République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 08 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

Cours : 2 Année
De la Licence Académique en Mathématiques

Probabilités

Dr : Abbes Benchaabane

Guelma 2015

Table des matières

Chapitre 1

Rappels sur les probabilités

1.1 Probabilité sur un ensemble fini

1.1.1 Evènement aléatoire

Historiquement, la notion de probabilité s'est dégagée à partir d'exemples simples empruntés aux jeux de hasard (le mot hasard vient de l'arabe *az-zahr* : le dé).
Nous allons introduire cette notion en l'associant à un exemple : le jeu de dé.

DÉFINITIONS	EXEMPLE
Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat.	L'expérience est le jet d'un dé cubique ordinaire. Le résultat de l'expérience est le nombre indiqué sur la face supérieure du dé.
On peut alors lui associer alors un univers appelé aussi ensemble fondamental de l'expérience qui est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire. On le note Ω.	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Un événement aléatoire est un sous-ensemble de Ω.	L'événement *obtenir un nombre pair* est le sous-ensemble $A = \{2, 4, 5\}$ de Ω.
On dit que l'événement A est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à A.	Si la face supérieure du dé indique 5, A n'est pas réalisé. Si elle indique 4, A est réalisé.
Si un événement ne contient qu'un seul élément, on dit que c'est un événement élémentaire.	$B = \{1\}$ est un des 5 événements . élémentaires de Ω

1.1.2 De la fréquence à la probabilité de réalisation d'un évènement aléatoire

La fréquence théorique d'un événement est la limite de la fréquence de réalisation de cet événement lorsque le nombre de répétitions d'une même expérience tend vers l'infini (c'est ce qu'exprime une des lois de la théorie des probabilités appelée la loi faible des grands nombres). Cela signifie que si l'on veut connaître la fréquence théorique d'apparition du nombre 6 dans notre jet de dé, il suffit de le lancer un grand nombre de fois, 10000 par exemple. La fréquence théorique cherchée, que l'on appellera probabilité de réalisation de l'événement élémentaire $\{6\}$, sera très voisine de la fréquence expérimentale d'apparition du nombre 6 au cours de nos 10000 lancers. Elle sera encore plus voisine de la fréquence expérimentale obtenue lors de 100000 lancers. Le grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire efface la notion de "chance". La notion de fréquence théorique ou de probabilité va permettre d'indiquer si, lors d'une expérience aléatoire, un événement donné est plus ou moins susceptible d'être réalisé.

Les probabilités peuvent être classées suivant trois critères :

- Une probabilité à priori est une probabilité déterminée à l'avance, sans effectuer aucune expérience.
  Exemple. On peut à priori accorder une probabilité de 0.5 à événement qui consiste à obtenir le côté face d'une pièce de monnaie non truquée.
- La probabilité empirique d'un événement est déterminée à l'aide de l'observation et de l'expérimentation. C'est la valeur limite de la fréquence de réalisation de événement lorsque l'expérience est réalisée un très grand nombre de fois.
  Exemple. Si lorsqu'on a lancé la pièce de monnaie 10000 fois on constate que la fréquence du côté face se stabilise autour de 0.65, il faut envisager de réviser notre probabilité à priori et conclure que la pièce est truquée. Ce type de probabilité joue un rôle important pour les prévisions d'articles en stock chez un détaillant, pour le calcul des primes des compagnies d'assurances, etc...
- La probabilité subjective est le dernier type de probabilité. Elle intervient lorsqu'il est impossible d'établir une probabilité à priori ou une probabilité empirique.
  Exemple. Le directeur d'une entreprise peut en se fiant à son expérience affirmer qu'il y a une probabilité de 0.6 que ses employés déclenchent une grève.

Nous nous intéresserons principalement aux deux premiers types de probabilité.

Vu qu'une probabilité peut être considérée comme une fréquence idéale, on lui connaît d'avance certaines propriétés.

- Une probabilité est une quantité sans dimension.
- Elle est toujours comprise entre 0 et 1.
- L'univers Ω a la probabilité maximum d'être réalisé, car c'est l'événement certain. Sa probabilité de réalisation est donc égale à 1.
- Si A et B sont *incompatibles*, la fréquence de réalisation de l'événement A ou B est la somme de la fréquence de réalisation de A et de la fréquence de réalisation de B.

1.1.3 Propriétés des probabilités d'un évènement aléatoire

Définition 1 *Si l'univers Ω est constitué de n événements élémentaires $\{e_i\}$, une* mesure de probabilité *sur Ω consiste à se donner n nombres $p_i \in [0, 1]$, les probabilités des événements élémentaires, tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Si l'événement A est la réunion disjointe de k événements élémentaires $\{e_i\}$, avec $0 < k < n$, la probabilité de A vaut, par définition,

$$p(A) = p(\bigcup_{i=1}^{k} \{e_i\}) = \sum_{i=1}^{k} p(e_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i.$$

Par suite, $0 \leq p(A) \leq 1$.

La signification concrète de la probabilité d'un événement A est la suivante. Dans une expérience aléatoire, plus $p(A)$ est proche de 1, plus A a de chances d'être réalisé ; plus $p(A)$ est proche de 0, moins il a de chances d'être réalisé.

Exemple 2 *Probabilité* uniforme *ou* équiprobabilité *: tous les P_i valent $1/n$. La probabilité d'un sous-ensemble à k éléments vaut alors $p(A) = \frac{k}{n} = \frac{cardA}{card\Omega}$.*

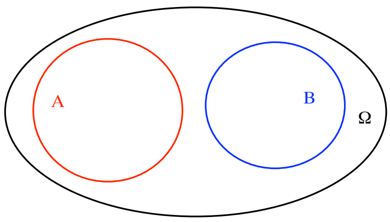
On exprime aussi cette propriété par la formule

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}.$$

Les propriétés suivantes découlent de la définition.

Propriété 3 *Si A et B sont incompatibles, i.e., si leur intersection $A \cap B$ est vide, alors*

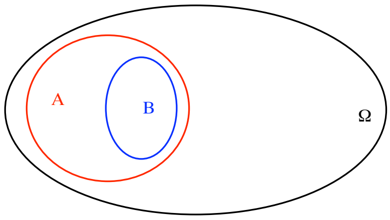
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$



Propriété 4 *Si B est un sous-ensemble de A,*

$$B \subseteq A \Rightarrow p(B) \leq p(A).$$

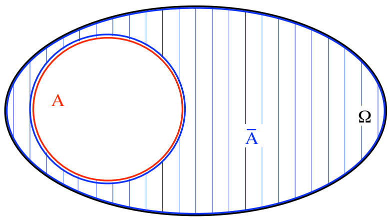
En effet, $B = A \cup (B \setminus A)$. Or A et $B \setminus A$ sont incompatibles ($B \setminus A$ est l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas éléments de A). Donc $p(B) = p(A) + p(B \setminus A)$. Comme $p(B \setminus A)$ est positive, on obtient le résultat annoncé.



Propriété 5 *On appelle $\emptyset$ l'évènement impossible, puisqu'il n'est jamais réalisé. Sa probabilité vaut $p(\emptyset) = 0$.*

Propriété 6 *On note $\bar{A}$ l'évènement contraire de A. C'est le complémentaire de A dans Ω. Sa probabilité vaut*

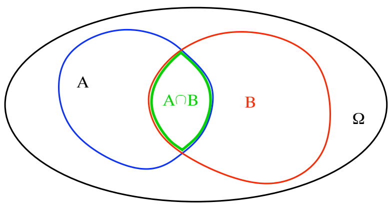
$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$



Propriété 7 (Théorème des probabilités totales). *Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω,*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

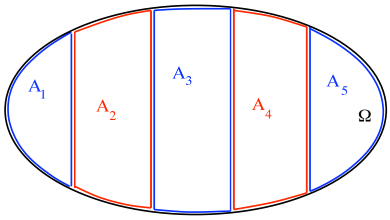
Preuve. $p(A) = p(A \setminus B) + p(A \cap B)$ car $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont incompatibles. De même $p(B) = p(B \setminus A) + p(A \cap B)$ car $B \setminus A$ et $A \cap B$ sont incompatibles. De plus, $p(A \cup B) = p(A \setminus B) + p(B \setminus A) + p(A \cap B)$, car $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \cap B$ sont incompatibles. En additionnant, il vient $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.■



Propriété 8 (Généralisation du théorème des probabilités totales ou règle de l'addition). *Si $A_1, \ldots, A_k$ forment une* partition *de Ω, i.e. ils sont deux à deux disjoints $(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$, et $\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$, alors*

$$\sum_{j=1}^{k} p(A_j) = 1.$$

Dans cette situation, on dit parfois que les A_j forment un *système complet d'évènements.*



1.2 Probabilité conjointe

La probabilité que deux événements A et B se réalisent est appelée probabilité conjointe de A et B, notée $p(A \cap B)$ et s'énonçant probabilité de A et B. Le calcul de cette probabilité s'effectue de manière différente selon que A et B sont dépendants ou indépendants, c'est-à-dire selon que la réalisation de l'un influence ou non celle de l'autre.

1.2.1 Evénements indépendants

Exemple 9 *Je lance un dé rouge et un dé vert et je cherche la probabilité d'obtenir un total de 2. Je dois donc obtenir 1 avec chacun des deux dés. La probabilité d'obtenir 1 avec le dé rouge est* $1/6$ *et demeurera* $1/6$ *quelque soit le résultat du dé vert. Les deux événements "obtenir 1 avec le dé rouge" et "obtenir 1 avec le dé vert" sont indépendants.*

Propriété 10 *Si deux événements sont indépendants, la probabilité qu'ils se réalisent tous les deux est égale au produit de leurs probabilités respectives. On peut donc écrire :*

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Dans notre exemple : $p(\text{total} = 2) = p(\text{dé vert} = 1) \times p(\text{dé rouge} = 1) = 1/36$.

Remarque 11 *Les tirages avec remise constituent une bonne illustration d'événements indépendants.*

1.2.2 Evénements dépendants - probabilité conditionnelle

Si deux événements sont dépendants plutôt qu'indépendants, comment calculer la probabilité que les deux se réalisent, puisque la probabilité de réalisation de l'un dépend de la réalisation de l'autre ? Il nous faut connaître pour cela le degré de dépendance des deux événements qui est indiqué par la notion de probabilité conditionnelle.

Définition 12 *Soient A et B deux événements, A étant supposé de probabilité non nulle. On appelle* probabilité conditionnelle *de B par rapport à A, la probabilité de réalisation de l'événement B sachant que A est réalisé. On la note*

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

$p(B|A)$ se lit *p de B si A* ou *p de B sachant A*.

Remarque 13 *L'application :* $p_B : A \mapsto p_B(A) = p(A|B)$, $\Omega \to [0, 1]$, *est une probabilité sur Ω et vérifie toutes les propriétés d'une probabilité.*

Théorème 1 (Théorème des probabilités composées ou règle de la multiplication).

$$p(A \cap B) = p(B|A)p(A) = p(A|B)p(B).$$

En voici une généralisation. Soit $A_1, \ldots, A_k$ un système complet d'évènements. Alors

$$p(B) = \sum_{j=1}^{k} p(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{k} p(A_j)p(B|A_j).$$

Théorème 2 (Formule de Bayes). *Soit $A_1, \ldots, A_k$ un système complet d'évènements. Soit E un évènement de probabilité non nulle. Alors*

$$p(A_j|E) = \frac{p(A_j \cap E)}{p(E)} = \frac{p(A_j)p(E|A_j)}{\sum_{i=1}^{k} p(A_i)p(E|A_i)}.$$

Remarque 14 *Les tirages sans remise constituent une bonne illustration d'événements dépendants.*

Exercice 15 *Une urne contient 5 boules noires et 3 boules blanches. Quelle est la probabilité d'extraire 2 boules blanches en 2 tirages ?*

Solution de l'exercice 15. *Tirage sans remise.*
Appelons B_1, l'événement : obtenir une boule blanche au premier tirage.
Appelons B_2, l'événement : obtenir une boule blanche au deuxième tirage.
La probabilité cherchée $p(B_1 \cap B_2)$ est égale à $p(B_1) \times p(B_2|B_1)$. Or $p(B_1)$ vaut $3/8$ et $p(B_2|B_1)$ est égale à $2/7$ puisque lorsqu'une boule blanche est sortie au premier tirage, il ne reste plus que 7 boules au total, dont 2 seulement sont blanches. On conclut que $p(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$.

1.3 Comment aborder un exercice de probabilités ?

Dans de nombreux problèmes, la recherche des solutions peut être facilitée par la démarche suivante.

1. Déterminer la liste des événements élémentaires ou décrire le contenu de l'univers Ω.
2. Rechercher la mesure de probabilité associée à cet univers.
   – Soit la probabilité est uniforme et dans ce cas, la probabilité d'un événement A est donnée par $p(A) = \frac{\mathrm{card} A}{\mathrm{card} \Omega}$.
   – Soit on détermine la probabilité de chaque événement élémentaire en n'oubliant pas que la somme de toutes les probabilités de ces événements élémentaires est égale à 1.
3. Identifier correctement le ou les événements dont on cherche à évaluer la probabilité.
4. Utiliser la formule appropriée permettant de calculer la probabilité demandée. On pourra se poser la question suivante : Doit-on calculer la probabilité ?
   – D'un événement élémentaire ?
   – D'un événement contraire ?
   – Événements compatibles ou incompatibles (probabilités totales) ?
   – Événements dépendants ou indépendants (probabilités composées) ?

Exercice 16 *1. On jette deux dés non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 7 points ?*

2. Cette fois-ci les dés sont pipés : les numéros pairs sont deux fois plus probables que les numéros impairs. Quelle est la probabilité d'obtenir un total différent de 8 ?

Solution de l'exercice 16. *Dés pipés.*

1. – L'univers est l'ensemble de tous les résultats possibles lorsqu'on jette deux dés. Imaginons que les deux dés sont reconnaissables et les résultats sont donc tous les couples (a, b) où a et b sont des nombres compris entre 1 et 6. Il contient donc 36 éléments. On peut écrire $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\text{card}(\Omega) = 36$.
   – Tous les résultats possibles sont équiprobables. La mesure de probabilité est donc uniforme sur Ω.
   – L'événement dont on cherche la probabilité est (somme $= 7$). Il est composé des événements élémentaires $(1, 6)$, $(6, 1)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$. Ils sont au nombre de 6. On peut écrire : card(somme $= 7) = 6$.
   – Finalement, étant donné que $p(A) = \frac{\text{card} A}{\text{card}\Omega}$, on obtient $p(\text{somme} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
2. – L'univers est toujours le même.
   – On cherche à déterminer la mesure de probabilité sur Ω dans le cas où les dés sont truqués : elle n'est plus uniforme.
   Il faut répondre à la question : lorsqu'on lance un seul dé, quelle est la probabilité de chaque numéro ?
   – Tous les numéros pairs ont la même probabilité que l'on note p^p ; tous les numéros impairs ont la même probabilité que l'on note p^i. L'énoncé nous permet d'écrire que $p^p = 2p^i$.
   – D'autre part, étant donné que les numéros 1,2,3,4,5,6 constituent l'ensemble des résultats d'un jet de dé, la somme des probabilités de ces 6 résultats vaut 1. D'où $3p^p + 3p^i = 1$, soit encore $9p^i = 1$. D'où $p^i = \frac{1}{9}$ et $p^p = \frac{2}{9}$.
   – L'événement dont on cherche la probabilité est (somme $\neq 8$). Chercher directement la probabilité de cet événement nous obligerait à considérer beaucoup de cas. Il sera donc plus rapide de déterminer d'abord la probabilité de l'événement contraire (somme $= 8$). Ce dernier est constitué des événements élémentaires $(2, 6)$, $(6, 2)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, $(4, 4)$.
   – Les résultats des deux dés sont indépendants. Nous pouvons donc affirmer que

$$p(\{(2, 6)\}) = p(\{2\}) \times p(\{6\}) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81}.$$

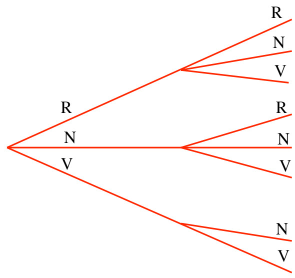
   De même, $p(\{(6, 2)\}) = p(\{(4, 4)\}) = \frac{4}{81}$, alors que $p(\{(5, 3)\}) = p(\{(3, 5)\}) = \frac{1}{81}$
   – Finalement $p(\text{somme} = 8) = \frac{14}{81}$ et $p(\text{somme} \neq 8) = \frac{67}{81}$.

1.4 Techniques de dénombrement

1.4.1 Diagrammes arborescents ou arbres

Exemple 17 *On considère une urne qui contient deux boules rouges, deux noires et une verte. On tire deux boules sans remise. Il s'agit d'une expérience à deux étapes où les différentes possibilités qui peuvent survenir sont représentées par un arbre horizontal.*

On obtient trois branches principales et trois branches secondaires pour chaque étape sauf pour le cas où une verte a été tirée en premier.
Le nombre de branches terminales de cet arbre donne le nombre d'éléments de l'univers.



Lorsqu'on rencontre beaucoup d'étapes dans une expérience et de nombreuses possibilités à chaque étape, l'arbre associé à l'expérience devient trop complexe pour être analysé. Ces problèmes se simplifient à l'aide de formules algébriques, comme on va le voir.
La démonstration de ces formules repose sur le fait que dans le cas d'une expérience à deux étapes, par exemple, un arbre qui aurait r branches principales et s branches secondaires commençant à partir des r branches principales aura rs branches terminales.

1.4.2 Arrangements et permutations

Envisageons un ensemble de n objets différents. Choisissons maintenant r de ces n objets et ordonnons les.

Définition 18 *Une disposition ordonnée de r objets distincts pris parmi n est appelée* arrangement *de r objets pris parmi n (on a obligatoirement $r \leq n$).*

Combien y en a-t-il ?
Pour compter le nombre total d'arrangements de r objets pris parmi n, il suffit de considérer les r positions comme fixées et de compter le nombre de façons dont on peut choisir les objets pour les placer dans ces r positions. C'est une expérience à r étapes où l'on applique la technique du paragraphe précédent. Pour la première position, on a n choix possibles. Pour la deuxième position, on a $n-1$ choix possibles... Pour la r-ième position, on a $n-r+1$ choix possibles. Si on désigne par A_n^r le nombre total d'arrangements cherchés, l'arbre aura A_n^r branches terminales. On conclut

Proposition 19

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Rappel 20 $n!$ *(lire "factorielle n") est le produit de tous les entiers jusqu'à n,* $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$. *Par convention,* $0! = 1$.

Exemple 21 *Les arrangements de deux lettres prises parmi 4 lettres $\{a, b, c, d\}$ sont au nombre de $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$. Ce sont : $(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d)$, $(c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)$.*

Cas particulier : $r = n$ Il s'agit d'ordonner n objets entre eux, c'est-à-dire d'effectuer une permutation de ces n objets.

Définition 22 *Une permutation de n éléments est une disposition ordonnée de ces n éléments.*

Proposition 23 *Les permutations de n éléments sont au nombre de $A_n^n = n!$.*

1.4.3 Combinaisons

Définition 24 *Un choix de r objets distincts pris parmi n sans tenir compte de leur ordre est appelé combinaison de r objets pris parmi n.*

Dans l'exemple précédent correspondant à l'ensemble des quatre lettres $\{a, b, c, d\}$, la combinaison $\{a, b\}$ est la même que la combinaison $\{b, a\}$ alors que l'arrangement (a, b) est différent de l'arrangement (b, a).
Combien y en a-t-il ? Le nombre total de combinaisons de r objets pris parmi n est noté C_n^r ou $\binom{r}{n}$. Pour trouver l'expression de $\binom{r}{n}$, comparons le nombre d'arrangements et de combinaisons possibles de r objets pris parmi n.

- Dans un arrangement on choisit r objets, puis on tient compte de leur ordre.
- Dans une combinaison seul le choix des r objets compte. Comme le nombre de façons d'ordonner les r objets choisis est $r!$, on conclut qu'à chaque combinaison de r objets pris parmi n, on peut associer $r!$ arrangements et donc qu'il y a $r!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons.

On conclut

Proposition 25

$$\binom{r}{n} = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Exemple 26 *Le nombre de combinaisons de deux lettres prises parmi quatre $\{a, b, c, d\}$ est $\binom{2}{4} = \frac{4!}{2!2!} = 6$. Ce sont : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.*

1.4.4 Permutations lorsque certains éléments sont semblables

Dans les paragraphes précédents, on a supposé que les n objets étaient tous différents. Il arrive parfois que les n objets en contiennent un certain nombre qui sont indiscernables.
Supposons qu'il n'y ait que k sortes d'objets distincts sur les n objets. Il y a

- n_1 objets de la 1-ère sorte,
- n_2 objets de la 2-ème sorte....
- n_k objets de la k-ème sorte.

On a bien sûr $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.
Pour déterminer le nombre total de permutations distinctes, comparons ce nombre cherché $\mathcal{P}$ avec le nombre obtenu si on supposait les objets différenciés. Plaçons nous dans le cas de l'exemple suivant : On cherche le nombre d'anagrammes du mot $PROBABILITE$.
Choisissons un de ces anagrammes : le plus simple est $PROBABILITE$.

- Si on différencie les lettres B, cette disposition peut provenir des deux permutations $PROB_1AB_2ILITE$ ou $PROB_2AB_1ILITE$, soit $2!$ possibilités.
- Si on différencie les lettres I, cette disposition peut provenir des deux permutations $PROBABI_1LI_2TE$ ou $PROBABI_2LI_1TE$, soit encore $2!$ possibilités

A un anagramme correspond donc $2! \times 2! = 4$ permutations, ce qui signifie qu'il y a 4 fois plus de permutations que d'anagrammes. Le mot $PROBABILITE$ comprend 11 lettres. Il y a $11!$ permutations possibles. On a donc $\frac{11!}{2!2!} = 9979200$ anagrammes possibles.

Cas général. La différenciation des n_1 premiers objets donnera $n_1!$ fois plus d'éléments que ce qu'on cherche, la différenciation des n_2 premiers objets donnera $n_2!$ fois plus d'éléments que ce qu'on cherche, et finalement on trouve que $n!$ est $n_1!n_2!\cdots n_k!$ fois plus grand que le nombre cherché $\mathcal{P}$. On conclut

Proposition 27 *Le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres, comportant seulement $k < n$ lettres distinctes, en nombres $n_1, \ldots, n_k$ est*

$$\mathcal{P} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

1.4.5 Cas ou les éléments ne sont pas obligatoirement distincts

Combien y a-t-il de manières de choisir r éléments parmi n de façon ordonnée en n'imposant pas qu'ils soient tous distincts les uns des autres ?
En 1ère position, il y a n choix possibles. En 2ème position, il y a encore n choix possibles...
En $r$ème position, il y a toujours n choix possibles.
Conclusion : Il y a donc n^r choix pour les r éléments (r peut être supérieur à n dans ce cas).

1.4.6 Récapitulation

	Conditions	Le nombre de tirages possibles est le nombre de :	Un exemple usuel
$p \geq n$	les p éléments ne sont pas nécessairement tous distincts mais sont ordonnés	p-listes d'éléments de E, soit : n^p	tirages successifs . avec remise de p objets parmi n
$p < n$	les p éléments sont tous distincts et ordonnés	arrangements de p éléments de E, soit : A_n^p	tirages successifs sans remise de p objets parmi n.
$p = n$	les n éléments sont tous distincts et ordonnés	permutations des n éléments de E, soit : $n!$	anagrammes d'un. mot formé de lettres toutes distinctes
$p < n$	les p éléments sont tous distincts et non ordonnés	combinaisons de p éléments de E, soit $\binom{p}{n}$	tirages simultanés de p objets parmi n.

Chapitre 2

Variables aléatoires

2.1 Définition

Exemple 28 *On jette deux fois une pièce de monnaie non truquée, et on s'intéresse au nombre de fois que le côté "face" a été obtenu. Pour calculer les probabilités des divers résultats, on introduira une variable X qui désignera le nombre de "face" obtenu. X peut prendre les valeurs 0,1,2.*

Exemple 29 *On lance une fléchette vers une cible circulaire de rayon égal à 50 cm et on s'intéresse à la distance entre la fléchette et le centre de la cible. On introduira ici une variable X, distance entre l'impact et le centre de la cible, qui peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 50.*

Dans ces deux cas, X prend des valeurs réelles qui dépendent du résultat de l'expérience aléatoire. Les valeurs prises par X sont donc aléatoires. X est appelée variable aléatoire.

Définition 30 *Soit un univers Ω associé à une expérience aléatoire, sur lequel on a défini une mesure de probabilité. Une* variable aléatoire *X est une application de l'ensemble des événements élémentaires de l'univers Ω vers $\mathbf{R}$ (vérifiant quelques conditions mathématiques non explicitées ici).*

Une variable aléatoire est une variable (en fait une fonction !) qui associe des valeurs numériques à des événements aléatoires.

Par convention, une variable aléatoire sera représentée par une lettre majuscule X alors que les valeurs particulières qu'elle peut prendre seront désignées par des lettres minuscules
$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$.
Les deux variables aléatoires définies dans les exemples 28 et 29 sont de natures différentes. La première est discrète, la seconde continue.

2.2 Variables aléatoires discrètes

Définition 31 *Une* variable aléatoire discrète *est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs entières, en nombre fini ou dénombrable.*

Pour apprécier pleinement une variable aléatoire, il est important de connaître quelles valeurs reviennent le plus fréquemment et quelles sont celles qui apparaissent plus rarement. Plus précisément, on cherche les probabilités associées aux différentes valeurs de la variable

Définition 32 *Associer à chacune des valeurs possibles de la variable aléatoire la probabilité qui lui correspond, c'est définir la* loi de probabilité *ou la* distribution de probabilité *de la variable aléatoire.*
Pour calculer la probabilité que la variable X soit égale à x, valeur possible pour X, on cherche tous les événements élémentaires e_i pour lesquels $X(e_i) = x$, et on a

$$p(X = x) = \sum_{i=1}^{k} p(\{e_i\}),$$

si $X = x$ sur les événements élémentaires $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

La *fonction de densité discrète f* est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $[0,1]$, qui à tout nombre réel x_i associe $f(x_i) = p(X = x_i)$. On a bien sûr $\sum_i f(x_i) = 1$.

Exemple 33 Cas de l'exemple 28.
La variable X = nombre de côtés "face" peut prendre les valeurs 0,1,2.

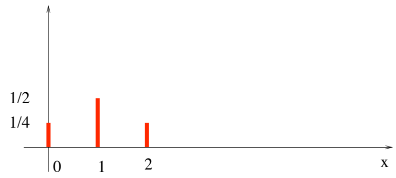
$$\begin{aligned} f(0) &= p(X=0) = p((pile, pile)) = \frac{1}{4}; \\ f(1) &= p(X=1) = p((pile, face)) + p((face, pile)) = \frac{1}{2}; \\ f(2) &= p(X=2) = p((face, face)) = \frac{1}{4}; \\ f(x) &= 0 \text{ si } x \notin \{0,1,2\}. \end{aligned}$$

On présente sa distribution de probabilité dans un tableau.

x	0	1	2	total
$f(x) = p(X = x)$	1/4	1/2	1/4	1

2.2.1 Représentation graphique de la distribution de probabilité

Elle s'effectue à l'aide d'un diagramme en bâtons où l'on porte en abscisses les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnées les valeurs des probabilités correspondantes.
Dans l'exemple du jet de pièces :



2.2.2 Fonction de répartition

En statistique descriptive, on a introduit la notion de fréquences cumulées croissantes. Son équivalent dans la théorie des probabilités est la fonction de répartition.

Définition 34 *La* fonction de répartition *d'une variable aléatoire X indique pour chaque valeur réelle x la probabilité que X prenne une valeur au plus égale à x. C'est la somme des probabilités des valeurs de X jusqu'à x. On la note F.*

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i).$$

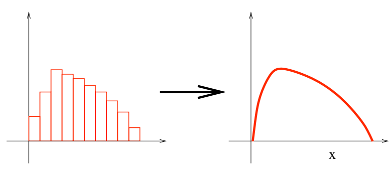
La fonction de répartition est toujours croissante, comprise entre 0 et 1 et se révélera un instrument très utile dans les travaux théoriques.

2.3 Variables aléatoires continues

Définition 35 *Une variable aléatoire est dite* continue *si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini.*

2.3.1 Fonction de densité de probabilité

Dans le cours de statistique descriptive, nous avons appris à représenter la distribution d'une variable statistique continue (ou à caractère continu) à l'aide d'un histogramme de fréquences, qui est une série de rectangles. L'aire de chaque rectangle est proportionnelle à la fréquence de la classe qui sert de base au rectangle.
Si l'on augmentait indéfiniment le nombre d'observations en réduisant graduellement l'intervalle de classe jusqu'à ce qu'il soit très petit, les rectangles correspondant aux résultats vont se multiplier tout en devenant plus étroits et à la limite vont tendre à se fondre en une surface unique limitée d'une part par l'axe des abscisses et d'autre part par une courbe continue.

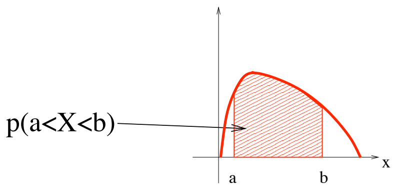


On abandonne alors la notion de valeur individuelle et l'on dit que la distribution de probabilité est continue. La courbe des fréquences relatives idéalisée est alors la courbe représentative d'une fonction de densité de probabilité f.
Pour une variable statistique continue, l'aire des rectangles était un témoin fidèle de la fréquence de chaque classe. Il en va en de même pour une variable aléatoire continue mais il faudra raisonner à présent sur des classes infiniment petites d'amplitude dx. L'élément infinitésimal d'aire $f(x)\,dx$ représente la probabilité que X appartienne à un intervalle d'amplitude dx,

$$p(x < X \leq x + dx) = f(x)\,dx.$$

f a donc les propriétés suivantes :
a) La courbe d'une fonction de densité de probabilité est toujours située au dessus de l'axe des abscisses donc f est une fonction toujours positive.
b) La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre les limites a et b c'est-à-dire $p(a \leq X \leq b)$, est égale à l'aire entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$,

$$p(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



c) L'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1 :

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = 1.$$

d) Alors qu'une probabilité est sans dimension, une densité de probabilité a pour dimension celle de l'inverse de X : $[X^{-1}]$.
e) Il résulte de a et c qu'une densité de probabilité est une fonction *intégrable* au sens de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Remarque 36 *Le cas où on a une courbe continue est un cas théorique qui supposerait :*
– *un nombre infini de mesures de la variable statistique*
– *une sensibilité très grande de l'appareil de mesure.*

Nous supposerons toutefois que nous sommes dans ce cas lorsque nous serons en présence d'un grand nombre de mesures.

2.3.2 Fonction de répartition

De même que pour les variables aléatoires discrètes, on peut définir la fonction de répartition F de la variable continue X qui permet de connaître la probabilité que X soit inférieure à une valeur donnée :

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Propriété 37 1. *F est continue et croissante sur* $\mathbf{R}$.

2. $\forall x \in \mathbf{R}, \quad F'(x) = f(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0.$
4. $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Exercice 38

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = ke^{-x}$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ sinon.

1. Déterminer k pour que f soit la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable X.
3. Calculer $p(1 < X < 2)$.

Solution de l'exercice 38. *Densité de probabilité.*

1. f doit être une fonction positive, donc il nous faut impérativement trouver pour k une valeur positive. Une fonction de densité de probabilité doit vérifier $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = 1$, donc $\int_0^{+\infty} ke^{-x}\,dx = 1$. Il en résulte que $k = 1$.
2. Par définition la fonction de répartition de X est la fonction F définie par
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x} \text{ si } x > 0, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$
3.
$$p(1 < X < 2) = \int_1^2 e^{-x}\,dx = e^{-1} - e^{-2} \sim 0.23.$$

2.4 Paramètres descriptifs d'une distribution

En statistique descriptive, nous avons caractérisé les distributions statistiques des valeurs observées par certains nombres représentatifs qui résumaient de façon commode et assez complète la distribution. Pour apprécier la tendance centrale d'une série d'observations, nous avons employé, entre autres, la moyenne arithmétique et pour caractériser la dispersion de la série autour de la moyenne, nous avons introduit la variance ou l'écart quadratique moyen.

2.4.1 Espérance mathématique d'une distribution de probabilité

Si l'on s'imagine que le nombre d'observations croît indéfiniment (on passe d'un échantillon de taille n à la population toute entière), les fréquences observées vont tendre vers les probabilités théoriques et on admet que la moyenne calculée sur l'échantillon de taille n va tendre vers une valeur limite qui sera la moyenne de l'ensemble des valeurs de la population entière. On l'appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X, car c'est la valeur moyenne que l'on s'attend à avoir dans un échantillon de grande taille.

Définition 39 1. *Cas d'une variable discrète*

- *Soit X une variable aléatoire discrète qui prend un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et dont la loi de probabilité est $f : f(x_i) = p(X = x_i)$. L'*espérance mathématique *de X, notée $E(X)$, est définie par*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i).$$

- *Si la variable aléatoire X prend un nombre dénombrable de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, son* espérance mathématique *est alors définie par $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$, à condition que la série converge absolument.*

2. *Cas d'une variable continue. Si la variable aléatoire X est continue et a pour fonction de densité de probabilité f,* son espérance mathématique *est*

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} x f(x)\, dx,$$

pourvu que la fonction $x \mapsto x f(x)$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$.

2.4.2 Variance d'une distribution de probabilités

En effectuant le même raisonnement que précédemment pour passer d'un échantillon de taille n à la population totale, on suppose que la variance calculée sur l'échantillon tend vers une limite lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini. Cette limite est appelée variance de la variable aléatoire X.

Définition 40 – *On appelle* variance *de la variable aléatoire X la valeur moyenne des carrés des écarts à la moyenne,*

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Le calcul de la variance se simplifie en utilisant l'expression :

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

– *On appelle* écart-type *de la variable aléatoire X la racine carrée de sa variance.*

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue,

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète finie,

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 f(x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i)\right) - E(X)^2.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue,

$$Var(X) = \int_{\mathbf{R}} (x - E(X))^2 f(x)\, dx = \left(\int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)\, dx\right) - E(X)^2.$$

2.4.3 Fonction caractéristique d'une distribution de probabilité

Définition 41 *On appelle* fonction caractéristique *de la variable aléatoire X la fonction ξ_X définie sur* $\mathbf{R}$ *par*

$$\xi_X(u) = E(e^{-2i\pi uX}).$$

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète finie,

$$\xi_X(u) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)e^{-2i\pi ux_i}.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue,

$$\xi_X(u) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi ux} f(x)\,dx.$$

Dans le cas continu, on constate que $\xi_X = Ff$ est la transformée de Fourier de la densité de probabilité. Elle existe donc toujours puisque la densité de probabilité est intégrable au sens de Lebesgue.

Proposition 42 *Soit X une variable aléatoire qui possède une espérance et une variance. Alors*

$$\begin{aligned} E(X) &= -\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{du}\xi_X(u)_{|u=0}, \\ Var(X) &= -\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{d^2}{du^2}\xi_X(u)_{|u=0} - (\frac{d}{du}\xi_X(u)_{|u=0})^2\right). \end{aligned}$$

Preuve. Dans le cas discret,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\xi_X(u) &= \sum_{i=1}^{n} -2i\pi x_i f(x_i)e^{-2i\pi ux_i} = -2i\pi E(Xe^{-2i\pi uX}), \\ \frac{d^2}{du^2}\xi_X(u) &= \sum_{i=1}^{n} -4\pi^2 x_i^2 f(x_i)e^{-2i\pi ux_i} = -4\pi^2 E(X^2 e^{-2i\pi uX}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \xi''_X(0) - (\xi'_X(0))^2 &= -4\pi^2 E(X^2) + 4\pi^2 E(X)^2 \\ &= -4\pi^2(E(X^2) - E(X)^2) \\ &= -4\pi^2 Var(X). \end{aligned}$$

Dans le cas continu, le calcul est le même, au moyen de la formule pour la dérivée de la transformée de Fourier.■

Remarque 43 *Une loi de probabilité régit le comportement d'une variable aléatoire. Cette notion abstraite est associée à la population, c'est-à-dire à l'ensemble de tous les résultats possibles d'un phénomène particulier. C'est pour cette raison que l'espérance et la variance de la loi de probabilité, qui n'ont aucun caractère aléatoire, sont appelés paramètres de la distribution de probabilité.*

2.4.4 Propriétés de l'espérance mathématique et de la variance

Résumons les principales propriétés de ces deux paramètres dans un tableau.

Changement d'origine	Changement d'échelle	Transformation affine
$E(X+c)=E(X)+c$	$E(aX)=aE(X)$	$E(aX+c)=aE(X)+c$
$Var(X+c)=Var(X)$	$Var(aX)=a^2Var(X)$	$Var(aX+c)=a^2Var(X)$
$\sigma(X+c)=\sigma(X)$	$\sigma(aX)=\lvert a\rvert\sigma(X)$	$\sigma(aX+c)=\lvert a\rvert\sigma(X)$
$\xi_{X+c}(u)=e^{-2i\pi cu}\xi_X(u)$	$\xi_{aX}(u)=\xi_X(au)$	$\xi_{aX+c}(u)=e^{-2i\pi cu}\xi_X(au)$

Définition 44 – *Une variable aléatoire X est dite* centrée *si son espérance mathématique est nulle.*
– *Une variable aléatoire X est dite* réduite *si son écart-type est égal à 1.*
– *Une variable aléatoire centrée réduite est dite* standardisée.

A n'importe quelle variable aléatoire X, on peut associer la variable standardisée

$$Z=\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}.$$

En divisant la variable centrée par son écart-type, une valeur située à un écart-type de la moyenne sera ramenée à 1, une autre située à deux écarts-types sera ramenée à 2 : l'échelle de référence, ou unité de mesure, d'une variable centrée-réduite est l'écart-type.
Les valeurs des variables centrées-réduites sont complètement indépendantes des unités de départ. Une mesure exprimée en mètres ou en centimètres donne exactement la même variable centrée-réduite. On peut ainsi faire des comparaisons entre variables de natures différentes. Si un enfant est à $+3$ écarts-types de la moyenne pour sa taille et $+1$ écart-type pour son poids, on sait qu'il est plus remarquable par sa taille que par son poids.
L'examen des variables centrées-réduites est très pratique pour déceler les valeurs "anormalement" grandes ou "anormalement" petites.
Le passage d'une variable aléatoire X à une variable standardisée est requis pour l'utilisation de certaines tables de probabilité. C'est le cas pour l'utilisation de la table de la loi normale que nous traiterons dans le prochain chapitre.

Combinaisons de plusieurs variables aléatoires

1. Somme et différence.
   Dans tous les cas,
   $$\begin{aligned} E(X+Y) &= E(X)+E(Y),\\ E(X-Y) &= E(X)-E(Y). \end{aligned}$$
   Dans le cas de variables *indépendantes* :
   $$\begin{aligned} Var(X+Y) &= Var(X)+Var(Y),\\ Var(X-Y) &= Var(X)+Var(Y). \end{aligned}$$
2. Produit. Dans le cas de variables *indépendantes*,
   $$E(XY)=E(X)E(Y).$$

3. Conséquence. Dans le cas de variables *indépendantes*,

$$\xi_{X+Y} = \xi_X \xi_Y.$$

Ceci montre que, dans le cas de variables continues indépendantes, la densité de probabilité de $X + Y$ est le *produit de convolution* des densités de probabilité de X et de Y.

Covariance de deux variables aléatoires

Lorsque deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, il existe une caractéristique qui permet de déterminer l'intensité de leur dépendance. C'est la covariance.

Définition 45 *La covariance de deux variables aléatoires X et Y est définie par*

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X)(Y - E(Y)] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Proposition 46
1. *Si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle.*
2. *Attention : La réciproque n'est pas vraie. Deux variables de covariance nulle ne sont pas obligatoirement indépendantes.*
3. *Si deux variables aléatoires sont dépendantes,*

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(X)E(Y) + Cov(X,Y), \\ Var(X+Y) &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Principales distributions de probabilités

Introduction

De nombreuses situations pratiques peuvent être modélisées à l'aide de variables aléatoires qui sont régies par des lois spécifiques. Il importe donc d'étudier ces modèles probabilistes qui pourront nous permettre par la suite d'analyser les fluctuations de certains phénomènes en évaluant, par exemple, les probabilités que tel événement ou tel résultat soit observé.
La connaissance de ces lois théoriques possède plusieurs avantages sur le plan pratique :

- Les observations d'un phénomène particulier peuvent être remplacées par l'expression analytique de la loi où figure un nombre restreint de paramètres (1 ou 2, rarement plus).
- La loi théorique agit comme modèle (idéalisation) et permet ainsi de réduire les irrégularités de la distribution empirique. Ces irrégularités sont souvent inexplicables et proviennent de fluctuations d'échantillonnage, d'imprécision d'appareils de mesure ou de tout autre facteur incontrôlé ou incontrôlable.
- Des tables de probabilités ont été élaborées pour les lois les plus importantes. Elles simplifient considérablement les calculs.

Ce cours présente trois distributions discrètes : la distribution binomiale, la distribution géométrique et la distribution de Poisson. Puis il aborde deux distributions continues : la distribution exponentielle et la distribution normale. Il importe de bien comprendre quelles sont les situations concrètes que l'on peut modéliser à l'aide de ces distributions. Viennent enfin trois distributions théoriques dont la fonction n'est pas de modéliser mais de servir d'outils dans les problèmes d'estimation et de test.

3.1 Distribution binomiale

3.1.1 Variable de Bernoulli ou variable indicatrice

Définition

Définition 47 *Une variable aléatoire discrète qui ne prend que les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$ est appelée variable de Bernoulli.*

Exemple 48 *Une urne contient deux boules rouges et trois boules vertes. On tire une boule de l'urne. La variable aléatoire X = nombre de boules rouges tirées est une variable de Bernoulli. On a : $p(X = 1) = 2/5 = p$, $p(X = 0) = 3/5 = q$.*

Plus généralement, on utilisera une variable de Bernoulli lorsqu'on effectue une épreuve qui n'a que deux issues : le succès ou l'échec. Une telle expérience est alors appelée épreuve de Bernoulli. On affecte alors 1 à la variable en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Distribution de probabilités

x	0	1
$f(x) = p(X = x)$	q	p

Paramètres de la distribution

On calcule

$$\begin{aligned} E(X) &= 0.q + 1.p = p, \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = (0^2q + 1^2p) - p^2 = p - p^2 = pq, \\ \xi_X(u) &= E(e^{-2i\pi uX}) = 1.q + e^{-2i\pi u}p = q + p\cos(2\pi u) + ip\sin(2\pi u). \end{aligned}$$

$E(X) = p$	$V(X) = pq$	$\sigma(X) = \sqrt{pq}$	$\xi_X(u) = q + pe^{-2i\pi u}$

3.1.2 Distribution binomiale

Situation concrète

a) On effectue une épreuve de Bernoulli. Elle n'a donc que deux issues : le succès avec une probabilité p ou l'échec avec une probabilité q.
b) On répète n fois cette épreuve.
c) Les n épreuves sont indépendantes entre elles, ce qui signifie que la probabilité de réalisation de l'événement "succès" est la même à chaque épreuve et est toujours égale à p.
Dans cette situation, on s'intéresse à la variable X = "nombre de succès au cours des n épreuves".

Distribution de probabilités

Appelons X_i les variables de Bernoulli associées à chaque épreuve. Si la i-ème épreuve donne un succès, X_i vaut 1. Dans le cas contraire X_i vaut 0. La somme de ces variables comptabilise donc le nombre de succès au cours des n épreuves. On a donc $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. X peut prendre $n+1$ valeurs : $0, 1, \ldots, n$.
Cherchons la probabilité d'obtenir k succès, c'est-à-dire $p(X = k)$.
La probabilité d'avoir k succès suivis de $n-k$ échecs est $p^k q^{n-k}$ car ces résultats sont indépendants les uns des autres.
La probabilité d'avoir k succès et $n-k$ échecs dans un autre ordre de réalisation est toujours $p^k q^{n-k}$. Donc tous les événements élémentaires qui composent l'événement $(X = k)$ ont même probabilité.
Combien y en a-t-il ' Autant que de façons d'ordonner les k succès par rapport aux $n-k$ échecs ' Il suffit de choisir les k places des succès parmi les n possibles et les $n-k$ échecs prendront les places restantes. Or il y a $\binom{k}{n}$ manières de choisir k places parmi n.
Finalement, on obtient

$$p(X = k) = \binom{k}{n} p^k q^{n-k}.$$

On dit que la variable aléatoire X suit une *loi binomiale de paramètres n et p*. On note $X \hookrightarrow B(n, p)$.
Remarque : L'adjectif binomial vient du fait que lorsqu'on somme toutes ces probabilités, on retrouve le développement du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

NB : La loi binomiale est tabulée en fonction des 2 paramètres n et p.

Paramètres descriptifs de la distribution

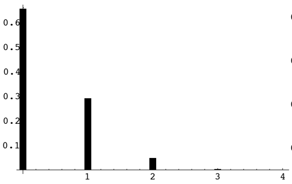
Nous savons que $X = X_1 + \cdots + X_n$ avec $E(X_i) = p$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, donc $E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = np$.
Les variables X_i sont indépendantes et $Var(X_i) = pq$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, donc $Var(X) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n) = npq$. D'autre part, les fonctions caractéristiques se multiplient, donc $\xi_X(u) = (q + pe^{-2i\pi u})^n$.

$E(X) = np$	$V(X) = npq$	$\sigma(X) = \sqrt{npq}$	$\xi_X(u) = (q + pe^{-2i\pi u})^n$

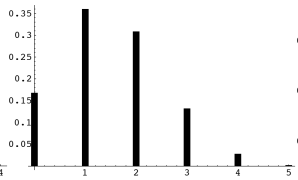
Remarque 49 *La formule donnant l'espérance semble assez naturelle. En effet, le nombre moyen de succès (qui correspond à la signification de l'espérance) est intuitivement égal au produit du nombre d'essais par la probabilité de réalisation d'un succès.*

Propriétés de la distribution binomiale

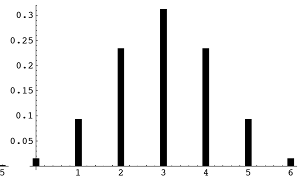
Forme de la distribution binomiale
La représentation graphique de la distribution de la loi binomiale est habituellement présentée sous la forme d'un diagramme en bâtons. Puisque la loi dépend de n et p, nous aurons diverses représentations graphiques si nous faisons varier n et/ou p comme c'est le cas pour les figures suivantes.



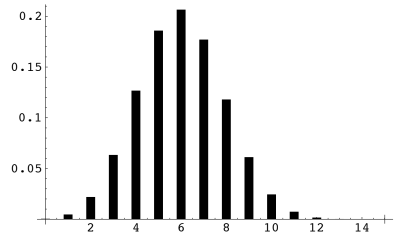
$n = 4,\ p = 0.1$



$n = 5,\ p = 0.3$



$n = 6,\ p = 0.5$



$n = 15,\ p = 0.4$

On peut effectuer plusieurs remarques à propos de ces diagrammes.
a) La forme de la distribution est symétrique si $p = 1/2$, quelque soit n.
b) Elle est dissymétrique dans le cas où $p \neq 1/2$. Si p est inférieur à 0.50, les probabilités sont plus élevées du côté gauche de la distribution que du côté droit (asymétrie positive). Si p est supérieur à $1/2$, c'est l'inverse (asymétrie négative).
c) La distribution tend à devenir symétrique lorsque n est grand. De plus, si p n'est pas trop voisin de 0 ou 1, elle s'approchera de la distribution de la loi normale que l'on verra plus loin dans ce chapitre.

Somme de deux variables binomiales
Si X_1 et X_2 sont des variables *indépendantes* qui suivent des lois binomiales $B(n_1, p)$ et $B(n_2, p)$ respectivement, alors $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale $B(n_1 + n_2, p)$.
Cette propriété s'interprète facilement : si X_1 représente le nombre de succès en n_1 épreuves identiques indépendantes et X_2 en n_2 épreuves indépendantes entre elles et indépendantes des premières avec la même probabilité de succès que les premières, alors $X_1 + X_2$ représente le nombre de succès en $n_1 + n_2$ épreuves identiques et indépendantes.

3.2 Distribution géométrique

3.2.1 Situation concrète

a) On effectue une épreuve de Bernoulli. Elle n'a donc que deux issues : le succès avec une probabilité p ou l'échec avec une probabilité $q = 1 - p$.
b) On répète l'épreuve jusqu'à l'apparition du premier succès.
c) Toutes les épreuves sont indépendantes entre elles.

Dans cette situation, on s'intéresse à la variable $X =$ "nombre de fois qu'il faut répéter l'épreuve pour obtenir le premier succès".

Remarque 50 *On est donc dans les mêmes hypothèses que pour la loi binomiale, mais le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance. On s'arrête au premier succès.*

3.2.2 Distribution de probabilités

L'ensemble des valeurs prises par X est $1, 2, 3, \ldots$. On cherche la probabilité d'avoir recours à n épreuves pour obtenir le premier succès.
Ce succès a une probabilité de réalisation de p. Puisque c'est le premier, il a été précédé de $n-1$ échecs qui ont chacun eu la probabilité q de se produire. Étant donné l'indépendance des épreuves, on peut dire que la probabilité de réalisation de $n-1$ échecs suivis d'un succès est le produit des probabilités de réalisation de chacun des résultats,

$$p(X = n) = q^{n-1}p.$$

On dit que la variable aléatoire X suit une *loi géométrique de paramètre p*. On note $X \hookrightarrow G(p)$.

Remarque 51 *L'appellation* géométrique *vient du fait qu'en sommant toutes les probabilités, on obtient une série géométrique. En effet,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

3.2.3 Paramètres descriptifs de la distribution

On calcule

$$\begin{aligned} \xi_X(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}pe^{-2i\pi un} \\ &= pe^{-2i\pi u}\sum_{k=0}^{\infty} q^k e^{-2i\pi uk} \\ &= \frac{pe^{-2i\pi u}}{1-qe^{-2i\pi u}}, \end{aligned}$$

et on en tire, en dérivant par rapport à u en $u = 0$, l'espérance et la variance.

$E(X) = 1/p$	$Var(X) = q/p^2$	$\sigma(X) = \sqrt{q}/p$	$\xi_X(u) = \frac{pe^{-2i\pi u}}{1-qe^{-2i\pi u}}$

Remarque 52 *On peut interpréter l'expression de l'espérance de façon intuitive. En effet en n épreuves, on s'attend à obtenir np succès et par conséquent, le nombre moyen d'épreuves entre deux succès devrait être $\frac{n}{np} = \frac{1}{p}$.*

3.2.4 Propriété remarquable de la distribution géométrique

La propriété la plus importante de la loi géométrique est sans doute d'être *sans mémoire*. En effet, la loi de probabilité du nombre d'épreuves à répéter jusqu'à l'obtention d'un premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli identiques indépendantes est la même quel que soit le nombre d'échecs accumulés auparavant. Mathématiquement, cela se traduit par

$$p(X > n + m | X > n) = p(X > m).$$

On comprend intuitivement que cela découle de l'indépendance des épreuves qui sont toutes identiques. La loi géométrique est la seule distribution de probabilité discrète qui possède cette propriété. En effet, si une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbf{N}$ satisfait, pour tous n, $m \in \mathbf{N}$, $p(Y > n + m|Y > n) = p(Y > m)$, alors $p(Y > m + n) = p(Y > n)p(Y > m)$. Posant $q = p(Y > 1)$, il vient $p(Y > n) = q^n$, d'où
$p(Y = n) = p(Y > n - 1) - p(Y > n) = q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1 - q)$.

3.3 Distribution de Poisson

La loi de Poisson est attribuée à Simeon D. Poisson, mathématicien français (1781-1840). Cette loi fut proposée par Poisson dans un ouvrage qu'il publia en 1837 sous le titre "Recherche sur la probabilité de jugements en matière criminelle et en matière civile".

3.3.1 Situation concrète

Beaucoup de situations sont liées à l'étude de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,....). Les phénomènes ainsi étudiés sont des phénomènes d'attente.
Pour décrire les réalisations dans le temps d'un événement donné, on peut

- soit chercher le nombre de réalisations de l'événement dans un intervalle de temps donné qui est distribué suivant une loi de Poisson.
- soit chercher le temps entre deux réalisations successives de l'événement qui est distribué suivant une loi exponentielle (voir section suivante).

On va voir que la première loi (loi de Poisson) peut être interprétée comme un cas limite d'une loi binomiale et la seconde comme un cas limite d'une loi géométrique.

3.3.2 Processus de Poisson

Précisons les hypothèses faites relativement à la réalisation de l'événement qui nous intéresse.

1. Les nombres de réalisations de l'événement au cours d'intervalles de temps disjoints sont des variables aléatoires indépendantes, c'est-à-dire que le nombre de réalisations au cours d'un intervalle de temps est indépendant du nombre de réalisations au cours d'intervalles de temps antérieurs.
2. La probabilité pour que l'événement se réalise une fois, au cours d'un petit intervalle de temps Δt, est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle et vaut $\alpha \Delta t$, où α est une valeur positive que l'on suppose constante tout au long de la période d'observation.
3. Il est très rare d'observer plus d'une fois l'événement au cours d'un petit intervalle de temps Δt, c'est-à-dire que la probabilité pour que l'événement se réalise plus d'une fois au cours de l'intervalle de temps Δt est négligeable.

Les hypothèses 1., 2., 3. caractérisent ce qu'on appelle un *processus de Poisson*. α est une constante du processus qui représente le nombre moyen de réalisations par unité de temps et que l'on appelle l'*intensité* du processus.
Sous ces hypothèses, la variable aléatoire $X =$ "nombre de fois où l'événement considéré se réalise au cours d'un intervalle de temps de durée t" est distribuée suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \alpha t$.

3.3.3 Distribution de probabilités

Nous cherchons à déterminer la loi de probabilité de la variable $X =$ "nombre de réalisations d'un événement donné pendant un intervalle de temps t", sachant que le nombre moyen de réalisations de cet événement par unité de temps est α. Or, nous connaissons déjà la loi de probabilités de la variable $Y =$ "nombre de réalisations d'un événement donné, de probabilité p, au cours de n essais". Il s'agit d'une loi binomiale $B(n, p)$.

Pour comprendre la relation entre ces deux lois, divisons l'intervalle de temps de longueur t, en n petits intervalles de temps disjoints de longueur $\Delta t = t/n$ pour n assez grand.
L'hypothèse 3. permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles il n'y a principalement que deux possibilités : l'événement se réalise une fois ou ne se réalise pas (cela sera d'autant plus vrai que n est grand). Dans chaque intervalle, la variable "nombre de réalisations de l'événement" est une variable de Bernoulli.
L'hypothèse 2. permet d'affirmer que dans chacun de ces n petits intervalles, la probabilité de réalisation de l'événement est constante et égale à $\alpha\Delta t = \alpha t/n$. Les variables de Bernoulli ont donc toutes le même paramètre $p = \alpha t/n$.
L'hypothèse 1. permet d'affirmer que les n variables de Bernoulli sont indépendantes.
La somme de ces n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = \alpha t/n$ est une variable qui suit la loi binomiale $B(n, \alpha t/n)$ et qui représente approximativement le nombre de réalisations de l'événement dans l'intervalle de temps t. Si on choisit n de plus en plus grand, on a de plus en plus d'intervalles, la probabilité de réalisations de l'événement dans chaque intervalle est de plus en plus petite et la distribution $B(n, \alpha t/n)$ se rapproche de plus en plus de la distribution que l'on cherche à déterminer, c'est-à-dire de la distribution de Poisson de paramètre αt. On conclut

Définition 53 *On peut considérer la loi de Poisson de paramètre λ comme la loi limite d'une loi binomiale $B(n, \lambda/n)$ lorsque n tend vers l'infini, le produit des paramètres $n.\lambda/n$ restant toujours constant égal à λ.*

On écrit $X \hookrightarrow P(\lambda)$.

Proposition 54 *La loi de Poisson de paramètre λ est donnée par*

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Preuve. Si Y suit une loi $B(n, \lambda/n)$, on sait que

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \binom{k}{n}(\frac{\lambda}{n})^k(1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} \\ &= (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\ &= (1 - \frac{\lambda}{n})^{n}\frac{\lambda^k}{k!}(1 - \frac{\lambda}{n})^{-k}[\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n}]. \end{aligned}$$

Chaque terme du produit entre crochets tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il y a k termes, c'est-à-dire un nombre fini. Donc le crochet tend vers 1. De même, $(1 - \frac{\lambda}{n})^{-k}$ tend vers 1. De plus,

$$\ell n((1 - \frac{\lambda}{n})^n) = n\ell n(1 - \frac{\lambda}{n}) \sim n \times (-\frac{\lambda}{n})$$

tend vers $-\lambda$ lorsque n tend vers l'infini, donc $(1 - \frac{\lambda}{n})^n$ tend vers $e^{-\lambda}$. On conclut que $P(Y = k)$ tend vers $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

Remarque 55 *Il existe des tables donnant la fonction de densité et la fonction de répartition de la loi de Poisson en fonction des différentes valeurs de λ (pour $\lambda \leq 15$).*

3.3.4 Paramètres descriptifs de la distribution

On calcule, lorsque $X \hookrightarrow P(\lambda)$,

$$\xi_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-2i\pi uk} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-2i\pi u}}.$$

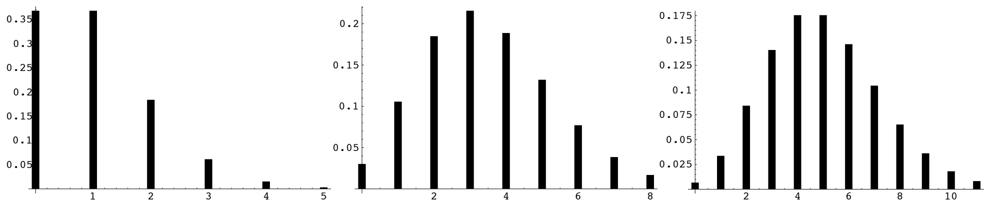
On en déduit le tableau

$E(X) = \lambda$	$Var(X) = \lambda$	$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$	$\xi_X(u) = e^{\lambda(e^{-2i\pi u}-1)}$

La loi $P(\lambda)$ est la loi limite de la loi $B(n, \lambda/n)$ lorsque n tend vers l'infini. On constate que l'espérance mathématique et la variance de la loi $B(n, \lambda/n)$ convergent vers celles de la loi $P(\lambda)$ lorsque n tend vers l'infini. Cela peut se vérifier directement, en appliquant le théorème de convergence dominée pour la mesure Peigne de Dirac (interversion d'une sommation et d'une limite).

3.3.5 Propriétés de la distribution de Poisson

Allure de la distribution



$\lambda = 1$ $\lambda = 3.5$ $\lambda = 5$

Commentaires.

- En général, le diagramme est dissymétrique par rapport à λ avec étalement vers la droite. Les valeurs élevées d'une variable de Poisson sont peu rencontrées.
- A mesure que λ augmente, la forme de la distribution tend à devenir symétrique et s'approche de celle de la loi normale que nous traiterons plus loin dans ce chapitre. Cela est vérifié pour $\lambda \geq 10$ et même acceptable pour $\lambda \geq 5$.

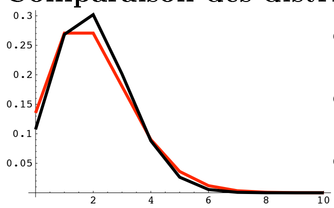
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

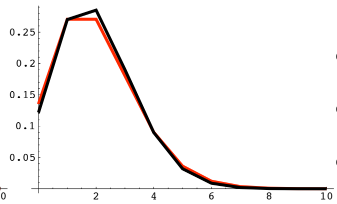
La loi binomiale dépend de deux paramètres n et p. Bien qu'il existe quelques tables, elle est n'est pas simple à utiliser. La loi de Poisson ne dépend que d'un paramètre ce qui la rend plus pratique. Il faut donc avoir toujours présent à l'esprit que, lorsque les conditions le permettent, on peut avoir intérêt à remplacer une loi binomiale par une loi de Poisson.
Lorsque n est grand et p petit, de telle façon que le produit $np = \lambda$ reste petit par rapport à n, la loi binomiale $B(n, p)$ peut être approchée par la loi de Poisson $P(\lambda)$ (revoir ce qui a été dit sur ce sujet dans le paragraphe "Distribution de probabilités"). Cette approximation s'appliquant lorsque p est petit, la loi de Poisson est appelée la loi des événements rares. En pratique, l'approximation est valable si $n > 20$, $p \leq 0.1$ et $np \leq 5$.

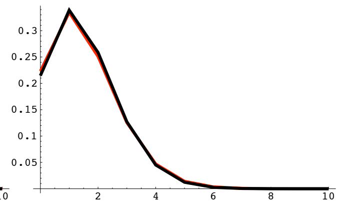
On approche la loi $B(n, p)$ par la loi $P(np)$ dès que $n > 20$, $p \leq 0.1$ et $np \leq 5$.

RÈGLE IMPORTANTE. Lorsqu'on approche une loi par une autre, on choisit le ou les paramètres de la loi approchante de manière que l'espérance (et la variance lorsqu'on a suffisamment de paramètres) de la loi approchante soit égale à l'espérance (et la variance) de la loi approchée.

Comparaison des distributions.







En rouge	$B(10, 0.2)$	$B(20, 0.1)$	$B(30, 0.05)$
En noir	$P(2)$	$P(2)$	$P(1.5)$
	mauvaise approximation	approximation acceptable	bonne approximation

Somme de deux lois de Poisson

Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires *indépendantes* qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

3.3.6 Importance pratique de la loi de Poisson

Le physicien et le technologue rencontrent la loi de Poisson dans de nombreuses circonstances.

Le comptage en radioactivité, microanalyse X, analyse SIMS...

Un détecteur compte le nombre de particules qu'il reçoit pendant un temps de comptage t_0. Ce nombre X obéit à une loi de Poisson dont le paramètre λ est le produit du flux moyen de particules α pendant le temps de comptage t_0.
Conséquence. L'espérance mathématique de X est αt_0 et l'écart-type sur X est $\sqrt{\alpha t_0}$. Il en résulte que la variabilité de X (quotient de l'espérance sur l'écart-type) devient très grande quand le nombre moyen de particules observé est petit. Si les valeurs prises par X sont proches de 10 correspondant à une espérance αt_0 proche de 10, l'écart-type est proche de 3, ce qui donne une variabilité de 30%. Ceci est parfaitement visible sur le "profil SIMS [1]" présenté à la page suivante. Le bruit devient important lorsque X est entre 10 et 15.
Dans la mesure du possible, l'expérimentateur sera alors amené à augmenter le temps de comptage pour augmenter les valeurs de X.

1. S.I.M.S. (Secondary Ions Mass Spectroscopy) : méthode permettant une analyse quantitative des impuretés dans une masse solide. Un faisceau d'ions primaires abrase le matériau. Parmi les atomes arrachés à la cible, certains sont ionisés (ions secondaires). Ils sont triés en masse au moyen d'une déflexion magnétique et comptés pendant des intervalles de temps t_0 au cours du processus d'abrasion. On obtient ainsi le profil de concentration de l'impureté dans le matériau.

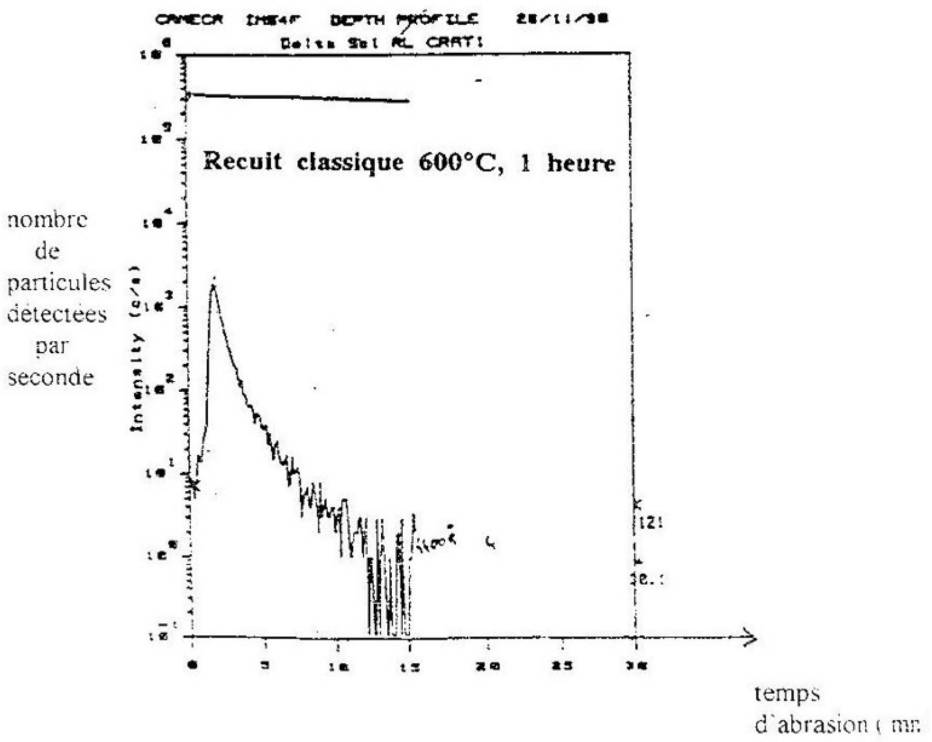
Contrôle de qualité

On effectue un contrôle de qualité sur des composants fabriqués par une unité de production. Un composant est réputé bon (ou mauvais) lorsqu'il satisfait (ou non) à des spécifications. Le critère de choix est donc qualitatif. Le taux moyen de rebuts (pièces mauvaises) est appelé p. On effectue un tirage de n pièces. La probabilité de trouver k pièces mauvaises dans cet échantillon de taille n est donnée par une loi de Poisson $P(np)$, car on peut approcher la loi binomiale par la loi de Poisson (*loi des événements rares*).
Lorsque np est petit, le rapport devient grand et la variabilité sur k rend le contrôle imprécis. Ceci explique que, dans un contrôle de qualité, la taille des échantillons tirés de la population des pièces fabriquées doit être au moins de l'ordre de 100.

Dénombrement d'événements survenant dans un espace délimité

La loi de Poisson permet de modéliser aussi bien le nombre d'événements survenant pendant un temps donné que le nombre d'événements survenant dans un espace délimité.
Par exemple, si on appelle X le nombre de particules bombardant une cible de surface S soumise à une irradiation de fluence F (mesurée en m^{-2}), alors X suit une loi $P(FS)$. FS est donc analogue au αt_0 du comptage en temps.
La loi de Poisson sert donc aussi à décrire des phénomènes de localisation spatiale et non plus seulement temporelle, c'est-à-dire qu'elle modélisera aussi bien le nombre d'accidents qui peuvent survenir en une matinée que le nombre d'accidents qui peuvent survenir sur une section donnée d'autoroute.

PROFIL S.I.M.S.



3.4 Distribution exponentielle

3.4.1 Situation concrète

On se place dans le cas d'un phénomène d'attente décrit au paragraphe 3 et on s'intéresse à la variable aléatoire qui représente le temps d'attente pour la réalisation d'un événement ou le temps d'attente entre la réalisation de deux événements successifs. Si on se place dans le cas où l'intensité α du processus de Poisson est constante, ce temps d'attente suit une loi exponentielle de paramètre α.
Exemple. Lorsque l'événement attendu est la mort d'un individu (ou la panne d'un équipement), α s'appelle le taux de mortalité (ou le taux de panne). Dire qu'il a une valeur constante, c'est supposer qu'il n'y a pas de vieillissement (ou pas d'usure s'il s'agit d'un équipement), la mort ou la panne intervenant de façon purement accidentelle.

3.4.2 Distribution de probabilité

On veut déterminer la loi de la variable T = "temps d'attente entre la réalisation de deux événements successifs" où le nombre moyen de réalisations de l'événement par unité de temps est α. Pour cela, nous allons procéder comme dans le paragraphe 3 : Si t est la longueur de l'intervalle de temps sur lequel dure notre étude, nous le divisons en n petits intervalles de longueur t/n. Appelons X la variable aléatoire représentant le nombre d'intervalles de temps que l'on doit laisser s'écouler pour obtenir la réalisation de l'événement suivant. Chaque intervalle possédant la même probabilité $\alpha t/n$ de voir l'événement se produire, X suit, par définition, la loi géométrique de paramètre $\alpha t/n$. Le temps d'attente T est alors le produit de ce nombre d'intervalles par le temps de chaque intervalle, $T = \alpha t/n \times X$.
On cherche $p(T > t_0) = p(X > nt_0/t)$, et lorsque n tend vers l'infini on obtient

$$p(T > t_0) = e^{-\alpha t_0} = \int_{t_0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha u}\, du.$$

Ceci nous permet d'affirmer que la fonction de densité de la variable T est $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ si $x > 0$, 0 sinon.

Définition 56 *La loi exponentielle de paramètre α décrit la distribution d'une variable continue X qui ne prend que des valeurs positives selon la fonction de densité $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$. On la note $Exp(\alpha)$.*

3.4.3 Paramètre descriptifs de la distribution

On vient de voir que la loi exponentielle est la loi limite d'une loi géométrique. On a $T \sim \frac{t}{n}X$ où X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{\alpha t}{n}$. Or $E(T) \sim \frac{t}{n}E(X) = \frac{t}{n}(\frac{\alpha t}{n})^{-1} = \frac{1}{\alpha}$ et $Var(T) \sim \frac{t^2}{n^2}Var(X) = \frac{t^2}{n^2}\frac{1-\frac{\alpha t}{n}}{(\frac{\alpha t}{n})^2} \sim \frac{1}{\alpha^2}$.

Proposition 57

$$E(T) = \frac{1}{\alpha}, \quad Var(T) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Remarque 58 *On peut très facilement retrouver ces résultats en effectuant un calcul direct à partir de la fonction de densité en utilisant les formules de définition de l'espérance et la variance (peut-être pourriez-vous le faire à titre d'exercice')*

3.4.4 Propriétés de la distribution exponentielle

1. Comme la loi géométrique, la loi exponentielle est sans mémoire. C'est la seule loi continue qui possède cette propriété. Elle provient bien entendu du fait que le paramètre α est constant.
2. Une somme de n variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre α n'est pas une variable de loi exponentielle mais une variable qui suit une loi gamma de paramètres n et α. Une telle loi est aussi appelée loi d'ERLANG d'ordre n. Elle représente le temps d'attente requis avant qu'un événement se réalise n fois .
3. La loi exponentielle est aussi couramment utilisée dans les problèmes de datation en géochronologie.

3.5 Distribution normale

Du point de vue historique, la nature et l'importance exceptionnelle de cette loi furent pressenties en 1773 par Abraham de Moivre lorsqu'il considéra la forme limite de la loi binomiale.
En 1772, Simon Laplace l'étudia dans sa théorie des erreurs. Mais c'est seulement en 1809 pour Carl Friedrich Gauss et en 1812 pour Simon Laplace qu'elle prit sa forme définitive. C'est ainsi qu'on l'appelle tantôt loi de Laplace, tantôt loi de Gauss, tantôt loi de Laplace-Gauss. On trouve aussi l'expression, consacrée par une longue tradition, de loi normale (ce qui ne signifie pas pour autant que les autres lois soient ń anormales ż). Elle jouit d'une importance fondamentale car un grand nombre de méthodes statistiques reposent sur elle. Ceci est lié au fait qu'elle intervient comme loi limite dans des conditions très générales.
Pour faire ressortir toute son importance et sa forme, W.J. Youden, du National Bureau of Standards, a eu l'ingénieuse idée de la présenter telle qu'elle apparaît ci-dessous.

La
loi normale
des erreurs
constitue l'une
des généralisations
les plus étendues de
la philosophie naturelle
dans l'histoire de l'humanité.
Elle est un outil précieux pour la
recherche en sciences physiques et
sociales ainsi qu'en médecine, en agriculture
et en génie. Elle est indispensable à l'analyse et à
l'interprétation des données obtenues par l'observation ou
l'expérience.

3.5.1 Situation concrète

On rencontre souvent des phénomènes complexes qui sont le résultat de causes nombreuses, d'effet faible, et plus ou moins indépendantes. Un exemple typique est celui de l'erreur commise sur la mesure d'une grandeur physique. Cette erreur résulte d'un grand nombre de facteurs tels que : variations incontrôlables de la température ou de la pression, turbulence atmosphérique, vibrations de l'appareil de mesure, etc...Chacun des facteurs a un effet faible, mais l'erreur résultante peut ne pas être négligeable. Deux mesures faites dans des conditions que l'expérimentateur considère comme identiques pourront alors donner des résultats différents. Donc dès que nous seront dans une situation où la distribution dépend de causes
- en grand nombre et indépendantes,
- dont les effets s'additionnent,
- dont aucune n'est prépondérante,

alors nous serons en présence de la distribution normale. C'est le cas, par exemple :
- En métrologie, pour la distribution des erreurs d'observation.
- En météorologie, pour la distribution de phénomènes aléatoires tels que la température et la pression.
- En biologie, pour la distribution de caractères biométriques comme la taille ou le poids d'individus appartenant à une population homogène. En technologie, pour la distribution des cotes des pièces usinées.
- En économie, pour les fluctuations accidentelles d'une grandeur économique (production, ventes, ...) autour de sa tendance, etc.....

3.5.2 Distribution de probabilité

Définition 59 *Une variable aléatoire continue suit une loi normale si l'expression de sa fonction de densité de probabilités est de la forme :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

La loi dépend des deux réels m et σ appelés paramètres de la loi normale. On la note $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Remarque 60
1. *Une fonction de densité de probabilité étant toujours positive, le paramètre σ est donc un réel strictement positif.*
2. *On démontre que f est bien une fonction de densité de probabilité car $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = 1$. Pour le démontrer on utilise que $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$ (c'est l'intégrale de Gauss).*
3. *La loi normale étant tabulée, cette expression nous sera de peu d'utilité. Il est important néanmoins de préciser à quoi correspondent m et σ.*

3.5.3 Paramètre descriptifs de la distribution

La fonction caractéristique d'une variable normale standard X vaut

$$\xi_X(u) = e^{-2i\pi m u - 2\pi^2\sigma^2 u^2}.$$

On en déduit, à l'aide de la formule qui exprime espérance et variance à partir des dérivées de la fonction caractéristique, que

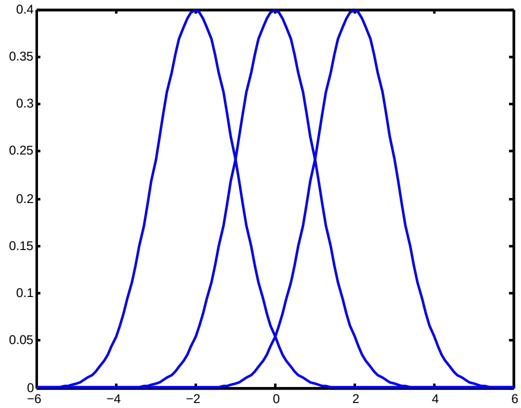
$$E(X) = m, \quad Var(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

On peut aussi faire le calcul directement, à partir de l'intégrale de Gauss.

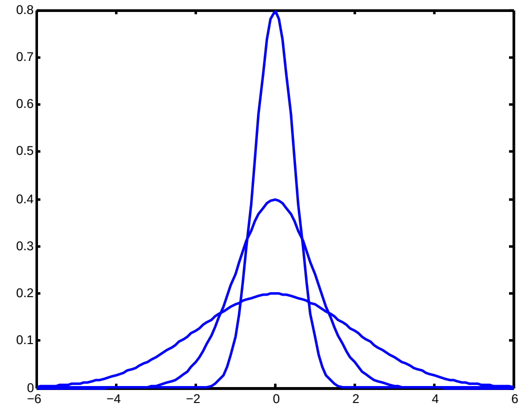
3.5.4 Propriétés de la distribution normale

Forme de la distribution normale

La fonction de densité de probabilités de la loi normale a la forme d'une ń courbe en cloche ż. En fait il ne s'agit pas d'une courbe unique mais plutôt d'une famille de courbes dépendant de m et σ.



Ecarts types identiques, espérances -2, 0, 2 différentes

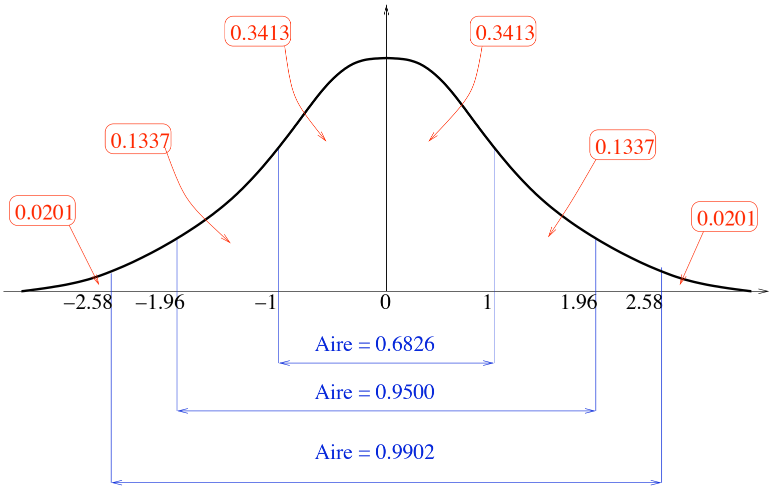


Espérances identiques, écarts types 0.5, 1, 2 différents

On peut effectuer quelques remarques à propos de ces courbes.
a) La distribution est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = m$. Donc l'aire sous la courbe de part et d'autre de cette droite est égale à 0.5.
b) La distribution est d'autant plus étalée que σ est grand.
c) L'axe des abscisses est une asymptote et l'aire sous la courbe à l'extérieur de l'intervalle$[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ est négligeable.
Pour fixer les idées, on peut indiquer que

$$\begin{aligned} p(m - \sigma < X < m + \sigma) &= 0.6826 \\ p(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) &= 0.9544 \\ p(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) &= 0.9974. \end{aligned}$$

Cela peut être visualisé sur le graphique ci-après.



Loi $\mathcal{N}(0,1)$.

d) σ représente la différence des abscisses entre le sommet de la courbe et le point d'inflexion.
e) La longueur à mi-hauteur de la courbe (L.M.H. ou en anglais F.W.H.M. Full Width Half Maximum) vaut 2.35σ. Cette distance est souvent employée par le spectroscopiste pour déterminer expérimentalement σ. Cette méthode doit cependant être utilisée avec précaution car il faut s'assurer que les "bruits" permettent d'observer correctement le "pied" de la courbe.

Somme de deux variables normales

Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes. Si X_1 suit $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et X_2 suit $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors $X_1 + X_2$ suit $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Loi normale centrée réduite ou loi normale standardisée

Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'à toute variable aléatoire X ,on pouvait associer une variable dite standardisée $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ d'espérance nulle et de variance unité (ceci résultait des propriétés de translation et de changement d'échelle).
On montre assez facilement que si on effectue cette transformation sur une variable suivant une loi normale, la variable standardisée suit encore une loi normale mais cette fois-ci de paramètres 0 et 1. La loi standardisée est appelée loi normale centrée réduite, et notée $\mathcal{N}(0,1)$.
Donc si X suit $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on pose $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$ et T suit $\mathcal{N}(0,1)$.
On peut résumer la correspondance de la façon suivante :

$X \rightharpoonup \mathcal{N}(m,\sigma)$ $E(X) = m$ $Var(X) = \sigma^2$	$T = \frac{X-m}{\sigma}$	$T \rightharpoonup \mathcal{N}(0,1)$ $E(T) = 0$ $Var(T) = 1$

Il faut garder à l'esprit que concrètement T est le nombre d'écarts-type entre la valeur de X et la moyenne.

La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est tabulée à l'aide la fonction de répartition des valeurs positives. Elle donne les valeurs de $\Phi(t) = p(0 \leq T \leq t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$ pour $t > 0$. Ce nombre représente l'aire sous la courbe représentative de la distribution et au dessus de l'intervalle $[0, t]$. Pour cette raison la table de la loi normale est aussi appelée table d'aires. Cette table ne dépend d'aucun paramètre, mais permet cependant de déterminer les probabilités de n'importe quelle distribution normale !

Comment utiliser la table d'aires ?

La première colonne de la table indique les unités et les dixièmes des valeurs de T alors que les centièmes des valeurs de T se lisent sur la ligne supérieure de la table. La valeur trouvée à l'intersection de la ligne et de la colonne adéquates donne l'aire cherchée.
a) Je cherche la valeur de A l'intersection de la ligne "0.5" et de la colonne "0.00", je lis 0.1915.
b) Je cherche la valeur de $p(-0.5 \leq T \leq 0)$. J'utilise la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées et j'en conclus que $p(-0.5 \leq T \leq 0) = p(0 \leq T \leq 0.5) = 0.1915$. Et que pensez-vous de la valeur de $p(-0.5 < T < 0)$?
c) Je cherche la valeur de $p(-2.24 \leq T \leq 1.12)$. L'aire cherchée correspond à la somme suivante

$$p(-2.24 \leq T \leq 1.12) = p(-2.24 \leq T \leq 0) + p(0 < T \leq 1.12) = 0.4875 + 0.3686 = 0.8561.$$

d) Je cherche la valeur de $p(1 \leq T \leq 2)$. L'aire cherchée correspond à la différence suivante

$$p(1 \leq T \leq 2) = p(0 \leq T \leq 2) - p(0 \leq T \leq 1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359.$$

e) Je cherche la valeur t de T telle que $p(0 \leq T \leq t) = 0.4750$. C'est le problème inverse de celui des exemples précédents. Il s'agit de localiser dans la table l'aire donnée et de déterminer la valeur de T correspondante. Je trouve $t = 1.96$.

Remarque 61 *Si la valeur de l'aire ne peut se lire directement dans les valeurs de la table, on pourra toujours effectuer une interpolation linéaire entre deux valeurs adjacentes ou prendre la valeur la plus proche.*

3.6 Approximation par des lois normales

3.6.1 Théorème central limite (ou de tendance normale)

Théorème 3 *Hypothèses : Soit une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. *Les variables sont indépendantes.*
2. *Leurs espérances mathématiques $m_1, m_2, \ldots, m_n$ et leurs variances $Var(X_1)$, $Var(X_2)$,... $Var(X_n)$ existent toutes.*
3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sup_k Var(X_k)}{\sum_{j=1}^n Var(X_j)} = 0.$

Conclusion : La distribution de la variable somme $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ se rapproche de la distribution normale lorsque n tend vers l'infini.

Idée de la preuve, dans le cas particulier où les variables X_k ont toutes la même loi.

Quitte à standardiser, on peut supposer que X_k est d'espérance nulle et de variance 1. Alors sa fonction caractéristique a un développement limité, au voisinage de $u = 0$, de la forme

$$\xi_{X_k}(u) = 1 - 2\pi^2 u^2 + \cdots$$

Posons

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}} X = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n).$$

Alors

$$\begin{aligned} \xi_Y(u) &= \xi_X(\frac{u}{\sqrt{n}}) \\ &= \xi_{X_k}(\frac{u}{\sqrt{n}})^n \\ &= (1 - \frac{2\pi^2 u^2}{n} + \cdots)^n \\ &\sim e^{-2\pi^2 u^2}, \end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique de la distribution normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque 62 *C'est ce théorème très important qui nous permet d'affirmer que la situation concrète énoncée au début de ce paragraphe nous met en présence d'une loi normale. En effet,*
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *correspondent aux différents facteurs de fluctuations.*
- *Le grand nombre de causes est assuré par le fait que n tend vers l'infini.*
- *L'indépendance parle d'elle-même.*
- *Additionner les effets revient à considérer la variable somme.*
- *Dire qu'aucun facteur n'est prépondérant est traduit par l'hypothèse (3) du théorème.*

En pratique, ceci se vérifie dès que $n \geq 30$.

3.6.2 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Une variable qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut toujours être considérée comme une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

où X_i sont des variables de Bernoulli. Les hypothèses du théorème centrale limite étant vérifiées, on peut affirmer que, lorsque n tend vers l'infini, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ tend vers une loi normale. La loi normale qui l'approche le mieux est celle qui possède la même espérance np et le même écart-type $\sqrt{npq}$, $q = 1 - p$.
Or la distribution binomiale est asymétrique sauf lorsque $p = 1/2$. La distribution normale, elle, est symétrique. L'approximation sera valable lorsque p n'est pas trop voisin de 0 ou 1 et sera d'autant meilleure que p est proche de 1/2 et que n est grand.
En pratique :

$$\boxed{\text{On approche la loi } \mathcal{B}(n, p) \text{ par la loi } \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) \text{ dès que } \begin{cases} n \geq 30 \\ np \geq 15 \\ nq \geq 15 \end{cases}}$$

3.6.3 La correction de continuïté

Cette approximation pose deux problèmes.

1. *On remplace une distribution concernant un nombre fini de valeurs par une distribution sur* $\mathbf{R}$ *tout entier.*
   Étant donné qu'à l'extérieur de l'intervalle $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ la distribution normale est presque nulle, cela ne pose pas de problèmes.
2. *On remplace une distribution discrète par une distribution continue.*
   Il nous faut donc appliquer ce qu'on appelle une *correction de continuité*. Si on nomme X la variable binomiale et Y la variable normale, on remplacera une valeur k de X par un intervalle de Y centré sur k et d'amplitude 1, ce qui signifie que l'on écrit
   $$p(X = k) \simeq p(k - \frac{1}{2} < Y < k + \frac{1}{2}).$$
   Dans la pratique lorsque n est très grand, cette correction n'est pas nécessaire. On l'effectuera cependant si on souhaite une grande précision.

Remarque 63 *Remplacer une loi binomiale par une loi normale simplifie considérablement les calculs.*

En effet les tables de la loi binomiale dépendent de deux paramètres et les valeurs de n dans ces tables sont limitées supérieurement par 20. La loi normale, elle, après standardisation ne dépend d'aucun paramètre .

3.6.4 Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

On démontre qu'on peut aussi approcher la loi de Poisson par la loi normale pour les grandes valeurs du paramètre de la loi de Poisson. La seule qui puisse convenir est celle qui a même espérance et même variance. On approche donc la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$. En pratique, cela s'applique dès que $\lambda \geq 16$.

$$\boxed{\text{On approche la loi } \mathcal{P}(\lambda) \text{ par la loi } \mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda}) \text{ dès que } \lambda \geq 16}$$

Remarque 64 *La loi de Poisson étant elle aussi une loi discrète, on peut avoir à appliquer la correction de continuité.*

3.7 Quelques conseils pour résoudre les problèmes

Voici, lorsqu'elle s'applique, une méthode de travail qui peut guider votre démarche.

1. Suite à l'énoncé du problème, identifier correctement à l'aide de mots la variable aléatoire que vous allez considérer.
2. Préciser les valeurs possibles que peut prendre cette variable.
3. Identifier correctement la loi de probabilité qu'elle suit en essayant de reconnaître dans le problème une situation type.
4. Déterminer les paramètres de la loi.
5. Utiliser les formules théoriques ou les tables pour déterminer les probabilités demandées. Face à de longs calculs et en l'absence de tables correspondant à vos ou votre paramètre, penser à approcher votre loi par une autre.

3.7.1 Quelques exercices types

Exercice 65 *Supposons qu'une tentative pour obtenir une communication téléphonique échoue (par exemple, parce que la ligne est occupée) avec la probabilité 0.25 et réussisse avec la probabilité 0.75. On suppose que les tentatives sont indépendantes les unes des autres. Quelle est la probabilité d'obtenir la communication si l'on peut effectuer trois tentatives au maximum ?*

Solution de l'exercice 65. *3 essais.*
Nous nous intéressons à la variable $X =$ ń nombre de tentatives nécessaires pour obtenir la communication ż, ce que l'on peut considérer comme le nombre d'essais à faire pour obtenir le premier succès. X suit une loi géométrique de paramètre $p = 0.75$.
On cherche à déterminer $p(X \leq 3) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)$.
– On peut obtenir la communication au 1er essai. On a pour cela une probabilité $p(X = 1) = 0.75$.
– On peut obtenir la communication au 2ème essai. On a pour cela une probabilité $p(X = 2) = 0.250.75 = 0.1875$.
– On peut obtenir la communication au 3ème essai. On a pour cela une probabilité $p(X = 3) = 0.2520.75 = 0.0469$.
Finalement la probabilité d'obtenir la communication en trois essais maximum est $0.75 + 0.1875 + 0.0469 = 0.9844$ soit 98.5 %.

Exercice 66 *Un fabricant de pièces de machine prétend qu'au plus 10% de ses pièces sont défectueuses. Un acheteur a besoin de 120 pièces. Pour disposer d'un nombre suffisant de bonnes pièces, il en commande 140. Si l'affirmation du fabricant est valable, quelle est la probabilité que l'acheteur reçoive au moins 120 bonnes pièces ?*

Solution de l'exercice 66. *Bonnes pièces.*
Appelons X la variable aléatoire correspondant au "nombre de bonnes pièces dans le lot de 140 pièces".
X prend ses valeurs entre 0 et 140. De plus pour chaque pièce, on n'a que deux éventualités : elle est bonne ou elle est défectueuse. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est 0.1. Par conséquent elle est bonne avec la probabilité 0.9. On est donc dans une situation type : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(140, 0.9)$ de paramètres $n = 140$ et $p = 0.9$.
On veut déterminer la probabilité que l'acheteur reçoive au moins 120 bonnes pièces sur les 140, soit $X \geq 120$. A priori, il nous faudrait calculer la somme des probabilités $p(X = 120) + p(X = 121) + \cdots + p(X = 140)$, ce qui serait épouvantablement long. On approxime donc la loi binomiale par une loi tabulée.
Comme $n \geq 30$, $np = 126 \geq 15$ et $nq = 14$, on pourra approcher la loi binomiale par une loi normale. On choisit la loi normale qui a la même espérance et le même écart-type. Donc X qui suit la loi $\mathcal{B}(140, 0.9)$ sera approchée par Y qui suit la loi $\mathcal{N}(126, 3.55)$.
Pour remplacer une loi discrète par une loi continue, il est préférable d'utiliser la correction de continuité,

$$p(X \geq 120) \simeq p(Y > 119.5).$$

On se ramène enfin à la loi normale centrée réduite. On pose $T = \frac{Y-126}{3.55}$, et

$$\begin{aligned} p(Y > 119.5) &= p(T > \frac{119.5 - 126}{3.55}) = p(T > -1.83) \\ &= p(T < 1.83) = 0.5 + \Phi(1.83) = 0.97. \end{aligned}$$

Conclusion : l'acheteur a 97 chances sur 100 de recevoir 120 bonnes pièces sur les 140 achetées.

Exercice 67 *Les statistiques antérieures d'une compagnie d'assurances permettent de prévoir qu'elle recevra en moyenne 300 réclamations durant l'année en cours. Quelle est la probabilité que la compagnie reçoive plus de 350 réclamations pendant l'année en cours ?*

Solution de l'exercice 67. *Réclamations.*
La variable X qui nous intéresse est le "nombre de réclamations reçues pendant une année". Il s'agit du nombre de réalisations d'un événement pendant un intervalle de temps donné. X suit donc une loi de Poisson. Le nombre moyen de réalisations dans une année est 300. Cette valeur moyenne est aussi le paramètre de la loi de Poisson. Donc X suit la loi $\mathcal{P}(300)$.
On cherche à déterminer $p(X > 350)$. Il n'y a pas de table de la loi de Poisson pour cette valeur du paramètre. Il nous faut donc approcher X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(300)$ par Y qui suit la loi normale de même espérance et de même écart-type, c'est-à-dire $\mathcal{N}(300, \sqrt{300})$.
Ici aussi, on remplace une loi discrète par une loi continue. Il faut donc appliquer la correction de continuité

$$p(X > 350) = p(X \geq 351) \simeq p(Y > 350.5).$$

On se ramène finalement à la loi normale centrée réduite. On pose $T = \frac{Y-300}{\sqrt{300}}$.

$$p(Y > 350.5) = p(T > \frac{350.5 - 300}{\sqrt{300}}) = p(T > 2.92) = 0.5 - \Phi(2.92) = 0.0017.$$

La compagnie d'assurances a donc 0.17% de chances de recevoir plus de 350 réclamations en un an.

Exercice 68 *Le nombre moyen de clients qui se présentent à la caisse d'un supermarché sur un intervalle de 5 minutes est de 10. Quelle est la probabilité qu'aucun client ne se présente à la caisse dans un intervalle de deux minutes (deux méthodes possibles) ?*

Solution de l'exercice 68. *Solution $n^0 1$.*
Considérons la variable aléatoire $X =$ "nombre de clients se présentant à la caisse dans un intervalle de deux minutes". Nous reconnaissons une situation type et la variable X suit une loi de Poisson. Vu qu'en moyenne 10 clients se présentent en 5 mn, l'intensité α du processus est de 2 clients par minute, $\alpha = 2$. Or le paramètre de la loi de Poisson est αt_0, t_0 étant ici 2 minutes. D'où $\lambda = 4$.
On cherche à calculer $p(X = 0)$. D'après la formule du cours, $p(X = 0) = e^{-\lambda} = e^{-4} = 0.018$.

Solution de l'exercice 68. *Solution $n^0 2$.*
Considérons à présent la question sous un autre angle en s'intéressant au temps d'attente Y entre deux clients. Le cours nous dit que la loi suivie par une telle variable est une loi exponentielle. Son paramètre α est l'intensité du processus de Poisson soit ici $\alpha = 2$. Y suit donc la loi $Exp(2)$.
Sa fonction de densité est $2e^{-2x}$ pour $x > 0$ exprimé en minutes. On en déduit que

$$p(Y \geq 2) = \int_2^{+\infty} 2e^{-2x}\, dx = [-e^{-2x}]_2^{+\infty} = e^{-4} = 0.018.$$

3.8 Distributions dérivant du modèle gaussien

Les distributions que nous allons étudier sont importantes non pas pour représenter des modèles théoriques de séries statistiques comme les précédentes, mais en raison du rôle qu'elles jouent dans les problèmes d'estimation ou de tests que nous verrons par la suite. Pour l'instant leurs définitions peuvent sembler complexes, notamment parce que la notion de ń degrés de liberté ż n'a pas encore été précisée. Pour le moment, il importe simplement de connaître leur définition et de savoir lire les tables correspondantes.

3.8.1 La distribution du χ^2 de Pearson

Elle a été découverte en 1905 par le mathématicien britannique Karl Pearson (1857-1936) qui travailla également sur les problèmes de régression avec le généticien Sir Francis Galton. Cette distribution (qui se prononce khi-deux) est très importante pour tester l'ajustement d'une loi théorique à une distribution expérimentale (test du χ^2) et pour déterminer la loi de la variance d'un échantillon.

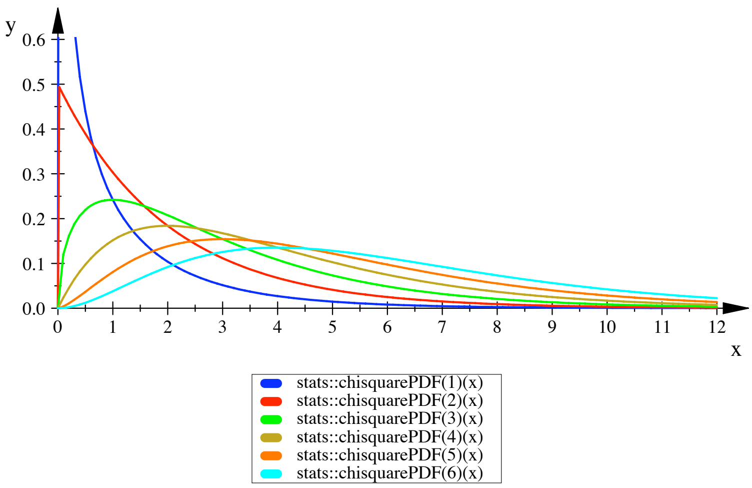
Définition 69 *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes qui suivent toute la loi normale centrée réduite, alors la quantité $X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ est une variable aléatoire distribuée selon la loi du χ^2 à n degrés de liberté.*

On note $X \rightharpoonup \chi^2_n$.

Forme de la distribution

L'expression de la densité de probabilités étant très compliquée et d'aucun intérêt pour nous, nous ne la donnons pas ici.
La distribution du χ^2 est continue à valeurs positives et présente un étalement sur le côté supérieur. Elle ne dépend que du nombre de degrés de liberté n.

Ci-dessous, densité de χ^2_n pour $n = 1, \ldots, 6$.



Paramètres descriptifs

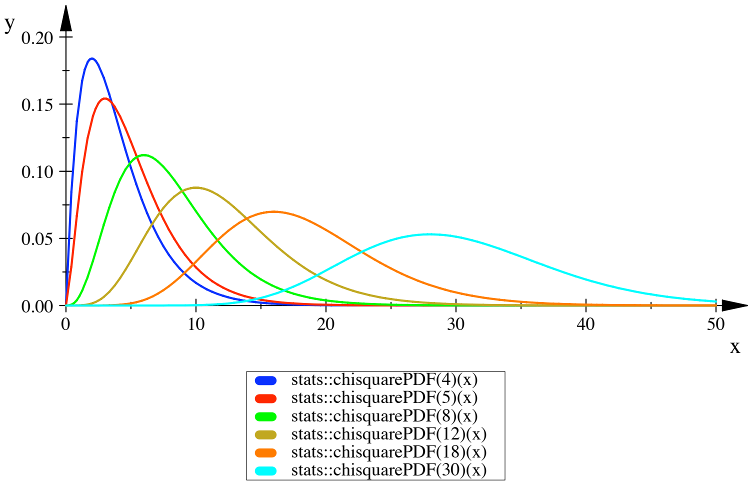
$$\mathrm{E(X) = n} \ , \quad \mathrm{V(X) = 2n.}$$

Somme de deux variables qui suivent une loi du χ^2

Si $X_1 \rightharpoonup \chi^2_{n_1}$ et $X_2 \rightharpoonup \chi^2_{n_2}$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \rightharpoonup \chi^2_{n_1+n_2}$.

Approximation par une loi normale

A mesure que n augmente, la loi du χ^2 tend vers la loi normale, comme on peut le constater sur le graphique ci-dessous.



Densité de χ^2_n pour $n = 4,\ 5,\ 8,\ 12,\ 18,\ 30$.

En pratique, on peut considérer que pour $n \geq 30$, on peut remplacer la loi du χ^2 à n degrés de liberté par la loi normale $\mathcal{N}(n, \sqrt{2n})$.

Utilisation de la table de Pearson

Pour des raisons de commodité, au lieu de donner la table des fonctions de répartition des variables aléatoires χ^2_n pour les différentes valeurs de n, on donne, en fonction de n (nombre de degrés de liberté) et d'une probabilité α que l'on peut choisir, la valeur $\chi^2_{\alpha,n}$ définie par $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,n}) = \alpha$. α est un seuil et a en fait une signification particulière dans les problèmes d'estimation et de tests. Il sera défini ultérieurement.

3.8.2 La distribution de Fisher-Snedecor

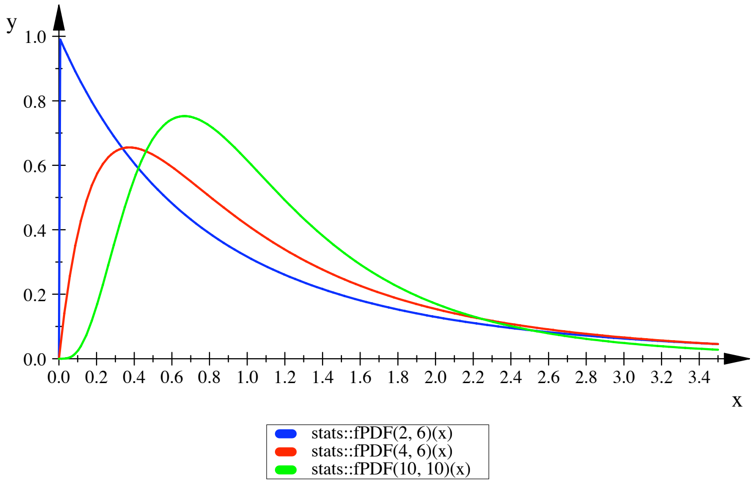
Cette distribution fut découverte par l'anglais Fisher en 1924 puis tabulée par Snédecor en 1934. Elle interviendra lors des comparaisons des variances de deux échantillons (test d'hypothèse F).

Définition 70 *Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi de khi-deux de degrés de liberté respectifs n_1 et n_2, alors la quantité $F = \dfrac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$ est une variable aléatoire qui suit la loi de Fisher-Snedecor à n_1 et n_2 degrés de liberté.*

On note $F \rightharpoonup F_{n_1,n_2}$. Cette variable ne prend que des valeurs positives.

Forme de la distribution

On n'écrit pas ici l'expression de la fonction de densité, compliquée et inutile pour nous. Les formes de distribution dépendent de n_1 et n_2 et sont dissymétriques.
A mesure que les valeurs n_1 et n_2 augmentent, la loi de Fisher tend vers une loi normale.



Densité de F pour $(n_1, n_2) = (2, 6)$, (4,6), (10,10).

Utilisation de la table de la distribution de Fisher

Les valeurs tabulées de la variable F dépendent d'un seuil α que l'on peut choisir et des nombres de degré de liberté n_1 et n_2. La table donne la valeur F_{α,n_1,n_2} définie par
$P(F > F_{\alpha,n_1,n_2}) = \alpha$.

Remarque 71 *Il faut faire attention à l'ordre de n_1 et n_2. n_1 représente le nombre de degrés de liberté du* numérateur *et n_2 celui du* dénominateur *et ne peuvent être intervertis.*

Remarque 72 *Le nombre G_{α,n_1,n_2} tel que $P(F < G_{\alpha,n_1,n_2}) = \alpha$ est l'inverse de F_{α,n_2,n_1}.*

En effet, si une variable X suit la loi F_{n_1,n_2}, alors $1/X$ suit la loi F_{n_2,n_1}.

3.8.3 La distribution de Student

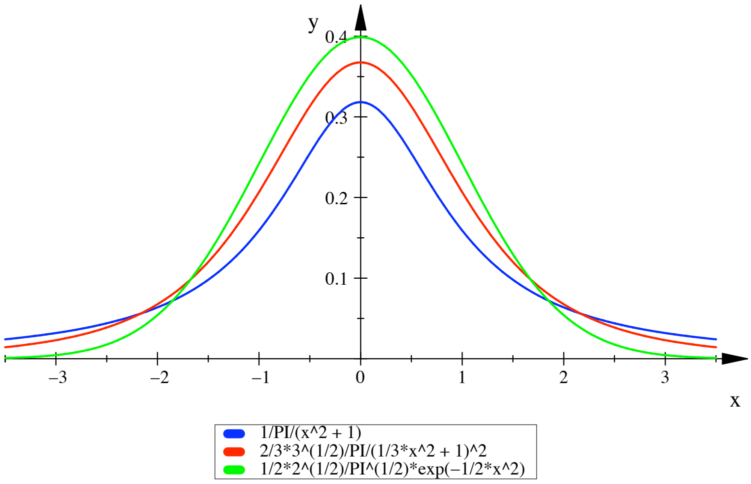
Student est le pseudonyme de V.S Gosset, 1908.

Définition 73 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, la première étant distribuée selon une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et la deuxième selon une loi de khi-deux à n degrés de liberté. La quantité $T = \dfrac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}$ est une variable aléatoire qui suit une* loi de Student à n degrés de liberté.

On écrit $T \rightharpoonup T_n$.

Allure de la distribution

La densité de probabilité est de forme complexe et nous n'en aurons jamais besoin.
La distribution est symétrique par rapport à l'origine et un peu plus aplatie que la distribution normale centrée réduite. Elle ne dépend que de la valeur n qui est son nombre de degrés de liberté.



Densité de T_n pour $n = 1$, 3 et densité de la loi normale standard.

Paramètres descriptifs

On a $E(T_n) = 0$ si $n > 1$ et $Var(T_n) = \frac{n}{n-2}$ si $n > 2$.

Approximation par la loi normale

A mesure que n augmente, la distribution de Student à n degrés de liberté se rapproche de plus en plus de celle de celle de la loi normale centrée réduite.
En pratique : si $T \rightharpoonup T_n$ pour $n \geq 30$, on pourra écrire que $T \rightharpoonup \mathcal{N}(0, 1)$.

Tables de la loi de Student

Les valeurs tabulées de la variable T dépendent d'un seuil α que l'on peut choisir et du nombre de degré de liberté n. La table donne la valeur $t_{\alpha,n}$ définie par $P(|T| > t_{\alpha,n}) = \alpha$.

Chapitre 4

Tables

LOI DE POISSON $(0.1 \leq \lambda \leq 1)$

La table donne, pour k entier et λ réel, $p_k = P(X = k)$ et $\sum p_k = P(X \leq k)$.

k	$\lambda = 0.1$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 0.2$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 0.3$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 0.4$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 0.5$ p_k	$\sum p_k$
0	0.9048	0.9048	0.8187	0.8187	0.7408	0.7408	0.6703	0.6703	0.6065	0.6065
1	0.0905	0.9953	0.1637	0.9825	0.2222	0.9631	0.2681	0.9384	0.3033	0.9098
2	0.0045	0.9998	0.0164	0.9989	0.0333	0.9964	0.0536	0.9921	0.0758	0.9856
3	0.0002	1	0.0011	0.9999	0.0033	0.9997	0.0072	0.9992	0.0126	0.9982
4	0	1	0.0001	1	0.0003	1	0.0007	0.9999	0.0016	0.9998
5			0	1	0	1	0.0001	1	0.0002	1

k	$\lambda = 0.6$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 0.7$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 0.8$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 0.9$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 1$ p_k	$\sum p_k$
0	0.5488	0.5488	0.4966	0.4966	0.4493	0.4493	0.4066	0.4066	0.3679	0.3679
1	0.3293	0.8781	0.3476	0.8442	0.3595	0.8088	0.3659	0.7725	0.3679	0.7358
2	0.0988	0.9769	0.1217	0.9659	0.1438	0.9526	0.1647	0.9371	0.1839	0.9197
3	0.0198	0.9966	0.0284	0.9942	0.0383	0.9909	0.0494	0.9865	0.0613	0.9810
4	0.0030	0.9996	0.0050	0.9992	0.0077	0.9986	0.0111	0.9977	0.0153	0.9963
5	0.0004	1	0.0007	0.9999	0.0012	0.9998	0.0020	0.9997	0.0031	0.9994
6	0	1	0.0001	1	0.0002	1	0.0003	1	0.0005	0.9999
7	0	1	0	1	0	1	0	1	0.0001	1

LOI DE POISSON $(2 \leq \lambda \leq 6)$

La table donne, pour k entier et λ réel, $p_k = P(X = k)$ et $\sum p_k = P(X \leq k)$.

k	$\lambda = 2$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 3$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 4$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 5$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 6$ p_k	$\sum p_k$
0	0.1353	0.1353	0.0498	0.0498	0.0183	0.0183	0.0067	0.0067	0.0025	0.0025
1	0.2707	0.4060	0.1494	0.1991	0.0733	0.0916	0.0337	0.0404	0.0149	0.0174
2	0.2707	0.6767	0.2240	0.4232	0.1465	0.2381	0.0842	0.1247	0.0446	0.0620
3	0.1804	0.8571	0.2240	0.6472	0.1954	0.4335	0.1404	0.2650	0.0892	0.1512
4	0.0902	0.9473	0.1680	0.8153	0.1954	0.6288	0.1755	0.4405	0.1339	0.2851
5	0.0361	0.9834	0.1008	0.9161	0.1563	0.7851	0.1755	0.6160	0.1606	0.4457
6	0.0120	0.9955	0.0504	0.9665	0.1042	0.8893	0.1462	0.7622	0.1606	0.6063
7	0.0034	0.9989	0.0216	0.9881	0.0595	0.9489	0.1044	0.8666	0.1377	0.7440
8	0.0009	0.9998	0.0081	0.9962	0.0298	0.9786	0.0653	0.9319	0.1033	0.8472
9	0.0002	1	0.0027	0.9989	0.0132	0.9919	0.0363	0.9682	0.0688	0.9161
10	0	1	0.0008	0.9997	0.0053	0.9972	0.0181	0.9863	0.0413	0.9574
11	0	1	0.0002	0.9999	0.0019	0.9991	0.0082	0.9945	0.0225	0.9799
12	0	1	0.0001	1	0.0006	0.9997	0.0034	0.9980	0.0113	0.9912
13	0	0	0	1	0.0002	0.9999	0.0013	0.9993	0.0052	0.9964
14	0	0	0	1	0.0001	1	0.0005	0.9998	0.0022	0.9986
15	0	0	0	0	0	1	0.0002	0.9999	0.0009	0.9995
16	0	0	0	0	0	1	0	1	0.0003	0.9998
17	0	0	0	0	0	1	0	1	0.0001	0.9999
18	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

LOI DE POISSON ($7 \leq \lambda \leq 11$)

La table donne, pour k entier et λ réel, $p_k = P(X = k)$ et $\sum p_k = P(X \leq k)$.

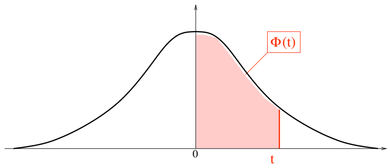
k	$\lambda = 7$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 8$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 9$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 10$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 11$ p_k	$\sum p_k$
0	0.0009	0.0009	0.0003	0.0003	0.0001	0.0001	0	0	0	0
1	0.0064	0.0073	0.0027	0.0030	0.0011	0.0012	0.0005	0.0005	0.0002	0.0002
2	0.0223	0.0296	0.0107	0.0138	0.0050	0.0062	0.0023	0.0028	0.0010	0.0012
3	0.0521	0.0818	0.0286	0.0424	0.0150	0.0212	0.0076	0.0103	0.0037	0.0049
4	0.0912	0.1730	0.0573	0.0996	0.0337	0.0550	0.0189	0.0293	0.0102	0.0151
5	0.1277	0.3007	0.0916	0.1912	0.0607	0.1157	0.0378	0.0671	0.0224	0.0375
6	0.1490	0.4497	0.1221	0.3134	0.0911	0.2068	0.0631	0.1301	0.0411	0.0786
7	0.1490	0.5987	0.1396	0.4530	0.1171	0.3239	0.0901	0.2202	0.0646	0.1432
8	0.1304	0.7291	0.1396	0.5925	0.1318	0.4557	0.1126	0.3328	0.0888	0.2320
9	0.1014	0.8305	0.1241	0.7166	0.1318	0.5874	0.1251	0.4579	0.1085	0.3405
10	0.0710	0.9015	0.0993	0.8159	0.1186	0.7060	0.1251	0.5830	0.1194	0.4599
11	0.0452	0.9467	0.0722	0.8881	0.0970	0.8030	0.1137	0.6968	0.1194	0.5793
12	0.0263	0.9730	0.0481	0.9362	0.0728	0.8758	0.0948	0.7916	0.1094	0.6887
13	0.0142	0.9872	0.0296	0.9658	0.0504	0.9261	0.0729	0.8645	0.0926	0.7813
14	0.0071	0.9943	0.0169	0.9827	0.0324	0.9585	0.0521	0.9165	0.0728	0.8540
15	0.0033	0.9976	0.0090	0.9918	0.0194	0.9780	0.0347	0.9513	0.0534	0.9074
16	0.0014	0.9990	0.0045	0.9963	0.0109	0.9889	0.0217	0.9730	0.0367	0.9441
17	0.0006	0.9996	0.0021	0.9984	0.0058	0.9947	0.0128	0.9857	0.0237	0.9678
18	0.0002	0.9999	0.0009	0.9993	0.0029	0.9976	0.0071	0.9928	0.0145	0.9823
19	0.0001	1	0.0004	0.9997	0.0014	0.9989	0.0037	0.9965	0.0084	0.9907
20	0	1	0.0002	0.9999	0.0006	0.9996	0.0019	0.9984	0.0046	0.9953
21	0	1	0.0001	1	0.0003	0.9998	0.0009	0.9993	0.0024	0.9977
22	0	1	0	1	0.0001	0.9999	0.0004	0.9997	0.0012	0.9990
23	0	1	0	1	0	1	0.0002	0.9999	0.0006	0.9995
24	0	1	0	1	0	1	0.0001	1	0.0003	0.9998
25	0	1	0	1	0	1	0	1	0.0001	0.9999
26	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

LOI DE POISSON ($12 \leq \lambda \leq 16$)

La table donne, pour k entier et λ réel, $p_k = P(X = k)$ et $\sum p_k = P(X \leq k)$.

k	$\lambda = 12$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 13$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 14$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 15$ p_k	$\sum p_k$	$\lambda = 16$ p_k	$\sum p_k$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.0001	0.0001	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.0004	0.0005	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0	0	0	0
3	0.0018	0.0023	0.0008	0.0011	0.0004	0.0005	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
4	0.0053	0.0076	0.0027	0.0037	0.0013	0.0018	0.0006	0.0009	0.0003	0.0004
5	0.0127	0.0203	0.0070	0.0107	0.0037	0.0055	0.0019	0.0028	0.0010	0.0014
6	0.0255	0.0458	0.0152	0.0259	0.0087	0.0142	0.0048	0.0076	0.0026	0.0040
7	0.0437	0.0895	0.0281	0.0540	0.0174	0.0316	0.0104	0.0180	0.0060	0.0100
8	0.0655	0.1550	0.0457	0.0998	0.0304	0.0621	0.0194	0.0374	0.0120	0.0220
9	0.0874	0.2424	0.0661	0.1658	0.0473	0.1094	0.0324	0.0699	0.0213	0.0433
10	0.1048	0.3472	0.0859	0.2517	0.0663	0.1757	0.0486	0.1185	0.0341	0.0774
11	0.1144	0.4616	0.1015	0.3532	0.0844	0.2600	0.0663	0.1848	0.0496	0.1270
12	0.1144	0.5760	0.1099	0.4631	0.0984	0.3585	0.0829	0.2676	0.0661	0.1931
13	0.1056	0.6815	0.1099	0.5730	0.1060	0.4644	0.0956	0.3632	0.0814	0.2745
14	0.0905	0.7720	0.1021	0.6751	0.1060	0.5704	0.1024	0.4657	0.0930	0.3675
15	0.0724	0.8444	0.0885	0.7636	0.0989	0.6694	0.1024	0.5681	0.0992	0.4667
16	0.0543	0.8987	0.0719	0.8355	0.0866	0.7559	0.0960	0.6641	0.0992	0.5660
17	0.0383	0.9370	0.0550	0.8905	0.0713	0.8272	0.0847	0.7489	0.0934	0.6593
18	0.0255	0.9626	0.0397	0.9302	0.0554	0.8826	0.0706	0.8195	0.0830	0.7423
19	0.0161	0.9787	0.0272	0.9573	0.0409	0.9235	0.0557	0.8752	0.0699	0.8122
20	0.0097	0.9884	0.0177	0.9750	0.0286	0.9521	0.0418	0.9170	0.0559	0.8682
21	0.0055	0.9939	0.0109	0.9859	0.0191	0.9712	0.0299	0.9469	0.0426	0.9108
22	0.0030	0.9970	0.0065	0.9924	0.0121	0.9833	0.0204	0.9673	0.0310	0.9418
23	0.0016	0.9985	0.0037	0.9960	0.0074	0.9907	0.0133	0.9805	0.0216	0.9633
24	0.0008	0.9993	0.0020	0.9980	0.0043	0.9950	0.0083	0.9888	0.0144	0.9777
25	0.0004	0.9997	0.0010	0.9990	0.0024	0.9974	0.0050	0.9938	0.0092	0.9869
26	0.0002	0.9999	0.0005	0.9995	0.0013	0.9987	0.0029	0.9967	0.0057	0.9925
27	0.0001	0.9999	0.0002	0.9998	0.0007	0.9994	0.0016	0.9983	0.0034	0.9959
28	0	1	0.0001	0.9999	0.0003	0.9997	0.0009	0.9991	0.0019	0.9978
29	0	1	0.0001	1	0.0002	0.9999	0.0004	0.9996	0.0011	0.9989
30	0	1	0	1	0.0001	0.9999	0.0002	0.9998	0.0006	0.9994
31	0	1	0	1	0	1	0.0001	0.9999	0.0003	0.9997
32	0	1	0	1	0	1	0	1	0.0001	0.9999
33	0	1	0	1	0	1	0	1	0.0001	0.9999

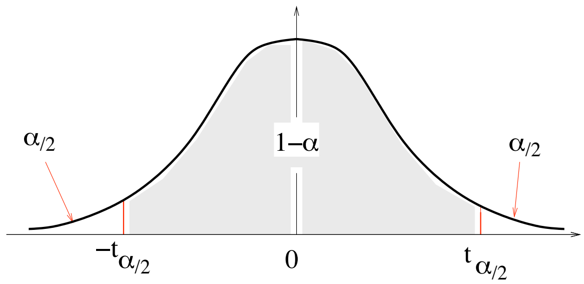
LOI DE LAPLACE-GAUSS



La table donne $\Phi(t) = P(0 < X < t)$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4.0	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

LOI DE STUDENT



La table donne $t_{\alpha/2}$ tel que $P(|T_\nu| > t_{\alpha/2}) = \alpha$.

$\nu \setminus \alpha$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.82	63.65	636.6
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.59
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.92
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Bibliographie

[1] N. Bouleau, Probabilités de l'ingénieur, Hermann, 1986.
[2] S. M. Ross, Initiation aux probabilités", PPUR, 1987.
[3] D. Revus, Probabilités, Hermann 1994.
[4] Philippe Barbe et Michel Ledoux, Probabilité, 2007, EDP Sciences.
[5] Hervé Carrieu, Probabilité : Exercices corrigés, 2008, EDP Sciences