République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

Polycopié de cours

Présentée aux étudiants de la deuxième année science de la matière

Licence Académique en Chimie

Par

Dr. Aissaoui Fatima

Intitulé

Module de mathématiques Appliquées

Janvier 2017

Table des matières

Préface

Ce polycopié est destiné aux étudiants de deuxieme année science de la matière et présente le contenu d'un cours de mathématiques appliquées conforme aux programmes d'enseignement du canevas. L'objectif de ce cours s'inscrit d'une part dans la continuité du module de mathématiques 1 et 2 enseignés en 1^{ere} année et d'autre part, il vise à faire acquérir voire doter l'étudiant des connaissances de base concernant le calcul d'intégrales ainsi que les méthodes menant à la résolution d'équations différentielles nécessaires pour la résolution des problèmes de chimie.

Ce polycopié est structuré comme suit :

-Le chapitre 1 est dédié à un rappel de quelques résultats sur les intégrales de Riemann et sur le calcul des primitives avec quelques exemples. Nous présenterons ensuite les intégrales doubles et triples et nous terminons par des applications sur le calcul d'aires et volumes.

- Nous traitons au chapitre 2 la notion d'intégrales impropres. Nous étudierons les intégrales de fonctions définies sur un intervalle non borné ainsi que les intégrales de fonctions définies sur un intervalle bornné, infinies à l'une des extrémités.

- Le chapitre 3 est consacré aux équations aux dérivées partielles du 1^{er} et $2^{ème}$ ordre.

- Au chapitre 4 nous discuterons la notion des séries. A travers ce chapitre nous étudierons plusieurs notions telles que les séries numériques, les suites et séries de fonctions, les séries entières, pour enfin se dédier aux séries de Fourier.

- Enfin, dans les deux derniers chapitres 5 et 6 nous abordons la notion de transformation de Fourier et la transformation de Laplace. Ces chapitres proposent donc une étude de leurs propriétés ainsi que leurs applications dans la résolution d'équations différentielles.

Chapitre 1

Intégrales simples et multiples

1.1 Intégrale de Riemann

Le but de ce chapitre est d'introduire les sommes de Riemann, cette notion se rattache à la notion d'aire en sommant de petits élèments géométriques. Un autre objectif est le calcul de limites, les sommes de Riemann peuvent être vue comme un outil de calcul de limites. On établit ensuite le lien entre cette intégration et les primitives, pour enfin se dédier à la pratique du calcul intégral.

Subdivision

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 *On appelle subdivision de* $[a, b]$ *une suite finie strictement croissante* $\delta = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *de points de* $[a, b]$ *, où* $a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b$ *et* n *un entier naturel quelconque.*

Définition 1.2 *Le réel strictement positif* $h(\delta)$ *où* $h(\delta) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ *est dit le pas de la subdivision.*

Remarque 1.1 *Si le pas est uniforme c'est-à-dire constant, on dira que la subdivision est équidistante et on a* $h = \frac{b-a}{n}$.

Définition 1.3 *On dit que la fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est bornée s'il existe* $M > 0$, *telque* $|f(x)| < M$, $\forall x \in [a, b]$.

Sommes de Darboux

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction bornée et $\delta = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. Posons

$$\begin{aligned} m_i(f, \delta) &= m_i(f) = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \\ M_i(f, \delta) &= M_i(f) = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x). \end{aligned}$$

Définition 1.4 *On appelle somme de Darboux inferieure (resp. supérieure) de* f *relativement à la subdivision* δ *le nombre* s *(resp.* S*) donnée par les relations*

$$\begin{aligned} s &= s(f, \delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \\ &\quad et \\ S &= S(f, \delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Proposition 1.1 *on a* $s(f, \delta) \leq S(f, \delta)$

posons $s^-(f) = \sup s(f, \delta)$ et $S^+(f) = \inf S(f, \delta)$.

Définition 1.5 *Une fonction bornée* f *est dite Riemann–intégrable sur* $[a, b]$ *si* $s^-(f)$ *coïncide avec* $S^+(f)$. *Ce nombre est alors appellé l'intégrale de Riemann de* f *sur* $[a, b]$, *et on le note* $\int_a^b f(x)\, dx$.

Théorème 1.1 *Toute fonction monotone ou continue sur un intervalle* $[a, b]$ *est Riemann-intégrable.*

Propriétés de l'intégrale

1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. (Relation de Chasles.)

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

3) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

4) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Linéarité de l′intégrale)

5) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. (Positivité de l′intégrale)

6) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

7) $|f|$ est Riemann-intégrables, alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Théorème 1.2 (de la moyenne) *Soit $f \in C([a,b])$. Alors*

$$\exists c \in \,]a,b[\, : \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

Primitive d'une fonction

Définition 1.6 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si*

1) *F est dérivable sur I.*

2) *$F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.*

Proposition 1.2 *Si F et G sont deux primitives de f, alors $F - G$ est une constante sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$.*

Théorème 1.3 *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, possède une primitive $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ et de plus $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.*

Exemple 1.1 *Calculer l'intégrale suivante* $I = \int(4x^3 + shxdx + \sin 2xdx\ )dx$*. On a*

$$\begin{aligned} I &= \int 4x^3dx + \int shxdx + \int \sin 2xdx \\ &= 4\int x^3dx + \int shxdx + \frac{1}{2}\int 2\sin 2xdx \\ &= x^4 + chx - \frac{1}{2}\cos 2x + c. \end{aligned}$$

Intégration par parties

Proposition 1.3 *Pour deux fonctions dérivables* f, g *sur l'intervalle* $[a, b]$ *, on a :*

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int\limits_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Exemple 1.2 *Calculer l'intégrale suivante*

$$I = \int_0^1 \ln(x+1)\ \ dx$$

Posons $u = \ln(x+1) \Rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$ *et* $v' = 1 \Rightarrow v = x$*, ainsi*

$$\begin{aligned} I &= [(x)\ \ \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}\ dx \\ &= \ln 2 - \left[\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{x+1}\right] \\ &= \ln 2 - [x - \ln(x+1)]_0^1 = 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

Intégration par Changement de variable

Proposition 1.4 *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *et* $\varphi : J \to I$ *une fonction bijective et dérivable. Pour tout* a *,*$b \in J$ *on a*

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)t.$$

Exercise 1 *Calcul de* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \sin t$ et $dx = \cos t dt$. De plus $t = \arcsin x$ donc pour $x = 0$ on a $t = \arcsin(0) = 0$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $t = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. Comme φ est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\left(1-\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos^2 t} = [\tan t]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Sommes de Riemann

L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Mais maintenant que nous savons calculer des intégrales sans utiliser ces sommes on peut faire le cheminement inverse : calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Théorème 1.4 *Soit* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable, alors*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(x)dx$$

La somme S_n *s'appelle la somme de Riemann associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle* $[a,b]$ *en* n *petits intervalles.*

Exercise 2 *Calculer la limite de la somme* $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

La somme S_n s'écrit aussi $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. En posant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. Donc

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi $S_n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{4}$

Intégrales multiples

Dans cette partie nous allons étendre la notion d'intégrale définie aux intégrales doubles et triples des fonctions de deux et trois variables. Ces notions sont ensuite exploitées pour calculer des aires et des volumes des masses et des centre de gravités.

1.2 Intégral double d'une fonction continue

Dans cette section , nous définissons l'intégral d'une fonction de deux variables, appelée double, et nous montrons comment l'évaluer. Elle nous permettra, entre autre, de calculer l'aire d'un domaine intégration, ainsi que le volume d'un solide limité par les graphes de fonction de deux variables .

Théorème 1.5 *Théorème de Fubini Soit* $x \to \varphi(x)$ *et* $x \to \psi(x)$ *deux fonctions continues sur* $[a, b]$ *avec* $\varphi \leq \psi$ *; notons* Ω *l'ensemble des points* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $a \leq x \leq b$ *et* $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ *. Alors*

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \int_{a}^{b} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dydx.$$

si le domaine le permet , on peut permuter les rôles de x *et de* y *: soit* $y \to \varphi(y)$ *et* $y \to \varphi(y)$ *deux fonctions continues sur* $[c, d]$ *avec* $\varphi \leq \psi$ *; notons* Ω *l'ensmble des points* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $c \leq y \leq d$ *et* $\varphi(y) \leq x \leq \varphi(y)$ *. Alors*

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \int_{c}^{d} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dydx.$$

Exercise 3 *On veut calculer* $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dxdy$ *sur le domaine* Ω *du plan* Oxy *délimité par la droite d'équation* $y = 2x$ *et la parabole* $y = x^2$ *.*

Le domaine Ω peut être décrit par

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 2x \right\}$$

L'intégrale double se calcule alors par

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdy &= \int\limits_0^2\int\limits_{x^2}^{2x}\left(x^2+y^2\right)dydx = \int\limits_0^2\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x}dx \\ &= \int\limits_0^2\left(x^2\left(2x\right)+\frac{\left(2x\right)^3}{3}-x^2\left(x^2\right)-\frac{\left(x^2\right)^3}{3}\right)dx \\ &= \int\limits_0^2\left(\frac{14x^3}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx = \left[\frac{7x^4}{6}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{216}{35}\end{aligned}$$

le domaine Ω peut être décrit par

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\leq y\leq 4, \frac{y}{2}\leq x\leq\sqrt{y}\right\}$$

L'intégrale double se calcule alors par

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdy &= \int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}\left(x^2+y^2\right)dxdy = \int_0^4\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}}dy \\ &= \int_0^4\left(\frac{\left(\sqrt{y}\right)^3}{3}+\sqrt{y}y^2-\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^3}{3}-\left(\frac{y}{2}\right)y^2\right)dy \\ &= \int_0^4\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}+y^{\frac{5}{2}}-\frac{13y^3}{24}\right)dy \\ &= \left[\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{15}+\frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{13y^4}{96}\right]_{y=0}^{y=4} \\ &= \frac{216}{35}.\end{aligned}$$

Remarque 1.2 *Cas particulier*

si $\Omega=[a;b]\times[c;d]$ *et si* $f(x,y)=h(x)\,g(y)$, *alors*

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\,dydx = \left(\int\limits_a^b h(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right) .$$

Exemple 1.3 *Soit* $\Omega = [0,1] \times [0,2]$ *: on veut calculer l'intégrale double*

$$\iint\limits_{\Omega} xydxdy.$$

On a

$$\iint\limits_{\Omega} xydxdy = \int_0^1 \int_0^2 xydydx = \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^2 ydy\right) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 1.$$

Changement de variables dans les intégrales doubles.

Lorsque les méthodes précédentes ne sont pas efficaces (domaine difficile à exprimer ou fonction difficile à intégrer), un changement de variables permet parfois de reformuler l'intégrale de façon plus commode.

Cas des coordonnées polaires

Le changement de variable en coordonnées polaires est donné par l'application

$$(r,\theta) \mapsto \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

où $(r,\theta) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0,2\pi]$ sont les coordonnées du point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le jacobien de cette application au point (r,θ) est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Ainsi on a

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

Exemple 1.4 *On veut intégrer la fonction* $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ *sur l'ensemble*

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < y < \sqrt{3}x \text{ et } 1 < x^2+y^2 < 4\right\}$$

. Si on passe en coordonnées polaires on doit calculer

$$\int_{\Omega'} \frac{1}{1+r^2} r dr d\vartheta \quad \text{où} \quad \Omega' = \left\{ (r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\,\middle|\, 0 < \vartheta < \frac{\pi}{3} \text{ et } 1 < r < 2 \right\}.$$

Ainsi

$$\int_{\Omega'} \frac{1}{1+r^2} r dr d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \frac{1}{1+r^2} r dr d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^2 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{3} \left[\frac{\ln(1+r^2)}{2} \right]_1^2 = \frac{\pi \ln\left(\frac{5}{2}\right)}{6}$$

Application des intégrales doubles, Calcul d'aire d'un domaine

L'aire du domaine D est donnée par la formule

$$\iint_D dx dy$$

Exemple 1.5 *Calculons l'aire d'un disque $D_\mathbb{R}$ de rayon $R > 0$: on se place dans un système de coordonnées polaires sur le centre du disque , qui a donc pour équation $x^2 + y^2 \le R^2$. Donc*

$$\iint_{D_R} 1 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\vartheta = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta = \pi R^2.$$

1.3 Intégrale triple d'une fonction continue

Considérons le domaine T de $\mathbb{R}^3$ orthogonal au plan oxy,

$$T = \{(x,y,z) \,/\, (x,y) \in D,\ a(x,y) < z < b(x,y)\}$$

. Sa projection sur oxy est le domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b, f(x) < y < g(x) \right\}$$

.

$$\iiint_T f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx$$

Changement de variables dans les intégrales triples

Coordonnées cylindriques

Le changement en coordonnées cylindriques est donné par la transformation suivante

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}.$$

Dont la jacobéenne de cette dernière vaut

$$|J| = r.$$

Puisque la composante z est inchangée, donc

$$\iiint f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,rdrd\theta dz$$

Coordonnées sphériques

Le changement en coordonnées sphériques est donné par la transformation suivante

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}.$$

(avec r positif, θ compris entre 0 et 2π, et φ entre 0 et π) et son jacobien est :

$$J = -r^2\sin\varphi.$$

Dès lors, on a (en se rappelant qu'il faut prendre la valeur absolue du jacobien) :

$$\iiint f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

Application des intégrales triples, Calcul du volume d'un domaine

Le volume d'un domaine V s'exprime par la relation

$$\iiint_V dxdydz$$

Exemple 1.6 *Le volume d'une boule de rayon R est :*

$$\begin{aligned}
\iiint_{B_R} 1dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin(\varphi)\,drd\vartheta d\varphi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin(\varphi)\,d\varphi\right)\left(\int_0^{R} r^2dr\right) \\
&= 2\pi\left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\pi}\frac{R^3}{3} \\
&= 4\pi\frac{R^3}{3}
\end{aligned}$$

La masse

Si $f(x,y)$ la densité de la matière dans un certain domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, l'intégrale double $m = \iint_D f(x,y)dxdy$ est la masse de la partie D. D'une manière analogue, si $f(x,y,z)$ la densité de la matière dans un certain domaine $D' \subset \mathbb{R}^3$, l'intégrale triple $m' = \iiint_{D'} f(x,y,z)dxdydz$ est la masse de la partie D'.

Centre de gravité

Si $f(x,y)$ la densité de la matière dans un certain domaine D, le centre de gravité de la partie D se trouve en (x_G, y_G) ainsi définis

$$x_G = \frac{\iint_D xf(x,y)dxdy.}{m}, \qquad y_G = \frac{\iint_D yf(x,y)dxdy.}{m}$$

Physiquement cela signifie que la plaque D se comporte comme si toute sa masse était concentrée en son centre d'inertie. Par exemple, elle est en équilibre horizontal lorsqu'elle repose sur son centre d'inertie. De manière analogue, si $f(x,y,z)$ est la densité au point (x,y,z), le centre de gravité de la partie D' se trouve en (x_G, y_G, z_G) ainsi définis

$$y_G = \frac{\iiint\limits_{D'} yf(x,y,z)dxdydz.}{m'}, y_G = \frac{\iiint\limits_{D'} yf(x,y,z)dxdydz.}{m'}, \ z_G = \frac{\iiint\limits_{D'} zf(x,y,z)dxdydz.}{m'}$$

Exercise 4 *Déterminer la masse et le centre de gravité d'une plaque fine de métal triangulaire dont les sommets* $(1,0)$, $(0,1)$ *et* $(1,1)$, *sachant que la fonction densité est* $f(x,y) = xy$.

La masse de cette plaque est donnée par

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xydxdy = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^1 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x^2 - x^3\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

Le centre de gravité de cette plaque est donné par les (x_G, y_G) :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\int_0^1 \int_{1-x}^1 xf(x,y)dxdy.}{m} = \frac{\int_0^1 \int_{1-x}^1 x^2ydxdy}{5/24} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x^3 - x^4\right) dx \\ &= \frac{3/20}{5/24} = \frac{18}{25}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{\int_0^1 \int_{1-x}^1 yf(x,y)dxdy.}{m} = \frac{\int_0^1 \int_{1-x}^1 xy^2dxdy}{5/24} = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(3x^2 - 3x^3 + x^4\right) dx \\ &= \frac{3/20}{5/24} = \frac{18}{25}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Intégrales impropres (généralisées)

2.1 Généralités

Dans la définition et l'étude de l'intégrale de Riemann, on a toujours considéré un intervalle fermé et borné et une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ainsi le symbole a-t-il un sens pour certaines familles de fonctions (fonctions continues, continues par morceaux, monotones...) définies sur un intervalle $[a, b]$ fermé et borné.

Le but de ce chapitre est d'étendre, dans certains cas, la notion d'intégrale à des fonctions définies sur un intervalle qui n'est pas un intervalle fermé borné, c'est-à-dire un intervalle d'un des types suivants :

- intervalles bornés, ouverts ou semi-ouverts : $[a, b[\,,\ ]a, b]\,,\ ]a, b[\,,\ (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ a < b)$

- intervalles non bornés :$]-\infty, b]\,,\ ]-\infty, b[\,,\ [a, +\infty[\,,\ ]a, +\infty[\,,\ ]-\infty, +\infty[\,,\ (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ a < b)$

Soit I l'un des intervalles montionnée plus haut.

Définition 2.1 *Une fonction f définie sur un intervalle I est dite localement intégrable sur I si f est Riemann intégrable sur tout intervalle $[a; b] \subset I$.*

notre étude se limitera à celle de l'intégration

- Soit de fonctions définies sur un intervalle non borné : $[a, +\infty[\,, a \in R$

- Soit de fonctions non bornées sur un intervalle borné :$[a, b[,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\ a < b$.

Tous les autres cas se ramènent à ceux-ci.

2.2 Intégration d'une fonction définie sur un intervalle non borné

Définition 2.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[,\ (a \in \mathbb{R})$, on suppose f localement intégrable. On dit que l'intégrale $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si la limite, lorsque x tend vert $+\infty$ de$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ existe et est finie. Si c'est le cas, on pose :*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int\limits_a^x f(t)dt.$$

On appelle cette limite intégrale impropre (ou généralisée) de f sur $[a, +\infty[$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

Exemple 2.1 *L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge. En effet,*

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x)$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exemple 2.2 *L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge. En effet*

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x = \frac{-1}{x} + 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

et

$$G(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^x = \ln x, \qquad \lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$$

2.3 Intégration d'une fonction non bornée, définie sur un intervalle borné non fermé

Définition 2.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b[\,,\ (a<b)$. On suppose f non bornée au voisinage de b, et localement intégrable sur $[a,b[$., On dit que l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)dt$ est convergente en b si la fonction $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers b. Si c'est le cas, on pose :*

$$\int\limits_a^b f(t)dt=\lim_{x\to b}F(x)=\lim_{x\to b}\int\limits_a^x f(t)dt.$$

On appelle cette limite intégrale impropre (ou généralisée) de f sur $[a,b[$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Exemple 2.3 *L'intégrale $\int_0^1 \ln(1-x)\,dt$ converge, puisque pour tout $x\in[0,1[$, on a*

$$F(x)=\int_0^x \ln(1-t)\,dt=(x-1)\ln(1-x)-x$$

d'où

$$\lim_{x\to 1}F(x)=\lim_{x\to 1}\int\limits_0^x \ln(1-t)\,dt=-1.$$

Lemme 2.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a,b[,\ (-\infty\leq a<b\leq+\infty)$, localement intégrable . On dit que l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)dt$ est convergente en a et b si pour tout constante $c\in]a,b[$ les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. Par définition on pose $\int\limits_a^b f(t)dt=\int\limits_a^c f(t)dt+\int\limits_c^b f(t)dt.$*

Preuve Il suffit d'utiliser la relation de Chasles pour les intégrales définies. ■

Exemple 2.4 *La fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est localement intégrable sur l'intervalle $]-1,1[$. Etudier $\int\limits_{-1}^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.*

Opérations sur les intégrales généralisées

On désigne l'intervalle $[a, b[\ \ (b = +\infty)$ pour donner les propriétés de l'intégrale impropre

1) Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue alors $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{a'} f(x)\, dx + \int_{a'}^b f(x)\, dx$. (Relation de Chasles.)

2) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et α et β deux réels. Si les intégrales impropres $\int_a^b f(x)\, dx$ et $\int_a^b g(x)\, dx$ convergent, alors l'intégrale $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx$ converge et on a :

$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$. (Linéarité de l'intégrale)

3) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$. (Positivité de l'intégrale)

4) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.

2.4 Intégrales impropres des fonctions positives.

Critère de la convergence majorée

On ce place sur l'intervalle $[a, b[$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$

Proposition 2.1 *Si f est à valeurs positive alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si et seulement si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, b[$.*

Preuve En effet Comme f est positive, la primitive F est une fonction croissante, donc elle a une limite finie en b si, et seulement si, elle est majorée. ■

Critère de comparaison

Proposition 2.2 *Soient f, g deux fonctions positives, continues et localement intégrables sur $[a, b[$. Supposons que*

$$\forall t \in [a, b[, \quad f(t) \leq g(t).$$

-Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ *converge alors* $\int_a^b f(t)dt$ *converge avec*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

-Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ *diverge alors* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge.*

Preuve *En effet notant* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *et* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ *pour tout* $x \in [a,b[$, *on a* $F(x) \leq G(x)$, *si l'intégrale de* g *sur* $[a,b[$ *est convergente alors* $G(x)$ *est bornée et il en est de même de la fonction* $F(x)$, *donc l'intégrale de* f *sur* $[a,b[$ *est convergente aussi.*

Si l'intégrale de f *sur* $[a,b[$ *diverge alors* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$, *donc l'intégrale de* g *sur* $[a,b[$*est aussi divergente.* ∎

Exemple 2.5 *Etude de l'intégrale* $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\ln t}$

on a, pour x *assez grand :* $0 < \ln x < \sqrt{x}$ *d'où* $\frac{1}{\sqrt{x}\ln x} \geq \frac{1}{x}$. *L'intégrale* $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ *est divergente, donc l'intégrale* $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\ln t}$ *est divergente.*

Critère d'équivalence

Proposition 2.3 *Soient* f *et* g *deux fonctions positives et continues , définies et localement intégrables sur* $[a,+\infty[$. *Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de* $+\infty$, $\left(\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1\right)$ *alors Les intégrales de* f *et* g *sur* $[a;+\infty[$ *sont de même nature, c'est-à-dire que l'intégrale de* f *sur* $[a;+\infty[$ *est convergente si, et seulement si, l'intégrale de* g *sur* $[a;+\infty[$ *est convergente.*

Preuve *On* f *et* g *deux fonctions équivalentes :* $\forall\epsilon > 0\ \exists\ A > a\ \ \forall t > A\ \ \left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| < \epsilon$

donc : $\forall\epsilon > 0\ \exists\ A > a\ \ \forall t > A$, $(1-\epsilon)\,g(t) < f(t) < (1+\epsilon)\,g(t)$. *Pour* $\epsilon < 1$, *et appliquons la proposition 2.2 de comparaison sur l'intervalle* $[A;+\infty[$. ∎

Exemple 2.6 *Justifier la convergence puis calculer :*

$$I = \int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}}$$

On a $f(t) = \frac{1}{(t-1)\sqrt{t}} > 0$ *pour tout réel* $t \geq 2$ *et* $f(t) \sim \frac{1}{t\sqrt{t}}$, *d'où la convergence de* I.

Exemple 2.7 *Le changement de variable* $\sqrt{t} = u$ *donne*

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to+\infty} \int_{2}^{x} \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} = \lim_{x\to+\infty} \int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{du}{(u^2-1)} = \lim_{x\to+\infty} \int_{\sqrt{2}}^{x} \left(\frac{1}{(u-1)} - \frac{1}{(u+1)} \right) du \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^{x} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right). \end{aligned}$$

Intégrales de références

Pour l'étude de la convergence d'une intégrale pour laquelle on n'a pas de primitive, l'utilisation des équivalents permet de se ramener à des intégrales dont la nature est connue. Les plus classiques sont les intégrales de Riemann et de Bertrand.

Intégrales de Riemann

L'intégrale de Riemann est $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ avec $\alpha > 0$. On a

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \\ \lim_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt = \lim_{x\to+\infty} [\ln t]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

donc

$$\text{L'intégrale } \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge si } \alpha > 1.$$

$$\text{L'intégrale } \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ diverge si } \alpha \leq 1.$$

Intégrales de Bertrand

L'intégrale de Bertrand est $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

2.5 Intégrale absolument convergentes

Définition 2.4 *Soit f une fonction réelle, localement intégrable sur un intervalle $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. On dit que l'intégrale $\int_{a}^{b} f(t)\, dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_{a}^{b} |f(t)|\, dt$ est convergente.*

Théorème 2.1 *Une intégrale absolument convergente est convergente.*

Autrement dit, être absolument convergente est plus fort qu'être convergente.

Preuve C'est une conséquence du critère de Cauchy. ∎

Exemple 2.8 *L'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ est absolument convergente puisque $\frac{|\sin t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, or l'intégrale de Riemann $\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente. D'où le résultat par la proposition 2.2 de comparaison.*

2.6 Intégrale semi-convergente

Définition 2.5 *On dit que l'intégrale $\int_{a}^{b} f(t) dt$ est semi convergente si elle converge sans être absolument convergente.*

Exercise 5 *L'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.*

Nous allons montrer qu'elle est convergente, mais pas absolument convergente.

1-La convergence de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Une intégration par partie nous donne

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{-\cos x}{x} + \cos 1 + \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\cos x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ admet une limite finie car $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente $\left(\frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}\right)$ donc convergente. On conclu que $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ admet une limite finie, et donc par définition $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

2-L'intégrale n'est pas absolument convergente. Voici un moyen de le vérifier, comme $|\sin t| \leq 1$ pour tout t alors on a : $\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos 2t}{2t}$, une intégration par partie à $\frac{\cos 2t}{t}$ on obtient :

$$\int_1^x \frac{1-\cos 2t}{2t} dt = \frac{1}{2} [\ln t]_1^x - \frac{1}{4} \left[\frac{\sin 2t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\sin 2t}{t^2} dt$$

or $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t^2} dt$ est absolument convergente donc les trois termes de la somme ci-dessus, les deux derniers convergent, et le premier tend vers $+\infty$. Alors l'intégrale $\int_1^x \frac{1-\cos 2t}{2t} dt$ diverge, et par la proposition 2.2 de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}$ diverge également. D'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ ne converge pas absolument. et par suite $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente .

Chapitre 3

Equations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre on va étendre notre étude au cas où la fonction inconnue dépondrai de plusieurs variables, dans ce cas on dira qu'on ait ramené à résoudre des équations aux dérivées partielles (E.D.P.), on se limitera à l'étude et la résolution des équations du premier et du second ordre.

Généralités

Soit u une fonction dépendants de n variables indépendantes $x_1, x_2, ..., x_n$

Définition 3.1 *On appelle E.D.P. toute relation entre une fonction inconnue u, $x_1, x_2, ..., x_n$ et ses dérivées partielles, dont la forme générale est*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} .. \partial x_k^{m_k}}) = g\left(x_1, x_2, ..., x_n, u\right), \tag{3.1}$$

où $1 \leq k \leq n$ *et* $m_1 + m_2 + .. + m_k = n$.

Définition 3.2 *L'ordre d'une E.D.P. est l'ordre de la dérivée partielle la plus élevé qu'elle contienne.*

Définition 3.3 *Une E.D.P. est dite linéaire quand elle l'est par rapport à u et à toutes ses dérivées partielles.*

Définition 3.4 *Une E.D.P. est dite homogène si dans (3.1)* $g(x_1, x_2, ..., x_n, u) = 0$.

Définition 3.5 *Une E.D.P. est dite quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport à la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.*

3.1 EDP du premier ordre

Définition 3.6 *On appelle E.D.P. du* 1^{er} *ordre toute équation ayant la forme suivante*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, x_2, ..., x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + G(x_1, x_2, ..., x_n)u = F(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.2}$$

Remarque 3.1 *(3.2) est une équation quasi-linéaire, elle devient homogène pour* $F = 0$ *et elle est linéaire si* A_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ *ne dépond pas de* u,

On se limitera dans notre étude aux E.D.P. de 2 et 3 variables indépendantes.

Méthode des caractéristiques

Considérons le problème suivant

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \tag{3.3}$$

où $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (i.e. $x = (x_1, x_2, ..., x_3)$) et $\nabla u(x)$ est le gradient de $u(x)$ (i.e. $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$).

On veut essayer de trouver une solution classique de l'équation (3.3), c'est-à-dire cherche une fonction $u \in C^1(\Omega)$ vérifiant (3.3).

Remarque 3.2 *Les équations aux dérivées partielles du premier ordre n'admet pas forcément une solution classique, dans ce cas on sera amené à chercher une fonction* $u \in C(\Omega)$*, remplissant des conditions complémentaires c'est ce qu'on appelle solution faible.*

Tout d'abord on va traiter le cas où l'EDP dépond de deux variables indépendantes.

Soit l'EDP suivante

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u).$$

En chaque point de l'espace (x,y,u), il existe une direction dont les cosinus directeurs sont proportionnels à a, b et c. Ce champ de directions définit une famille de lignes telles que la tangente à chacune d'elles est confondue avec la direction du champ au point de contact, cette dernière s'obtient par intégration du système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\frac{dx}{a(x,y,u)}=\frac{dy}{b(x,y,u)}=\frac{du}{c(x,y,u)}. \tag{3.4}$$

Notons par ds la valeur commune de ces rapports (3.4) devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds}=a(x,y,u) \\ \frac{dy}{ds}=b(x,y,u) \\ \frac{du}{ds}=c(x,y,u) \end{cases}. \tag{3.5}$$

Ainsi la surface intégrale formée par les caractéristiques de l'équation (3.4) est la solution cherchée, on écrit

$$\Phi\left(c_1,c_2\right))=0 \text{ ou } c_1=\Phi\left(c_2\right)$$

d'où l'appellation de la méthode.

Exercise 6 *Résoudre l'EDP suivante*

$$xy^2\frac{\partial u}{\partial x}+x^2y\frac{\partial u}{\partial y}=(x^2+y^2)u. \tag{3.6}$$

On associe à (3.6) le système suivant

$$\frac{dx}{xy^2}=\frac{dy}{x^2y}=\frac{du}{(x^2+y^2)u}.$$

Exemple 3.1 *D'une part on a*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{xy^2} &= \frac{dy}{x^2y} \Rightarrow \\ ydy &= xdx \Rightarrow y^2-x^2=c_1 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
x^2\frac{dy}{x^2y}+y^2\frac{dx}{xy^2} &= x^2\frac{du}{(x^2+y^2)u}+y^2\frac{du}{(x^2+y^2)u}\\
\frac{xdy}{xy}+\frac{ydx}{xy} &= \frac{du}{u}\\
\frac{d(xy)}{xy} &= \frac{du}{u}\Rightarrow\frac{u}{xy}=c_2.
\end{aligned}$$

Ainsi la solution de (3.6) est $c_2=\Phi(c_1)$

$$\frac{u}{xy}=\Phi\left(y^2-x^2\right)\Rightarrow u=xy\Phi\left(y^2-x^2\right)$$

D'une manière analogue on généralise la méthode pour le cas n dimensionnel on aura un système de $(n+1)$ équations, donc n intégrales premières, est la solution aura la forme

$$\Phi(c_1,c_2,...,c_n)=0 \text{ ou } c_n=\Phi(c_1,c_2,...,c_{n-1}).$$

Quelques types d'EDP du 1^{er} ordre

- Equation de transport
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=0$$
$(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ et c une constante
- Equation d'onde de choc
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=0$$
$(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$
- Equation de Burgers
$$a(u)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=0$$

3.2 EDP du second ordre

Définition 3.7 *On appelle EDP du second ordre toute équation de la forme*

$$F\left(x_1,x_2,..,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},..,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},..,\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},...,\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right)=0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x_1,...x_n,u\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\left(x_1,...x_n,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}=f\left(x_1,...x_n,u\right)$$

Nous nous limiterons dans notre étude aux équations du second ordre linéaire est quasi linéaire à deux variables indépendantes c'est-à-dire les équations de la forme

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+g(x,y)u=f(x,y) \quad (3.7)$$

ou

$$a(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=R(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) \quad (3.8)$$

Classification des EDP du 2ème ordre

Le type des équations (3.7) et (3.8) dépondent de leurs discriminant $\triangle = b^2 - 4ac$.

Définition 3.8 *L'équation est du type hyperbolique si et seulement si* $\triangle > 0$.

Exemple 3.2 *Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u$$

définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$\triangle = b^2 - 4ac = 12 > 0$ *pour tout* x, y *de* Ω. *Donc c'est une équation du type hyperbolique.*

Définition 3.9 *L'équation est du type parabolique si et seulement si* $\triangle = 0$.

Exemple 3.3 *Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$

définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$\triangle = b^2 - 4ac = 0$ *pour tout* x, y *de* Ω. *Donc c'est une équation du type parabolique.*

Définition 3.10 *L'équation est du type elliptique si et seulement si* $\triangle < 0$.

Exemple 3.4 *Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

définie sur $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

$\triangle = b^2 - ac = -4xy < 0$ *pour tout* x, y *de* Ω. *Donc c'est une équation du type elliptique.*

Principales équations de la physique

Equation de Laplace Elle a la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^{\,2}} + c^{\,2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^{\,2}} = 0$$

Pour $c = \pm 1$ l'équation est elliptique.

Equation de Poisson Elle a la forme :

$$\nabla^{\,2} u = \delta(x, y)$$

Est une équation elliptique.

Equation de la chaleur (équation de diffusion) Elle a la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^{\,2}} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}$$

C'est une équation parabolique. Le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ est appelé terme de diffusion.

Equation des ondes Elle a la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Où

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

C'est une équation hyperbolique. Le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ est appelé terme de propagation.

Equation de Tricomi Elle a la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Conditions aux frontières et problème bien posé

Dans la pratique on est souvent ramener à étudier un des problèmes suivants.

Problème de Dirichlet

$$\begin{cases} L.u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Problème de Neumann

$$\begin{cases} L.u = f & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Problème mixte

$$\begin{cases} L.u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega_2 \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$dont le bord est noté $\partial\Omega$ vérifiant $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega,\ \ \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$ et

$$L\ . = a(x,y)\frac{\partial^2\ .}{\partial x^{\ 2}} + 2b(x,y)\frac{\partial^2\ .}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2\ .}{\partial y^{\ 2}}$$

Chapitre 4

Les séries

4.1 Séries numériques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.

Définition 4.1 *On apelle série numérique réelle de terme général* u_n

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$$

On note par S_n la somme partielle des n premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$$

Définition 4.2 *On dit que la série numérique* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ *est convergente si et seulement si sa suite de sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge c'est à dire* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *existe et est finie, si non on dira qu'elle est divergente.*

Exemple 4.1 *Déterminer la nature de la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$.

On a

$$u_n = \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

d'où

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Donc la série est convergente.

Propriétés des séries

Soient $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries numériques, λ un nombre arbitraire on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ convergente} &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) \text{ convergente} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ et} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \text{ converge} &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n \pm v_n) \text{ converge} \end{aligned}$$

Condition nécessaire de convergence des séries

Théorème 4.1 *Si* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Preuve On retrouve le terme général à partir des sommes partielles $u_n = S_n - S_{n-1}$ et comme la série converge la suite (S_n) converge vers la somme S de la série. Il en est de même de la suite (S_{n-1}) . Par linéarité de la limite, la suite (u_n)tend vers $S - S = 0$. ■

Corollaire 4.1 *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ *alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est divergente.*

Dans l'étude de la nature d'une série ce n'est pas toujours possible de calculer sa somme par contre on peut déterminer cette dernière on utilise d'autres techniques, pour cela on a besoin d'autres outils.

Critères de convergence des séries à termes positifs

Critère de comparaison Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries numériques à termes positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n$$

Théorème 4.2 *Si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est convergente alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ l'est aussi.*

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ l'est aussi.

Preuve Notons $S_n = \sum_{n=0}^{n} u_n$, et $T_n = \sum_{n=0}^{n} u_n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T_n$. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est convergente, notons $T = \lim_{n \to +\infty} T_n$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est à termes positifs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T_n$ ■

Remarque 4.1 *Souvent on compare une série avec la somme d'une progression géométrique qui converge si la raison q est comprise entre -1 et $+1$ $(|q| < 1)$ ou les séries Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ qui converge pour $\alpha > 1$ ou bien celle de Bertrand $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ qui converge pour $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

Critère d'équivalence

Théorème 4.3 *Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries numériques à termes positifs telle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les deux séries sont de même nature.*

Remarque 4.2 *L'étude de la nature d'une série revient à l'étude de son développement limité au voisinage de l'infinie, car ces deux dernier son équivalent.*

Critère de d'Alembert

Théorème 4.4 *Si dans une série à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est finie et vaut l, alors*

1) La série converge pour $l < 1$

2) La série diverge pour $l > 1$

3) Pour $l = 1$, on ne peut conclure.

Exemple 4.2 *Etudier la nature des séries suivantes* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2.4...2n}{n^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. .

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2.4...2n.2(n+1)}{n^n} \frac{(n+1)^{n+1}}{2.4...2n} = 2 \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= 2 \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = 2e^{-1} < 1$. donc d'aprés le Critère de d'Alembert la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2.4...2n}{n^n}$ est convergente.

Critère de Cauchy

Théorème 4.5 *Si dans une série à termes positifs* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *la limite de la racine* $n^{\text{ème}}$ *du* $n^{\text{ème}}$ *terme vaut l, alors*

1) La série converge pour $l < 1$

2) La série diverge pour $l > 1$

3) Pour $l = 1$, on ne peut conclure.

Exemple 4.3 *Etudier la nature de la série suivante* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n}\right)^{\ln n} = 0 < 1$, donc d'aprés le théorème de cauchy la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$ est convergente.

Critère intégrale de Cauchy

Théorème 4.6 *Soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *une série numérique à termes positifs et décroissante (commence à décroitre d'un certain rang n_0), on définit l'application $f(x)$ comme suit $f(n) = u_n$, alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *et* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ *ont même nature.*

Exemple 4.4 *La série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+4}$ *est convergente. Soit la fonction* $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ *continue sur* $[0, +\infty[$. $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2} < 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \left[arctg\frac{x}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} [arctgt - arctg0] = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} < \infty$.

Série alternée

Définition 4.3 *On appelle série alternée toute série ayant la forme suivante*

$$u_1 - u_2 + u_3 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ..$$

où $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 4.7 (de Leibniz) *Si dans une série alternée les termes vont on décroissance et la limite du terme générale tend vers zéro alors cette dernière converge, de plus sa somme est inférieur au premier terme.*

Exemple 4.5 *La série harmonique alternée* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *est une série convergente.*

Exemple 4.6 *La série de Riemann alternée* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *est une série convergente* $\forall\alpha$.

Série à termes de signes quelconques

Définition 4.4 *Une série est dite à terme de signe quelconque si parmi ces termes on trouve ceux qui sont positifs aussi bien que négatifs.*

Remarque 4.3 *La série alternée est un cas particulier des séries à termes de signes quelconques.*

Théorème 4.8 *Pour qu'une série numérique* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *soit une suite de Cauchy c'est-à-dire*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \ , \forall p \geq 1 \left[m > N \Rightarrow \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} u_n \right| < \varepsilon \right].$$

Définition 4.5 *Une série est dite absolument convergente si la série formée des valeurs absolues de ces termes est convergente.*

Définition 4.6 *Une série est dite semi convergente si elle converge sans être absolument convergente.*

Théorème 4.9 *Toute série absolument convergente est convergente le réciproque est fausse.*

Théorème 4.10 (d'Abel) *Supposons que* $u_n = v_n.w_n$*, où* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient les conditions suivantes*

1) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$

2) La suite de ses sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est bornée.*

Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente.*

Théorème 4.11 *Supposons que* $u_n = v_n.w_n$*, où* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient les conditions suivantes*

1) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l. \, (l \in \mathbb{R})$

2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$ *est convergente .*

Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente.*

4.2 Suites et séries de fonctions

Suite de fonction

Définition 4.7 *On appelle suite de fonction toute suite dont le terme général est une fonction dépendant d'un paramétré* n *et on note* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *.*

Type de convergences

Convergence simple

Définition 4.8 *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On dit que (f_n) converge simplement vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie qu'on note $f(x)$.*

Convergence absolue

Définition 4.9 *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On dit que (f_n) est absolument converge si la suite formée des valeurs absolues de ces termes est convergente.*

Convergence uniforme

Définition 4.10 *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Théorème 4.12 *Toute suite uniformément convergente est simplement convergente, la réciproque est fausse.*

Série de fonction

Définition 4.11 *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On appelle série de fonctions la somme infinie des termes de f_n et on note*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x) + ...$$

Définition 4.12 *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur I si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur I.*

Définition 4.13 *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument sur I, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge simplement sur I.*

Définition 4.14 *Soit $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur I, si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur I.*

Définition 4.15 *Le domaine de convergence d'une série de fonction est l'ensemble des points où cette dernière converge absolument.On dit qu'une série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est majorable sur un certain domaine, s'il existe une série numérique positif et convergeant majorant cette derrière i.e.*

$$\exists v_n \geq 0, \ \sum v_n \ \textit{convergente} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \textit{on a} \ |f_n(x)| \leq v_n.$$

Exercise 7 *Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{nx}{n^4+2x}$, sur $[0, +\infty[$. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x)$. Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{nx}{n^4+2x}\right)$.*

La convergence simple : si $x = 0$, $f_n(0) = 0$, si $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^4} = 0$, donc $f_n(x) \underset{\longrightarrow}{c.s} f(x) = 0$, sur $[0, +\infty[$.

La convergence uniforme : $\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{[0,+\infty[} \left|\frac{nx}{n^4+2x}\right|$, on pose $h(x) = \frac{nx}{n^4+2x}$

4.3 Série entière

Définition 4.16 *On appelle série entière toute série s'écrivant sous la forme*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où a_n est une série numérique.

Théorème 4.13 (d'Abel) *Considérons la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, *soit* α *un nombre strictement positif, si la suite de fonction* $(|a_n|\,\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. Alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *convergera pour tout* x *tel que* $|x| < \alpha$. *Et si la suite de fonction* $(|a_n|\,\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge, alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *divergera pour tout* x *tel que* $|x| > \alpha$.

Définition 4.17 *On appelle domaine de convergence d'une série l'ensemble des points dont cette dernière converge absolument, en vertu du théorème d'Abel ce dernier est un intervalle centré à l'origine. Il s'écrit sous la forme* $]-R, R[$ *où* $R \in [0, +\infty]$.

Détermination du rayon de convergence

Considérons la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Critère de d'Alembert

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Critère de Cauchy

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Quelques propriétés des séries entières

Continuité

Proposition 4.1 *La somme d'une série entière est une fonction continue sur tout sous domaine de son domaine de convergence.*

Dérivation

Théorème 4.14 *Considérons la série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *dont le domaine de convergence est* $]-R, R[$*, de somme* $s(x)$*, soit la série entière* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ *déduite de la première par dérivation terme à terme. Alors cette dernière admet même domaine de convergence, de plus sa somme* $l(x) = s'(x)$*.*

Remarque 4.4 *On peut généralise le Théorème précédant pour n'importe quel ordre de dérivation, c'est-à-dire toute série déduite d'une certaine série par dérivation n fois admet même domaine de convergence et sa somme est la dérivée* $n^{\text{ième}}$ *de la série initiale.*

Intégration

Théorème 4.15 *Considérons la série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *dont le domaine de convergence est* $]-R, R[$*, de somme* $s(x)$*, soit la série entière* $c + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *déduite de la première par intégration terme à terme. Alors cette dernière admet même domaine de convergence, de plus sa somme* $k(x) = \int s(x)dx$*.*

Série de puissance

Définition 4.18 *On appelle série entière toute série s'écrivant sous la forme*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

où a_n *est une série numérique.*

Remarque 4.5 *Il suffit de prendre comme changement* $X = x - x_0$ *pour que cette dernière devienne une série entière.*

Remarque 4.6 *L'intervalle de convergence des séries de puissances est centré en* x_0*.*

Applications des séries entières

L'intégration des équations différentielles ordinaires

Si on nous propose d'intègre une certaine EDO, dont sa résolution ne se ramené pas à une quadrature, on peut toujours trouver une solution approchée ont supposons que la solution de cette dernière est développable en série entière.

Exemple 4.7 *Trouver une solution sous forme d'une série entière de l'EDO suivante*

$$(1-x)y' + y = 1 + x.$$

Sachant qu'elle vérifie

$$y(0) = \ 0.$$

On suppose que la solution à la forme suivante

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... + a_n x^n + ...$$

donc

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ... + na_n x^{n-1} + ...$$

et

$$y(0) = a_0 = 0.$$

Substituons les équations précedentes, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 + a_0 - 1) + (2a_2 - 1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + ... + \\ &\quad + [\ (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n]\, x^n + ... \end{aligned}$$

alors on aurra le système suivant

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_0 - 1 = 0 \\ 2a_2 - 1 = 0 \\ 3a_3 - a_2 = 0 \\ 4a_4 - 2a_3 = 0 \\ . \\ . \\ (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{1}{2} \\ a_3 = \frac{1}{3}a_2 \\ a_4 = \frac{2}{4}a_3 \\ . \\ . \\ a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n \end{cases}$$

ainsi

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ et } a_{n+1} = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ pour } n \geq 1.$$

La solution sera

$$y(x) = x + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} .$$

4.4 Série de Fourier

Définition 4.19 *On dit que f est périodique de période p si elle vérifie*

$$\forall x \in D, x + p \in D : f(x+p) = f(x),$$

où D est le domaine de définition de f .

Définition 4.20 *On appelle série trigonométrique ou série de Fourier d'une fonction 2π toute série s'écrivant sous la forme*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{4.1}$$

où a_0, a_i et b_i sont des réels dits coefficients de la série.

Détermination des coefficients de Fourier

Considérons une fonction 2π-périodique :

sachant que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad n = k \\ 0 & \text{si} \quad n \neq k \end{cases}$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = 0, \quad \forall n, k$$

On intégrations les deux membres de (4.1)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Multiplions les deux membres de (4.1) par $\cos kx$ et intégrons le résultat entre $-\pi$ et π, on obtient

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Multiplions les deux membres de (4.1) par $\sin kx$ et intégrons le résultat entre $-\pi$ et π, on obtient

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Ainsi on a trouvé les coefficients de la série ces derniers ont dit coefficient de Fourier.

Théorème 4.16 *Toute fonction périodique, bornée et monotone par tranche est développable en série de Fourier, sa somme $s(x) = f(x)$ aux points de continuité, par contre aux points de discontinuité elle vaut la moyenne arithmétique des limites à droite et à gauche.*

Remarque 4.7 *Le développement en série de Fourier des fonctions paire ne contient pas les b_n $(b_n = 0)$.*

Remarque 4.8 *Le développement en série de Fourier des fonctions impaire ne contient pas les* a_n $(a_0 = a_n = 0)$.

Série de Fourier des fonctions périodiques de période $\neq 2\pi$

Supposons que la fonction $f(x)$ est $2l$-périodique tel que $(l \neq 0)$ $l \neq \pi$, si de plus f est monotone par tranche et bornée alors elle est développable en série de Fourier, dont les coefficients de Fourier valent

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \end{aligned}$$

de plus on a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$$

Égalité de Parseval

Théorème 4.17 *Soit f une fonction développable en série de Fourier de période $2l$ on a*

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2).$$

Exemple 4.8 *Considérons la fonction f , 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par*

$$f(x) = |\sin x|.$$

1) Montrer que $f(x)$ est développable en sérier de Fourier.

2) Calculer les coefficients de Fourier associes à $f\ (x\ )$.

3) Déduire la somme suivante : $\sum\limits_{n\ \geq\ 1} \dfrac{1}{4n^2-1}$.

Exemple 4.9 1) *La fonction f étant périodique, bornée et monotone par tranche donc développable en série de Fourier.*

Exemple 4.10 2)

$$f(\ x\ ) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

où

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Comme la fonction f est paire alors $b_n = 0$. Il suffit de calculer a_0 et a_n

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x dx = -\frac{2}{\pi} \cos x|_0^{\pi} = -\frac{2\left(\cos \pi - \cos 0\right)}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \cos nx dx$$

on a

$$\sin x \cos nx = \frac{1}{2} \left[\sin(n+1)x + \sin(1-n)x\right].$$

Donc

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{0}^{\pi} \sin(n+1)x dx + \int_{0}^{\pi} \sin(1-n)x dx\right].$$

Pour $n = 1$ on a

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{0}^{\pi} \sin 2x dx\right] = -\frac{1}{2\pi} \cos 2x|_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi} \left(\cos 2\pi - \cos 0\right) = 0.$$

Pour $n \neq 1$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x|_0^\pi\right)+\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x|_0^\pi\right] \\
a_n &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{1-n}\right] \\
a_n &= \begin{cases} 0 & si\ n\ est\ impaire \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)} & si\ n\ est\ paire \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$a_{2n} = \frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}.$$

Ainsi

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n\geq 1}\frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}\cos 2nx$$

3) *Déduction de* $\sum\limits_{n\ \geq\ 1}\dfrac{1}{4n^2-1}$, $f(x)$ *est continue en* $x_0=0$. *Donc*

$$\begin{aligned}
f(\ 0\ ) &= 0=\frac{2}{\pi}+\sum_{n\geq 1}\frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}\cos\left(2n\times 0\right) \\
&= \frac{2}{\pi}+\sum_{n\geq 1}\frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\ .$$

Chapitre 5

Transformation de Fourier

On définir la transformé de Fourier comme étant une extension de la série de Fourier aux fonctions non périodiques, autrement dit on suppose que la fonction est de période infinie.

Définition 5.1 L^1 *est l'ensemble des fonctions sommable.*

Définition 5.2 L^2 *est l'ensemble des fonctions à carré sommable.*

5.1 Transformée de Fourier

Définition 5.3 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur* $\mathbb{R}$*. On définit la transformée de Fourier de* f *, la fonction notée* $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, comme suit*

$$\widehat{f}\ (\alpha) = \mathcal{TF}\ (f)\,(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx.$$

Et sa transformée inverse de $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$*, par*

$$f(x) = \mathcal{TF}^{\ -1}(\widehat{f}\ )\,(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\ (\alpha)\, e^{i\alpha x} d\alpha.$$

Définition 5.4 *la fonction de Heaviside dite également fonction échelon est la fonction indicatrice de* $\mathbb{R}^+$, *c'est-à-dire*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 0 \\ 1 & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

Définition 5.5 *on appelle fonction porte toute fonction constante sur un compact de* $\mathbb{R}$ *et nulle ailleurs.*

Exemple 5.1 *Calculer la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside*

on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\;(H)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-i\alpha x} dx \\
&= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-i\alpha x} dx \\
&= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{-i\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha x} \Big|_{0}^{t} \\
&= \frac{-i}{\alpha\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

5.2 Propriétés de la transformée de Fourier

Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{TF}$ la transformée de Fourier directe et $\mathcal{TF}^{-1}$ la transformée de Fourier inverse

Linéarité de $\mathcal{TF}$

Corollaire 5.1 *Soient* λ *et* $\mu \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\mathcal{TF}\;(\lambda f \; + \mu g\;)(\alpha) = \lambda \widehat{f}\;(\alpha) + \mu \widehat{g}\;(\alpha)$$

Transformée de Fourier de la translation

Corollaire 5.2 *Soit $T \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application. On note $f_T(x) = f(x - T)$. Alors*

$$\mathcal{TF}(f_T)(\alpha) = e^{-i\ \alpha T}\mathcal{TF}(f)(\alpha).$$

Preuve On a $\mathcal{TF}(f_T)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_T(x)e^{-i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-T)e^{-i\alpha x}dx$. On pose $x - T = t$.

Alors $\mathcal{TF}(f_T)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha(t+T)}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}e^{-i\alpha T}dt =$
$\frac{e^{-i\alpha T}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt = e^{-i\ \alpha T}\mathcal{TF}(f)(\alpha)$. ■

Transformée de Fourier de l'homothétie

Corollaire 5.3 *Soit $k > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application. On note $f_k(x) = f(kx)$. Alors*

$$\mathcal{TF}(f_k)(\alpha) = \frac{1}{k}\mathcal{TF}(f)\left(\frac{\alpha}{k}\right).$$

Preuve On a $\mathcal{TF}(f_k)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)e^{-i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(kx)e^{-i\alpha x}dx$. On pose $kx = t$.

Alors $\mathcal{TF}(f_k)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha\left(\frac{t}{k}\right)}\frac{dt}{k} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\left(\frac{\alpha}{k}\right)t}dt\right] =$
$= \frac{1}{k}\mathcal{TF}(f)\left(\frac{\alpha}{k}\right)$. ■

Produit de convolution

Définition 5.6 *On appelle produit de convolution de la fonction f par la fonction g, la fonction notée $f * g$ définie par*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)dx.$$

Corollaire 5.4 *La transformée de Fourier du produit de convolution de f par g est donnée par*

$$\mathcal{TF}(f * g)(\alpha) = \sqrt{2\pi}\mathcal{TF}(f)(\alpha).\mathcal{TF}(g)(\alpha)$$

Preuve On a $\mathcal{TF}(f)(\alpha).\mathcal{TF}(g)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i\alpha y}dy$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y)e^{-i\alpha(x+y)}dxdy.$$

On pose $x + y = t$ et donc $dx = dt$, l'intégrale double devient :

$\mathcal{TF}(f)(\alpha).\mathcal{TF}(g)(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)g(y)e^{-i\alpha t}dydt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)g(y)dy\right]e^{-i\alpha t}dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(f * g)(t)e^{-i\alpha t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{TF}(f * g)(\alpha) \quad \blacksquare$$

Remarque 5.1 *Si $f(t)$ est réelle et paire $\Rightarrow \mathcal{TF}(f)$ est réelle et paire*

Si $f(t)$ est réelle et impaire $\Rightarrow \mathcal{TF}(f)$ est imaginaire pure et impaire.

Théorème 5.1 (de Parseval) *Soit $f(t)$ une fonction à énergie finie ($f \in L^2$)et $\widehat{f}(\omega)$ sa transformée de Fourier. Les fonctions $f(t)$ et $\widehat{f}(\omega)$ ont la même énergie c'est-à-dire*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(\omega)\right|^2 \, d\omega.$$

Exercise 8 *Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-|x|}$, puis en déduire la transformée inverse de f.*

$\mathcal{TF}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\alpha x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} dx \right]$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\alpha)x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\alpha)x} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1+i\alpha} + \frac{1}{1-i\alpha} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\alpha^2}.$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, la transformée inverse est

$f(x) = e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\ (\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{i\alpha x} d\alpha$

$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha + i.0,$

d'où : $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}.$

En particulier on a : $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$

Exercise 9 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une transformée de Fourier,*

- Calculer la transformée de Fourier si f est paire.

-Calculer la transformée de Fourier si f est impaire.

Si f est paire.

$\mathcal{TF}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\cos(\alpha x) - i \sin(\alpha x)) dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx.$

Or la fonction $f(x)\cos(\alpha x)$ est paire et la fonction $f(x)\sin(\alpha x)$ est impaire. Il s'ensuit alors :

$\mathcal{TF}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$ car $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = 0$. D'où :

$$\mathcal{TF}(f)(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx.$$

-Si f est impaire, avec le même raisonnement on obtient l'expression :

$$\mathcal{TF}(f)(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx.$$

Chapitre 6

Transformation de Laplace

La transformation de Laplace est une opération intégrale qui permet de transformer une fonction à variable réelle en une fonction à variable complexe, elle permette aussi de transformée les équations différentielles linéaires aux équations algébriques facilitant ainsi leurs résolution.

Définition 6.1 *Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue. et $p \in \mathbb{C}$. La transformée de Laplace de la fonction f la fonction $L(f)$ définie par :*

$$L(f)(p) = F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-tp}dt.$$

$f(t)$ est dite originale de $L(f)(p)$ où de $F(p)$.

$L(f)(p)$ où $F(p)$ est l'image de $f(t)$.

Exemple 6.1 *Soit la fonction constante $f(t) = a$ si $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ si $t < 0$.*

$L(f)(p) = \int_{0}^{+\infty} ae^{-tp}dt = a\int_{0}^{+\infty} e^{-tp}dt = -\frac{a}{p}\left[e^{-tp}\right]_0^{+\infty} = -\frac{a}{p}\left[e^{-tx}e^{-ity}\right]_0^{+\infty} = \frac{a}{p}$

si le $\mathrm{Re}(p) > 0$.

Exemple 6.2 *Soit la fonction $f(t) = e^{\alpha t}$ pour $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ si $t < 0$, $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$.*

$L(f)(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-tp} dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t(p-\alpha)} dt = \frac{-1}{p-\alpha} \left[e^{-t(p-\alpha)} \right]_0^{\infty} = \frac{-1}{p-\alpha} \left[e^{-t(x-a)} e^{-it(y-b)} \right]_0^{\infty} =$
$\frac{1}{p-\alpha}$ *si* $\mathrm{Re}(p) = x > \mathrm{Re}(\alpha) = a.$

6.1 Propriétés de la transformation de Laplace

Linéarité

Corollaire 6.1 *Soit* $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *deux fonctions admettant des transformées de Laplace* $L(f)$ *et* $L(g)$ *et soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g).$$

Transformée de Laplace de la translation

Définition 6.2 *on appelle fonction causale tout fonction nulle pour* $t < 0$.

Corollaire 6.2 *Soit* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ *une fonction causale et admettant une transformée de Laplace* $L(f)(p)$*. On considère la fonction* f_T *définie par* $f_T(t) = f(t - T)$; $(T > 0)$*.Alors*

$$L(f_T)(p) = e^{-Tp} L(f)(p)$$

Preuve Remarquons d'abord que $f_T(t) = \begin{cases} f(t-T) & \text{si} \quad t - T \geq 0 \\ 0 \quad \text{si} & t - T < 0 \end{cases}$
$L(f_T)(p) = \int\limits_0^{+\infty} f_T(x) e^{-tp} dt = \int\limits_T^{+\infty} f(t-T) e^{-tp} dt$. On pose $t - T = x$.
Alors $L(f_T)(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(x) e^{-(x+T)p} dt = \int\limits_0^{+\infty} f(x) e^{-xp} e^{-Tp} dx =$
$e^{-Tp} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-xp} dt = e^{-Tp} L(f)(p)$. ■

Transformée de Laplace de l'homothétie

Corollaire 6.3 *Soit $k > 0$ et soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction causale et admettant une transformée de Laplace $L(f)(p)$. On note $f_k(t) = f(kt)$. Alors*

$$L(f_k)(P) = \frac{1}{k} L(f)\left(\frac{p}{k}\right).$$

Preuve On a $L(f_k)(p) = \int\limits_0^{+\infty} f_k(t) e^{-tp} dt = \int\limits_0^{+\infty} f(kt) e^{-tp} dt$. On pose $kt = x$.

Alors $L(f_k)(p) = \frac{1}{k} \int\limits_0^{+\infty} f(x) e^{-\left(\frac{p}{k}\right)x} dx = \frac{1}{k} L(f)\left(\frac{p}{k}\right)$. ■

Transformée de Laplace des dérivées

Proposition 6.1 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace $L(f)(p)$. On suppose que $f \in C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$. Alors*

$$L(f^{(n)})(p) = p^n L(f)(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} f^{(k-1)}(0)$$

Preuve La démonstration se fait par récurrence, avec $\operatorname{Re} p > 0$

Pour $n = 1$.

$L(f')(p) = \int\limits_0^{+\infty} f'(t) e^{-tp} dt$. On fait une intégration par partie avec $u = e^{-tp}$ et $dv = f'(t)dt$.

$L(f')(p) = \left[e^{-tp} f(t)\right]_0^{\infty} + p \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-tp} dt = pL(f)(p) - f(0)$.

Pour $n = 2$

$L(f'')(p) = L\left((f')'\right)(p) = pL(f')(p) - f'(0) = p\left(pL(f)(p) - f(0)\right) - f'(o) =$

$p^2 L(f)(p) - pf(0) - f'(o)$. ■

Produit de convolution

Corollaire 6.4 *Soient les fonctions f et g deux fonctions causales. La transformée de Laplace du produit de convolution de f par g est donnée par*

$$L(f * g)(p) = L(f)(p) . L(g)(p)$$

Preuve Rappelons que $(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du$. Tenant compte du fait que $f(y) = g(y) = 0$ si $y < 0$, les calculs donnent :

$L(f*g)(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du \right] e^{-tp}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\int\limits_{u}^{+\infty} f(t-u)g(u)du \right] e^{-tp}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\int\limits_{u}^{+\infty} f(t-u)e^{-tp}dt \right]$

On pose $t - u = v$.

$L(f*g)(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\int\limits_{0}^{+\infty} f(v)e^{-(u+v)p}dt \right] g(u)du = \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\int\limits_{0}^{+\infty} f(v)e^{-vp}dt \right] g(u)e^{-up}d = \int\limits_{0}^{+\infty} L(f)(p)\, g(u)e^{-up}du$

$L(f)(p) . \int\limits_{0}^{+\infty} g(u)e^{-up}du = L(f)(p) . L(g)(p) .$ ■

Transformée de Laplace d'une primitive

Proposition 6.2 *Soit $F(t) = \int\limits_{0}^{t} f(x)\, dx$ une primitive de f. Alors $F' = f$ et $F(0) = 0$, et on a*

$$L(F)(p) = \frac{L(f)(p)}{p}$$

Preuve D'aprés la proposition 6.1, $L(F')(p) = pL(F)(p) - F(0) = pL(F)(p)$. De cette égalité on déduit

$L(F)(p) = \frac{L(f)(p)}{p}$. ■

Tableau de quelques transformées de Laplace

Fonction	transformée
δ	1
H	$\frac{1}{p}$
$t^a \ (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p+\lambda}$
$t^a e^{-\lambda t}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}}$
$\cos(wt)$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
$e^{-\lambda t}\sin(wt+\alpha)$	$\frac{w\cos\alpha+(p+\lambda)\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+w^2}$
$e^{-\lambda t}\cos(wt+\alpha)$	$\frac{(p+\lambda)\cos\alpha+w\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+w^2}$
$t^n\sin(wt)$	$n!\frac{\mathrm{Im}(p+iw)^{n+1}}{(p^2+w^2)^{n+1}}$
$t^n\cos(wt)$	$n!\frac{\mathrm{Re}(p+iw)^{n+1}}{(p^2+w^2)^{n+1}}$

6.2 Transformée inverse de Laplace

Définition 6.3 *Si* $L(f)(p) = F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-tp}dt$. *Alors on dit* $f(t) = L^{-1}(F)(t)$.

Linéarité

Proposition 6.3 *La transformée inverse de Laplace est linéaire*

$$L^{-1}(\alpha F + \beta G)(t) = \alpha L^{-1}(F)(t) + \beta L^{-1}(G)(t)$$

La transformée inverse de Laplace d'une dérivée

Proposition 6.4 *La transformée inverse de Laplace d'une dérivée est donnée par*

$$L^{-1}\left[(L(f))'\right](t) = -tf(t)$$

Et par récurrence sur n, la dérivée d'ordre n :

$$L^{-1}\left[(L(f))^{(n)}\right](t) = (-1)^n t^n f(t)$$

Formule de Heaviside

Cette formule permet de trouver l'originale d'une fraction rationnelle. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes tels que $d^0(P) < d^0(Q)$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ les zéros de Q qu'on suppose simple. On suppose de plus que la fraction rationnelle $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ est irréductible. Cherchons l'originale de F.

En décomposant en élèments simples, on a :

$$F(p) = \frac{A_1}{p-\alpha_1} + \frac{A_2}{p-\alpha_2} + ...\frac{A_n}{p-\alpha_n}$$

Le calculs d'un coefficient A_k, $k = 1, 2, .., n$, est donné par la relation :

$$A_k = \lim_{p \to \alpha_k} (p-\alpha_k) F(p) = \lim_{p \to \alpha_k} \frac{P(p)}{Q(p)} (p-\alpha_k) = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

car $\lim\limits_{p \to \alpha_k} \frac{(p-\alpha_k)}{Q(p)} = \lim\limits_{p \to \alpha_k} \frac{(p-\alpha_k)}{Q(p)-Q(\alpha_k)} = \frac{1}{Q'(\alpha_k)}$.

D'où $F(p) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \frac{1}{p-\alpha_k}$. Sachant que $L^{-1}\left(\frac{1}{p-a}\right)(t) = e^{at}$ et du fait que L^{-1} est linéaire, l'originale de F est donnée par la formule

$$L^{-1}(F)(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

qu'on appelle formule de Heaviside.

6.3 Application de la transformation de Laplace à la résolution d'équations différentielles

Considérons l'équation différentielle

$$a_0x^{(n)}(t) + a_1\ x^{(n-1)}(t) + ... + a_nx(t) = f(t) \tag{6.1}$$

vérifiant les conditions suivantes

$$x^{(i)}(0) = x_i \text{ pour tout } i : 0 \leq i \leq n-1$$

où la dérivée d'ordre zéro égale à la fonction elle même $\left(x^{(0)}(t) = x(t)\right)$.

Supposons que $a_0 \neq 0$ et les fonctions $f(t)$, $x(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont des originaux. On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (6.1), utilisons la règle de dérivation et la linéarité, (6.1) devient

$$\left(a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_n\right) X(p) = F(p) + B(p)$$

où

$$\begin{aligned} X(p) &= L(x(t)), F(p) = L(f(t)) \text{ et} \\ B(p) &= x_0\left(a_0p^{n-1}\ + a_1p^{n-2} + ... + a_{n-1}\right) + x_1\left(a_0p^{n-2}\ + a_1p^{n-3} + ... + a_{n-2}\right) + ... + x_{n-1}(a_0). \end{aligned}$$

La résolution de (6.1) donne

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{(a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_n)}$$

Ainsi la solution est donnée par

$$x(t) = L^{-1}(X(p)).$$

Exercise 10 *Donner la solution de l'équation différentielle suivante*

$$x'' + a^2x = b\sin at$$

vérifiant les conditions initiales

$$x(0) = x_0 \ \textit{et} \ x'(0) = x_1$$

Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation , on obtient

$$L\left(x'' + a^2 x\right) = L(b \sin at).$$

Utilisons les propriétés de dérivation et de linéarité, alors

$$\begin{aligned} L(x'') + a^2 L(x) &= bL(\sin at). \\ \left(p^2 + a^2\right) X(p) &= \frac{ba}{p^2 + a^2} + px_0 + x_1 \end{aligned}$$

ainsi on obtient

$$X(p) = \frac{ba}{(p^2 + a^2)^2} + \frac{p}{p^2 + a^2} x_0 + \frac{1}{p^2 + a^2} x_1. \tag{6.2}$$

Calculons l'originale de (6.2)

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2 + a^2} x_1\right) = \frac{x_1}{a} L^{-1}\left(\frac{a}{p^2 + a^2}\right) = \frac{x_1}{a} \sin at$$

$$L^{-1}\left(\frac{p}{p^2 + a^2} x_0\right) = x_0 L^{-1}\left(\frac{p}{p^2 + a^2}\right) = x_0 \cos at$$

d'autre part on a

$$\frac{ba}{(p^2 + a^2)^2} = \frac{\frac{ib}{4a^2}}{p + ia} + \frac{\frac{-ib}{4a^2}}{p - ia} + \frac{\frac{-b}{4a}}{(p + ia)^2} + \frac{\frac{-b}{4a}}{(p - ia)^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} L^{-1}\left(\frac{ba}{(p^2 + a^2)^2}\right) &= \frac{ib}{4a^2} L^{-1}\left(\frac{1}{p + ia}\right) - \frac{ib}{4a^2} L^{-1}\left(\frac{1}{p - ia}\right) \\ &\quad - \frac{b}{4a} L^{-1}\left(\frac{1}{(p + ia)^2}\right) - \frac{b}{4a} L^{-1}\left(\frac{1}{(p - ia)^2}\right) \\ &= \frac{ib}{4a^2}\left[e^{-iat} - e^{iat}\right] - \frac{b}{4a}\left[te^{-iat} + te^{iat}\right] \\ &= \frac{b}{2a^2} \sin at - \frac{bt}{2a} \cos at. \end{aligned}$$

Ainsi la solution est

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_1}{a}\sin at + x_0\cos at + \frac{b}{2a^2}\sin at - \frac{bt}{2a}\cos at. \\ &= \left(\frac{x_1}{a} + \frac{b}{2a^2}\right)\sin at + \left(x_0 - \frac{bt}{2a}\right)\cos at. \end{aligned}$$

Exercise 11 *Déterminer la transformée de Laplace de la fonction* $f(t) = \cos wt$.

On a

$$\cos wt = \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}$$

donc

$$\begin{aligned} L(\cos wt) &= L(\frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}) = \frac{1}{2}L(e^{iwt}) + \frac{1}{2}L(e^{-iwt}) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{iwt}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-iwt}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(-p+iw)t}\ dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(p+iw)t}\ dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p-iw)} + \frac{1}{(p+iw)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(p+iw)+(p-iw)}{(p-iw)\,(p+iw)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{p+iw+p-iw}{p^2-\ (iw)^2}\right] = \frac{p}{p^2+w^2}. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Jochim Stubbe Analyse pour Ingénieurs 10 septembre 2008.

[2] Arnaud Bodin. Calculs d'intégrales EXO7

[3] G. Facanoni. Recueil d'exercices Corrigés et aide-mémoire 2012.

[4] J. M. Rakosoton, Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles, Ed. PUF, (1999).

[5] S. Nilcaise, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus, Ed. Dunod, Paris, (2000).

[6] Elie Belorizky, Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et des ingénieurs, EDP Sciences, Paris, (2007).

[7] C. Aslangul, Des mathématiques pour les sciences, Concepts, méthodes et techniques pour la modélisation, De Boeck, Bruxelles (2011).

[8] C. Aslangul, Des mathématiques pour les sciences2, Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes, De Boeck, Bruxelles (2013).