(x)) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $f \in \mathscr{M}_+$ et*

$$\int f dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to\infty}(\inf_{p\geq n} \int f_p dm).$$

Remarque 3.4.2. Le lemme de Fatou est souvent utilisé avec des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}_+$ telles que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour presque tout $x \in E$. Il permet alors de montrer que la limite (au sens de la convergence p.p.) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est "intégrable".

3.5 L'espace L^1 des fonctions intégrables

Soit $f \in \mathscr{M}$, alors $f = f^+ - f^-$, avec $f^+ = \max(f(x), 0)$, $f^- = -\min(f(x), 0) = (-f)^+(x) \in \mathscr{M}_+$ et $|f| = f^+ + f^-$, la monotonie de l'intégrale sur $\mathscr{M}_+$ donne $\int f^+ dm \leq \int |f| dm$ et $\int f^- dm \leq \int |f| dm$.

Définition 3.5.1. (Intégrale d'une fonction de signe quelconque) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est intégrable si f^+ et f^- le sont, son intégrale étant alors :

$$\int_E f dm = \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm.$$

Ceci va nous permette de définir l'espace $\mathscr{L}^1$ et l'intégrale sur $\mathscr{L}^1$ à partir de l'intégrale sur $\mathscr{M}_+$

Définition 3.5.2. (Espace $\mathscr{L}^1$ et Intégrale de Lebesgue) Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathscr{M}$. On dit que f est intégrable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si $\int |f| dm < \infty$. Dans ce cas, on a aussi $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$. On pose alors :

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \ (\in \mathbb{R}) \tag{3.5.1}$$

On note $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (ou plus simplement $\mathscr{L}^1$) l'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathscr{M}$, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathscr{M}+$ donne $\int |f| dm = \int f^+ dm + \int f^- dm$. On voit donc que $f \in \mathscr{L}^1$ si et seulement si $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$.

Proposition 3.5.1. ***(Propriétés de $\mathscr{L}^1$ et de l'intégrale sur $\mathscr{L}^1$)*** *Soit (E, T, m) un espace mesuré. On a alors :*

1. $\mathscr{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. L'application $f \mapsto \int f dm$ est une application linéaire de $\mathscr{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.

3. Pierre Joseph Louis Fatou, mathématicien et astronome français (18781929), célèbre pour ses nombreuses contributions en analyse, ainsi qu'en dynamique complexe.

3. Monotonie : soient f et $g \in \mathscr{L}^1$ telles que $f \leq g$, alors $\int fdm \leq \int gdm$

4. Pour tout $f \in \mathscr{L}^1$, $\left|\int fdm\right| \leq \int |f|dm$.

Définition 3.5.3. (Semi-norme sur $\mathscr{L}^1$) Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathscr{L}^1$. On pose :

$$\|f\|_1 = \int |f|dm$$

L'application de $\mathscr{L}^1$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi-norme sur $\mathscr{L}^1$.

Proposition 3.5.2. *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*
1. Soit $f \in \mathscr{M}_+$. Alors $\int fdm = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p..
2. Soit $f \in \mathscr{L}^1$. Alors $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p..
3. Soit f, $g \in \mathscr{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. Alors $\int fdm = \int gdm$.

On conclut cette section par une proposition préliminaire au théorème de convergence dominée.

Proposition 3.5.3. *Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1$, $f \in \mathscr{M}$ et $g \in \mathscr{L}^1$ t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$, et, pour tout $n \in N$, $|f_n| \leq g$ p.p.. On a alors $f \in \mathscr{L}^1$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$ et $\int f_n dm \to \int fdm$, quand $n \to \infty$.*

On définit maintenant une relation d'équivalence, notée $(= p.p.)$, sur $\mathscr{L}^1$ par : $f(= p.p.)g$ si $f = g$ p.p.

Définition 3.5.4. **(L^1)** L'ensemble $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $(= p.p.)$ définie sur L^1, i.e. $L^1 = \mathscr{L}^1/(= p.p.)$.

Remarque 3.5.1. Un élément de L^1 est donc une partie de $\mathscr{L}^1$.
2. Si $f \in L^1$, on note $\tilde{f} = \{g \in \mathscr{L}^1,\ g = f\, p.p.\}$ $\tilde{f}$ est donc un élément de L^1, c'est l'élément de L^1 auquel f appartient (on l'appelle la classe de f).

Définition 3.5.5. (Structure vectorielle sur L^1) On munit L^1 d'une structure vectorielle (faisant de L^1 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$)
1. Soient $F \in L^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in F$ et on pose $\alpha F = \{g \in L^1,\ g = \alpha f\, p.p.\}$.
2. Soient $F, G \in L^1$. On choisit $f \in F$, $g \in G$ et on pose $F + G = \{h \in L^1,\ h = f + g\, p.p.\}$.

Définition 3.5.6. (Intégrale sur L^1) Soit $F \in L^1$ et $f \in F$ (on dit que f est un représentant de la classe F, noter que $f \in L^1$). On pose :

$$\int Fdm = \int fdm$$

On rappelle que si $f \in \mathscr{L}^1$, $F \in L^1$ et que $f \in F$, on dit que f est un représentant de F. On introduit maintenant plusieurs notions de convergence dans L^1. Il est facile de vérifier que ces définitions sont cohérentes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des représentants choisis pour les éléments de L^1. La notion de convergence simple n'a pas de sens dans L^1, mais la notion de convergence p.p., vue précédemment, se généralise aux éléments de L^1 ainsi que la notion de convergence en mesure.

3.6 Théorème de convergence dominée dans L^1

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de convergence monotone et permet de montrer la convergence dans L^1 d'une suite monotone de fonctions convergeant presque partout.

Théorème 3.6.1. ***(Beppo-Lévi)*** *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.*
On suppose que :
1. $f_{n+1} \geq f_n$ p.p., $\forall n \in \mathbb{N}$, $[ou f_{n+1} \leq f_n$ p.p., $\forall n \in \mathbb{N}]$,
2. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to \infty$.
On a alors :
1. $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (au sens "il existe $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p.") si et seulement si :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}$$

2. Si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, alors $f_n \to f$ dans L^1.

Théorème 3.6.2. ***(Convergence dominée)*** *Soit (E, T, m) un espace mesuré. L'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est noté L^1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$ telles que :*
1. $f_n \to f$ p.p.
2. $\exists F \in L^1$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq F$ p.p..
Alors $f \in L^1$ (au sens "il existe $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p.") et $f_n \to f$ dans L^1 (c'est-à-dire $\int |f_n - f| dm \to 0$ lorsque $n \to \infty$). Ceci donne aussi $\int f_n dm \to \int f dm$, lorsque $n \to \infty$.

3.7 Continuité et dérivabilité sous le signe somme

On va maintenant montrer que l'espace $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach, en montrant que toute série absolument convergente dans L^1 (i.e. t.q. la série des normes converge) est convergente dans L^1. On en déduira aussi un résultat très important qui permet d'extraire d'une suite convergeant dans L^1 une sous-suite convergeant presque partout. On aura besoin au cours de la démonstration du petit résultat (démontré en TD) suivant :

Lemme 3.7.1. *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $F \in \mathscr{M}_+$. *On suppose que* $\int F dm < \infty$. *Alors* $F < \infty$ *p.p. (c'est-à-dire que il existe* $A \in T$ *t.q.* $m(A) = 0$ *et* $F(x) < \infty$ *pour tout* $x \in A^c$*).*

Théorème 3.7.1. ***(Séries absolument convergentes dans*** L^1***)*** *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *t.q.* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < \infty$, *alors :*

1. $\exists F \in L^1$, $\left|\sum_{p=0}^{n} f_p\right| \leq F$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. La série de terme général $f_n(x)$ *est, pour presque tout* $x \in E$, *convergente (dans* $\mathbb{R}$*). On définit* f *par* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *(de sorte que* f *est définie p.p.).*

3. $f \in L^1$ *(au sens "il existe* $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.") et* $\sum_{p=0}^{n} f_p \to f$ *dans* L^1 *et p.p., quand* $n \to \infty$.

Soient (E, T, m) un espace mesuré, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à $t \in \mathbb{R}$ fixé, on définit l'application $f(., t) : E \to \mathbb{R}$, qui à x associe $f(x, t)$. On suppose que l'application $f(., t)$ ainsi définie vérifie l'hypothèse suivante :

$$f(., t) \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m), \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.7.1}$$

et on note F l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int f(., t)dm = \int f(x, t)dm(x) \tag{3.7.2}$$

Théorème 3.7.2. ***(Continuité sous*** $\int$ ***)*** *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* f *une fonction de* $E \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant l'hypothèse* (3.7.1) *et* $t_0 \in \mathbb{R}$, *on suppose de plus que :*

1. l'application $f(x, .)$, *définie pour presque tout* $x \in E$ *par :* $t \mapsto f(x, t)$, *est continue en* t_0, *pour presque tout* $x \in E$.

2. $\exists \varepsilon > 0$ *et* $\exists G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *tels que* $|f(., t)| \leq G$ *p.p., pour tout* $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. *Alors* F, *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $F(t) = \int f(., t)dm = \int f(x, t)dm(x)$, *est continue en* t_0.

Démonstration. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to \infty$. Soit f_n définie par $f_n(x) = f(x, t_n)$. Comme $f_n \to f(., t_0)$ p.p. et $|f_n| \leq G$ p.p.. On peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne $F(t_n) \to F(t_0)$ quand $n \to \infty$. □

Théorème 3.7.3. ***(Dérivabilité sous*** $\mathbb{R}$***)*** *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* f *une fonction de* $E \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant l'hypothèse* (3.7.1) *et* $t_0 \in \mathbb{R}$. *On suppose de plus qu'il existe* $\varepsilon > 0$, $A \in T$ *et* $G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $m(A) = 0$ *et :*

1. L'application $t \mapsto f(x, t)$ *est dérivable pour tout* $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ *et pour tout* $x \in A^c$,

2. $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq G(x)$ *pour tout* $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ *et pour tout* $x \in A^c$.

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \int f(.,t)dm = \int f(x,t)dm(x)$, est dérivable en t_0 et :

$$F'(t_0) = \int \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\right| dm(x) \tag{3.7.3}$$

Démonstration. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to \infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans L^1 et on peut lui appliquer le théorème de convergence dominée car $f_n \to \frac{\partial f}{\partial t}(.,t_0)$ p.p., quand $n \to \infty$, et, si $x \in A^c$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_{x,n} \in]0,1[$ t.q. $f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta_{x,n}t_0 + (1-\theta_{x,n})t_n)$ (grâce au théorème des accroissements finis) et donc $|f_n| \leq G$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de convergence dominée donne alors $\frac{\partial f}{\partial t}(.,t_0) \in L^1$ et $\int f_n dm \to \int \frac{\partial f}{\partial t}(.,t_0)dm$. Ceci étant vrai pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to \infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit bien que F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dm(x)$$

□

3.8 Les espaces L^p, avec $1 \leq p < \infty$

Soient (E,T,m) un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathscr{M}$ (c'est-à-dire $f : E \to \mathbb{R}$, mesurable). On remarque que $|f|^p \in \mathscr{M}_+$, car $|f|^p = \varphi \circ f$ où φ est la fonction continue (donc borélienne) définie par $\varphi(s) = |s|^p$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. La quantité $\int |f|^p dm$ est donc bien définie et appartient à $\mathbb{R}^+$. Ceci va nous permette de définir les espaces de fonctions de puissance p-ième intégrable. On retrouve, pour $p = 1$, la définition de l'espace des fonctions intégrables.

Définition 3.8.1. (Les espaces $\mathscr{L}^p$) Soient (E,T,m) un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$ et f une fonction définie de E dans $\mathbb{R}$, mesurable. (On a donc $|f|^p \in \mathscr{M}_+$.)
1. On dit que $f \in \mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si $\int |f|^p dm < \infty$. On pose alors :

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm\right)^{1/p} \tag{3.8.1}$$

2. On dit que f n'appartient pas à $\mathscr{L}^p$ si $\int |f|^p dm = \infty$ et on pose alors $\|f\|_p = \infty$.

Définition 3.8.2. (Les espaces L^p) Soient (E,T,m) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$.

1. On définit l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathscr{L}^p$ pour la relation d'équivalence ($= pp$). En l'absence d'ambiguïté on notera L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.
2. Soit $F \in L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On pose $\|F\|_p = \|f\|_p$ si $f \in F$. (Cette définition est cohérente car ne dépend pas du choix de f dans F. On rappelle aussi que $F = \widetilde{f} = \{g \in \mathscr{L}^p,\ tq\ g = f p.p.\}$.)

Proposition 3.8.1. *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Alors :*

1. *$\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
2. *$L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Lemme 3.8.1. ***(Inégalité de Young)*** *Soient $a,b \in \mathbb{R}^+$ et $p,q \in]1,+\infty[$ t.q. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{3.8.2}$$

Démonstration. La fonction exponentielle $\theta \mapsto \exp(\theta)$ est convexe (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On a donc, pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\exp(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) \leq t\exp(\theta_1) + (1-t)\exp(\theta_2)$$

Soit $a,b > 0$ (les autres cas sont triviaux). On prend $t = \dfrac{1}{p}$ (de sorte que $(1-t) = \dfrac{1}{q}$), $\theta_1 = p\ln(a)$ et $\theta_2 = q\ln(b)$. On obtient bien $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ □

Lemme 3.8.2. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $p,q \in]1,+\infty[$ t.q. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$. Alors, $fg \in \mathscr{L}^1$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{3.8.3}$$

Le même résultat est vrai avec L^p, L^q et L^1 au lieu de $\mathscr{L}^p$, $\mathscr{L}^q$ et $\mathscr{L}^1$.

Lemme 3.8.3. ***(Inégalité de Minkowski)*** *Soient (E,T,m) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Soient $f,g \in \mathscr{L}^p$. Alors, $f+g \in \mathscr{L}^p$ et :*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{3.8.4}$$

Le même résultat est vrai avec L^p au lieu de $\mathscr{L}^p$.

3.9 Exercices

3.9.1 Enoncés

1. Calculer les limites suivantes :
   - (a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{n^2+1}{x^2n^2+1}dx$
   - (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\frac{1}{nx})dx$
   - (c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$
   - (d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\frac{x}{n})\frac{n}{x(1+x^2)}dx$
   - (e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{1+\cos^{2n}(x)e^{-|x|}}dx$
   - (f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\arctan(\frac{x}{n})e^{-x}dx$
2. Soit μ la mesure de comptage ($Card$) sur $(\mathbb{N},P(\mathbb{N}))$. Pour toute suite positive $(u_n)_{n\geq0}$, on a : $\sum\limits_{n\geq0}u_n=\int_{\mathbb{N}}u_n\mu(dn)$.
   - (a) Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty}\left[\sum\limits_{n\geq0}\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{k(n+1)}\right)\right]$
   - (b) Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty}\left[\sum\limits_{n\geq0}\frac{\sin\frac{n}{k}}{2^n}\right]$
3. – (a) Montrer que $\forall\, z\geq0,\ 0\leq 1-e^{-z}\leq z$.
   - (b) En déduire que $\forall\, y>0,\ x\mapsto\frac{1-e^{x^2y}}{x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   - (c) Pour tout $y>0$, on pose

     $$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{x^2y}}{x^2}dx.$$

     Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer $F'(y)$. On rappelle que

     $$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
   - (d) En déduire $F(y)$ à une constante près.
   - (e) Calculer cette constante en regardant $\lim\limits_{n\to+\infty}F(\frac{1}{n})$.
4. On considère pour $n\geq0$ la série $\sum\limits_{k\geq0}u_{n,k}$ avec $u_{n,k}=\frac{1}{k!}\left(\frac{2n^2+6n+1}{n^2+5n+\pi}\right)^k$.
   - (a) Montrer que cette série est convergente ($\forall n\geq0$). On notera I_n sa limite.
   - (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

3.9.2 Corrigés

1. – (a)

  - Pour tout $x \geq 1,\ \dfrac{n^2+1}{x^2n^2+1} \leq \dfrac{n^2+1}{x^2n^2} \leq \dfrac{2}{x^2}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.
  - Pour tout $x \geq 1,\ \dfrac{n^2+1}{x^2n^2+1} \to_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$. Donc, par théorème de convergence dominée,
$$\int_1^\infty \frac{n^2+1}{x^2n^2+1}dx \to_{n\to+\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = [-1/x]_1^{+\infty} = 1.$$
- (b)
  - $\forall x \in$ ¸$]0,1],\ \left|\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin(1/nx)\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, qui est intégrable sur $[0, 1]$
  - $\forall x \in$ ¸$]0,1],\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin(1/nx) \to_{n\to+\infty} 0$ donc par convergence dominée $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(1/nx)dx =$ 0.
- (c)
  - $\forall x \in$ ¸$[0,1],\ \left|\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\right| \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0, 1]$.
  - On a $\forall x \in$ ¸$[0,1],\ \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\log\left(1-\dfrac{x}{n}\right)\right) = \exp(n(-x/n+o(1/n))) = \exp(-x+o(1)) \to$ par continuité de la fonction exponentielle. Donc par convergence dominée,
$$\int_0^1 \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \to_{n\to+\infty}= \int_0^1 e^{-x}dx = 1-e^{-1}.$$
- (d)
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\sin(\dfrac{x}{n})\dfrac{n}{x(1+x^2)}\right| \leq \dfrac{1}{(1+x^2)}$ qui est une fonction intégrable sur $]-\infty, +\infty[$,
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\dfrac{x}{n})\dfrac{n}{x(1+x^2)} \to_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)}$ car $\sin(u) \sim_{u\to0} u$ donc par convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty}\int -\infty^{+\infty}\sin(\frac{x}{n})\frac{n}{x(1+x^2)}dx \to_{n\to+\infty} \int -\infty^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)}dx = \arctan(x)|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$
- (e)
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{1+\cos^{2n}(x)e^{-|x|}\leq e^{2-|x|}}$ qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
  - Pour p.t. $x \in \mathbb{R},\ e^{1+\cos^{2n}(x)e^{-|x|}\to_{n\to+\infty}e^{1-|x|}}$ donc par convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{1-|x|}dx=2e^1.}$$
- (f)
  - $\forall x \geq 0,\ \arctan(x/n)e^{-x} \leq (\pi/2)e^{-x}$ qui est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.
  - Pour tout $x \geq 0,\ \arctan(x/n)e^{-x} \to_{n\to+\infty} 0$ donc par convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\arctan(x/n)e^{-x}dx = 0.$$

2. – (a) Pour tout n, k, $0 \leq \frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{k(n+1)}\right) \leq \frac{1}{3^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour tout n, $\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{k(n+1)}\right) \to_{k\to+\infty} \frac{1}{3^n}$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{k(n+1)}\right)\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}.$$

 – (b) Pour tout n, k, $\left|\frac{\sin(n/k)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour tout n, $\frac{\sin(n/k)}{2^n} \to_{k\to+\infty} 0$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(n/k)}{2^n} = 0.$$

3. – (a) $0 \leq 1-e^{-z} = \int_0^z e^{-t}dt \leq \int_0^z dt = z$

 – (b) Par la question précédente, $\forall y > 0$, $0 \leq \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2} \leq y$ et $\leq \frac{1}{x^2}$ donc $0 \leq \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2} \leq \inf(y, \frac{1}{x^2})$ donc $x \mapsto \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}$ est intégrable

 – (c) Soit $\epsilon > 0$,

   – $\forall y > \epsilon$, $x \mapsto \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}$ est intégrable

   – $\forall x > 0$ (et donc pour presque tout $x \geq 0$), $y \mapsto \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}$ est dérivable

   – $\forall x > 0$, $\forall y > \epsilon$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}\right) = e^{-x^2y}$ et $|e^{-x^2y}| \leq e^{-\epsilon x^2}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ Donc (théorème de dérivation sous le signe intégrale) F est dérivable sur $]\epsilon, +\infty[$ et F' vaut :

$$F'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2y}dx.$$

   Cela est vrai $\forall\epsilon > 0$ donc cette dérivée est valable pour tout $y \in]0, +\infty[$. Par changement de variable ($u = \sqrt{y}x$), $F'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}$.

 – (d) On en déduit $F(y) = \sqrt{\pi y} + C$ pour une certaine constante C.

 – (e) $F(1/n) = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ avec $f_n(x) = \frac{1-e^{-x^2/n}}{x^2}$. Pour tout $x > 0$, $f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0$. Pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leq \inf(1, 1/x^2)$ (voir question 1). Donc, par théorème de convergence dominée :

$$F(1/n) \to_{n\to+\infty} 0,$$

 donc $C = 0$.

4. – (a) Pour $n \geq 0$, $0 \leq \dfrac{2n^2+6n+1}{n^2+5n+\pi} \leq 6$. Donc $0 \leq u_{n,k} \leq \dfrac{6^k}{k!}$ et cette dernière quantité est le terme général d'une série convergente (quand on somme sur k)(série exponentielle). Donc $\displaystyle\sum_{k\geq 0} u_{n,k}$ est convergente.
   – (b) I_n peut être vue comme une intégrale par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
     – Pour tout k, $u_{n,k} \to_{n\to+\infty} 2^k/k!$.
     – Pour tout k, $u_{n,k} \leq 6^k/k!$ qui est sommable.

     Donc par théorème de convergence dominée, $I_n \to_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k\geq 0} 2^k/k! = e^2$.

Chapitre 4 ✍

Produit d'espaces mesurés

4.1 Introduction

On a introduit la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ (notée $\mathscr{B}(\mathbb{R})$), ce qui nous a permis d'exprimer la notion de longueur d'une partie (borélienne) de $\mathbb{R}$. On peut se poser la question de savoir s'il existe une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^2$ qui exprimerait la notion de surface (et une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^3$ qui exprimerait la notion de volume...). La question est donc : existe-t-il une mesure λ_2 sur une tribu de $\mathbb{R}^2$ contenant $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B), \ \ \forall A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})?$$

La tribu T_2, sur laquelle on veut définir λ_2, doit donc contenir $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \{A \times B, \ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \ B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$$

n'est pas une tribu.
En effet, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$ n'est pas stable par passage au complémentaire ni par union (par contre, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$ est stable par intersection dénombrable).
On définit alors T_2 comme la tribu engendrée par $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$, qu'on note $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$. On cherche alors une mesure $\lambda_2 : T_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B)$ pour tout $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
On peut montrer l'existence et l'unicité de la mesure λ_2 . On peut aussi montrer que la tribu T_2 est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$.
Une autre question qu'on abordera dans ce chapitre concerne l'intégration des fonctions à plusieurs variables. Considérons par exemple une fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sous quelles hypothèses (faciles à vérifier...) peut-on écrire :

$$\int \left(\int f(x, y) dy \right) dx = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy? \tag{4.1.1}$$

Une réponse à cette question est apportée par le théorème de Fubini, que nous verrons dans ce chapitre.

4.2 Mesure produit

Définition 4.2.1. Tribu produit) Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) des espaces mesurables. On pose $E = E_1 \times E_2$. On appelle tribu produit la tribu sur E engendrée par $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$. Cette tribu produit est notée $T_1 \otimes T_2$.
Un exemple fondamental est $(E_1, T_1) = (E_2, T_2) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. On va montrer que, dans ce cas, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$.

Théorème 4.2.1. ***(Mesure produit)*** *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) deux espaces mesurés σ-finis, $E = E_1 \otimes E_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$. Alors, il existe une et une seule mesure m sur T vérifiant :*

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2) \quad \textit{pour tout } A_1 \in T_1,\ \textit{et}\, A_2 \in T_2\ \textit{t.q.}\, m_1(A_1) < \infty\ \textit{et}\, m(A_2) < \infty. \tag{4.2.1}$$

Cette mesure est notée $m = m_1 \otimes m_2$. De plus, m est σ-finie.

Démonstration. **Existence** de m. On va construire une mesure m sur T vérifiant (4.2.1). Soit $A \in T$. On va montrer, à l'étape 1, que, pour tout $x_1 \in E_1$, on a $1_A(x_1, .) \in \mathscr{M}_+(E_2, T_2)$. On pourra donc poser $f_A(x_1) = \displaystyle\int 1_A(x_1, .)dm_2$, pour tout $x_1 \in E_1$. L'application f_A sera donc une application de E_1 dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On va montrer, à l'étape 2, que $f_A \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$. On posera alors $m(A) = \displaystyle\int f_A dm_1$.
Enfin, il restera à l'étape 3 à montrer que m est bien une mesure vérifiant (4.2.1) et que m est σ-finie.
Etape 1. Pour $A \in \mathscr{P}(E)$ et $x_1 \in E_1$, on note $S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2,\ (x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$, de sorte que $1_A(x_1, .) = 1_{S(x_1,A)}$.
Soit $x_\in E_1$. On pose $\Theta = \{A \in \mathscr{P}(E),\ S(x_1, A) \in T_2\}$. On remarque tout d'abord que $\Theta \supset T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a $S(x_1, A) = A_2 \in T_2$ si $x_1 \in A_1$ et $S(x_1, A) = \emptyset \in T_2$ si x_1 n'appartient pas à A_1. On remarque ensuite que Θ est une tribu. En effet :
• $\emptyset \in \Theta$ car $S(x_1, \emptyset) = \emptyset \in T_2$,
• Θ est stable par passage au complémentaire. En effet : $S(x_1, A^c) = (S(x_1, A))^c$ (c'est-à-dire $S(x_1, E \setminus A) = E_2 \setminus S(x_1, A)$). On a donc $S(x_1, A^c) \in T_2$ si $A \in \Theta$, ce qui prouve que $A^c \in \Theta$.
• Θ est stable par union dénombrable. Il suffit de remarquer que : $S(x_1, \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}) = \cup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \in T_2$ si $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Theta$.
Θ est donc une tribu contenant $T_1 \times T_2$, ceci prouve que Θ contient $T_1 \otimes T_2 = T$. On a donc $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $A \in T$. Pour tout $A \in T$, on peut donc définir une application $f_A : E_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ en posant :

$$f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \int 1_{S(x_1,A)} dm_2 = \int 1_A(x_1, .)dm_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+, \text{ pour tout } x_1 \in E_1 \tag{4.2.2}$$

Etape 2. Dans cette étape, on démontre que $f_A \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Cette étape est plus difficile que la précédente. On note $\Sigma = \{A \in T,\ f_A \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)\}$ et on va montrer que $T \subset \Sigma$ et donc que $\Sigma = T$. On suppose d'abord que m_2 est finie. Il est facile de voir que Σ contient $T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a alors $f_A = m_2(A_2) 1_{A_1} \in \mathscr{E}_+(E_1, T_1) \subset \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$. On note maintenant $\mathscr{A}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ ($\mathscr{A}$ s'appelle l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$,). Si $A \in \mathscr{A}$, il existe donc $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$, si $p \neq q$ et $A = \cup_{p=1}^{n} A^{(p)}$. On a alors $f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} m_2(S(x_1, A^{(p)})) = \sum_{p=1}^{n} f_{A^{(p)}} \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ car $A^{(p)} \in T_1 \times T_2 \subset \Sigma$. On a donc $A \subset \Sigma$.
On montre maintenant que Σ est une classe monotone, c'est-à-dire que :

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \subset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma \tag{4.2.3}$$

et

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \supset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma \tag{4.2.4}$$

Pour montrer (4.2.3), soit $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ t.q. $A^{(n)} \subset A^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Soit $x_1 \in E_1$. On a alors $(S(x_1, A^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ (par l'étape 1, car $\Sigma \subset T$), $S(x_1, A^{(n)}) \subset S(x_1, A^{(n+1)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $S(x_1, \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}) = \cup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)})$. On en déduit, par continuité croissante de m_2, que $m_2(S(x_1, A)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$ et donc que $f_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}$. Ce qui prouve que $f_A \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ car $f_{A^{(n)}} \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma$. La démonstration de (4.2.4) est similaire, il faut utiliser la continuité décroissante de m_2 au lieu de la continuité croissante. C'est pour utiliser la continuité décroissante de m_2 qu'on a besoin de m_2 finie.
On a ainsi montré que Σ est une classe monotone contenant l'algèbre $\mathscr{A}$. On peut en déduire que Σ contient la tribu engendrée par $\mathscr{A}$ et donc aussi la tribu engendrée par $T_1 \times T_2$ (car $T_1 \times T_2 \subset \mathscr{A}$), c'est-à-dire que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$. On a bien montré, finalement, que $\Sigma = T$.
Il reste maintenant à montrer que $\Sigma = T$ sans l'hypothèse m_2 finie. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la mesure $m_2^{(n)}$ par $m_2^{(n)}(A_2) = m_2(A_2 \cap F_n)$ pour tout $A_2 \in T_2$. La mesure $m_2^{(n)}$ est finie, l'étape 1 et la première partie de l'étape 2 donne donc que, pour tout $A \in T$, $f_A^{(n)} \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ où $f_A^{(n)}$ est définie par (4.2.2) avec $m_2^{(n)}$ au lieu de m_2 (c'est-à-dire $f_A^{(n)}(x_1) = m_2^{(n)}(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$). On conclut alors en remarquant que $f_A^{(n)} \uparrow f_A$ quand $n \to \infty$, ce qui donne que $f_A \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$. On a donc montré que $f_A \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Ceci nous permet de définir $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$m(A) = \int f_A dm_1,\ \text{pour tout } A \in T \tag{4.2.5}$$

Etape 3. Dans cette étape, on montre que m, définie par (4.2.5), est une mesure sur T et que m vérifie (4.2.1) et est σ-finie. On montre d'abord que m est bien une mesure sur T
1. $m(\emptyset) = 0$ car $f_\emptyset(x_1) = m_2(S(x_1, \emptyset)) = m_2(\emptyset) = 0$.
2. (σ-additivité de m) Soit $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $A^{(n)} \cap A^{(m)} = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Pour $x_1 \in E_1$, on a :

$$S(x_1, A) = \cup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \text{ et } S(x_1, A^{(n)}) \cap S(x_1, A^{(m)}) = \emptyset \text{ si } n \neq m$$

La σ-additivité de m_2 donne alors $m_2(S(x_1, A)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$, c'est-à-dire $f_A(x_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}(x_1)$. Le théorème de convergence monotone donne alors :

$$m(A) = \int f_A dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_{A^{(n)}} dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A^{(n)}),$$

ce qui donne la σ-additivité de m.
On montre maintenant que m vérifie (4.2.1). Soient $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ t.q. $m_1(A_1) < \infty$ et $m(A_2) < \infty$. On pose $A = A_1 \times A_2$. On a alors $f_A = m_2(A_2)1_{A_1}$ et donc $m(A) = \int f_A dm_1 = m_2(A_2)m_1(A_1)$.
Il reste à vérifier que m est σ-finie. Comme m_1 et m_2 sont σ-finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $E_1 = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on pose $C_{n,m} = B_1^{(n)} \times B_2^{(m)}$, de sorte que $E = \cup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} C_{n,m}$ et $m(C_{n,m}) = m_1(B_1^{(n)}) \times m_2(B_2^{(m)}) < \infty$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on en déduit que m est σ-finie.
Unicité de m.
Soit m et μ deux mesures sur T vérifiant (4.2.1). Pour montrer que $m = \mu$. On pose :

$$C = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2,\ m_1(A_1) < \infty,\ m_2(A_2) < \infty\}$$

Comme m_1 et m_2 sont σ-finies, il est facile de montrer que tout élément de $T_1 \times T_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de C. On en déduit que C engendre T. Il est clair que C est stable par intersection finie et, par (4.2.1), on a $m = \mu$ sur C. Puis, comme m_1 et m_2 sont σ-finies, il existe deux suites $(E_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(E_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ d'éléments de T_1 et T_2, disjoints deux à deux et t.q. $E_1 = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_{1,n}$, $E_2 = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_{2,n}$ et $m_i(E_{i,n}) < \infty$ pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose $F_{n,m} = E_{1,n} \times E_{2,m}$. La famille $(F_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de C, disjoints deux à deux et t.q. $E = \cup_{n,m\in\mathbb{N}} F_{n,m}$ et $m(F_{n,m}) = m_1(E_{1,n})m_2(E_{1,m}) < \infty$. Ce qui donne $m = \mu$ sur T et termine la démonstration du théorème. $\square$

4.3 Théorème de Fubini et conséquences

Théorème 4.3.1. ***(Fubini[1]-Tonelli[2])*** *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ-finis. On note (E, T, m) l'espace produit (donc, $T = T_1 \otimes T_2$ et $m = m_1 \otimes m_2$). Soit $f : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable positive (i.e. T-mesurable positive). Alors :*
1. $f(x_1, .) \in \mathscr{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout $x_1 \in E_1$, on pose

$$\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, .)dm_2 = \int f(x_1, x_2)dm_2(x_2), \quad \textit{pour tout } x_1 \in E_1,$$

de sorte que $\varphi_f : E_1 \to \overline{\mathbb{R}}^+$,
2. $\varphi_f \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$,
3. $\displaystyle\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int \left(\int f(x_1, x_2)dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1)$,
4. les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 et m_2, de sorte que :

$$\int \left(\int f(x_1, x_2)dm_2(x_2) \right) dm_1(x_1) = \int \left(\int f(x_1, x_2)dm_1(x_1) \right) dm_2(x_2).$$

Démonstration. la démonstration se fait en plusieurs étapes.
Etape 1. Soit $f = 1_A$, $A \in T$. La partie "existence de m" de la démonstration du théorème (4.2.1) donne alors que $\displaystyle\int f dm = m(A) = \int \varphi_f dm_1$.
Plus précisément, on a, pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1, .) = 1_A(x_1, .) = 1_{S(x_1,A)}$, avec $S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2,\ (x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$. Le théorème (4.2.1) donne que $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $x_1 \in E_1$, et donc $f(x_1, .) \in \mathscr{M}_+(E_2, T_2)$. Ceci donne le premier résultat (pour $f = 1_A$).
On pose $\varphi_f(x_1) = \displaystyle\int f(x_1, .)dm_2 = m_2(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$. (Cette fonction φ_f était notée f_A dans la démonstration du théorème (4.2.1)). L'étape 2 de la démonstration du théorème (4.2.1) donne que $\varphi_f \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$. Ceci donne le deuxième résultat (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème.
On a alors posé, dans la démonstration du théorème (4.2.1), $m(A) = \displaystyle\int \varphi_f dm_1$ et l'étape 3 a montré que m était une mesure sur T vérifiant (4.2.1) (et la seule mesure sur T vérfiant (4.2.1), d'apès la partie "unicité" de la démonstration du théorème (4.2.1)). Ceci donne le troisième résultat (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème.
Pour avoir le quatrième résultat (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème, il suffit de remarquer que l'on peut inverser les rôles de m_1 et m_2 dans la démonstration du théorème. On obtient ainsi que $f(., x_2) \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $x_2 \in E_2$. On pose alors $f(x_2) = \displaystyle\int f(., x_2)dm_1$. On obtient que $f \in \mathscr{M}_+(E_2, T_2)$.

1. Guido Fubini, mathématicien italien (18791943), principalement connu pour son théorème d'intégration sur les espaces produits, ainsi que pour sa découverte de la métrique de Fubini-Study en géométrie kählérienne.
2. Leonida Tonelli, mathématicien italien (18851946), connu pour sa première version du théorème ci-dessous, ainsi que pour ses travaux fondamentaux en calcul des variations, sur la semi-continuité de la fonctionnelle d'action.

Enfin, on pose $\widetilde{m}(A) = \int f dm_2$ et on obtient que $\widetilde{m}$ est une mesure sur T vérifiant (4.2.1). La partie "unicité" de la démonstration du théorème (4.2.1) donne alors que $m = \widetilde{m}$, ce qui est exactement le quatrième résultat (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème.

Etape 2. On prend maintenant $f \in \mathscr{E}_+(E,T)$. Il existe donc $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_1, ..., A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$.

On a alors, pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1, .) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x_1, .) \in \mathscr{M}_+(E_2, T_2)$ car l'étape 1 donne $1_{A_i}(x_1, .) \in \mathscr{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout i.

Ce qui donne le premier résultat de la conclusion du théorème. On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, .)dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$. On a $\varphi_f \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ car $\varphi_f = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{1_{A_i}}$ et que $\varphi_{1_{A_i}} \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout i (d'après l'étape 1). Ce qui donne le deuxième résultat de la conclusion du théorème. Enfin, on utilise la linéarité de l'intégrale et l'étape 1 pour $f = 1_{A_i}$, on obtient :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \varphi_{1_{A_i}} dm_1 = \int \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{1_{A_i}} \right) dm_1$$

$$= \int \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \int 1_{A_i}(x_1, .)dm_2 \right) dm_1(x_1) = \int \left(\int f(x_1, .)dm_2 \right) dm_1(x_1) = \int \varphi_f dm_1$$

Ce qui donne le troisième résultat de la conclusion du théorème.

Pour avoir le quatrième résultat de la conclusion du théorème, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2.

Etape 3. On peut enfin prendre $f \in \mathscr{M}_+(E,T)$. Il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{E}_+(E,T)$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to \infty$. On a donc, pour tout $x_1 \in E_1$, $f_n(x_1, .) \uparrow f(x_1, .)$ quand $n \to \infty$. On en déduit que $f(x_1, .) \in \mathscr{M}_+(E_2, T_2)$ car (d'après l'étape 2) $f_n(x_1, .) \in \mathscr{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui donne le 1 résultat).

Le théorème de convergence monotone (pour m_2) donne que $\varphi_{f_n}(x_1) = \int f_n(x_1, .)dm_2 \uparrow \int f(x_1, .)dm_2 = \varphi_f(x_1)$ pour tout $x_1 \in E_1$. Donc, $\varphi_{f_n} \uparrow \varphi_f$. Comme $\varphi_{f_n} \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ (d'après l'étape 2), on en déduit que $\varphi_f \in \mathscr{M}_+(E_1, T_1)$ (ce qui donne le 2 résultat). On applique maintenant le théorème de convergence monotone pour m_1 et pour m, ils donnent :

$$\int \varphi_{f_n} dm_1 \uparrow \int \varphi_f dm_1 \text{ et } \int f_n dm \uparrow \int f dm \text{ quand } n \to \infty.$$

L'étape 2 donne $\int f_n dm = \int \varphi_{f_n} dm_1$, on en déduit donc que $\int f dm = \int \varphi_f dm_1$. Ce qui donne le troisième résultat de la conclusion du théorème.

Enfin, ici encore, pour avoir le quatrième résultat de la conclusion du théorème, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2. $\square$

4.4 Cas de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Nous commençons par comparer l'intégrale de Lebesgue (définie sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) à l'intégrale "classique" des fonctions continues (et plus généralement des fonctions réglées).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non). On rappelle que $\mathscr{B}(I) = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ A \subset I\}$. On peut donc considérer la restriction à $\mathscr{B}(I)$ de la mesure de Lebesgue définie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. On notera en général (un peu incorrectement) aussi λ cette mesure sur $\mathscr{B}(I)$.

Proposition 4.4.1. *Soit $-\infty < a < b < +\infty$. Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. Alors, $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathscr{B}([a,b]), \lambda)$ et $fd\lambda = \int_a^b f(x)dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues).*

Remarque 4.4.1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les bornes sont $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (I peut être fermé ou ouvert en a et b) et si $f \in \mathscr{L}^1(I, \mathscr{B}(I), \lambda)$ ou $L^1(I, \mathscr{B}(I), \lambda)$, on notera souvent :

$$\int f d\lambda = \int f(x)d\lambda(x) = \int_a^b f(x)dx \tag{4.4.1}$$

Cette notation est justifée par la proposition précédente (car, si I est compact, l'intégrale de Lebesgue contient l'intégrale des fonctions continues (et aussi l'intégrale des fonctions réglées et aussi l'intégrale de Riemann.).
2. Soient $-\infty < a < b < +\infty$. et $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. La proposition précédente donne que $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathscr{B}([a,b]), \lambda))$. En fait, on écrira souvent que $f \in L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathscr{B}([a,b]), \lambda))$, c'est-à-dire qu'on confondra f avec sa classe dans $L^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathscr{B}([a,b]), \lambda))$, qui est $\{g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathscr{B}([a,b]), \lambda)),\ g = f p.p.\}$. On peut d'ailleurs noter que f est alors le seul élément continu de $\{g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathscr{B}([a,b]), \lambda)),\ g = f p.p.\}$. comme le montre la proposition suivante

Proposition 4.4.2. *Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f, g \in C(]a,b[, \mathbb{R})$. On suppose que $f = g\lambda - p.p.$ On a alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.*

Proposition 4.4.3. *Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (fonction continue à support compact). Alors $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. (Ici aussi, on écrira souvent $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$. De plus, si $a, b \in \mathbb{R}$ sont t.q. $a < b$ et $f = 0$ sur $[a,b]^c$ (de tels a et b existent). Alors, $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ (cette dernière intégrale étant à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues).*

Démonstration. On remarque d'abord que f est borélienne car continue. Puis, pour montrer que f est intégrable, on va utiliser la proposition (4.4.1). Comme f est à support compact, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$ et $f = 0$ sur $[a,b]_c$.
On a alors, par la proposition (4.4.1), $f\ |_{[a,b]} \in C([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathscr{B}([a,b]), \lambda)$. On a donc $\int |f| d\lambda = \int |f\ |_{[a,b]}\ | d\lambda < \infty$ et donc $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Enfin, la proposition (4.4.1) donne aussi :

$$\int f\ |_{[a,b]}\ d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

D'où l'on conclut bien que $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$. Le résultat précédent se généralise à l'intégrale de Riemann des fonctions Riemann-intégrables (construite à partir des sommes de Darboux [3]). $\square$

4.5 Exercices

4.5.1 Enoncés

1. – (a) Montrer que pour tout $y > 0$
$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}.$$
– (b) Montrer que :
$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dx\right)dy = \frac{\pi^2}{2}.$$
– (c) Montrer que pour tout $x > 0$, $x \neq 1$:
$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dy = \frac{2\log(x)}{x^2-1}.$$
– (d) En déduire que :
$$\int_0^\infty \frac{2\log(x)}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

2. On rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En utilisant le changement de variable $u = x+y$, $v = x-y$, calculer :
$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(x+y)^2}e^{-(x-y)^2}dxdy.$$

3. Soit $f : \mathbb{R}^2_* \to \mathbb{R}$, définie par
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
– (a) Montrer que
$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)dx\right)dy \neq \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)dy\right)dx.$$
[Indication : On trouve la primitive de $\frac{1}{(1+t^2)^2}$ en intégrant par parties $\frac{1}{1+t^2}$.]

– (b) Pour $0 < \epsilon \leq 1$ et $S_\epsilon = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \epsilon \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$, calculer
$$\int_{S_\epsilon} |f| d\lambda_2.$$
[Indication : Utiliser les coordonnées polaires.]

– (c) En déduire que la question 1. n'est pas en contradiction avec le théorème de Fubini-Tonnelli.

3. Jean-Gaston Darboux, mathématicien français (1842-1917), spécialiste de géométrie différentielle et d'analyse

4.5.2 Corrigés

1. – (a)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dx &= \frac{1}{(1+y)}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\arctan(x\sqrt{y})\right]^{+\infty} 0\\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}\end{aligned}$$

– (b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dxdy &= \int_0^{\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}dy\\ &= \int_0^{\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+u^2)}2du\\ &= \pi\left[\arctan(u)\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{\pi^2}{2},\end{aligned}$$

où l'on a fait un changement de variable en $u=\sqrt{y}$, $du=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}dy$.

– (c) Pour tout $x>0,\ x\neq 1$, on a par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dy &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+y}-\frac{x^2}{1+x^2y}\right)dy\\ &= \frac{1}{1-x^2}\left[\log(1+y)-\log(1+x^2y)\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{1-x^2}\log(\frac{1}{x^2})\\ &= \frac{2\log(x)}{1-x^2}.\end{aligned}$$

– (d) Par Fubini-Tonelli et puisque $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dy=\frac{2\log(x)}{x^2-1}$ pour p.t. $x\in[0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dxdy &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dydx\\ \frac{\pi^2}{2} &= \int_0^{\infty}\frac{2\log(x)}{x^2-1}dx\\ \frac{\pi^2}{4} &= \int_0^{\infty}\frac{\log(x)}{x^2-1}dx.\end{aligned}$$

2. Changement de variable :

$$\left\{\begin{array}{l}u=x+y\\ v=x-y\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{u+v}{2}\\ y=\dfrac{u-v}{2}.\end{array}\right.$$

L'application : $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(u,v) \mapsto (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$ est bijective. On calcule le jacobien (c'est à dire que l'on écrit dans une matrice les dérivées partielles de ϕ en u et v) :

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

On fait le changement de variable dans l'intégrale et on utilise Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} dxdy &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-v^2} |\det(J(u,v))| dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-v^2} dudv \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. – (a)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y) dx \right) dy &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{-x}{x^2+y^2} \right]_{-1}^{1} dy \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{-2}{1+y^2} dy \\ &= -2\arctan(y)|_{-1}^{1} = -\pi. \end{aligned}$$

comme $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[-1,1]$ pour $y \neq 0$. De même,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y) dy \right) dx &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{-1}^{1} dy \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2} dy \\ &= 2\arctan(y)|_{-1}^{1} = \pi. \end{aligned}$$

Puisque $\pi \neq -\pi$, le résultat en découle.

– (b) On pose $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Ceci définit un C^1-difféomorphisme entre $[\sqrt{\epsilon}, 1] \times [0, 2\pi[$ et S_ϵ avec $|\det J| = r$. Donc (où l'on utilise le théorème de Tonelli pour la troisième égalité)

$$\begin{aligned} \int_{S_\epsilon} |f| d\lambda_2 &= \int_{[\sqrt{\epsilon},1]\times[0,2\pi[} |f(r\cos t, r\sin t)| d\lambda_2 \\ &= \int_{[\sqrt{\epsilon},1]\times[0,2\pi[} \left|\frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{r^2}\right| r d\lambda_2 \\ &= \int_{[\sqrt{\epsilon},1]} r^{-1} dr \int_{[0,2\pi[} |cos(2t)| dt \\ &= 4\ln(r)|_{\sqrt{\epsilon}}^{1} = -4\ln(\sqrt{\epsilon}), \end{aligned}$$

puisque par symétrie

$$\int_{[0,2\pi[} |cos(2t)| dt = 8 \int_{[0,\frac{\pi}{4}[} cos(2t) dt = 4\sin(2t)|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4.$$

– (c) D'après la question 2, $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \int_{S_\epsilon} |f| d\lambda_2 = +\infty$. Ainsi $\|f\|_1 = +\infty$ et $f \not\in L^1(B(0,1))$, donc $f \not\in L^1([-1,1]^2)$. Comme l'intégrabitité de f est une des hypothèses du théorème de Fubini, celui-ci ne s'applique pas.

Annexe A ✍

Exercices supplémentaires

◀ *EXERCICE* 1.**(Fonctions caractéristiques d'ensembles)** Soit E un ensemble. Lorsque A est une partie de E, on définit $1_A : E \to \mathbb{R}$ par : $1_A(x) = 1$, si $x \in A$, $1_A(x) = 0$, si $x \ni A$

1_A est appelée fonction caractéristique de A.

1. Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles disjoints de E, alors $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B$.
2. En déduire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de E deux à deux disjoints, on a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} = 1_{\cup_{n\in\mathbb{N}}} A_n$ (on précisera aussi le sens donné à $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}$).
3. Montrer que si $B \subset A \subset E$, on a $1_{A-B} = 1_A - 1_B$
4. Montrer que, pour A et B sous-ensembles de E, on a $1_{A-B} = 1_A 1_B$.
5. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que f s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.

◀ *EXERCICE* 2. **(Limites sup et inf d'ensembles)** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. On note

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\geq n} A_p, \text{ et } \limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\geq n} A_p$$

1. On suppose la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone, c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou que $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$
2. Même question que précédemment si la suite est définie par : $A_{2p} = A$ et $A_{2p+1} = B, p \in \mathbb{N}$, A et B étant deux parties données de E.
3. Montrer que :

$$1_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}, \; et \; \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

◀ *EXERCICE* 3.**(Caractérisation d'une tribu)** Soit E un ensemble.

Soit T une partie de $\mathscr{P}(E)$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et t.q. $\emptyset \in T$.

1. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérié aussi $E \in T$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.
2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

◀ <u>$\mathscr{EXERCICE}$</u> 4.**(Tribu engendrée)** Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.
2. Soit $A \subset \mathscr{P}(E)$. On note T_A l'intersection de toutes les tribus sur E contenant A (une partie de E appartient donc à T_A si et seulement si elle appartient à toutes les tribus contenant A, on remarquera qu'il y a toujours au moins une tribu contenant A, c'est la tribu $\mathscr{P}(E)$). Montrer que T_A est la plus petite des tribus contenant A (c'est la tribu engendrée par A).
3. Soient A et $B \subset \mathscr{P}(E)$ et T_A, T_B les tribus engendrées par A et B. Montrer que si $A \subset B$ alors $T_A \subset T_B$.

◀ <u>$\mathscr{EXERCICE}$</u> 5. **(Tribus images)** Soient E et F des ensembles. Pour $A \subset \mathscr{P}(E)$ (resp. $\mathscr{P}(F)$) on note $T(A)$ la tribu de E (resp. F) engendrée par A. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que si T' est une tribu sur F, alors $f^{-1}(T') = \left\{f^{-1}(B),\, B \in T'\right\}$ est une tribu sur E (tribu image réciproque).
2. Montrer que si T est une tribu sur E, alors $T' = \left\{B \subset F,\, f^{-1}(B) \subset T\right\}$ est une tribu sur F (tribu image directe).
3. Montrer que pour tout ensemble C de parties de F on a : $T(f^{-1}(C)) = f^{-1}(T(C))$.

◀ <u>$\mathscr{EXERCICE}$</u> 6. Soit $(\Omega; \Sigma)$ un espace mesurable (i.e. un ensemble Ω muni d'une tribu $\Sigma \subset \mathscr{P}(\Omega)$). Soit μ une mesure sur $(\Omega; \Sigma)$. Montrer les propriétés suivantes : (A, B, A_i sont des éléments de de Σ)

1. Si $A_1, A_2, ..., A_k$ sont deux à deux disjoints, alors $\mu(\cup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$.
2. Si $B \subset A$ alors $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$.
3. Monotonie : Si $B \subset A$ alors $\mu(B) \leq \mu(A)$.
4. Principe inclusion-exclusion : $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - m(A \cap B)$.

◀ <u>$\mathscr{EXERCICE}$</u> 7. **(Classes monotones)** Soit E un ensemble. Pour $\Sigma \subset \mathscr{P} = (E)$, on dit que Σ est une classe monotone (sur E) si on a (la stabilité par union croissante dénombrable et par intersection décroissante dénombrable)

1. Soit $\Sigma \subset \mathscr{P}(E)$. Montrer que Σ est une tribu si et seulement si Σ est une classe monotone et une algèbre.
2. Donner un exemple, avec $E = \mathbb{R}$, de classe monotone qui ne soit pas une tribu.

3. Soit $(\Sigma_i)_{i\in I}$ une famille de classes monotones (sur E). Montrer que $\cap_{i\in I}\Sigma_i = \{A \in \mathscr{P}(E),\ A \in \Sigma_i\}$ pour tout $i \in I$ est encore une classe monotone.

◀ $\mathscr{EXERCICE}$ 8.On rappelle que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. On considère l'application $m : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ définie pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ par :

$$m(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } A = \emptyset, \\ \sum_{n\in A}\frac{1}{n^2} \text{ si } A \text{ est un ensemble fini,} \\ +\infty \text{ si } 0 \in A \text{ ou si } A \text{ est un ensemble infini.} \end{cases}$$

   Notons encore $A_n = \{n\}$. Déterminer $m(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Que vaut $\sum_{n\geq 1} m(A_n)$?
3. Déterminer $\cup_{n\geq 1}A_n$, puis $m(\cup_{n\geq 1}A_n)$. m est-elle une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$?

◀ $\mathscr{EXERCICE}$ 9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n1_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}(x).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge presque partout vers la fonction nulle.
2. Etudier la convergence de la suite $(f_n)_n$ dans L^p pour $p \in [1, +\infty]$.

◀ $\mathscr{EXERCICE}$ 10. Soient (E, Σ, μ) un espace mesuré, f une fonction de $L^1(E, \Sigma, \mu)$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^1(E, \Sigma, \mu)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

– Montrer que si pour tout $n \geq 1$ la fonction f_n est positive et si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-presque partout vers f, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f dans L^1. On pourra considérer $g_n = \min(f, f_n)$.
  On considère maintenant l'espace $(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}), \mu)$ et la suite définie par

$$f_n = n1_{]0,1/n[} - n1_{].1/n,0[}.$$

– Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 et que $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = 0$.
– La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle vers 0 dans L^p, $p \in [1, +\infty[$?

◀ $\mathscr{EXERCICE}$ 11. Soit f la fonction dèfinie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x\,(1 + |\ln x|)^2}$$

1. Montrer que $f \in L^1(]0, 1])$.
2. Soit $p \in]1, +\infty]$. Montrer que $f \not\in L^p(]0, 1])$.

3. Soit $p \in [1, +\infty]$. Montrer que $f \in L^p([1, +\infty[)$.

◄ <u>*EXERCICE*</u> 12. Soit (E, T, m) un espace mesuré tel que $m(E) < +\infty$.Soit également $1 \leq p < q < +\infty$.

1. Montrer que
$$L^\infty(E) \subset L^q(E) \subset L^p(E) \subset L^1(E).$$
2. Montrer sur un exemple que l'hypothèse $m(E) < +\infty$ est indispensable.
3. La première question permet de définir l'injection : $i : L^q \to L^p$ tq $f \mapsto f$. Montrer que cette injection est continue pour les normes $\|.\|_q$ et $\|.\|_p$.

Annexe B ✍

Examens

Faculté des Mathématiques et de l'Informatiques et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques *Le 19/01/2011.*

$3^{ème}$ *année Maths.* `Licence.` *Durée 2 h, 08h30–10h30*

Examen de Mesure et Intégration.

QUESTIONS DE COURS

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Montrer que m vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Monotonie : Soit A, $B \in T$, $A \subset B$, alors $m(A) \leq m(B)$.
2. σ-sous-additivité : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, alors $m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$

EXERCICE 1.

Soient $(E, T) = \mathscr{P}(E)$ un espace mesurable et $a \in E$. On définit l'application

$$m_a : T \to \{0, 1\},\ A \mapsto m_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in A \\ 0, & \text{si } a \notin A. \end{cases}$$

– Montrer que m_a est une mesure sur (E, T).
– Montrer que m_a est σ-finie.
– Déterminer les ensembles de E négligeables pour m_a.
– Soit $f \in \mathscr{M}_+(E, T)$. Calculer $\int_E f dm_a$.
Indication : $E = \{a\} \cup \{a\}^c$.

EXERCICE 2.

Soit $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. Soit m une mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tout intervalle I et $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(I) = m(I + x)$ (avec $I + x = \{a + x,\ a \in I\}$) et $m([0,1]) = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = 0$ (i.e. m est diffuse).

2. Montrer que $m([0, \frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$ et $m([0, \frac{p}{q}[) = \frac{p}{q}$, (On pourra découper $[0, 1[$ en q intervalles de longueur $\frac{1}{q}$.

3. En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

<u>*EXERCICE*</u> *3.*

(I) Soit (E, T) un espace mesurable et $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures positives définies sur T. Montrer que $\sum_{k\geq 0} m_k$ définit une mesure positive sur T.

(II) Soit E un ensemble non vide.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

2. Soient A et $B \subset \mathscr{P}(E)$ et T_A, T_B les tribus engendrées par A et B. Montrer que si $A \subset B$ alors $T_A \subset T_B$.

Faculté des Mathématiques et de l'Informatiques et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques *Le Mardi 22/01/2013.*

$3^{ème}$ *année Maths.* `Licence.` *Durée 2 h, 11 :00-13 :00*

Examen de Mesure et Intégration.

◀ $\mathscr{EXERCICE}$ ▶ 1. On se place dans l'ensemble $\mathbb{N}$. On considère la tribu T engendrée par les ensembles

$$S_n = \{n,\ n+1,\ n+2\} \quad \text{avec } n \in \{0, 2, 3, ...\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a $\{n\} = S_n \cap S_{n-1} \cap S_{n-2}$.
2. Calculer $S_0 \cap S_2$ et $S_2 \cap \{2\}^c \cap \{4\}^c$, et déduire que pour tout $n \geq 2$, le singleton $\{n\}$ appartient à T.
3. En déduire que toute partie de $N^{**} = \{2, 3, ...\}$ est dans T, autrement dit que $\mathscr{P}(N^{**}) \subset T$.

◀ $\mathscr{EXERCICE}$ ▶ 2. On suppose qu'il existe une mesure positive $\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ tq

1. $\lambda([0, 1]) = 1$,
2. $\forall a > 0$, $\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(a + A) = \lambda^2(A)$.

– En utilisant la suite décroissante $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} \subset [0, 1]$, montrer que $\lambda^2(\{0\}) = 0$
– En déduire que $\lambda(\{x\}) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
– Calculer $\lambda([0, \frac{1}{n}[)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(on pourra écrire : $[0, 1] = [0, \frac{1}{n}[\cup [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\cup ... \cup [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}[\cup \{1\})$.
– Déduire que λ ne peut pas être une mesure positive sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

◀ $\mathscr{EXERCICE}$ ▶ 3. On rappelle que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. On considère l'application $m : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ définie pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ par :

$$m(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } A = \emptyset, \\ \sum_{n\in A} \frac{1}{n^2} \text{ si } A \text{ est un ensemble fini,} \\ +\infty \text{ si } 0 \in A \text{ ou si } A \text{ est un ensemble infini.} \end{cases}$$

Notons encore $A_n = \{n\}$. Déterminer $m(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Que vaut $\sum_{n\geq 1} m(A_n)$?
3. Déterminer $\cup_{n\geq 1} A_n$, puis $m\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right)$. m est-elle une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$?

◀ <u>*EXERCICE*</u> ▶ 4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. Montrer que la suite $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}}$, est croissante et calculer sa limite. (étudier les deux cas $f(x) = 0$, et $f(x) \neq 0$).
2. Déterminer la limite de
$$I_n = \int_0^1 f_n(t)dt.$$

Faculté des Mathématiques et de l'Informatiques et des Sciences de la Matière

---

Département de Mathématiques *Le 26/01/2014.*

$3^{ème}$ *année Maths.* `Licence.` *Durée 2 h, 13h00–*

15h00

Examen de Mesure et Intégration.

<u>*EXERCICE*</u> *1.* On se donne un espace mesurable (E, T).

– (a) Soit $x \in E$, on note $m_x : T \to [0, +\infty]$

$$B \mapsto m_x(B) = \begin{cases} 1 & si\ x \in B, \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Montrer que m_x est une mesure sur (E, T). (m_x la mesure de Dirac en x.)

– b) Soient $x_1, ..., x_k$ des éléments distincts de E et $p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}_+^*$.

On note $\mu : T \to [0, +\infty]$

$$B \mapsto \mu(B) = \sum_{1 \le i \le k} p_i m_{x_i}(B).$$

Montrer que μ est une mesure sur (E, T).

<u>*EXERCICE*</u> *2.* Soit (E, Σ, m) un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma - \mathbb{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Soit α, $\beta \in \mathbb{R}$, tq $\alpha < \beta$. Montrer que la troncature $f_{\alpha,\beta}$ de f définie par :

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha \ \text{ si } f(x) < \alpha, \\ f(x) \ \text{ si } \alpha \le f(x) \le \beta, \\ \beta \ \text{ si } f(x) > \beta. \end{cases}$$

est $(\Sigma - \mathbb{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

<u>*EXERCICE*</u> *3.* Soit : $I(\alpha) = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$. On pose $g_n(x) = (n+1)\ln\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$. Montrer que pour tout $0 \le x \le n$, $g_n(x) \ge 0$.
2. Calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ en fonction de $g_n(x)$ et déduire la monotonie de la suite $(f_n)_{n \ge 0}$.
3. En déduire la valeur de $I(\alpha)$ en fonction de α;

<u>*EXERCICE*</u> 4. Utiliser le théorème de convergence dominée pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}\,dx,$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}dx.$

(rappel : $\arctan(\pm\infty)=\pm\frac{\pi}{2}$.)

Faculté des Mathématiques et de l'Informatiques et des Sciences de la Matière

---

Département de Mathématiques *Le 13/06/2015.*

$3^{ème}$ *année Maths.* `Licence.` *Durée 1h30, 10 :00-11 :30*

Examen de rattrapage : Mesure et Intégration.

◀ *EXERCICE* ▶ 1. Soit X un ensemble non vide

1. Quel est le σ-algèbre(la tribu) engendré par $\{X\}$?
2. Soient A et B deux parties de X. Quel est le σ-algèbre engendré par $\{A,B\}$?
3. Soit $X=\{1,2,3,4,5,6\}$. Construire le σ-algèbre engendré par

$$\{\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}.$$

◀ *EXERCICE* ▶ 2. Pour tout entier naturel $n\geq 1$ et tout $x\geq 0$ on pose

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^4x^4},\qquad h_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^4}.$$

1. Montrer que les suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(h_n)_{n\geq 1}$ convergent simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une même limite qu'on précisera.
2. Montrer par deux changements de variables appropriés que

$$\int_{[0,1]}f_n(x)dx=\frac{1}{n}\int_{[0,n]}g(t)dt,\qquad \int_{[0,1]}h_n(x)dx=\int_{[0,\sqrt{n}]}g(t)dt,$$

où g est une fonction de t indépendante de n(qu'on donnera explicitement).

3. Montrer que $\forall t\geq 1,\ g(t)\leq\frac{1}{t^3}$ et en déduire que l'intégrale généralisée de Riemann $\int_0^\infty g(t)dt$ converge (on ne la calcule pas). On pose dans la suite $\alpha=\int_0^\infty g(t)dt$.
4. En déduire les limites(en fonction de α éventuellement)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)dx,\quad\text{et}\quad\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}h_n(x)dx$$

◀ <u>*EXERCICE*</u> ▶ 3. Soit $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}dt$

1. Démontrer que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est une fonction paire, décroissante sur $[0;+\infty[$. Quelle est la limite de $F(x)$ quand $x \to +\infty$?
3. Montrer que F est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
4. F est-elle dérivable en 0 ?

Bibliographie

[1] J. Féjoz, *chapitres d'intégration et de probabilités*, polycopié de cours, Université Paris-Dauphine. **2014**.

[2] Thierry Gallouët, Raphaèle Herbin. *Mesure, intégration, probabilités.* Ellipses, **2013**.

[3] Henri Leon LEBESGUE. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France.* Cambridge Library Collection. Cambridge University Press, **2009**.

[4] Daniel REVUZ. *Mesure et intégration.* Paris : Hermann, **1997**.

[5] Roger JEAN. *Mesure et intégration.* Avec une préface de Serge Dubuc. Les Presses de l'Université du Québec, Montreal, Que., **1975,** pages **xxii+305.**

[6] E. Stein et R. Shakarchi *Real analysis, Measure theory, integration, and Hilbert spaces.* Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[7] A. N. Kolmogorov, and S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover Publications.

