

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Electrotechnique et Automatique

Licence

Electrotechnique

Cours

Théorie du champ

Par

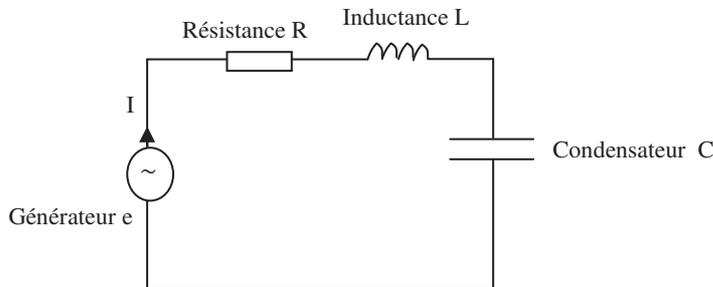
Dr. LADJIMI Abdelaziz

Maître de conférences

2016

Introduction

On considérons un circuit électrique travaillant à la fréquence f et dont la plus grande dimension géométrique est noté d .



Suivant la nature du signal et sa vitesse de propagation en distincts trois régimes en électromagnétisme [1]:

1-Le régime est dit **Stationnaire (R.S)** si $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, où t est le temps.

Toutes les grandeurs électriques et magnétiques ($\vec{E}, \vec{H}, I \dots$) sont constantes

Exemples :

Champ électrique produit par une charge électrique immobile.

Champ d'induction magnétique généré par un courant constant.

2-Le régime est dit **quasi-stationnaire (R.QS)** si $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ et $d \ll \lambda$, où $\lambda = \frac{v}{f}$ est la longueur du signal et v sa vitesse de propagation.

Exemple : un circuit électrique travaillant à la fréquence $f = 50\text{Hz} \leftrightarrow \lambda = 6000\text{km}$ (si $v = c$).

3-Le régime est dit **variable (R.V)** si $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ et $d \gg \lambda$

Exemples : four à micro-onde, la foudre, les antennes, wifi,...

Dans le RV le champ électromagnétique devient une onde électromagnétique qui se propage dans l'air et dans la matière.

Sur la base de cette introduction, on peut diviser le cours en six chapitres :

Chapitre 0 : Eléments d'analyse vectorielle

Chapitre 1 : Electrostatique.

Chapitre 2 : Magnétostatique.

Chapitre 3 : Phénomènes dépendant du temps (régime quasi-statique).

Chapitre 4 : Régime variable et équations de Maxwell.

Chapitre 5 : Propagation du champ électromagnétique.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Chapitre 0 : Eléments d'analyse vectorielle

0.1. Champ vectoriel	1
0.2. Champ scalaire	1
0.3. Divergence d'un vecteur	2
0.4. Rotationnel	2
0.5. Laplacien	2
0.6. Circulation d'un vecteur	2
0.7. Flux d'un champ vectoriel	3
0.8. Théorème de Stokes	3
0.9. Théorème de la divergence	3
0.10. Relations importantes	3
0.11. Coordonnées cylindriques	4
0.12. Coordonnées Sphériques	4

Chapitre 1 : Electrostatique

1.1. Définition du champ	6
1.2 Définition de l'électrostatique	6
1.3. Loi de Coulomb et champ électrique	6
1.4. Champ électrique créé par un ensemble de charge	7
1.5. Champ créé par une distribution linéique de charge	7
1.6. Champ créé par une distribution surfacique	8
1.7. Champ créé par une distribution volumique de charge	8
1.8. Théorème de Gauss	8
1.9. Ligne de champ	10
1.10. Potentiel électrique scalaire	10
1.10.1 Surfaces équipotentiels	11
1.11. Equation de Poisson et de Laplace	11
Champ et potentiel créés par un dipôle électrique	12
1.12.1. Définition	12
1.12.2. Potentiel créé par un dipôle	12
1.12.3. Champ électrostatique créé par un dipôle	13
1.13. Matériaux diélectriques	13
1.13.1. Charges liées	14
1.14. Déplacement (ou induction) électrique	14
1.14.1. Condensateur plan	15
1.14.2. Capacité	15

Chapitre 2 : Magnétostatique

2.1. Définition	16
2.2. Calcul du champ d'induction magnétique \vec{B} .	16
2.3. Conservation du flux magnétique	18
2.3.1. Loi de Gauss magnétique	18
2.4. Potentiel vecteur magnétique	19

2.4.1. Loi de Biot est Savart et potentiel vecteur magnétique	20
2.5. Expression local du théorème d'Ampère	20
2.6. Equation de Poisson magnétique	21
2.7. Force de Lorentz	21
2.8 Matériaux magnétiques	21
2.8.1 Définition matériau magnétique	21
2.8.2. Relation entre Le champ d'induction magnétique \vec{B} et le champ magnétique \vec{H}	22
2.8.2.1. Définition champ d'excitation magnétique \vec{H}	22
2.8.3 Classification des milieux magnétiques	23
2.8.4 Cycle d'hystérésis	24
2.8.4.1. Définition	24
2.8.4.2. Energie dissipée par cycle	25
2.8.5. Classification des matériaux ferromagnétiques	26

Chapitre 3 : Phénomènes dépendant du temps (régime quasi stationnaire)

3.1. Définition Régime quasi stationnaire	27
3.2. Loi de Faraday	27
3.2.1. Expériences Fondamentales	27
3.3. Le champ électromoteur	29
3.3.1. Conséquences	29
3.4. Applications	29
3.6. Comparaison entre le régime stationnaire et le régime quasi-stationnaires	30

Chapitre 4 : Régime variable et équations de Maxwell

4.1. Théorème d'Ampère et Equation de Continuité	31
4.2. Les équations de Maxwell	31
4.2.2. Equations de Maxwell dans un milieu linéaire homogène et isotrope (MLHI)	32
4.3. Loi d'Ohm	33
4.4. Théorème de conservation de l'énergie et vecteur de Poynting	33
4.4.1. Théorème de Poynting	33
4.5. Conditions aux limites	34

Chapitre 5 : Propagation du champ électromagnétique

5. 1. Equations de propagation des champs \vec{E} et \vec{B} et des potentiels	37
5.1.1. Equations de Maxwell dans le vide	37
5.1.1.1 Equation de propagation en champ électrique	37
5.1.1.2 Equation de propagation en champ d'induction magnétique	37
5.1.1.3 Equation de propagation en potentiel vecteur	38

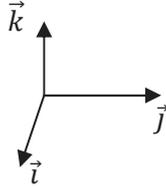
5.1.1.4. Equation de propagation en potentiel scalaire	38
5.2. Onde électromagnétique plane	39
5.2.1. Propriétés de l'onde plane	39
5.2.2 Ondes électromagnétiques plane sinusoïdales	40
5.2.4. Vitesse de phase et vitesse de groupe	41
5.2.5. Impédance caractéristique du milieu de propagation	41
5.2.6. Energie de Propagation	41
5.2.7. Représentation complexe de l'onde plane sinusoïdale	42
5.3. Etats de polarisation de L'OEMPS	42
5.4. Equation d'onde dans un milieu linéaire, homogène et isotrope	43
5.4.1. Propagation des OPEM dans les isolants	44
5.4.2. Propagation des OPEM dans les conducteurs	45
5.5. Réflexion et transmission des ondes électromagnétiques	45
5.7. Spectre du rayonnement électromagnétique	47

CHAPITRE 0 : ÉLÉMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE

Chapitre 0: Eléments d'analyse vectorielle

0.1.Champ vectoriel

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un Trièdre direct (c'est-à-dire \vec{k} dans le sens de $\vec{i} \wedge \vec{j}$)



- **Produit scalaire**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cos(A, B)$$

Avec $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ et $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

- **Produit vectoriel**

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A \cdot B \cdot \sin(A, B).$$

0.2.Champ scalaire

La fonction $f(M)$ est dite fonction scalaire si :

$$f(M) = f(x, y, z)$$

- **Gradient d'un champ scalaire**

Soit une fonction scalaire $f(x, y, z)$

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot f \cdot (dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}) \end{aligned}$$

Avec $\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) = \vec{\nabla}$ ($\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla)

On définit le gradient d'un champ scalaire par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right)$$

0.3. Divergence d'un vecteur :

Pour un champ de vecteur \vec{A} :

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

0.4. Rotationnel :

Définition :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Propriétés :

- C'est un pseudo opérateur (il dépend de la convention d'orientation choisie). Si \vec{A} est un vecteur vrai, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$ sera un pseudo vecteur.

0.5. Laplacien

1-Laplacien scalaire

Soit f un champ scalaire.

On pose alors $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \text{div}\overrightarrow{\text{grad}}f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (en coordonnées cartésiennes).

2-Laplacien vectoriel

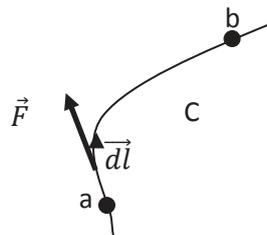
Pour $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\text{div}\vec{A} - \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

0.6. Circulation d'un vecteur

Définition : On définit la circulation d'un vecteur \vec{F} le long d'un contour (C), par l'intégrale simple :

$$C(\vec{F}) = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{dl}$$



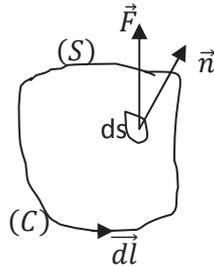
La circulation le long d'un contour fermé est notée :

$$C(\vec{F}) = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

0.7. Flux d'un champ vectoriel

On définit le flux d'un vecteur \vec{F} à travers une surface (S) par l'intégrale double :

$$\phi(\vec{F}) = \iint \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$



Lorsque la surface (S) est fermée, le vecteur unitaire \vec{n} de la surface est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

0.8. Théorème de Stokes

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (C) limitant une surface (S) est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

0.9. Théorème de la divergence

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume (v), limité par la surface fermée (S) :

$$\oiint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint \text{div} \vec{F} dv$$

0.10. Relations importantes

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = 0$$

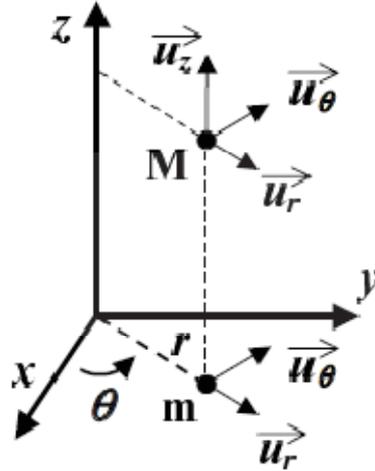
$$\text{div}(\vec{F} \wedge \vec{K}) = \overrightarrow{\text{K}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} - \overrightarrow{\text{F}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{K}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \cdot \vec{K}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{K} + \overrightarrow{\text{grad}}(f \wedge \vec{K})$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$$

0.11. Coordonnées cylindriques



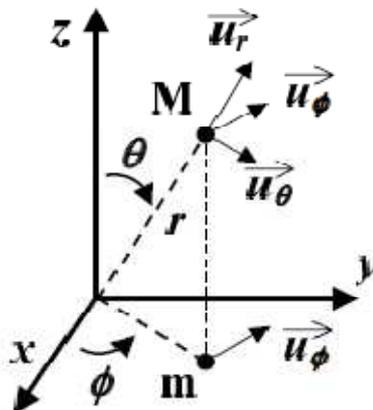
$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{\text{div}}\vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

0.12. Coordonnées Sphériques



$$\overrightarrow{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta \cdot A_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

CHAPITRE 1 : ELECTROSTATIQUE

Chapitre 1 : Electrostatique

1.1. Définition du champ :

Par définition, un champ est l'effet d'une source en un point de l'espace à un instant donné. Le champ le plus connu est le champ de gravitation \vec{g} créée par la terre en un point de l'espace.

D'après cette définition le champ électrostatique \vec{E} est l'effet créée par une charge électrique ou un ensemble de charges immobiles en un point de l'espace. Cet effet se manifeste par une force sur toute charge q placée en ce point : $\vec{F} = q\vec{E}$

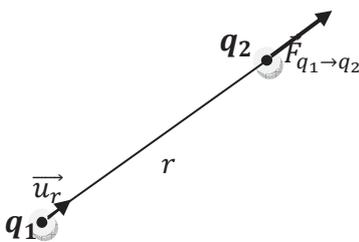
On peut définir le champ électrique comme étant un porteur d'énergie (électrique ou magnétique) pour la transférer d'un point de l'espace à un autre [2].

1.2 Définition de l'électrostatique

L'électrostatique est l'étude des phénomènes dus aux charges électriques au repos

1.3 Loi de Coulomb

Deux charges ponctuelles électriques q_1 et q_2 placées dans le vide exercent l'une sur l'autre une force appelée force électrostatique. La force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 est donnée par la loi de Coulomb :

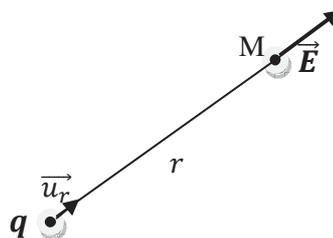


$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (1.1)$$

où $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m$ est la permittivité du vide.

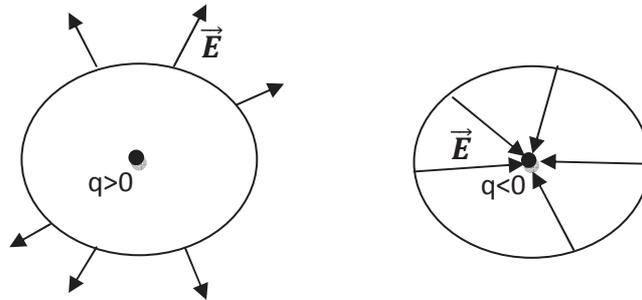
On définit le champ électrique \vec{E} produit par la charge q_1 comme suit :

$$\vec{F} = q_2 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_r \left[\frac{V}{m} \right] \quad (1.2)$$



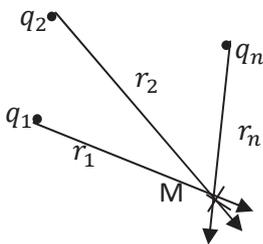
Le champ électrique \vec{E} en M produit par la charge q est radial : sa direction passe par la charge. Son amplitude varie avec l'inverse du carré de la distance à la charge. Le champ électrique est donc d'amplitude constante sur des sphères centrées en q.

Le sens du champ \vec{E} est dirigé vers l'extérieur de la charge si $q > 0$ et vers l'intérieur si $q < 0$



1.4. Champ électrique créé par un ensemble de charges

Dans le cas où le champ est créé par plusieurs charges (q_1, q_2, \dots, q_n), l'intensité du champ est égale à la somme vectorielle des intensités due à chaque charge.

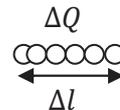


$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

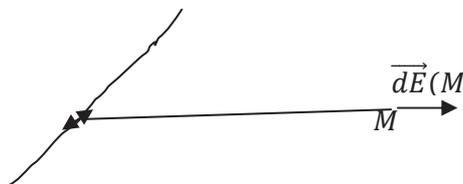
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i \quad (1.3)$$

1.5. Champ créé par une distribution linéique de charge

Les charges « alignées », caractérisées par : $\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l} \left[\frac{C}{m} \right]$



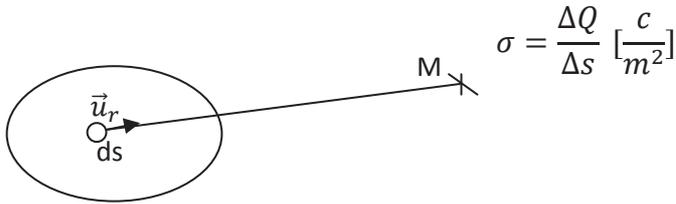
avec λ est la densité linéique de charge



$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^3} \vec{r} \quad (1.4)$$

1.6. Champ créé par une distribution surfacique

Les charges disposées sur une surface, caractérisées par une densité surfacique de charges

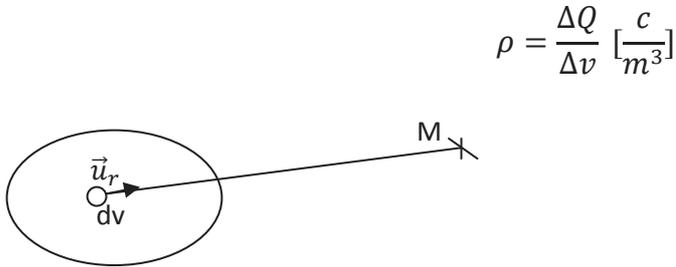


$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta s} \left[\frac{c}{m^2} \right]$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\vec{r}}{r^3} \sigma ds \quad (1.5)$$

1.7. Champ créé par une distribution volumique de charge

Les charges disposées dans un volume, caractérisées par une densité volumique de charge



$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta v} \left[\frac{c}{m^3} \right]$$

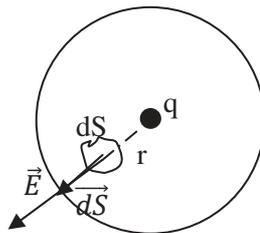
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r}}{r^3} \rho dv \quad (1.6)$$

1.8. Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss exprime la relation entre le flux électrique sortant d'une surface fermée et la somme de charges comprises à l'intérieur du volume délimité par cette surface. On considère une charge ponctuelle q (positive). Cette charge crée un champ électrique d'intensité [4] :

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (1.7)$$

Puis on prend comme surface fermée une sphère de rayon r centrée sur la charge [4].



Comme il ya une symétrie (une sphère), tous les vecteurs \vec{dS} sont radiaux, donc de même direction que \vec{E} :

$$\varphi(\vec{E}) = \iint \vec{E} \vec{dS} = \iint E dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \iint dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} S$$

S est la surface de la sphère qui est égale $4\pi r^2$

En remplaçant, on trouve :

$$\varphi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.8)$$

Le flux du champ électrique sortant d'une sphère au centre de laquelle se trouve une charge ponctuelle positive q vaut $\frac{q}{\epsilon_0}$

La relation trouvée par le calcul pour une seule charge et une sphère est valable dans le cas général. Pour une surface fermée renfermant n charges q_1, q_2, \dots, q_n [4].

On peut montrer la relation :

$$\varphi(\vec{E}) = \iint \vec{E} \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_{int} \quad (1.9)$$

Le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée est égal à la somme algébrique des charges comprises dans le volume délimité par la surface, divisée par la permittivité du vide

Si la charge Q est répartie dans l'espace selon une densité volumique de charge ρ nous avons :

$$Q = \iiint \rho dv \quad (1.10)$$

Le théorème de Gauss peut alors s'écrire :

$$\oiint \vec{E} \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dv \quad (1.11)$$

où (s) est une surface fermée quelconque orientée vers l'extérieur et v est le volume intérieur à (s) . En utilisant le théorème de la divergence, on peut écrire :

$$\oiint \vec{E} \vec{dS} = \iiint \text{div} \vec{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dv \quad (1.12)$$

on obtient l'équation de Maxwell Gauss électrique (eq. 1.13) qui constitue la forme locale du théorème de Gauss :

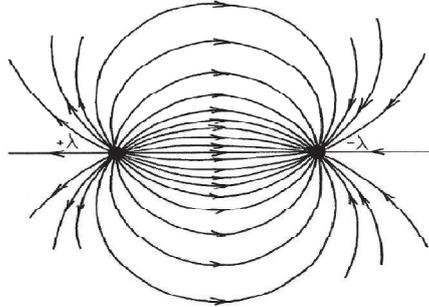
$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

Cette équation relie \vec{E} aux charges qui constituent les sources du champ électrostatique.

1.9. Ligne de champ

Les lignes du champ électrique sont les lignes tangentes au vecteur champ électrique en chaque point. Elles sont orientées dans le sens de \vec{E} .

Exemple : deux droites parallèles de charges opposées



1.10. Potentiel électrique scalaire

Champ électrique \vec{E} créé par une charge q en tout point

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1.14)$$

On a $-\frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{q}{4\epsilon_0 r}\right)$, si on pose $V = \frac{q}{4\epsilon_0 r} + cst$

Où V est le potentiel scalaire électrostatique créé par la charge q à la distance r

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad (1.15)$$

Cette relation montre que le champ électrique dérive d'un potentiel électrique scalaire.

On peut écrire de manière équivalente que le champ électrostatique est à circulation conservative, c'est-à-dire qu'il satisfait la relation intégrale suivante

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \iiint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} d\vec{s} = \iiint \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}}(V)) d\vec{s} = 0$$

- ✓ Potentiel électrostatique créé par une distribution discrète de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + cst \quad (1.16)$$

- ✓ Potentiel électrostatique créé par une distribution linéique de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r} \quad (1.17)$$

- ✓ Potentiel électrostatique créé par une distribution surfacique de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma ds}{r} \quad (1.18)$$

✓ Potentiel électrostatique créé par une distribution volumique de charges

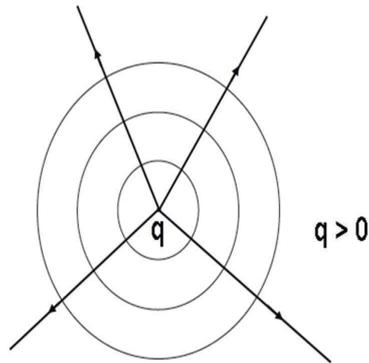
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dv}{r} \quad (1.19)$$

1.10.1 Surfaces équipotentiels

On dit qu'une surface est une surface équipotentielle si le potentiel est le même en tout point de la surface.

Exemple : pour une charge ponctuelle q , $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

$V = \text{cte}$ pour $r = \text{cte}$



Cet exemple montre que les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentiels.

1.11. Equation de Poisson et équation de Laplace

Sachant que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, l'équation de Maxwell Gauss $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ devient :

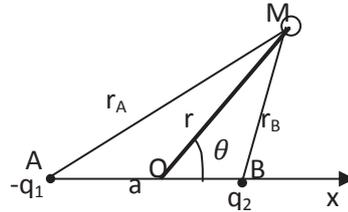
$$\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.20)$$

D'où l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le potentiel électrostatique.

La résolution de l'équation de Poisson ou l'équation de Laplace (si $\rho = 0$) associée aux conditions aux limites est un problème classique en électrostatique. La plupart de situations pratiques nécessitent l'utilisation des méthodes de résolutions numériques (la méthode des éléments finis par exemple).

1.12. Champ et potentiel créés par un dipôle électrique

1.12.1. Définition : un dipôle électrostatique est constitué de deux charges électriques ponctuelles immobiles de signe opposés, séparées par une distance a très petite par rapport à la distance r au point M où l'on observe leurs effets ($r \gg a$).



Ce dipôle crée un moment dipolaire $\vec{P} = q \cdot \overrightarrow{AB}$ (c.m) dirigé de la charge négative vers la charge positive

1.12.2. Potentiel créé par un dipôle

Le dipôle est invariant par rotation autour de l'axe $x \Rightarrow$ le potentiel ne dépend que de r et θ ($r=OM$, $\theta=(Ox, OM)$) [5], d'où $V = V(r, \theta)$

Le potentiel V créé en M par le dipôle est :

$$V(M) = \frac{1}{4\epsilon_0\pi} \left(-\frac{q}{AM} + \frac{q}{BM} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) ; \text{ Par ailleurs :}$$

$$\vec{r}_B = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$$

$$r_B^2 = (BO + OM)^2 = (OM - OB)^2 = OM^2 + OB^2 - 2OMOB\cos\theta = r^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot r \cdot \cos\theta$$

$$\text{Soit } r_B = r \sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

$$\text{De même pour } r_A, \text{ on obtient : } r_A = r \sqrt{1 + \frac{a}{r} \cdot \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

$$\text{d'où : } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 - \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$a \ll r$ d'où $a/r \ll 1$. Un développement limité au 1^{er} ordre de la forme $(1+x)^n$: $((1+x)^n = 1 + nx)$

on obtient :

$$V(M) = \frac{q a \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.21)$$

1.12.3. Champ électrostatique créé par un dipôle

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ donc :

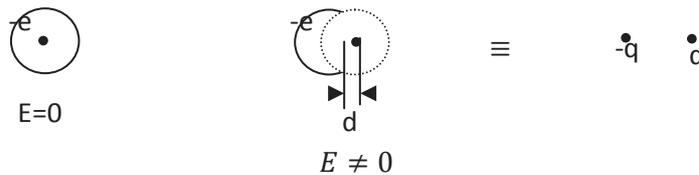
$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2P \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{P \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases} \quad (1.22)$$

1.13. Matériaux diélectriques

Les diélectriques sont une classe très importante de corps utilisés en génie électrique principalement pour isoler des conducteurs et construire des condensateurs et des éléments de stockage d'énergie etc... Leur principale caractéristique est le fait que toutes les charges des diélectriques sont 'liées' les unes aux autres formant ainsi des dipôles et ne contiennent pas des charges libres qui puissent se déplacer et engendrer des courants.

Schématiquement, il existe deux mécanismes de polarisation des charges liées :

1- Induction de dipôles électriques locaux [2] :



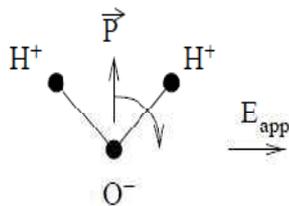
-En absence du champ électrique externe, le centre de gravité des charges positives et négatives sont confondus ($d=0$)

-Sous l'action du champ externe, le centre de gravité des charges positives de la molécule se déplace suivant le champ externe, alors que celui des charges négatives se déplace dans le sens contraire et comme résultat les molécules deviennent un dipôle (polarisation électronique) \vec{P} est le vecteur de polarisation

2- Polarisation par orientation (orientations de moments dipolaires préexistants)

En absence du champ externe, le centre de gravité des charges positives et négatives ne sont pas confondus (molécules polaires)

Exemple : l'acide chlorhydrique Hcl, l'eau H₂O.

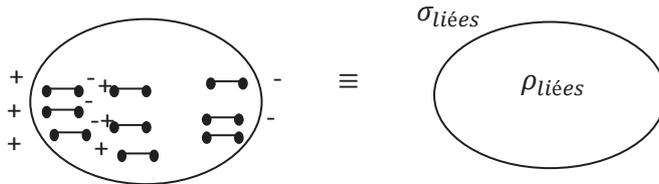


1.13.1. Charges liées

Sous l'application de \vec{E}_{app} il se produit les [3] :

- ✓ charges liées distribuées en volume : $\rho_{liées} = -div\vec{P}$
- ✓ charges liées distribuées en surface $\sigma_{liées} = n\vec{P}$

Où \vec{P} est le vecteur de polarisation.



1.14. Déplacement électrique

Considérons un système électrique contenant des charges libres et des charges liées. On introduit le vecteur de déplacement électrique \vec{D} , qui est une grandeur qui ne dépend que des charges libres [3] : par l'application du théorème de Gauss:

$$\epsilon_0 div\vec{E} = \rho = \rho_{libres} + \rho_{liées} = \rho_{libres} - div\vec{P} \Rightarrow div(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_{libres}$$

et ainsi $div\vec{D} = \rho_{libres}$ avec ;

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{1.23}$$

Dans le cas d'un matériau linéaire homogène et isotrope,

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E} \tag{1.24}$$

Où χ_e est la susceptibilité électrique

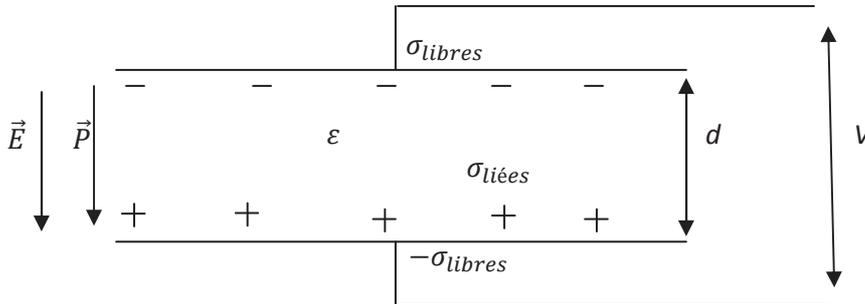
$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} = \epsilon\vec{E}$$

Ou ϵ est la permittivité électrique du milieu, on l'exprime aussi comme $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$

Où $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ est la permittivité relative

1.14.1. Condensateur plan

Un condensateur plan est formé par de deux conducteur planes, parallèles de surface s espacées d'une distance d .



On considère les deux conducteurs, séparés par un diélectrique de permittivité ϵ .

Par le théorème de Gauss on a :

$$E_{app} = \frac{\sigma_{libres}}{\epsilon_0}$$

$$E_{ind} = \frac{-\sigma_{libres}}{\epsilon_0} = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

$$E_{tot} = E = E_{app} + E_{ind}$$

$$E_{tot} = \frac{(\sigma_{libres} - P)}{\epsilon_0}$$

Avec, $D = \epsilon_0 E_{tot} + P = \sigma_{libres}$

Notez que $V = E_{tot} d$

La présence du diélectrique permet donc [3] :

- ✓ à V constant, d'augmenter σ_{libres}
- ✓ à σ_{libres} constant, de diminuer le champ électrique E .

1.14.2. Capacité

On définit la capacité d'un condensateur par :

$$C = \frac{Q_{libres}}{V} = \frac{S \sigma_{libres}}{V} \quad [F] \tag{1.25}$$

Or, $\sigma_{libres} = D = \epsilon E$ (par Gauss) et $E = \frac{V}{d} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$

D'après cette expression la capacité dépend de la configuration géométrique du condensateur ainsi que des propriétés diélectriques du milieu entre les deux armatures.

CHAPITRE 2 : MAGNÉTOSTATIQUE

Chapitre 2 : Magnétostatique

Introduction : Comme le nom du chapitre l'indique, nous allons étudier l'ensemble des phénomènes magnétiques tout d'abord en absence de matière (dans le vide) et en ne considérant que les champs magnétiques ne variant pas dans le temps, c'est-à-dire constant.

2.1. Définition

Le champ d'induction magnétique \vec{B} traduit l'effet du déplacement des charges électriques (un courant I).

2.2. Calcul du champ d'induction magnétique \vec{B} .

Loi de Biot et Savart

En un point P de l'espace, l'élément de conducteur $d\vec{l}$, parcouru par I , génère un champ d'induction magnétique élémentaire $d\vec{B}$.

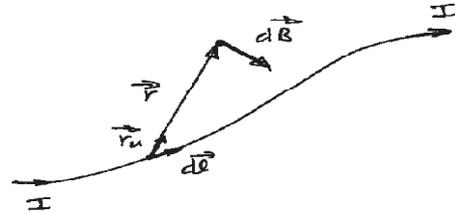
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.1)$$

où $d\vec{l}$: longueur du circuit soumis au courant I , orienté dans le sens de I .

r : distance de l'élément $d\vec{l}$ au point d'expression de l'induction $d\vec{B}$.

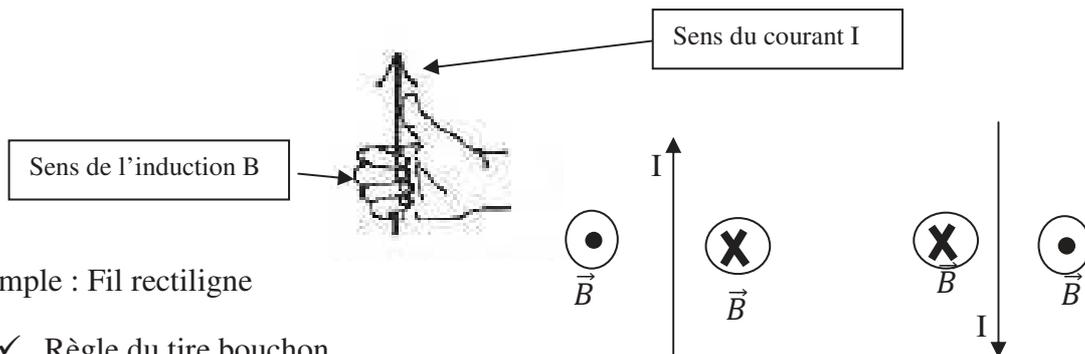
μ_0 : Perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$).

L'induction \vec{B} s'exprime en Tesla (B/T).



Le sens de $d\vec{B}$ est donné par la règle du tire-bouchon (ou la règle de la main droite). La direction de $d\vec{B}$, est donnée par le produit vectoriel $d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$.

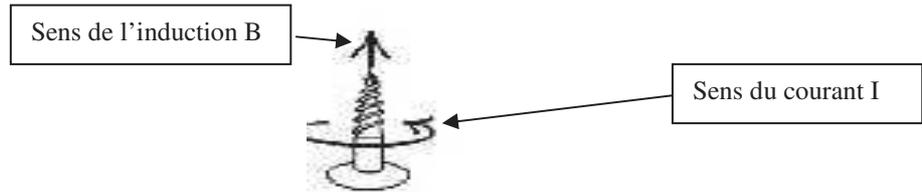
✓ La main droite



Exemple : Fil rectiligne

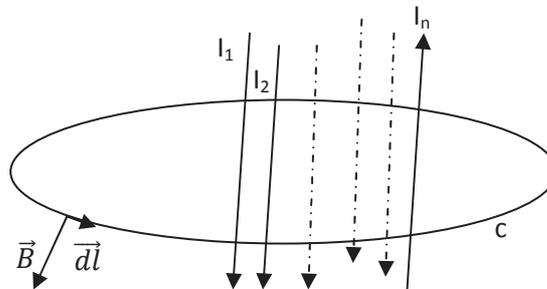
✓ Règle du tire bouchon

Exemple : Spire



Loi (ou théorème) d'Ampère

Considérons n conducteurs I_1, I_2, \dots, I_n dans l'espace et un contour fermé c entourant ces n conducteurs.



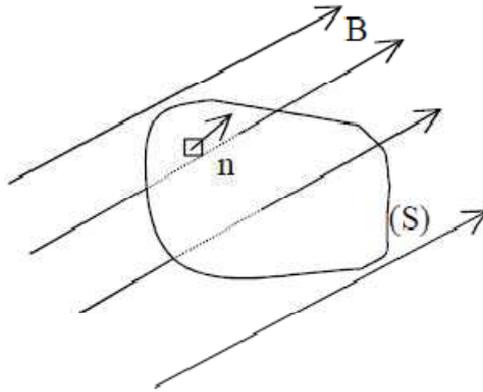
La circulation du vecteur d'induction \vec{B} le long d'une courbe fermée c est égale à la somme algébrique des courants traversant la surface s 'appuyant sur le contour c .

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i \quad (2.2)$$

Remarque : La loi d'Ampère est simple à utiliser et permet de calculer le champ B lorsque la forme des lignes de champ d'induction peut être déterminée par symétrie. Le contour fermé l doit avoir une position simple (tangent ou perpendiculaire) par rapport aux lignes de champ. Souvent, le contour l représente lui-même une ligne de champ d'induction [4].

2.3. Conservation du flux magnétique

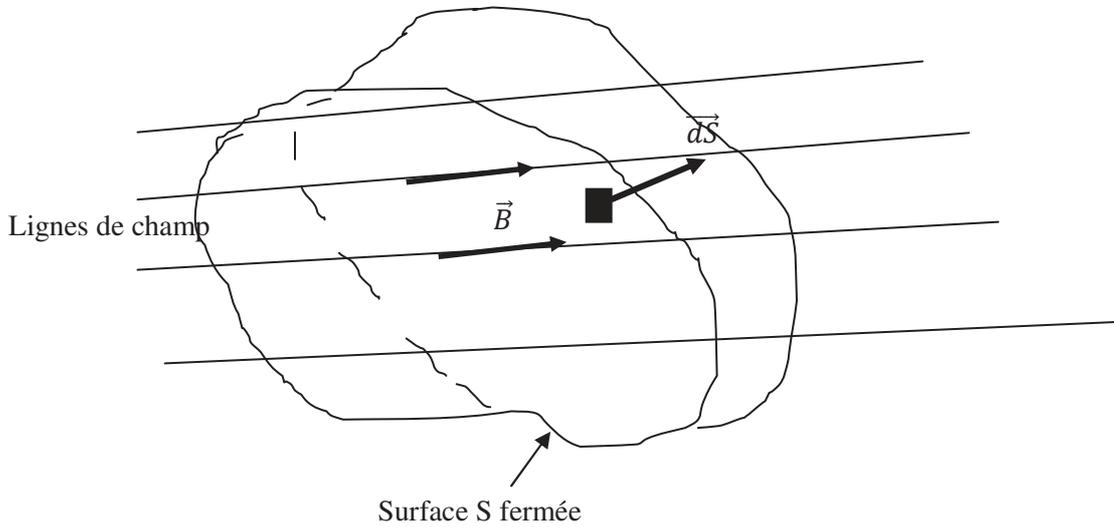
Le flux du vecteur d'induction magnétique \vec{B} à travers une surface fermée (S) est définie par :



$$\varphi(\vec{B}) = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.3)$$

2.3.1. Loi de Gauss magnétique

Considérons une surface S fermée (c'est-à-dire contenant un volume) plongée dans un champ d'induction magnétique \vec{B} .



La loi de Gauss du magnétisme s'exprime par :

$$\varphi(\vec{B}) = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.4)$$

Le flux magnétique net traversant une surface fermée est nul

Question : Montrer que $\text{div } \vec{B} = 0$?

D'après la loi de Biot est savart

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \text{div}(\vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3})$$

$$\text{div} \left(\vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{dl} - \vec{dl} \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

On a :

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r}$$

Donc :

$$\text{div} \left(\vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{dl} - \vec{dl} \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \right)$$

$$\vec{dl} \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \right) = 0. (\text{car le rotationnel d'un gradient est toujours égale à zero})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{dl} = 0. (\text{car } \vec{dl} \text{ est un vecteur fixe donc son rotationnel est nul}).$$

On obtient :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \text{ (Equation de Maxwell Gauss magnétique)}$$

Le flus de \vec{B} est un flux conservatif.

2.4. Potentiel vecteur magnétique

On a :

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = 0 \text{ (divergence d'un rotationnel est toujours égale à zero)}$$

$$\text{div}(\vec{B} - \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$$

\vec{A} est appelé potentiel vecteur magnétique

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} \tag{2.5}$$

L'induction magnétique B derive d'un potentiel vecteur magnétique

Remarque :

$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$, si on pose $\vec{A} = \vec{C} + \overrightarrow{grad}f \Rightarrow \vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} = \overrightarrow{rot}\vec{C} \Rightarrow \vec{A}$ n'est pas unique

En stationnaire on ajoute le jauge de Coulomb $div\vec{A} = 0$ pour assurer l'unicité de \vec{A} .

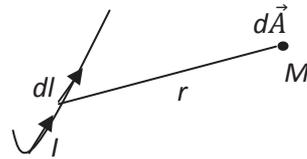
En régime stationnaire on a :

$$\begin{cases} div\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \\ div\vec{A} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

2.4.1. Loi de Biot est Savart et potentiel vecteur magnétique

Montrer que : $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}$?

Comme $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$, il vient que ;



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow d(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{rot}(d\vec{A})$$

On a $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\overrightarrow{grad} \left(\frac{1}{r} \right)$ soit $\overrightarrow{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \overrightarrow{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge d\vec{l}$ alors

$$\overrightarrow{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\overrightarrow{rot} \frac{d\vec{l}}{r} - \frac{1}{r} \overrightarrow{rot} d\vec{l} \right)$$

Comme $d\vec{l}$ est un vecteur fixe $\Rightarrow \overrightarrow{rot} d\vec{l} = 0$

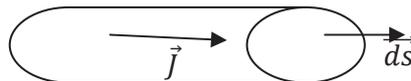
Donc

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{r} \quad (2.7)$$

2.5. Expression local du théorème d'Ampère

On définit la densité de courant J par :

$$J = \frac{I}{S} [\text{A/m}^2] \quad (2.8)$$



Ou bien plus généralement :

$$I = \oint \vec{J} ds \quad (2.10)$$

Le champ d'induction magnétique d'un conducteur cylindrique est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{J} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} dv.$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I,$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint \overrightarrow{rot} \vec{B} ds = \mu_0 \iint \vec{J} ds.$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) est dite équation de Maxwell Ampère en stationnaire.

2.6. Equation de Poisson magnétique

On a :

$$\begin{aligned} div \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \overrightarrow{rot} \vec{A}. \\ div \vec{A} &= 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}, \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{A}) = -\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.12)$$

2.7. Force de Lorentz

Force exercée sur une charge test ponctuelle q se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un champ d'induction magnétique \vec{B} :

$$\overrightarrow{F}_{mag} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (2.13)$$

En présence d'un champ électrique et d'un champ d'induction magnétique (Force de Lorentz)

$$\vec{F} = \overrightarrow{F}_{mag} + \overrightarrow{F}_{el} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (2.14)$$

Force magnétique s'exerçant sur un élément de conducteur parcouru par un courant I : si λ est la densité en (C/m) des charges se déplaçant à la vitesse \vec{v} , on a $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda \Delta l}{\Delta t} = \frac{\lambda v \Delta t}{\Delta t} = \lambda v$. Par conséquent [3],

$$\overrightarrow{F}_{mag} = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) dq = \int (\vec{v} \wedge \vec{B}) \lambda dl \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{F}_{mag} = \int I(d\vec{l} \wedge \vec{B}) \quad (2.15)$$

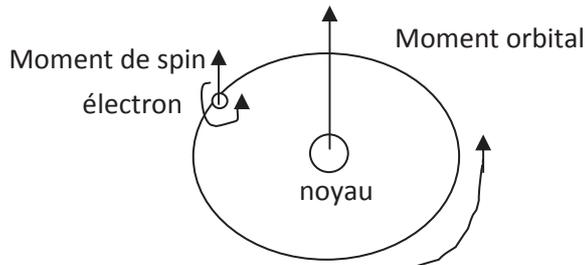
2.8 Matériaux magnétiques

2.8.1 Définition matériau magnétique

Les matériaux magnétiques sont des matériaux qui ont la propriété de présenter un moment **d'aimantation** sous l'influence d'un champ magnétique d'excitation extérieur.

 Aimantation et Moment magnétique

Pour expliquer le concept de l'aimantation, il est nécessaire de passer à l'échelle atomique et de définir le moment magnétique atomique. Considérant un matériau comme un ensemble d'atome [6].



Chaque atome possède un moment atomique, contribution d'un moment orbital et d'un moment de spin.

- ✓ Le moment orbital d'un atome résulte de la rotation de ses électrons autour du noyau.
- ✓ Le moment de spin d'un atome résulte de la rotation de ses électrons sur eux-mêmes.

Le moment magnétique atomique total d'un matériau est la somme vectorielle de tous ses moments magnétiques atomiques. Le moment magnétique \vec{m} d'un matériau constitué de n atomes s'exprime alors ainsi :

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \quad (2.16)$$

- ✓ Aimantation

L'aimantation magnétique est la quantité de moment magnétique atomique par unité de volume

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} \text{ [A/m]} \quad (2.17)$$

où \vec{M} est l'aimantation magnétique et V est le volume.

2.8.2. Relation entre Le champ d'induction magnétique \vec{B} et le champ magnétique \vec{H}

2.8.2.1. Définition champ d'excitation magnétique \vec{H}

Le champ magnétique \vec{H} (A/m) rend compte de l'influence du milieu magnétique sur les grandeurs. Son rotationnel ne dépend que des sources externes de courant [3].

La loi d'Ampère donne :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{tot}$$

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{app} + \vec{J}_{mag}$$

où \vec{J}_{app} est dû à une éventuelle source externe de courant et \vec{J}_{mag} est associé à l'aimantation du matériau (courants microscopiques).

$$rot \vec{H} = \vec{J}_{app}$$

Dès lors, on peut écrire

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (2.18)$$

La relation entre l'aimantation magnétique \vec{M} et les courants \vec{J}_{mag} donnée par :

$$rot \vec{M} = \vec{J}_{mag} \quad (2.19)$$

Dans un milieu magnétique linéaire homogène et isotrope

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2.20)$$

où χ_m est la susceptibilité magnétique

Dès lors

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\ &\Rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} \end{aligned}$$

où $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ est la perméabilité magnétique du milieu. On écrit aussi

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

où $\mu_r = (1 + \chi_m)$ est la perméabilité relative du milieu.

On classifera les matériaux magnétiques suivant la valeur de leur susceptibilité magnétique χ_m .

2.8.3 Classification des milieux magnétiques

$\chi_m < 0$: Milieux diamagnétiques

La susceptibilité χ_m est faible et de valeur négative. \vec{H} et \vec{M} sont donc de sens contraire (cuivre, plomb, silicium).

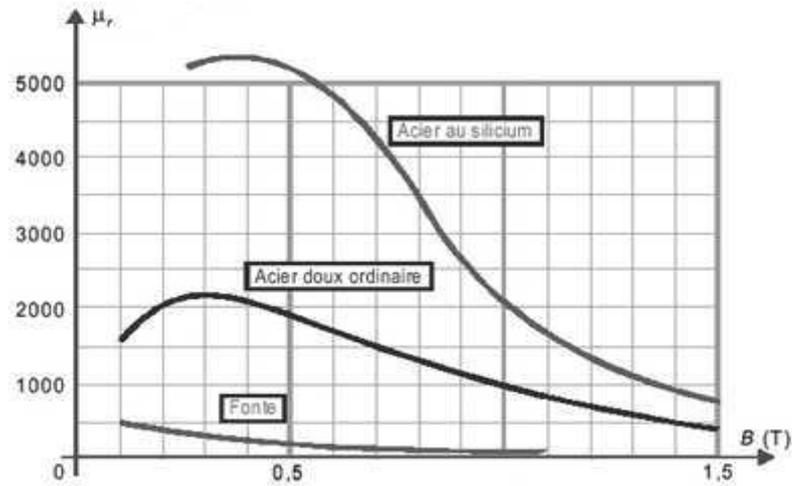
$\chi_m > 0$ Milieux paramagnétiques

La susceptibilité χ_m est faible et de valeur positive. \vec{H} et \vec{M} sont de sens identique (par exemple : aluminium, tungstène, platine).

$\chi_m \gg 1$ Milieux ferromagnétiques

La susceptibilité χ_m est grande. Ces matériaux sont essentiels pour l'électrotechnique.

Ils se basent sur l'utilisation du Fer, Cobalt, Nickel et leurs alliages. La courbe ci-dessous donne un ordre de grandeur et l'évolution de la perméabilité relative pour trois matériaux ferromagnétiques en fonction du champ magnétique B qui les traversent.

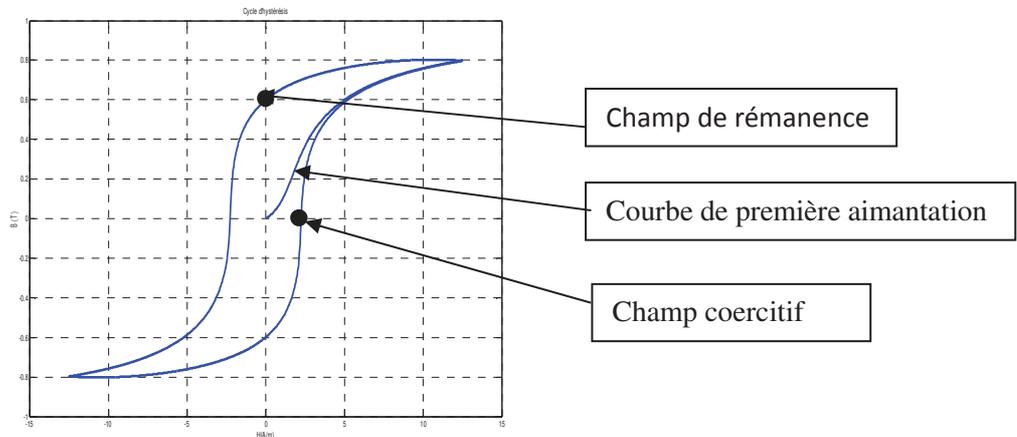


Source : Introduction aux circuits magnétiques [7]

2.8.4 Cycle d'hystérésis

2.8.4.1. Définition

On appelle cycle d'hystérésis (la courbe B(H)) d'un matériau le relevé de l'induction \vec{B} qu'il génère alors soumis à un champ magnétique \vec{H} que l'on fait varier [6].



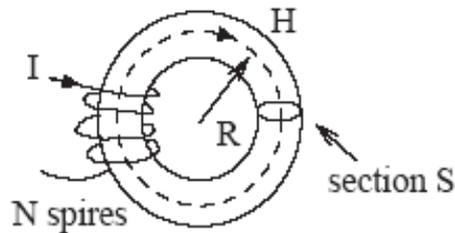
Conséquence :

Il subsiste une induction rémanente B_r lorsque l'on annule l'excitation. Si l'on souhaite annuler B , il faut inverser le champ d'excitation H , on appelle la valeur de ce champ le champ coercitif H_c . [7].

Remarque : l'hystérésis magnétique = retard du à la dynamique des domaines magnétiques

2.8.4.2. Energie dissipée par cycle

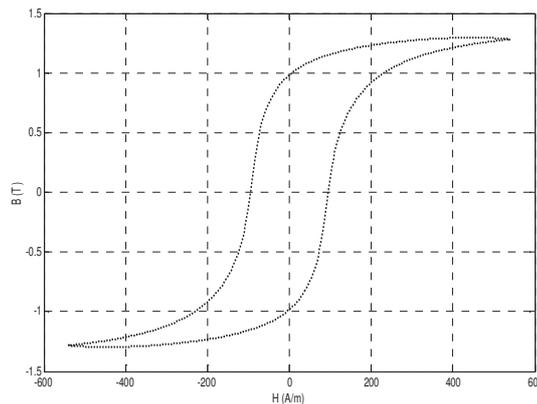
✓ Energie électrique fournie par cycle



D'après le théorème d'Ampère, $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$

Et par la loi de Faraday, $= \frac{d\phi}{dt}$, on obtient l'énergie électrique fournie par cycle

$$E_{\text{éle}} = \oint NVI dt = \oint N \frac{dB \cdot S H(2\pi R)}{dt} dt = 2\pi RS \oint H dB$$



✓ Energie dissipée par le matériau par unité de volume et par cycle [3] :

$$E_{\text{dissipée}} = \frac{E_{\text{éle}}}{V} = \oint H dB \quad (2.21)$$

2.8.5. Classification des matériaux ferromagnétiques

L'observation du cycle d'hystérésis permet de regrouper les matériaux ferromagnétiques en deux catégories :

1-Matériaux ferromagnétiques doux :

B_r plutôt élevée

H_c plutôt faible

Surface du cycle d'hystérésis faible

2-Matériaux ferromagnétiques durs :

B_r plutôt faible

H_c plutôt élevée

Surface du cycle d'hystérésis élevée

**CHAPITRE 3 : PHÉNOMÈNES DÉPENDANT DU
TEMPS (RÉGIME QUASI STATIONNAIRE)**

Chapitre 3 : Phénomènes dépendant du temps (R.Q.S)

3.1 Définition Régime quasi stationnaire :

Si l'intensité dans un circuit électrique varie lentement, on utilise l'approximation des régimes quasi stationnaires, valable pour des fréquences allant jusqu'à plusieurs kHz :

On néglige les phénomènes de propagation des signaux dans les circuits électriques.

Exemple 1 : une ligne de transport d'énergie électrique de longueur $l = 90\text{km}$ et de fréquence $f = 50\text{Hz}$ de tension variable $u(t) = u_m \sin(2\pi ft)$, la longueur d'onde $\lambda = \frac{v}{f}$ du signal et v sa vitesse de propagation

$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6000\text{km} \Rightarrow \lambda \gg l$ on peut utiliser l'approximation quasi stationnaire (loi d'Ampère, loi d'Ohm, les lois de Kirchhoff, Gauss...etc.)

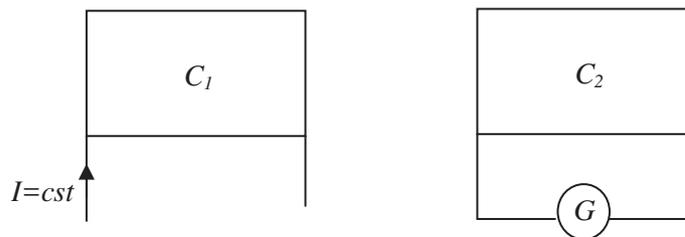
Exemple 2 : pour un circuit électrique de longueur $l = 20\text{cm}$ et de fréquence 100GHz ($\lambda = 0.3\text{cm} \ll 20\text{cm}$). on ne peut pas utiliser l'approximation quasi stationnaire, il faut tenir compte les phénomènes de propagation des signaux dans le circuit.

3.2. Loi de Faraday

3.2.1. Expériences Fondamentales

a- Expérience N° 1 :

- C_1 fixe et parcouru par un courant constant, C_2 mobile



Observations

-Un courant i prend naissance dans le circuit C_2 (le galvanomètre indique un courant)

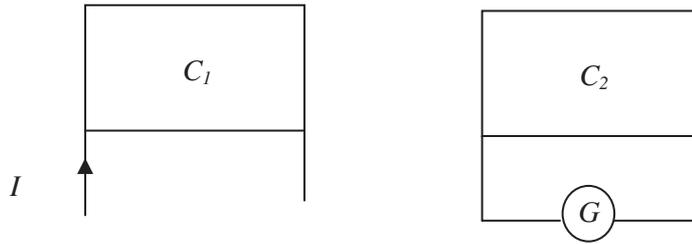
Si on inverse un des paramètres suivants :

-sens du courant dans C_1

-sens de déplacement de C_2

alors le courant i change de sens.

- C_1 mobile et parcouru par un courant I constant, C_2 immobile



Observations

-Un courant i prend naissance dans le circuit C_2

b- Expérience N° 2

Remplaçant C_1 par un aimant droit les résultats sont identiques au précédent.

c-Expérience N° 3

Revenons aux deux circuits C_1 et C_2 mais supposons qu'elle soit immobiles l'un par rapport à l'autre, cette fois le circuit C_1 alimenté par un courant variable avec le temps.

Observation

- Un courant i prend naissance dans le circuit C_2

Interprétation

Le point commun aux expériences précédentes est le suivant

Le flux d'induction magnétique traversant C_2 varie au cours du temps cette variation ce fait :

Par la variation du champ d'induction magnétique \vec{B} traversant C_2 (déplacement de C_2 ou variation de I).

Le courant traversant C_2 est appelé courant induit ; le circuit C_2 est le circuit induit, le circuit C_1 est le circuit inducteur.

La loi de Faraday

C'est une généralisation basé sur des considérations expérimentales.

La loi de faraday s'énonce ainsi :

Un circuit fermé traversé par un flux magnétique φ est le siege d'une $f.e.m$ d'induction

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} \quad (3.1)$$

Remarque :

Le signe « - » traduit la loi de Lenz :

- ✓ Le courant induit s'oppose par ses effets à la variation de flux qui lui a donné naissance.
- ✓ La *f.e.m* d'induction peut être défini comme la circulation sur le circuit fermé (c) d'un champ électromoteur \vec{E}_m .

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \oint \vec{E}_m \vec{dl} \quad (3.2)$$

3.3. Le champ électromoteur

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{B} \vec{ds} = \oint \vec{E}_m \vec{dl}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$$

$$e = -\oint \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{rot} \vec{A} = \oint \vec{E}_m \vec{dl} = \oint \overrightarrow{rot} \vec{E}_m \vec{ds} \Rightarrow \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Le champ électromoteur dérive du potentiel vecteur magnétique \vec{A} .

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}_m) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 = \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad} V)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.3)$$

Le champ électrique dérive d'un potentiel électrique scalaire et d'un potentiel vecteur magnétique.

3.3.1. Conséquences

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{B} \vec{ds} = \oint \vec{E} \vec{dl} = \oint \overrightarrow{rot} \vec{E} \vec{ds} \Rightarrow \overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Équation de Maxwell Faraday})$$

3.4. Applications

- Le principe des moteurs à induction.
- Les fours à inductions.
- Les ralentisseurs des camions et des Wagons.
- Certains embrayages automobiles.

3.6. Comparaison entre le régime stationnaire et le régime quasi-stationnaires

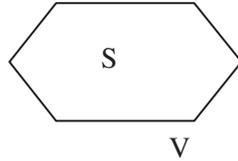
RS	RQS
$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$	$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
$div\vec{B} = 0$	$div\vec{B} = 0$
$\overrightarrow{rot}\vec{E} = 0$	$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu\vec{J}$	$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu\vec{J}$

**CHAPITRE 4 : RÉGIME VARIABLES ET
ÉQUATIONS DE MAXWELL**

Chapitre 4 : Régime variable et équations de Maxwell

4.1. Théorème d'Ampère et Equation de Continuité

Soit une charge Q contenue dans un volume V délimité par une surface S .



$$Q = \iiint \rho dV \quad (4.1)$$

s'il y a variation de la charge en fonction du temps on écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint \vec{J} d\vec{s} = - \iiint \text{div} \vec{J} dV \Rightarrow \text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ (Equation de continuité)}$$

L'équation de continuité traduit la conservation de la charge : le taux de déplacement de charges vers l'extérieur d'une région est égal à la décroissance temporelle de la charge contenue dans la région. Ainsi, Maxwell postula que

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_c + \vec{J}_d \quad (4.3)$$

Où \vec{J}_c est le courant de conduction et \vec{J}_d est le courant de déplacement.

$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}) = \text{div}(\vec{J}_c + \vec{J}_d) = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{J}_c) = -\text{div}(\vec{J}_d) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, d'après l'équation de Maxwell Gauss ($\rho = \text{div} \vec{D}$), nous aurons :

$$-\text{div} \vec{J}_c = -\frac{\partial \text{div} \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Les deux dernières équations donnent alors la forme locale de l'équation de Maxwell Ampère modifiée :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.4)$$

4.2. Les équations de Maxwell

4.2.1 Expression et interprétation physique

Equation de Maxwell-Gauss

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{libres}} \quad (4.5)$$

Cette équation relie le champ électrique à ses sources. Sa forme intégrale est :

$$\iiint \operatorname{div} \vec{D} dv = \oiint \vec{D} \vec{ds} = \iiint \rho_{\text{libres}} dv \quad (4.6)$$

Cette équation montre que le champ électrique peut lui diverger à partir de points où se trouvent des charges électriques. Le « théorème de Gauss » est donc vrai en régime variable [8].

Equation du flux magnétique

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.7)$$

Cette équation est indépendante des sources. Sa forme intégrale, obtenue en écrivant :

$$\oiint \vec{B} \vec{ds} = 0 \quad (4.8)$$

Interprétation physique : Le flux de \vec{B} à travers toute surface fermée est nul, ce qui veut dire qu'il y a conservation du flux, \vec{B} est un vecteur à flux conservatif.

Equation de Maxwell-Ampère

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.9)$$

Cette équation relie le champ magnétique à ses sources et au champ électrique. Sa forme intégrale est :

$$\oiint \operatorname{rot} \vec{H} \vec{ds} = \oint \vec{H} \vec{dl} = \oiint \vec{j} \vec{ds} + \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \vec{ds} \quad (4.10)$$

En régime stationnaire, nous retrouvons le théorème d'Ampère qui montre que le champ \vec{H} tourne autour des courants. Le terme supplémentaire en $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ indique qu'un champ électrique variable est source de champ magnétique [8].

Equation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.11)$$

Cette équation est indépendante des sources. Sa forme intégrale est:

$$\oiint \operatorname{rot} \vec{E} \vec{ds} = \oint \vec{E} \vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \vec{ds} \quad (4.12)$$

Cette équation décrit tous les phénomènes d'induction et montre qu'un champ magnétique variable peut créer un champ électrique à circulation non nulle [8].

4.2.2. Equations de Maxwell dans un milieu linéaire homogène et isotrope (MLHI)

Dans un milieu linéaire homogène et isotrope :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{Relation électrique})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{Relation magnétique})$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4.3. Loi d'Ohm

On suppose qu'il n'y a que le champ électrique \vec{E}

on applique le principe fondamental de la dynamique à un porteur de charge q , animé d'une vitesse d'ensemble \vec{v} .

Ce porteur est soumis

-à une force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$

-à une force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

A l'équilibre

$$\vec{F} + \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \frac{e\vec{E}}{\lambda}$$

En introduisant le vecteur densité de courant $\vec{J} = \rho\vec{v}$ avec $\rho = nq$ densité volumique de charges (n densité volumique de porteurs de charges) on a :

$$\vec{J} = \frac{nq^2}{\lambda} \vec{E} = \sigma \vec{E} \text{ La loi d'Ohm locale}$$

Avec $\frac{nq^2}{\lambda} = \sigma$ est la conductivité électrique du milieu

4.4. Théorème de conservation de l'énergie et vecteur de Poynting

4.4.1. Théorème de Poynting

On définit le vecteur de Poynting \vec{S} par la relation suivante :

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (4.13)$$

avec \vec{E} est le champ électrique et \vec{H} est le champ magnétique

En calculant la divergence du vecteur de Poynting :

$$\text{div} \vec{S} = \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) ?$$

$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\text{rot} \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\text{rot} \vec{H})$, et en utilisant les deux équations de Maxwell en rotationnel, on a

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{J} \cdot \vec{E}$$

Pour un système LHI ($\vec{B} = \mu \vec{H}$ et $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$), on obtient

$$\text{div}(\vec{S}) = \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D})}{\partial t} - \vec{J} \cdot \vec{E}$$

L'intégration sur un volume V arbitraire délimité par une surface s et le théorème de la divergence nous permettent alors d'écrire le théorème de conservation suivant [3] :

$$-\frac{d}{dt} \iiint \left(\frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \right) dv = \iint (\vec{E} \wedge \vec{H}) \vec{d}s + \iiint \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (4.14)$$

1

2

3

1- Représente la diminution d'énergie EM dans V, 2- représente le flux de S et 3- Représente l'énergie dissipée par effet joule.

où $\frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$ représente l'énergie emmagasinée par unité de volume sous forme électrique, $\frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2}$ représente l'énergie emmagasinée par unité de volume sous forme magnétique et $\vec{J} \cdot \vec{E}$ représente la puissance dissipée par unité de volume (effet joule)

Interprétation du théorème de Poynting

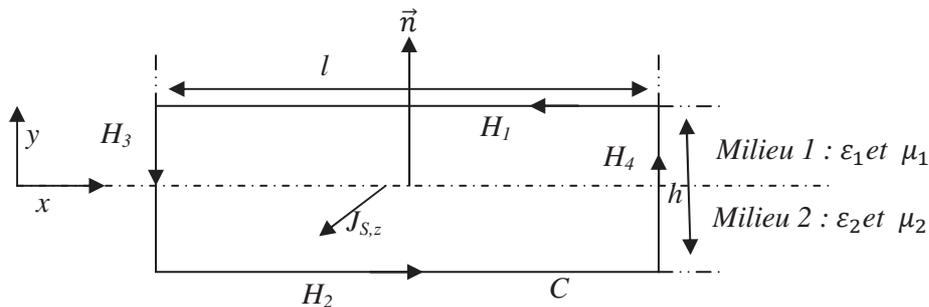
Taux de diminution d'énergie EM emmagasiné= flux d'énergie EM traversant la surface S+puissance dissipée par effet Joule [3].

4.5. Conditions aux limites

Composantes tangentielles de H

- On part de l'équation de Maxwell Ampère (équation 4.9), puis par le théorème de Stokes [3] :

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \iint \vec{j} \vec{d}s + \frac{d}{dt} \iint \vec{D} \vec{d}s$$



où C est le contour rectangulaire de la figure au dessus

Pour l et h petits, donne :

$$(H_{2t} - H_{1t})l + (H_{4n} - H_{3n})h = lh. (J_{moyen,z} + \frac{d}{dt} D_{moyen,z})$$

Si $h \rightarrow 0$ et en posant $J_{S,z} = \lim_{h \rightarrow 0} h. J_{moyen,z}$, on aura :

$$(H_{2t} - H_{1t}) = J_{S,z} \Rightarrow \vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$$

où \vec{J}_S représente la densité surfacique de courant (unité : A/m) et \vec{n} le vecteur de l'interface séparant les milieux 1 et 2.

Composantes normales de \vec{D}

On part de l'équation de Maxwell Gauss électrique (4.6)(forme intégrale), puis par le théorème de la divergence :

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{s} = \iiint_V \rho dv$$

où S est la surface du parallélépipède rectangle de la figure suivante, ses dimensions sont $h.\omega.l$ et S contient six faces

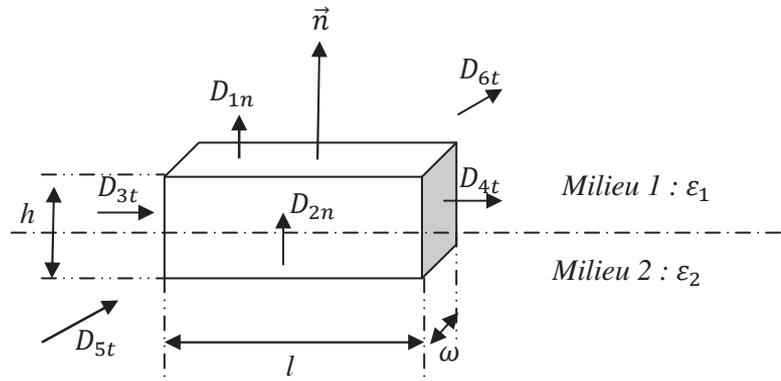
Pour h, l et ω petits, donne [3] :

$$(D_{1n} - D_{2n})l\omega + (D_{4t} - D_{3t})h\omega + (D_{6t} - D_{5t})hl \approx hl\omega\rho_{moyen}$$

Si $h \rightarrow 0$ et en posant $\sigma_S = \lim_{h \rightarrow 0} h. \rho_{moyen}$, on aura :

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_S \Rightarrow \vec{n}.(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_S$$

Où σ_S représente la densité surfacique de charge.



Conditions aux limites : résumé

1- Composante tangentielle de \vec{H} : $\vec{n} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$

2- Composante tangentielle de \vec{E} : $\vec{n} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$

3- Composante normale de \vec{D} : $\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_S$

4- Composante normale de B : $\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

Remarque

Ces conditions sont valables aussi pour des champs constants que pour des champs variables dans le temps.

**CHAPITRE 5 : PROPAGATION DU CHAMP
ÉLECTROMAGNÉTIQUE**

Chapitre 5 : Propagation du champ électromagnétique

5. 1. Equations de propagation des champs \vec{E} et \vec{B} et des potentiels

5.1.1. Equations de Maxwell dans le vide

Les équations de Maxwell dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = 0$) :

$$\text{div}\vec{E} = 0 \quad (5.1)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (5.4)$$

5.1.1.1 Equation de propagation en champ électrique

On calcule le rotationnel de l'équation (5.3)

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

Or :

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\text{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}$, avec $\text{div}\vec{E} = 0$, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, il vient :

$$-\Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$$

Soit finalement

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.5)$$

5.1.1.2 Equation de propagation en champ d'induction magnétique

De manière symétrique, on élimine \vec{E} au profit de \vec{B} en calculant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère (équation 5.4) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}\text{div}\vec{B} - \Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})$$

Soit

$$\overrightarrow{\text{grad}}(0) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Finalement :

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.6)$$

5.1.1.3 Equation de propagation en potentiel vecteur

L'équation de Maxwell $\text{div} \vec{B} = 0$ montre qu'il existe un champ vectoriel \vec{A} tel que :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

L'équation de Maxwell Ampère s'écrit donc :

$$\text{rot} (\text{rot} \vec{A}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

Ou $\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{grad}} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$

Soit $\Delta \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

Si on admet la condition de jauge de Lorentz

$$\text{div} \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (5.7)$$

Alors le potentiel vecteur \vec{A} obéit à l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.8)$$

5.1.1.4. Equation de propagation en potentiel scalaire

L'équation de Maxwell Gauss électrique s'écrit :

$$\text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Soit $\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) = 0$

Avec la jauge de Lorentz, il vient :

$$\begin{aligned}\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) &= 0 \\ \Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\quad (5.9)$$

Résumé : tenu de $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, avec c la vitesse de lumière dans le vide

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}\quad (5.10)$$

5.2. Onde électromagnétique plane

Une onde électromagnétique est dite plane si \vec{E} et \vec{B} ne sont fonction que d'une coordonnée d'espace (x de M par exemple) et du temps t donc chacune des composantes $\vec{E}(x, t)$ et $\vec{B}(x, t)$ obéit, d'après les deux équations de propagation en champ électrique et magnétique, à l'équation différentielle du type [9] :

$$\frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2}$$

Dont la solution générale est :

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Si on désigne \vec{u}_x le vecteur unitaire suivant la direction ox .

- $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ est l'équation d'une onde plane qui se propage suivant ox dans le sens des x positifs à la vitesse $c\vec{u}_x$ (onde progressive).
- $f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ est l'équation d'une onde plane qui se propage suivant ox dans le sens des x négatifs à la vitesse $-c\vec{u}_x$ (onde rétrograde).

5.2.1. Propriétés de l'onde plane

1-L'OEM est transversale (\vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires à l'axe de propagation) et la direction de propagation est définie par $(\vec{E} \wedge \vec{B})$.

2- La relation entre E et B : $E(x,t)=C.B(x,t)$

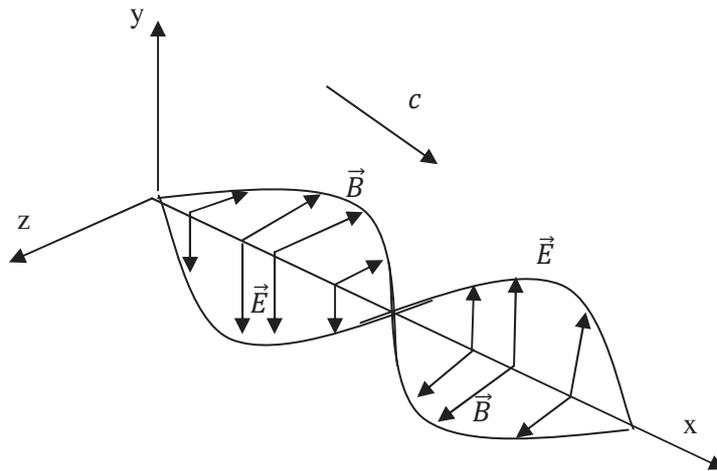
3-Dans le vide, L'OEM se propage à une vitesse c invariante $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.8.10^8 \text{ m/s}$

4- Pour se propager, contrairement aux ondes mécaniques, l'onde EM n'a pas besoin d'un support matériel. Les ondulations de l'onde EM sont les champs \vec{E} et \vec{B} eux-mêmes, les OEM sont des ondes de champs.

5.2.2 Ondes électromagnétiques planes sinusoïdales

Dans une OEM sinusoïdale [4] :

- ✚ en tout point fixé de l'espace, $\vec{E}(x, t), \vec{B}(x, t)$ varient sinusoïdalement avec le temps t .
- ✚ et en tout temps t donné, les variations spatiales de $\vec{E}(x, t), \vec{B}(x, t)$ avec x sont aussi sinusoïdales.



Pour une onde OEM sinusoïdale se propageant le long de l'axe ox (voir figure ci-dessus) :

$$\vec{E}(x, t) = E_{max} \sin (wt - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}(x, t) = B_{max} \sin (wt - kx) \vec{e}_z$$

avec évidemment comme toute onde sinusoïdale :

f est la fréquence de l'onde ($f = \frac{w}{2\pi}$) en Hz

λ est la longueur d'onde en m ($\lambda = \frac{c}{f}$)

k est le nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

5.2.4. Vitesse de phase et vitesse de groupe

1-Vitesse de phase

C'est la vitesse de déplacement du plan d'onde, donc la vitesse v_ϕ de propagation de la phase

$$\phi = \omega t - kx, \text{ soit } v_\phi = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{\phi=\text{cst}} \text{ ou } v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

2- Vitesse de groupe

Si la vitesse de phase dépend de la pulsation ω , le milieu est dispersif ; alors l'énergie de l'onde se propage à une vitesse v_g différente de v_ϕ :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

5.2.5. Impédance caractéristique du milieu de propagation

Le rapport du champ électrique E sur le champ magnétique H a les dimensions d'une résistance.

$$Z_c = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Dans le vide $Z_c = 377\Omega$

5.2.6. Energie de Propagation

Considérons une OEM se propageant dans le vide (absence de milieu matériel) le long de l'axe Ox ;

La densité totale d'énergie instantanée d'une OEM est donnée par :

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(x, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(x, t) = \frac{E(x,t).B(x,t)}{Z_c} \text{ (J/m}^3\text{)}$$

L'énergie portée par l'OEM, d'après le vecteur de Poynting :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

En général, on cherche à connaître non pas la puissance instantanée mais la puissance moyenne temporelle notée $\langle S \rangle = \frac{1}{2Z_c} E_{max}^2 = \frac{1}{2\mu_0} c B_{max}^2$ si l'onde est sinusoïdale [4].

5.2.7. Représentation complexe de l'onde plane sinusoïdale

- ✓ Aux champs réels \vec{E} et \vec{B} de l'onde plane progressive sinusoïdale en M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$) à l'instant t, on associe les champs complexes (avec $j^2 = -1$)

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \text{ et } \vec{B} = B_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Avec cette notation, l'application des opérateurs spatio-temporels est avantageuse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega \text{ et } \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \rightarrow jk$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E} & \text{div} \vec{E} = -j\vec{k} \vec{E} \\ \overrightarrow{rot} \vec{E} = \nabla \wedge \vec{E} = -j\vec{k} \wedge \vec{E} & \Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} \end{cases}$$

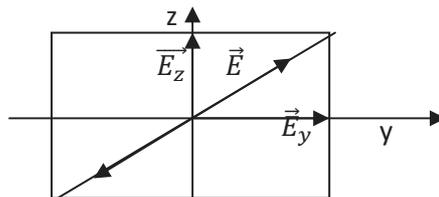
5.3. Etats de polarisation de L'OEMPS

Pour une O.E.M.P.S de fréquence f et qui se propage suivant la direction ox, les composantes du champ électrique \vec{E} dans le plan d'onde sont de la forme [9] :

$$E = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \\ E_z = E_2 \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \end{cases}$$

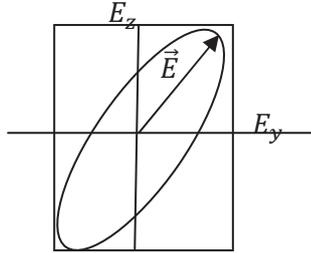
$$E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

- Dans le plan d'onde $x = \text{const}$, l'extrémité du vecteur champ \vec{E} décrit une courbe dont la forme dépend du déphasage $\varphi_2 - \varphi_1$ entre les composantes E_y et E_z de E :
- ✓ Si $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ou $\pi \Rightarrow \frac{E_y}{E_1} = \frac{E_z}{E_2}$, ce qui signifie que le champ \vec{E} conserve une direction fixe : l'onde est dite polarisée **rectilignement**



✓ Si $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$:

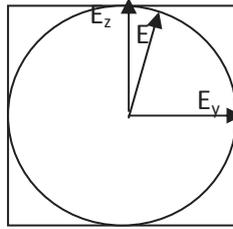
L'extrémité de \vec{E} décrit une ellipse dans le plan d'onde et on dit que la polarisation est **elliptique**.



✓ Si $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ et $E_z = E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$:

$$E_y^2 + E_z^2 = E_1^2$$

L'extrémité de \vec{E} décrit un cercle de rayon E_1 : on dit que la polarisation est **circulaire**.



5.4. Equation d'onde dans un milieu linéaire, homogène et isotrope

- **Champ électrique**

Partons des équations de Maxwell dans un milieu linéaire ($\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}$) et conducteur ($\vec{J} = \sigma\vec{E}$) :

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{div}\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \sigma\vec{E} + \epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

On prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\text{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}\frac{\rho}{\epsilon} - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = -\sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho}{\epsilon} \quad (5.11)$$

- **Champ magnétique**

Des manipulations similaires de l'équation de Maxwell Ampère donnent

$$\Delta \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.12)$$

Les équations (5.11) et (5.12) sont les équations d'ondes pour les champs électrique et magnétique dans un MLHI.

- ✓ Les termes en $\mu\epsilon$ proviennent du courant de déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: non dissipatif car $\vec{J}_{\text{déplacement}} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, ce qui correspond au taux de variation de l'énergie stockée sous forme électrique.
- ✓ Les termes en $\mu\sigma$ proviennent du courant de conduction $\sigma \vec{E}$: dissipatif car $\vec{J}_{\text{cond}} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2$, est la puissance dissipée par unité de volume par effet Joule

5.4.1. Propagation des OEMP dans les isolants

Pour un isolant $\rho = 0$ et $\sigma = 0 \Rightarrow$ l'équation (5.11) devient :

$$\Delta \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ et } \vec{E} = E e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}$$

Soit :

$$j^2 k^2 - \epsilon\mu(j^2 \omega^2) = 0 \Rightarrow k = \pm \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

On prend le cas positif

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

Si $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$ (la vitesse de propagation dans un MLHI)

$$v = \frac{c}{n}$$

Avec $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ est l'indice de réfraction de milieu

Dans un milieu non magnétique $\mu_r = 1 \Rightarrow n = \sqrt{\epsilon_r}$

Dans les isolants les vecteurs \vec{E} et \vec{H} sont en phase et les densités d'énergies électrique et magnétique sont égales.

5.4.2. Propagation des OPEM dans les conducteurs

Dans un milieu conducteur $\sigma \neq 0$ et $\rho = 0$

$$\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$-k^2 + \varepsilon \mu \omega^2 - j \sigma \mu \omega = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{\varepsilon_r \mu_r}{\lambda_0^2} \left(1 - j \frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)$$

Avec $\lambda_0 = \frac{\lambda}{2\pi}$

La quantité $-j \frac{\sigma}{\varepsilon \omega}$ représente le rapport entre la densité de courant de conduction et la densité de courant de déplacement.

On appelle facteur de qualité du milieu Q le rapport :

$$Q = \frac{|\frac{\partial D}{\partial t}|}{|J_c|} = \frac{\omega \varepsilon}{\sigma}$$

Remarque : dans un matériau isolant $Q \rightarrow 0$ et dans un bon conducteur $Q \rightarrow \infty$

5.5. Réflexion et transmission des ondes électromagnétiques

Lorsqu'une onde incidente rencontre une interface (changement de milieu (1) vers (2)), on observe trois ondes (figure suivante) :

Une onde incidente le long de la direction \vec{u}_i

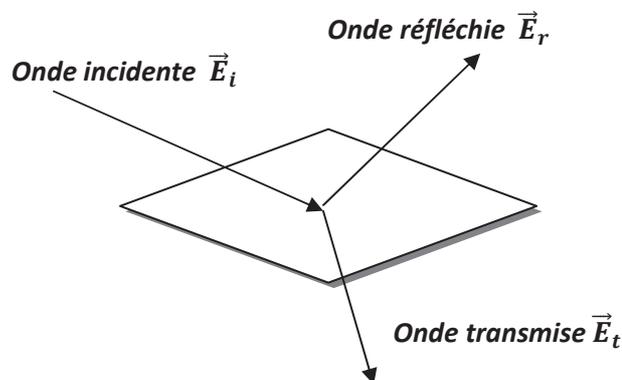
Une onde réfléchie le long de la direction \vec{u}_r

Une onde transmise le long de la direction \vec{u}_t

Ces trois ondes doivent satisfaire aux conditions de passage.

Exemple :

Onde sonore arrivante à un mur.



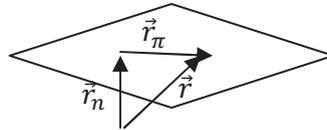
Les lois de la réflexion et les lois de réfraction :

1-Les trois vecteurs \vec{E}_i , \vec{E}_r , et \vec{E}_t des ondes électromagnétiques sont incidente, réfléchie et transmise respectivement ont les mêmes fonction du temps.

Les ondes incidente, réfléchie et transmise sont donc du type:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \vec{r})} \\ \vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})} \\ \vec{E}_t = E_{0t} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \vec{r})} \end{cases}$$

2-Les trois vecteurs dépendent de la même façon de la position \vec{r}_π à l'interface. La figure suivante montre la relation entre le vecteur position \vec{r} et le vecteur d'interface \vec{r}_π [10].



$$\vec{r} = \vec{r}_\pi + \vec{r}_n$$

Les vecteurs ci-dessus peuvent être écrire sous la forme suivante :

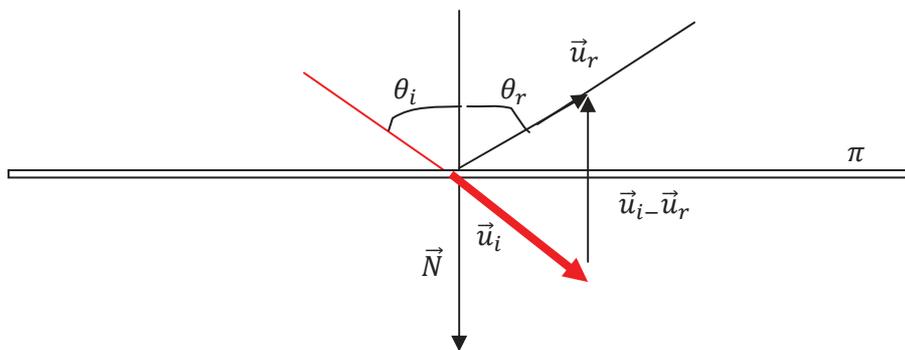
$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \vec{r})} = E_{0i} e^{-\vec{k}_i \vec{r}_n} e^{j\omega t} e^{-j\vec{k}_i \vec{r}_\pi} = E_{0i}^* e^{j\omega t - j\vec{k}_i \vec{r}_\pi}$$

$r = r_\pi \in$ interface:

$$\vec{k}_i \vec{r}_\pi = \vec{k}_r \vec{r}_\pi = \vec{k}_t \vec{r}_\pi \Rightarrow (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \vec{r}_\pi$$

Sachant que $|\vec{k}_i| = v_i/\omega$ où v_i est la vitesse de phase de l'onde incidente et \vec{u}_i le vecteur unitaire dans la direction de \vec{k}_i , Donc :

Le vecteur $(\vec{u}_i - \vec{u}_r)$ est perpendiculaire à l'interface $\pi \Rightarrow \theta_i = \theta_r$ (la loi de réflexion) [10].

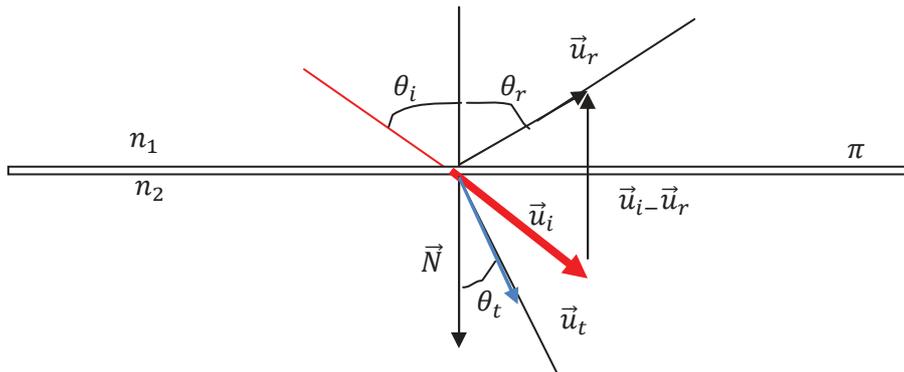


Les vecteurs \vec{u}_i , \vec{u}_r et \vec{N} définissent le **plan d'incidence**.

La deuxième condition de l'équation d'invariance le long de l'interface peut être interprété en intégrant les indices de réfraction n_1 et n_2 des milieux comme indique la figure suivante [10] :

$$\vec{k}_i \vec{r}_\pi = \vec{k}_t \vec{r}_\pi \rightarrow n_1 \vec{u}_i \vec{r}_\pi = n_2 \vec{u}_t \vec{r}_\pi \Rightarrow n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t)$$

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \frac{n_2}{n_1}$$



5.7. Spectre du rayonnement électromagnétique

Les ondes EM couvrent un spectre très large en longueur d'onde et en fréquence. Le tableau suivant donne une portion importante du spectre :

	Fréquence (Hz)	longueur d'onde (m)
Onde radio et TV	$10-10^9$	$10^3-0.3$
Les micro-ondes	$10^9-3.10^{11}$	$0.3-10^{-3}$
infrarouge	$3.10^{11}-7.8.10^{14}$	$10^{-3}-7.8.10^{-7}$
la lumière visible	$4.10^{14}-8.10^{14}$	$7.8.10^{-7}-3.8.10^{-7}$
ultraviolets	$8.10^{14}-3.10^{17}$	$3.8.10^{-7}-6.10^{-10}$
les rayons X	$3.10^{17}-5.10^{19}$	$10^{-9}-6.10^{-12}$
rayons γ	$3.10^{18}-5.10^{22}$	$10^{-10}-10^{-14}$

Le spectre de la lumière visible :

Longueur d'onde (nm)	Couleur
400 -440	violet
440 - 480	bleu
480 - 560	vert
560 -590	jaune
590 - 630	orange
630 -700	rouge
<400	ultraviolet
>700	infrarouge

RÉFÉRENCES

Références :

- [1] A. Tilmatine, chapitre 1 électrostatique, www.univ-sba.dz/fsi/downloads/ETL307-Chapitre1.pdf
- [2] R. Abdessemed. M. S Aggoune. F. Z Kadid, Electrostatique, cours et exercice, Université de Batna
- [3] B. vanderheyden, propagation électromagnétique, note de cours, université de liège
- [4] F. GAILLE, Physique II. Electromagnétisme, Ecole d'ingénieurs du canton de Vaud
- [5] C. Maire, cours électromagnétisme du vide, www.klubprepa.fr/Site/Document/ChargementExtrait.aspx?IdDocument=4026
- [6] M. Dubois, IGEE-403 Matériaux de l'électrotechnique, 2006. <http://boulph.free.fr/Mathieu/COURS/Chap3.pdf>
- [7] O. Français, Introduction aux circuits magnétiques, ESIEE – 2000. <http://197.14.51.10:81/pmb/COURS%20ET%20TUTORIAL/Electronique/Electrotechnique/Magnetisme/magnetisme2.pdf>
- [8] PSI. Brizeux, chapitre 3 les équations de Maxwell, www.cpge-brizeux.fr/casiers/francoise/cours/elmg/CHELMG3.pdf
- [9] H. Lumbroso, Onde électromagnétiques dans le vide et les conducteurs 70 problèmes résolus, 2 édition 1996, Dunod
- [10] P. Rabiller, Electromagnétisme, université de Rennes 1, 2005, https://perso.univ-rennes1.fr/philippe.rabiller/electromag_pcgi2_ch4.ppt