REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE 08 MAI 1945 GUELMA

Faculté de Mathématiques, Informatique et Sciences la Matière

Département de Mathématiques

Polycopié de Cours

Option : Analyse Numérique

Titre

Inéquations Variationnelles Elliptiques et leurs Approximations, Cours et Exercices

Par :
Dr. Mehri Allaoua

Niveau : Master2 Mathématiques Appliquées

2016/2017

Table des matières

Introduction

Dans les cinquantes dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil pertinent dans l'étude des problèmes non linéaires en physique et en mécanique.

La théorie des inéquations variationnelles a été faite à partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par A.Signorini [16] et G.Fichera [7]. La théorie mathématique a été obtenue par G. Stampacchia [17], J.L. Lions et G.Stampacchia [11] et puis développé par H. Brézis [3], G.Stampacchia[18], J.L.Lions [12], U.Mosco [14], D.Kinderlehrer et G.Stampacchia [10]. Pour l'approximation des inéquations variationnelles on rappelle, les contributions de U.Mosco[13], R.Glowinsky [8],J.L. Lions et R.Trémolières ou R.Glowinsky [9].

La théorie des inéquations variationnelles a été utilisée dans plusieurs domaines tels que la mécanique, la physique, l'optimisation, le contrôle optimal, la programmation linéaire, les mathématiques financières, etc... ; Aujourd'hui elle est considérée comme un outil indispensable dans plusieurs secteurs de mathématiques appliquées.

Depuis longtemps les chercheurs dans leurs étude des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles, des équations variationnelles en générale et en particulier des inéquations variationnelles, se sont intéressés aux différentes techniques d'approximations, à savoir les méthodes des différences finies, des éléments finis, des volumes finis et méthodes spectrales.

Ce cours est didié aux étudiants de Master2 option analyse mathématique appliquée. Mon objectif est de permettre aux étudiants de suivre des cours sur les inéquations variationnelles et leurs approximations et d'avoir une brève compréhension sur les théorèmes d'existence et d'unicité, l'approximation par éléments finis, la convergence, l'estimation d'erreur et de se familiariser avec ce genre de problèmes notamment le problème de l'obstacle.

Ce travail est divisé en trois chapitres. Le chapitre I est consacré à présenter des généralités sur l'inéquation variationnelle elliptique du premier genre et deuxième genre, dans la deuxième et troixième section de ce chapitre un théorème d'existence et d'unicité de la solution dû à Stampacchia a été démontré. Aux sections quatre et cinq, une approximation numérique a été faite, un théorème de convergence et un théorème d'estimation d'erreur ont été établis.

Au chapitre II, nous avons abordé les inéquations variationnelles elliptiques du second ordre, plus précisément le problème de l'obstacle. Par analogie du chapitre I, nous avons commencé par une définition du problème et nous avons donné une interprétation physique du problème appelé aussi problème à frontière libre, ensuite nous avons introduit quelques propriètés de régularité de la solution continue. Les sous-sections six, sept et huit sont consacrées à l'approximation par éléments finis du problème où nous avons démontré un théorème de convergence forte et nous avons établi une estimation d'erreur de la solution, basée sur les estimations standards de Ciarlet [4], en précisant l'ordre de l'erreur de convergence.

Finalement nous avons terminé ce travail par une brève introduction sur les inéquations variationnelles paraboliques et leurs approximations.

Chapitre 1

Généralités sur les inéquations variationnelles elliptiques (IVE) et leurs approximations

1.1 Introduction et contexte fonctionnel

1.1.1 Notations et hypothèses

Soient :

- Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière,
- V un espace de Hilbert réel avec un produit scalaire $(.,.)$ et une norme associée $\|.\|$,
- V^* le dual de V,
- $a(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et V-elliptique (coercive) sur $V \times V$, i.e

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad a(u,v) \leq M\|u\|\|v\|, \forall u, v \in V,$$
$$\exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2, \forall v \in V,$$

- $L : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire continue,
- K un sous ensemble convexe fermé non vide de V,
- $j(.) : V \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \pm\infty$ une fonctionnelle convexe semi continue inférieurement (s.c.i) et propre i.e (vérifiant $j(v) > -\infty, \forall v \in V, j \neq +\infty$).

1.1.2 IVE du premier genre

Trouver $u \in K$ solution du problème

$$a(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in K \tag{P1}$$

1.1.3 IVE du second genre

Trouver $u \in V$ solution du problème

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in V \tag{P2}$$

Remarque 1.1. *Si $K = V$ et $j \equiv 0$, les problèmes (P1) et (P2) se réduisent à une équation variationnelle classique :*

$$\begin{cases} \textit{trouver } u \in K \textit{ tel que} \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in K \end{cases}$$

Remarque 1.2. *(P1) est un cas particulier de (P2). Il suffit de poser $j(v) = I_K(v)$ où I_K est une fonctionnelle sur K définie par*

$$I_K(v) = \begin{cases} 0 & si\ v \in K \\ +\infty & si\ v \notin K \end{cases}$$

1.2 Résultats d'existence et d'unicité de l'IVE du premier genre

Théorème 1.1. *(Stampacchia) : Sous les hypothèses précédentes, le problème (P1) a une unique solution $u \in K$.*

Preuve.

1. **Unicité** : soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (P1), alors nous avons

$$a(u_1, v - u_1) \geq L(v - u_1) \quad \forall v \in K, \forall u_1 \in K \tag{1.1}$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq L(v - u_2) \quad \forall v \in K, \forall u_2 \in K \tag{1.2}$$

posons $v = u_2$ dans (1.1) et $v = u_1$ dans (1.2) et en additionnant les deux inéquations , nous obtenons

$$a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

en utilisant la V-ellipticité de $a(.,.)$,

$$\alpha \|u_2 - u_1\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

d'où $u_1 = u_2$

2. **Existence** : L'idée est transformer le problème (P1) à un problème de point fixe. Par le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert, il existe un opérateur différentiel $A \in \mathcal{L}(V, V)$ et un élément $f \in V^*$ tels que

$$\begin{cases} a(u, v) = (Au, v) \quad \forall u, v \in V \\ L(v) = (f, v) \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{1.3}$$

ainsi, le problème (P1) est équivalent à

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{telle que} \\ (Au - f, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Soit $t > 0$, alors

$$(-t(Au - f), v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

ce qui implique que

$$(u - t(Au - f) - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

Soit $P_K : V \to K$ la projection orthogonale de V sur K . Alors le problème (P1) est équivalent à un problème de point fixe :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ telle que} \\ u = P_K(u - t(Au - f)), \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

Maintenant montrons que P_K est une contraction sur V. Soit $v, w \in V$, alors

$$\begin{aligned} & \left\| P_K(v - t(Av - f)) - P_K(w - t(Aw - f)) \right\|^2 \\ \leq & \left\| (v - t(Av - f)) - (w - t(Aw - f)) \right\|^2 \\ = & \left\| (v - w) - tA(v - w) \right\|^2 \\ = & \left\| v - w \right\|^2 - 2ta(v - w, v - w) + t^2 \left\| A(v - w) \right\|^2 \\ \leq & (1 - 2t\alpha + t^2 M^2) \left\| v - w \right\|^2 \end{aligned}$$

Nous choisissons $0 < t < \frac{2\alpha}{M^2}$, alors P_K est une contraction, et par le théorème du point fixe de Banach, il existe donc une solution $u \in K$.

□

Remarque 1.3. *Si $K = V$, le théorème 1.1 se réduit au lemme de Lax-Milgram.*

1.2.1 Problème de minimisation

Soit $a(.,.)$ symétrique. Considérons la fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$, définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \quad v \in K$$

Alors

- (i)
$$\lim_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty,$$
en effet, $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 - \|L\|\|v\| \to \infty$.
- (ii) J est **strictement convexe**. En effet, comme L est linéaire, il suffit de prouver que $v \to a(v, v)$ est **strictement convexe**. Soit $0 < \theta < 1$ et $u, v \in V$; alors
$$0 < a(v - u, v - u) = a(u, u) + a(v, v) - 2a(u, v)$$
ainsi on a
$$2a(u, v) < a(u, u) + a(v, v) \tag{1.4}$$
En utilisant (1.4) nous avons
$$\begin{aligned} a(\theta u + (1 - \theta)v, \theta u + (1 - \theta)v) &= \\ &= \theta^2 a(u, u) + 2\theta(1 - \theta)a(u, v) + (1 - \theta)^2 a(v, v) \\ &< \theta a(u, u) + (1 - \theta)a(v, v) \end{aligned}$$
alors $v \to a(v, v)$ est **strictement convexe**.

- (iii) J est continue car L et $a(.,.)$ sont continus.
- (iv) Supposons $J(.)$ est Gâteaux différentiable en u, i.e différentiable dans toutes les directions $v \in V$, c.à.d :

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} = (J'(u),v) \quad \forall v \in V.$$

Soit le problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ telle que} \\ J(u) = \min_{v\in K} J(v) \end{cases} \tag{Π}$$

Théorème 1.2. *Supposons que $J(.)$ vérifie les propriétés (i), (ii) , (iii), (iv) alors le problème de minimisation (Π) est équivalant au problème (P1).*

Preuve. Soit $u \in K$ solution de (P1), nous avons

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u+v-u) \\ &= \frac{1}{2}a(u+v-u,u+v-u) - L(u+v-u) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}a(v-u,v-u) + \frac{1}{2}a(u,v-u) + \frac{1}{2}a(v-u,u) - L(u) - L(v-u) \\ &= J(u) + [a(u,v-u) - L(v-u)] + \frac{1}{2}a(v-u,v-u) \end{aligned}$$

comme $a(.,.)$ est V-elliptique, le troxième terme est positif, et le deuxième terme est non négatif, ce qui implique que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K.$$

Inversement : Soit $u \in K$ solution de (Π). Comme $J(.)$ est Gâteaux différentiable en u, alors

$$(J'(u), v-u) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \big(J'(u), v-u\big) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{J(u+t(v-u))-J(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}a\left(u+t(v-u),u+t(v-u)\right) - L\left(u+t(v-u)\right) - \frac{1}{2}a(u,u) + L(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}a(u,u) + ta(u,v-u) + \frac{1}{2}t^2a(v-u,v-u) - L(u) - tL(v-u) - \frac{1}{2}a(u,u) + L(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{ta(u,v-u) + \frac{1}{2}t^2a(v-u,v-u) - tL(v-u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(a(u,v-u) + \frac{1}{2}ta(v-u,v-u) - L(v-u)\right) \\ &= a(u,v-u) - L(v-u). \end{aligned}$$

Donc $u \in K$ est solution de (P1)

$$a(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in K.$$

□

Remarque 1.4. *$J'(u) = Au - f$. De plus la propriété (iii) peut être remplacée par semi continue inférieurement.*

1.3 Résultats d'existence et d'unicité de l'IVE du second genre

Théorème 1.3. *Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue V-elliptique, $L(.)$ une forme linéaire continue, $j : V \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe semie continue inférieurement (s.c.i) et propre i.e vérifiant $j(v) > -\infty \quad \forall v \in V, j \neq \infty$. Alors le problème (P2) a une unique solution.*

Preuve.

1. (**Unicité**) : Soient u_1 et u_2 deux solutions de (P2), alors

$$a(u_1, v-u_1) + j(v) - j(u_1) \geq L(v, u_1) \quad \forall v \in V, u_1 \in V \tag{1.5}$$

$$a(u_2, v-u_2) + j(v) - j(u_2) \geq L(v, u_2) \quad \forall v \in V, u_2 \in V \tag{1.6}$$

Comme $j(.)$ est une fonctionnelle propre, il existe alors $v_0 \in V$ tel que
$-\infty < j(v_0) < +\infty$. Ainsi on a pour $i = 1, 2$

$$-\infty < j(u_i) \leq j(v_0) - L(v_0 - u_i) + a(u_i, v_0 - u_i) < +\infty.$$

Cela montre que $j(u_i)$ est finie pour $i = 1, 2$.
Posons $v = u_2$ dans (1.5) et $v = u_1$ dans (1.6) et en additionnant les deux inéquations, nous obtenons

$$\alpha\|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0.$$

D'où $u_1 = u_2$.

2. (**Existence**) : Considérons le cas ou $a(.,.)$ est symétrique, alors le prblème (P2) est équivalent à un problème de minimisation.

$$\begin{cases} \textit{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in V \end{cases} \tag{1.7}$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - j(v) - L(v) \tag{1.8}$$

Comme $j(.)$ est propre, convexe, s.c.i, donc elle est bornée inférieurement par une fonctionnelle affine.

$$j(v) \geq L_j(v) + c_0 \quad \forall v \in V$$

où L_j est une forme linéaire continue sur V et $c_0 \in \mathbb{R}$ (voir l'ouvrage de Atkinson-Theoretical Numerical Analysis, page 326). Ainsi d'aprés les hypothèses sur $a(.,.), j(.)$ et $L(.)$, on voit que $J(.)$ est propre, strictement convexe, s.c.i, Gâteaux différentiable et vérifie la propriété

$$J(v) \to \infty \text{ quand } \|v\| \to \infty.$$

Donc d'aprés le théorème 1.2, le problème (1.7) possède une solution .

□

1.4 Approximation interne de l'I.V.E du premier genre - Théorème de convergence

1.4.1 Problème continu

Considérons encore le problème (P1)

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ telle que} \\ a(u, v-u) \geq L(v-u), \ \forall v \in K \end{cases}$$

1.4.2 Problème approché (discret)

Approximation de V, K et $(P1)$

Soient données : un paramètre $h \to 0$ et une famille $\{V_h\}_h$ de sous-espaces de dimensions finies dans V. Soit aussi une famille $\{K_h\}_h$ de sous ensembles fermés convexes non vides de V ($K_h \subset K$ pas forcément) tel que $K_h \subset V_h$ et $\cap_h K_h \subset K$ et qui vérifie

- *(i) Si $v_h \in K_h \quad \forall h$ et $\{v_h\}_h$ est bornée dans V , alors la limite faible de v_h appartient à K (i.e K_h est dense faiblement dans K).*
- *(ii) $\exists \chi \subset V, \bar{\chi} = K$ et $r_h : \chi \to K_h$ tels que $\lim_{h\to 0} r_h v = v$ fortement dans $V, \forall v \in \chi$. (i.e K_h est dense fortement dans χ).*

Le problème (P1) est approximé par

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in K_h \text{ telle que} \\ a(u_h, v_h-u_h) \geq L(v_h-u_h), \ \forall v_h \in K_h \end{cases} \tag{P1h}$$

Théorème 1.4. *Le problème (P1h) a une unique solution.*

Preuve. Même démonstration du théorème1.1 en remplaçant V par V_h et K par K_h. □

1.4.3 Résultat de convergence

Théorème 1.5. *Sous les hypothèses données sur K et K_h, on a*

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - u\|_V = 0.$$

Preuve. La démonstration est divisée en trois parties.

1. `Estimation à priori de` $\{u_h\}_h$.
2. `Convergence faible de` $\{u_h\}_h$.
3. `Convergence forte de` $\{u_h\}_h$.

1. *Estimation de* $\{u_h\}_h$. Nous montrons qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 indépendantes de h tel que
$$\|u_h\|_V^2 \leq C_1\|u_h\| + C_2 \tag{1.9}$$
comme u_h est solution de (P1h), on a
$$a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h)\ \forall v_h \in K_h$$
i.e
$$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) - L(v_h - u_h)\ \forall v_h \in K_h.$$
Par la V-ellipticité de $a(.,.)$, on obtient
$$\alpha\|u_h\|^2 \leq M\|u_h\|\|v_h\| + \|L\|(\|v_h\| + \|u_h\|) \quad \forall v_h \in K_h. \tag{1.10}$$
Soit $v \in \chi$ et $v_h = r_h v \in K_h$. Par la condition (ii) sur K_h, on a $r_h v \longrightarrow v$ fortement dans V, donc v_h est uniformément borné dans V i.e $\|v_h\|$ est uniformément borné par une constante C. Ainsi (1.10) peut s'écrire comme suit
$$\|u_h\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}\{(CM + \|L\|)\|u_h\| + \|L\|C\} = C_1\|u_h\| + C_2$$
où $C_1 = \frac{1}{\alpha}(CM + \|L\|)$ et $C_2 = \frac{C}{\alpha}\|L\|$; alors (1.9) implique que
$$\|u_h\| \leq C_3\ , \forall h.$$

2. *Convergence faible de* $\{u_h\}_h$. La relation (1.9) implique que u_h est uniformément borné. Alors il existe une sous suite, notée u_{h_i}, tel que u_{h_i} converge faiblement vers u^* dans V. D'aprés la condition (i) sur $\{K_h\}_h$, on a, $u^* \in K$. Nous prouvons maintenant que u^* est solution de (P1). On a
$$a(u_{h_i}, u_{h_i}) \leq a(u_{h_i}, v_{h_i}) - L(v_{h_i} - u_{h_i}) \quad \forall v_{h_i} \in K_{h_i} \tag{1.11}$$
Soit $v \in \chi$ et $v_{h_i} = r_{h_i} v$, alors (1.11) devient
$$a(u_{h_i}, u_{h_i}) \leq a(u_{h_i}, r_{h_i} v) - L(r_{h_i} v - u_{h_i})$$
Comme $r_{h_i} v$ converge fortement vers v et u_{h_i} converge faiblement vers u^* quand $h_i \longrightarrow 0$, nous obtenons alors
$$\liminf_{h_i \to 0} a(u_{h_i}, u_{h_i}) \leq a(u^*, v) - L(v - u^*) \quad \forall v \in \chi \tag{1.12}$$
on a aussi
$$\begin{aligned} 0 &\leq a(u_{h_i} - u^*, u_{h_i} - u^*) \\ &= a(u_{h_i}, u_{h_i}) - a(u_{h_i}, u^*) - a(u^*, u_{h_i}) + a(u^*, u^*) \end{aligned}$$

i.e
$$a(u_{h_i}, u^*) + a(u^*, u_{h_i}) - a(u^*, u^*) \leq a(u_{h_i}, u_{h_i})$$
en passant à la limite, nous obtenons
$$a(u^*, u^*) \leq \liminf_{h_i \to 0} a(u_{h_i}, u_{h_i}). \tag{1.13}$$
De (1.12) et (1.13) nous obtenons
$$\begin{array}{rcl} a(u^*, u^*) & \leq & \liminf_{h_i \to 0} a(u_{h_i}, u_{h_i}) \\ & \leq & a(u^*, v) - L(v - u^*) \quad \forall v \in \chi \end{array}$$
par conséquent, on a
$$a(u^*, v - u^*) \geq L(v - u^*) \quad v \in \chi, u^* \in K \tag{1.14}$$
comme χ est dense dans K et $a(.,.), L$ sont continues, de (1.14), nous obtenons
$$a(u^*, v - u^*) \geq L(v - u^*) \quad v \in K, u^* \in K.$$
Alors u^* est solution de (P1), par le théoème 1.1 la solution de (P1) est unique et donc $u^* = u$. Ainsi u est la seule limite faible de $\{u_h\}_h$ dans la topologie faible de V. Alors $\{u_h\}_h \rightharpoonup u$.

3. *Convergence forte de* $\{u_h\}_h$. D'aprés la V-ellipticité de $a(.,.)$, on a
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \alpha \|u_h - u\|^2 \\ & \leq & a(u_h - u, u_h - u) \\ & = & a(u_h, u_h) - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u) \end{array} \tag{1.15}$$
où $u_h \in K_h$ est solution de (P1h) et $u \in K$ est solution de (P1). Comme $r_h v \in K_h$, $\forall v \in \chi$, nous avons
$$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, r_h v) - L(r_h v - u_h) \quad \forall v \in \chi \tag{1.16}$$
on a $\lim_{h \to 0} u_h = u$ faiblement dans V et $\lim_{h \to 0} r_h v = v$ fortement dans V (d'aprés la condition (ii)) de (1.15) et (1.16) nous obtenons
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \alpha \|u_h - u\|^2 \\ & \leq & a(u_h, r_h v) - L(r_h v - u_h) - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u) \ \forall v \in \chi. \end{array} \tag{1.17}$$
En passant à la limite dans (1.17), on a $\forall v \in \chi$
$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \alpha \lim_{h \to 0} \inf \|u_h - u\|^2 \\ & \leq & \alpha \lim_{h \to 0} \sup \|u_h - u\|^2 \\ & \leq & a(u, v - u) - L(v - u) \end{array} \tag{1.18}$$
comme χ est dense dans K, et par continuité de $a(.,.)$ et L l'inégalité (1.18) est vraie aussi $\forall v \in K$. En posant $v = u$ nous obtenons la convergence forte i.e
$$\lim_{h \to 0} \|u_h - u\| = 0$$

c.q.f.d. □

1.4.4 Estimation d'erreur

Théorème 1.6. *Sous les hypothèses données sur K et K_h, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de u, telle qu'on ait*

$$\|u-u_h\| \leq C\{\inf_{v_h\in K_h}[\|u-v_h\| + |a(u,v_h-u)-L(v_h-u)|^{\frac{1}{2}}] + \inf_{v\in K}|a(u,v-u_h)-L(v-u_h)|^{\frac{1}{2}}\}$$

Preuve. on a

$$\begin{aligned}\alpha\|u-u_h\|^2 &\leq a(u-u_h,u-u_h)\\ &= a(u,u)+a(u_h,u_h)-a(u,u_h)-a(u_h,u)\end{aligned}$$

$$\forall v\in K, \quad a(u,u)\leq a(u,v)+L(u-v)$$

$$\forall v_h\in K_h, \quad a(u_{h,}u_h)\leq a(u_h,v_h)+L(u_h-v_h)$$

ainsi on a, $\forall v\in K, \quad \forall v_h\in K_h$

$$\begin{aligned}\alpha\|u-u_h\|^2 &\leq a(u,v)+L(u-v)+a(u_h,v_h)+L(u_h-v_h)-a(u,u_h)-a(u_h,u)\\ &\leq a(u,v-u_h)+a(u_h,v_h-u)+L(u-v)+L(u_h-v_h)\end{aligned}$$

on peut écrire cette dernière inégalité sous la forme

$$\alpha\|u-u_h\|^2 \leq a(u,v-u_h)-L(v-u_h)+a(u,v_h-u)-L(v_h-u)+a(u_h-u,v_h-u) \quad (1.19)$$

on a

$$\begin{aligned}a(u_h-u,v_h-u) &\leq M\|u_h-u\|\|v_h-u\|\\ &\leq M\left[\sqrt{\alpha/M}\|u_h-u\|\sqrt{M/\alpha}\|v_h-u\|\right]\\ &\leq \frac{M}{2}\left[\frac{\alpha}{M}\|u_h-u\|^2+\frac{M}{\alpha}\|v_h-u\|^2\right]\\ &\leq \frac{\alpha}{2}\|u_h-u\|^2+\frac{M^2}{2\alpha}\|v_h-u\|^2.\end{aligned}$$

En substituant dans (1.19) nous obtenons, $\forall v_h\in K_h, \quad \forall v\in K$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\|u_h-u\|^2 &\leq [a(u,v-u_h)-L(v-u_h)]+[a(u,v_h-u)-L(v_h-u)]+\frac{M^2}{2\alpha}\|v_h-u\|^2\\ \|u_h-u\|^2 &\leq \frac{2}{\alpha}[a(u,v-u_h)-L(v-u_h)]+\frac{2}{\alpha}[a(u,v_h-u)-L(v_h-u)]+\frac{M^2}{\alpha^2}\|v_h-u\|^2\\ \|u_h-u\| &\leq C\left\{[a(u,v-u_h)-L(v-u_h)]+[a(u,v_h-u)-L(v_h-u)]+\|v_h-u\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\left\{|a(u,v-u_h)-L(v-u_h)|^{\frac{1}{2}}+|a(u,v_h-u)-L(v_h-u)|^{\frac{1}{2}}+\|v_h-u\|\right\}\end{aligned}$$

donc

$$\|u_h-u\| \leq C\left\{\inf_{v_h\in K_h}\left[\|v_h-u\|+|a(u,v_h-u)-L(v_h-u)|^{\frac{1}{2}}\right]+\inf_{v\in K}\left[|a(u,v-u_h)-L(v-u_h)|^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

$\square$

Remarque 1.5. *si $K=V$, alors l'estimation précédente se réduit au lemme de **Céa** pour les équations variationnelles.*

$$\|u-u_h\| \leq C\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|$$

Remarque 1.6. *si $K_h \subseteq K$, on dira qu' on a une approximation interne de l'I.V.E et dans ce cas l'estimation de l'erreur est*

$$\|u-u_h\| \leq C\inf_{v_h\in K_h}\left[\|u-v_h\|+|a(u,v_h-u)-L(v_h-u)|^{\frac{1}{2}}\right]$$

1.5 Approximation interne de l'I.V.E du second genre - Théorème de convergence

1.5.1 Problème continu

Considérons encore le problème (P2)

$$\begin{cases} \text{trouver } u\in V \text{ solution de} \\ a(u,v-u)+j(v)-j(u)\geq L(v-u), \forall v\in V. \end{cases}$$

1.5.2 Problème approché (discret)

Approximation de V

Soient données un paramètre $h\to 0$ et une famille $\{V_h\}_h$ de sous-espaces de dimensions finies dans V. Nous supposons que $\{V_h\}_h$ satisfait :

$(i)\exists U\subset V$ tel que $\overline{U}=V$ et $\forall h>0\ \exists r_h : U\to V_h$ tel que $\lim\limits_{h\to 0} r_h v = v$ fortement dans V.

Approximation de (P2)

Le problème (P2) est approximé par

$$\begin{cases} \textit{trouver } u_h\in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h,v_h-u_h)+j(v_h)-j(u_h)\geq L(v_h-u_h), \forall v_h\in V_h \end{cases} \tag{P2h}$$

Théorème 1.7. *le problème (P2h) a une unique solution.*

Preuve. Même démonstration du théorème 1.3 en remplaçant V par V_h. $\square$

1.5.3 Résultat de convergence

Théorème 1.8. *Sous l'hypothèse ci-dessus de* $\{V_h\}_h$*, on a*

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\| = 0$$

Preuve. Comme dans la preuve du théorème 1.5, on divise la démonstration en trois parties :

1. estimation à priori de $\{u_h\}_h$
2. convergence faible de $\{u_h\}_h$
3. convergence forte de $\{u_h\}_h$.

$\square$

1.6 Exercices

EX1 :(Projection sur un convexe fermé).
Soit V un espace de Hilbert, $K \subseteq V$ un sous ensemble convexe fermé non vide.

1. Montrer que $\forall f \in V$, il existe $u \in K$ unique tel que
$$\|f-u\|_V = \min_{v\in K} \|f-v\|_V \tag{1.20}$$
2. Montrer que u est caractérisée par
$$(u, v-u) \geq (f, v-u), \quad \forall v \in K, u \in K \tag{1.21}$$
$(.,.)$ est le produit scalaire sur V. On note $u = P_K f$ projection de f sur K.
3. Montrer que P_K est Lipschitizienne, i.e
$$\|P_K f_1 - P_K f_2\|_V \leq \|f_1 - f_2\|_V, \quad \forall f_1, f_2 \in V \tag{1.22}$$

EX2 : Soit le problème différentiel
$$\begin{cases} -u^{''}(x) = 1, \quad x \in]0,1[\\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

- Déterminer la forme variationnelle du problème.
- Démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel.
- Approximer le problème par la méthode des éléments finis linéaires.
- Application numérique : $h = 1/4, 1/6, 1/8$
- Calculer l'erreur d'estimation.

EX3 : Problème de programmation quadratique.
Soit une fonctionnelle $F : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$, et soit le problème
$$\begin{cases} Trouver\ u \in \mathcal{R}^n \text{ tel que } u \geq 0, F(u) \geq 0 \\ \text{et } u, F(u) \text{ sont orthogonaux i.e} \quad (F(u), u) = 0 \end{cases} \tag{1.24}$$
Soit $\mathcal{R}^n_+ = \{v = (v_1, ..., v_n) \in \mathcal{R}^n / \quad v_i \geq 0, \forall i = 1, ..., n\}$. Montrer que le problème (1.24) est équivalent à un problème d'inéquation variationnelle
$$\begin{cases} Trouver\ u \in \mathcal{R}^n_+ \text{ solution de} \\ (F(u), v-u) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{R}^n_+ \end{cases} \tag{1.25}$$

EX4 : Un sous ensemble $K \subseteq V$ est dit un cône dans V si $\forall v \in K, \forall \alpha > 0$, on a $\alpha v \in K$. Montrer que si K est un cône convexe fermé, alors l'inéquation variationnlle
$$a(u, v-u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in K, u \in K$$
est équivalente aux relations suivantes :
$$\begin{aligned} a(u,u) &= L(u), \quad u \in K \\ a(u,v) &\geq L(v), \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

EX5 : Montrer que si K est sous espace de V, alors l'inéquation variationnlle

$$a(u, v-u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in K, u \in K$$

se réduit à une équation variationnelle.

EX6 : Soit le **problème de minimisation**

$$\begin{cases} trouver\ u \in K \text{ tel que} \\ J(u) = \min\limits_{v \in K} J(v) \end{cases}$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\nabla v \nabla v + v^2)dx - \int_{\Omega} fvdx$$

Ω est un ouvert borné de $\mathcal{R}^2$ suffisamment régulier, K est un convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert V, et $f \in V^*$. Montrer que ce problème est équivalent à un problème d'inéquation variationnelle que l'on déterminera.

Chapitre 2

Approximation par la méthode des éléments finis pour les inéquations variationnelles elliptiques du second ordre

2.1 IVE du premier genre - Problème de l'obstacle

2.1.1 Notations et Préliminaires

Soient :
- Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière,
- $x = \{x_1, x_2\}$ point générique de Ω,
- $\nabla = \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$.

On se propose d'étudier les propriétés et l'approximation de la solution d'un problème d'inéquation variationnelle elliptique. Ce problème intervient dans de nombreuses situations concrètes quand on a un système régi par des équations aux dérivées partielles et soumis à des contraintes ; par exemple on impose à la solution u d'un problème elliptique de dépasser une valeur critique ψ et si u atteint ψ, on modifie la loi régissant le système de manière à préserver la contrainte $u \geq \psi$.

2.1.2 Problème continu

Soit

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)/v_{|\Gamma} = 0\}$$

On pose :

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \; \forall u, v \in V$$

$$L(v) = \langle f, v \rangle_{L^2} = \int_\Omega fv dx, \ f \text{ donnée dans } V^* = H^{-1}(\Omega)$$

Soit

$$\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \text{ et } \psi_{|\Gamma} \leq 0$$

On définit l'ensemble

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) | v \geq \psi \ \text{ p.p dans } \Omega \right\}$$

Alors le problème de l'obstacle est un cas particuler du problème P1, défini par

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ telle que} \\ a(u, v-u) \geq L(v-u), \, \forall v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

L'interprétation physique de ce problème est comme suit : Soit une `membrane élastique` définie par Ω dans le plan x_1, x_2; cette membrane est fixée le long de la frontière Γ. `S'il n'y a pas d'obstacle`, de la théorie d'élasticité, le `déplacement vertical` u obtenu en appliquant une force verticale F est donné par la solution du problème de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u &= & f \ dans \ \Omega \\ u_{|\Gamma} &= & 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f = F/t$, t est la tension de la membrane. `S'il y'a un obstacle`, on a un problème de `frontière libre`, et le déplacement u satisfait l'inéquation variationnelle (2.1) avec ψ `étant la hauteur de l'obstacle`.

2.1.3 Résultat d'existance et d'unicité

Théorème 2.1. *Le problème (2.1) a une unique solution.*

Preuve. En effet, nous appliquons le théorème1.1 du chapitre I. On prouve que $a(.,.)$ est continue V-elliptique, K est un ensemble convexe fermé non vide, et $L(.)$ est continue.

1. Continuité de $L(.)$

$$|L(v)| = |\int_\Omega fv| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

2. Continuité et V-ellipticité de $a(.,.)$ sont évidente. Par inégalité de Poincaré on a

$$\|v\|_{H_0^1} \simeq \|\nabla v\|_{L^2}$$

3. Convexité de K est trivial.
4. `Montrons que` K `est non vide`. On a

$$\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \text{ avec } \psi \leq 0 \text{ sur } \Gamma$$

On sait que

$$\psi = \psi^+ + \psi^- \text{ où } \psi^+ = \max(\psi, 0) \text{ et } \psi^- = \min(\psi, 0)$$

ψ^+ et ψ^- sont 2 fonctions positives, alors $\psi^+ \in H^1(\Omega)$. Comme $\psi_{|\Gamma} \leq 0$, alors par définition $\psi^+_{|\Gamma} = 0$. Cela implique que $\psi^+ \in H^1_0(\Omega)$, et comme

$$\psi^+ = \max(\psi, 0) \geq \psi$$

donc $\psi^+ \in K$. Ainsi K est non vide.

5. Montrons K est fermé. Soit $v_n \longrightarrow v$ `fortement` dans $H^1_0(\Omega)$, avec $v_n \in K$ et $v \in H^1_0(\Omega)$. Ainsi $v_n \longrightarrow v$ fortement dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent on peut extraire une sous suite $\{v_{n_i}\}$ telle que $v_{n_i} \longrightarrow v$ p.p sur Ω (convergence simple). Comme $v_{n_i} \geq \psi$ p.p sur Ω cela imlique que

$$v \geq \psi \;\text{ p.p sur } \Omega$$

donc $v \in K$.

En appliquant le théorème 1.1 du chapitre I, le problème (2.1) possède une seule solution. □

2.1.4 Interprétation du problème à frontière libre

De la solution u de (2.1), nous définissons

$$\Omega^+ = \{x | x \in \Omega, u(x) > \psi(x)\}$$

$$\Omega^0 = \{x | x \in \Omega, u(x) = \psi(x)\}$$

$$\gamma = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0; \quad u^+ = u_{|\Omega^+}; \quad u^0 = u_{|\Omega^0}.$$

Classiquement le problème (2.1) est formulé comme suit : *Trouver γ (la frontière libre) et u tel que*

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega^+ \tag{2.3}$$

$$u = \psi \text{ sur } \Omega^0 \tag{2.4}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{2.5}$$

$$u^+_{|\gamma} = u^0_{|\gamma} \tag{2.6}$$

L'interprétation physique de ces relations est la suivante : (2.3) indique que sur Ω^+ la membrane est strictement au-dessus de l'obstacle ; (2.4) indique que la membrane touche l'obstacle sur la partie Ω^0 ; (2.6) est une relation de transmission sur la frontière libre. Actuellement (2.3) - (2.6) sont insuffisantes pour caractériser u, ainsi il existe une infinité de solutions du problème (2.3) - (2.6). Par conséquent il est nécessaire d'ajouter une autre propriété de transmission : pour l'instant on suppose $\psi \in H^2(\Omega)$.

2.1.5 Régularité de la solution

Théorème 2.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathcal{R}^2$ de frontière suffisamment régulière si*

$$L(v) = \int_\Omega fv dx \qquad avec \qquad f \in L^p, 1 < P < \infty \tag{2.7}$$

et

$$\psi \in W^{2,p}(\Omega) \tag{2.8}$$

Alors la solution du problème de l'obstacle (2.1) est dans $W^{2,p}(\Omega)$.

Preuve. La démonstration se trouve dans les travaux de Brezis et Stampacchia. □

Remarque 2.1. *On sait que $W^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$ si $p > 2$, donc si $f \in L^p(\Omega)$ et $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$, la solution du problème (2.1) est dans $C^1(\overline{\Omega})$, pour $p > 2$.*

Nous donnons un autre résultat de régularité dans le cas où $f \in L^2(\Omega)$ et $\psi \equiv 0$ sur Ω, alors $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Théorème 2.3. *Si Γ est assez régulière, si $\psi \equiv 0$, et si $L(v) = \int_\Omega fv dx$ avec $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution u du problème (2.1) satisfait*

$$u \in K \cap H^2(\Omega), \quad \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 2.2. *Si $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, Alors la norme $\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$ est équivalente à la norme sur $H^2(\Omega)$, i.e $\|v\|_{H^2(\Omega)}$.*

Preuve. Démontrons par pénalisation. D'aprés le théorème 2.1 le problème (2.1) admet une unique solution $u \in K$. Soit $\varepsilon > 0$, considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon & = & u \text{ dans } \Omega \\ u_{\varepsilon|\Gamma} & = & 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

le problème (2.9) a une seule solution $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, et par la régularité de Γ nous avons $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$. Comme $u \geq 0$ p.p dans Ω par le principe du maximum appliqué aux opérateurs différentiels elliptiques du seconde ordre (voir l'ouvrage de Nêcas), nous avons $u_\varepsilon \geq 0$. Donc

$$u_\varepsilon \in K, \qquad u_\varepsilon \in K \cap H^2(\Omega).$$

De (2.1) on a

$$a(u, u_\varepsilon - u) \geq L(u_\varepsilon - u) = \int_\Omega f(u_\varepsilon - u)dx \qquad u_\varepsilon \in K, u \in K$$

la V-ellipticité de a(.,.) implique

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) = a(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) + a(u, u_\varepsilon - u) \geq a(u, u_\varepsilon - u)$$

ce qui donne

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \geq \int_\Omega f(u_\varepsilon - u)dx \tag{2.10}$$

De (2.9) et (2.10), nous obtenons

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) = \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla (u_\varepsilon - u)dx = \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla(\varepsilon \Delta u_\varepsilon)dx$$

et

$$\int_\Omega f(u_\varepsilon - u)dx = \int_\Omega f(\varepsilon \Delta u_\varepsilon)dx$$

Ce qui donne

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla(\Delta u_\varepsilon)dx \geq \varepsilon \int_\Omega f \Delta u_\varepsilon dx$$

Soit aussi

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla(\Delta u_\varepsilon)dx \geq \int_\Omega f \Delta u_\varepsilon dx.$$

En utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla(\Delta u_\varepsilon)dx &= -\int_\Omega |\Delta u_\varepsilon|^2 dx + \int_\Gamma \nabla u_\varepsilon \Delta u_\varepsilon \eta d\sigma \\ &= -\int_\Omega |\Delta u_\varepsilon|^2 dx \text{ (Car } \varepsilon \Delta u_\varepsilon = u_\varepsilon - u = 0 \text{ sur } \Gamma)\end{aligned}$$

Donc

$$\int_\Omega |\Delta u_\varepsilon|^2 dx \leq -\int_\Omega f \Delta u_\varepsilon dx$$

Par inégalité de Schwarz dans $L^2(\Omega)$, nous obtenons

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.11}$$

De (2.9), (2.11), on a

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc u_ε converge fortement vers u dans $L^2(\Omega)$. Appliquons la remarque 2.2 à (2.11) nous obtenons

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.12}$$

la suite $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $H^2(\Omega)$, donc il existe une sous-suite notée encore $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ qui converge faiblement vers u dans $H^2(\Omega)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon = u \qquad \text{faiblement dans } H^2(\Omega) \tag{2.13}$$

Donc $u \in H^2(\Omega)$. De plus d'aprés l'ouvrage de Nêcas u_ε converge fortement vers u dans $H^s(\Omega)$, pour $s < 2$. et on a

$$\begin{aligned}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} - \|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left| \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} - \|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \right| \\ &\leq \|\Delta u_\varepsilon - \Delta u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u_\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)}\end{aligned}$$

donc

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \text{ converge vers } \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

et par conséquent

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

c.q.f.d. □

2.1.6 Approximations par éléments finis

Approximation du domaine Ω

Supposons que Ω est un domaine polygonal de $\mathcal{R}^2$. considérons une famille de triangulation classique τ_h de Ω, i.e τ_h est un ensemble fini de triangles T tels que

$$T \subset \overline{\Omega} \quad \forall T \in \tau_h, \quad \cup_{T\in\tau_h} = \overline{\Omega} \tag{2.14}$$

$$T_1^0 \cap T_2^0 = \emptyset \quad \forall T_1, T_2 \in \tau_h \quad et \quad T_1 \neq T_2 \tag{2.15}$$

De plus $\forall T_1, T_2 \in \tau_h$ et $T_1 \neq T_2$ l'une des conditions suivantes doit être vraie

$$\begin{array}{ll} (1)\ T_1 \cap T_2 = \emptyset & \\ (2)\ T_1 \text{ et } T_2 & \text{ont au moins un seul sommet en commun} \\ (3)\ T_1 \text{ et } T_2 & \text{ont une seule arrête en commun} \end{array} \tag{2.16}$$

h désigne la longueur de la plus grande arrête de ces triangles, h est destiné à tendre vers zéro. Pour le moment nous considérons les approximations par éléments finis linéaires.

Approximation de V et K

Soient :
$\mathcal{P}_1$, désigne l'ensemble des polynômes en x_1 et x_2 de degré inférieur ou égal a 1.

$$\begin{aligned} \sum_h &= \left\{p \in \overline{\Omega}, \quad p \text{ est un sommet de } T \in \tau_h\right\} \\ \sum_h^0 &= \left\{p \in \sum_h, \quad p \notin \Gamma\right\} \end{aligned}$$

$V = H_0^1(\Omega)$ est approximé par une famille de sous-espaces $(V_h)_h$, avec

$$V_h = \left\{v_h \in C^0(\overline{\Omega}), v_{h|_\Gamma} = 0 \quad et \quad v_{h|_T} \in \mathcal{P}_1, \quad \forall T \in \tau_h\right\}$$

Il est clair que V_h est de dimension finie (voir l'ouvrage de Ciarlet). Il est naturel alors d'approximer l'ensemble K par

$$K_h = K \cap V_h = \left\{v_h \in V_h, \quad v_h(p) \geq \psi(p), \quad \forall p \in \sum_h\right\}$$

Proposition 2.1. *K_h est un sous-ensemble convexe fermé non vide de V_h.*

Problème approché (discret)

Le problème de l'obstacle discret est défini par

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in K_h \text{ telle que} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq L(v_h - u_h), \quad \forall v_h \in K_h \end{cases} \tag{P1h}$$

Proposition 2.2. *Le problème (P1h) a une unique solution.*

Preuve. Voir le théorème 1.1 du chapitre I. □

Remarque 2.3. *Comme la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique, (P1h) est équivalent à un problème de programmation quadratique.*

$$\begin{cases} \textit{trouver } u_h \in K_h \textit{ telle que} \\ J(u_h) = \min_{v_h \in K_h} J(v_h) \end{cases} \tag{2.17}$$

où

$$J(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

2.1.7 Résultat de convergence

Pour simplifier la démonstration de la convergence, nous supposerons dans cette section que

$$\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \text{ et } \psi_{|\Gamma} \leq 0 \tag{2.18}$$

Théorème 2.4. *Supposons que les angles de tous les triangles de τ_h sont bornées inférieurement par $\theta_0 > 0$ quand $h \to 0$ (ie une famille de triangulation régulière), alors*

$$\lim_{h \to 0} ||u_h - u||_{H_0^1(\Omega)} = 0 \tag{2.19}$$

où u_h et u sont les solutions de (P1h)et (2.1) respectivement.

Avant de démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.1. *Avec les notations de la figure2, on a la formule d'intégration numérique des trapèzes*

$$\int_T w(x)dx = \frac{mes(T)}{3} \sum_{i=1}^{3} w(M_{iT}), \quad \forall w \in \mathcal{P}_1 \tag{2.20}$$

Preuve. Soit

$$w(x) = \sum_{i=1}^{3} w(M_{iT}) \lambda_i(x)$$

où $w(M_{iT})$ sont les valeurs de w sur les sommets M_{iT} du triangle T et $\lambda_i(x)$ sont les fonctions de bases qui correspondent aux 3 sommets du triangle T. On a

$$\int_T w(x)dx = \sum_{i=1}^{3} w(M_{iT}) \int_T \lambda_i(x)dx$$

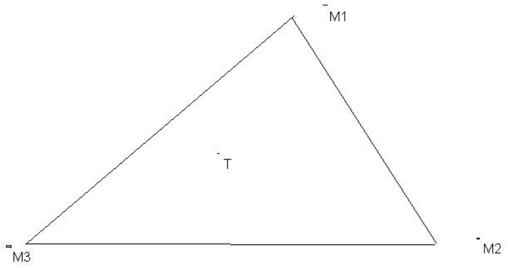

FIGURE 2.1 – Triangle élémentaire $T \in \tau_h$ de sommets M_1, M_2, M_3

Calculons $\lambda_i(x)$

$$i = 1 : \quad \lambda_1(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

avec

$$\begin{array}{lllllll} \lambda_1(M_{1T}) & = & \lambda_1(\overline{x}) & = & a_0 + a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 & = & 0 \\ \lambda_1(M_{2T}) & = & \lambda_1(\overline{y}) & = & a_0 + a_1\overline{y}_1 + a_2\overline{y}_2 & = & 0 \\ \lambda_1(M_{3T}) & = & \lambda_1(\overline{z}) & = & a_0 + a_1\overline{z}_1 + a_2\overline{z}_2 & = & 0 \end{array}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \\ 1 & \overline{y}_1 & \overline{y}_2 \\ 1 & \overline{z}_1 & \overline{z}_2 \end{vmatrix} = 2mes(T)$$

$$a_0 = \frac{\overline{y}_1\overline{z}_2 - \overline{y}_2\overline{z}_1}{2mes(T)}, \quad a_1 = \frac{-\overline{z}_2 + \overline{y}_2}{2mes(T)}, \quad a_3 = \frac{\overline{z}_1 - \overline{y}_1}{2mes(T)}$$

et

$$\lambda_1(x) = \frac{\overline{y}_1\overline{z}_2 - \overline{y}_2\overline{z}_1 + (\overline{y}_2 - \overline{z}_2)x_1 + (\overline{z}_1 - \overline{y}_1)x_2}{2mes(T)}$$

alors

$$\int_T \lambda_1(x)dx = \frac{mes(T)}{3}, \quad \text{de même pour } \lambda_2, \lambda_3$$

i.e

$$\int_T \lambda_i(x)dx = \frac{mes(T)}{3}$$

et

$$\int_T w(x)dx = \frac{mes(T)}{3}\sum_{i=1}^{3} w(M_{iT})$$

□

Lemme 2.2. *Sous l'hypothèse (2.18), on a* $\overline{\mathcal{D}(\Omega)\cap K} = K$.

Preuve. Preuve du théorème2.4. Pour prouver le théorème 2.4 nous suivrons la même démarche appliquée dans la démonstration du thèorème 1.5 du chapitre I. Ceci implique qu'on doit vérifier les 2 propriétés suivantes.

- (i) si $\{v_h\}_h \in K_h, \forall h$ et $\{v_h\}_h$ est bornée dans V, alors la limite faible v de v_h appartient à K. (i.e K_h est dense dans K).
- (ii) $\exists \chi \subset V, \overline{\chi} = K$ et $r_h : \chi \to K_h$ tel que $\lim_{h\to 0} r_h v = v$ fortement dans $V, \forall v \in \chi$. ($i.e$ K_h est dense dans χ).

Vérification de (i) : utilisant la notation de la figure2 et considérons $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\phi \geq 0$, on définit ϕ_h par

$$\phi_h = \sum_{T\in\tau_h} \phi(G_T)\chi_T,$$

où χ_T est la fonction caractéristique de T et G_T est le barycentre du triangle T. Il est facile de montrer que

$$\lim_{h\to 0} \phi_h = \phi \text{ fortement dans } L^\infty(\Omega). \tag{2.21}$$

Ainsi nous approximons ψ par ψ_h tel que

$$\begin{array}{lll} \psi_h \in C^0(\overline{\Omega}), & \psi_{h|T} \in \mathcal{P}_1, & \forall T \in \tau_h \\ \psi_h(p) = \psi(p), & & \forall p \in \sum_h \end{array} \tag{2.22}$$

Cette fonction ψ_h satisfait

$$\lim_{h\to 0} \psi_h = \psi \text{ fortement dans } L^\infty(\Omega). \tag{2.23}$$

Considérons une suite $(v_h)_h,\ v_h \in K_h,\ \forall h$ tel que

$$\lim_{h\to 0} v_h = v \text{ faiblement dans } V.$$

Alors

$$\lim_{h\to 0} v_h = v \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \text{ (voir Nêcas).}$$

En utilisant (2.21) et (2.23), nous obtenons

$$\lim_{h\to 0}\int_\Omega (v_h - \psi_h)\phi_h dx = \int_\Omega (v-\psi)\phi \tag{2.24}$$

On a

$$\int_\Omega (v_h - \psi_h)\phi_h dx = \sum_{T\in\tau_h} \phi(G_T)\int_T (v_h - \psi_h)dx \tag{2.25}$$

de (2.20), et de la définition de ψ_h, nous obtenons $\forall T \in \tau_h$

$$\int_T (v_h - \psi_h)dx = \frac{mes(T)}{3} \sum_{i=1}^{3} \left[v_h(M_{iT}) - \psi_h(M_{iT}) \right]. \tag{2.26}$$

Utilisant le fait que $\phi_h \geq 0$, la définition de K_h et la relation (2.26), il suit de (2.25) que

$$\int_\Omega (v_h - \psi_h)\phi_h dx \geq 0 \quad \forall \phi_h \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \phi_h \geq 0.$$

En passant à la limite quand $h \to 0$

$$\int_\Omega (v - \psi)\phi dx \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \phi \geq 0.$$

Ceci implique que $v \geq \psi$ p.p dans Ω. Donc (i) est satisfaite.
Vérification de (ii) : du lemme 2.2, on peut supposer $\chi = \mathcal{D}(\Omega) \cap K$. Nous définissons

$$\begin{array}{cc} r_h : H_0^1 \cap C^0(\overline{\Omega}) \longrightarrow V_h & \text{interpolation linéaire} \\ r_h v \in V_h & \forall v \in H_0^1 \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ (r_h v)(p) = v(p) & \forall p \in \Sigma_h^0 \end{array} \tag{2.27}$$

D'autres part, et d'aprés les **résultats de Ciarlet** [4] et sous l'hypothèse du théoréme 2.4 on a

$$\|r_h v - v\|_V \leq ch\|v\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

la constante c est indépendante de h et de v. Ceci implique que

$$\lim_{h \to 0} \|r_h v - v\|_V = 0 \quad \forall v \in \chi.$$

De l'autre côté, il est évident que

$$r_h v \in K_h \quad \forall v \in K \cap C^0(\overline{\Omega})$$

donc

$$r_h v \in K_h \quad \forall v \in \chi.$$

En conclusion avec les suppositions de χ et v_h la propriété (ii) est satisfaite. *C.Q.F.D* □

2.1.8 Estimation d'erreur

Théorème 2.5. *Soit Ω un domaine polygonal et $u, \psi \in H^2(\Omega)$. Supposons que les angles de tous les triangles de τ_h sont bornés inférieurement par $\theta_0 > 0$ quand $h \to 0$ (ie une famille de triangulation régulière). Alors il existe une constante C indépendante de h tel que*

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch \tag{2.28}$$

avec C dépend de $|u|_2, \|f\|_0$ et $|\psi|_2$.

Preuve. Soit $u \in H^2(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned} a(u,v) - L(v) &= \int_\Omega (\nabla u \nabla v - fv)dx \\ &= \int_\Omega (-\Delta u - f)vdx \end{aligned}$$

Appliquons le théorème 1.6 du chapitre I, on obtient

$$\|u - u_h\|_1 \leq C\left\{\inf_{v_h \in K_h}\left[\|u - v_h\|_1 + \| - \Delta u - f\|_{L^2}^{1/2}\|u - v_h\|_{L^2}^{1/2}\right] + \| - \Delta u - f\|_{L^2}^{1/2}\inf_{v \in K}\|v - u_h\|_{L^2}^{1/2}\right\}$$

Soit $r_h : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega),\ v \longrightarrow r_h v$ une interpolation linéaire par morceaux. Alors

$$\inf_{v_h \in K_h}\left[\|u - v_h\|_1 + \| - \Delta u - f\|_{L^2}^{1/2}\|u - v_h\|_{L^2}^{1/2}\right] \leq \|u - r_h u\|_1 + \| - \Delta u - f\|_{L^2}^{1/2}\|u - r_h u\|_{L^2}^{1/2}$$

Introduisons les estimations d'erreurs suivantes (voir Ciarlet [4])

$$\|u - r_h u\|_{L^2} \leq Ch^2|u|_2 \tag{2.29}$$

$$\|u - r_h u\|_1 \leq Ch|u|_2 \tag{2.30}$$

avec

$$|u|_0 = \left[\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right]^{1/2}, \quad \|u\|_0 = |u|_0, \quad |u|_1 = \left[\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right]^{1/2}$$

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega |u(x)|^2\,dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

$$\|u\|_1^2 = |u|_0^2 + |u|_1^2 = \|u\|_{H_0^1}^2$$

$$|u|_2 = \left[\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2 dx\right]^{1/2}$$

Nous obtenons

$$\inf_{v_h \in K_h}\left[\|u - v_h\|_1 + \| - \Delta u - f\|_{L^2}^{1/2}\|u - v_h\|_{L^2}^{1/2}\right] \leq Ch\left[|u|_2 + \| - \Delta u - f\|_{L^2}^{1/2}|u|_2^{1/2}\right]. \tag{2.31}$$

Reste à évaluer le terme $\|v - u_h\|_{L^2}$, nous définissons

$$u_h^* = \max(u_h, \psi)$$

Comme $u_h, \psi \in H^1(\Omega)$, on a $u_h^* \in H^1(\Omega)$. Par définition, on a $u_h^* \geq \psi$. Finallement, comme $\psi \leq 0$ sur Γ, alors $u_h^* = 0$ sur Γ, donc $u_h^* \in K$.
Soit

$$\Omega^* = \{x \in \Omega /\ u_h(x) < \psi(x)\}$$

Alors sur $\Omega - \Omega^*$, $u_h^* = u_h$ et on a

$$\inf_{v \in K} \|v - u_h\|_{L^2}^2 \leq \|u_h^* - u_h\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega^*} |u_h - \psi|^2 dx$$

Soit $r_h\psi$ l'interpolant linéaire par morceaux de ψ

$$\left(r_h : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega), \psi \longrightarrow r_h\psi\right)$$

On a $u_h(p) \geq \psi(p) = r_h\psi(p)$, $\forall p \in \Sigma_h^0$, donc $u_h \geq r_h\psi$ p.p dans Ω. Par conséquent, sur Ω^* on a

$$\begin{array}{rcl} 0 < |u_h - \psi| & = & \psi - u_h \\ & < & \psi - r_h\psi \\ & \leq & |\psi - r_h\psi| \end{array}$$

Ce qui donne

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\Omega^*} |u_h - \psi|^2 dx & \leq & \displaystyle\int_{\Omega^*} |\psi - r_h\psi|^2 dx \\ & \leq & \displaystyle\int_{\Omega} |\psi - r_h\psi|^2 dx \\ & \leq & Ch^4 |\psi|_2^2 \end{array}$$

(d'après les estimations de Ciarlet (2.29)) Ceci implique que

$$\inf_{v \in K} \|v - u_h\|_{L^2}^{1/2} \leq Ch|\psi|_2^{1/2} \tag{2.32}$$

De (2.31) et (2.32), nous obtenons

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch \left[|u|_2 - \| - \Delta u - f\|_{L^2}^{1/2} |u|_2^{1/2} + \| - \Delta u - f\|_{L^2}^{1/2} |\psi|_2^{1/2}\right]$$

D'où

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch$$

avec C une constante dépendant de $|u|_2$, $\|f\|$ et $|\psi|_2$.
C.Q.F.D □

Remarque 2.4. *(importante) Si $K = V$ on aura une équation variationnelle $(-\Delta u = f)$ et dans ce cas l'estimation d'erreur est*

$$\begin{array}{rcl} \|u - u_h\|_1 & \leq & C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \\ & \leq & C\|u - r_h u\|_1 \\ & \leq & Ch|u|_2 \end{array}$$

donc

$$\|u - u_h\| \leq Ch|u|_2$$

pour une approximation par éléments finis linéaire par morceaux.

2.2 Exercices

EX1 : Démontrer le théorème 2.1 du chapitre II du cours.

EX2 : Soit le problème différentiel

$$\begin{cases} -\Delta u \geq f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma \\ u \geq \psi, & \text{p.p. dans } \Omega \\ (-\Delta u - f)(u - \psi) = 0 & \text{p.p dans } \Omega \end{cases} \tag{2.33}$$

où ψ et f sont deux fonctions données.
Déterminer la forme variationnnelle du problème.

EX3 : Soit le problème différentiel

$$\begin{cases} -u^{''} = f & \text{dans }]0,1[\\ u(0) \geq 0, & u(1) \geq 0 \\ u^{'}(0) \leq 0, & u^{'}(1) \geq 0 \\ u(0)u^{'}(0) = 0, & u(1)u^{'}(1) = 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

- Déterminer la forme variationnelle du problème.
- Inversement, soit $u \in H^2(0,1)$ solution du problème variationnel, montrer que u vérifie le problème différentiel (2.34).

EX4 : Soit le problème de valeurs aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, & \text{sur } \Gamma \\ u\frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.35}$$

Soit

$$V = H^1(\Omega), \quad K = \left\{ v \in H^1(\Omega)/v_{|\Gamma} \geq 0 \right\}$$

- Déterminer le problème variationnel.
- Démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel.

EX5 : Soit le problème de valeurs aux limites

$$\begin{cases} u^{''} \geq 0 & \text{dans }]0,2[\\ u(0) = 0, \quad u(2) = 0 & \\ u \leq \psi, & \text{p.p dans }]0,2[\\ u^{''}(\psi - u) = 0, & \text{dans }]0,2[\end{cases} \tag{2.36}$$

- Déterminer le problème variationnel.
- Démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel.

EX6 : Prouver le lemme 2.1 du chapitre II du cours.

EX7 : **Problème de la torsion élastoplastique**. Soient :

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega), \quad \Omega \subset \mathcal{R}^2 \\ a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \\ L(v) &= \int_\Omega f v dx \\ K &= \{v \in V/ \quad |\nabla v| \leq 1 \quad \text{p.p dans } \Omega\} \end{aligned}$$

Considérons le problème variationnel

$$\begin{cases} \textit{trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq L(v-u), \forall v \in K \end{cases} \tag{2.37}$$

Montrer que ce problème admet une solution unique.

EX8 : **Problème de Signorini**. Soient

$$\begin{aligned} V &= H^1(\Omega), \quad \Omega \subset \mathcal{R}^2 \\ a(u,v) &= \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv) dx \\ L(v) &= \int_\Omega f v dx + \int_\Gamma g v d\sigma \\ K &= \{v \in V/ \quad v \geq 0 \quad \text{p.p sur } \Gamma\} \end{aligned}$$

où $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma)$. Montrer que le problème de l'inéquation variationnelle correspondante

$$\begin{cases} \textit{trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq L(v-u), \forall v \in K \end{cases}$$

admet une unique solution. Montrer que u formellement est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq g, & \text{sur } \Gamma \\ u(\frac{\partial u}{\partial n} - g) = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.38}$$

EX9 : **Problème à deux obstacles**. Soit le problème

$$\begin{cases} \textit{trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) \geq \int_\Omega f(v-u), \forall v \in K \end{cases}$$

où

$$K = \left\{v \in H_0^1(\Omega)/ \quad \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \quad \text{p.p dans } \Omega\right\}, \quad \psi_1, \psi_2 \text{ sont 2 fonctions données.}$$

Etudier l'existence et l'unicité de la solution.

EX10 : Soit **le problème de l'obstacle**

$$\begin{cases} trouver\ u \in K \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)dx \geq \int_\Omega f(v-u)dx, \forall v \in K \end{cases}$$

où

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) / \quad v \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \right\}, \quad f = \sin(2\pi x), \Omega = [0,1]^2.$$

Discrétiser le problème par la méthode des éléments finis linéaires de degré 1.

EX11 : **Estimation d'erreur.** Considérons le problème de la torsion élastoplastique dans $\mathcal{R}$.
Soient :

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega), \quad \Omega =]0,1[\subset \mathcal{R} \\ a(u,v) &= \int_\Omega u'v'dx \\ L(v) &= \int_\Omega fvdx \quad f \in H_0^{-1}(\Omega) \\ K &= \left\{ v \in V / \quad |v'| \leq 1 \quad \text{p.p dans } \Omega \right\} \end{aligned}$$

Considérons le problème variationnel

$$\begin{cases} trouver\ u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq L(v-u), \forall v \in K \end{cases} \tag{2.39}$$

Montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a l'estimation d'erreur suivante

$$\|u - u_h\|_V = o(h).$$

Chapitre 3

Inéquations variationnelles paraboliques et leurs approximations

3.1 Inéquations variationnelles paraboliques, formulation forte, formulation faible

Soit V, H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ (avec injection continue), $\overline{V} = H$. Supposons que le dual $H^\star = H$, alors on a $V \subset H \subset V^\star$. On munit H (resp.V) du produit scalaire $(.,.)$ et de la norme $|.|$ (resp. $((.)), \|.\|$). De plus on considère $(.,.)$ comme produit de dualité entre V et $V^\star$.
Etant données :

- un intervalle de temps $[0, T]$ avec $0 < T < \infty$,
- une forme bilinéaire $a(.,.) : V \times V \longrightarrow R$, continue et V-elliptique dans le sens suivant

$$\begin{array}{l} \exists \alpha > 0 \text{ et } \lambda > 0 \text{ tel que} \\ a(v,v) + \lambda |v|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \end{array}$$

- $f \in L^2(0, T; V^\star)$,
- $u_0 \in H$,
- K un ensemble convexe fermé non vide dans V,
- un sous ensemble convexe fermé non vide

$$K_1 = \left\{ v \in L^2(0,T;V), v(t) \in K, p.p.t \in]0,T[\right\} \subset L^2(0,T;V).$$

On considère le problème d'inéquation variationnelle parabolique (I.V.P) suivant :
Trouver $u \in K_1$ tel que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V^\star)$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K, p.p.t \in]0,T[\\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Le problème (3.1) peut s'écrire d'une autre manière :
Trouver $u(t) \in K$ tel que $\dfrac{\partial u(t)}{\partial t} \in V^\star$ vérifiant

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u(t)}{\partial t}, v-u(t)\right) + a(u(t), v-u(t)) \geq (f(t), v-u(t)) \quad \forall v \in K, p.p.t \in]0,T[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

On dit alors que u est une **solution forte**. On associe à cette formulation forte la notion de **solution faible**.
Notons d'abord que si u est une solution forte, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + a(u, v-u) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + a(u, v-u) + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) \\ &\geq (f, v-u) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|v-u|^2, \quad \forall v \in K, \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V^\star) \end{aligned}$$

Intégrant cette inégalité sur $]0,T[$ et tenant compte que $\frac{1}{2}|v(T)-u(T)|^2$ est positif, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^T (\frac{\partial v}{\partial t}, v-u)dt + \int_0^T a(u, v-u)dt &\geq \int_0^T (f, v-u)dt + \frac{1}{2}|v(T)-u(T)|^2 - \frac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \\ &\geq \int_0^T (f, v-u)dt - \frac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \end{aligned}$$

Alors on dit que u est une **solution faible** si $u \in K_1$ et vérifie

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T (\frac{\partial v}{\partial t}, v-u)dt + \int_0^T a(u, v-u)dt \geq \int_0^T (f, v-u)dt - \frac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall v \in K, \dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V^\star) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

3.1.1 Exemple1

Soit $\Omega \subset R^N$ un ouvert borné de frontière Γ suffisamment régulière. On pose

-
$$Q = \Omega \times]0,T[\,, \Sigma = \Gamma \times]0,T[$$
-
$$V = H_0^1(\Omega), H = L^2(\Omega)$$
-
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad \text{où } u = u(x,t) = u(t) \in V, t \text{ fixe}$$
-
$$(f,v) = \int_\Omega fv dx \quad \text{avec } f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

- $$u_0 \in L^2(\Omega)$$
- $$\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \text{ et } \psi_{|\Gamma} \geq 0$$
- $$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) / v \leq \psi \quad p.p.\Omega \right\},$$
- $$K_1 = \left\{ v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), v(t) \in K, p.p.t \in]0,T[\right\}.$$

Le problème variationnel est : trouver $u \in K_1$ tel que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ vérifiant

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v-u \right) + \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\, dx \quad \geq \quad \displaystyle\int_\Omega f(v-u)dx \quad \forall v \in K, \quad p.p.t \in]0,T[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

3.1.2 Exemple2

Si

$$K(t) = \{ v \in V / v(x,t) \leq \psi(x,t) \quad p.p.\Omega \}$$

alors le problème variationnel est : trouver $u \in K_1$ tel que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ vérifiant

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v-u \right) + a(u, v-u) \quad \geq \quad (f, v-u) \quad \forall v \in K, \quad p.p.t \in]0,T[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Remarque 3.1. *Si K dépend de la variable temps t, c.à.d l'obstacle $\psi = \psi(x,t)$ le problème variationnel deviendra un peu difficile. En général, on suppose $\psi = \psi(x)$ et K ne dépend pas du temps t.*

3.2 Résultat d'existence et d'unicité, régularité

Théorème 3.1. *Pour tout $f \in L^2(0,T; V^\star)$ et $u_0 \in H$, il existe une unique solution faible.*

Indiquons un théorème de régularité qui est valable lorsque $a(.,.)$ est **symétrique**.

Théorème 3.2. *Pour tout $f \in L^2(0,T; V^\star)$ et $u_0 \in H$, il existe une solution forte unique. Plus précisément :*

$$\begin{cases} u \in C(0,T;V), \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V^\star), u(t) \in K \quad \forall t \in [0,T] \text{ et on a} \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v-u \right) + a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K, \quad p.p.t \in]0,T[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Preuve. Démonstration de l'unicité. Il suffit de poser alternativement $v = u_1$ puis $v = u_2$ dans le problème variationnel. □

Remarque 3.2. *Si $K = V$ ou $\psi = \infty$, le problème variationnel (3.1) se réduit à une équation variationnelle parabolique : étant données $f \in L^2(0,T;V^\star)$ et $u_0 \in H$, trouver $u \in L^2(0,T;V)$ tel que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V^\star)$ vérifiant*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + a(u, v-u) = (f, v-u) \quad \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

3.3 Estimation de l'énergie

Sous les hypothèses du théorème précédent, on montre que la solution u dépend continument des données u_0 et f. Plus précisément on l'estimation suivante

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u\|_{C(0,T;V)} \leq C(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(0,T;V^\star)})$$

3.4 Approximation de l'inéquation variationnelle parabolique

3.4.1 Discrétisation de l'espace, Problème semi-discret

Soient données : un paramètre $h \longrightarrow 0$ et une famille $\{V_h\}_h$ de sous espaces de dimensions finies qui approximent V et H. Soit aussi une famille $\{K_h\}_h$ de sous ensembles fermés convexes non vides de V tels que $K_h \subset V_h$. Supposons aussi que u_0 est approximé par $u_{0h} \in V_h$ tel que $\lim_{h\to 0} u_{0h} = u_0$ fortement dans H. Supposons que K_h vérifie les conditions (i) et (ii) du paragraphe 1.4.2 du chapitre I cas elliptique. Posons

$$K_{1h} = \left\{v_h \in L^2(0,T;V_h), \quad v_h(t) \in K_h, p.p.t \in]0,T[\right\}.$$

Alors le problème variationnel semi-discret est : étant données $f_h \in L^2(0,T;V_h^\star)$ et $u_{0h} \in V_h$, on cherche $u_h \in K_{1h}$ tel que $\dfrac{\partial u_h}{\partial t} \in L^2(0,T;V_h^\star)$ vérifiant

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u_h}{\partial t}, v_h-u_h\right) + a(u_h, v_h-u_h) \geq (f_h, v_h-u_h) \quad \forall v_h \in K_h, p.p.t \in]0,T[\\ u_h(0) = u_{0h} \end{cases} \tag{3.3}$$

3.4.2 Discrétisation du temps, Problème discret

On subdivise l'intervalle $[0,T]$ en petites intervalles de longueurs Δt, en posant $\Delta t = \dfrac{T}{M+1}$, $\quad M \in N^\star, \quad t_n$ $n\Delta t$, pour $n = 0, 1, ..., M+1$. Soit $u_h^{(n)}$ la valeur approchée de u_h à l'instant t_n. Nous considérons quelques variantes de discrétisation en temps par différences finies.

Schéma explicite

Pour $n = 0, 1, ...,$ trouver $u_h^{(n+1)} \in K_h$ solution de

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u_h^{(n+1)} - u_h^{(n)}}{\Delta t}, v_h - u_h^{(n+1)} \right) + a(u_h^{(n)}, v_h - u_h^{(n+1)}) \geq (f_h^{(n)}, v_h - u_h^{(n+1)}) \quad \forall v_h \in K_h \\ u_h^{(0)} = u_{0h} \end{cases} \tag{3.4}$$

Schéma implicite

Pour $n = 0, 1, ...,$ trouver $u_h^{(n+1)} \in K_h$ solution de

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u_h^{(n+1)} - u_h^{(n)}}{\Delta t}, v_h - u_h^{(n+1)} \right) + a(u_h^{(n+1)}, v_h - u_h^{(n+1)}) \geq (f_h^{(n+1)}, v_h - u_h^{(n+1)}) \quad \forall v_h \in K_h \\ u_h^{(0)} = u_{0h} \end{cases} \tag{3.5}$$

Schéma semi-implicite ou Schéma de Crank-Nicolson

Pour $n = 0, 1, ...,$ trouver $u_h^{(n+1)} \in K_h$ solution de

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u_h^{(n+1)} - u_h^{(n)}}{\Delta t}, v_h - u_h^{(n+\frac{1}{2})} \right) + a(u_h^{(n+\frac{1}{2})}, v_h - u_h^{(n+\frac{1}{2})}) \geq (f_h^{(n+\frac{1}{2})}, v_h - u_h^{(n+\frac{1}{2})}) \quad \forall v_h \in K_h \\ \text{où} \quad u_h^{(n+\frac{1}{2})} = \dfrac{u_h^{(n)} + u_h^{(n+1)}}{2} \in K_h, \quad f_h^{(n+\frac{1}{2})} = \dfrac{f_h^{(n)} + f_h^{(n+1)}}{2} \\ u_h^{(0)} = u_{0h} \end{cases} \tag{3.6}$$

Bibliographie

[1] K. ATKINSON and W. HAN, Theorical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework, publisher : Springer-Verlag, INC, edition : New York, Berlin , 2001.

[2] H.Brezis, G.Stampacchia, Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. Soc. Math. Fr.96, 159-180 (1968).

[3] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1,1-168, 1972.

[4] P.G.Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems (North-Holand Amesterdam 1978).

[5] J.Céa, Optimization Theory and Algorithms.Lecture Notes, vol.53(Tata Institute of Fundamental Research,Bombay,1978).

[6] G.Duvant and J.L.Lions, Les inéquations en mécanique et en physique (Dunod,Paris 1972).

[7] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali ; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 1964.

[8] R.Glowinsky : Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems (springer,1984).

[9] R.Glowinsky, J.L.Lions , R.Tremolieres : Numerical Analysis of Variational Inequalities, studies in mathematics and its applications, volume 8,(North-holand, Amsterdam, 1981).

[10] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[11] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 1967.

[12] J. L. Lions, Quelques m ethodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[13] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[14] U. Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[15] A. H. SIDDIQI, Applied Functional Analysis, Numerical Methods, Wavelet Methods, and Image Processing, publisher : New York. Basel, edition : Marcel Dekker, Inc., (2004)

[16] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Progresso della Scienze, 1933.

[17] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[18] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.