

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Thèse de Doctorat

Présentée à l'université 8 mai 1945 Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie civil et hydraulique

Spécialité :
Génie civil

Présentée par : **KHEBIZI Mourad**

Comportement mécanique d'une semelle superficielle sous l'effet d'un séisme

Soutenue le 09 décembre 2015

Sous la direction du Professeur **GUENFOUD Mohamed**

Composition du jury :

NOUAOURIA M. Salah	Président	Prof. Université 8 mai 1945 Guelma
GUENFOUD Mohamed	Rapporteur	Prof. Université 8 mai 1945 Guelma
BOUZERD Hamoudi	Examineur	M.C.A. Université de Skikda
DJEBBAR Nabil	Examineur	Prof. Université de Constantine
KHALFALLAH Salah	Examineur	Prof. École nationale polytechnique Constantine
NAFAA Zahreddine	Examineur	M.C.A. Université 8 mai 1945 Guelma

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse le professeur GUENFOUD Mohamed pour m'avoir encadré. Outre ses qualités scientifiques, je le remercie aussi pour la gentillesse, la disponibilité, les conseils et la confiance qu'il a pu m'accorder tout au long de ces années de travail.

Je remercie aussi le professeur BENMARCE Abdelaziz de l'université de Guelma pour sa contribution, ses aides et sa disponibilité.

Mes remerciements s'adressent aussi au professeur NOUAOURIA Mohamed Salah qui m'a fait l'honneur de présider ce jury. Je remercie les membres du jury qui ont accepté de lire ce manuscrit et d'assister à la soutenance de ma thèse : Docteur BOUZERD Hamoudi Maître de conférence à l'université Skikda, Docteur DJEBBAR Nabil Maître de conférence à l'université de Constantine, Professeur KHALFALLAH Salah de l'école nationale polytechnique de Constantine et Docteur NAFAA Zahreddine Maître de conférence à l'université de Guelma.

Je suis également particulièrement reconnaissant envers mon ami le docteur CHALGOUM Farid pour ses disponibilités et ses conseils judicieux.

Finalement Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes dont l'intervention au cours de ces années a favorisé l'aboutissement de mon travail, à savoir l'ensemble des personnes travaillant au laboratoire LGCH et au département de génie de l'université de Guelma.

RESUME

Deux approches de modélisation des non-linéarités des structures en béton armé sont présentées dans cette thèse.

La première consiste à la présentation d'une méthode de modélisation bidimensionnelle par éléments finis multicouches du comportement non-linéaire des structures en béton armé sous charge monotone, cyclique et sismique. La non linéarité matérielle est caractérisée par plusieurs phénomènes tels que : la non-linéarité physique des matériaux béton et acier, le comportement du béton fissuré, l'effet d'interaction entre les matériaux représentée par le domaine post-fissuration. Ces paramètres sont pris en considération dans cette méthode de modélisation pour examiner la réponse des structures en béton armé à comportement non linéaire en utilisant des modèles locaux basés sur la mécanique de l'endommagement du béton et la plasticité de l'acier. Plusieurs exemples d'applications sont présentés. Les résultats numériques obtenus, sont en concordance très favorable avec ceux obtenus par l'expérience et d'autres modèles numériques de la littérature.

La deuxième méthode concerne le développement d'un macroélément basé sur l'approche des modèles de comportement globaux afin de modéliser le comportement non-linéaire des fondations superficielles rigides sous charges statiques monotones et cycliques. Les non-linéarités matérielles et géométriques sont prises en considération dans la formulation de ce macroélément. Plusieurs exemples de validation sont présentés. Les résultats numériques obtenus prouvent la performance du macroélément proposé.

Mots clés : Modélisation, éléments finis multicouches, endommagement, comportement non-linéaire, fondation superficielle, modèles globaux.

ABSTRACT

Two approaches of nonlinear modelling of reinforced concrete structures are presented in this thesis.

The first is the presentation of a two-dimensional multi-layered finite elements modelling of reinforced concrete structures at non-linear behaviour under monotonic and cyclic loading. The non-linearity material is characterized by several phenomena such as: the physical non-linearity of the concrete and steels materials, the behaviour of cracked concrete and the interaction effect between materials represented by the post-cracking field. These parameters are taken into consideration in this modelling method to examine the response of the reinforced concrete structures at the non-linear behaviour using local models based on damage mechanics of concrete and plasticity of steel. Several examples of application are presented. The numerical results obtained, are in a very good agreement with available experimental data and other numerical models of the literature.

The second method concerns the development of a macro-element based on the global models approach in order to model the non-linear behaviour of rigid shallow foundations under monotonic and cyclic loads. Material and geometric nonlinearities are taken into account in the formulation of this macro-element. Several examples of validation are presented. The numerical results obtained show the performance of the proposed macro-element.

Keywords: modelling; multi-layers finite elements; damage; non-linear behavior- shallow foundations- global models.

ملخص

في هذه الأطروحة عرضنا مقاربتين لنمذجة لاختية سلوك هياكل من الخرسانة المسلحة. المقاربة الأولى تعرض طريقة نمذجة باستعمال العناصر المنتهية المتعددة الطبقات ثنائية الأبعاد لدراسة سلوك غير خطي لهياكل من الخرسانة المسلحة خاضعة لحمولات رتيبة ودورية. حيث ان اللاختية المادية تتميز بالعديد من الظواهر مثل: اللاختية الفيزيائية لمواد الخرسانة والفولاذ، سلوك الخرسانة المشقوقة وتأثير التداخل بين المواد ممثلة بمجال ما بعد التشقق. هذه العوامل قد أخذت بعين الاعتبار في هذه النمذجة من أجل دراسة استجابة هياكل من الخرسانة المسلحة ذات سلوك غير خطي وذلك باستعمال نماذج محلية معتمدة على ميكانيكا اضرار الخرسانة ولدونة الفولاذ، حيث عرضنا العديد من الأمثلة التطبيقية وكانت نتائجها الرقمية متوافقة ايجابيا مع النتائج التجريبية وكذلك مع نتائج نماذج رقمية أخرى من الأثر.

في الطريقة الثانية قمنا بتطوير عنصر-macroélément- يعتمد على مقارنة النماذج الشاملة لأجل نمذجة سلوك غير خطي للأساسات السطحية الصلبة تحت تأثير حمولات ساكنة رتيبة و دورية. اللاختية المادية واللاختية الهندسية قد أخذتا بعين الاعتبار في صياغة هذا العنصر، وقد عرضنا العديد من الأمثلة للمصادقة عليه حيث بينت نتائجها الرقمية فعاليته.

كلمات المفاتيح: نمذجة- العناصر المنتهية المتعددة الطبقات – سلوك غير خطي – اضرار- النماذج الشاملة- الأساسات السطحية

TABLE DES MATIERES

Résumé.....	ii
Abstract.....	iii
ملخص.....	iv
Liste des figures.....	ix
Liste des tableaux	xiv
Abréviations.....	xv
Notations.....	xvi
Introduction générale.....	01
Chapitre 1 : Comportement mécanique du béton armé.....	05
1.1. Introduction	05
1.2. Comportement mécanique du béton.....	06
1.2.1. Compression	06
1.2.2. Traction.....	07
1.2.3. Chargement cyclique de traction-compression	11
1.3. Mécanique de l'endommagement appliquée au béton.....	12
1.4. Conclusion.....	16
Chapitre 2 : Les modèles de comportement du Béton Armé.....	17
2.1. Introduction.....	17
2.2. Modèles globaux.....	17
2.3. Modèles locaux.....	19
2.3.1. Modèles d'endommagement.....	19
2.3.1.1. Modèle de Mazars (Mazars, 1984 , 1986).....	21
2.3.1.2. Modèle de La Borderie (Modèle unilatéral)	26

2.3.2. Modèle de fissuration diffuse "smeared crack models".....	28
2.3.3. Modèle de plasticité.....	30
2.3.4. Modèle de microplan.....	33
2.4. Comportement mécanique de l'acier.....	33
2.4.1. Traction-Compression.....	33
2.4.2. Chargement cyclique de traction-compression.....	34
2.5. Modèles de comportement de l'acier.....	35
2.5.1. Modèle élastoplastique simplifié.....	35
2.5.2. Modèle Pino-Menegotto.....	35
2.6. Conclusion.....	40
Chapitre 3 : Les méthodes de modélisation des structures en béton armé.....	41
3.1. Introduction.....	41
3.2. Élément poutre multifibres.....	43
3.3. Élément de poutre à couches superposées (multicouches).....	44
3.4. Éléments de la théorie des poutres.....	45
3.4.1. Élément fini poutre multifibres Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur.....	48
3.4.1.1. Fonctions d'interpolation.....	48
3.4.1.2. Matrices de rigidités.....	50
3.4.1.3. Matrices de masse.....	52
3.4.1.4. Efforts internes et efforts résultants.....	54
3.4.2. Élément fini poutre multifibres Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1.....	55
3.4.2.1. Fonctions d'interpolation.....	55
3.4.2.2. Matrices de rigidité.....	55
3.4.2.3. Matrices de masse.....	57
3.4.2.4. Efforts internes et efforts résultants.....	57
3.4.3. Élément fini poutre multifibres Euler – Bernoulli.....	58
3.4.3.1. Fonctions d'interpolation.....	58
3.4.3.2. Matrices de rigidité.....	58
3.4.3.3. Matrices de masse.....	60
3.4.3.4. Efforts internes et efforts résultants.....	60

3.5. Conclusion	61
<u>Chapitre 4 : Modélisation numérique du comportement endommageant des structures en béton arme par : Eléments Finis à Couches Superposées.....</u>	62
4.1. Introduction.....	62
4.2. Discrétisation en éléments finis à couches superposées (multicouches).....	63
4.2.1. Formulation de l'élément poutre multicouches.....	64
4.2.2. Lois de comportement utilisées.....	66
4.2. 2.1. Modèle d'endommagement pour le béton (La Borderie 1991)	66
4.2. 2.2. Le comportement de l'acier :.....	67
4. 3. Modélisation des structures sous chargement dynamique	69
4. 4. Modélisation de l'amortissement	69
4. 5. Conclusion	71
<u>Chapitre 5 : Application aux éléments en béton</u>	72
5.1. Introduction.....	72
5.2. Modélisation d'un tirant en béton.....	72
5.2.1. Modélisation par des éléments finis multicouches.....	73
5.2.2. Modélisation par des éléments finis multifibres	80
5.3. Conclusion.....	82
<u>Chapitre 6 : Applications aux structures en béton armé.....</u>	83
6.1. Introduction.....	83
6.2. Modélisation d'une poutre en béton armé (Benchmark MECA (Ghavamian 2001)).....	83
6.3. Flambement d'un poteau.....	94
6.4. Modélisation de la réponse cyclique d'une poutre en béton armé.....	97
6.5. Modélisation de la réponse sismique d'une poutre en béton armé.....	101
6.6. Conclusions.....	103
<u>Chapitre 7 : Applications aux fondations : modélisation du comportement non-linéaire des fondations superficielles rigides par les modèles globaux.....</u>	105

7.1. Introduction.....	105
7.2. Présentation du macroélément.....	106
7.3. Répartition de la rigidité verticale.....	110
7.4. Applications.....	112
7.4.1. Comportement d'une fondation circulaire sous chargement vertical centré .	112
7.4.1.1. Chargement monotone.....	112
7.4.1.2. Chargement cyclique.....	115
7.4.2. Comportement d'une fondation circulaire sous chargement horizontal.....	117
7.4.3. Modélisation non-linéaire d'une fondation filante sous un chargement statique excentré d'intensité croissante.....	120
7.5. Conclusion.....	128
<u>Conclusion générale et perspectives.....</u>	129
<u>Références bibliographiques.....</u>	132

LISTE DES FIGURES

1- Courbe expérimentales contrainte-déformation (Mazars, Berthaud and Ramtani, 1990).....	02
1.1- Comportement du béton en compression simple (Chen, 1982, Nguyen, 2006).....	06
1.2- Comportement cyclique du béton en compression simple (Ramtani, 1990).....	07
1.3- Comportement du béton en traction simple (Terrien, 1980).....	08
1.4- Comportement cyclique du béton en traction simple (Gopalaratnam, et al., 1985)....	08
1.5- Essai de traction par fendage réalisé par Leroux (2012).....	09
1.6- Essais de flexion 3 points.....	09
1.7- La relation entre la charge P et la flèche V accompagnant les phases de comportement (Bernard, 2000).....	10
1.8 -Essai P.I.E.D : Comportement du béton sous chargement cyclique de traction compression (Ramtani, 1990).....	11
1.9- Scénario de microfissuration lors d'un chargement alterné traction suivie de compression (Leroux, 2012).....	12
1.10 -Endommagement uniaxial suivant Kachanov (d'après La Borderie, 2003).....	13
1.11 - Isotropie et anisotropie. Représentations graphiques (Ludovic, 2004).....	14
1.12 - Développement de la fissuration. Essai de traction et de compression. Mise en évidence de l'anisotropie induite par la fissuration	14
1.13 -Représentation phénoménologique (La Borderie, 2003; Ragueneau, 1999).....	15
2.1 -Modèle global de Takeda (loi moment / courbure).....	18
2.2- Evolution des variables d'endommagement en traction et en compression (Mazars, 1984).....	23
2.3- Représentation des coefficients α_t et α_c dans le plan des contraintes planes (source : La Borderie, 2003).....	24
2.4- Surface d'élasticité du modèle Mazars (La Borderie, 2003).....	24
2.5- Surface seuil du modèle Mazars dans l'espace des contraintes (GIRY, 2011).....	25
2.6- Comportement en traction et en compression du béton.....	25
2.7- Réponse uniaxiale du modèle Unilatéral (La borderie, 1991).....	28

2.8- Comportement bi-axial sur un plan de fissure : critère de rupture (Weihe, et al., 1998).....	30
2.9- Critères seuils de plasticité.....	31
2.10- Critère biaxial couplé (Feenstra ,1993).....	32
2.11- Un microplan et la relation déformation – contrainte.....	33
2.12- Comportement de l’acier en traction simple.....	34
2.13- Comportement de l’acier en traction - compression : Effet Bauschinger.....	35
2.14- Modèle élasto - plastique simplifié: Comportement de l’acier sous chargement monotone.....	35
2.15- Loi Pinto - Menegotto : Activation de la courbe de Giuffré.....	36
2.16- Comportement sous chargement cyclique (Guedes, et al., 1994).....	37
2.17- Comportement sous chargement cyclique - le flambement (Guedes, et al., 1994)....	39
3.1-Différentes échelles de discrétisation (Ulm, 1996; Kotronis, 2000).....	42
3.2-Description d’une modélisation avec des poutres multifibres.....	44
3.3-Elément poutre à couches superposées	45
3.4-Poutre 3D à deux nœuds.....	46
4.1-Principe de discrétisation des structures en béton armé en poutres multicouches.....	63
4.2-Réponse cyclique du modèle de plasticité pour l'acier.....	67
4.3- Discrétisation par des éléments poutres multicouches (couches en béton seul + couches comprenant simultanément du béton et d’acier).....	69
4.4-Variation du coefficient d’amortissement visqueux ξ (Panagiotis Kotronis. 2000)...	70
5.1- Géométrie de la barre en traction.....	73
5.2- Discrétisation de la barre en éléments multicouches.....	73
5.3 - Barre en traction : Evolution de la force en fonction du déplacement.....	75
5.4- Réponse contrainte-déformation de la première couche.....	76
5.5- Courbe contrainte- Endommagement et Déformation- Endommagement.....	76
5.6- Réponse cyclique force-déplacement.....	77
5.7- Réponse cyclique Contrainte-Déformation de la première couche.....	77
5.8- Courbe contrainte- Endommagement et Déformation-Endommagement.....	78
5.9- Réponse cyclique Contrainte-Déformation de la première couche du premier élément (refermeture de fissures de traction).....	79

5.10- Réponse cyclique Contrainte-Déformation de la première couche du premier élément (refermeture de fissures de traction et l'apparition de fissures de compression).....	79
5.11- Discrétisation de la barre en éléments finis multifibres.....	80
5.12 - Barre en traction : Evolution de la force en fonction du déplacement.....	81
5.13- Réponse cyclique force-déplacement.....	81
5.14- Réponse cyclique force-déplacement.....	82
6.1- poutre en béton armé du MECA benchmark.....	83
6.2- Discrétisation de la poutre MECA en éléments multicouches.....	85
6.3- Discrétisation de la section de la poutre (8 couches en béton seul et 2 comprenant simultanément du béton et de l'acier).....	85
6.4- Courbe charge-flèche de la poutre MECA.....	86
6.5- Carte d'endommagement de traction «D1 » pour une flèche de 0.001431m.....	86
6.6- Carte d'endommagement de traction «D1 » pour une flèche de 0.00204m.....	87
6.7- Carte d'endommagement de traction «D1 » pour une flèche de 0.01719m.....	87
6.8 - Poutre en flexion trois points. Profil de fissuration expérimental.....	87
6.9- poutre en béton armé du MECA benchmark.....	88
6.10- Modèle numérique de poutre.....	88
6.11- Discrétisation de la section de la poutre (18 couches en béton seul et 2 comprenant simultanément du béton et de l'acier).....	88
6.12- Réaction sur un appui, en fonction de la flèche à mi-travée.....	89
6.13- Carte d'endommagement de traction «D1 ».....	89
6.14 - Déformation des aciers tendus, en fonction de la flèche au centre de la poutre.....	90
6.15- Contrainte béton tendu, en fonction de la flèche au centre de la poutre.....	91
6.16- Contrainte béton tendu, en fonction de la déformation au centre de la poutre.....	92
6.17- Contrainte béton comprimé, en fonction de la flèche au centre au centre de la poutre.....	93
6.18- Contrainte béton comprimé, en fonction de la déformation au centre de poutre.....	93
6.19- Comportement du béton au centre de la poutre obtenu par le présent modèle.....	94
6.20- Géométrie et système de chargement du Poteau de Fouré.....	95
6.21- Modèle numérique 2D du Poteau de Fouré.....	96

6.22- Charge-déplacement en tête du poteau.....	97
6.23- Géométrie et ferrailage de la poutre.....	98
6.24- Procédure expérimentale (La Borderie, 1991 ; Matallah, et al., 2009).....	98
6.25- Histoire de chargement.....	99
6.26- Discrétisation de poutre en éléments multicouches.....	99
6.27- Discrétisation de la section de la poutre (8 couches en béton seul et 2 comprenant simultanément du béton et de l'acier).....	99
6.28- Comparaison de la réponse force-flèche entre la simulation numérique et l'expérience.....	100
6.29- Carte d'endommagement de traction «D1 » pour le premier cycle de chargement...	100
6.30- Carte d'endommagement de traction «D1 » pour le deuxième cycle de chargement	101
6.31- Géométrie.....	102
6.32- Accélérogramme « S1_1B_COR » imposé à la structure.....	102
6.33- Réaction d'appui en fonction du temps.....	103
6.34- Flèche au milieu de la poutre en fonction du temps.....	103
7.1- Réponse bidimensionnelle d'une fondation superficielle rigide.....	106
7.2- Structure et comportement de l'élément gap.....	106
7.3- Acuité de plasticité.....	108
7.4- Structure du modèle de Wen.....	108
7.5- Comportement du model de Wen.....	108
7.6- Structure générale et comportement du macroélément.....	109
7.7- Méthode simplifiée proposée par le FEMA356 (2000).....	112
7.8- Généralisation de concept de Winkler (Houlsby et al 2005) : Considération de modèles locaux en chaque point de l'interface sol-fondation.....	113
7.9- Courbe force vertical-déplacement vertical.....	114
7.10- Réponse du système sous chargement quasi-statique monotone.....	117
7.11 Réponse du système sous chargement cyclique (chargement –déchargement – rechargement).....	117
7.12- Modèle numérique du système sol-fondation.....	119
7.13- Réponse du système sous chargement horizontal.....	119
7.14- Réponse du système sous chargement horizontal (cinq cycles).....	120

7.15-Modèle numérique de la fondation : Poutre rigide reposant sur 3 macroéléments....	121
7.16 Modèle EF avec le code Plaxis.....	121
7.17-Courbe Force-déplacement pour une excentricité nulle.....	123
7.18-Courbe force-déplacement pour une excentricité: $e=B/12$ et $e=B/6$	124
7.19-Courbe force-déplacement pour une excentricité: $e = B/4$ et $e = B/3$	124
7.20-Enveloppe de l'interaction moment-effort vertical en termes normalisés.....	125
7. 21-Réponse de la fondation décrite par macroéléments, pour le cas d'une excentricité $e= B/12$	126
7. 22-Réponse de la fondation décrite par macroéléments, pour le cas d'une excentricité $e= B/6$	126
7. 23-Réponse de la fondation décrite par macroéléments, pour le cas d'une excentricité $e = B/4$	127
7. 24-Réponse de la fondation décrite par macroéléments, pour le cas d'une excentricité $e = B/3$	127

LISTE DES TABLEAUX

5.1 Caractéristiques utilisées pour le modèle de comportement de La Borderie.....	74
5.2 Caractéristiques utilisées pour le modèle de comportement de Mazars.....	80
6.1 Caractéristiques utilisées pour le modèle de comportement de La Borderie (Moulin, 2012).....	84
6.2 Caractéristiques utilisées pour le modèle de comportement de La Borderie.....	96
7.1 Paramètres du macroélément.....	114
7.2 Caractéristiques du sol.....	115
7.3 Paramètres du sol.....	122
7.4 Paramètres de la fondation.....	122
7.5 Paramètres des macroéléments.....	122

ABREVIATIONS

Notation	Signification
ASCE	American Society of Civil Engineers
EF	Eléments finis
EFiCoS	Eléments Finis à Couches Superposées
Essai P.I.E.D	Essai Pour Identifier l'Endommagement Diffus
FEMA	Federal Emergency Management Agency
ISS	Interaction sol-structure

NOTATIONS PRINCIPALES

Lettres latines

Notation	Signification
a	Tenseur d'élasticité d'ordre 4
A	L'aire relative d'acier au sein de la couche renforcée.
a	Coefficient de rigidité post-plasticité à pré-plasticité du modèle de Wen
A_c, B_c	Paramètres du modèle de Mazars, identifiés par des essais de compression
A_i, B_i	Constantes du matériau (béton) pour le modèle de La Borderie
A_t, B_t	Paramètres du modèle de Mazars, identifiés par des essais de traction
$[B]$	Matrice dépend des dérivées des fonctions de forme
B	L'aire relative de béton au sein de la couche renforcée.
B	Largeur de la semelle
b, d	Paramètres du modèle élastoplastique simplifié de l'acier
C	Matrice de l'amortissement
C_{ab}	Le taux surfacique de ferrailage
C_{R-V}^K	paramètre du couplage entre la rigidité verticale et la rigidité rotationnelle de la fondation
D	la variable d'endommagement
$\{D\}$	Vecteur de déformations généralisées
D_1	Variable d'endommagement de traction
D_2	variables d'endommagement de compression
D_c	Variable d'endommagement en compression
$D(\vec{n})$	l'endommagement dans la direction de la normale \vec{n}
D_t	Variable d'endommagement en traction
E	Module de Young
e	Excentricité
E_0	module de Young initial
E_{acier}	Module de Young de l'acier au sein de la couche renforcée.
$E_{béton}$	Module de Young du béton au sein de la couche renforcée.
e_{end}	Espacement des ressorts de rive

e_{mid}	Espacement des ressorts centraux
E_T	Pente de la courbe en cours d'écrouissage
f	Fonction de charge de Drücker-Pager
$\{F\}$	Vecteur de des forces de la section
$f(\varepsilon, K)$	Surface seuil d'endommagement
$f(\sigma)$	Fonction de refermeture des fissures
f_c	limite en compression du béton
F^{el}	Partie élastique de la force F
F^h	Partie hystérésis de la force F
F_i	Surface seuil de l'évaluation de l'endommagement dans l'espace des contraintes
$\{F_{int}\}$	Vecteur des efforts internes
$\{F_{res}\}$	Vecteur des efforts résultants (forces nodales)
f_t	limite en traction du béton
F_y	Seuil de plasticité de Wen
F_y^H	Charge horizontale maximale du macroélément
I	Matrice d'unité
I_1	Premier invariant du tenseur des contraintes
I_y	inertie rotationnelle de la fondation
j	Le jacobien
J_2	Second invariant du déviateur des contraintes
k	Rigidité surfacique de la fondation
$[K_{elem}]$	Matrice de rigidité d'élément
k_{end}	Rigidité surfacique des zones d'extrémités
$K_{end}^{ressort}$	Rigidité associée à chaque ressort de rive
k_f	Rigidité finale du modèle de Wen
k_g	Rigidité élastique de l'élément gap
$K_{géo}$	Matrice de rigidité de "géométrique"
k_i	Rigidité initiale du modèle de Wen
k_{mid}	Rigidité surfacique de la zone centrale
$K_{mid}^{ressort}$	Rigidité associée à chaque ressort central
$[K_s]$	Matrice de rigidité d'une section S

K_x	Rigidité horizontale de la fondation
K_z	Rigidité verticale de la fondation
$K_{\theta y}$	Rigidité rotationnelle de la fondation
L_{end}	Longueur de zone d'extrémité de la fondation
$[M_{elem}]$	Matrice de masse de l'élément
$[M_s]$	Matrices de masse d'une section S
M_x, M_y, M_z	Moments
N	Effort normal
$[N]$	Fonctions d'interpolation
N_y, N_q et N_c	facteurs de capacité portante
$open$	L'ouverture initiale de la « gap »
$\{Q\}$	Vecteur dépend du chargement extérieur
q_0	Contrainte verticale effective du sol
T_x, T_y, T_z	Efforts tranchants
u	Déplacement
$\{u\}, \{u'\}, \{u''\}$	Vecteurs des déplacements, vitesses et accélération des nœuds
u_k^{cr}	Déplacements créés par un nombre k de fissures orientées
$\{U_s\}$	Vecteur de déplacements en un point de la ligne moyenne x de poutre
$\{U\}^T$	Vecteur de déplacements
$u(x, y, z)$	Déplacement d'un point quelconque de la poutre selon la direction x
u_y	Déplacement relatif au seuil de plasticité de Wen
$v(x, y, z)$	Déplacement d'un point quelconque de la poutre selon la direction y
$w(x, y, z)$	Déplacement d'un point quelconque de la poutre selon la direction z
X	Variable d'écrouissage cinématique de l'acier
Y_i	Variable associée à l'endommagement (taux de restitution d'énergie, en traction ou en compression)
Y_{0i}	Seuil d'endommagement (traction ou compression).
z	Paramètre sans dimensions d'hystérésis du modèle de Wen
z_i	variable d'écrouissage (en traction ou en compression)

Lettres Grecques

Notation	Signification
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	déformations principales
$\tilde{\sigma}(\vec{n})$	Contrainte effective sur le matériau endommagé selon la direction \vec{n}
$\sigma(\vec{n})$	contrainte réelle sur le matériau endommagé selon la direction \vec{n}
ε	Déformation totale
ε_s	Déformation représentant le glissement entre lèvres de fissures ou l'ouverture unitaire de fissure
ψ	Le potentiel thermodynamique énergie libre
ε^e	Tenseur de déformation élastique
T	Température
V_k	Les variables internes comme les variables d'écrouissage
ψ_e	potentiel thermoélastique endommageable
ψ_p	Potentiel plastique
ρ	Masse volumique
ε^p	Tenseur des déformations plastiques
ν	Coefficient de Poisson
$\tilde{\varepsilon}$	déformation équivalente
α_t	Coefficient traduit la part respective de chacun des endommagements de traction et de compression
β	Paramètre pour ajuster le comportement du modèle en cisaillement
ε_{D0}	Seuil d'endommagement initial
ε_{ti}	Déformations créées par les contraintes principales positives
ε_{tc}	Déformations créées par les contraintes principales négatives
ε^{an}	Déformation anélastique
σ^+	Partie positive d'un tenseur contrainte exprimé dans sa base propre
σ^-	Partie négative d'un tenseur contrainte exprimé dans sa base propre
β_1, β_2	Paramètres du matériau liés aux déformations anélastiques
σ_f	contrainte de refermeture de fissures
ε_N	déformation normale
ε_{Tj}	déformation tangentielle
σ_y	Limite d'élasticité de l'acier

ε_{\max}	Déformation maximale atteinte en charge de l'acier
ε_{Sy}	Déformation maximale élastique de l'acier
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}$	Champ des déformations d'un point de la poutre
$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$	Champ des contraintes d'un point de la poutre
α	Variable interne associée à l'écroûissage cinématique de l'acier
σ_{couche}	Contrainte de la couche mixte (béton + acier)
$\sigma_{béton}$	Contrainte du béton au sein de la couche renforcée
σ_{acier}	Contrainte de l'acier au sein de la couche renforcée
$\varepsilon_{béton}$	Déformation de béton
ε_{acier}	Déformation de l'acier
$\varepsilon_{anélbéton}$	Déformation anélastique de béton
$\varepsilon_{anélacier}$	Déformation anélastique d'acier
$\varepsilon_{anél}$	Déformation anélastique homogénéisé de la couche renforcée (acier+ béton).
ω	Fréquence
ζ_i	Pourcentage d'amortissement critique
ω_n	Fréquence du mode significatif le plus bas
ω_m	Fréquence du mode supérieur
γ	Poids volumique

INTRODUCTION GENERALE

Le béton est le matériau le plus utilisé dans les ouvrages de génie civil (bâtiments, ponts, barrages, centrales nucléaires,...), il présente des propriétés spécifiques liées notamment à l'hétérogénéité de ce matériau, à sa faible résistance en traction (comportement fragile en traction), à sa faible déformation à la rupture et enfin à sa ductilité en compression.

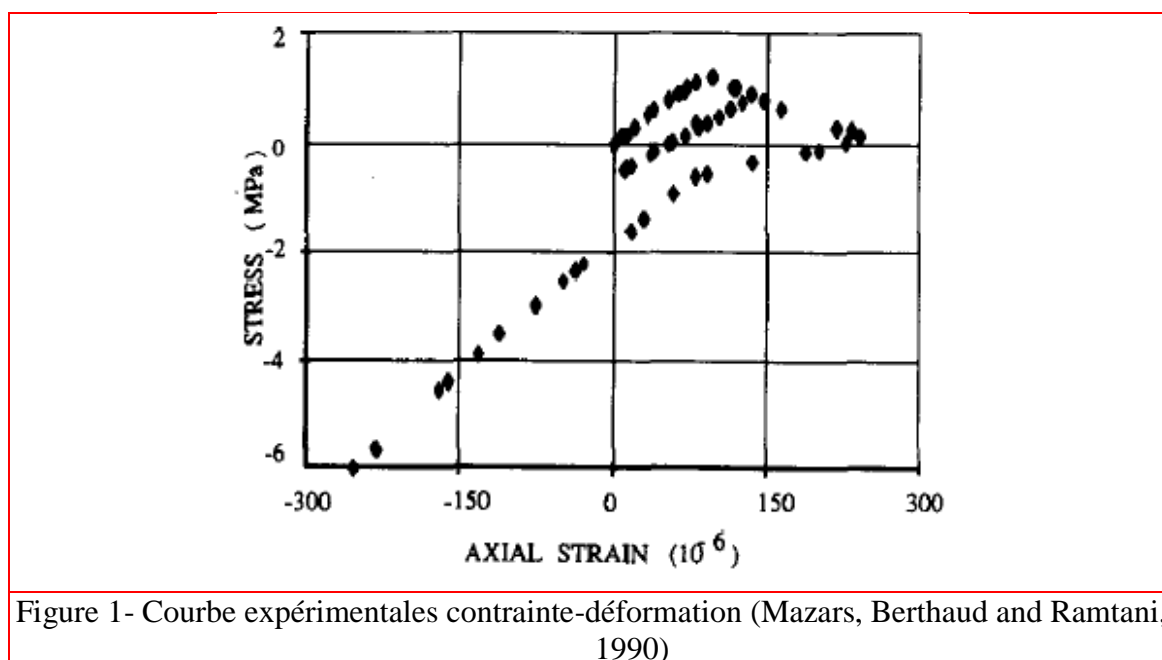
La première étape vers une exploitation optimisée de ce matériau hétérogène passe par une bonne connaissance fine de son comportement vis-à-vis des différentes sollicitations (statique, cyclique et dynamique). C'est pourquoi depuis plusieurs dizaines d'années, les chercheurs ont mené des nombreuses études expérimentales afin d'identifier les caractéristiques et le comportement mécanique du béton. Parmi ces études nous citons les travaux de :

Terrien (1980), Gopalaratnam, et al. (1985) qui ont étudié le comportement du béton tendu sous chargement monotone et cyclique, ils mettent en évidence le comportement très fragile du béton tendu ainsi que la dégradation des paramètres élastique du matériau à cause de la propagation des fissurations –source de l'endommagement du béton–. Ils ont observé aussi l'apparition de phénomènes hystérétiques lors de cycles de charge-décharge caractérisés par la présence de boucles. Ces phénomènes, fortement non linéaires, sont en général interprétés comme la manifestation d'un frottement entre les lèvres des fissures créées. Enfin, ils ont remarqué la présence de déformations résiduelles lorsqu'une décharge complète est appliquée.

Karsan et al. (1969), Chen (1982) et Ramtani (1990) ils ont montré que le comportement du béton comprimé est caractérisé par deux phases : une première durant laquelle un réseau de microfissures se forme et une seconde durant laquelle ces dernières se coalescent pour conduire à l'apparition de macrofissures, en plus une dégradation des paramètres élastique (rigidité et module de Young) est observée lors des phases de déchargement. Ces essais montrent également que la réponse en compression d'un béton est plus ductile par rapport à celle obtenue en traction, et d'autre part, l'intensité des phénomènes hystérétiques est bien plus importante. Finalement les déformations anélastiques sont aussi observées.

Mazars, Berthaud et Ramtani (1990) ils ont réalisé un essai uniaxial cyclique en traction-compression (essai P.I.E.D -Pour Identifier l'Endommagement Diffus-), à partir duquel les

auteurs mettent en évidence la capacité d'un béton à restaurer sa rigidité initiale après la refermeture des fissures (phénomène unilatéral) (figure 1).



A la base de toutes ces études expérimentales du béton, les organismes de recherche ont orienté vers le développement des modèles numériques afin de décrire les non-linéarités observés expérimentalement (endommagement du béton). Le premier modèle d'endommagement du béton a été développé par Jacky Mazars (1984), malgré ses insuffisances en particulièrement en chargement cyclique, le model de Mazars est le plus utilisé dans le milieu scientifique à cause de sa simplicité et sa facilité d'implantation dans les codes de calcul. Au fur et à mesure de l'élargissement des objectifs et de la volonté d'obtenir des résultats de plus en plus proches de la réalité, et ceci pour des cas de chargement de plus en plus complexes, de nouveaux modèles ont vu le jour, a savoir le modèle unilatérale de La Borderie (1991). Ce dernier modèle a prouvé sa capacité de décrire les non-linéarités lies à la plasticité et à l'endommagement du béton sous chargement statique, cyclique et sismique (La Borderie, 1991, Ragueneau, 1999 ; Kotronis, 2000, La Borderie, 2003 ; Ragueneau, 2006, Nguyen, 2006 et Khebizi & Guenfoud, 2015).

L'étude de comportement des armatures du béton armé a été aussi l'objectif de nombreux développements. Contrairement au béton, le comportement de l'acier est quasi identique en traction et en compression, il se caractérise par deux phases : une phase élastique dans laquelle les déformations sont réversible et une phase plastique dans laquelle l'apparition des déformations permanentes (Lemaitre, 1986, Lemaitre 2001). Les modèles numériques les plus

utilisés pour la simulation du comportement non-linéaire des aciers du béton armé sont : le modèle uniaxial élasto-plastique simplifié avec écrouissage cinématique et le modèle Pinto-Menegotto (Menegotto et al. 1973). Le premier modèle est utilisé pour simuler le comportement des aciers sous chargement monotone et le seconde pour la simulation des aciers sous chargement cyclique.

La modélisation du comportement non-linéaire des structures en béton armé est une obligation inévitable. La réponse d'une structure en béton armé sous un chargement résulte d'une forte interaction entre les effets des matériaux (non-linéarités locales), les effets de géométriques des structures (géométrie, répartition des forces et des raideurs, liaisons) et l'effet d'environnement (interaction sol-structure). Les non-linéarités locales sont notamment liées à la formation, à l'ouverture et la refermeture des fissures d'une part, à la liaison et au comportement des armatures (plastification des aciers) d'autre part. Une bonne description de ces phénomènes est un passage obligé si l'on veut représenter les variations des raideurs de la structure et suivre le comportement jusqu'à la ruine.

Dans cette thèse nous présentons une méthode de modélisation numérique des structures planes (2D) en béton armé sous chargement statique et cyclique, elle utilise des éléments poutres de type multicouches dont la matrice de raideur est calculée à l'aide d'une discrétisation de la poutre selon la hauteur en couches successives superposées. La sommation de ces couches permet le calcul de la raideur d'une manière correcte et la prise en compte des variations du comportement. L'hypothèse cinématique de Bernoulli (les sections restant planes et perpendiculaires à l'axe neutre) confère aux différentes couches un comportement uniaxial. Ceci permet de traiter les comportements locaux à travers des lois uniaxiales, pour le béton et l'acier, attribuées à chaque couche. Le calcul des efforts anélastiques s'effectue grâce à une méthode d'itération basée sur la raideur sécante initiale. Une deuxième méthode basée sur l'approche des modèles de comportement globaux a été présenté dans cette thèse dans laquelle nous avons développé un macroélément capable de décrire le comportement non-linéaire des fondations superficielles rigides.

Cette thèse se divise en sept chapitres :

Le premier chapitre présente une étude bibliographique sur le comportement mécanique du béton, dans lequel nous présentons les principales caractéristiques expérimentales du béton sous chargement uniaxial monotone et cyclique, ainsi que les modes des fissurations et l'endommagement du béton.

Dans le deuxième chapitre, plusieurs modèles de comportement du béton et des aciers sont présentés. Nous présentons deux familles de modèle de comportement du béton, la première basée sur l'approche globale et la deuxième basée sur l'approche locale dans laquelle l'endommagement du matériau est pris en considération. Le modèle proposé pour décrire le comportement de l'acier est le modèle élasto-plastique.

Le troisième chapitre présente la théorie permettant de mettre en évidence les éléments poutres multifibres et multicouches. Après une introduction qui porte sur l'intérêt des méthodes simplifiées, les échelles de modélisation et discrétisation, plusieurs éléments poutres multifibres de cinématique de Timoshenko et Euler-Bernoulli sont détaillés. L'élément de poutre multicouche Euler-Bernoulli est ensuite choisi pour le reste de ce travail.

Le quatrième chapitre concerne la modélisation numérique du comportement endommageant des structures en béton armé par éléments finis à couches superposées (multicouches). L'hypothèse cinématique de Bernoulli est adoptée afin d'assurer un comportement uniaxial pour chaque couche.

Le cinquième chapitre est consacré à la modélisation de la réponse non linéaire des éléments en béton par des éléments finis à couches superposées pour lesquels le modèle unilatéral de La Borderie a été utilisé, au moyen du code de calcul EFiCoS.

Dans le sixième chapitre, nous modélisons le comportement non linéaire des plusieurs structures en béton armé : poutre en flexion 3 points avec un chargement monotone, flambement d'un poteau, poutre en flexion 3 points avec un chargement cyclique et une poutre sous chargement sismique. Les confrontations des résultats montrent l'efficacité de la stratégie de modélisation choisie.

Dans le septième chapitre nous avons basé sur l'approche des modèles globaux afin de développer un macroélément capable de modéliser le comportement non-linéaire (non-linéarités matérielles et géométriques) des fondations superficielles sous chargement statique monotone et cyclique. Plusieurs d'exemples de validation sont présentés qu'ils permettent de constater l'efficacité et la simplicité du macroélément développé.

Enfin les principales conclusions ainsi que les perspectives envisagées pour un travail futur sont présentées.

CHAPITRE 1

COMPORTEMENT MECANIQUE DU BETON

1.1. Introduction

Le béton est un matériau très commun mais aussi très complexe (matériau quasi-fragile, avec un comportement quasi-élastique puis viscoélastique s'endommageant, dont les propriétés évoluent aussi avec le temps ...).

Les différents usages des bétons sont la source d'une grande diversité de compositions, or les propriétés du béton dépendent des propriétés de ses composants (résistance de la pâte, nature et forme des granulats, éventuels ajouts...).

Dans ce chapitre nous allons présenter succinctement les caractéristiques fondamentales du béton ainsi que sa réponse lorsqu'il est soumis à des états de contrainte uniaxiaux. Ces connaissances sont indispensables pour le développement numérique des modèles de comportement utilisables pour la modélisation des structures, ils ont deux objectifs majeurs :

- Permettre que le comportement du matériau traduit par une modélisation numérique soit conforme à la réalité observée ;
- Procurer l'information nécessaire à la détermination des constantes des matériaux qui apparaissent dans les modèles numérique constitutifs.

Bien qu'il soit possible d'établir un modèle sans tenir compte des effets qui interviennent à l'échelle microscopique, ceux-ci sont cependant les facteurs déterminants de la réponse mécanique du béton. C'est pourquoi leur connaissance sera d'un grand intérêt pour la modélisation du comportement du matériau. Nous les mentionnerons donc avec la relation fondamentale que nous utiliserons pour la modélisation, à savoir la relation contrainte-déformation.

1.2. Comportement mécanique du béton

Le béton présente des caractéristiques variables de déformation sous diverses conditions et niveaux de charge.

Une grande part de la connaissance des mécanismes de son comportement résulte d'observations expérimentales. L'accumulation des connaissances empiriques et l'expérience acquise sont des éléments très importants à prendre en considération lors de la modélisation numérique du comportement du béton.

Nous présentons maintenant le comportement observé en fonction du type de sollicitation.

1.2.1. Compression

L'essai de compression uniaxiale est utilisé pour connaître la résistance et le comportement du béton en compression. L'allure générale de la courbe contrainte-déformation est donnée par la figure 1.1. Nous observons les quatre phases suivantes :

- La réponse est linéaire jusqu'à 30% - 50% de la limite en compression f_c .
- La courbe devient de plus en plus non linéaire jusqu'à 75% - 90% de la limite f_c .
Apparition de l'irréversibilité (déformation permanente).
- La courbe présente un pic suivi d'une branche post-pic correspondant à un comportement adoucissant. Le coefficient de Poisson évolue (figure 1.1a).
- La rupture apparaît progressivement au-delà du pic par coalescence de microfissures et augmentation de volume ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sont les déformations principales - figure 1.1b).

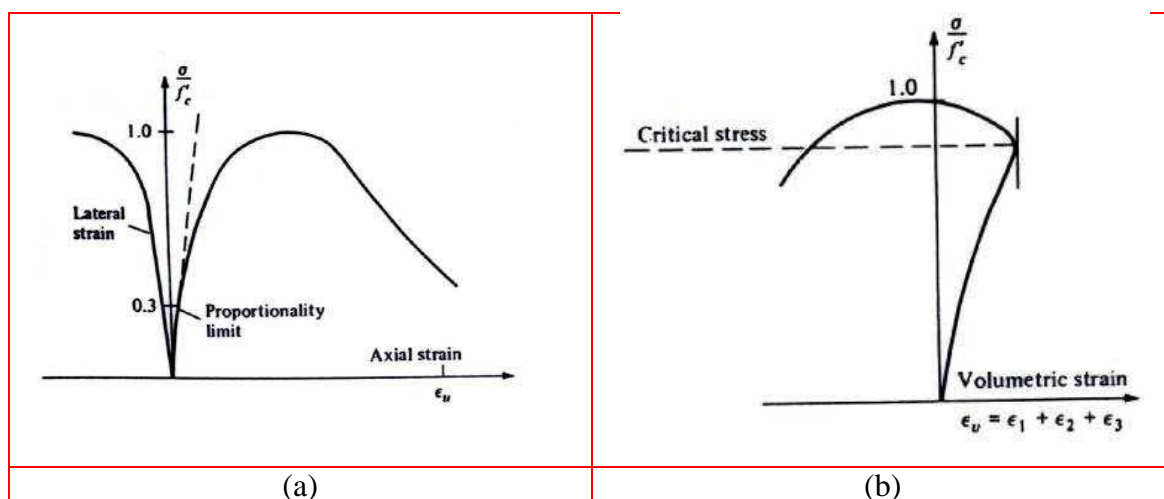
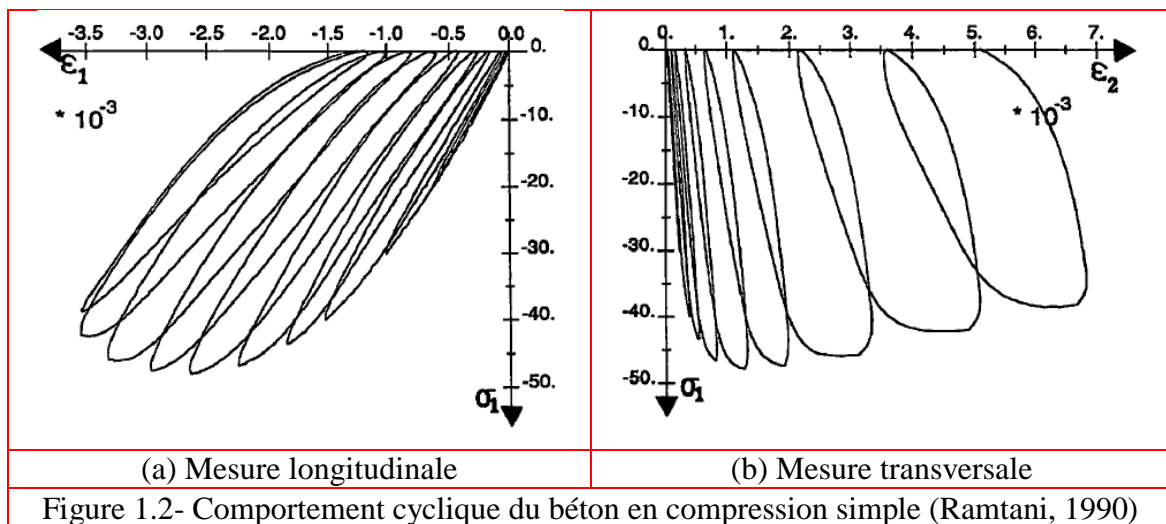


Figure. 1.1- Comportement du béton en compression simple (Chen, 1982, Nguyen, 2006)

Cette dégradation du matériau essentiellement liée au développement de microfissures s'orientant parallèlement à la direction du chargement (et sont donc perpendiculaires aux directions d'extension). Cet endommagement a fait l'objet de nombreux travaux (Lorrain, 1974), (Chen, 1982) (Mazars, 1984), (Berthaud, 1988), (Marcio, et al., 2002).

L'essai cyclique en compression (figure 1.2) montre également que les microfissures, source de l'endommagement, provoquent une dégradation des caractéristiques élastiques du matériau. Les différences de diminution de rigidité longitudinale et transversale mettent en évidence l'anisotropie induite par la fissuration orientée sur des plans parallèles au chargement. De plus, nous distinguons clairement l'apparition de boucles d'hystérésis lors des cycles charge-décharge. L'amplitude de ces boucles évolue avec l'endommagement du matériau. Cette dissipation d'énergie s'explique par la présence d'une certaine viscosité et d'une plasticité induite par le frottement et le glissement des lèvres des microfissures lorsque celles-ci s'ouvrent et se referment.



1.2.2. Traction

Bien que le béton soit principalement conçu pour résister à la compression, la connaissance de ses propriétés en traction est importante. Terrien (1980) a réalisé un essai de traction sur une éprouvette cylindrique carottée dans un bloc confectionné en micro-béton (figure 1.3). Nous pouvons distinguer les deux phases suivantes :

- L'avant pic ($\sigma < f_t$) où la courbe est presque linéaire (f_t étant la limite en traction);
- L'après pic où la contrainte chute brutalement avant de se stabiliser, les déformations pouvant continuer à croître. Apparition de l'irréversibilité (déformation permanente).

La progression de microfissures conduit à la formation de fissures à l'échelle macroscopique. Ce mécanisme se traduit par un endommagement directionnel du matériau qui devient orthotrope. Les cycles charge-décharge permettent de constater une chute importante de module en fin d'essai ($E \approx E_0/2$, figure 1.3).

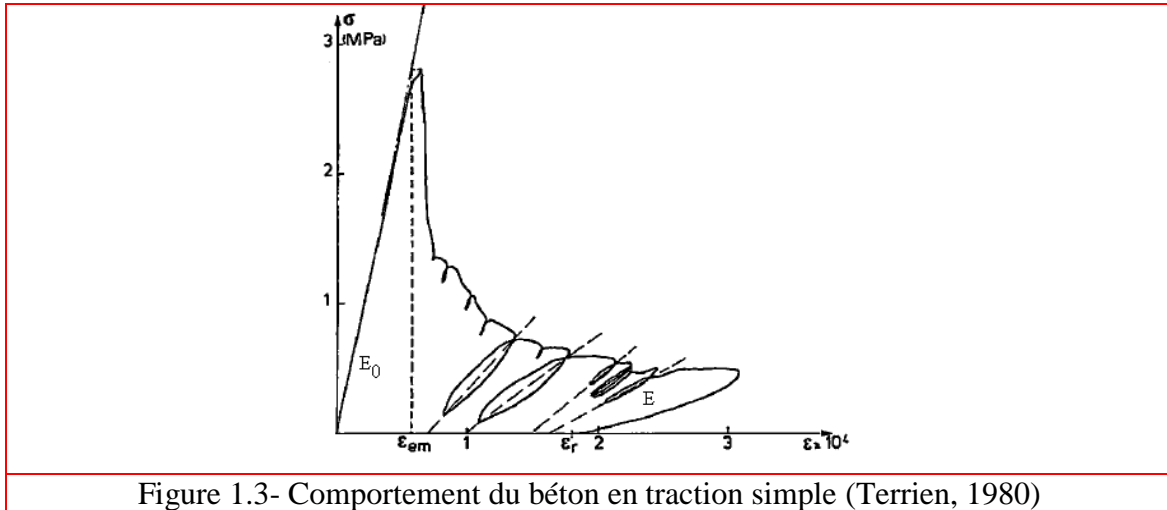


Figure 1.3- Comportement du béton en traction simple (Terrien, 1980)

L'essai de traction cyclique (figure 1.4) montre que les boucles d'hystérésis sont très faibles. Ceci s'explique par le fait que le frottement entre les lèvres des microfissures est moins important qu'en compression.

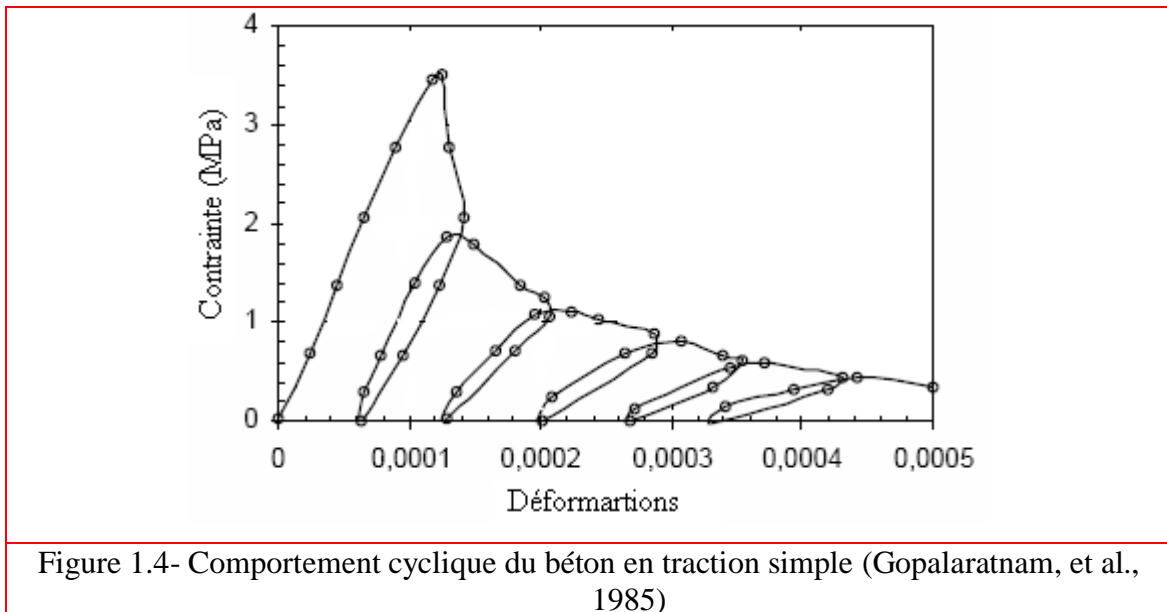
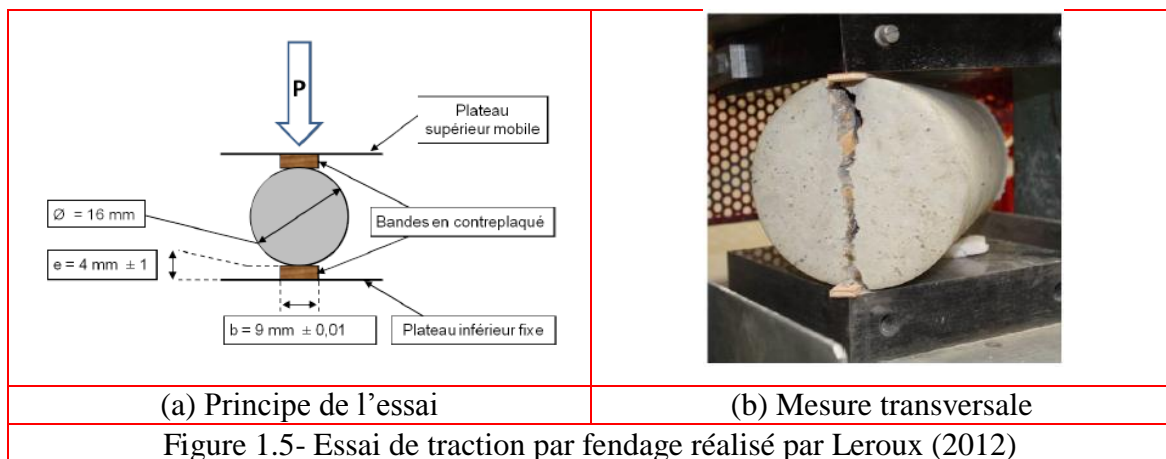


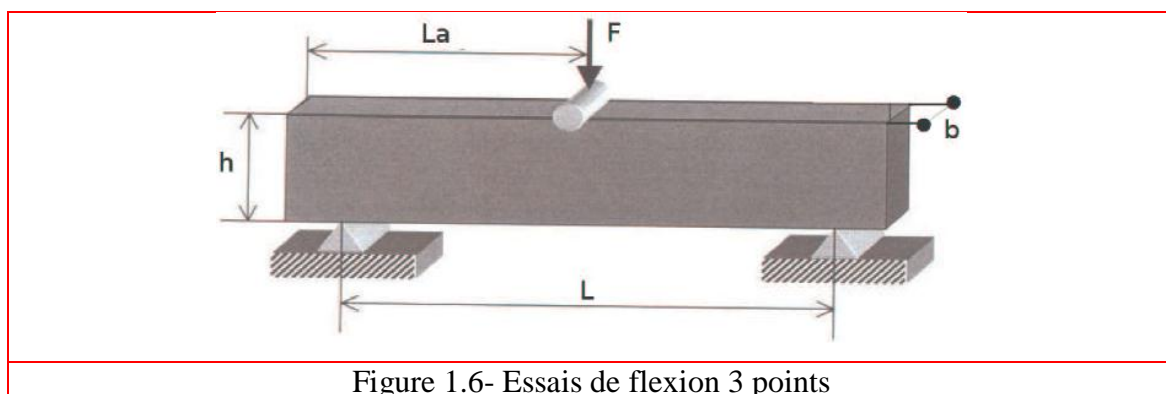
Figure 1.4- Comportement cyclique du béton en traction simple (Gopalaratnam, et al., 1985)

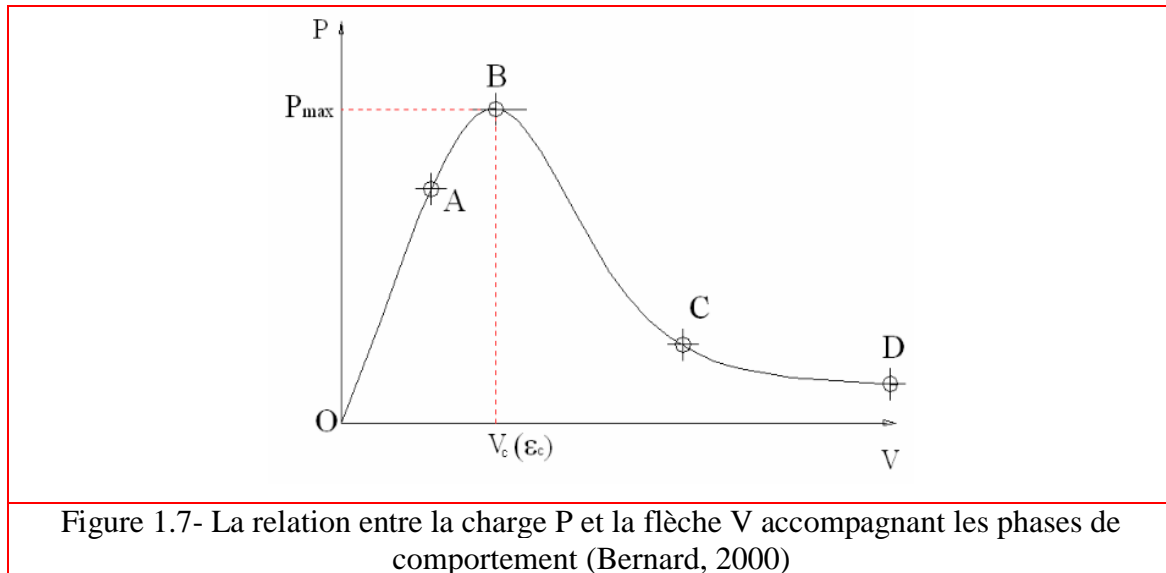
D'autres procédés expérimentaux plus simples de mise en œuvre sont possibles pour obtenir une estimation du comportement en traction tels que l'essai de traction par fendage - encore appelé essai «brésilien» - ou l'essai de flexion 3 points.

L'essai de traction par fendage consiste à appliquer une charge P de compression maximale produisant l'éclatement d'une éprouvette cylindrique (diamètre D , longueur L) par mise en traction du diamètre vertical (Leroux, 2012). La contrainte horizontale de traction (à rupture) est définie par : $f_t = 2P/\pi DL$. Cet essai a l'avantage d'être économique (utilisable sur des éprouvettes de compression 16x32cm) et tout à fait reproductible (Leroux, 2012).



Les essais de traction par flexion sont utilisés très couramment au laboratoire pour déterminer la résistance en traction du béton, en raison de la simplicité de ces essais et de leur capacité à représenter presque exactement le comportement réel du béton dans des structures de génie civil. Les éprouvettes peuvent être fléchies en flexion trois ou quatre points. Les résultats d'un essai de traction par flexion 3 points sont présentés à la figure 1.7 sous la forme charge P en fonction de la flèche de l'éprouvette V .





Le comportement du béton en flexion peut être décomposé en plusieurs phases comme suit (Bernard, 2000) :

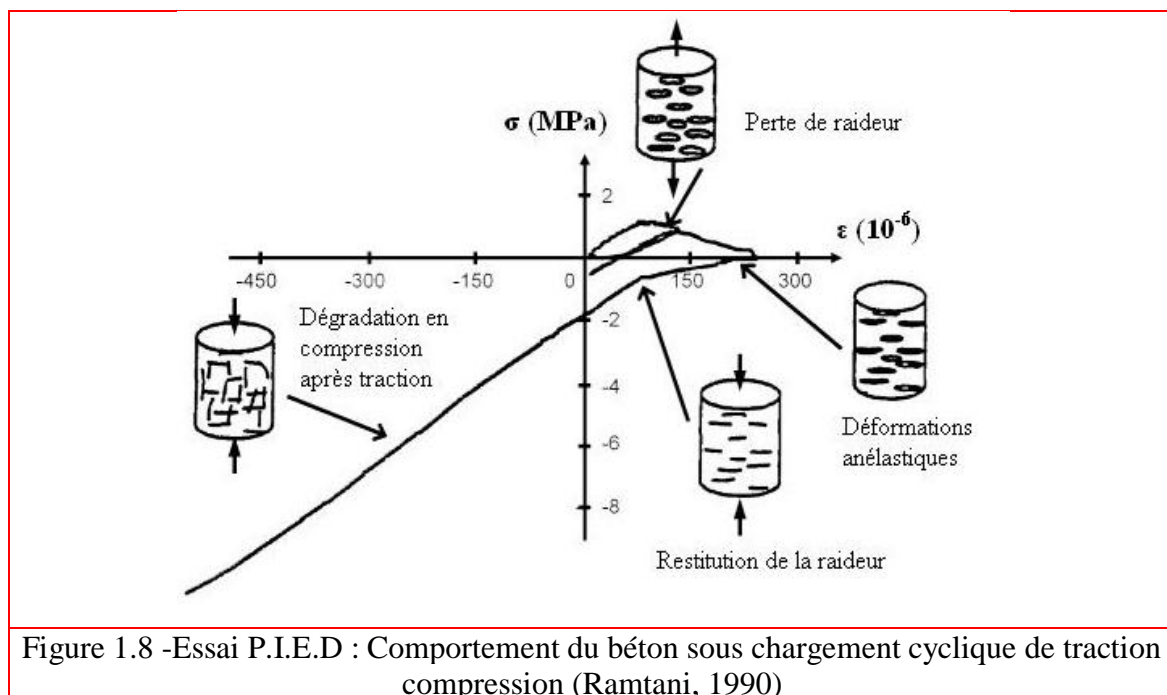
- (OA) Comportement linéaire, tant que $P < (0.7 - 0.8)P_{\max}$. Présence de microfissures superficielles sur l'éprouvette, mais le module d'élasticité (E) reste constant.
- (AB) Apparition de microfissures à l'intérieur de l'éprouvette, caractérisé par un comportement non linéaire pré-pic. On considère que cette phase débute pour $P < (0.75 - 1)P_{\max}$. La propagation des microfissures engendre un endommagement diffus du béton. Le module d'élasticité diminue légèrement et des déformations résiduelles apparaissent.
- (B) Autour du point B : accumulation de microfissures. Ces microfissures tendent vers des fissures concentrées. La localisation de la déformation provoquant un endommagement important apparaît.
- (BC) Déformation avec comportement adoucissant. Des zones de localisation de la déformation apparaissent clairement avec plusieurs microfissures concentrées. Le module d'élasticité diminue fortement. Des macrofissures sont créées par l'accumulation des microfissures, tandis que les granulats empêchent la propagation des macrofissures.

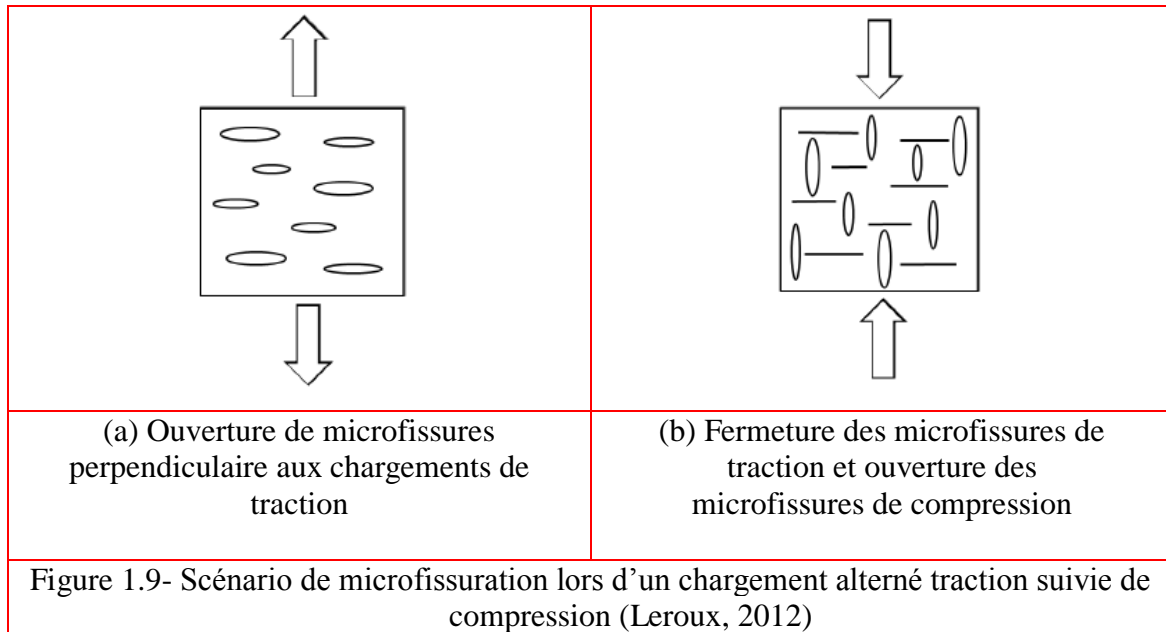
- (CD) Augmentation très rapide de la déformation d'adoucissement, tandis que la charge diminue lentement. La vitesse de propagation des fissures diminue vu la friction existant entre les granulats. Cette friction transmet une résistance entre les lèvres des fissures et empêche par conséquent la diminution de la charge.

1.2.3. Chargement cyclique de traction-compression

Les essais cycliques de traction-compression (voir par exemple l'essai P.I.E.D - Pour Identifier l'Endommagement Diffus, (Mazars, et al., 1990), (Ramtani, 1990)) permettent de mettre en évidence le caractère unilatéral du comportement du béton.

Il consiste en une restauration de la raideur lors du passage d'un chargement en traction, où cette raideur est initialement endommagée du fait de la fissuration, à un chargement en compression (figure 1.8). Le béton retrouve sa raideur initiale grâce à la refermeture des fissures. Il s'explique par l'ouverture de microfissures perpendiculaires au chargement en traction (figure 1.9(a)) qui se referment et se retrouvent comprimées, laissant apparaître ensuite, si le chargement s'intensifie, d'autres fissures parallèles cette fois au chargement de compression (figure 1.9(b)). Cette refermeture de microfissures permet de restituer partiellement la raideur initiale du béton en compression.





1.3. Mécanique de l'endommagement appliquée au béton

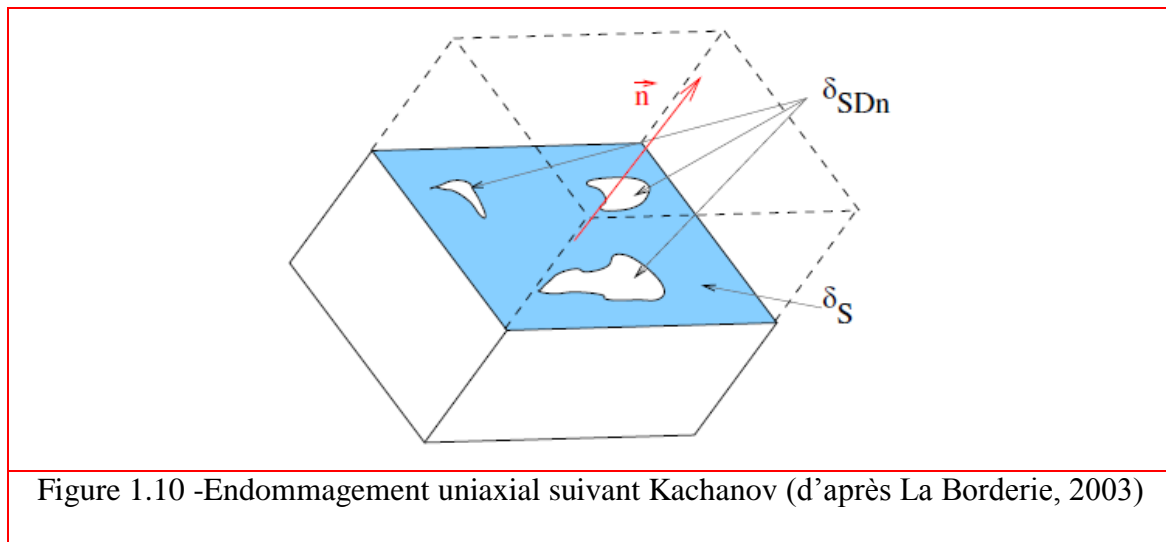
Le principe de la mécanique de l'endommagement est bien adapté à la description des nonlinéarités survenant dans le béton ou dans les matériaux fragiles du même type car il postule l'existence de décohésion au sein du volume élémentaire représentatif. Comme on l'a vu aux paragraphes précédents, c'est la création de microfissures coalesçant vers une macrofissure qui engendre la ruine du matériau.

Tout d'abord proposée par Kachanov (Kachanov, 1958) afin de décrire le fluage des matériaux métalliques, la mécanique de l'endommagement introduit le principe de contrainte effective stipulant que la contrainte réelle s'appliquant sur la partie de matière encore résistante est supérieure à la contrainte macroscopique. Cette notion s'exprime souvent par le biais du principe d'équivalence en déformation : la contrainte effective (Lemaitre 1986, 1992, 2001) est celle qui produit dans une direction donnée la même déformation sur le matériau vierge que la contrainte macroscopique sur le matériau endommagé, soit pour une normale \vec{n} :

$$\tilde{\sigma}(\vec{n}) = \frac{\sigma(\vec{n})}{1-D(\vec{n})} \quad (1.1)$$

On peut définir l'endommagement dans la direction représentée par une normale \vec{n} par le rapport entre l'aire de la surface initiale de matériau δ_S et l'aire de la surface des défauts δ_{SD_n} :

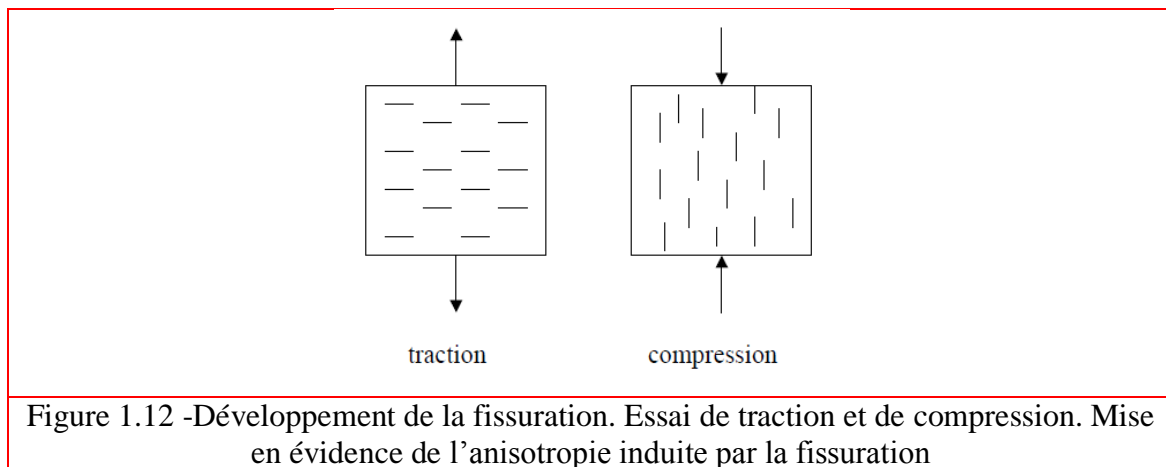
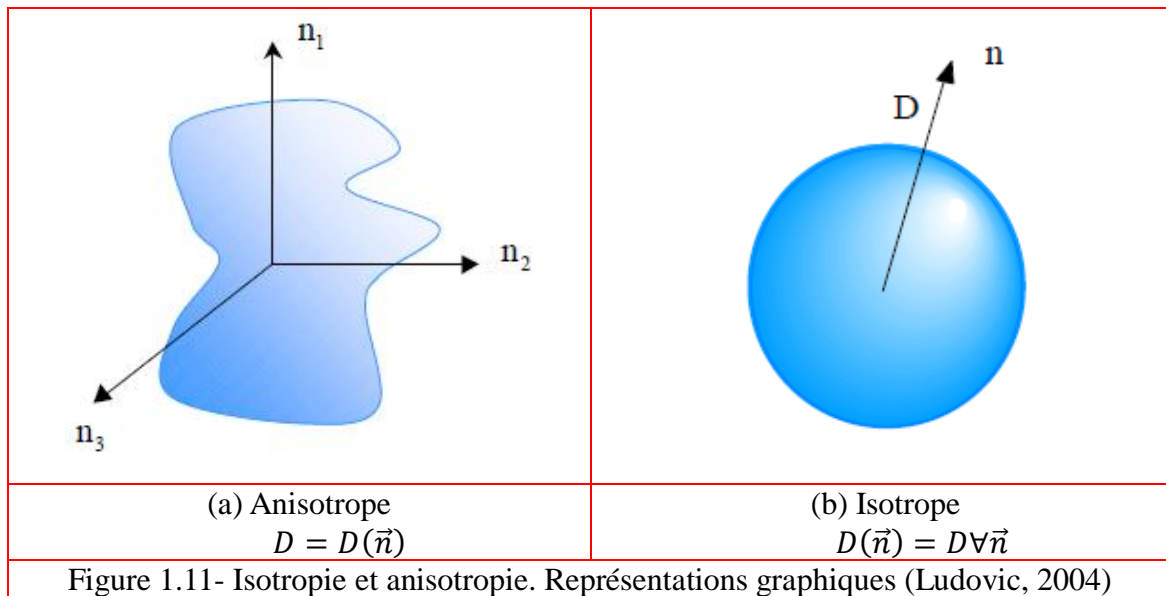
$$D(\vec{n}) = \frac{\delta_{SDn}}{\delta_S} \quad (1.2)$$



Dans le cas général d'un endommagement anisotrope constitué des fissures d'orientation privilégiées, la valeur de la variable scalaire $D(\vec{n})$ dépend de l'orientation de la normale. La représentation graphique associée est donc une forme quelconque où $D = D(\vec{n})$ (figure 1.11.a).

Un endommagement isotrope est constitué de fissures dont l'orientation est distribuée uniformément dans toutes les directions. Dans ces, la valeur de la variable $D(\vec{n})$ ne dépend pas de l'orientation \vec{n} et le scalaire D caractérise complètement l'état d'endommagement ($D(\vec{n}) = D\forall\vec{n}$) (Lemaitre 2001), on peut donc représenter la surface d'endommagement par une sphère (figure 1.11.b).

L'anisotropie se manifeste de manière assez naturelle dans les bétons. Un essai de traction-compression illustre parfaitement le phénomène. Alors qu'en traction, les fissures se forment perpendiculairement à la direction de chargement, en compression, leurs directions deviennent parallèles (figure 1.12). Ainsi, même si le matériau est considéré comme initialement isotrope, le tenseur d'élasticité dégradée devient progressivement anisotrope : l'endommagement a des directions privilégiées. C'est cette information directionnelle qui définit physiquement l'anisotropie de l'endommagement.



Lors de l'ouverture ou de la fermeture des microfissures, les lèvres des microfissures frottent et provoquent une dissipation à laquelle on peut attribuer les phénomènes hystériques observés. Sur cette base, on peut faire la représentation schématique de la figure 1.13.

Le comportement correspondant est représenté par l'équation suivante :

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon + ED(\varepsilon - \varepsilon_s) \tag{1.3}$$

Nous pouvons observer que la contrainte totale est séparée en deux parties : une contrainte classique élasto-endommageable et une contrainte de frottement $\sigma = \sigma_d + \sigma_s$:

$$\sigma_d = E(1 - D)\varepsilon \quad \text{et} \quad \sigma_s = ED(\varepsilon - \varepsilon_s) \quad (1.4)$$

où ε_s est une variable homogène à une déformation représentant le glissement entre lèvres de fissures ou l'ouverture unitaire de fissure, E est le module d'Young du matériau vierge, ε est la déformation, σ la contrainte et D la variable d'endommagement.

Sur la figure 1.13 nous donnons la représentation phénoménologique du modèle.

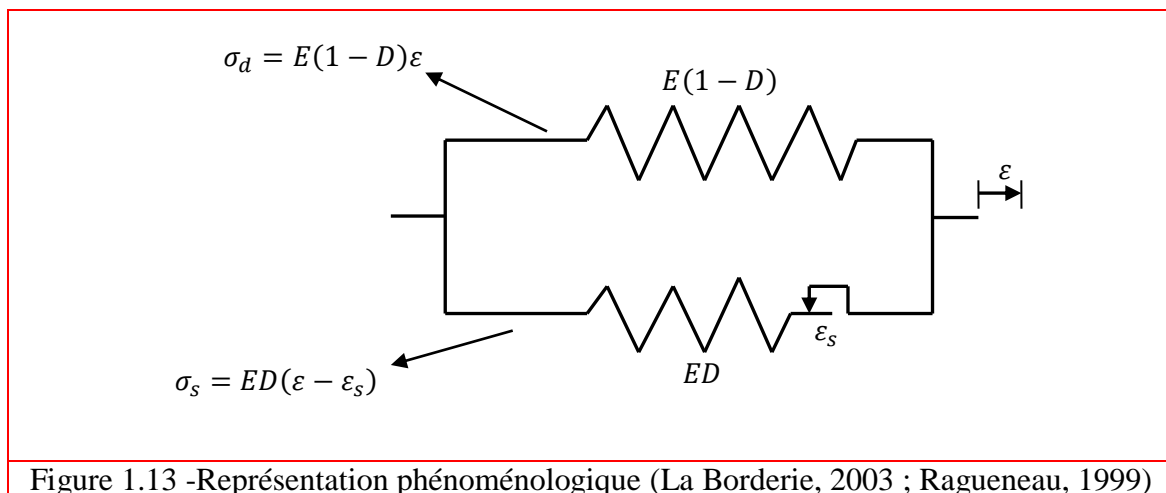
On remarque que l'équation 1.3 peut également s'écrire :

$$\sigma = E\varepsilon - ED\varepsilon_s \quad (1.5)$$

L'écriture de la loi d'élasticité dans un cadre uniaxial nous conduit à la relation suivante :

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon \quad (1.6)$$

L'endommagement D est donc perçu comme un facteur influençant la rigidité sécante du matériau, $D = 0$ pour un matériau vierge et $D = 1$ pour un matériau complètement rompu (incapable de supporter toute contrainte).



L'approximation de la rigidité élastique peut se faire par plusieurs biais selon la cinématique adoptée pour la variable d'endommagement. En effet, elle peut être scalaire induisant un état de microfissuration homogène dans toutes les directions de l'espace (Mazars 1986) ou bien tensorielle pouvant ainsi prendre en compte l'anisotropie induite par la fissuration (Benouniche 1979, Pijaudier-Cabot 1985, Ramtani 1990, Bary 1996).

1.4. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une synthèse bibliographique sur le comportement du béton. Des essais en compression, en traction ou sous chargements cycliques ont permis de mettre en évidence les phénomènes physiques et les principales caractéristiques intervenants lors de l'endommagement du béton. La connaissance de ces phénomènes et de ces caractéristiques sont indispensable pour le développement des modèles numériques afin d'établir une modélisation réaliste et fiable.

CHAPITRE 2

LES MODELES DE COMPORTEMENT DU BETON ARME

2.1. Introduction

Deux approches peuvent être adoptées afin de modéliser des structures en béton armé soumises à des chargements mécaniques de type cyclique : les modèles globaux et les modèles locaux. Les modèles globaux décrivent le comportement d'éléments complets de structure (assemblage, noeud, ...) au moyen de lois de fonctionnement reliant des quantités structurelles globales (moment, effort tranchant, rotation, déplacement). Ils se caractérisent par une souplesse de mise en œuvre et engendrent bien souvent un coût de calcul réduit. Toutefois, le point sensible de ces modèles réside dans l'identification de leurs paramètres et surtout dans leur validation pour des structures différentes de celles utilisées pour leur calage. A l'inverse, les modèles locaux s'attardent à décrire le comportement intrinsèque des matériaux au moyen de lois décrivant la physique des phénomènes le plus précisément possible. Ils sont identifiés par des essais au niveau de l'élément de volume et permettent le calcul de structures supportant des conditions de chargement diverses. La limitation dans l'utilisation de cette approche locale est principalement liée à la lourdeur des calculs qui empêche bien souvent le traitement de structures de grandes tailles.

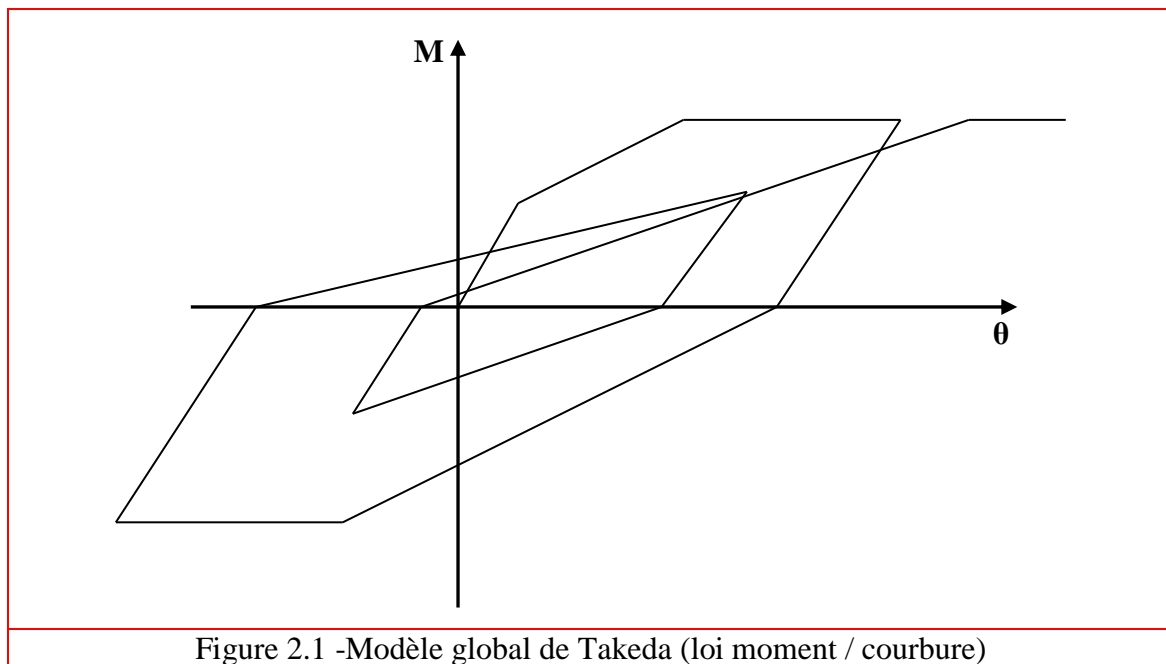
Dans les paragraphes suivants, nous allons tout d'abord décrire les principaux modèles globaux ainsi que leur support géométrique, sans toutefois en donner une liste exhaustive. Puis, nous allons nous attarder plus particulièrement sur les modèles locaux de description du comportement du béton, base de notre travail.

2.2. Modèles globaux

La plupart de ces modèles sont écrits de manière uniaxiale et relient des grandeurs statiques et cinématiques. Ces lois peuvent être du type moment-courbure pour des supports de type poutre ou encore force-déplacement en tête pour des éléments de structures (mur, assemblages,...). Plusieurs familles de lois existent et permettent de décrire des comportements en traction-compression, flexion ou encore cisaillement.

Concernant les lois de flexion utilisant des relations moments-courbures, les plus connues et les plus utilisées sont celles de Clough (Clough & Johnston 1966 d'après Ragueneau, 1999) et Takeda (Takeda, et al., 1970 d'après Ragueneau, 1999), voir figure 2.1.

L'enveloppe de la réponse est trilineaire et correspond aux 3 principales phases : élastique, fissurée et plastique. Les pertes et reprises de raideurs en cas de chargements cycliques sont prises en compte (Ragueneau, 1999). Ce modèle a été modifié pour intégrer les forts de cisaillement (Ragueneau, 1999). D'autres lois globales sont utilisables en traction-compression, pour des éléments de béton armé (Fishinger, et al., 1991) ou encore pour simuler le comportement de murs de remplissage au moyen d'éléments basés sur le principe de diagonales équivalentes (Panagiotacos & Fardis, 1994).



Toutes ces lois ont un caractère uniaxial mais parfois l'interaction entre plusieurs grandeurs se doit d'être prise en compte (moment/effort normal et tranchant). Pour ce faire, des modèles issus des théories de la plasticité (Bairrao, et al., 1987) ou de l'endommagement (Fléjou, 1993) utilisant des surfaces limites doivent être intégrés.

Le support géométrique de ces lois sont des éléments linéiques du type poutres, modèles "multispring" ou possédant une cinématique particulière pour les nœuds d'assemblages (Fleury, et al., 1996) intégrant les non-linéarités matérielles et le glissement acier-béton.

Ces techniques d'approches globales du comportement structurel peuvent s'appliquer à d'autres types de structures tels que les assemblages métalliques (Colson 1984, d'après Ragueneau, 1999). Toutefois, nous n'allons pas poursuivre plus avant leur étude car elles nous privent bien souvent d'une vision locale et physique du comportement du matériau.

2. 3. Modèles locaux

Plusieurs modèles locaux du comportement du béton ont été proposés par différents auteurs dans la littérature, ils sont en général basés sur les observations expérimentales pour décrire le comportement non linéaire du béton (fissuration, plasticité irréversible,...). Nous intéresserons ici uniquement aux grandes familles de modèles locaux de béton.

2.3.1. Modèles d'endommagement

Nous pouvons citer dans ce cadre les travaux de (Kachanov, 1958 ; 1986), (Mazars, 1984 ; 1986), (Lemaitre, et al., 1986), (Pijaudier-Cabot, et al., 1987), (Mazars, et al., 1989), (La Borderie, 1991), (Lemaitre, 1992), (Ragueneau, 1999 ; 2006), (La Borderie, 2003), (Jirásek, 2004), (Nguyen, 2006). Il s'agit d'une approche qui se base sur la thermodynamique des processus irréversibles. Le potentiel thermodynamique énergie libre ψ est une fonction convexe de toutes les variables d'état et, en particulier, de l'endommagement D considéré ci-dessous comme un scalaire :

$$\psi = \psi(\varepsilon^e, T, D, V_k) \quad (2.1)$$

ε^e est le tenseur de déformation élastique d'ordre 2 et T la température. Le terme V_k désigne les autres variables internes comme les variables d'écrouissage. La variable d'endommagement D est aussi considérée comme une variable d'état interne (car non accessible directement à la mesure).

Comme en élastoplasticité, nous pouvons faire l'hypothèse du découplage entre les effets d'écrouissage et autres désignés par V_k et les effets d'élasticité associés à l'endommagement (Lemaitre, et al., 1986). Le potentiel thermodynamique énergie libre devient alors :

$$\psi = \psi_e(\varepsilon^e, T, D) + \psi_p(T, V_k) \quad (2.2)$$

avec ψ_e est le potentiel thermoélastique endommageable et ψ_p est le terme de plasticité.

Dans le cadre de l'élasticité isotherme nous obtenons (Lemaitre, et al., 1986) :

$$\rho\psi_e = \frac{1}{2}(1 - D)a:\varepsilon^e:\varepsilon^e \quad (2.3)$$

avec ρ la masse volumique et a étant le tenseur d'élasticité d'ordre 4

Les lois d'état s'écrivent :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \varepsilon^e} = (1 - D)a:\varepsilon^e \quad (2.4)$$

$$Y = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial D} = -\frac{1}{2}a:\varepsilon^e:\varepsilon^e \quad (2.5)$$

avec Y la variable associée à l'endommagement (scalaire). Il est intéressant de noter que cette quantité s'identifie au signe près, à la variation d'énergie élastique engendrée par une variation d'endommagement à contrainte constante (Lemaitre, et al., 1986).

Selon l'analyse menée par Mazars (1986), cette quantité est en relation physique avec l'énergie de la fissuration. Le potentiel de dissipation dans le cas d'un découplage entre la dissipation due à la plasticité et à celle due à l'endommagement :

$$\begin{aligned} \sigma:\dot{\varepsilon}^p - A_k\dot{V}_k &\geq 0 \\ -Y\dot{D} &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e \quad (2.7)$$

ε^p est le tenseur des déformations plastiques, ε est le tenseur de déformations totales, A_k est la variable thermodynamique associée aux variables internes V_k . Le potentiel de dissipation φ est une fonction des variables d'état, sa fonction duale φ^* est établie grâce à la transformation Legendre-Fenchel. La loi de normalité généralisée qui en découle s'exprime par :

$$\dot{D} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} \geq 0 \quad (2.8)$$

Pour une théorie de l'endommagement anisotrope, la variable d'endommagement n'est plus un scalaire, mais peut être un tenseur d'ordre 4.

2.3.1.1. Modèle de Mazars (Mazars, 1984 ; 1986)

C'est le premier modèle 3D de comportement du béton dans le cadre de la mécanique de l'endommagement (Mazars, 1984 ; 1986). Le point particulier de ce modèle est d'utiliser un critère en déformation en introduisant la notion de déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$ et un scalaire pour la variable de l'endommagement D (comportement isotrope). Le modèle s'appuie sur un couplage élasticité et endommagement, il ne prend donc pas en compte l'irréversibilité des déformations, l'anisotropie et l'effet unilatéral (Nguyen, 2006). Néanmoins, sa formulation simple facilite son utilisation même pour des problèmes 3D et son implémentation dans un code élément fini ne pose pas de difficultés particulières.

Le modèle de Mazars est adéquat pour des chargements monotones et ne peut pas être utilisé pour des comportements cycliques.

L'expression de l'énergie spécifique est de la forme :

$$\rho\psi_e = \frac{1}{2}(1 - D)a:\varepsilon:\varepsilon \quad (2.9)$$

L'endommagement agit directement sur la raideur du matériau de la façon suivante :

$$\sigma = \frac{E(1-D)}{1+\nu} \left[\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} Tr(\varepsilon)I \right] \quad (2.10)$$

où ν est le coefficient de Poisson et I est la matrice d'unité.

La progression de l'endommagement est guidée par l'évolution de la déformation équivalente $\tilde{\varepsilon}$. En accord avec les résultats expérimentaux (§1.2) le modèle admet que ce sont les déformations d'extension qui sont à l'origine de l'endommagement.

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (2.11)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_i \rangle_+ &= \varepsilon_i & \text{si } \varepsilon_i &\geq 0 \\ \langle \varepsilon_i \rangle_+ &= 0 & \text{si } \varepsilon_i &< 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

La surface seuil d'endommagement s'écrit :

$$f(\varepsilon, K) = \tilde{\varepsilon} - K(D) = 0 \quad (2.13)$$

La variable d'endommagement D est la variable interne du modèle, pour le matériau vierge $D = 0$ et pour le matériau rompu, $D = 1$, D varie de façon continue entre ces deux bornes, et la seule condition pour respecter le second principe de la thermodynamique (Lemaitre, 2001) est que D soit croissant, on peut donc calculer son évolution sans recourir à une surface seuil ou aux habituelles conditions de « Kuhn Tucker » employées classiquement en plasticité.

Comme il est déjà indiqué dans le chapitre 1, les extensions sont la cause majeure de l'endommagement du béton, la variable $\tilde{\varepsilon}$ représente les extensions et permet d'accéder naturellement à l'endommagement dans un état de traction. En compression simple, il y a également des extensions dans les directions transversales à l'axe de compression, mais le calcul de l'endommagement à partir de ces extensions mènerait ici à un comportement qui n'est pas représentatif de la réalité. L'isotropie du modèle ne permet pas d'utiliser cette idée, qui a été exploitée pour des modèles mettant en œuvre de l'anisotropie ou des phénomènes unilatéraux (La Borderie, 2003). Mazars a donc été obligé de recourir à un subterfuge qui conduit à calculer deux fonctions d'endommagement D_t et D_c , la variable d'endommagement D s'identifiant à D_t dans le cas d'une sollicitation de traction pure et à D_c en compression pure.

L'endommagement isotrope est finalement donné par l'expression :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + (1 - \alpha_t^\beta) D_c \quad (2.14)$$

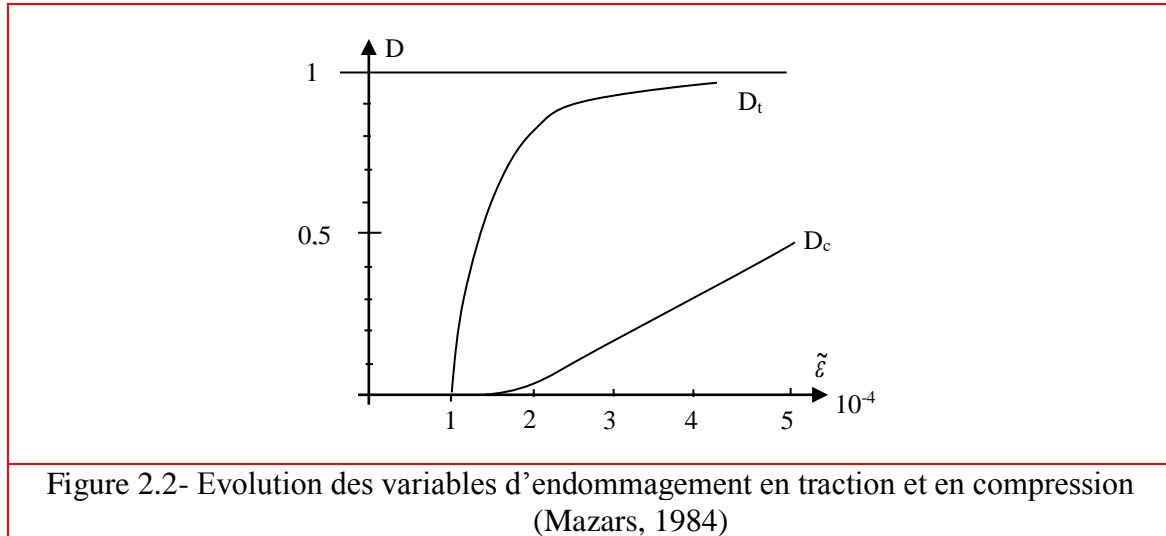
α_t traduit la part respective de chacun des endommagements de traction et de compression (α_t valant 0 dans le cas d'une compression pure et 1 dans le cas d'une traction pure (Kotronis, 2000)).

β est un paramètre pour ajuster le comportement du modèle en cisaillement (habituellement pris égal à 1.06 (Nguyen, 2006 ; La Borderie, 2003)).

L'évolution de D_t et D_c est de la forme :

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A_t)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_t}{\exp[B_t(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_{D0})]} \quad (2.15)$$

$$D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A_c)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_c}{\exp[B_c(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_{D0})]} \quad (2.16)$$



Les coefficients A_t , A_c , B_t , B_c sont identifiés à partir des essais en compression et en traction sur des éprouvettes cylindriques (Mazars, 1984), ε_{D0} est le seuil d'endommagement initial qui est identifié à l'aide de la contrainte limite en traction et du module d'élasticité ($\varepsilon_{D0} = f_t / E$). Il est habituellement pris égal à 1.10^{-4} (Nguyen, 2006).

La détermination de α_t est effectuée en distinguant les extensions dues aux contraintes positives et négatives.

$$\alpha_t = \sum_i H_i \frac{\varepsilon_{ti}(\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci})}{\tilde{\varepsilon}^2} \quad (2.17)$$

et

$$\alpha_c = 1 - \alpha_t \quad (2.18)$$

avec :

ε_{ti} : déformations créées par les contraintes principales positives ;

ε_{ci} : déformations créées par les contraintes principales négatives.

$$H_i = 1 \text{ si } \varepsilon_i = \varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci} \geq 0 \text{ si non } H_i = 0$$

Lors du chargement de compression pure, le respect de la condition de dérivabilité de la courbe (σ, ε) à l'initiation de l'endommagement $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{D0}$ impose une relation supplémentaire entre les paramètres soit :

$$B_c = \frac{A_c - 1}{A_c \varepsilon_{D0}} \quad (2.19)$$

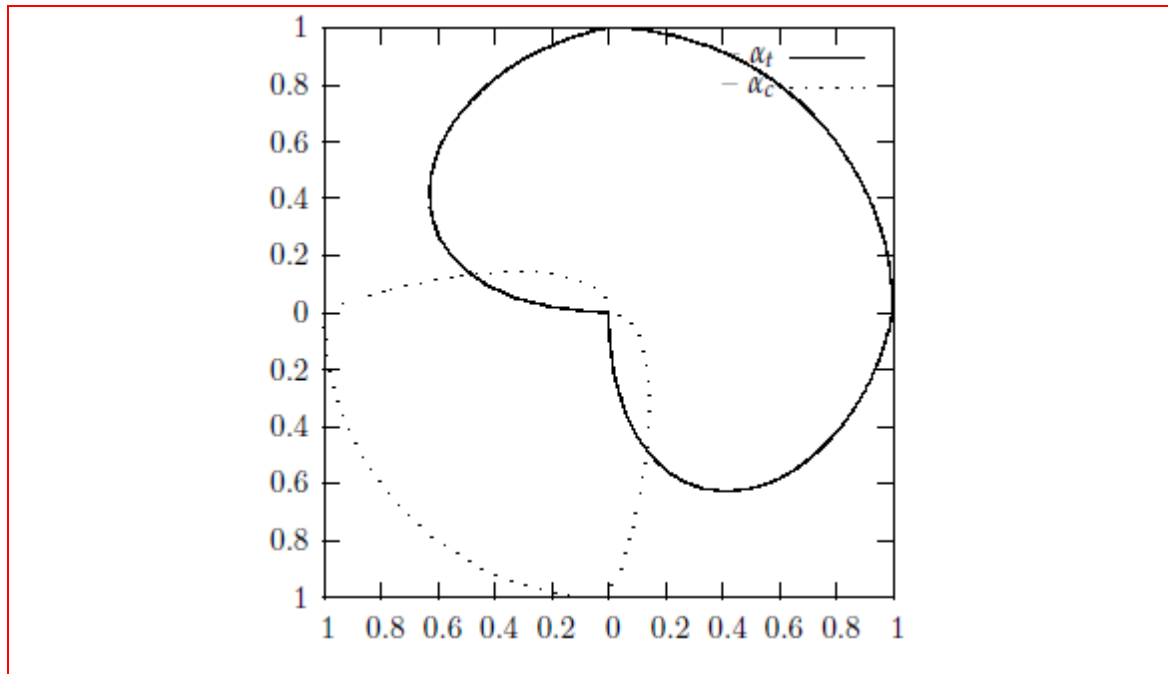


Figure 2.3- Représentation des coefficients α_t et α_c dans le plan des contraintes planes. (source : La Borderie, 2003)

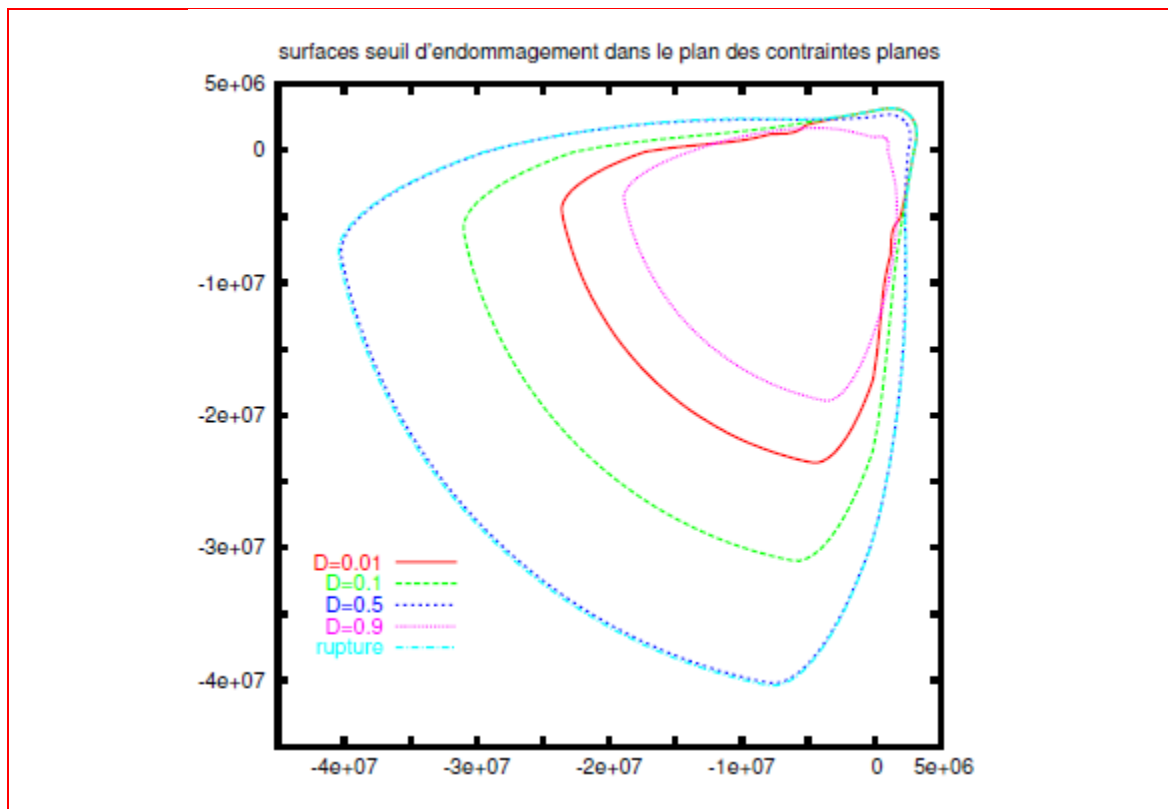


Figure 2.4- Surface d'élasticité du modèle Mazars (La Borderie, 2003)

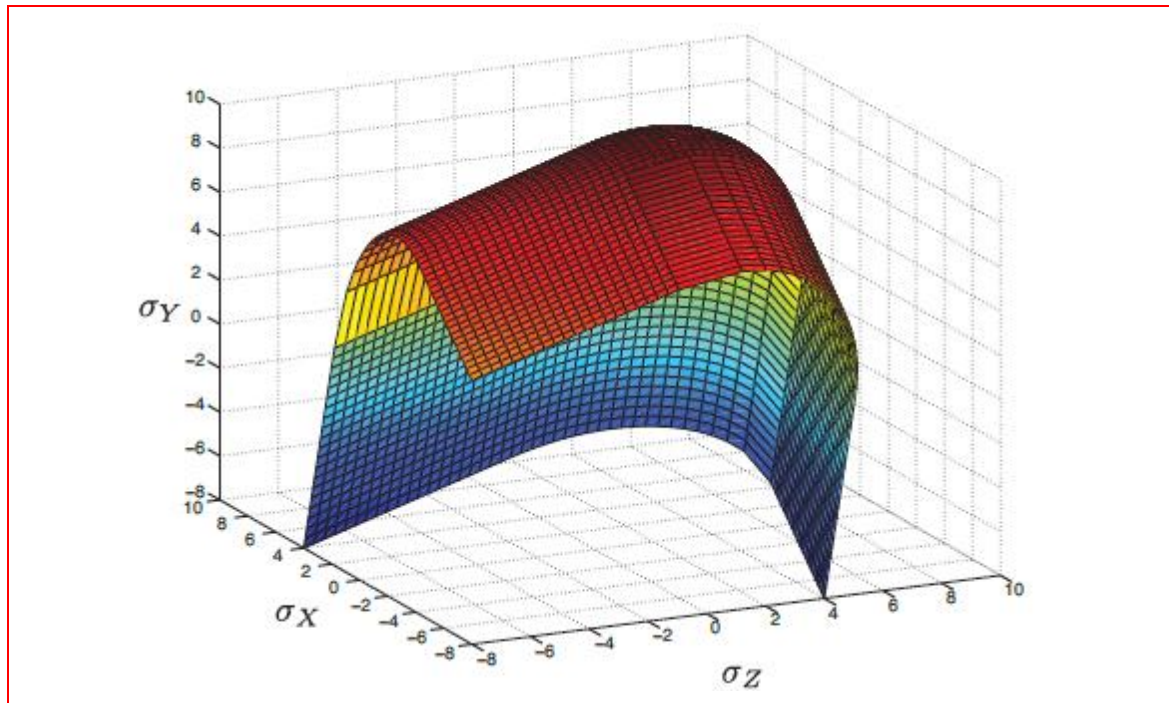
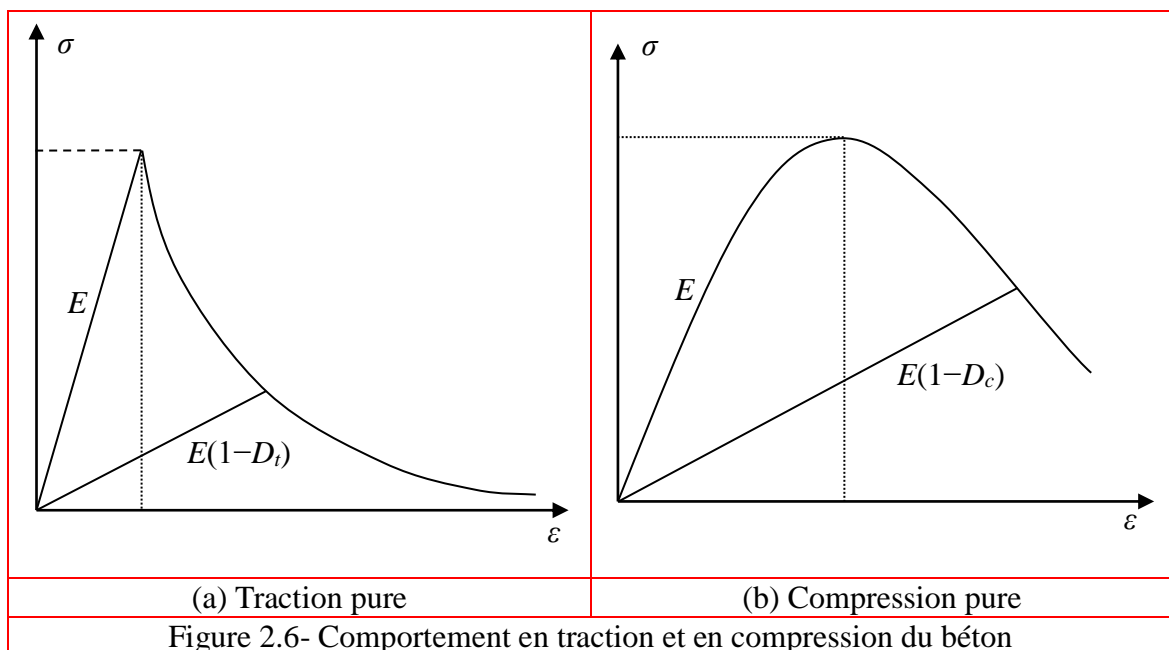


Figure 2.5- Surface seuil du modèle Mazars dans l'espace des contraintes (GIRY, 2011)

La figure 2.6 représente le comportement en traction pure et en compression pure du béton décrit par le modèle de Mazars (1984). Nous voyons bien que le modèle de Mazars ne prend pas en compte la déformation irréversible du matériau (la phase de déchargement est caractérisée par un retour linéaire à l'origine).



2.3.1.2. Modèle de La Borderie (Modèle Unilatéral)

Le modèle Unilatéral (La Borderie, 1991) est un modèle isotrope à deux variables scalaires (l'une en traction D_1 et l'autre en compression D_2), capable de décrire l'évolution des caractéristiques mécaniques du matériau, les déformations irréversibles (déformations permanentes) et l'effet unilatéral lorsque le signe des contraintes change.

Considérant la partition du tenseur des déformations en une partie élastique et une partie anélastique, ce dernier est calculé comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{an} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\nu}{E_0} (\sigma - (Tr\sigma)I) \quad (2.21)$$

$$\varepsilon^{an} = \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} I \quad (2.22)$$

E_0 est le module de Young initial et ν le coefficient de Poisson.

σ^+ indique la partie positive d'un tenseur exprimé dans sa base propre.

σ^- indique la partie négative d'un tenseur exprimé dans sa base propre.

D_1, D_2 sont respectivement les variables d'endommagement de traction et de compression (évoluant entre 0 (matériau sain) à 1 (matériau rompu). Elles sont liées à l'énergie élastique locale).

β_1 et β_2 sont des paramètres du matériau, liés aux déformations anélastiques, pour un béton classique sont $\beta_1 = 1\text{MPa}$, $\beta_2 = -40\text{MPa}$ (Nguyen, 2006 ; La Borderie, 2003).

$f(\sigma)$: Fonction de refermeture des fissures et σ_f la contrainte de refermeture de fissures, pour un béton classique $\sigma_f = 3\text{MPa}$ (La Borderie, 2003).

$$Tr(\sigma) \in [0, +\infty[\rightarrow \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = 1 \quad (2.23)$$

$$Tr(\sigma) \in [-\sigma_f, 0[\rightarrow \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = \left(1 + \frac{Tr(\sigma)}{\sigma_f}\right) 1 \quad (2.24)$$

$$Tr(\sigma) \in]-\infty, -\sigma_f[\rightarrow f(\sigma) = 0.1 \quad (2.25)$$

L'évaluation de l'endommagement est conditionnée par le respect d'une surface seuil dans l'espace des contraintes :

$$F_i = Y_i - Y_{0i} - Z_i \quad (i = 1,2) \quad (2.26)$$

L'indice i exprime l'un des deux comportements traction ou compression.

La fonction d'écrouissage s'exprime sous la forme :

$$Z_i = g_i(z_i) = \left[Y_{0i} + \frac{1}{A_i} \left(\frac{-z_i}{1+z_i} \right)^{1/B_i} \right] \quad (2.27)$$

Avec :

z_i : le variable d'écrouissage (en traction ou en compression).

A_i et B_i sont des constantes du matériau.

Y_{0i} : seuil d'endommagement (traction ou compression).

Y_i la variable associée à l'endommagement (taux de restitution d'énergie, en traction ou en compression) :

$$Y_1 = \frac{\sigma^+ : \sigma^+ + 2\beta_1 f(Tr\sigma)}{2E_0(1-D_1)^2} \quad (2.28)$$

$$Y_2 = \frac{\sigma^- : \sigma^- + 2\beta_2(Tr\sigma)}{2E_0(1-D_2)^2} \quad (2.29)$$

Les lois d'évolution de l'endommagement s'expriment comme suit :

$$D_i = 1 - \frac{1}{1 + (A_i(Y_i - Y_{0i}))^{B_i}} \quad (2.30)$$

La relation contrainte-déformation et la fonction de refermeture des fissures, prennent les formes suivantes :

$$\varepsilon = \frac{\sigma^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} F(\sigma) + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \quad (2.31)$$

$$F(\sigma) = 1 \text{ si } \sigma \geq 0 \quad (2.32)$$

$$F(\sigma) = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_f} \text{ si } -\sigma_f \leq \sigma < 0 \quad (2.33)$$

$$F(\sigma) = 0 \text{ si } \sigma < -\sigma_f \quad (2.34)$$

Dans le cas où la déformation de cisaillement est non négligeable le comportement biaxial se réduit à la prise en compte des contraintes σ_{xx} et σ_{xy} , pour chacune des couches de l'élément

poutre Timoshenko. Le système non linéaire à résoudre s'écrit (Dubé, 1994 d'après Kotronis, 2000) :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = (\Lambda^{-1}(\sigma, D_1, D_2)) \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma_{xx}^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \quad (2.36)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma_{xy}^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\nu \sigma_{xy}}{E_0} \quad (2.37)$$

La réponse uniaxiale du modèle soumis à un cycle de traction-compression est présentée à la figure 2.7.

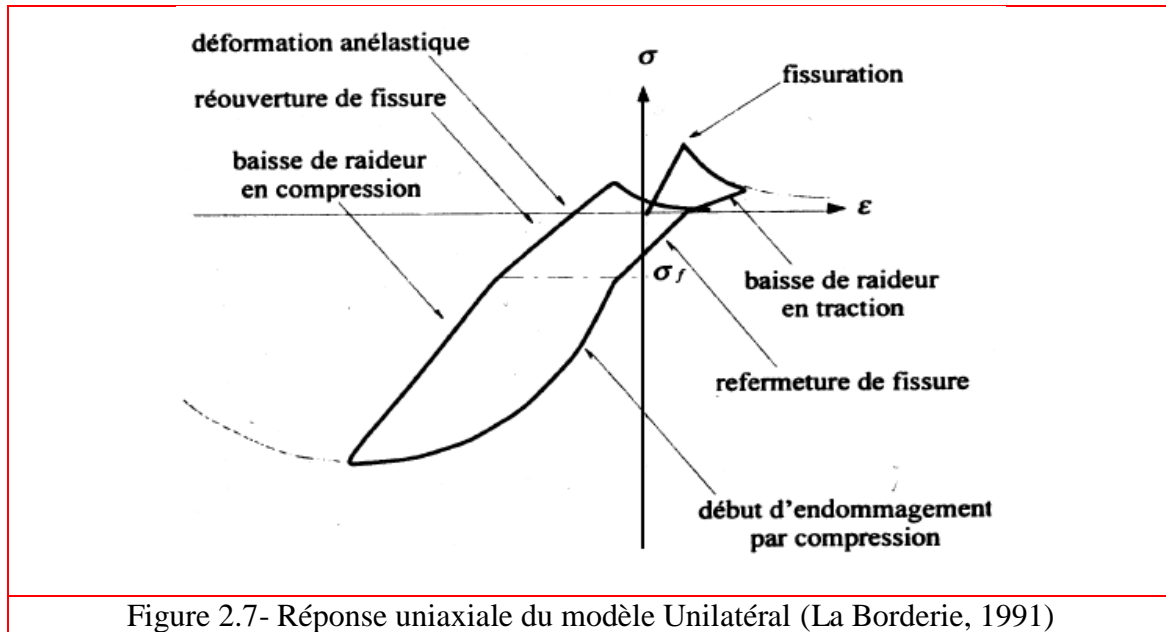


Figure 2.7- Réponse uniaxiale du modèle Unilatéral (La Borderie, 1991)

2.3.2. Modèles de fissuration diffuse "smeared crack models"

Ces types de modèles, proches des modèles phénoménologiques d'endommagement, introduisent les pertes de rigidité locale du matériau en considérant l'apparition d'une fissure au sein du volume élémentaire. Cette fissure conduit à des réductions de capacités portantes en fonction de l'orientation du chargement par rapport à la fissure. La déformation résultant de l'ouverture de la fissure est obtenue en moyennant le saut de déplacement par rapport à une longueur interne. En ajoutant les déformations issues des ouvertures de fissure et celles de la matrice élastique, on peut remonter à l'écriture d'une loi classique en contrainte-déformation.

Plusieurs modèles découlent de ce principe, selon que l'on considère une anisotropie fixe ou évolutive.

Concernant les modèles à fissuration fixe (Fixed crack model), on ne s'intéresse initialement qu'au premier franchissement du critère d'ouverture de fissure pour écrire la loi de comportement dans ce repère local et ne plus considérer de rotation future du plan de fissuration. Ce critère peut être fonction de la plus grande contrainte principale (Rashid, 1968) ne prenant ainsi en compte que le mode I d'ouverture de fissure. Le principal désavantage réside bien entendu dans l'impossibilité de traiter du cas des chargements non-radiaux du fait même du blocage du plan d'anisotropie. Cet inconvénient est bien mis en évidence dans les problèmes de traction-torsion (Willam, et al., 1987).

Un des moyens de prendre en compte une évolution de l'anisotropie consiste à considérer tous les plans et réseaux de fissures pouvant s'ouvrir en fonction du chargement. Les modèles de fissurations fixes multiples permettent une telle approche (de Borst & Nauta, 1985). La déformation est définie comme la somme de la déformation élastique de la matrice vierge (ε^∞) et des déformations issues des déplacements (u_k^{cr}) créés par un nombre k de fissures orientées.

$$\varepsilon = \varepsilon^\infty + \sum_k \frac{1}{h_k} u_k^{cr} \quad (2.38)$$

On peut retrouver ce principe de multifissuration dans des modèles permettant de reproduire les dégradations d'éléments de béton armé (Fukuura & Maekawa, 1998).

Une meilleure description du comportement est obtenue en incorporant les cisaillements sur les différents plans de fissuration. Ainsi, en adoptant une hypothèse statique reliant les contraintes macroscopiques aux tractions et cisaillements dans le plan de la fissure (q_n, q_t), on peut adapter des modèles de plasticité pour traduire le comportement bi-axial de la fissure, voir figure 2.8 (Weihe, et al., 1998).

Dans un souci de modélisation plus fine, la simplicité de mise en œuvre initiale se trouve donc maintenant plus délicate à justifier.

La dernière classe de modèle appartenant à cette catégorie sont les modèles dits, à fissures tournantes (rotating crack model). On ne s'intéresse ici qu'au comportement d'une seule fissure dont l'orientation évolue avec le chargement. Le plan d'anisotropie s'aligne perpendiculairement à l'axe des contraintes principales maximales en cours de chargement (Rots, 1988). L'évolution de l'anisotropie est suivie plus facilement par cette approche mais l'hypothèse de coaxialité entre contraintes et déformations est certainement trop forte.

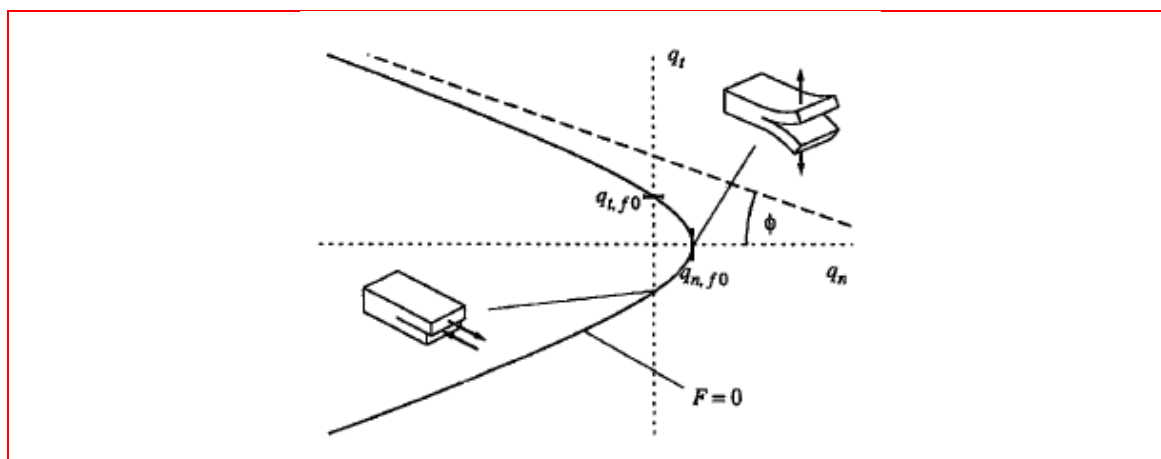


Figure 2.8- Comportement bi-axial sur un plan de fissure : critère de rupture (Weihe, et al., 1998)

2.3.3. Modèles de plasticité

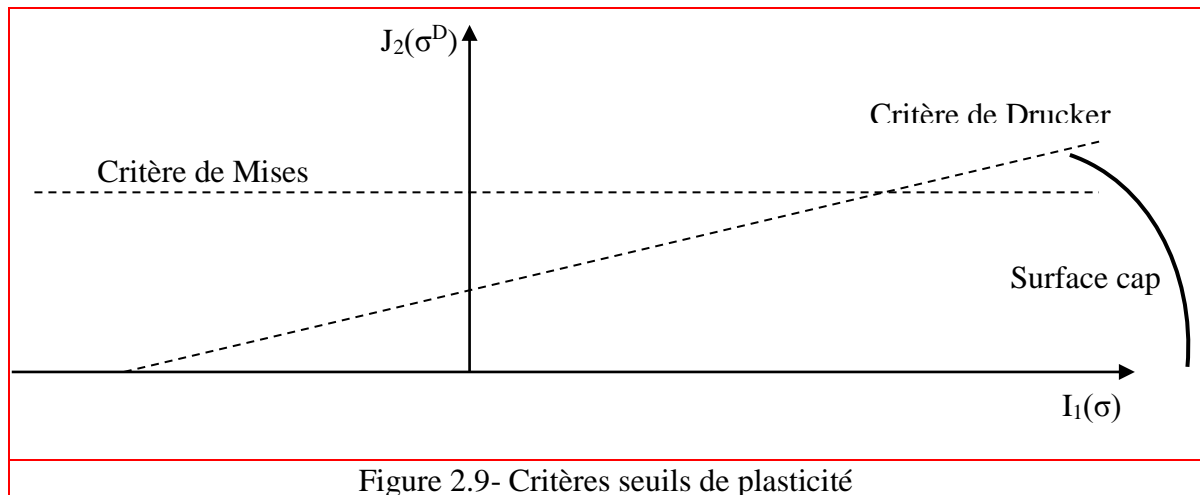
La plasticité a eu comme application de prédilection la simulation du comportement non-linéaire de matériaux ductiles tels que les aciers, l'utilisation de critères isotropes du type von Mises (bien représentatif des phénomènes de glissement des plans de dislocation) étant bien adaptée aux théories de l'écoulement. La plupart des modèles se basent sur un critère du second invariant du déviateur des contraintes (J_2).

L'application directe de ces modélisations est difficile pour les géomatériaux car elles se basent sur le principe d'incompressibilité plastique ($Tr[\epsilon^p]$), conséquence d'un écoulement normal à un critère basé sur un invariant du déviateur des contraintes. Cette incompressibilité n'est pas physique pour les roches ou les bétons, il faut donc introduire dans le critère un terme prenant en compte les effets de la composante hydrostatique des contraintes. L'introduction du premier invariant du tenseur des contraintes (I_1) permet de prendre en compte cette dilatance ainsi que les effets de confinement sous compression triaxial. La

combinaison des deux précédents invariants conduit au critère de Drücker-Prager (Drücker & Prager, 1952) :

$$f = J_2(\sigma^D) + \alpha I_1(\sigma) \leq 0 \quad (2.39)$$

α est l'angle de cohésion interne à identifier. La figure 2.9 donne une visualisation dans le plan I_1, J_2 de ces différents critères.



On peut trouver les premières utilisations de ces critères pour les roches et les bétons dans (Dragon & Mroz ,1979).

Afin de rendre compte de manière physique des principaux phénomènes que sont la rupture et la dilatance, certains auteurs ont élaboré des lois introduisant explicitement une séparation dans le tenseur des déformations entre les parties sphérique et déviatorique (Fardis, et al., 1883 ; Chen & Buyukozturk, 1985). Des lois de comportement relatives à ces deux phénomènes permettent de remonter aux contraintes.

Un des inconvénients du critère de Drücker-Prager réside dans l'impossibilité de franchir le seuil de plasticité sous chargements hydrostatiques, sollicitant les hauts confinements du matériau. Il est alors nécessaire de fermer la surface en compression triaxiale, c'est l'objet des cap models (Di Maggio & Sander, 1971 ; Hofstetter & Simo, 1993). Une autre solution consiste à adopter une surface de Gurson (Gurson, 1977) analytiquement fermée en tri-compression évitant ainsi les points anguleux de raccordement. Une application pour les bétons peut par exemple être trouvée dans (Burlion, 1997).

Les trajets de chargements complexes peuvent solliciter alternativement les multiples mécanismes engendrant les non-linéarités du matériau. Dans le but de mieux représenter la réponse d'un matériau béton, le principe de plasticité multisurfaces peut être appliqué, chaque mécanisme étant géré par sa propre surface de charge (Yang, et al., 1985). Cette plasticité multisurface permet de coupler aisément plasticité et endommagement faisant mieux le distinguo entre les deux caractéristiques fondamentales du comportement non-linéaire du béton : fissuration fragile et glissement ductile. Le comportement fragile peut ainsi être géré par un critère en contrainte maximale (Rankine) et les phases plus ductiles (compression multiaxiales) par de la plasticité du type Drücker-Prager (Yazdani & Schreyer, 1990; Feenstra, 1993). La figure 2.10 donne une représentation dans un plan bi-axial de ces critères couplés.

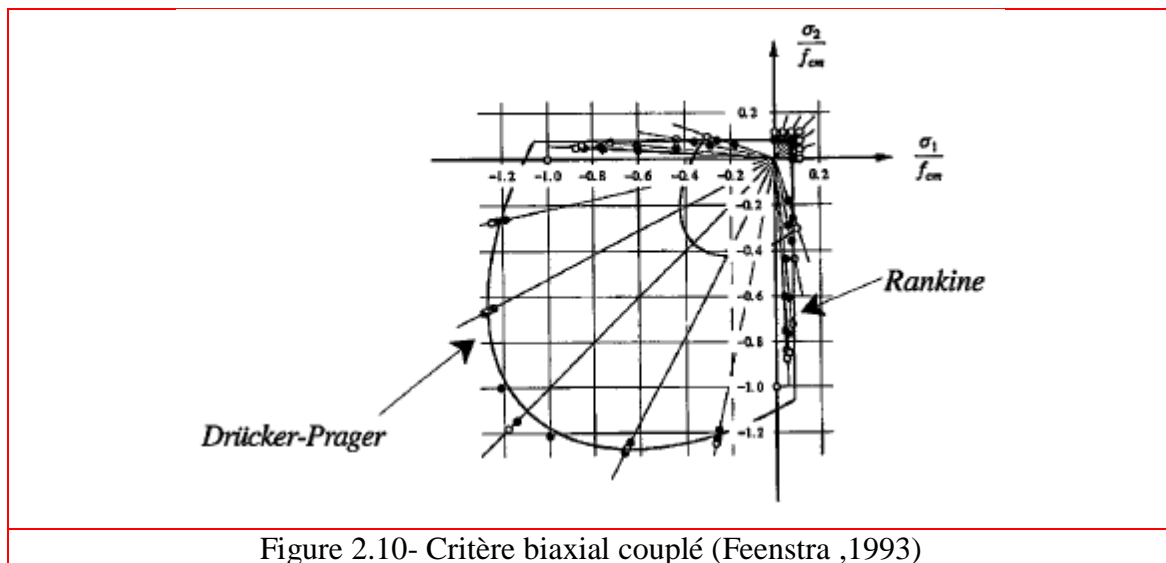


Figure 2.10- Critère biaxial couplé (Feenstra ,1993)

Le problème numérique principal lié à ces modèles, attrayants de prime abord, est engendré par la présence de deux surfaces de charges exprimées dans l'espace des contraintes. La gestion de discontinuités et de points anguleux rend délicate l'utilisation d'algorithmes classiques de retour sur la surface seuil.

Ces modèles de plasticité multisurfaces couplés à l'endommagement peuvent être poussés plus avant et intégrer ainsi l'anisotropie induite par la fissuration (Meschke et al. 1998). L'évolution de l'anisotropie est obtenue par le principe de dissipation maximale (Simo & Hughes, 1998 d'après Ragueneau, 1999). La simulation d'essais statiques montrent la pertinence de l'approche. Toutefois, le passage à la dynamique semble plus difficile à gérer du fait de l'unilatéralité de la fissuration à introduire (Ragueneau, 1999).

2.3.4. Modèles micro-plan

S'appuyant sur une description micro mécanique des phénomènes, le modèle micro-plan consiste à établir une relation contrainte-déformation dans un plan quelconque de l'espace. Dans ce contexte 12 micro-plans sont retenus pour générer le comportement macroscopique. Deux possibilités sont traitées dans ce cadre : l'hypothèse cinématique dans laquelle les déformations sur les micro-plans représentent la projection du tenseur des déformations sur les plans correspondants et l'hypothèse statique qui utilise le même principe sur les contraintes (Taylor, 1938 d'après Nguyen, 2006). Selon Bazant (Bazant et al. 1988, 1996), l'hypothèse cinématique est nécessaire pour assurer la stabilité dans la partie adoucissante du béton.

Ainsi, sur chaque micro-plan de normale n on peut définir une déformation normale et tangentielle (Ragueneau, 1999):

$$\varepsilon_N = n_i n_i \varepsilon_{ij} \quad (2.40)$$

$$\varepsilon_{Tj} = \varepsilon_{jk} n_k - \varepsilon_N \quad (2.41)$$

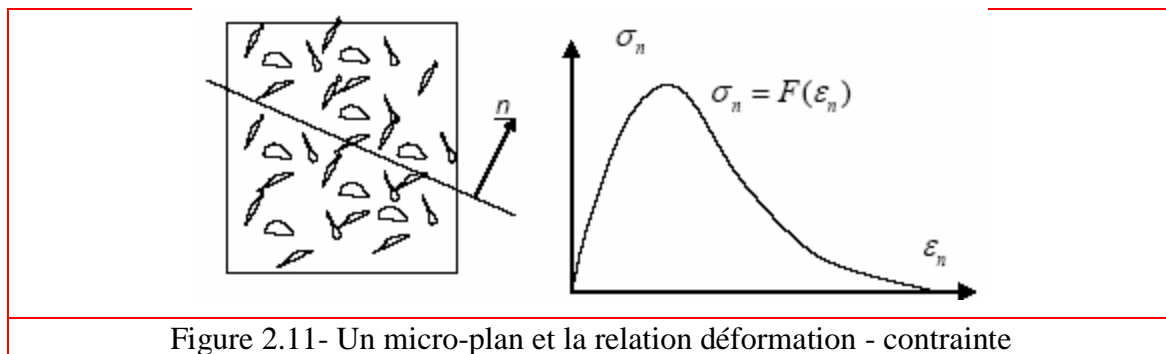


Figure 2.11- Un micro-plan et la relation déformation - contrainte

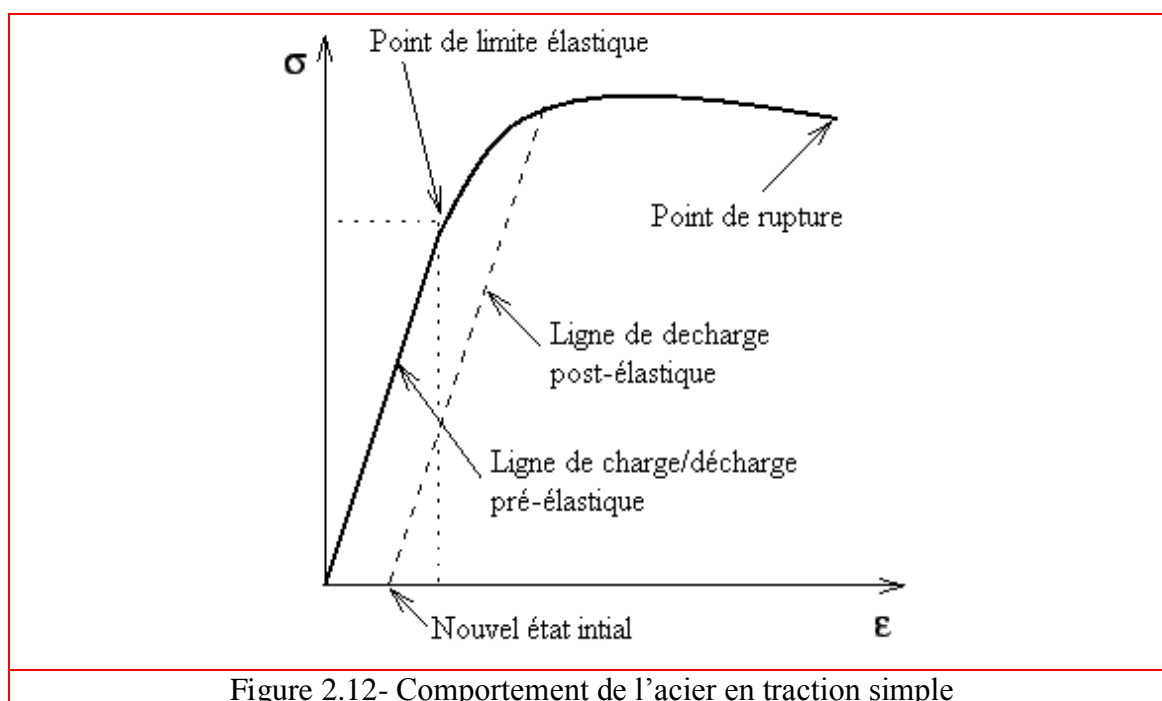
2.4. Comportement mécanique de l'acier

2.4.1. Traction-Compression

Contrairement au béton, le comportement de l'acier est quasi identique en traction et en compression. La courbe de la figure 2.12 montre l'allure du comportement de l'acier soumis à

un essai de traction. Nous y constatons clairement deux comportements (Lemaitre, et al., 1986):

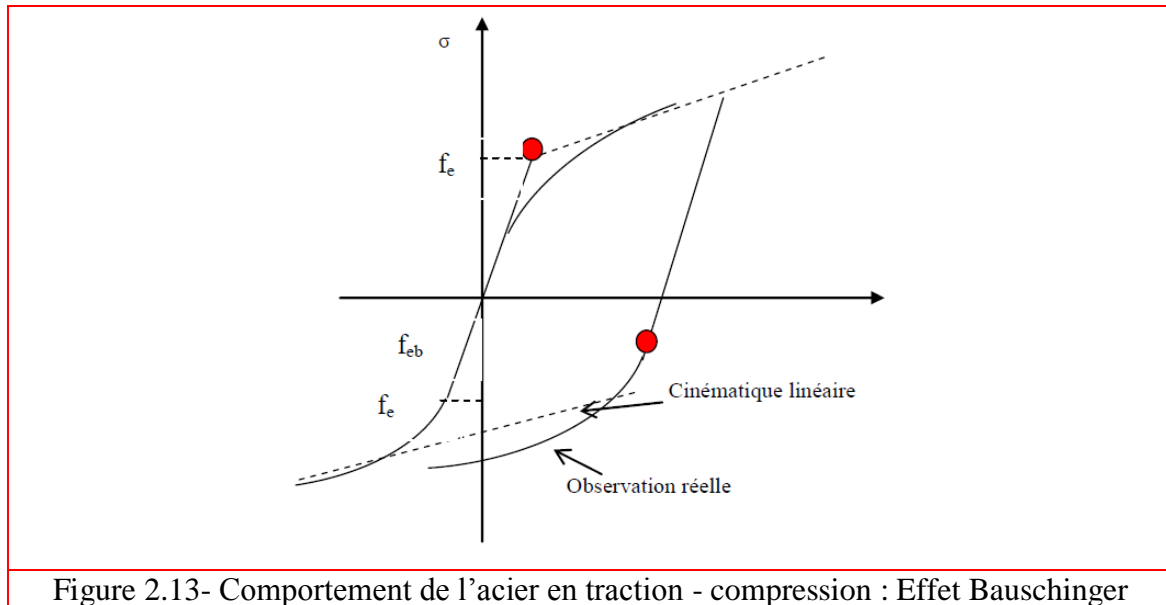
- Tant que nous restons au-dessous du point de la limite élastique, le comportement reste élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge (quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve sa forme initiale).
- Quand le chargement dépasse la limite élastique, et si ensuite nous enlevons la charge des déformations permanentes apparaissent. Contrairement au béton, le module de décharge est pratiquement le même avec le module de Young initial.



2.4.2. Chargement cyclique de traction-compression

Lors de sollicitations cycliques de traction-compression, la plupart des aciers voient leurs propriétés varier au cours des cycles. Lorsque nous soumettons une éprouvette à un essai de traction suivi d'un essai de compression nous constatons que la traction préalable écrouit le matériau dans le sens de traction (augmentation de la limite d'élasticité) mais l'adoucit dans le sens de la compression (effet Bauschinger). La figure 2.13 montre clairement que la limite d'élasticité en compression est plus faible que la limite initiale en compression $|f_{eb}| < |f_e|$.

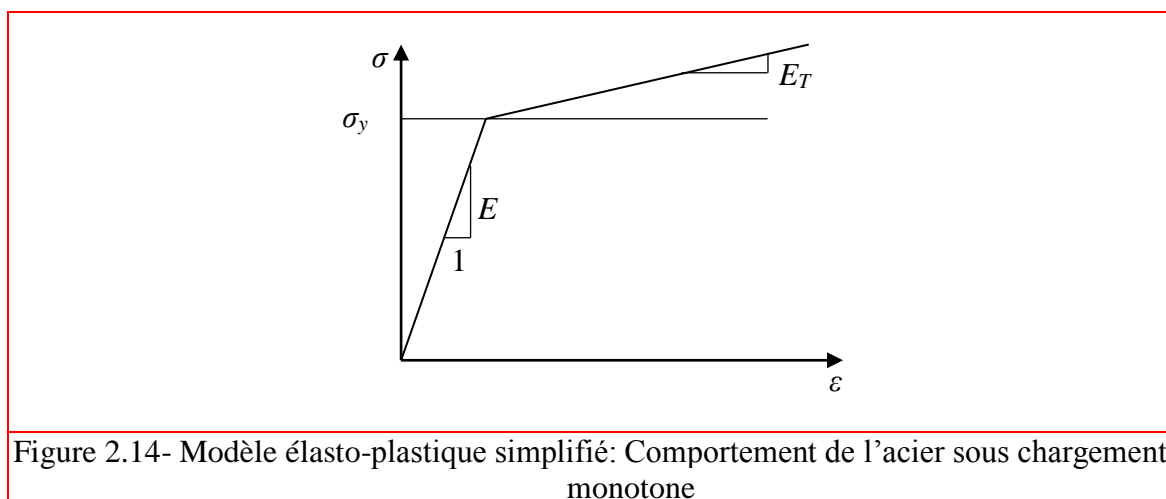
L'effet Bauschinger est présent quelque soit l'amplitude de déformation imposée (Lemaitre, et al., 1986).



2.5. Modèles de comportement de l'acier

2.5.1. Modèle élasto-plastique simplifié

Un premier modèle simple qui peut être utilisé pour la simulation du comportement de l'acier est le modèle uniaxial élasto-plastique avec écrouissage cinématique linéaire. La courbe utilisée dans ce modèle est représentée par la figure 2.14 (σ_y est la limite d'élasticité, E est le module d'Young et E_T la pente de la courbe en cours d'écrouissage).



2.5.2. Modèle Pinto-Menegotto

Ce modèle est utilisé couramment pour représenter le comportement uniaxial des armatures du béton armé sous chargement cyclique (Menegotto, et al., 1973). Il traduit la non

linéarité de l'écroutissage des barres et prend en compte l'effet Bauschinger. Dans une version récente il permet en plus de simuler le flambement des armatures (Monti, et al., 1992).

Le modèle est composé de deux parties distinctes: le chargement monotone et le chargement cyclique. La courbe de chargement en traction monotone est décrite par trois zones successives : élasticité linéaire, palier plastique et écroutissage (figure 2.15). Dans le cas où l'acier subit une décharge consécutive, la réponse dépend du point de décharge. Celle-ci reste élastique si la position de départ se situe dans la zone élastique. Par contre, quand la position de départ se situe dans la zone plastique, la réponse est d'abord élastique, puis, pour une certaine valeur de déformation, la décharge devient non-linéaire (courbe de Giuffré). La relation que doit satisfaire la déformation pour que la courbe de Giuffré soit activée est la suivante :

$$|\varepsilon_{max} - \varepsilon| > \frac{|\varepsilon_{sy}|}{3} \tag{2.42}$$

avec ε_{max} la déformation maximale atteinte en charge.

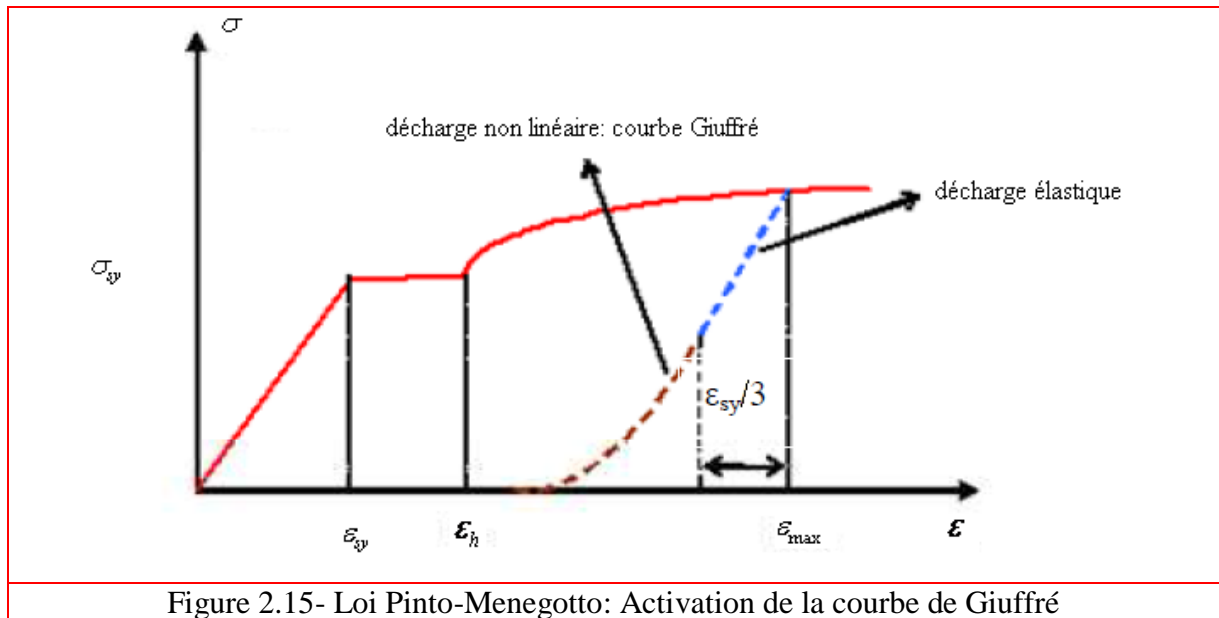


Figure 2.15- Loi Pinto-Menegotto: Activation de la courbe de Giuffré

Au cours des cycles, le trajet de déplacement entre deux points d'inversion (demi - cycle) est décrit par une courbe d'expression analytique :

$$\sigma^* = b\varepsilon^* + \left(\frac{(1-b)}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{1/R}} \right) \varepsilon^* \tag{2.43}$$

avec :

$$\sigma^* = \frac{\sigma_s - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r} \tag{2.44}$$

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \tag{2.45}$$

$$R = R_0 - \frac{a_1 \xi}{a_2 - \xi} \tag{2.46}$$

Cette équation définit une famille de courbes situées entre deux asymptotes de pentes E_0 et E_h qui ont $(\sigma_0, \varepsilon_0)$ comme point commun. Le point $(\sigma_r, \varepsilon_r)$ correspond aux coordonnées du dernier point où l'on a changé le sens de chargement, le point $(\sigma_s, \varepsilon_s)$ correspond au point étudié. $b = E_h/E_0$ est le rapport de la pente d'écrouissage sur la pente d'élasticité. R est un paramètre définissant la forme de la branche de transition de la courbe qui traduit correctement l'effet Bauschinger. Il est fonction du paramètre ξ qui est défini comme la différence entre la déformation maximale atteinte lors de chargement et ε_0 , normalisé par $(\varepsilon_0 - \varepsilon_r)$.

Le module E_h est défini par le rapport :

$$E_h = \frac{\sigma_{su} - \sigma_{sy}}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sy}} \tag{2.47}$$

où $(\sigma_{su}, \varepsilon_{su})$ est le point de la contrainte et de la déformation ultime. $(\sigma_{sy}, \varepsilon_{sy})$ est le point de début de plastification (à la fin du palier).

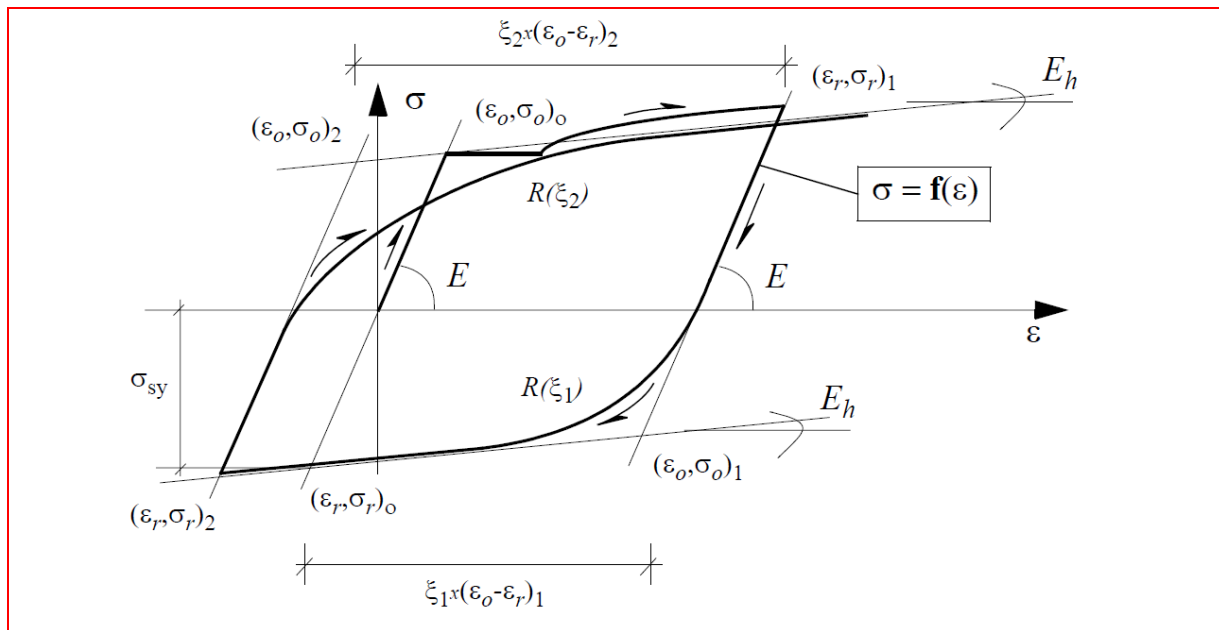


Figure 2.16- Comportement sous chargement cyclique (Guedes, et al., 1994)

Les paramètres R_0 , a_1 , a_2 sont des constantes sans unités dépendants des propriétés mécaniques de l'acier. Leurs valeurs sont obtenues expérimentalement (Menegotto propose de prendre $R_0=20$, $a_1=18.5$, $a_2=0.15$).

Le modèle tient aussi compte du flambement de l'acier suite à un développement proposé dans (Monti, et al., 1992). Pour un rapport $L/D \leq 5$ avec L la longueur et D le diamètre de la barre d'acier, la courbe de compression est considérée identique à celle de traction. Par contre, lorsque $L/D > 5$ le flambement fait son apparition. Dans ce cas la courbe de compression dans la zone élastique a un comportement adoucissant.

Plus précisément :

En compression, le rapport de la pente d'écroutissage sur la pente élastique est défini par :

$$b_c = a \left(5 - \frac{L}{D} \right) e^{\left(b \xi' \frac{E}{\sigma_{sy} - \sigma_\infty} \right)} \quad (2.48)$$

avec

$$\sigma_\infty = 4 \frac{\sigma_{sy}}{L/D} \quad (2.49)$$

et ξ' est la différence maximale entre les déformations trouvées dans les deux directions de chargement.

Comme dans le modèle sans flambement, une contrainte σ_s^* est ajoutée afin de positionner correctement la courbe par rapport à l'asymptote :

$$\sigma_s^* = \gamma_s E_0 \frac{b - b_c}{1 - b_c} \quad (2.50)$$

où γ_s est donné par :

$$\gamma_s = \frac{11 - L/D}{10(e^{cL/D} - 1)} \quad (2.51)$$

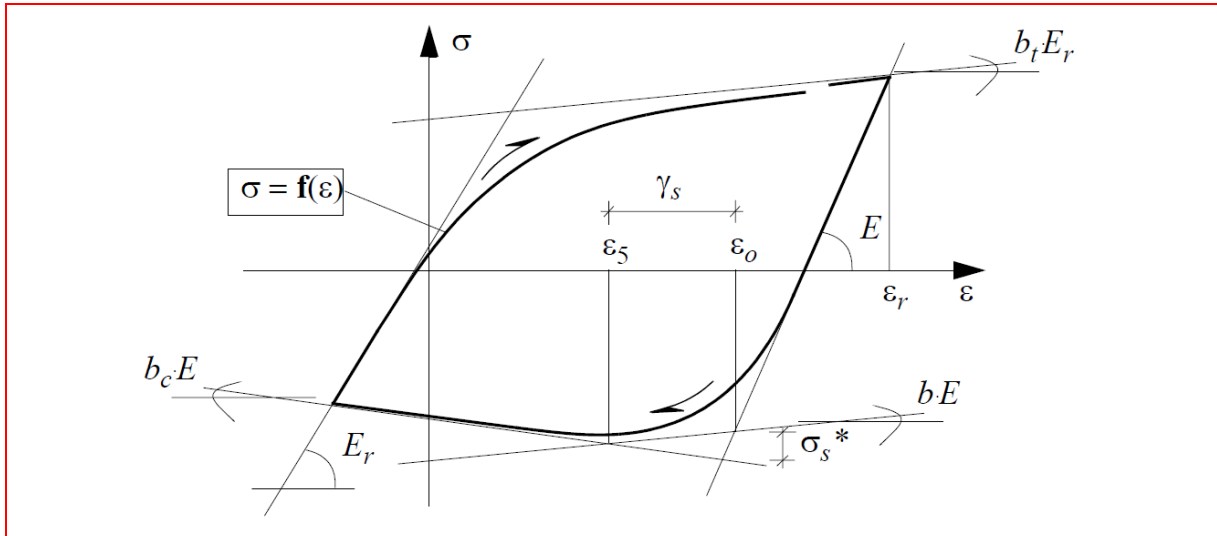


Figure 2.17- Comportement sous chargement cyclique - le flambement (Guedes, et al., 1994)

Lors du demi-cycle en traction suivant, le modèle d'Young est réduit par :

$$E_r = E_0(a_5 + (1 - a_5)e^{(-a_6\xi''^2)}) \quad (2.52)$$

avec

$$a_5 = \frac{1+(5-L/D)}{7.5} \quad (2.53)$$

et

$$\xi'' = \xi'(\varepsilon_0 - \varepsilon_r) \quad (2.54)$$

Les paramètres a , c et a_6 sont des constantes sans unité dépendant des propriétés mécaniques de l'acier. Elles sont déterminées expérimentales et adoptées par (Monti, et al., 1992) : $a = 0.006$; $c = 0.5$ et $a_6 = 620$.

Remarque : Plusieurs études numériques ont montré que l'utilisation du modèle Pinto-Menegotto avec des éléments finis poutre multifibres présente des problèmes de convergence (Guedes, et al. 1994, Nguyen, 2006). Lorsque la matrice tangente est utilisée dans la procédure Newton-Raphson la performance de l'algorithme dépend de la valeur de b . Pour un b petit et un comportement adoucissant dans certaines fibres, des singularités peuvent faire leur apparition dans la matrice de rigidité globale (Nguyen, 2006).

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre plusieurs modèles de comportement du béton et des aciers ont été présentés. Dans la suite de ce travail, le modèle d'endommagement de La Borderie pour le béton et un modèle basé sur la théorie de plasticité pour l'acier (le modèle élasto-plastique simplifié ou le modèle Pinto-Menegotto) vont être utilisés pour la simulation numérique des structures en béton armé soumises à des chargements statiques, cycliques et sismiques.

Nous allons aussi utiliser l'approche des modèles globaux au septième chapitre afin de développer un nouveau macroélément capable de modéliser le comportement non-linéaire des fondations superficielles rigides.

CHAPITRE 3

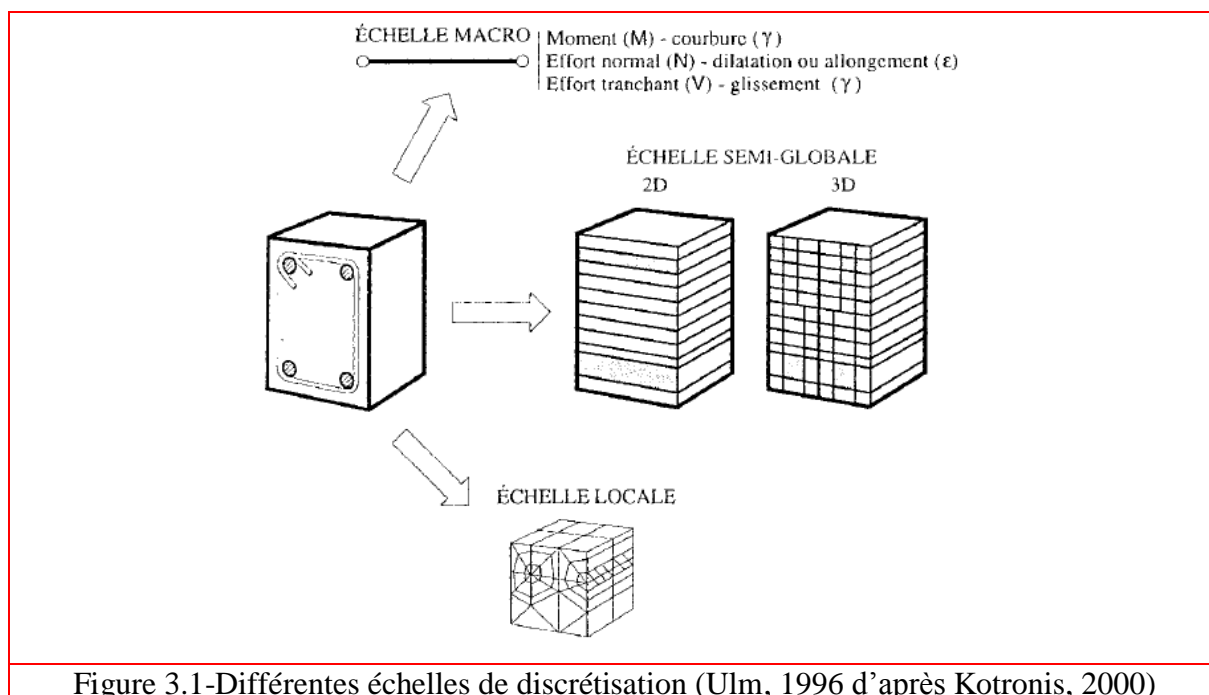
LES METHODES DE MODELISATION DES STRUCTURES EN BETON ARME

3.1. Introduction

Avant de commencer un calcul linéaire ou non linéaire il faut procéder à un choix de niveau de modélisation et d'échelle de discrétisation. Nous pouvons en général distinguer quatre niveaux de modélisation (Mestat et al. 1995) :

- Le niveau "géologique" qui vise à traiter une structure dans un environnement naturel par référence à des données géologiques. La géométrie de l'ouvrage peut être simplifiée mais ses principales caractéristiques sont prises en compte. La modélisation a pour but de déterminer les déformations du massif de sol et celles de l'ouvrage. Il s'agit en général de la simulation du comportement des ouvrages de géotechnique comme les barrages en terre, les fondations des ponts, les ouvrages de soutènement etc.
- Le niveau global qui vise à traiter une structure dans son ensemble. C'est le cas courant de l'étude d'un bâtiment où des réseaux de poutres ou des éléments finis coques sont utilisés pour le maillage. De tels modèles, souvent assez gros, ne sont pas en général, suffisamment précis pour représenter finement tous les éléments du bâtiment. Ils visent à donner une indication sur la répartition des efforts d'ensemble dans les principaux éléments porteurs.
- Le niveau semi-local qui correspond à l'étude d'un élément de structure. Pour un bâtiment, il s'agit par exemple des planchers lorsqu'ils sont soumis à des charges localisées ou des voiles lorsque des modes locaux sont recherchés.
- Le niveau local qui correspond à l'étude d'une partie détaillée d'une structure. Pour un bâtiment il s'agit des parties dont la taille est petite lorsqu'on la compare à un plancher ou à un voile (plaques d'ancrages etc.)

Nous pouvons de plus distinguer trois échelles de discrétisation par éléments finis de structures (Millard et al. 1991). Une échelle globale, une locale et une semi-locale (Figure 3.1). Ce sont les résultats escomptés qui fixent le choix de ces échelles.



- A l'échelle globale, c'est le comportement inélastique de la section courante, prise dans son ensemble, qui est défini à partir des lois de chaque matériau. Celles-ci sont formulées directement en fonction des contraintes généralisées que sont les efforts résultants sur une section (effort normal, moment fléchissant etc.). Nous distinguons des lois de flexion, de cisaillement et de traction-compression. Nous obtenons des relations de type "moments-courbures" ou "efforts normaux-allongements". Les interactions entre deux efforts généralisés (poutres travaillant en flexion biaxiale ou murs soumis à un effort normal et à un moment) sont également prises en compte en définissant des surfaces limites dans l'espace des contraintes généralisées et en appliquant la théorie de plasticité. Nous obtenons ainsi des courbes d'interaction ou de couplage "moment-efforts". A ce niveau se situe aussi le concept de macro-éléments, où le comportement non linéaire global de l'élément est exprimé en terme de variables globales, identifiées à partir d'analyses locales (Elachachi 1992, Davenne et Brenet 1998, Crémer 2001). Cette approche globale conduit en général à des temps de calculs réduits mais elle ne permet pas de définir précisément les comportements locaux (ex. fissuration). Elle se limite également au cas des structures de type poutre, car sa généralisation aux plaques et aux coques reste très délicate.

- A l'échelle locale, le béton est modélisé par des éléments de milieu continu bidimensionnel (2D), ou tridimensionnel (3D). La rhéologie est exprimée en terme de relations de type "contrainte-déformation", et l'analyse est souvent lourde car l'état du matériau est pris en compte en chaque point d'intégration de l'élément fini considéré. Cette modélisation permet d'obtenir des informations locales concernant l'état de l'endommagement, celui de la plastification etc. Néanmoins, la modélisation nécessite des stockages et des temps de calculs importants.

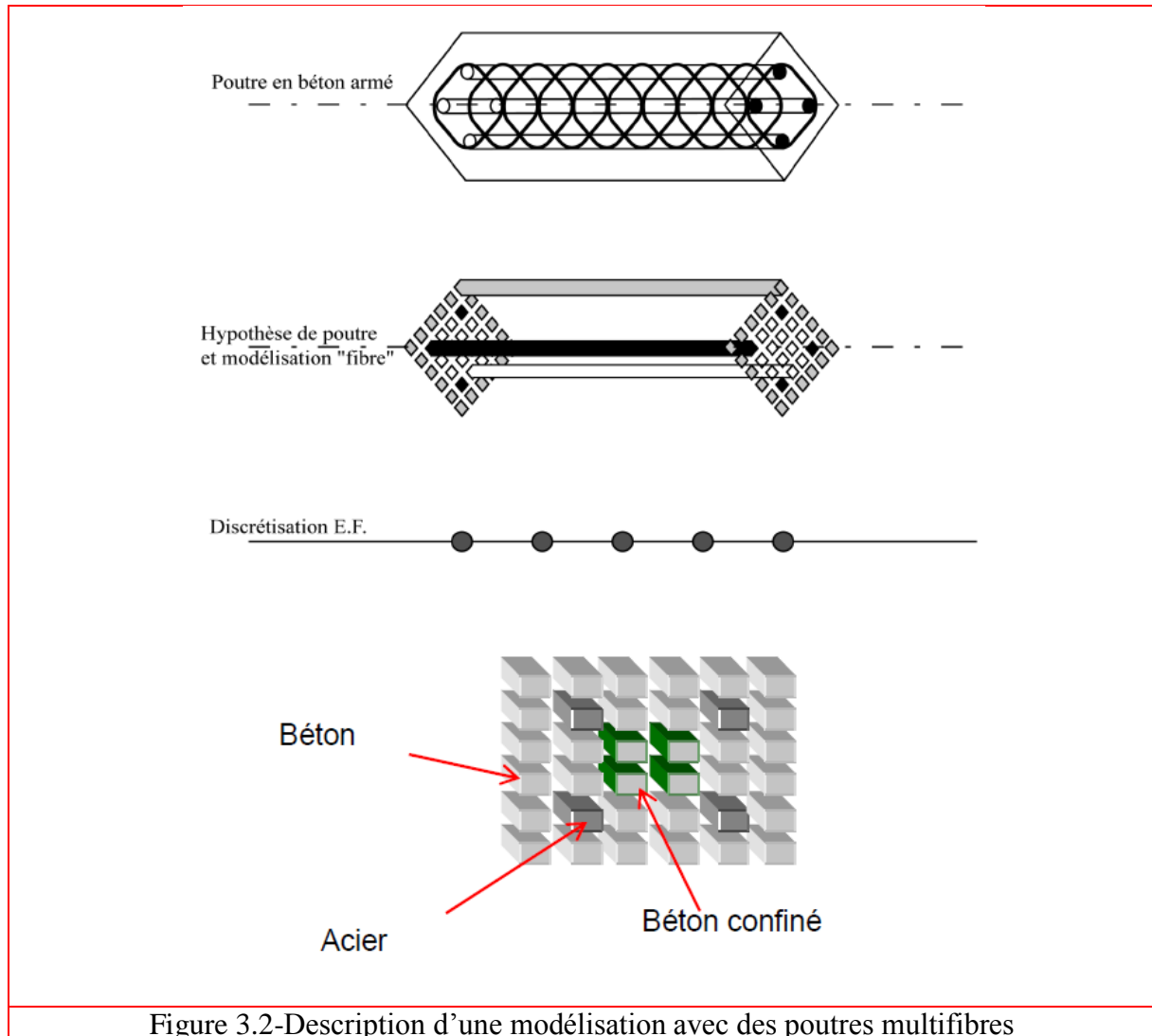
- L'échelle semi-globale constitue une approche intermédiaire par rapport aux deux précédentes. Le champ de déplacements est décrit par les déplacements et les rotations d'un élément poutre, d'un élément plaque ou d'une coque, tandis que toute information concernant le comportement des matériaux est traitée au niveau local. Il s'agit dans la plupart de cas d'utiliser des éléments poutres avec les hypothèses cinématiques habituelles (Bernoulli, Timoshenko). L'intégration du modèle rhéologique peut être réalisée en générale par une intégration numérique classique sur la hauteur, si le problème est plan ou dans les deux directions de la section si le problème est tridimensionnel.

La simulation du fonctionnement des structures sous chargement sismique conduit généralement à des problèmes de grande taille. L'échelle locale permet d'aborder des problèmes complexes tels que le cisaillement non linéaire et la réponse d'un ouvrage jusqu'à la ruine. Néanmoins, cette approche est très délicate à mettre en œuvre et demande beaucoup d'expérience de la part de l'utilisateur. C'est la raison pour laquelle les travaux effectués dans le cadre de cette thèse se situent au niveau global (modélisation des structures) à travers des discrétisations semi-globales. Plus spécifiquement, nous adoptons des éléments finis poutres multifibres et multicouches dont plusieurs formulations sont présentées en détail dans la suite.

3.2. Élément poutre multifibres

Une poutre multifibres est un élément fini basé sur la théorie des poutres dont chaque section est divisée en fibres. A chaque fibre nous pouvons associer une loi de comportement locale en contraintes-déformations et donc différents matériaux (figure 3.2). Ce type de description possède les avantages d'hypothèses simplificatrices associées à une cinématique de type poutre Euler-Bernoulli (Owen, et al., 1980), (La Borderie, 1991), (Spacone, et al.,

1996a, 1996b], (Ghavamian, et al., 1998, 2002), (Nguyen, et al., 2005b) ou Timoshenko (Guedes, et al., 1994), (Dubé, 1997), (Petrangeli, et al., 1999), (Kotronis, 2000), (Mazars et al. 2006) tout en offrant une solution robuste et rapide pour une analyse non linéaire de structures composites (par exemple en béton armé).



3.3. Élément de poutre à couches superposées (multicouches) :

Un élément de poutre à couches superposées est un élément fini utilisé pour modéliser des problèmes non-linéaires des poutres planes en béton armé sous chargement statique, cyclique et dynamique (La Borderie, 1991 ; Kotronis, 2000 ; Ragueneau, 1999, La Borderie, 2003 et Ragueneau, 2006). Il est basé sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. La section de l'élément est divisée selon la hauteur en plusieurs couches (figure 3.3). Chaque couche est affectée d'un comportement uniaxial.

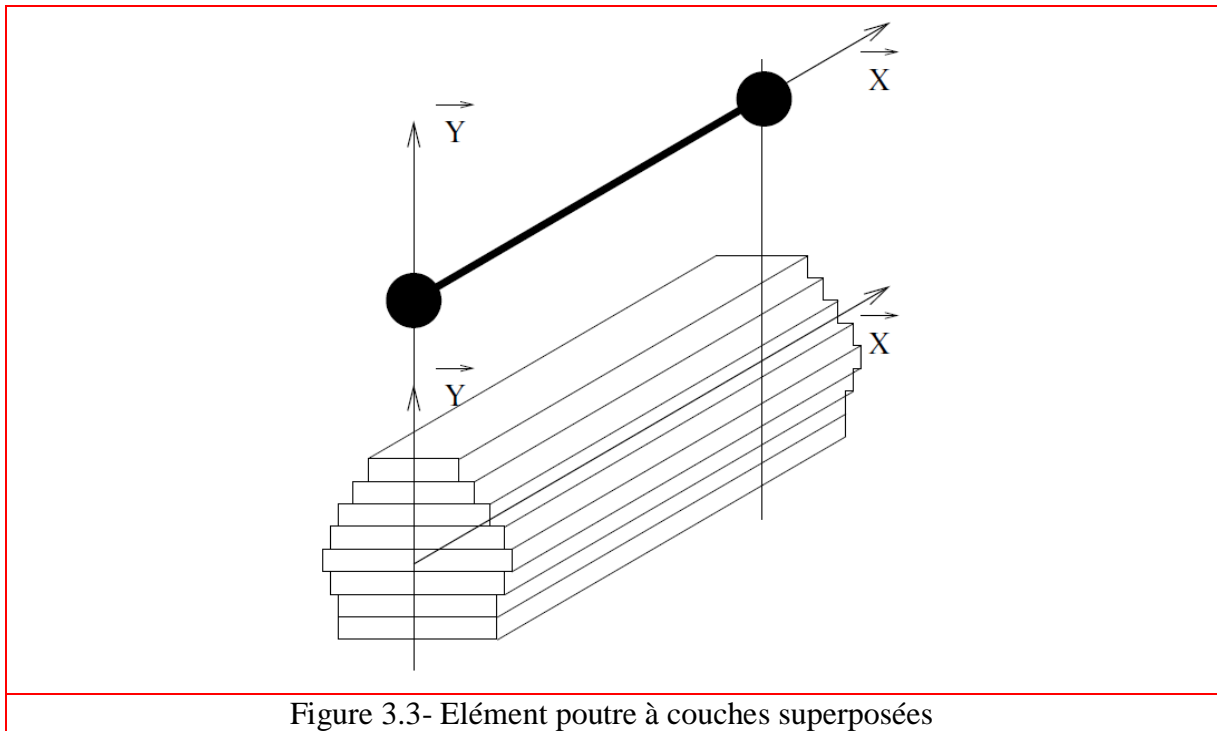


Figure 3.3- Elément poutre à couches superposées

Après avoir donné quelques éléments de la théorie des poutres, nous présentons dans la suite de ce chapitre plusieurs formulations d'éléments finis poutre multifibres et multicouches de cinématique Euler-Bernoulli et Timochenko existantes dans la littérature.

3.4. Éléments de la théorie des poutres

Soit une poutre droite 3D de longueur L orientée selon la direction x et soumise à des efforts distribués q_y, q_z (figure 3.4).

L'hypothèse des sections planes (théorie Timoshenko) permet d'exprimer les déplacements $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ d'un point quelconque de la poutre en fonction des déplacements u_s, v_s, w_s d'un point situé sur l'axe de référence x et des déplacements dus aux rotations $\theta_{sx}, \theta_{sy}, \theta_{sz}$ de la section S :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y\theta_{sz}(x) + z\theta_{sy}(x) \quad (3.1)$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) - z\theta_{sx}(x) \quad (3.2)$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) + y\theta_{sx}(x) \quad (3.3)$$

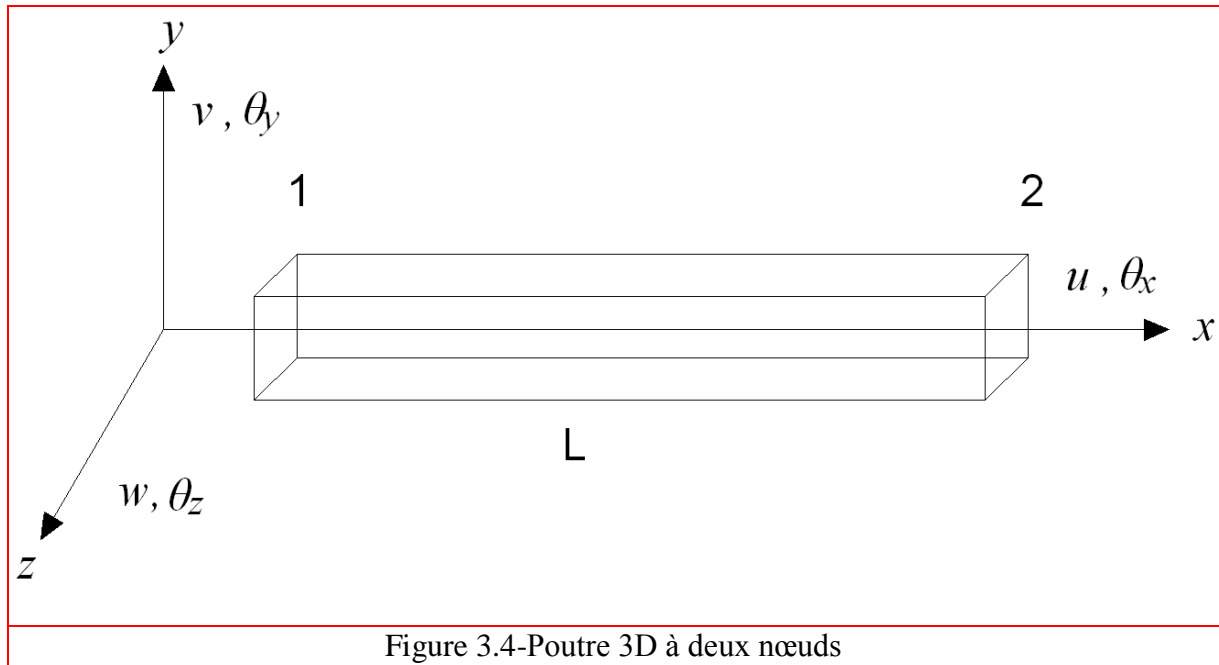


Figure 3.4-Poutre 3D à deux nœuds

Le champ des déformations prend alors la forme suivante :

$$\varepsilon_{xx} = u'_s(x) - y\theta'_{sz}(x) + z\theta'_{sy}(x) \quad (3.4)$$

$$2\varepsilon_{xy} = v'_s(x) - \theta_{sz}(x) - z\theta'_{sx}(x) \quad (3.5)$$

$$2\varepsilon_{xz} = w'_s(x) + \theta_{sy}(x) + y\theta'_{sx}(x) \quad (3.6)$$

En introduisant les équations 3.1 à 3.6 dans le principe des travaux virtuels, nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} (\delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + 2\delta\varepsilon_{xy}\sigma_{xy} + 2\delta\varepsilon_{xz}\sigma_{xz}) dV_0 \\ &= \int_0^L (\delta v_s(x)q_y + \delta w_s(x)q_z) dx \\ &\Leftrightarrow \int_0^L (N\delta u'_s(x) + T_y\delta\beta_{sy}(x) + T_z\delta\beta_{sz}(x)) dx \\ &+ \int_0^L (M_x\delta\theta'_{sx}(x) + M_y\delta\theta'_{sy}(x) + M_z\delta\theta'_{sz}(x)) dx \\ &= \int_0^L (\delta v_s(x)q_y + \delta w_s(x)q_z) dx \end{aligned} \quad (3.7)$$

Avec :

L'effort normal :

$$N = \int_S \sigma_{xx} dS \quad (3.8)$$

Les efforts tranchants :

$$T_y = \int_S \sigma_{xy} dS \quad \text{et} \quad T_z = \int_S \sigma_{xz} dS \quad (3.9)$$

Les moments de flexion :

$$M_y = \int_S z \sigma_{xx} dS \quad \text{et} \quad M_z = - \int_S y \sigma_{xx} dS \quad (3.10)$$

Le moment de torsion :

$$M_x = \int_S (-z \sigma_{xy} + y \sigma_{xz}) dS \quad (3.11)$$

$$\beta_{xy}(x) = v'_s(x) - \theta_{sz}(x) \quad (3.12)$$

$$\beta_{xz}(x) = w'_s(x) - \theta_{sy}(x) \quad (3.13)$$

La théorie des poutres et les équations d'élasticité donnent :

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad \sigma_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} \quad \sigma_{xz} = 2G \varepsilon_{xz} \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.14)$$

avec E le module de Young de la section et G le module de cisaillement.

Dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli (les sections planes restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre), les équations précédentes prennent la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y \theta_{sz}(x) + z \theta_{sy}(x) \quad (3.15)$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) \quad (3.16)$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_{xx} = u'_s(x) - y \theta'_{sz}(x) + z \theta'_{sy}(x) \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0 \quad (3.19)$$

Contrairement à la poutre Timoshenko, la poutre Euler-Bernoulli néglige les déformations dues au cisaillement (équation 3.19). En appliquant le principe de travaux virtuels, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(N \delta u'_s(x) + M_y \delta \theta'_{sy}(x) + M_z \delta \theta'_{sz}(x) \right) dx \\ & = \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \end{aligned} \quad (3.20)$$

avec :

$$N = \int_S \sigma_{xx} dS \quad (3.21)$$

$$M_y = \int_S z \sigma_{xx} dS \quad \text{et} \quad M_z = - \int_S y \sigma_{xx} dS \quad (3.22)$$

Le moment de torsion M_x et les efforts tranchants T_y et T_z ne peuvent pas être calculés par intégration des contraintes de cisaillement puisque ces dernières sont négligés. Dans la suite nous présentons en détail plusieurs éléments finis poutre multifibres existants dans la littérature basées sur la théorie de Timoshenko ou d'Euler - Bernoulli.

3.4.1. Elément fini poutre multifibres Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur.

Prenons une poutre Timoshenko 3D à 2 nœuds, de longueur L , soumise à des efforts distribués q_y et q_z (figure 3.4). S est la section de la poutre discrétisée en fibres de coordonnées y, z . Nous présentons ici une généralisation où l'axe de référence choisi pour la poutre est indépendant de toute considération géométrique, inertielle ou mécanique.

Chaque nœud a six degrés de liberté, trois translations et trois rotations, stockés dans un vecteur de déplacement de dimension 12 structuré de la manière suivante :

$$\{U\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}\} \quad (3.23)$$

3.4.1.1. Fonctions d'interpolation

Nous considérons le champ de déplacements continus en tout point de la ligne moyenne x en fonction du champ de déplacements discrétisés :

$$\{U_s\} = [N]\{U\} \quad (3.24)$$

avec

$$\{U_s\}^T = \{u_s(x) \quad v_s(x) \quad w_s(x) \quad \theta_{sx}(x) \quad \theta_{sy}(x) \quad \theta_{sz}(x)\} \quad (3.25)$$

Le choix des fonctions d'interpolation $[N]$ conditionne la performance numérique de l'élément. Le phénomène du blocage par cisaillement (apparition de rigidité 'parasite' quand l'élément est élancé) est présent dans tous les éléments finis de poutre Timoshenko où les déplacements transversaux et les rotations sont discrétisés séparément (Stolarski, et al., 1983). Une abondance de remèdes numériques existe dans la littérature (Crisfield, 1991). Afin d'affranchir ce problème, la formulation présentée ci-dessous opte pour une interpolation polynomiale de degré supérieur pour les déplacements transversaux (par exemple cubique) et les rotations (par exemple quadratique) qui ne sont plus indépendants. Ce type d'approche conduit à des éléments finis à plus de deux noeuds (deux noeuds aux extrémités + des noeuds intérieurs), (Ibrahimbegovic, et al. 1992) ou à des éléments finis à deux noeuds dont les fonctions d'interpolation dépendent des propriétés des matériaux (De Ville de Goyet, 1989), (Friedman, et al., 1993), (Kotronis, 2000), (Kotronis, et al., 2004, 2005a), (Mazars, et al., 2006). Dans cette dernière formulation les fonctions d'interpolation prennent la forme suivante :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3^* & 0 & N_4^* & 0 & 0 & 0 & N_5^* & 0 & -N_6^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_7^* & 0 & N_8^* & 0 & 0 & 0 & -N_9^* & 0 & N_{10}^* & 0 \\ 0 & N_7 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.27)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (3.28)$$

$$N_3 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \phi \left(\frac{x}{L} \right) + 1 + \phi \right\} \quad (3.29)$$

$$N_4 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 2 \left(2 + \frac{\phi}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(1 + \frac{\phi}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (3.30)$$

$$N_5 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \phi \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (3.31)$$

$$N_6 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \left(1 - \frac{\phi}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{\phi}{2} \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (3.32)$$

$$N_7 = \frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (3.33)$$

$$N_8 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - (4 + \phi) \left(\frac{x}{L} \right) + (1 + \phi) \right\} \quad (3.34)$$

$$N_9 = \frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (3.35)$$

$$N_{10} = \frac{1}{(1+\phi)} \left\{ 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - (2 - \phi) \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \quad (3.36)$$

$$N_i^* = N_i(\phi^*) \quad (3.37)$$

Les rapports entre la rigidité de flexion et la rigidité de cisaillement dans les axes y et z deviennent :

$$\phi = \frac{12}{L^2} \left(\frac{\int_s Ey^2 dS}{\int_s GdS} \right) \quad (3.38)$$

$$\phi^* = \frac{12}{L^2} \left(\frac{\int_s Ez^2 dS}{\int_s GdS} \right) \quad (3.39)$$

3.4.1.2. Matrices de rigidités

La relation entre les forces et les déformations « généralisées » dans la section prend la forme suivante (Guedes, et al., 1994) :

$$\{F\} = [K_s]\{D\} \quad (3.40)$$

$$\{F\}^T = \{N \quad T_y \quad T_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z\} \quad (3.41)$$

$$\{D\}^T = \{u'_s(x) \quad v'_s(x) - \theta_{sz}(x) \quad w'_s(x) + \theta_{sy}(x) \quad \theta'_{sx}(x) \quad \theta'_{sy}(x) \quad \theta'_{sz}(x)\} \quad (3.42)$$

La matrice de rigidité de la section devient finalement :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} K_{s11} & 0 & 0 & 0 & K_{s15} & K_{s16} \\ & K_{s22} & 0 & K_{s24} & 0 & 0 \\ & & K_{s33} & K_{s34} & 0 & 0 \\ & & & K_{s44} & 0 & 0 \\ sym & & & & K_{s55} & K_{s56} \\ & & & & & K_{s66} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$K_{s11} = \int_s E dS \quad K_{s15} = \int_s E z dS \quad K_{s16} = - \int_s E y dS \quad K_{s22} = k_y \int_s G dS \quad (3.44a)$$

$$K_{s24} = -k_y \int_s G z dS \quad K_{s33} = k_z \int_s G dS \quad K_{s34} = k_z \int_s G y dS \quad (3.45a)$$

$$K_{s44} = \int_s G (k_z y^2 + k_y z^2) dS \quad K_{s55} = \int_s E z^2 dS \quad (3.46a)$$

$$K_{s56} = \int_s E y z dS \quad K_{s66} = \int_s E y^2 dS \quad (3.47a)$$

Ainsi, si nous avons une section qui comporte n fibres nous aurons les approximations suivantes des intégrales :

$$K_{s11} = \sum_{i=1}^n E_i S_i \quad K_{s15} = \sum_{i=1}^n E_i z_i S_i \quad K_{s16} = - \sum_{i=1}^n E_i y_i S_i \quad K_{s22} = k_y \sum_{i=1}^n G_i S_i \quad (3.44b)$$

$$K_{s24} = -k_y \sum_{i=1}^n G_i z_i S_i \quad K_{s33} = k_z \sum_{i=1}^n G_i S_i \quad K_{s34} = k_z \sum_{i=1}^n G_i y_i S_i \quad (3.45b)$$

$$K_{s44} = \sum_{i=1}^n G_i (k_z y_i^2 + k_y z_i^2) S_i \quad K_{s55} = \sum_{i=1}^n E_i z_i^2 S_i \quad (3.46b)$$

$$K_{s56} = \sum_{i=1}^n E_i y_i z_i S_i \quad K_{s66} = \sum_{i=1}^n E_i y_i^2 S_i \quad (3.47b)$$

Les variables k_y et k_z sont les coefficients de correction de cisaillement de la section définies dans (Cowper, 1966). L'introduction des équations 3.40 à 3.47 dans le principe des travaux virtuels conduit à :

$$\int_0^L \delta \{D\}^T [K_s] \{D\} dx = \int_0^L (\delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \quad (3.48)$$

La déformation généralisée est calculée par :

$$\{D\} = [B] \{U\} \quad (3.49)$$

avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_3 - N_7 & 0 & 0 & 0 & N'_4 - N_8 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & 0 & 0 & N'_6 - N_{10} \\ 0 & 0 & N'_3 - N_7 & 0 & -N'_4 - N_8 & 0 & 0 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & -N'_6 - N_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_7 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & -N_9 & 0 & N_{10} & 0 \\ 0 & N'_7 & 0 & 0 & 0 & N'_8 & 0 & N'_9 & 0 & 0 & 0 & N'_{10} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

La matrice de rigidité d'élément est finalement donnée par :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx \quad (3.51)$$

Remarque : Lorsque le comportement du matériau est non linéaire, il est nécessaire d'avoir au moins deux points d'intégration de Gauss le long de la poutre afin d'intégrer correctement les contraintes (Nguyen, 2006). La matrice de rigidité est calculée avec l'équation suivante :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx = j \sum_{i=1}^2 w_i [B(x_i)]^T [K_s] [B(x_i)] \quad (3.52)$$

x_i est la position du point de Gauss i dans un élément de référence de longueur 1, w_i est le poids du point de Gauss et j est le jacobien.

Cette formule est utilisée également avec les autres types de poutre multifibres que nous présentons dans la suite.

3.4.1.3. Matrices de masse

Le travail virtuel des efforts d'inertie et la matrice de masse de la section prennent la forme suivante (Guedes et al. 1994):

$$W_{inertie} = \int_0^L \int_S \rho \left(\delta u(x, y, z) \frac{d^2 u(x, y, z)}{dt^2} + \delta v(x, y, z) \frac{d^2 v(x, y, z)}{dt^2} + \delta w(x, y, z) \frac{d^2 w(x, y, z)}{dt^2} \right) ds dx \quad (3.53a)$$

$$W_{inertie} = \int_0^L \delta \{U_s\}^T [M_s] \frac{d^2 \{U_s\}}{dt^2} dx \quad (3.53b)$$

$$[M_s] = \begin{bmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & 0 & M_{s15} & M_{s16} \\ & M_{s22} & 0 & M_{s24} & 0 & 0 \\ & & M_{s33} & M_{s34} & 0 & 0 \\ & & & M_{s44} & 0 & 0 \\ & sym & & & M_{s55} & M_{s56} \\ & & & & & M_{s66} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$M_{s11} = \int_s \rho dS \quad M_{s15} = \int_s \rho z dS \quad M_{s16} = \int_s \rho y dS \quad (3.55a)$$

$$M_{s22} = k_y \int_s \rho dS \quad M_{s24} = -k_y \int_s \rho z dS \quad M_{s33} = k_z \int_s \rho dS \quad (3.56a)$$

$$M_{s34} = k_z \int_s \rho y dS \quad M_{s44} = \int_s \rho (k_z y^2 + k_y z^2) dS \quad M_{s55} = \int_s \rho z^2 dS \quad (3.57a)$$

$$M_{s56} = \int_s \rho y z dS \quad M_{s66} = \int_s \rho y^2 dS \quad (3.58a)$$

avec ρ la masse volumique qui peut varier en fonction de y et z .

La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les différentes intégrales qui interviennent dans la matrice de masse. Ainsi, si nous avons une section qui comporte n fibres nous aurons les approximations suivantes des intégrales :

$$M_{s11} = \sum_{i=1}^n \rho_i S_i \quad M_{s15} = \sum_{i=1}^n \rho_i z_i S_i \quad M_{s16} = \sum_{i=1}^n \rho_i y_i S_i \quad (3.55b)$$

$$M_{s22} = k_y \sum_{i=1}^n \rho_i S_i \quad M_{s24} = -k_y \sum_{i=1}^n \rho_i z_i S_i \quad M_{s33} = k_z \sum_{i=1}^n \rho_i S_i \quad (3.56b)$$

$$M_{s34} = k_z \sum_{i=1}^n \rho_i y_i S_i \quad M_{s44} = \sum_{i=1}^n \rho_i (k_z y_i^2 + k_y z_i^2) S_i \quad M_{s55} = \sum_{i=1}^n \rho_i z_i^2 S_i \quad (3.57b)$$

$$M_{s56} = \sum_{i=1}^n \rho_i y_i z_i S_i \quad M_{s66} = \sum_{i=1}^n \rho_i y_i^2 S_i \quad (3.58b)$$

La matrice de masse de l'élément est finalement donnée par :

$$[M_{elem}] = \int_0^L [N]^T [M_s] [N] dx \quad (3.59)$$

Remarque : Cette expression de la matrice de masse est rarement présentée dans la littérature. Dans la plupart des codes éléments finis elle est remplacée par la matrice de masse

de type Euler-Bernoulli (ainsi les termes de correction de cisaillement intervient uniquement dans la matrice de raideur). Pour le cas d'une poutre courte avec $L/r \approx 12$ ($r = \sqrt{I/S}$ le rayon de giration de la section, I le moment d'inertie), de section circulaire pleine S , l'utilisation de la matrice de masse de type Euler-Bernoulli conduit à une erreur relative de l'ordre de 30% dès le quatrième mode, alors que l'erreur est quasi nulle pour la matrice de masse de l'équation 3.58 (Corn, 1998).

3.4.1.4. Efforts internes et efforts résultants

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale suivante :

$$\{F_{int}\} = \int_0^L [B]^T \{F\} dx \quad (3.60)$$

avec $\{F\}$ le vecteur des forces de la section issu de l'intégration des contraintes dans les fibres (équations 3.8-3.11, 3.41) et $[B]$ qui est donné par l'équation 3.50.

Les efforts résultants sont donnés par :

$$\{F_{res}\} = \int_0^L [N]^T \{Q\} dx \quad (3.61)$$

Avec $[N]$ qui est donné par les équations 3.26-3.39.

Le vecteur Q dépend du chargement extérieur :

$$\{Q\}^T = (0 \quad q_y \quad q_z \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (3.62)$$

Si nous considérons que les efforts distribués sont constants, nous obtenons le vecteur des forces nodales suivant :

$$\{F_{res}\}^T = \left(0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \quad (3.63)$$

Remarques :

- Pour des sections homogènes de comportement linéaire et quand l'axe de référence coïncide avec l'axe neutre de la poutre la matrice de rigidité de l'élément ainsi calculée est la même que la matrice de rigidité exacte d'un élément Timoshenko (Przemieniecki, 1985). Un seul élément fini est donc suffisant pour calculer les déplacements exacts d'une

poutre soumise à des chargements statiques. Pour des sections hétérogènes la qualité des résultats dépend de la précision de calculs des propriétés élastiques de la section.

- L'élément est exempt de verrouillage. Lorsque l'élanement devient grand $\phi \rightarrow 0$ et $\phi^* \rightarrow 0$ et donc la matrice de rigidité tend vers celle d'un élément Bernoulli (voir §3.4. 3)
- Contrairement à l'élément Euler - Bernoulli (§3.4.3) cet élément a seulement des forces nodales latérales et pas des moments (l'équation 3.63).
- Dans le cadre d'une modélisation de type multifibres, il y a deux «niveaux» d'intégration. Il y a la modélisation dite «longitudinale» qui sera représentée par une poutre (de support géométrique linéique avec deux points de Gauss sur la longueur) et une modélisation plane de la section (perpendiculaire au support géométrique, discrétisée avec des fibres qui jouent le rôle des points d'intégration dans la section).

3.4.2. Elément fini poutre multifibres Timoshenko à deux nœuds avec des fonctions d'interpolation d'ordre 1

3.4.2.1. Fonctions d'interpolation

La matrice des fonctions d'interpolation $[N]$ est de la forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.65)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (3.66)$$

3.4.2.2. Matrices de rigidité

La matrice de rigidité de la section $[K_s]$ est donnée par les équations 3.43 à 3.47. La déformation généralisée est calculée comme avant par $\{D\} = [B] \{U\}$ avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

La matrice de rigidité d'élément est finalement donnée par :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx \quad (3.68)$$

Remarque :

Le terme $v'_s(x) - \theta_{sz}(x)$ de la déformation généralisée s'écrit normalement sous la forme :

$$\begin{aligned} v'_s(x) - \theta_{sz}(x) &= -\frac{1}{L}v_1 - \frac{L-x}{L}\theta_{z1} + \frac{1}{L}v_2 - \frac{x}{L}\theta_{z2} \\ &= -\frac{1}{L}v_1 - \frac{1}{2}\theta_{z1} + \frac{1}{L}v_2 - \frac{1}{2}\theta_{z2} + \frac{1}{2}(\theta_{z1} - \theta_{z2})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L} \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} w'_s(x) + \theta_{sy}(x) &= -\frac{1}{L}w_1 + \frac{L-x}{L}\theta_{y1} + \frac{1}{L}w_2 + \frac{x}{L}\theta_{y2} \\ &= -\frac{1}{L}w_1 + \frac{1}{2}\theta_{y1} + \frac{1}{L}w_2 + \frac{1}{2}\theta_{y2} + \frac{1}{2}(\theta_{y2} - \theta_{y1})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L} \end{aligned} \quad (3.70)$$

La matrice $[B]$ devait être alors :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L-x}{L} & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x}{L} \\ 0 & 0 & N'_1 & 0 & \frac{L-x}{L} & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$N'_1 = -\frac{1}{L} \quad (3.72)$$

$$N'_2 = \frac{1}{L} \quad (3.73)$$

Pour affranchir le problème de blocage par cisaillement, les déformations généralisées de cisaillement ($v'_s(x) - \theta_{sz}(x)$ et $w'_s(x) + \theta_{sy}(x)$) ont été simplifiées en éliminant les termes

linéaires $\frac{1}{2}(\theta_{z1} - \theta_{z2})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L}$ et $\frac{1}{2}(\theta_{y2} - \theta_{y1})\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{2}{L}$ (Donea, et al., 1987 ; Pegon, 1994).

3.4.2.3. Matrices de masse

La matrice de masse de la section et la matrice de masse de l'élément sont données par les équations (3.54 - 3.59).

3.4.2.4. Efforts internes et efforts résultants

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale suivante :

$$\{F_{int}\} = \int_0^L [B]^T \{F\} dx \quad (3.74)$$

avec $\{F\}$ le vecteur des forces de la section issu de l'intégration des contraintes dans les fibres (équations 3.8-3.11, 3.40) et $[B]$ qui est donné par l'équation 3.67.

Les efforts résultants sont donnés par :

$$\{F_{res}\} = \int_0^L [N]^T \{Q\} dx \quad (3.75)$$

Avec $[N]$ qui est donné par les équations 3.64-3.66.

Le vecteur Q dépend du chargement extérieur :

$$\{Q\}^T = (0 \quad q_y \quad q_z \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (3.76)$$

Si nous considérons que les efforts distribués sont constants, nous obtenons le vecteur des forces nodales suivant :

$$\{F_{res}\}^T = \left(0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right) \quad (3.77)$$

Remarque :

- Contrairement à l'élément Euler-Bernoulli (§3.4.3) cet élément a seulement des forces nodales latérales et pas des moments.

3.4.3. Elément fini poutre multifibres Euler-Bernoulli

3.4.3.1. Fonctions d'interpolation

La matrice des fonctions d'interpolation $[N]$ est de la forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_3' & 0 & N_4' & 0 & 0 & 0 & -N_5' & 0 & N_6' & 0 \\ 0 & N_3' & 0 & 0 & 0 & N_4' & 0 & -N_5' & 0 & 0 & 0 & N_6' \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Avec les fonctions d'interpolation suivantes :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}; \quad N_1' = -\frac{1}{L} \quad (3.79)$$

$$N_2 = \frac{x}{L}; \quad N_2' = \frac{1}{L} \quad (3.80)$$

$$N_3 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}; \quad N_3' = \frac{6x}{L^2} + 6\frac{x^2}{L^3} \quad (3.81)$$

$$N_4 = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; \quad N_4' = 1 - \frac{4x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \quad (3.82)$$

$$N_5 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}; \quad N_5' = \frac{6x}{L^2} - 6\frac{x^2}{L^3} \quad (3.83)$$

$$N_6 = \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}; \quad N_6' = -\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \quad (3.84)$$

3.4.3.2. Matrices de rigidité

La matrice de rigidité de la section devient :

$$\{F\} = [K_s]\{D\} \quad (3.85)$$

Où

$$\{F\}^T = \{N \quad M_y \quad M_z \quad M_x\} \quad (3.86)$$

$$\{D\}^T = \{u_s'(x) \quad \theta_{sy}'(x) \quad \theta_{sz}'(x) \quad \theta_{sx}'(x)\} \quad (3.87)$$

$$K_S = \begin{bmatrix} K_{S11} & K_{S12} & K_{S13} & 0 \\ & K_{S22} & K_{S23} & 0 \\ & & K_{S33} & 0 \\ sym & & & K_{S44} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

avec :

$$K_{S11} = \int_S E dS \quad K_{S12} = \int_S E z dS \quad K_{S13} = \int_S E y dS \quad K_{S22} = \int_S E z^2 dS \quad (3.89a)$$

$$K_{S23} = \int_S E y z dS \quad K_{S33} = \int_S E y^2 dS \quad K_{S44} = G J_x \quad (3.90a)$$

avec J_x est la constante de torsion. Le terme K_{S44} peut aussi être calculé selon l'équation 3.46 (cisaillement transversal).

Ainsi, si nous avons une section qui comporte n fibres nous aurons les approximations suivantes des intégrales :

$$K_{S11} = \sum_{i=1}^n E_i S_i \quad K_{S12} = \sum_{i=1}^n E_i z_i S_i \quad K_{S13} = \sum_{i=1}^n E_i y_i S_i \quad K_{S22} = \sum_{i=1}^n E_i z_i^2 S_i \quad (3.89a)$$

$$K_{S23} = \sum_{i=1}^n E_i y_i z_i S_i \quad K_{S33} = \sum_{i=1}^n E_i y_i^2 S_i \quad K_{S44} = G J_x \quad (3.90a)$$

La déformation généralisée est cette - fois calculée par :

$$\{D\} = [B]\{U\} \quad (3.91)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N''_3 & 0 & N''_4 & 0 & 0 & 0 & -N''_5 & 0 & N''_6 & 0 \\ 0 & N''_3 & 0 & 0 & 0 & N''_4 & 0 & N''_5 & 0 & 0 & 0 & N''_6 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$N''_3 = -\frac{6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3}; \quad N''_4 = -\frac{4}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \quad (3.93)$$

$$N''_5 = -\frac{6}{L^2} - 12 \frac{x}{L^3}; \quad N''_6 = -\frac{2}{L} + 6 \frac{x}{L^2} \quad (3.94)$$

La matrice de rigidité de l'élément est finalement donnée par :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx \quad (3.95)$$

3.4.3.3. Matrices de masse

Les matrices de masse de la section et de l'élément prennent les formes suivantes :

$$[M_s] = \begin{bmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & M_{s12} & M_{s13} & 0 \\ & M_{s11} & 0 & 0 & 0 & -M_{s12} \\ & & M_{s11} & 0 & 0 & -M_{s13} \\ & & & M_{s22} & M_{s23} & 0 \\ sym & & & & M_{s33} & 0 \\ & & & & & M_{s22} + M_{s33} \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$M_{s11} = \int_s \rho dS \quad M_{s12} = \int_s \rho z dS \quad M_{s13} = \int_s \rho y dS \quad (3.97a)$$

$$M_{s22} = \int_s \rho z^2 dS \quad M_{s23} = \int_s \rho y z dS \quad M_{s33} = \int_s \rho y^2 dS \quad (3.98a)$$

ρ peut varier en fonction de y et z .

La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les différentes intégrales qui interviennent dans la matrice de masse. Ainsi, si nous avons une section qui comporte n fibres nous aurons les approximations suivantes des intégrales :

$$M_{s11} = \sum_{i=1}^n \rho_i S_i \quad M_{s12} = \sum_{i=1}^n \rho_i z_i S_i \quad M_{s13} = \sum_{i=1}^n \rho_i y_i S_i \quad (3.97b)$$

$$M_{s22} = \sum_{i=1}^n \rho_i z_i^2 S_i \quad M_{s23} = \sum_{i=1}^n \rho_i y_i z_i S_i \quad M_{s33} = \sum_{i=1}^n \rho_i y_i^2 S_i \quad (3.98b)$$

La matrice de masse de l'élément est finalement donnée par :

$$[M_{elem}] = \int_0^L [N]^T [M_s] [N] dx \quad (3.99)$$

3.4.3.4. Efforts internes et efforts résultants

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale suivante :

$$\{F_{int}\} = \int_0^L [B]^T \{F\} dx \quad (3.100)$$

avec $\{F\}$ le vecteur des forces de la section issu de l'intégration des contraintes dans les fibres (équations 3.20, 3.21, 3.86) et $[B]$ qui est donné par l'équation 3.92.

Les efforts résultants sont donnés par :

$$\{F_{res}\} = \int_0^L [N]^T \{Q\} dx \quad (3.101)$$

Avec $[N]$ qui est donné par les équations 3.78-3.84.

Le vecteur Q dépend du chargement extérieur :

$$\{Q\}^T = (0 \quad q_y \quad q_z \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (3.102)$$

Si nous considérons que les efforts distribués sont constants, nous obtenons le vecteur des forces nodales suivant :

$$\{F_{res}\}^T = \left(0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad -\frac{L^2q_z}{12} \quad \frac{L^2q_y}{12} \quad 0 \quad \frac{Lq_y}{2} \quad \frac{Lq_z}{2} \quad 0 \quad \frac{L^2q_z}{12} \quad -\frac{L^2q_y}{12} \right) \quad (3.103)$$

3.5. Conclusion

Plusieurs formulations d'éléments poutres multifibres 3D de cinématique de Timoshenko et Euler-Bernoulli sont présentées en détail. Dans le chapitre suivant nous allons présenter un élément poutre multicouches pour lequel l'hypothèse de Bernoulli est adoptée afin de modéliser des structures planes (2D) en béton armé en prenant en compte l'endommagement du béton et hétérogénéité de la section de la poutre (béton+ acier).

CHAPITRE 4

MODELISATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT ENDOMMAGEANT DES STRUCTURES EN BETON ARME PAR : ELEMENTS FINIS A COUCHES SUPERPOSEES

4.1. Introduction

Les structures de génie civil se distinguent des pièces généralement rencontrées en mécanique par leur taille et leur nombre très important de degrés de liberté (ponts, bâtiments de grande hauteur, etc...). La modélisation de ce type d'ouvrages doit nécessairement passer par des simplifications : un calcul 3 D complet parait encore de nos jours irréalisable pour peu que l'on désire effectuer une analyse dynamique non-linéaire prenant en compte les dégradations des divers matériaux. Désireux de garder un maximum de précision au niveau du comportement local des matériaux, des hypothèses simplificatrices sont adoptées sur la cinématique des éléments de structure. A cet effet, des éléments coques ou plaques avec enrichissement multicouches permettent de traiter de l'apparition progressive de rotules plastiques au sein de la structure (Merabet 1990). De même, cette philosophie peut être poussée encore plus loin pour aboutir à une approche simplifiée du calcul de structures : l'utilisation des éléments poutres multicouches permet d'aborder des structures de très grandes dimensions tout en gardant un nombre de degrés de libertés relativement faible (La Borderie, 2003 ; Kotronis, 2000 ; Ragueneau, 1999). Ce dernier point est un facteur prédominant au regard de l'efficacité des algorithmes de résolution de systèmes d'équations non-linéaires.

Dans le présent chapitre nous allons présenter une méthode simplifiée de modélisation bidimensionnelle du comportement endommageant des structures en béton armé, dans laquelle des éléments finis à couches superposées (éléments poutres multicouches) sont utilisés (figure 4.1). Ces éléments poutres sont basés sur l'hypothèse de Bernoulli afin d'assurer un comportement uniaxial pour toutes les couches.

4.2. Discrétisation en éléments finis à couches superposées (multicouches)

La méthode de modélisation par éléments finis à couches superposées repose sur une approche semi-globale du comportement des structures en béton-armé.

La description de la géométrie à l'aide d'éléments poutres évite la lourdeur des calculs et l'enrichissement multicouches permet de conserver une description locale "fine" des matériaux (Ragueneau, 1999).

Il est adapté pour traiter les problèmes 2D de structures planes en béton armé en statique et en dynamique et il utilise des éléments poutres de type multicouches (Owen et Hinton 1980). La procédure générale de la discrétisation d'une structure est montrée ci-dessous (figure 4.1) :

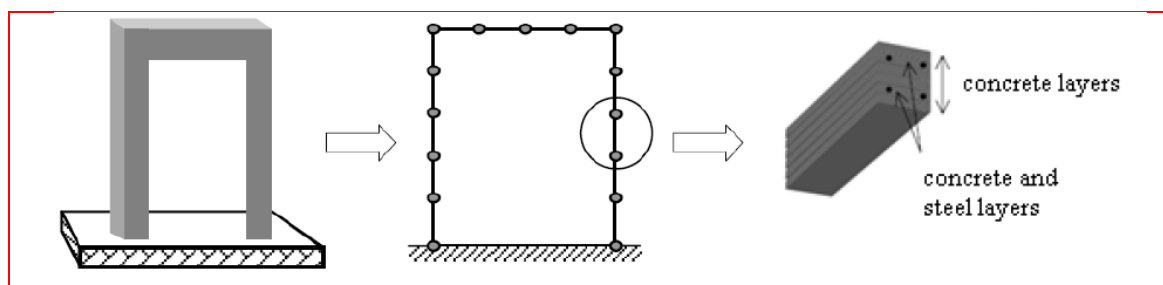


Figure 4.1-Principe de discrétisation des structures en béton armé en poutres multicouches

La structure est discrétisée avec des poutres 2D et des masses concentrées à certains points.

Chaque poutre est découpée selon la hauteur en couches successives, où la contrainte est supposée constante. La sommation de ces couches permet le calcul de la raideur d'une manière correcte et la prise en compte des variations du comportement.

L'hypothèse de Bernoulli, les sections restant planes et perpendiculaires à l'axe neutre, confère aux différentes couches un comportement uniaxial. Ceci permet de traiter les comportements locaux à travers des lois uniaxiales pour le béton et l'acier, lois qui sont attribuées à chaque couche. Dans le cas où la déformation de cisaillement deviendrait non négligeable, l'utilisation des éléments poutres Timoshenko (les sections restent planes mais pas perpendiculaires à l'axe neutre) et des lois 2D pour le béton permet d'élargir le champ d'applicabilité de la méthode (Dubé 1997). Le calcul des efforts anélastiques s'effectue grâce à une méthode d'itération basée sur la raideur sécante initiale (Zienkiewicz et al. 1969).

4.2.1. Formulation de l'élément poutre multicouches avec la pris en considération de l'endommagement et anélasticité

Les éléments utilisés dans cette section sont des poutres à deux nœuds, l'hypothèse de Bernoulli sur la section droites confère aux différentes couches un comportement uniaxial. La relation donnant l'équilibre de l'élément est obtenue par le principe des travaux virtuels et exprimée en termes de coordonnées généralisée.

$$\delta U^T F = \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{xx} \sigma dV \quad (4.1)$$

Avec

$$\delta \varepsilon^T = \delta (BU)^T = \delta U^T B^T \quad (4.2)$$

Où B dépend des dérivées des fonctions de forme

Si l'on introduit une loi de comportement avec endommagement et anélasticité,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(1-D)} + \varepsilon_{an}(D) \quad (4.3)$$

Soit,

$$\sigma = E(1-D)(\varepsilon - \varepsilon_{an}) \quad (4.4)$$

Substituons les équations 4.2 et 4.4 dans l'équation 4.1, le principe des travaux virtuels prend alors la forme suivante :

$$\delta U^T F = \int_{\Omega} \delta U^T B^T E(1-D)(\varepsilon - \varepsilon_{an}) dV \quad (4.5)$$

Soit,

$$F = \int_{\Omega} B^T E(1-D)(\varepsilon - \varepsilon_{an}) dV \quad (4.6)$$

Qui peut encore se mettre sous la forme suivante :

$$F = \left[\int_{\Omega} B^T E(1-D) B dV \right] U - \int_{\Omega} B^T E(1-D) \varepsilon_{an} dV \quad (4.7)$$

En posent :

$$K = \int_{\Omega} B^T E(1 - D)B dV \quad (4.8)$$

et

$$F_{an} = - \int_{\Omega} B^T E(1 - D)\varepsilon_{an} dV \quad (4.9)$$

Nous aboutissons au système final à résoudre :

$$F = KU + F_{an} \quad (4.10)$$

K est la matrice de rigidité de l'élément :

$$K = \int_0^L B^T k_s B dx \quad (4.11)$$

La matrice de rigidité de la section déviant :

$$k_s = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Avec

$$k_{11} = \int_s E dS \quad k_{12} = k_{21} = \int_s E y dS \quad k_{22} = \int_s E y^2 dS \quad (4.13)$$

La discrétisation de la section droite en un certain couche superposes selon l'hypothèse de Bernoulli permet d'obtenir les raideurs suivantes : (Belmouden. 2004) :

$$k_{11} = \sum_{k=1}^n \text{couches} E_k A_k \quad k_{12} = k_{21} = \sum_{k=1}^n \text{couches} E_k y_k A_k \quad k_{22} = \sum_{k=1}^n \text{couches} E_k y_k^2 A_k \quad (4.14)$$

E_k , A_k et y_k sont respectivement le module d'Young, L'aire d'une couche et la position de son centre par rapport à un axe de référence.

Cette répartition des non linéarités, dues à l'endommagement entre la matrice de rigidité et le vecteur des efforts anélastiques, permet de conserver une matrice non-singulière. Bien que peu performante en comparaison avec la méthode de Newton, elle demeure très avantageuse lors de résolution de systèmes d'équations non-linéaires en cyclique.

La matrice de rigidité élémentaire, basée sur la théorie des poutres (La Borderie 1991) est bien adaptée pour décrire le comportement de structures normalement élancées au sens de la RDM. Pour traiter de problèmes à élancement très faible, la cinématique se doit d'être enrichie afin de prendre en compte les déformations de cisaillement. En élasticité, une telle description s'apparente aux poutres de Timoshenko. De même, le gauchissement des sections peut être introduit, sur la base des travaux de Reissner (Reissner 1945), et permet de rendre compte de la distribution non-uniforme des contraintes de cisaillement dans une section.

A l'inverse, les structures fortement élancées s'éloignent de la classique théorie des poutres du fait de la présence d'effets du second ordre. Ces effets sont principalement dus à l'excentrement des charges en présence de grands déplacements. Des analyses éléments finis, basées sur le Lagrangien réactualisé, permettent de prendre en compte ces non-linéarités géométriques mais entraînent une lourdeur du calcul non appropriée aux études simplifiées. Toutefois, il est possible d'adopter une stratégie plus souple permettant de prendre en compte les moments additifs. On introduit pour cela des termes du second ordre dans la définition des déformations participant à l'expression de l'énergie élastique (Ghavamian 1998). Cette approche se résume à adjoindre une nouvelle matrice de rigidité dite "géométrique" qui aura tendance à assouplir la structure quand celle-ci est soumise à des efforts de compression :

$$K_{tot} = K + K_{géo} \quad (4.15)$$

4.2.2. Lois de comportement utilisées

La méthode proposée dans ce chapitre étant spécialisée dans l'étude semi-globale de structures en béton armé, il est nécessaire de décrire localement le comportement des deux matériaux en présence : le béton et l'acier.

4.2.2.1. Modèle d'endommagement pour le béton (La Borderie 1991)

Le modèle choisi est un modèle d'endommagement unilatéral à deux variables scalaires. Sa description précise est donnée au paragraphe 2.3.1.2. La lourdeur d'utilisation de ce modèle dans un cadre classique d'éléments finis en déplacement est largement diminuée, car seule une implantation uniaxiale est nécessaire grâce à la cinématique de déformation des sections choisie.

4.2. 2.2. Le comportement de l'acier :

Le modèle de plasticité 1D utilisé pour les aciers est à écrouissage cinématique. Celui-ci peut être linéaire ou non selon la qualité des informations dont nous disposons sur les armatures utilisées (Figure 4.2).

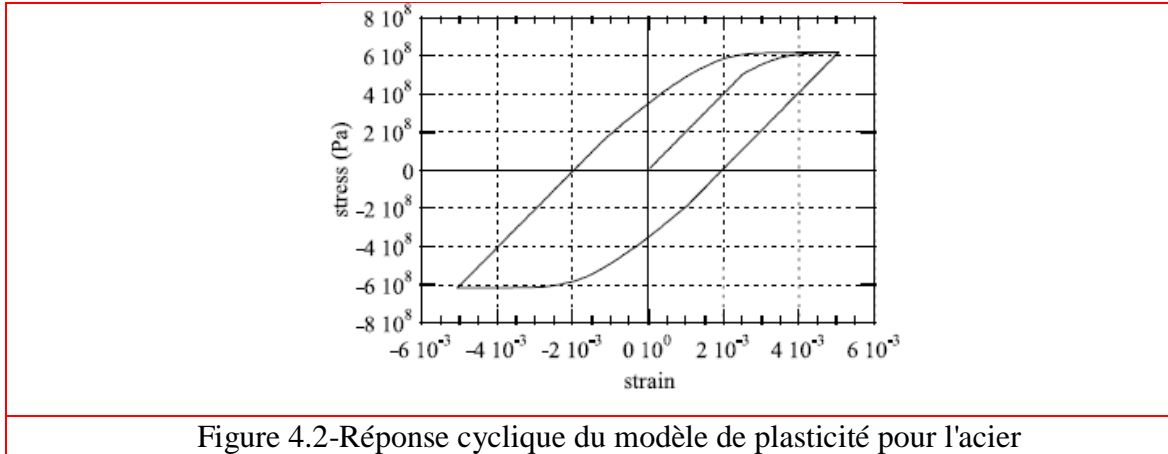


Figure 4.2-Réponse cyclique du modèle de plasticité pour l'acier

Le potentiel d'énergie libre pour ce modèle s'exprime comme suit (Kotronis, 2000 ; Davenne, et al., 2003; Ragueneau, 1999) :

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_p):C:(\varepsilon - \varepsilon_p) + \frac{1}{2}b\alpha:\alpha \quad (4.16)$$

Avec C le tenseur d'élasticité du 4ième ordre et α la variable interne associée à l'écrouissage cinématique. Les lois constitutives définies par dérivation de cette énergie donnent :

$$\sigma = \frac{\partial \rho\psi}{\partial \varepsilon} = C:(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (4.17)$$

$$X = \frac{\partial \rho\psi}{\partial \alpha} = b\alpha \quad (4.18)$$

Où X : la variable d'écrouissage cinématique « *the back-stress hardening variable* »

La fonction seuil du modèle a la forme :

$$f = J_2(\sigma - X) + \frac{3}{4}dX:X - \sigma_y \quad (4.19)$$

Avec b, d, σ_y des paramètres du modèle à identifier.

Le ferrailage a une orientation privilégiée et une loi uniaxiale est suffisante pour reproduire son comportement (Kotronis. 2000). Ce ferrailage peut être considéré comme concentré ou diffus dans les éléments de béton. Dans le premier cas, des éléments barres à comportement non linéaire, dont la position et la section coïncident avec la position et la section du ferrailage réel sont utilisés (figure 4.1). Un traitement particulier est réservé aux couches comprenant simultanément du béton et d'acier. Le comportement des couches mixtes (Figure 4.3) est homogénéisé par la loi de mélange permettant ainsi de calculer la contrainte de la couche au prorata de chaque matériau :

$$\sigma_{couche} = (1 - A)\sigma_{béton} + A\sigma_{acier} \quad (4.20)$$

Tel que A : représente l'aire relative d'acier au sein de la couche renforcée.

L'adhérence acier– béton est supposée parfaite (déformation identique sur les deux matériaux à leur frontière $\varepsilon_{béton} = \varepsilon_{acier}$).

Ainsi dans chaque couche (Mazars 2001) :

$$\varepsilon_{béton} = \varepsilon_{acier} \quad (4.21)$$

$$E = (1 - C_{a/b}) \times E_{béton} + C_{a/b} \times E_{acier} \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_{anél} = (1 - C_{a/b}) \times \varepsilon_{anélbéton} + C_{a/b} \times \varepsilon_{anélacier} \quad (4.23)$$

$$C_{a/b} = \frac{A}{B} \quad (4.24)$$

E : représente le module de Young homogénéisé (acier + béton).

$C_{a/b}$: représente le taux surfacique de ferrailage.

A : représente l'aire relative d'acier au sein de la couche renforcée.

B : représente l'aire relative de béton au sein de la couche renforcée.

$\varepsilon_{anélbéton}$: représente la déformation anélastique de béton.

$\varepsilon_{anélacier}$: représente la déformation anélastique d'acier.

$\varepsilon_{anél}$: représente la déformation anélastique homogénéisé de la couche renforcée (acier+ béton).

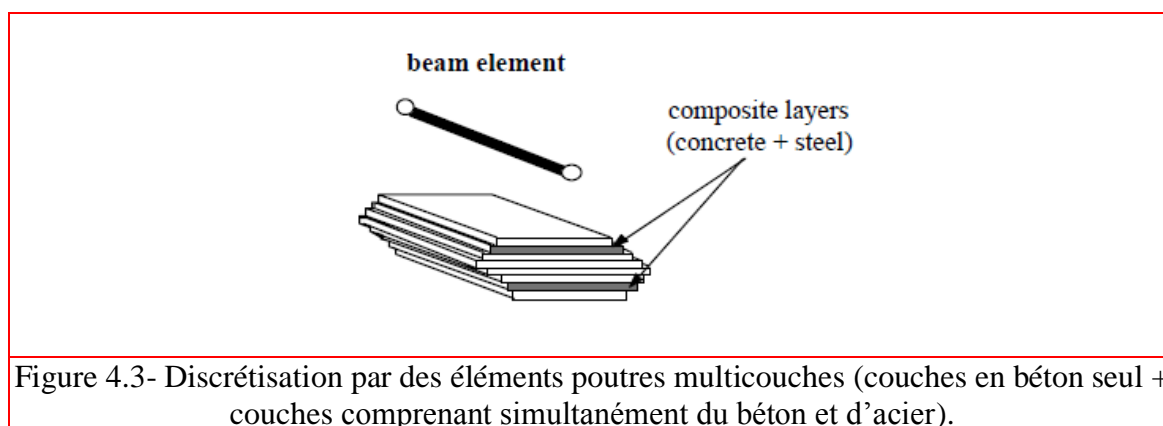


Figure 4.3- Discrétisation par des éléments poutres multicouches (couches en béton seul + couches comprenant simultanément du béton et d'acier).

4.3. Modélisation des structures sous chargement dynamique

L'équation du mouvement qui régit l'équilibre du système s'écrit sous la forme :

$$M\{u''\} + C\{u'\} + K\{u\} = \{F^{ext}\} \quad (4.25)$$

avec :

M : la matrice de masse ;

K : la matrice de rigidité ;

C : la matrice de l'amortissement ;

$\{F^{ext}\}$: le vecteur des forces extérieures ;

$\{u\}$, $\{u'\}$, $\{u''\}$: les vecteurs des déplacements, vitesses et accélération des nœuds.

La résolution de ce système d'équations différentielles s'effectue grâce au schéma d'intégration numérique implicite de Newmark (1959) sous sa forme inconditionnellement stable (accélération moyenne : $\beta=1/4$ et $\gamma=1/2$). Le chargement sismique s'applique sous forme d'accélérogramme aux appuis de la structure (base de la structure). La matrice de masse est considérée constante pendant le calcul et toutes les non linéarités sont prises en compte dans la matrice de rigidité et le vecteur des efforts anélastiques. Les difficultés que pose la définition de la matrice d'amortissement seront discutées au paragraphe suivant.

4.4. Modélisation de l'amortissement

Une façon commode de modéliser l'amortissement structural visqueux, tout à fait compatible avec la philosophie des «méthodes simplifiées», est d'utiliser la formulation proposée par Rayleigh qui consiste à construire une matrice d'amortissement structural C

proportionnelle aux matrices de masse M et de rigidité K sous la forme suivante (a, b des scalaires) :

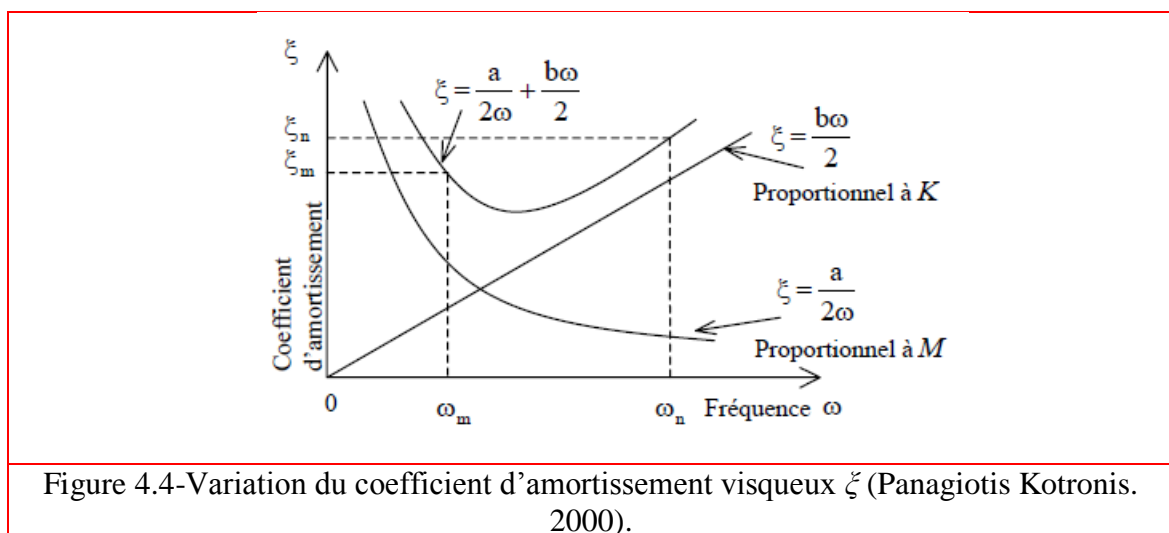
$$C = aM + bK \quad (4.26)$$

Cette formulation de l'amortissement structurel est équivalente à imposer un pourcentage d'amortissement critique, $\xi_i = c_i/c_{cr}$, avec $c_{cr}=2m\omega_i$ à chaque mode i . La matrice C est donc construite de manière à pouvoir restituer les valeurs des coefficients d'amortissement critique ξ pour des modes significatifs dans le comportement de la structure, en particulier, les modes pouvant être analysés expérimentalement. Le facteur d'amortissement ξ s'exprime comme la somme d'un terme proportionnel à la fréquence ω et un terme inversement proportionnel à la fréquence, soit :

$$\xi = \frac{a}{2\omega} + \frac{b\omega}{2} \quad (4.27)$$

La connaissance de deux couples de valeurs, (ξ_n, ω_n) , (ξ_m, ω_m) suffit pour calculer a et b (équation 4.28). La courbe de la figure 4.4 donne le coefficient d'amortissement ξ en fonction de la fréquence des modes de la structure. En pratique, il est judicieux de prendre le mode significatif le plus bas (fréquence ω_n) et un mode supérieur (fréquence ω_m) choisi pour que les valeurs intermédiaires de ξ_m ne soient pas trop éloignées de ξ .

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{2\omega_n\omega_m}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \begin{bmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ \frac{1}{-\omega_n} & \frac{1}{\omega_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (4.28)$$



L'avantage de cette formulation est que la matrice d'amortissement C est diagonale dans l'espace des modes propres (Panagiotis Kotronis. 2000). Néanmoins, l'utilisation de la matrice de masse dans la formulation de Rayleigh rend les résultats sensibles aux mouvements de «corps rigide» qui génèrent de l'amortissement visqueux (Ghavamian, 1998 ; Panagiotis Kotronis. 2000). Ce phénomène est encore plus accentué par une écriture de l'équation du mouvement dans le repère absolu des mouvements (le cas du code EFICOS que sera utilisé dans les chapitres suivants). La solution la plus simple consiste à corriger l'accélérogramme (assurer une vitesse nulle en fin d'accélérogramme ce qui peut nécessiter une correction du signal brut) et à ne pas considérer la participation de la masse dans la composition de l'amortissement ($a = 0$). Le nouveau désagrément réside dans le manque de souplesse pour caler la matrice visqueuse (un seul mode à identifier) et le sur-amortissement des modes supérieurs (Panagiotis Kotronis. 2000).

Une approche originale, toujours dans le cadre des méthodes simplifiées, consiste à intégrer les phénomènes dissipatifs locaux dans un calcul non-linéaire du comportement des structures (Ragueneau 1999). S'inscrivant dans cet objectif, Ragueneau a développé un modèle couplant le niveau d'endommagement atteint dans une direction avec le glissement et le frottement des lèvres de fissures.

4.5. Conclusion :

Une méthode de modélisation 2D a été présentée en détail, il est fiable et surtout facile à l'utilisation. Elle a déjà été utilisée avec des résultats satisfaisants pour différents types d'ouvrages à savoir :

- 1) Des voiles normalement élancés (Ragueneau 1999, Kotronis 2000).
- 2) Poutres en béton armé et flambement des poteaux (Khebizi et Guenfoud, 2015)
- 3) Des structures de grand élancement où les effets du second ordre (non-linéarité géométrique) sont à considérer. La modélisation est effectuée avec l'introduction d'une matrice de raideur dite «géométrique» en plus de la matrice de raideur classique d'une poutre Bernoulli et des lois uniaxiales pour le béton et les armatures (Ghavamian, 1998).

Le cinquième chapitre et le sixième chapitre concernent l'application de cette méthode en utilisant le code EFiCoS (La Borderie 1991, 2003) pour modéliser plusieurs éléments de béton seul et plusieurs structures en béton armé sous chargement statique, cyclique et sismique.

CHAPITRE 5

APPLICATION AUX ELEMENTS EN BETON

5.1. Introduction

On va examiner dans ce chapitre la réponse d'un élément en béton seul (sans armatures) sous chargements quasi-statiques monotones et cycliques obtenue par le modèle du comportement de La Borderie (avec des éléments finis multicouches 2D) et celui de Mazars (avec des éléments finis multifibres 3D). Tout d'abord on note que l'on ne va pas procéder à une validation détaillée des paramètres des modèles. On va plutôt insister sur les aspects qualitatifs des modèles en soulignant les caractéristiques essentielles du comportement non-linéaire du béton décrites par les modèles de La Borderie et de Mazars. Le code EFiCoS : **Eléments Finis à Couches Superposées** (La Borderie 1991, 2003) est utilisé pour cette modélisation.

EFiCoS est un code de calcul éléments finis basé sur la théorie des poutres. Sa configuration actuelle est plus adoptée au cas des structures en béton armé. Les différentes parties de la structure sont modélisées par une discrétisation en éléments poutres composés d'un empilement de couches. Chaque couche est composée de béton, et éventuellement d'acier. La loi de comportement du matériau béton implantée est une loi non linéaire endommageable (La Borderie pour les éléments multicouches et Mazars pour les éléments multifibre).

5.2. Modélisation d'un tirant en béton

La traction simple est l'un des tests élémentaire les plus significatifs lorsque l'on s'intéresse à la fissuration -source de l'endommagement-. C'est en effet lorsque le matériau est soumis à ce type de sollicitations que les premières fissures apparaissent.

C'est pourquoi nous intéressons ici à étudier le comportement d'une barre en béton soumise à une traction simple. La barre a une longueur de 1m et sa section est $10 \times 10 \text{ cm}^2$, elle est fixée à une extrémité et piloté par un déplacement imposé à l'autre extrémité (Figure. 5.1).

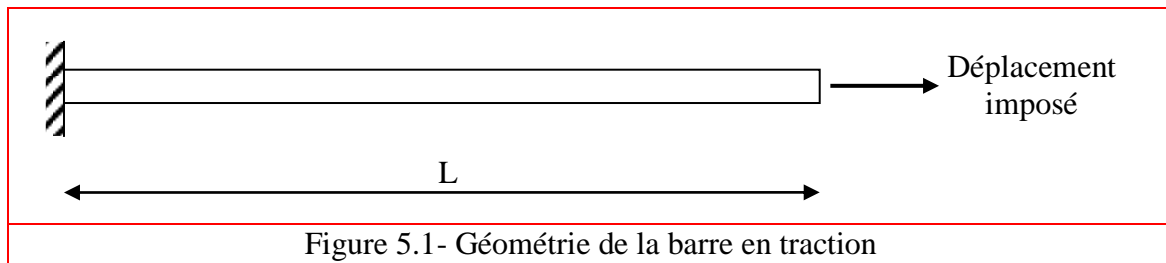


Figure 5.1- Géométrie de la barre en traction

Giry (2011) a été étudié numériquement la même barre avec un maillage composé d'éléments quadrangles à interpolation linéaire avec un seul élément sur la hauteur. Il utilise un modèle d'endommagement régularisé non-locale pour étudier l'évolution des nonlinéarités dans le béton de la barre. Les résultats obtenus par Giry (2011) sont présentés dans la figure 5.3.b.

Dans le présent travail, nous modélisons la barre par deux méthodes :

- Une modélisation par des éléments finis multicouches (2D) ;
- Une modélisation par des éléments finis multifibres (3D).

5.2.1. Modélisation par des éléments finis multicouches

Dans cette partie la barre est modélisé par 04 éléments, la section de chaque élément est discrétisée par 04 couches superposées (figure 5.2). Les nonlinéarités du béton sont décrites par le modèle de comportement unilatérale de La Borderie, dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau 5.1. Seules les déformations axiales sont considérées lors de cette modélisation (pas d'effet de Poisson).

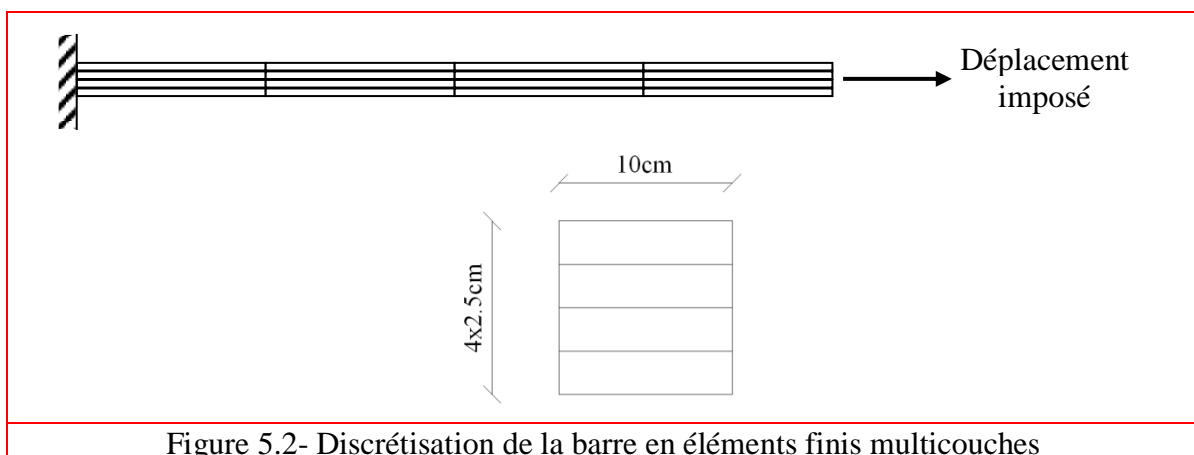


Figure 5.2- Discrétisation de la barre en éléments finis multicouches

Tableau 5.1 Caractéristiques utilisées pour le modèle de comportement de La Borderie

Module de Young	33700 e ⁶ Pa
Masse volumique	2500 kg/m ³
Seuil d'endommagement en traction	260 Pa
Seuil d'endommagement en compression	40000 Pa
Paramètre d'endommagement en traction	3e ⁻³ Pa ⁻¹
Paramètre d'endommagement en compression	5.50e ⁻⁶ Pa ⁻¹
Paramètre pour la traction	1.20
Paramètre pour la compression	1.4
Activation de la déformation permanente en traction	1.00e ⁶ Pa
Activation de la déformation permanente en compression	-40e ⁶ Pa
Contrainte de refermeture des fissures	3.50e ⁶ Pa

La figure 5.3 présente une comparaison entre les résultats obtenus par EFiCoS et ceux de Giry (2011). Nous voyons que la réponse élastique (avant pic) de la barre décrite par EFiCoS est pratiquement la même que celle décrite par le modèle d'endommagement régularisé non-locale de Giry (2011). La phase élastique est limitée par une force maximale de traction de l'ordre de 33200 N pour un déplacement de 1.10^{-4} m, au-delà de cette limite (pic de la courbe) la réponse de la barre devient non-linéaire, où nous constatons une apparition d'endommagement causé par les premières microfissures avec une diminution progressive de la force ou bien de la contrainte. Durant la dernière phase une certaine différence entre les résultats est observée, cette différence est prévisible puisque Giry a été localisé le lieu de l'enclenchement de l'endommagement (c'est-à-dire la zone de l'endommagement à été imposée) par un affaiblissement de l'élément central de la barre (avec un module d'Young plus faible pour l'élément central), alors que dans la modélisation avec EFiCoS l'endommagement est réparti sur tous les éléments, en plus l'équilibre statique du milieu implique que la contrainte σ soit constante le long de la barre et donc les déformations ε sont homogène le long de la barre.

La réponse numérique de barre en traction (figure 5.3.a) est similaire aux observations expérimentales présentées dans le chapitre 1.

La figure 5.4 montre l'évaluation de la contrainte en fonction de la déformation (de la première couche du premier élément), elle indique que la résistance de traction est de l'ordre de 3.32 MPa.

La figure 5.5 montre la variation de la contrainte en fonction de l'endommagement ainsi que la variation de l'endommagement en fonction de la déformation. Elle mise en évidence que l'augmentation de l'endommagement provoque la diminution de la contrainte. La rupture de la barre est caractérisée par un endommagement égal à 1 et une contrainte nulle.

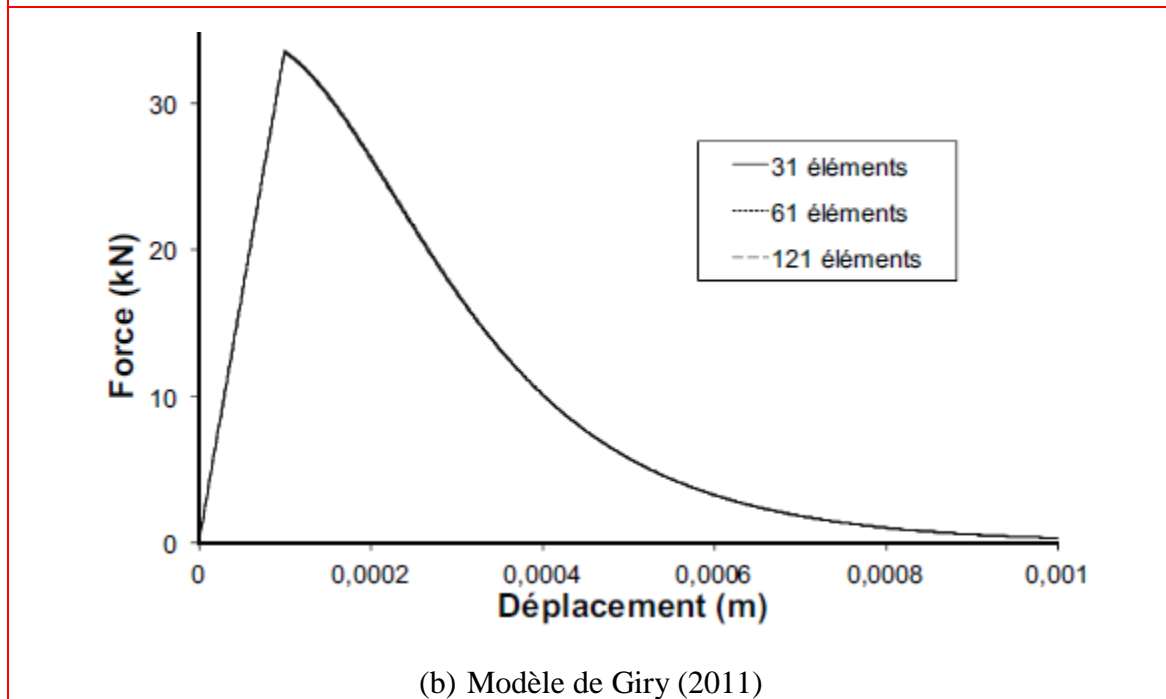
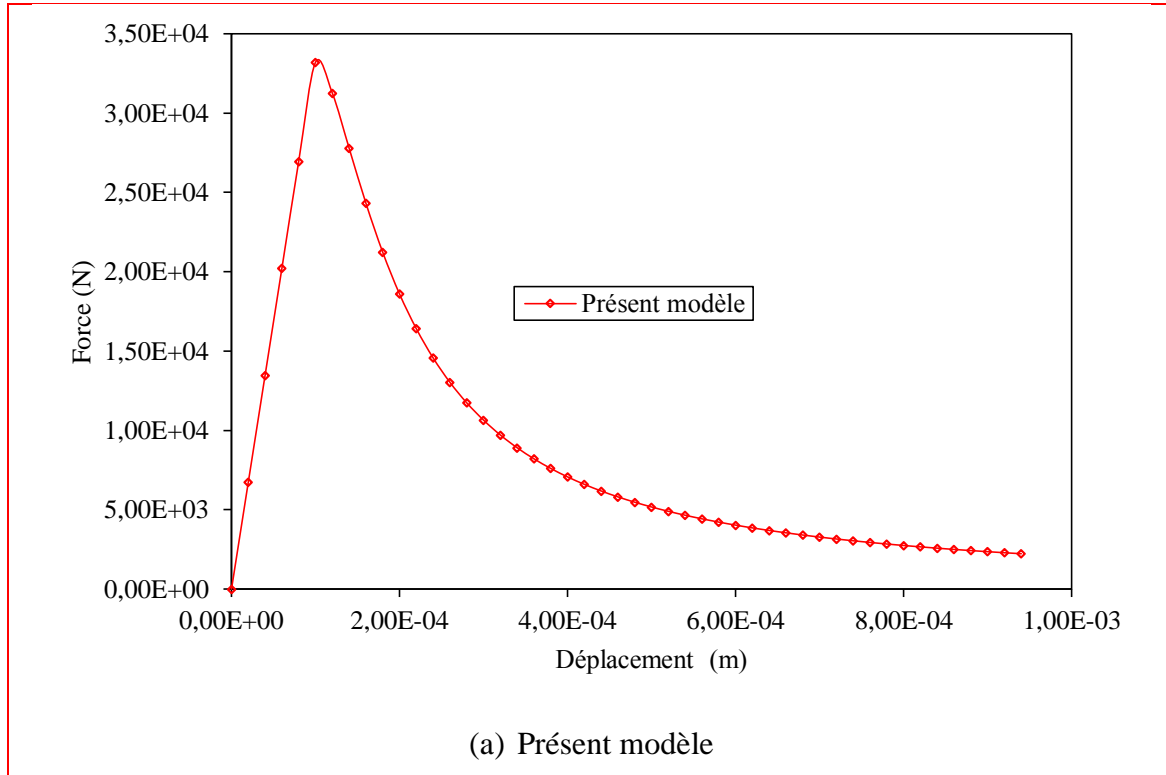


Figure 5. 3 - Barre en traction : Evolution de la force en fonction du déplacement

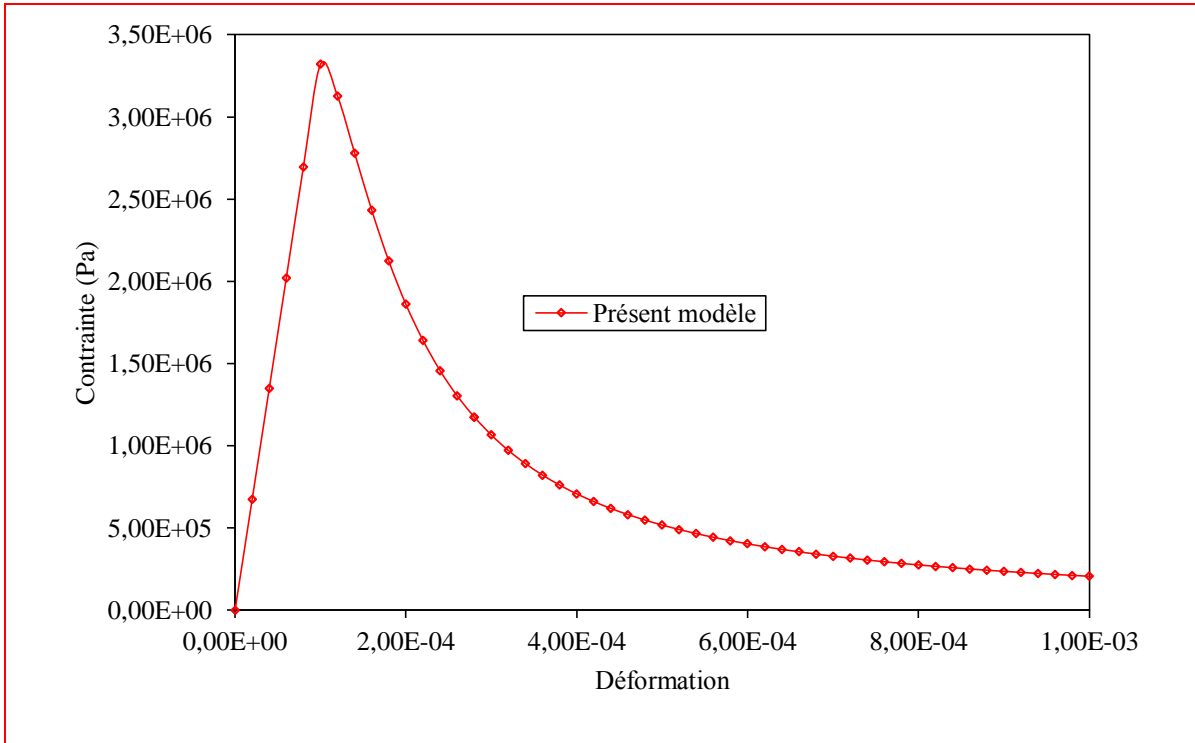
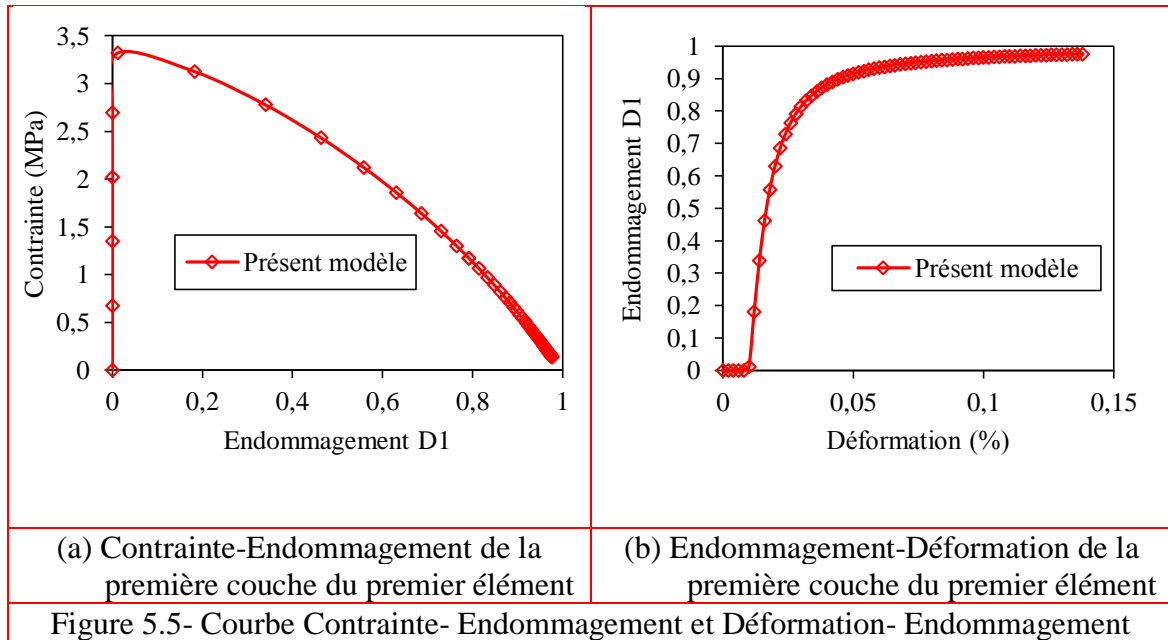
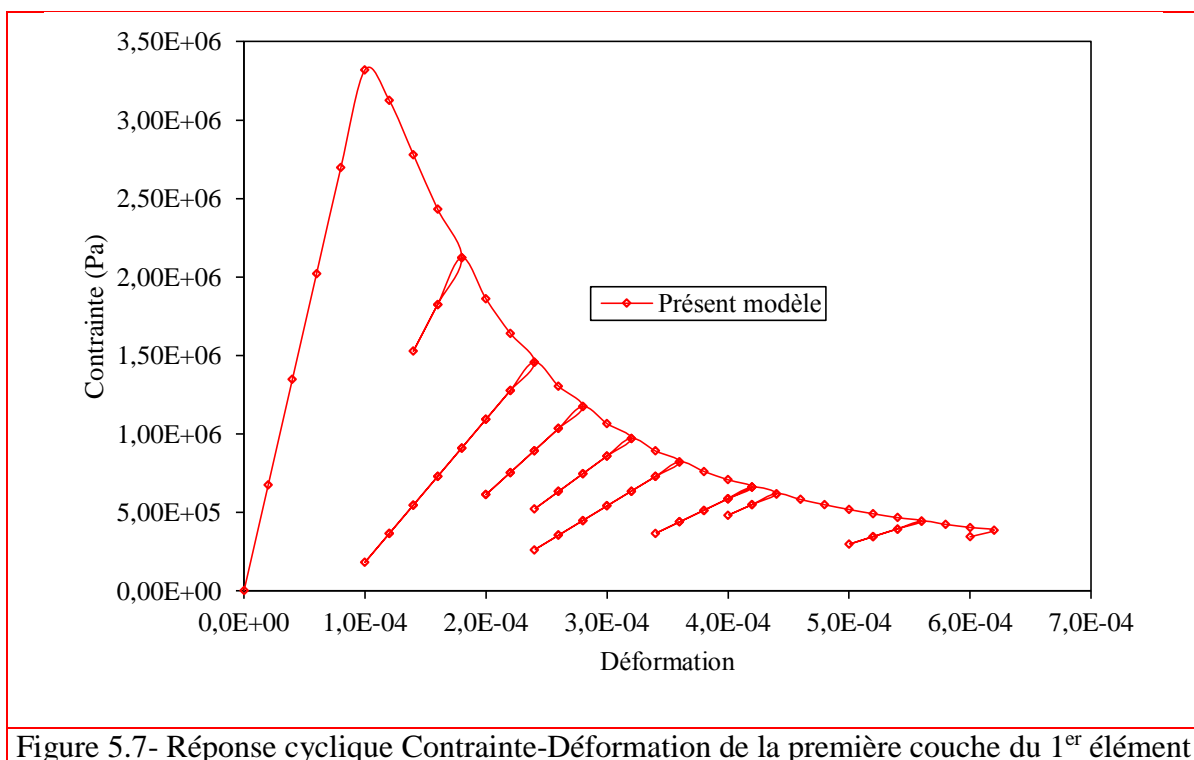
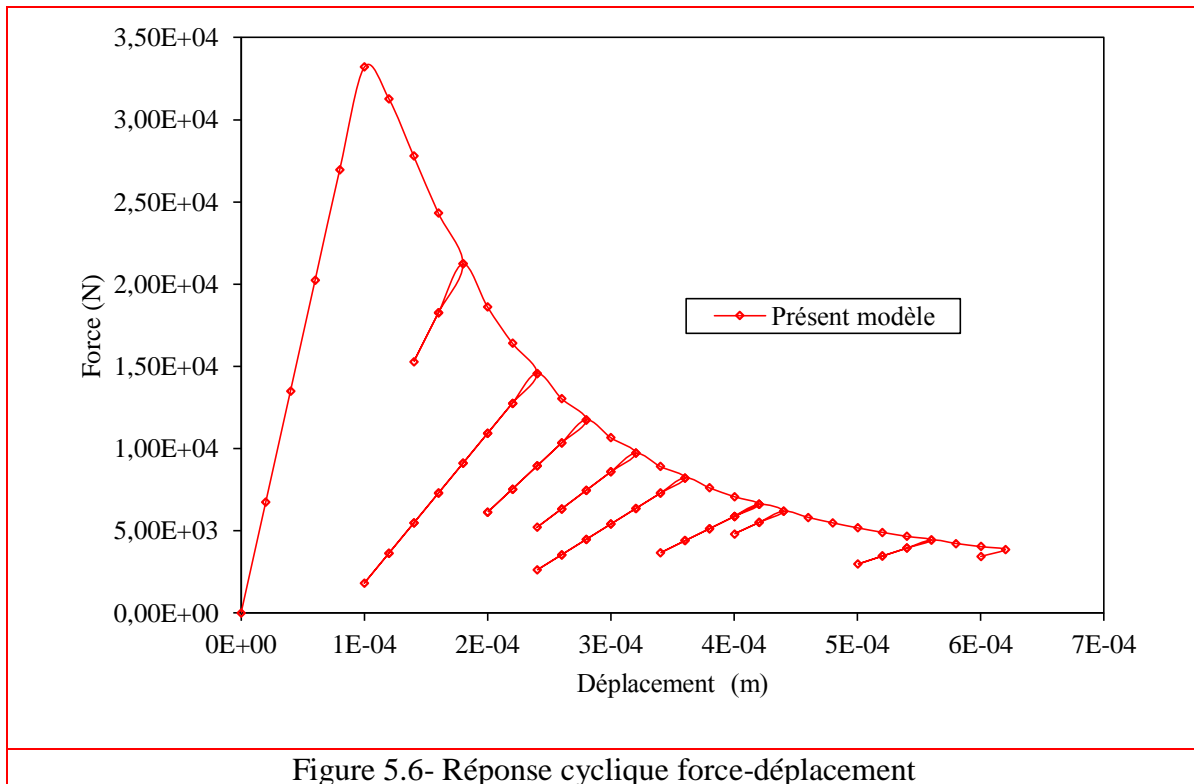


Figure 5.4- Réponse contrainte-déformation de la première couche du premier élément



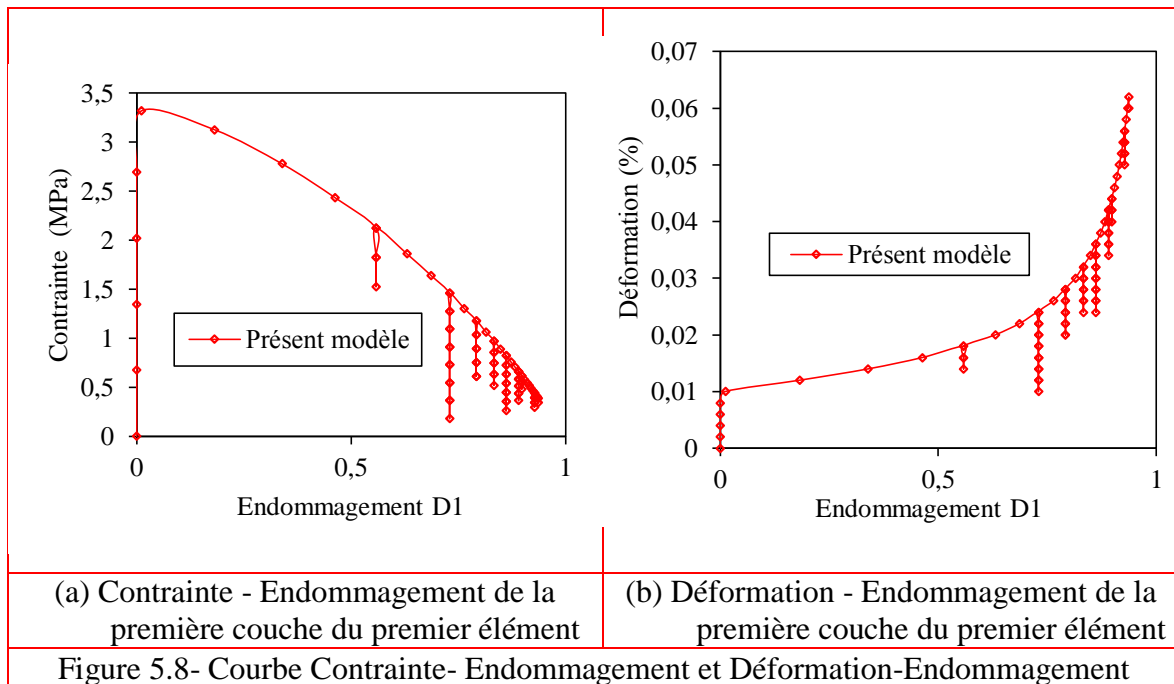
Nous avons également modélisé le comportement de la barre sous chargement cyclique piloté par un déplacement imposé à l'extrémité libre de la barre. Les figures 5.6 et 5.7 montrent que les endommagements en traction du béton, provoquent une diminution des caractéristiques élastique du matériau (rigidité (figure 5.6) et module de Young (figure 5.7)). Les cycles charge-décharge permettent de constater aussi des très faibles boucles d'hystérésis,

ceci s'explique par une faible dissipation de l'énergie puisque le frottement entre les lèvres des fissures lors de la traction simple est modéré, cette constatation a été observée expérimentalement par plusieurs auteurs à savoir Terrien(1980) et Gopalaratnam et al. (1980).



Lorsque le béton est totalement déchargé, une contrainte nulle est associée à une déformation permanente (les déformations irréversibles sont prises en compte). Le déchargement est donc linéaire avec une pente égale au module d'Young «endommagé» $E_d \neq E$.

La figure 5.8 montre que lors de déchargement l'endommagement du béton en traction est évolué parallèlement à l'axe des contraintes (figure 5.8.a) et parallèlement aussi à l'axe des déformations (figure 5.8.b) ceci indique que l'endommagement ne présente pas un retour élastique lors de déchargement. En d'autre terme, quand on décharge le matériau, on referme les fissures mais l'état d'endommagement est toujours conservé en «mémoire».



Pour aller plus loin dans l'étude du comportement des fissures (endommagement), Nous inversons le sens de chargement (c'est-à-dire un chargement alterné traction-compression est considéré). Nous voyons bien que lors de l'annulation de la contrainte de traction (déchargement total après traction), une déformation résiduelle est observée (figure 5.9), par la suite l'inversion de la signe de la contrainte (chargement en compression) provoque la refermeture progressives des fissures causées précédemment par traction. L'effet de refermeture de fissures permet de reproduire la recouvrance de rigidité initiale de la barre (comme il été observée expérimentalement). L'augmentation du chargement de compression

provoque l'ouverture des nouvelles fissures (un nouveau état d'endommagement en compression) engendrés par l'écrasement du béton (figure 5.10).

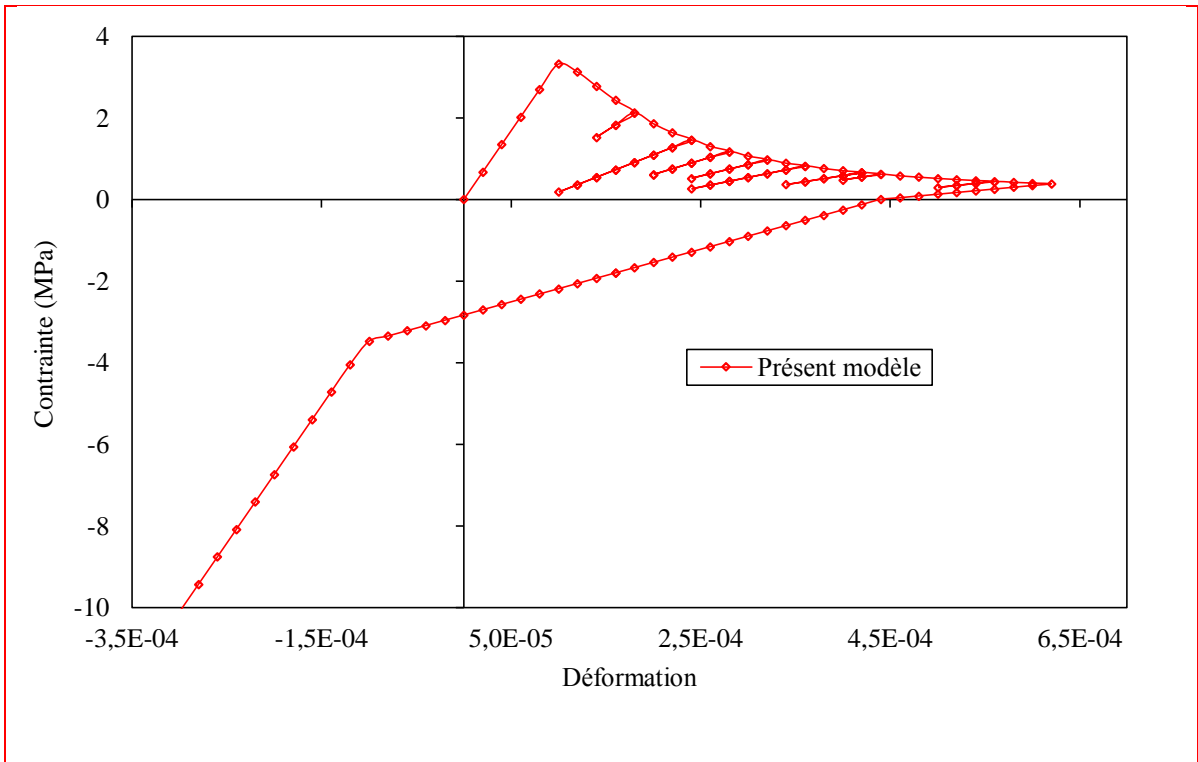


Figure 5.9- Réponse cyclique Contrainte-Déformation de la première couche du premier élément (refermeture de fissures de traction)

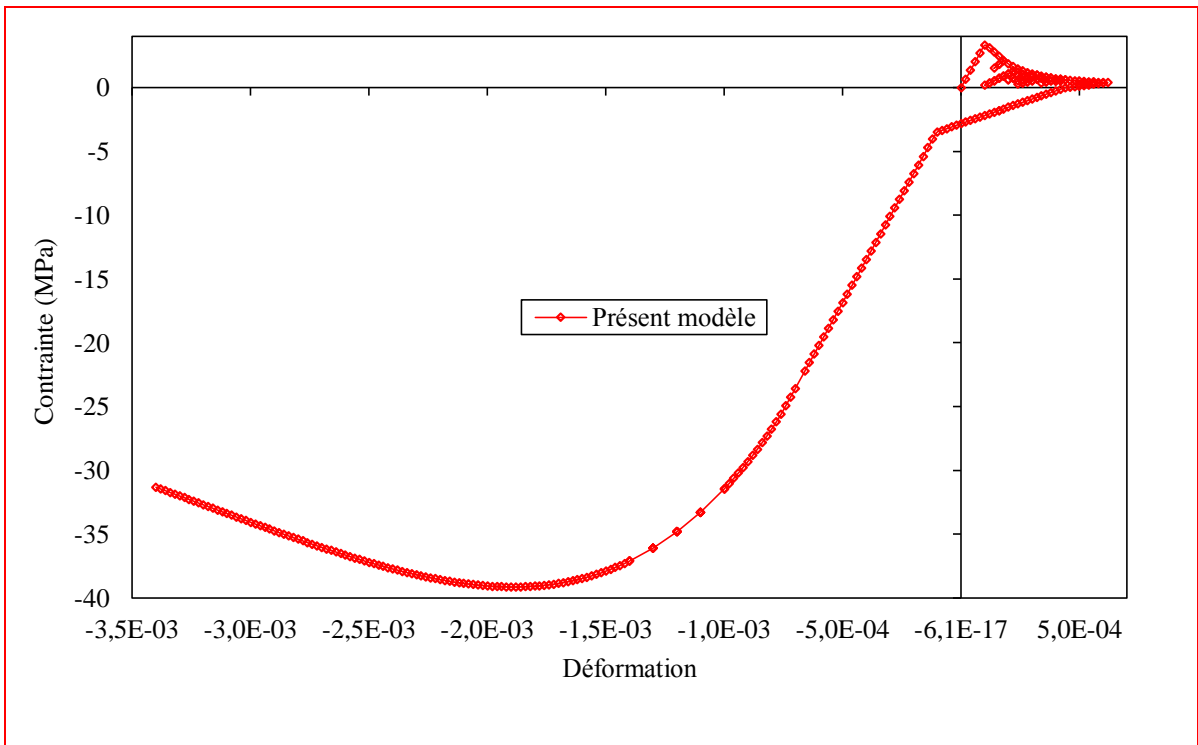


Figure 5.10- Réponse cyclique Contrainte-Déformation de la première couche du premier élément (refermeture de fissures de traction et l'apparition de fissures de compression)

5.2.2. Modélisation par des éléments finis multifibres

Dans cette partie la barre est modélisé par 04 éléments, la section de chaque élément est discrétisée par 04 fibrés (figure 5.11). Les nonlinéarités du béton sont décrites par le modèle de comportement de Mazars, dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau 5.2.

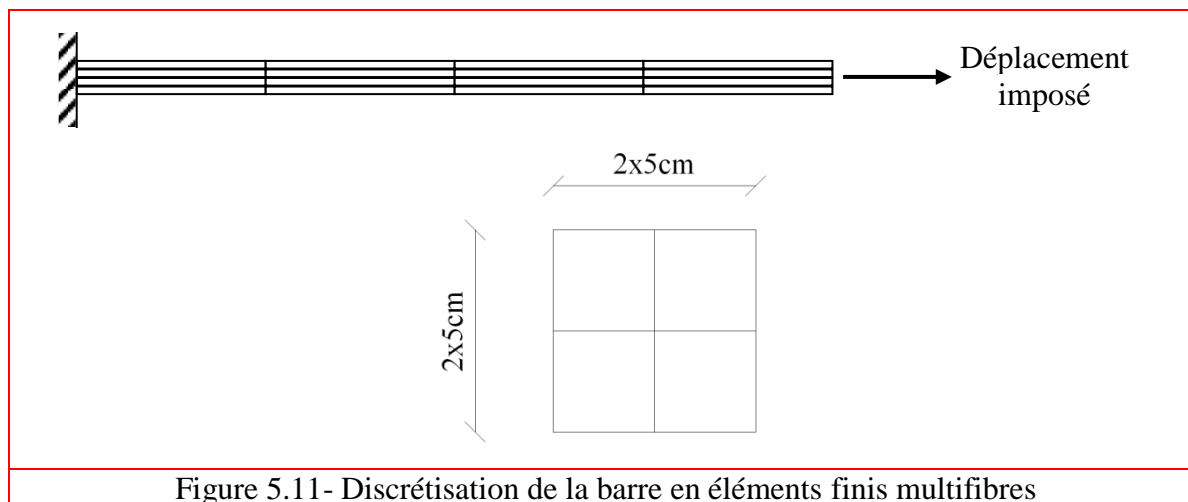


Tableau 5.2 Caractéristiques utilisées pour le modèle de comportement de Mazars

Module de Young	33700 e ⁶ Pa
Masse volumique	2500 kg/m ³
A_c	0.71202987
A_t	1.0
B_c	2.0116378e ³
B_t	1.21892353e ⁴
ε_{D0}	10.0e-5
β	1.06

Le premier résultat que l'on présente concerne la courbe de la réponse force -déplacement, pour le cas d'un chargement monotone de traction simple. La figure 5.12 compare les résultats obtenus par le modèle de Mazars et ceux obtenus par le modèle de La Borderie. Nous constatons que les résultats sont pratiquement les mêmes. Néanmoins une légère différence a été observée lors de la phase non-linéaire (Post-pic).

On simule ensuite l'essai de traction de la barre sous chargement cyclique (charge-décharge). Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 5.13.

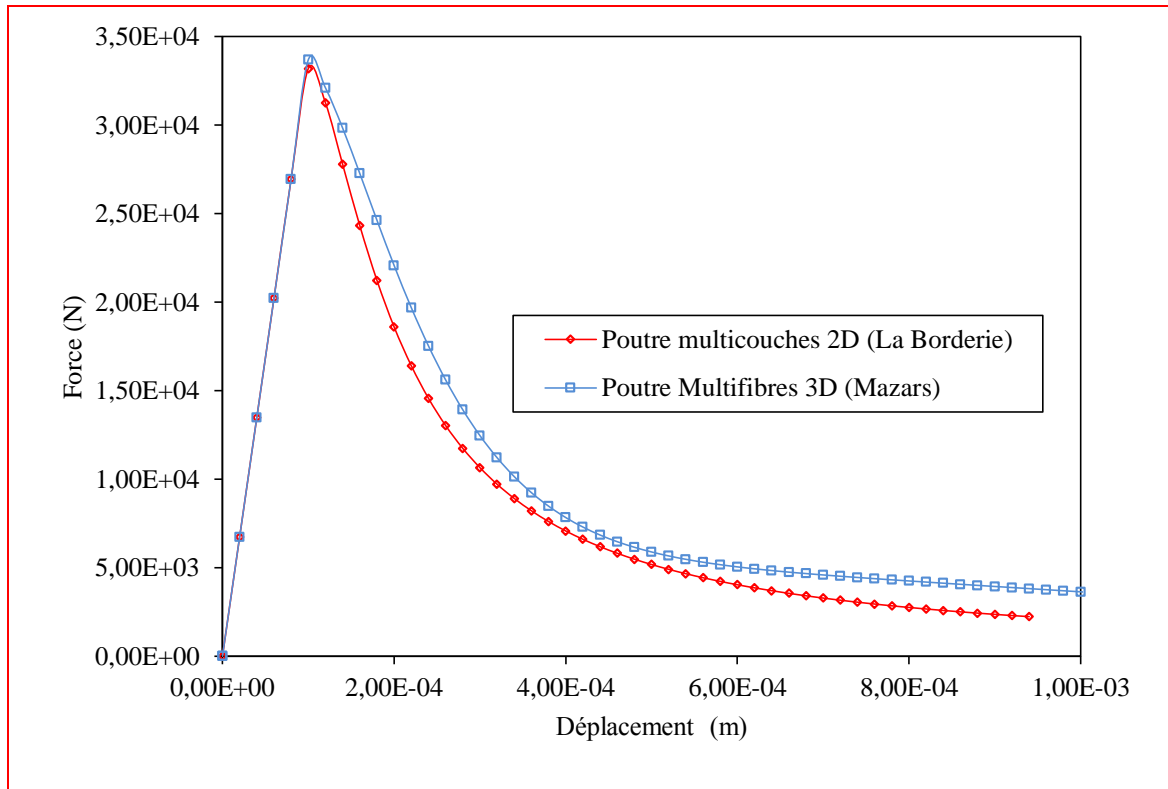


Figure 5. 12 - Barre en traction : Evolution de la force en fonction du déplacement

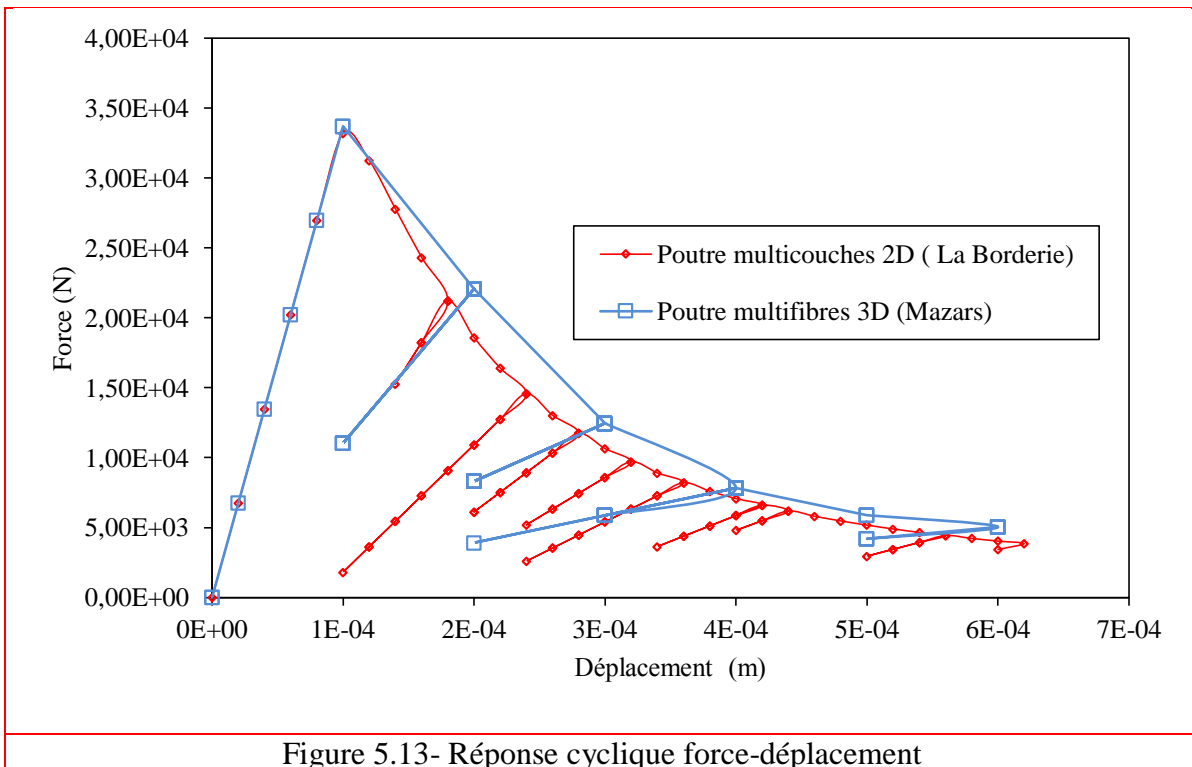
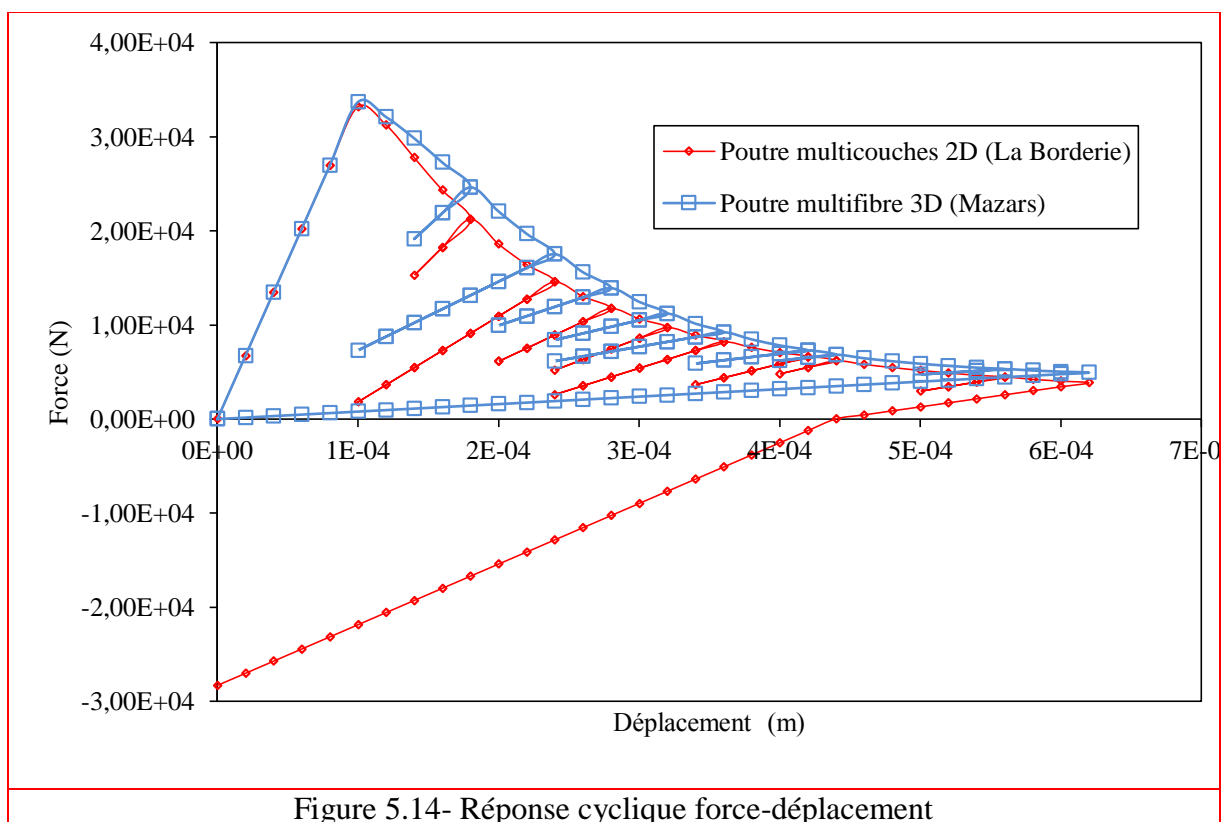


Figure 5.13- Réponse cyclique force-déplacement

La figure 5.13 montre que la réponse élastique décrite par le modèle de Mazars est pratiquement la même que celle élastique décrite par le modèle de La Borderie. En ce qui concerne les phases de déchargement une grande différence entre les deux résultats est

observée. Cette différence est prévisible puisque le modèle de Mazars ne prend pas en compte les déformations permanentes (retour linéaire à l'origine lors du déchargement) et les effets unilatéraux relatifs aux reffermetures des fissures, par contre le modèle de La Borderie prend en considération les non-linéarités liées à la plasticité et à l'endommagement du matériau, ainsi que les effets unilatéraux (ouverture-refermeture des fissures). Les deux modèles caractérisés par une diminution des paramètres élastiques (rigidité et module de Young) causée par l'endommagement du matériau lors des cycles charge-décharge.

La figure 5.14 montre la capacité du modèle de La Borderie à restaurer sa rigidité lors de la refermeture de fissures par contre le modèle de Mazars caractérisé par une rigidité endommagée irrécouvrable.



5.3. Conclusion

Les résultats présentés dans ce chapitre montrent la capacité du modèle de La Borderie à décrire le comportement observé expérimentalement (chapitre 1) sous chargements monotones, cycliques et alternés (traction-compression). Par contre le modèle de Mazars est efficace uniquement pour les chargements monotones.

Dans les applications du chapitre suivant nous utilisons uniquement le modèle de La Borderie avec des poutres multicouches.

CHAPITRE 6

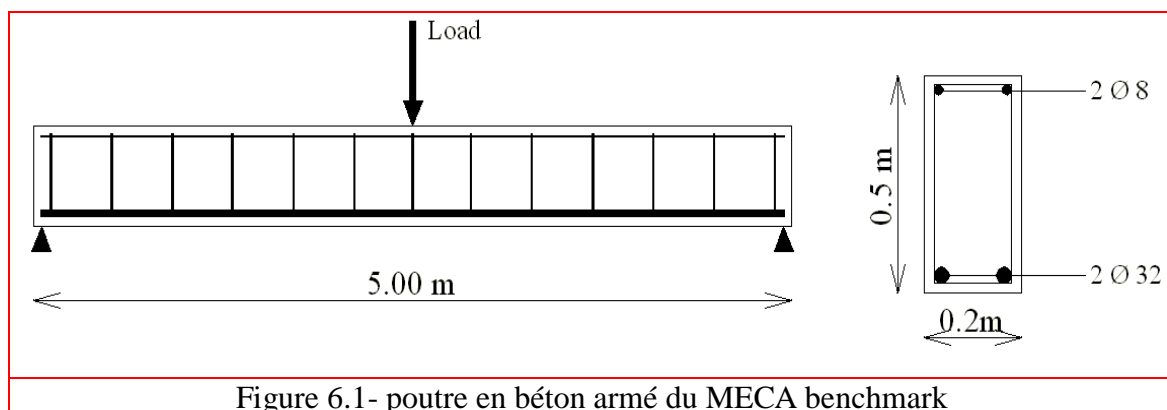
APPLICATIONS AUX STRUCTURES EN BETON ARME

6.1. Introduction

Nous présentons dans ce chapitre plusieurs exemples d'application des structures en béton armé sous chargement statique, cyclique et dynamique (sismique). Le modèle de comportement endommageant de La Borderie est utilisé pour le béton. Les structures sont modélisées par des éléments poutres multicouches.

6.2. Modélisation d'une poutre en béton armé (Benchmark MECA (Ghavamian 2001))

Afin de mettre en évidence nos résultats obtenus avec la modélisation par des éléments multicouches, on utilise le benchmark MECA. Il s'agit d'une poutre de section rectangulaire en béton renforcée par des aciers (figure 6.1), soumise à une flexion 3 points avec chargement statique d'intensité croissante appliqué au milieu de la poutre. Le même exemple a été étudié par Frédéric Ragueneau (2006).



Vu son élancement, la poutre MECA se comporte comme une poutre dominée par la flexion. L'influence du cisaillement est négligeable et une modélisation de type poutre

multicouche de Bernoulli, avec lois de comportement uniaxial pour le béton et l'acier, est suffisante pour cette étude (Kotronis, 2000).

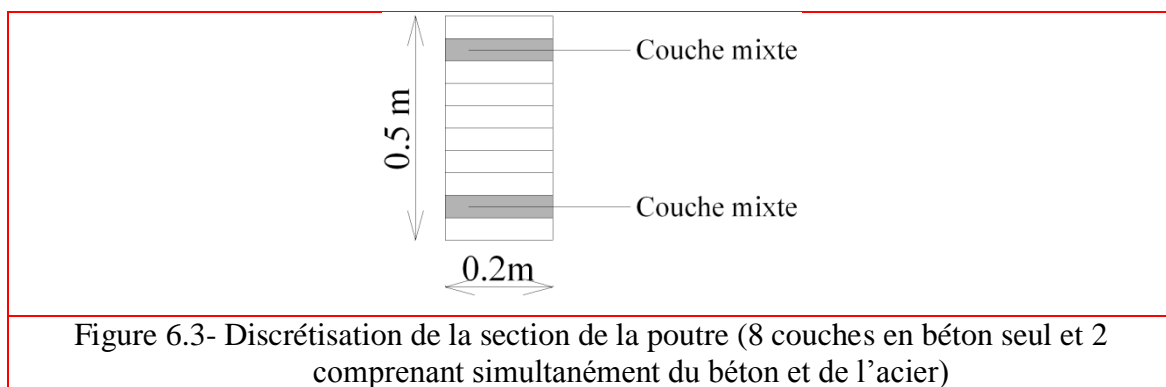
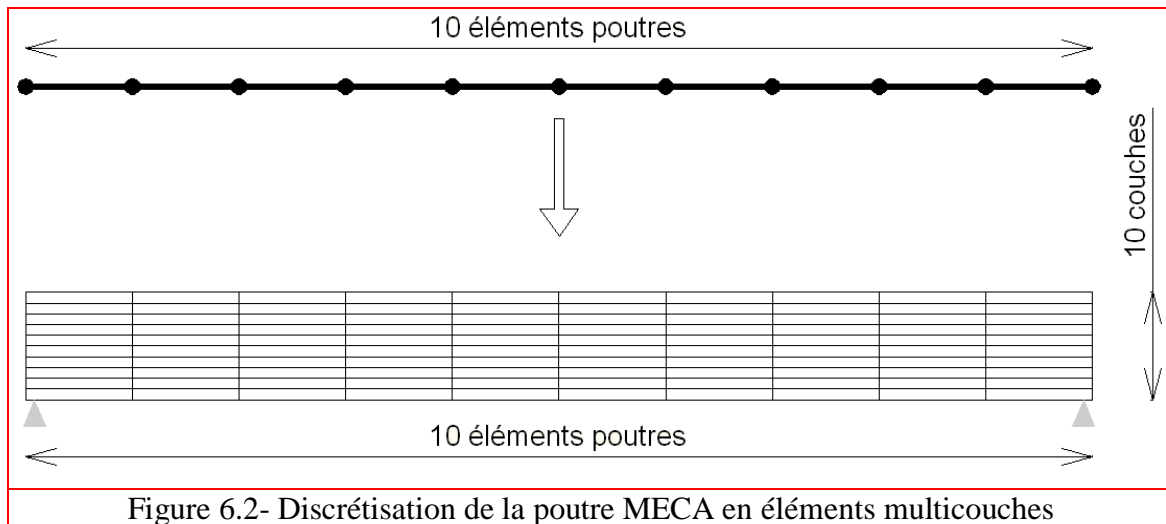
Le comportement du béton suit le modèle d'endommagement de La Borderie (loi de comportement unilatérale). Les caractéristiques mécaniques et physiques considérées pour le béton sont représentées dans le tableau 6.1.

Le comportement de l'acier est supposé élastoplastique à écrouissage cinématique avec un module de Young de 200 000 MPa et une limite d'élasticité égale 400 MPa.

La figure 6.2 représente le modèle numérique 2D de la poutre MECA, effectué par la présente modélisation. La poutre est modélisée par 10 éléments poutres à 2 nœuds avec 2 points d'intégration, la section de chaque élément est discrétisée par 10 couches superposées, dont 8 en béton seul et 2 comprenant simultanément du béton et de l'acier (figure 6.3).

Tableau 6.1 Caractéristiques utilisées pour le modèle de comportement de La Borderie (Moulin, 2012)

Module de Young	37272 e ⁶ Pa
Masse volumique	2400 kg/m ³
Seuil d'endommagement en traction	310 Pa
Seuil d'endommagement en compression	7000 Pa
Paramètre d'endommagement en traction	9e ⁻³ Pa ⁻¹
Paramètre d'endommagement en compression	5.30e-6 Pa ⁻¹
Paramètre pour la traction	1.20
Paramètre pour la compression	2.00
Activation de la déformation permanente en traction	1.00e ⁶ Pa
Activation de la déformation permanente en compression	-40e ⁶ Pa
Contrainte de refermeture des fissures	3.50e ⁶ Pa



La figure 6.4 représente une comparaison de la réponse charge-flèche entre notre simulation numérique et l'expérience extrait des travaux effectués par Ragueneau (2006). Cette figure représente également une comparaison entre notre simulation numérique et le modèle de Ragueneau (2006).

Notre modélisation donne dans l'ensemble des résultats comparables avec ceux de modélisation de Frédéric Ragueneau.2006 d'une part et les résultats expérimentaux d'autre part (figure 6.4). Cependant, les légères différences entre les résultats peuvent être imputables à un effet de maillage de la section de la poutre.

La première partie de la courbe charge-déplacement établi par la présente modélisation, est linéaire jusqu'à une force de 45000 N. cette force est atteinte pour un déplacement de 2.04mm. La raideur de la poutre est alors de $45000/0.00204=22080471.1\text{N/m}$. La fin de la phase linéaire indique l'apparition de la première fissure de flexion. Dans la deuxième partie de la courbe, le béton est dans le domaine non linéaire mais les armatures n'ont pas encore

plastifié. Chaque changement de la pente correspond à une fissure donc à une redistribution des efforts dans la poutre. La plastification des aciers se produit pour un déplacement de 0.01719m, la force correspondante est de 220000 N.

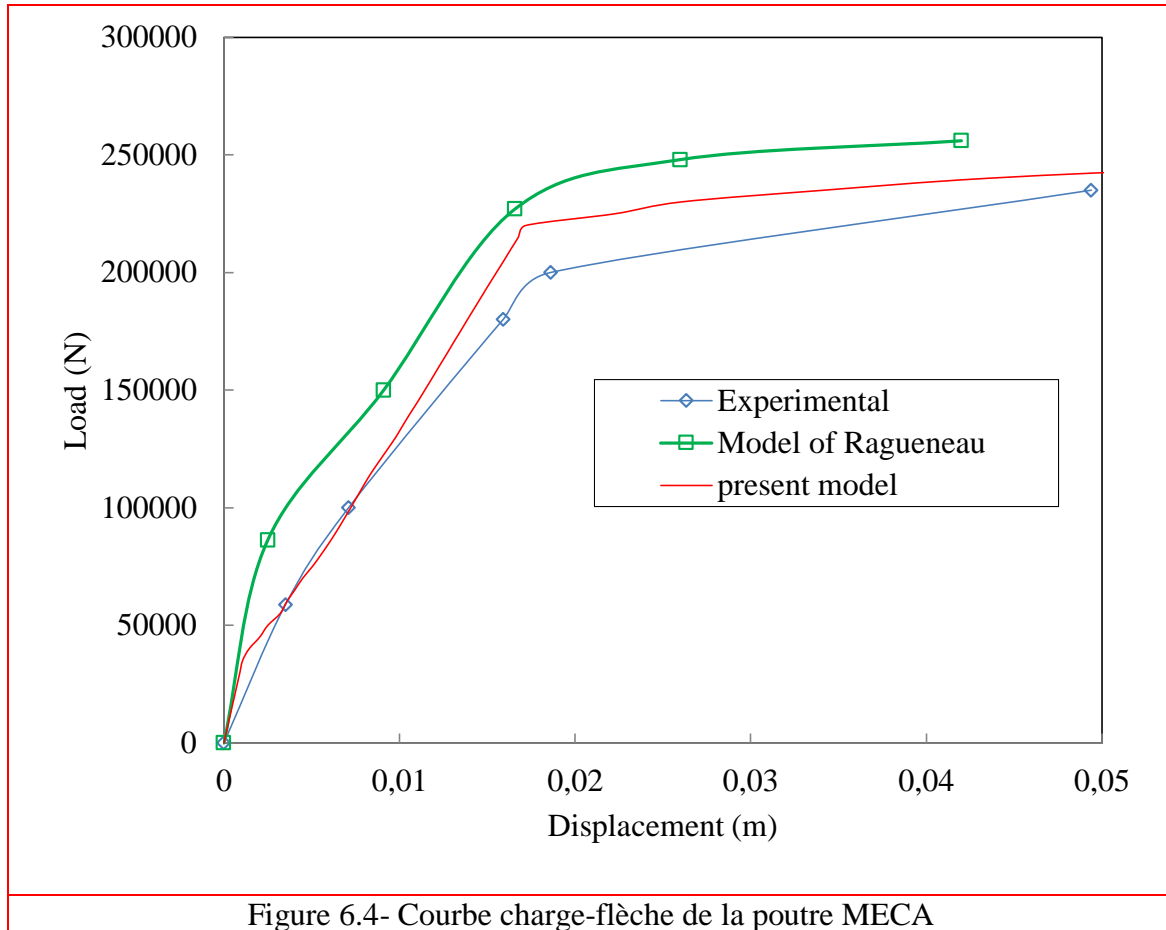


Figure 6.4- Courbe charge-flèche de la poutre MECA

Les figures 6.5, 6.6 et 6.7 représentent les cartes d'endommagement de traction au fur et à mesure du chargement. Le premier état d'endommagement apparaît pour une flèche de 0.001431m (figure 6.5), il est localisé au milieu de la fibre inférieure de la poutre, et se propage tout le long de celle-ci (figure 6.7). Cette répartition de l'endommagement représente correctement la formation du profil de fissuration expérimental (figure 6.8).

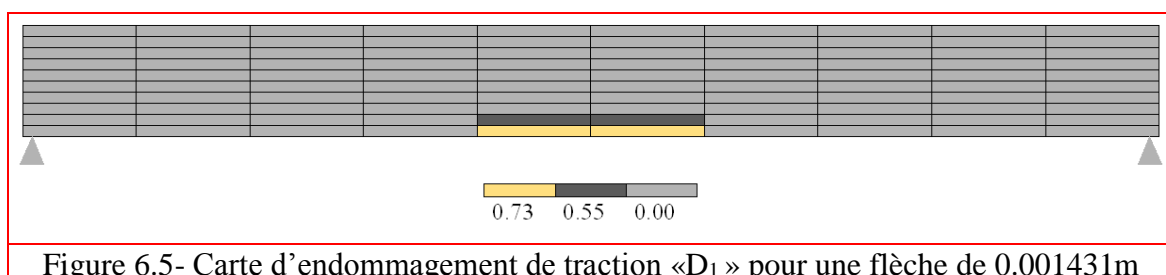


Figure 6.5- Carte d'endommagement de traction «D₁» pour une flèche de 0.001431m

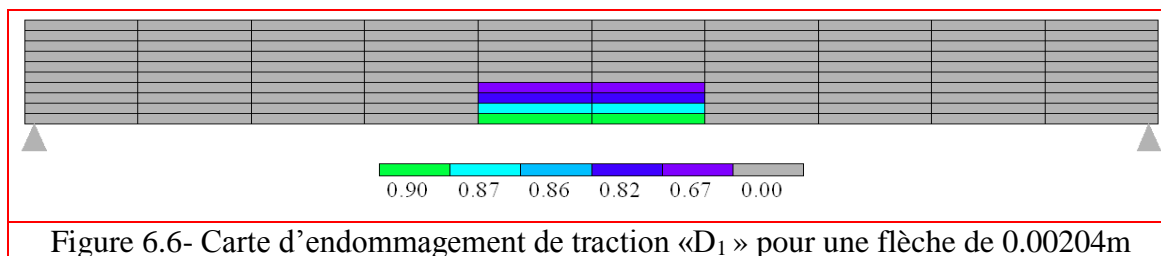
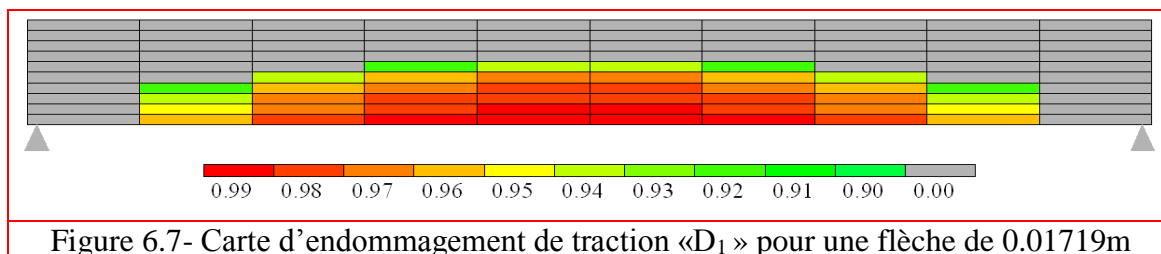
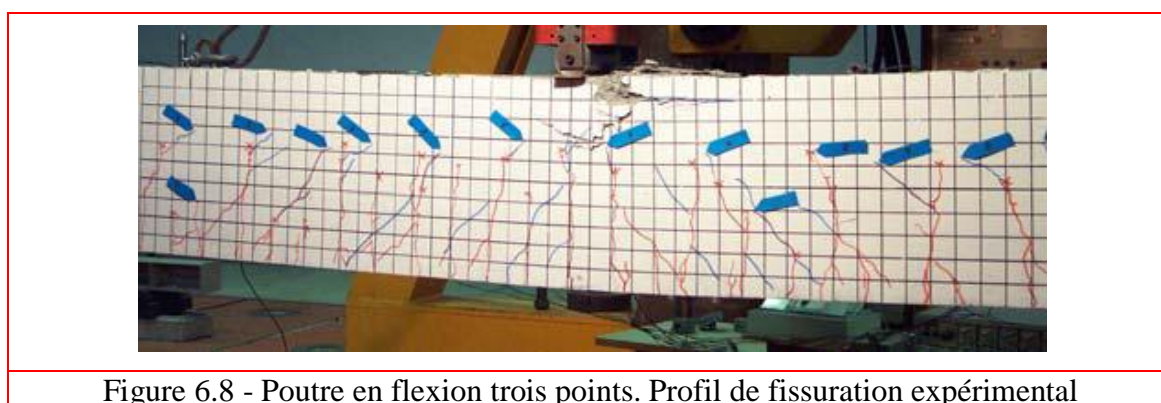
Figure 6.6- Carte d'endommagement de traction «D₁» pour une flèche de 0.00204mFigure 6.7- Carte d'endommagement de traction «D₁» pour une flèche de 0.01719m

Figure 6.8 - Poutre en flexion trois points. Profil de fissuration expérimental

Nous avons également modélisé la même poutre avec un déplacement imposé appliqué à mi-travée (figure 6.9). La poutre est modélisée cette fois-ci par 16 éléments poutres à 2 nœuds et 2 points d'intégration, la section de chaque élément est discrétisée par 20 couches superposées, dont 18 en béton seul et 2 comprenant simultanément du béton et de l'acier (figures 6.10 et 6.11).

Le comportement du béton suit le modèle d'endommagement de La Borderie (loi de comportement unilatérale). Les caractéristiques du béton sont représentées dans le tableau 6.1.

Le comportement de l'acier est élastoplastique avec écrouissage cinématique, dont le module de Young est de 200 000 MPa et une limite d'élasticité égale 400 MPa.

Une comparaison de notre simulation avec celle de Moulin (2012) réalisée par des éléments poutres multifibres (code-Aster), a été établie.

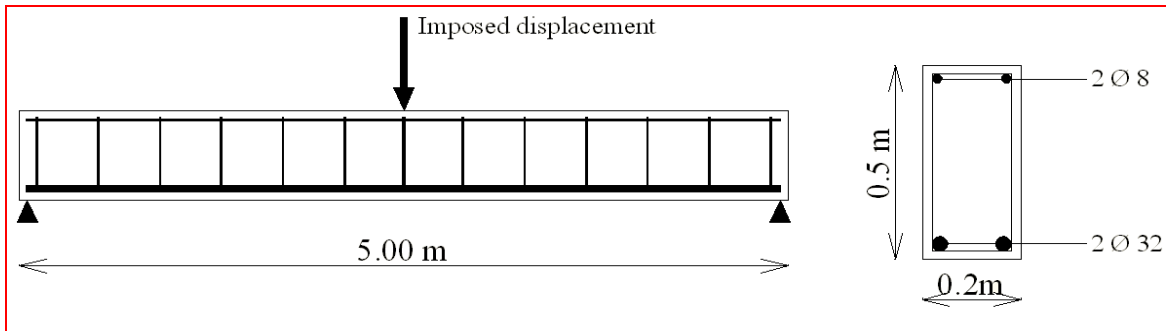


Figure 6.9- poutre en béton armé du MECA benchmark

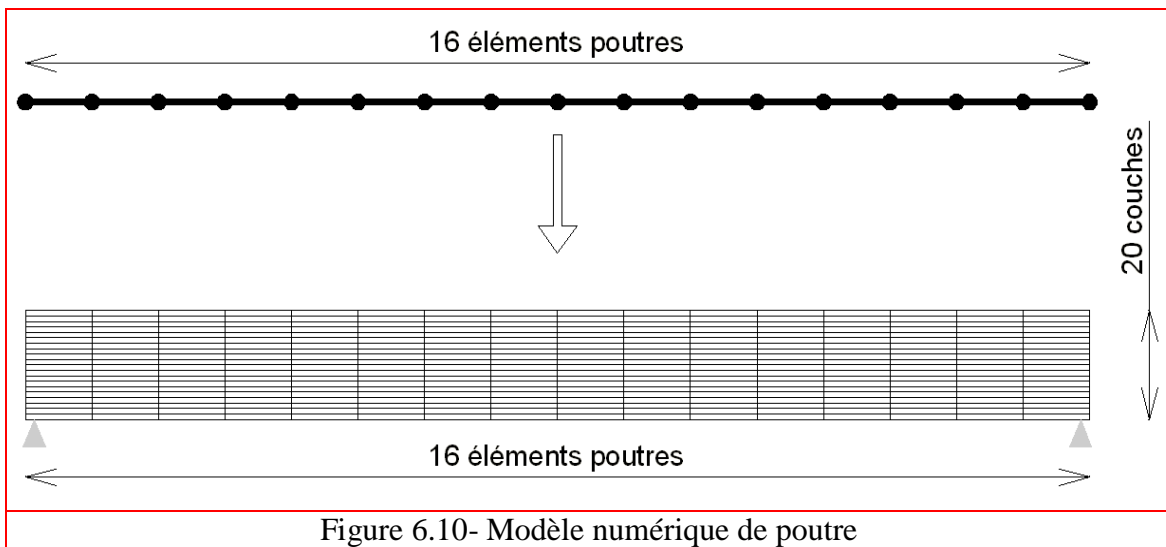


Figure 6.10- Modèle numérique de poutre

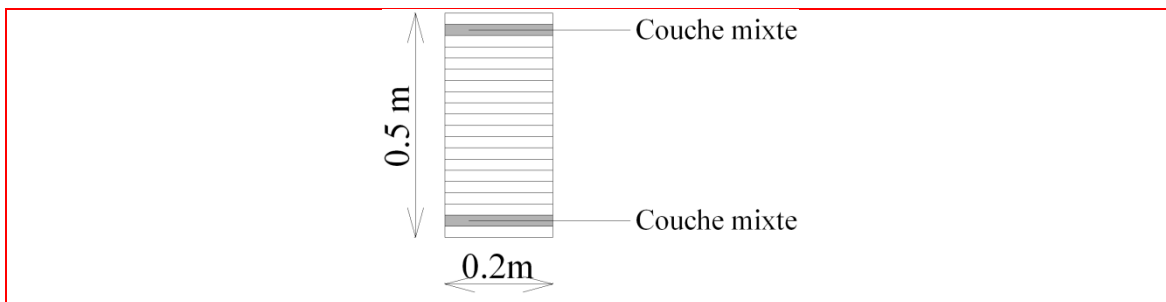


Figure 6.11- Discrétisation de la section de la poutre (18 couches en béton seul et 2 comprenant simultanément du béton et de l'acier)

L'évolution de la réaction d'appui en fonction de la flèche à mi-travée est présentée sur la figure 6.12. En comparaison avec les résultats de Moulin (2012), on remarque une très bonne cohérence entre les deux résultats.

La carte d'endommagement de traction à la fin du chargement est représentée sur la figure 6.13. L'indicateur d'endommagement varie entre 0 et 1. En filtrant ces valeur entre 0.9

et 1, nous supprimons les microfissures afin d'obtenir une image des macro-fissures. La poutre est principalement endommagée en partie inférieure.

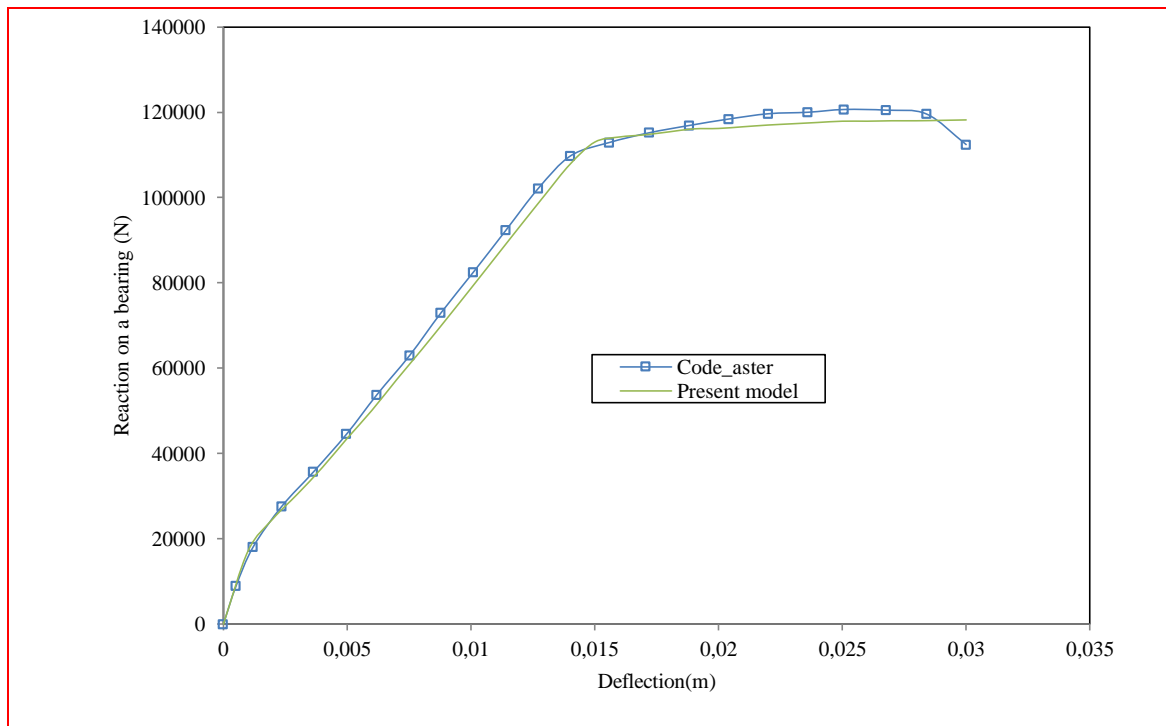


Figure 6.12- Réaction sur un appui, en fonction de la flèche à mi-travée

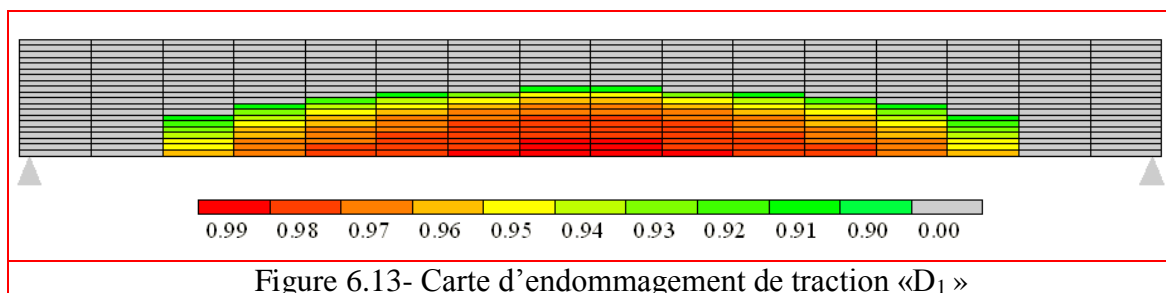


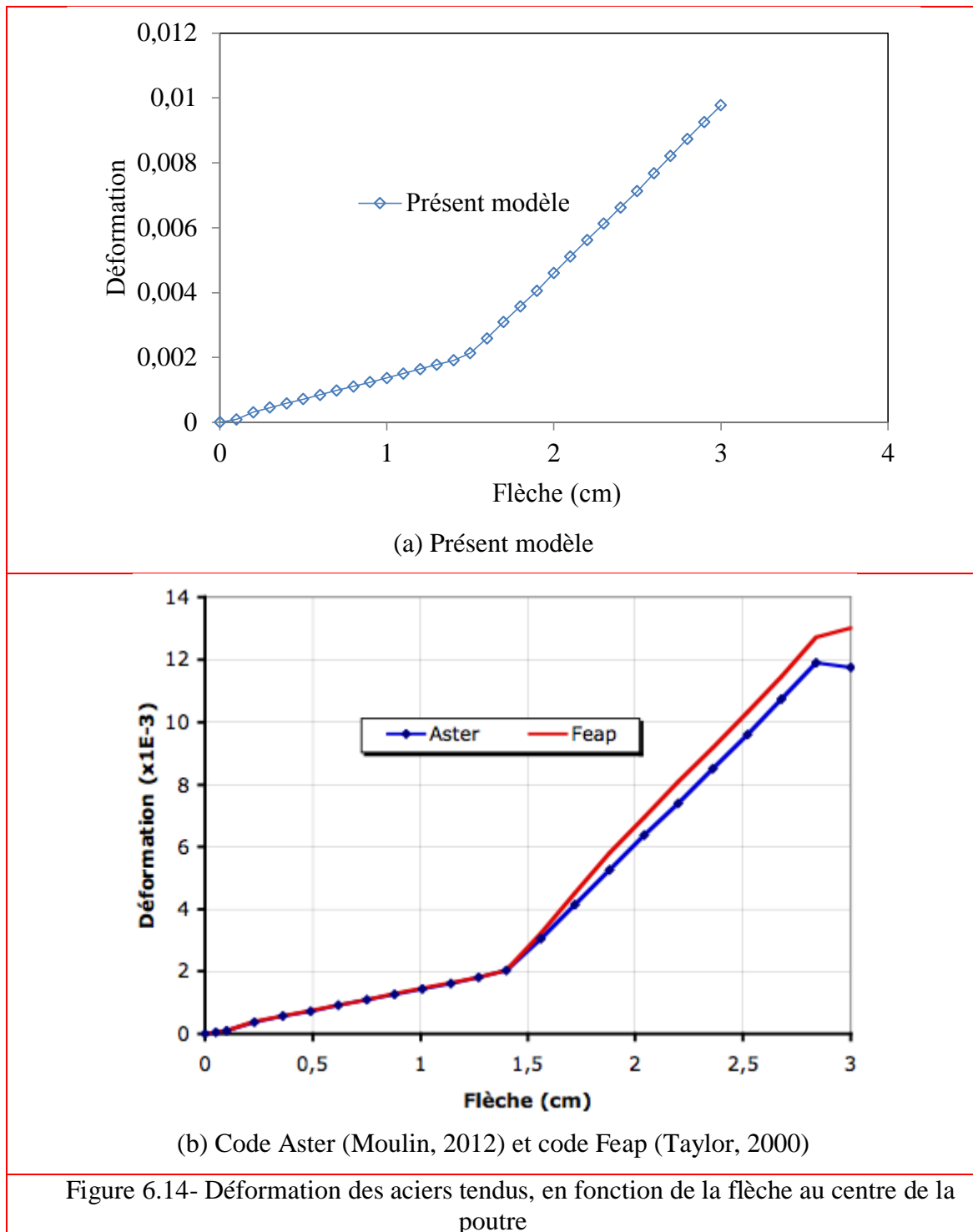
Figure 6.13- Carte d'endommagement de traction «D₁»

Les figures suivantes montrent que, durant le chargement, différents mécanismes sont activés simultanément tels que : la fissuration du béton en zone tendue, l'écrasement du béton en zone comprimée et la plastification des aciers tendus.

Les résultats locaux (contraintes, déformations) sont ceux du premier point de Gauss du 8ème élément (le plus proche du milieu de la poutre).

La figure 6.14 compare la variation de la déformation des aciers tendus en fonction de la flèche, obtenus par le modèle du présent travail et ceux de Moulin (2012). Nous voyons que les résultats sont très proches, néanmoins une légère différence est constatée au delà de la plastification des aciers tendus où la flèche atteint une valeur de 1,4cm pour laquelle la

déformation élastique maximale des aciers tendus est de l'ordre de 0.2% et la réaction élastique d'appui est de l'ordre de 107800 kN. A cette phase l'état béton tendus est fortement endommagé (le coefficient de l'endommagement en traction au milieu de poutre des 11 couches inférieurs D1 est supérieur de 95%, l'endommagement de deuxième couche (couche mixte) est 98%).



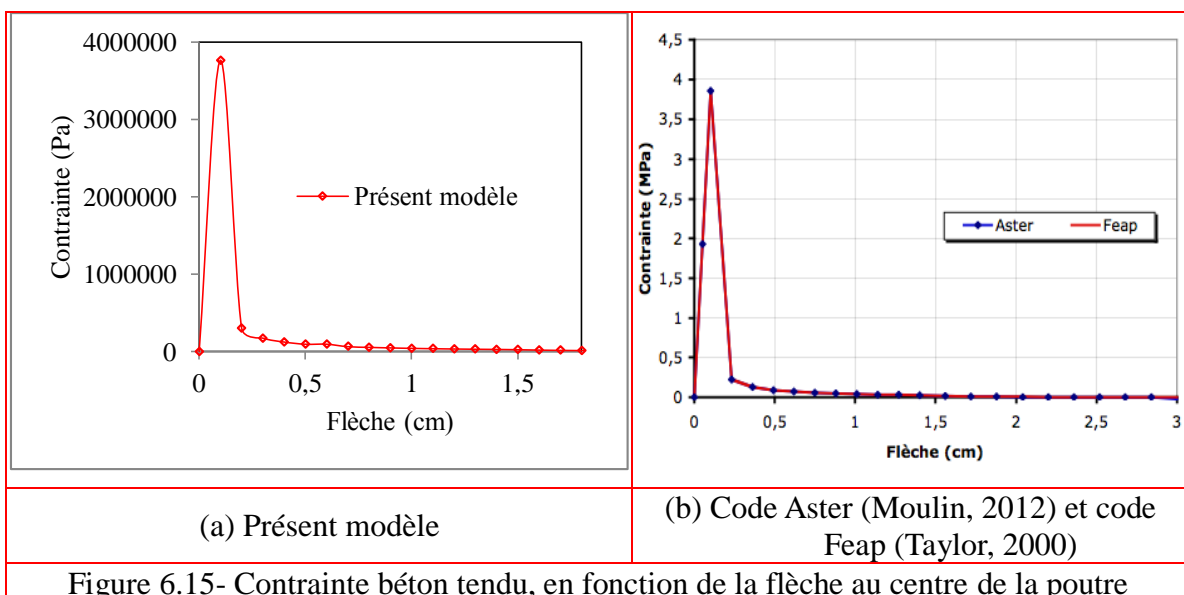
Les figures 6.15 et 6.16 soulignent la capacité du modèle à simuler la réponse du béton tendu à mi-travée de la poutre (la couche la plus tendu est la première couche). Nous observons sur la figure 6.16, les différentes phases du comportement du béton dans la zone tendue :

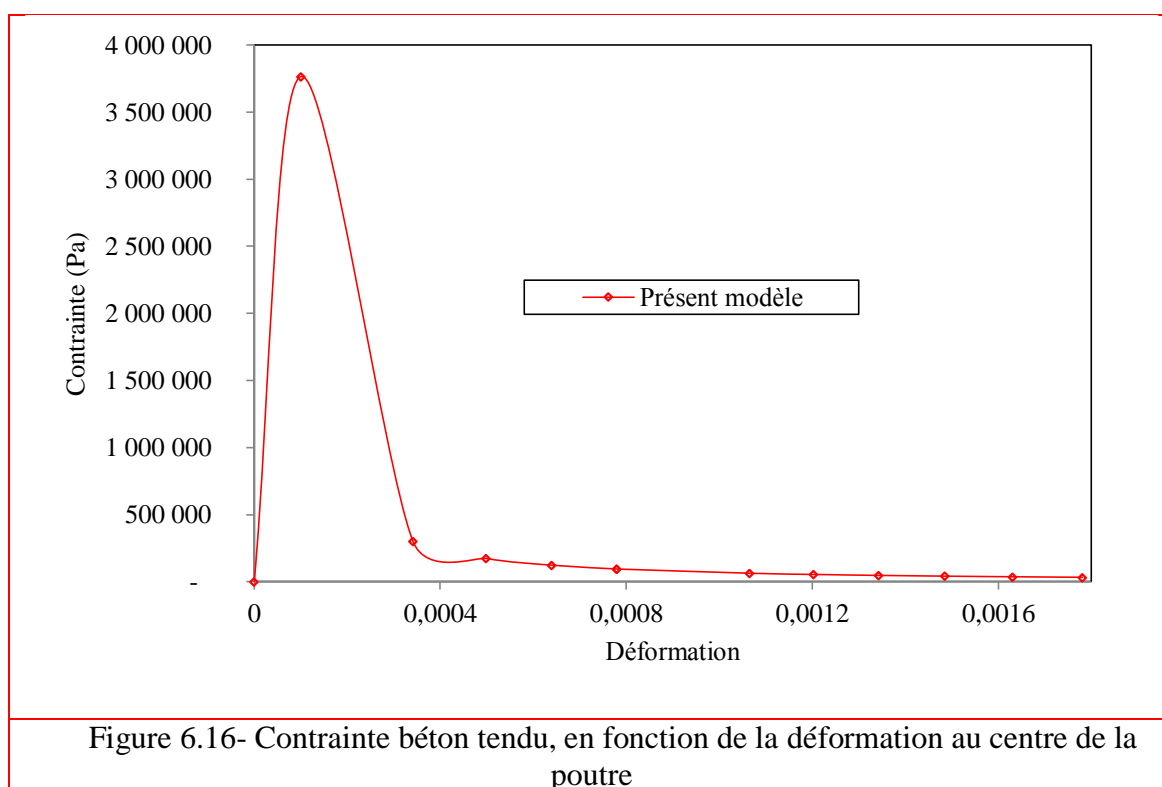
- Comportement linéaire (le module d'élasticité (E) reste constant).
- Comportement non linéaire pré-pic dans laquelle le module d'élasticité diminue légèrement et des déformations résiduelles apparaissent à cause de la propagation des microfissures engendre un endommagement diffus du béton.
- Accumulation de microfissures (pic de la courbe). Ces microfissures tendent vers des fissures concentrées. La localisation de la déformation provoquant un endommagement important.

Cette phase caractérise la résistance de traction du béton, le présent modèle donne une valeur de 3.665 MPa (pour une flèche de 0.1 cm et une charge maximale de l'ordre de 34.38kN), elle est de l'ordre de 11.19% de la résistance de compression du béton.

- Déformation avec comportement adoucissant. Des zones de localisation de la déformation apparaissent clairement avec plusieurs microfissures concentrées. Le module d'élasticité diminue fortement. Des macrofissures sont créées par l'accumulation des microfissures.
- Augmentation très rapide de la déformation d'adoucissement, tandis que la charge diminue lentement.

Ces phases ont été observées expérimentalement par Bernard (2000).





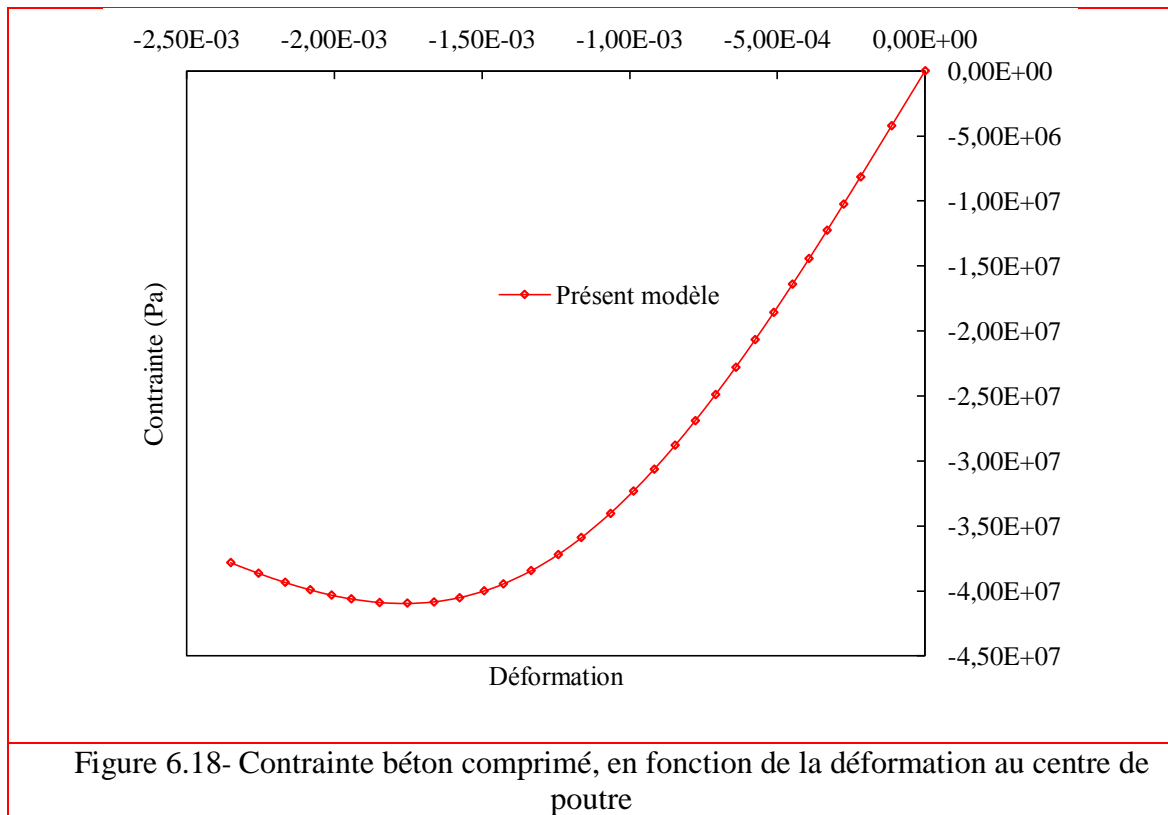
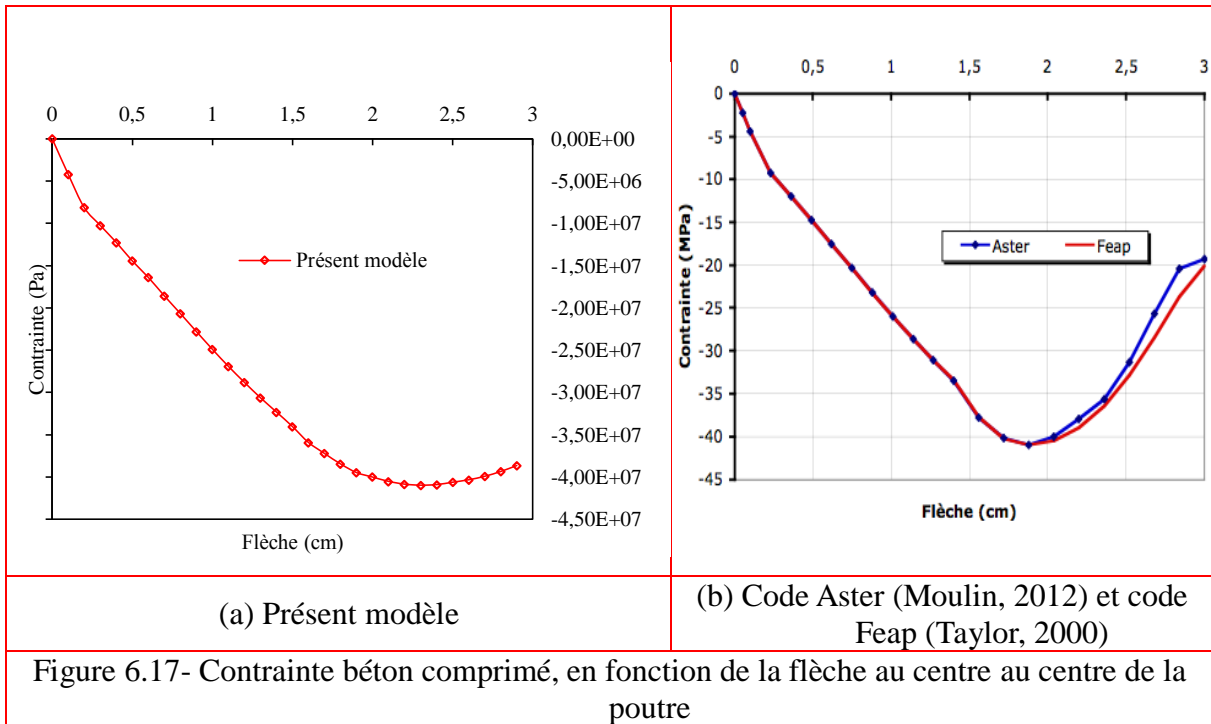
Le comportement du béton comprimé (la couche la plus comprimée est la dixième couche) est présenté dans les figures 6.17 et 6.18 sur lesquelles nous constatons un bon accord entre les résultats du présent modèle et ceux de Moulin (2012). Nous voyons aussi que les quatre mécanismes du comportement du béton comprimé sont bien présentés par le présent modèle à savoir :

Le comportement élastique linéaire au début de chargement ;

Le comportement non linéaire causé par la propagation des microfissures engendrées par écrasement du béton (endommagement par compression), où on constate une diminution de la raideur élastique (changement de la pente) et l'apparition des déformations permanente (l'irréversibilité) ;

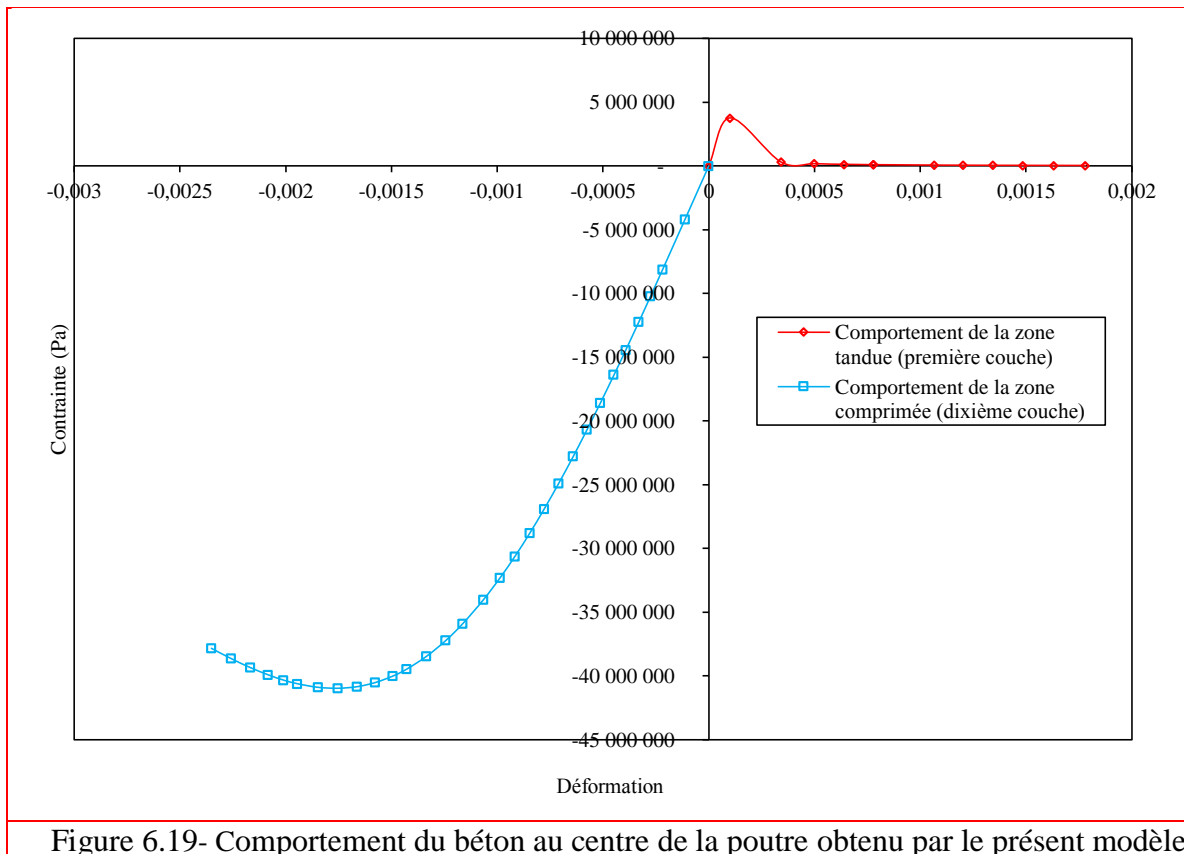
Le comportement adoucissant (pic de la courbe). Le pic de la courbe caractérise la résistance de compression du béton (figure 6.18) et la charge maximale. Le présent modèle donne une résistance en compression de 41MPa et une charge maximale de $117,3\text{KN}$ lorsque la flèche atteint une valeur de $2,3\text{cm}$. Ces valeurs sont pratiquement les mêmes obtenues par Moulin (2012).

Le comportement adoucissant suivi par la rupture progressive (la rupture est progressive à cause de la présence des armatures).



La figure 6.19 montre la réponse locale du béton tendu et le béton comprimé de la section de la poutre à mi-travée de la poutre, elle regroupe les différents mécanismes activés durant le chargement statique monotone. Elle permet de déterminer le seuil à partir duquel le dommage

(c'est à dire des déformations permanentes) apparaît dans la partie tendue ou dans la partie comprimée.



6.3. Flambement d'un poteau

Cet exemple a pour but de faire une modélisation d'un poteau rectangulaire en béton armé sollicité par un chargement axial d'excentricité $e=1,5cm$ (figure 6.20). Le même poteau a été étudié :

Expérimentalement par Fouré (1978).

Numériquement par Franz (1994) avec une discrétisation en éléments multifibres (loi de comportement élastoplastique de Willam-Warnke couplé).

Dans le présent travail, Nous modélisons le poteau par 11 éléments multicouches à 2 nœuds et 2 points d'intégration, la section de chaque élément est discrétisée par 06 couches superposées, dont 4 en béton seul et 2 en béton plus acier (figure 6.21).

La charge axiale excentrée est modélisée par une force axiale centrée F et un moment fléchissant $M=F.e$.

Le poids propre du poteau est négligé.

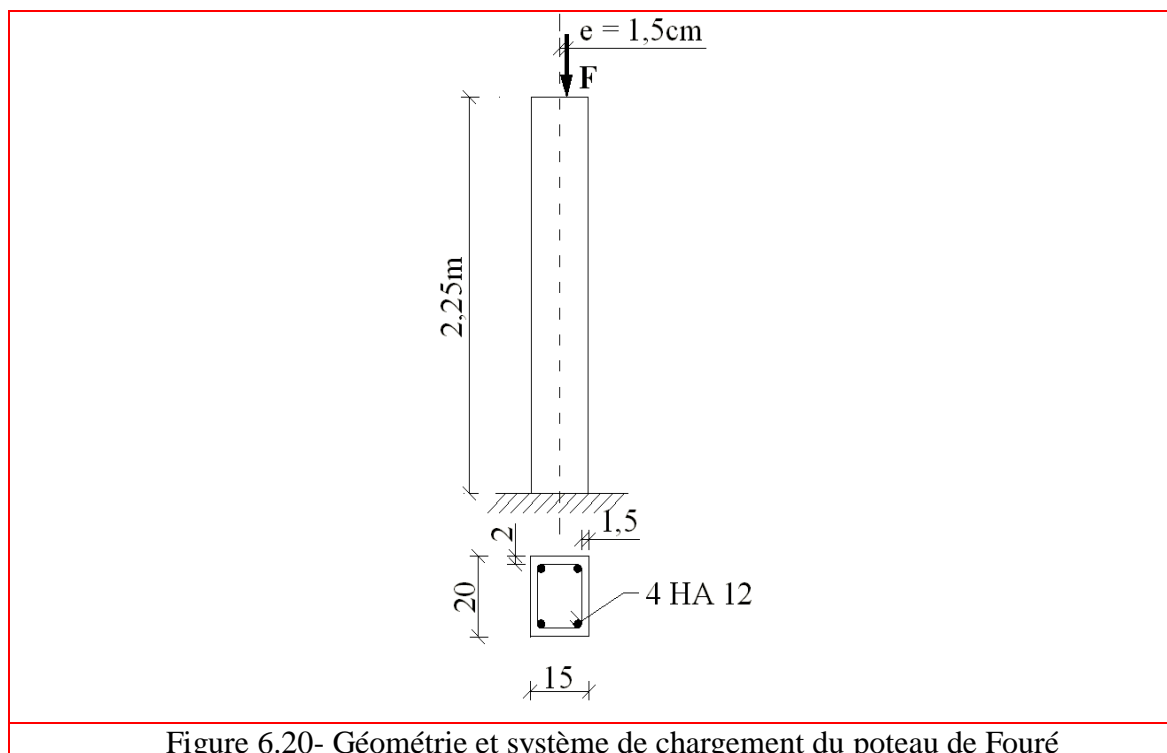
Le comportement du béton obéi au modèle d'endommagement de La Borderie (loi de comportement unilatérale). Les caractéristiques considérées pour le béton sont celles du tableau 6.2.

Le comportement de l'acier est élastoplastique à écrouissage cinématique. Les propriétés des aciers utilisés sont :

Module de Young : 200 000 MPa.

Limite d'élasticité : 400 MPa.

La figure 6.22 présente la variation de charge en fonction du déplacement horizontal de la tête du poteau. Cette figure donne également une comparaison entre nos résultats, les résultats expérimentaux de Fouré (1978) et ceux obtenus par Franz (1994). L'accord entre ces modèles est excellent.



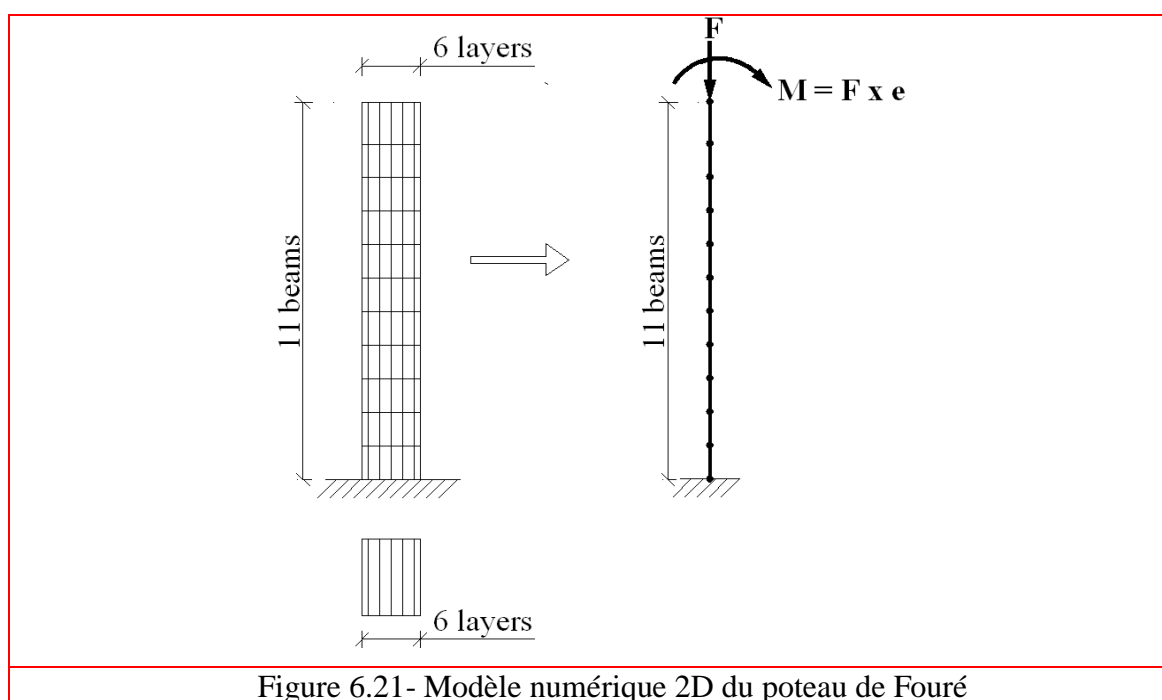
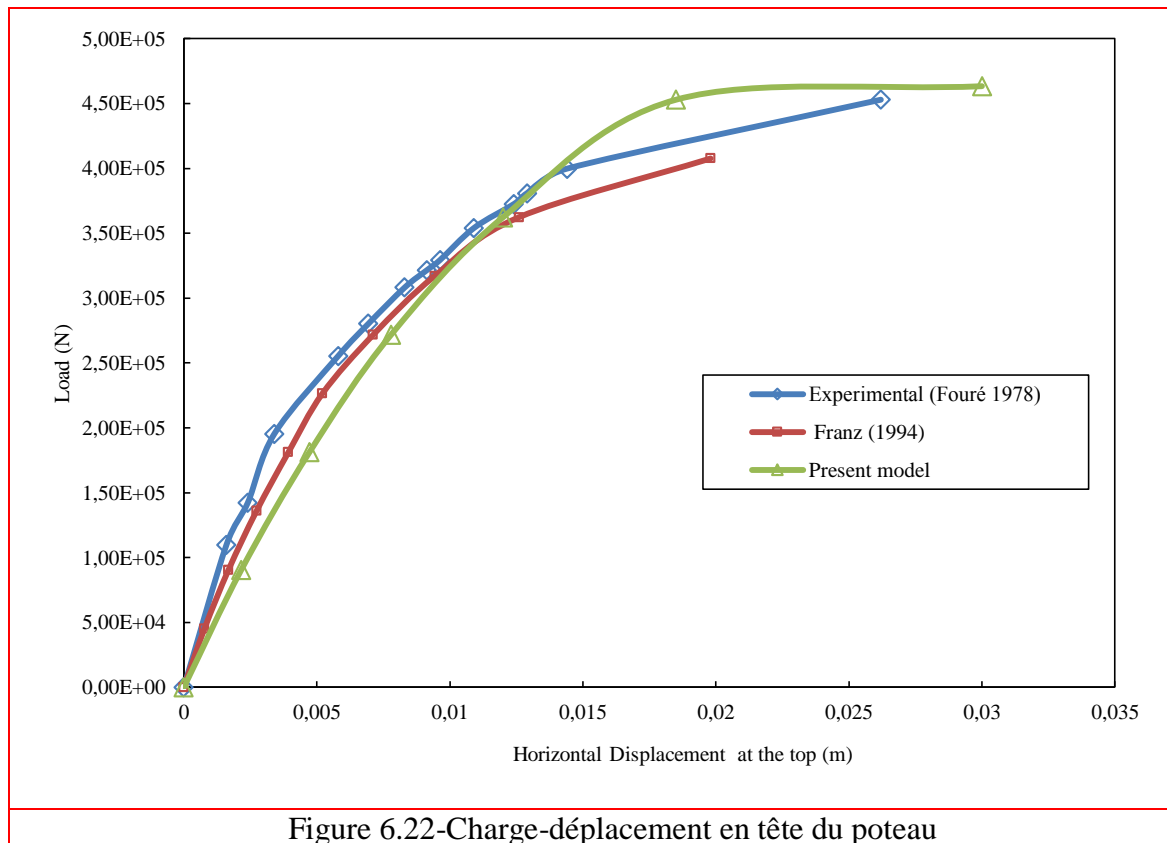


Figure 6.21- Modèle numérique 2D du poteau de Fouré

Tableau 6.2 Caractéristiques utilisées pour le modèle de comportement de La Borderie

Module de Young	$30000e^6 \text{ Pa}$
Masse volumique	2500 kg/m^3
Seuil d'endommagement en traction	220 Pa
Seuil d'endommagement en compression	9000 Pa
Paramètre d'endommagement en traction	$9e^{-3} \text{ Pa}^{-1}$
Paramètre d'endommagement en compression	$5.30e^{-6} \text{ Pa}^{-1}$
Paramètre pour la traction	1.20
Paramètre pour la compression	1.40
Activation de la déformation permanente en traction	$1.00e^6 \text{ Pa}$
Activation de la déformation permanente en compression	$-40e^6 \text{ Pa}$
Contrainte de refermeture des fissures	$1.30e^6 \text{ Pa}$



6.4. Modélisation de la réponse cyclique d'une poutre en béton armé

Cet exemple est utilisé pour valider le comportement en flexion cyclique d'une poutre en béton armé (figure 6.23). Le chargement est composé d'un cycle d'amplitude $1mm$ suivi d'un cycle d'amplitude $2mm$ (Figure 6.25).

Les résultats expérimentaux sont issus de la thèse de La Borderie (1991), la procédure expérimentale est présentée dans la figure 6.24.

Dans ce travail, nous avons modélisé la structure par 20 éléments poutres à 2 nœuds et 2 points d'intégration, la section de chaque élément est discrétisée par 10 couches superposées, dont 8 en béton seul et 2 comprenant simultanément du béton et de l'acier (Figures 6.26 et 6.27).

Le comportement du béton suit la loi d'endommagement de La Borderie (loi de comportement unilatérale).

Le comportement de l'acier est élastoplastique à écrouissage cinématique avec un module de Young de 200 000 MPa et une limite d'élasticité égale 400 MPa.

La réponse cyclique de la poutre est représentée sur la figure 6.28 en comparaison avec les résultats d'essai, on remarque une très bonne cohérence entre les deux résultats.

La figure 6.28 présente également une comparaison de la réponse force-flèche obtenue par notre simulation et celle de Matallah (2009) obtenue par un modèle de comportement basé sur le couplage de l'endommagement et l'anélasticité. Les deux modèles numériques donnent des résultats similaires dans le premier cycle du chargement. Cependant, pour le deuxième cycle de chargement, des légères différences sont observées.

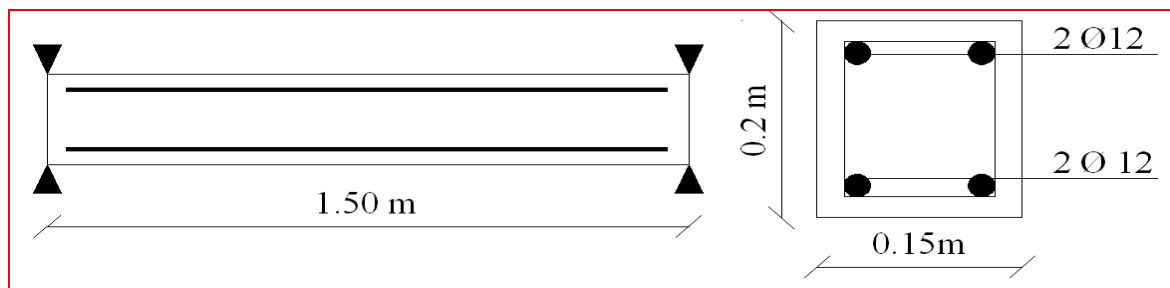


Figure 6.23- Géométrie et ferrailage de la poutre

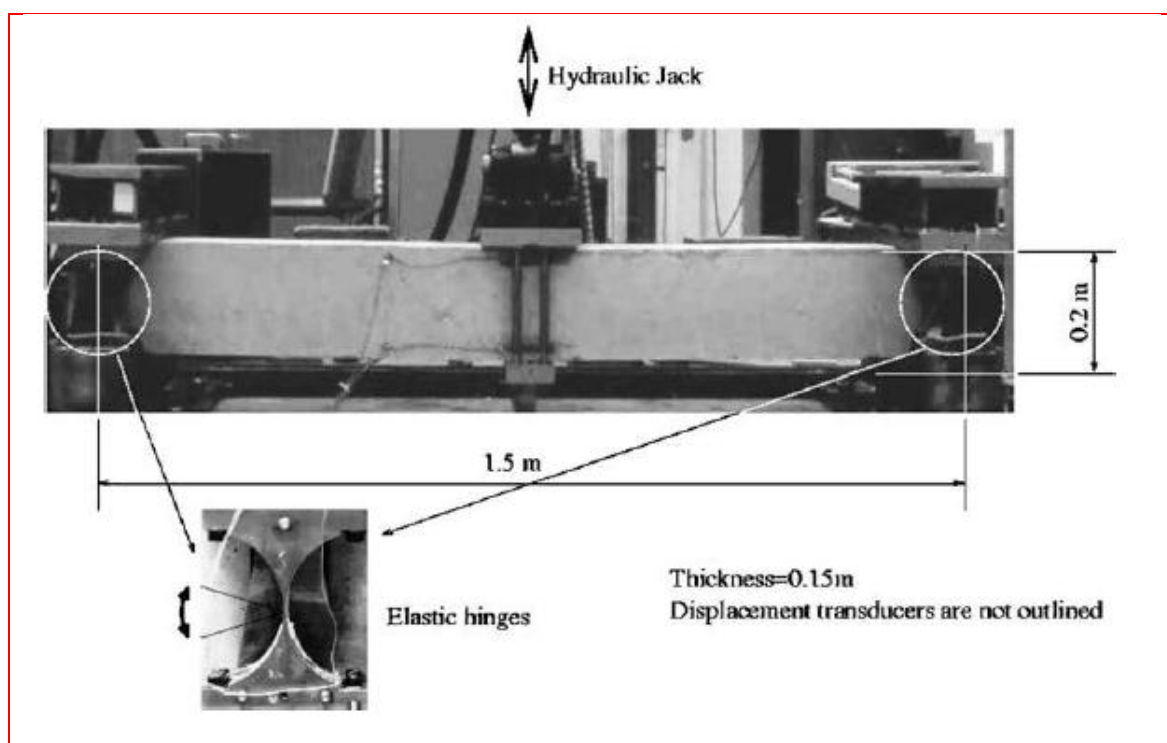


Figure 6.24- Procédure expérimentale (La Borderie, 1991 ; Matallah, et al., 2009)

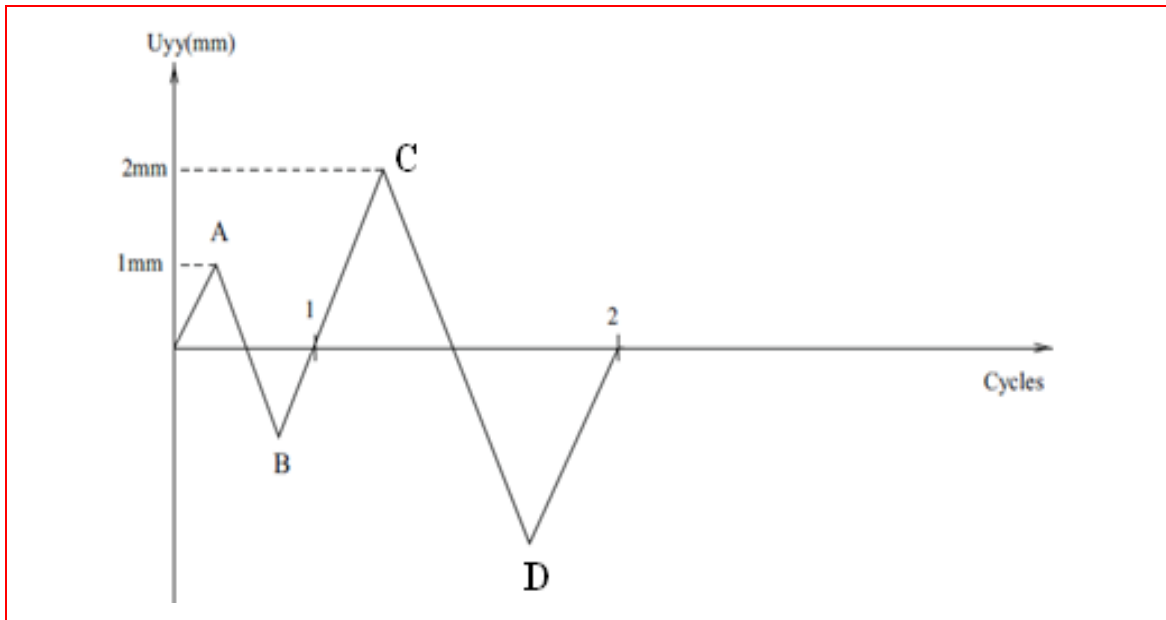


Figure 6.25- Histoire de chargement

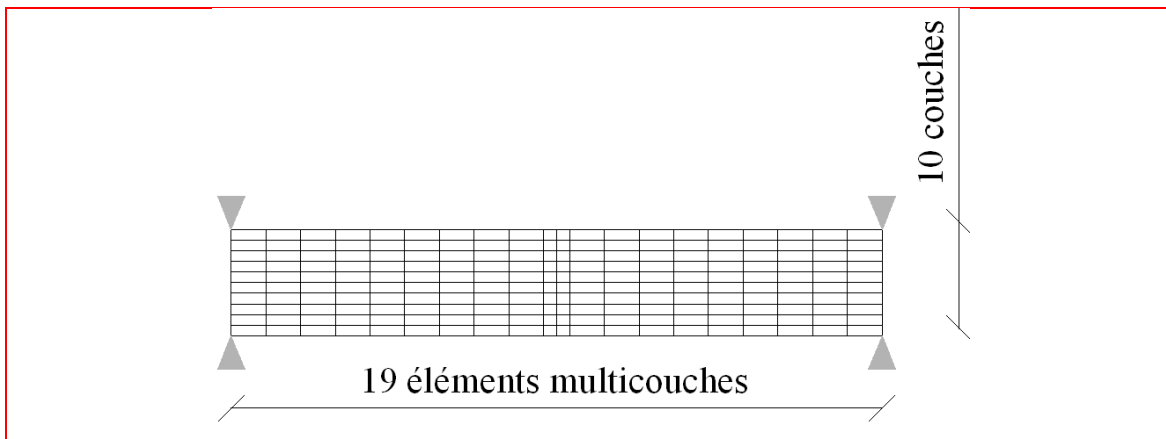


Figure 6.26- Discrétisation de la poutre en éléments multicouches

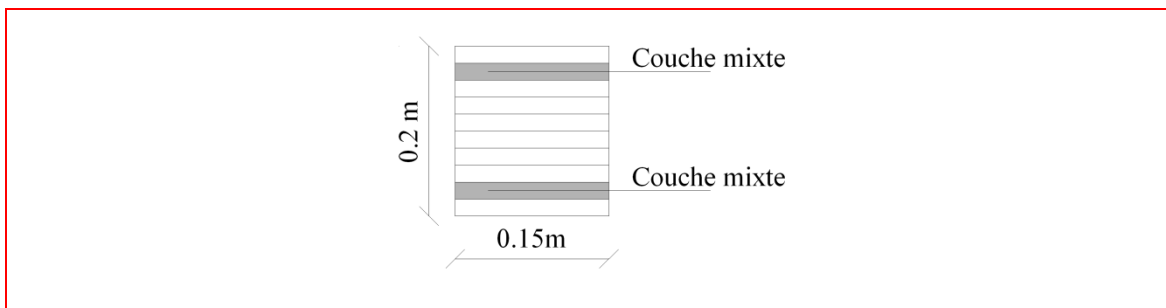
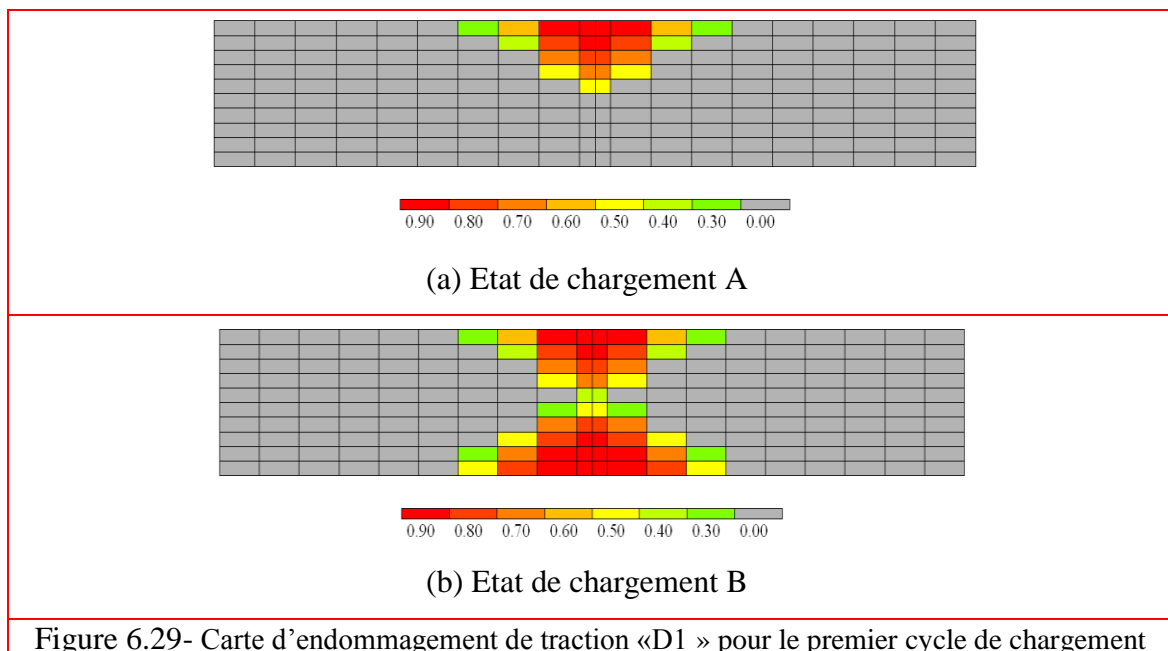
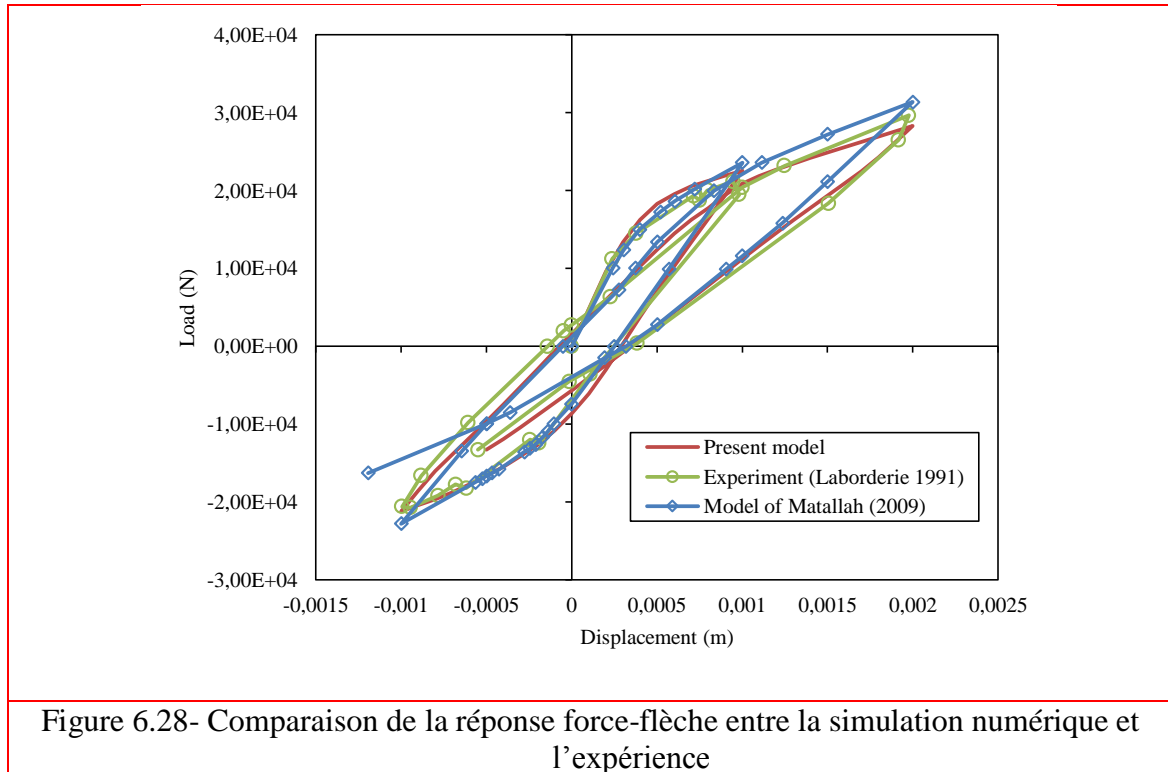


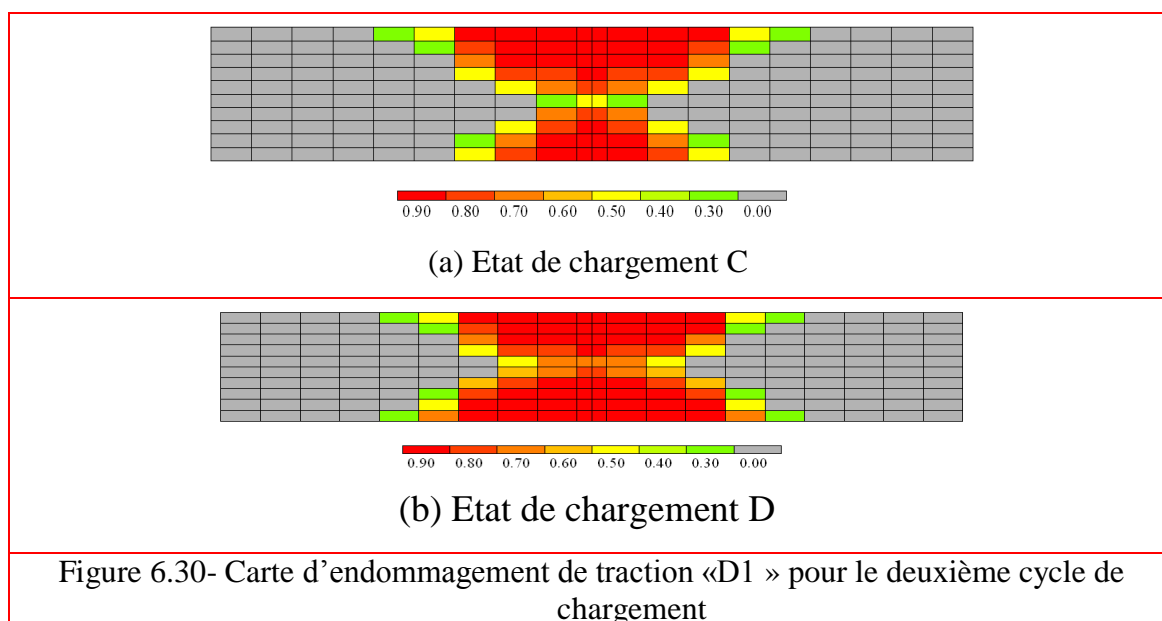
Figure 6.27- Discrétisation de la section de la poutre (8 couches en béton seul et 2 couches comprenant simultanément du béton et de l'acier)

La figure 6.29 présente la carte d'endommagement de la poutre pour le premier cycle de chargement. A l'état de chargement « A » la partie supérieure de la poutre est endommagée

(figure 6.29.a). L'état de chargement « B » correspond à un chargement opposé, l'état d'endommagement initialement produit est toujours conservé en mémoire alors qu'un nouveau état d'endommagement se crée dans la partie inférieure de la poutre (figure 6.29.b).

La figure 6.30 présente la carte d'endommagement de la poutre au cours du deuxième cycle de chargement.





6.5. Modélisation de la réponse sismique d'une poutre en béton armé

Cet exemple a pour but de faire une analyse de la réponse sismique d'une poutre en béton armé à l'intermédiaire d'une discrétisation en couches superposées (La Borderie.2003).

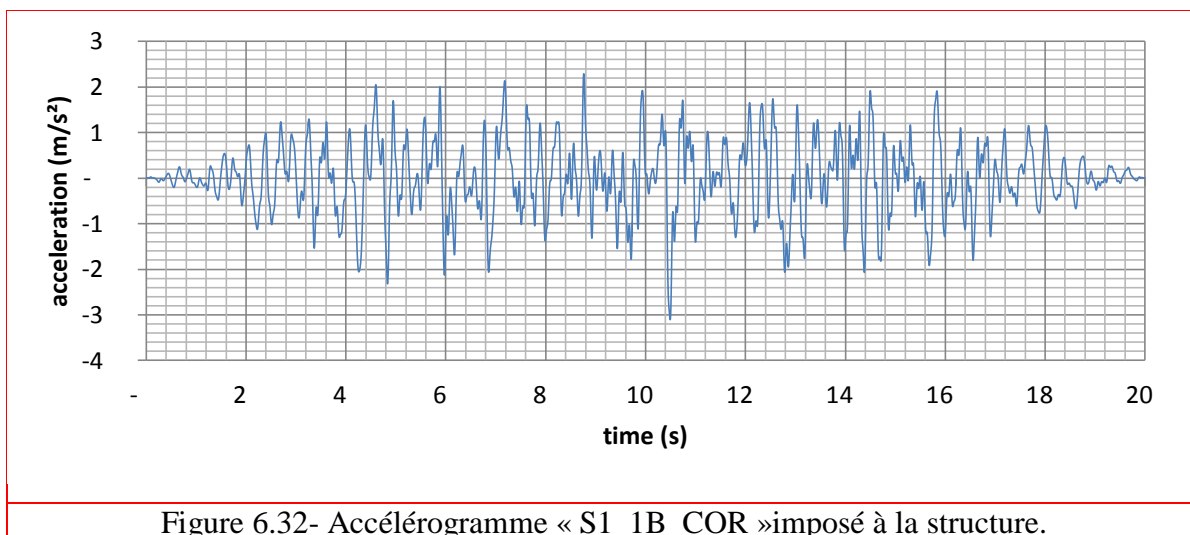
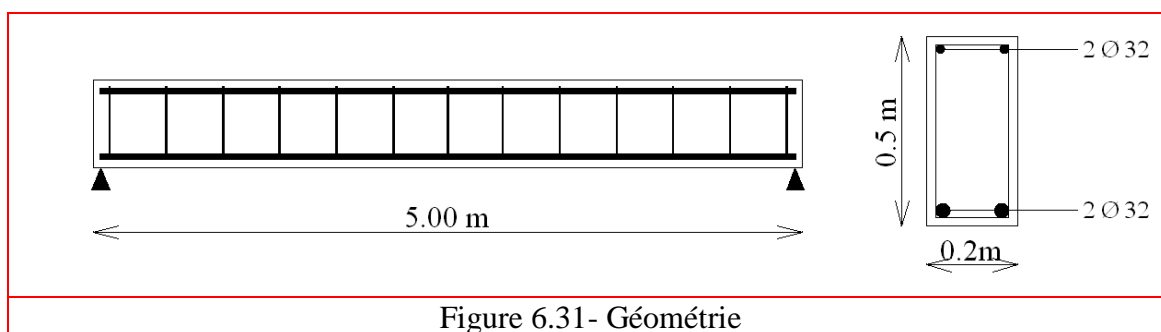
Le modèle analysé, c'est une poutre en béton armée renforcée par des aciers (figure 6.31), soumise à une excitation sismique artificielle « S1_1B_COR » (figure 6.32) dans l'axe OY (perpendiculaire à l'axe longitudinale OX de la poutre). La durée de l'accélérogramme est 20 secondes environ et sa valeur d'accélération maximale enregistrée est $a_{max} = 3.11 \text{ m/s}^2$

Nous avons proposé un amortissement de type Rayleigh, avec 5% sur les modes 1 et 2.

La poutre est modélisée par 10 éléments poutres à 2 nœuds et 2 points d'intégration, la section de chaque élément est discrétisée par 20 couches superposées (figures 6.2 et 6.3).

Le modèle d'endommagement de La Borderie (loi de comportement unilatérale) est utilisé. Les caractéristiques considérées pour le béton sont les mêmes présentées dans le tableau 6.1.

Le comportement de l'acier est supposé élastoplastique à écrouissage cinématique avec un module de Young de 200 000 MPa, une limite d'élasticité égale à 400 MPa.



L'évolution de la réaction d'appui en fonction du temps est présentée sur la figure 6.33. Nous voyons que la réaction d'appui maximale est de l'ordre de 17000 kN correspondante à un temps de 13 secondes.

La figure 6.34 représente l'histoire de déplacement vertical relatif au milieu de la poutre. Les déplacements obtenus sont relativement faible à cause des faibles chargements statiques (la poutre chargée uniquement par son poids propre).

Ces résultats sont présentés uniquement à titre indicatif (sans aucune validation par une autre méthode numérique ou expérimentale).

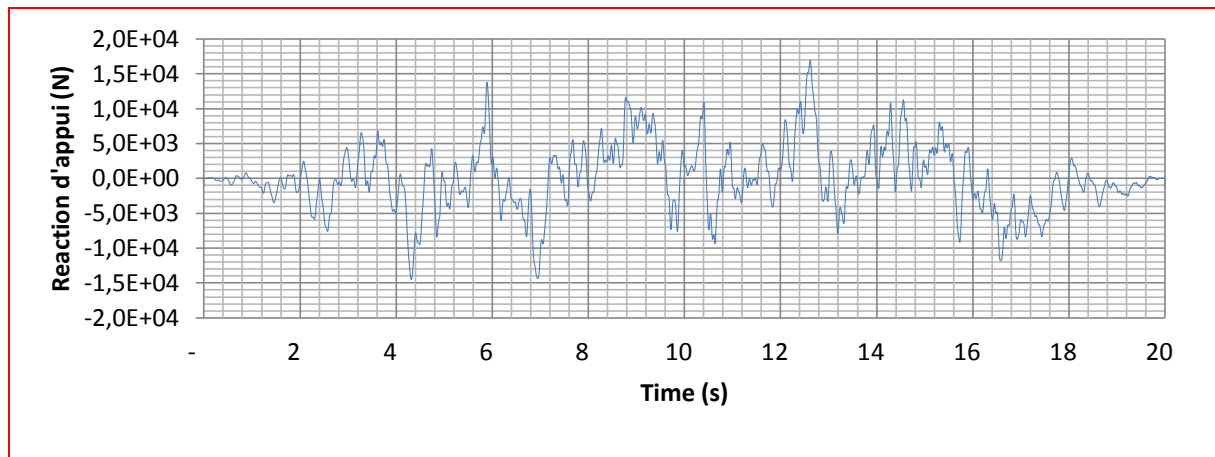


Figure 6.33- Réaction d'appui en fonction du temps.

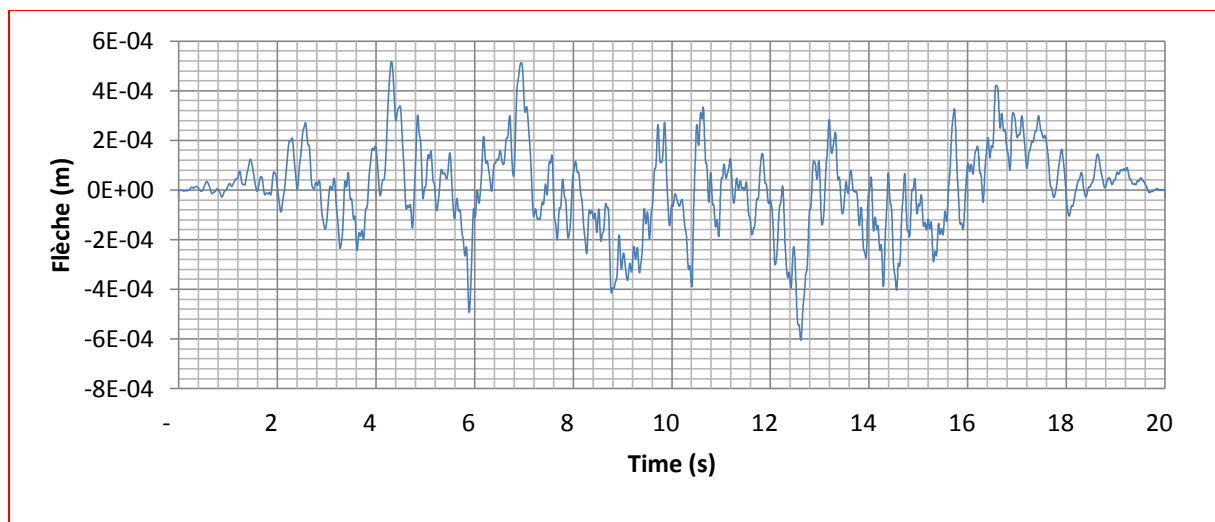


Figure 6.34- Flèche au milieu de la poutre en fonction du temps.

6.6. Conclusions

Une modélisation simple du comportement non linéaire des structures en béton armé est présentée. Elle utilise des éléments poutres multicouches obéissant à l'hypothèse de Bernoulli pour conférer aux différentes couches un comportement uniaxial. Elle permet également la description de l'état d'endommagement des structures au cours d'un chargement.

Cinq exemples d'applications ont été présentés. Le premier est celui d'une poutre soumise à une flexion 3 points avec chargement statique d'intensité croissante appliqué à mi-travée (Benchmark MECA), le deuxième étant celui d'une poutre soumise à une flexion 3 points avec un déplacement imposé à mi-travée, le troisième c'est un test de flambement d'un poteau (poteau de Fouré), le quatrième est celui d'une poutre en flexion cyclique et afin le

cinquième c'est une poutre sollicitée à un chargement sismique . A la lumière de ces exemples nous avons remarqué :

- Une très bonne cohérence entre les résultats de nos simulations et l'expérimentation.
- Une bonne concordance entre les résultats de nos modèles numériques et ceux d'autres modèles numériques de la littérature.
- L'analyse non linéaire reflète fidèlement le comportement des structures en bétons armés.
- Si le matériau est déchargé après avoir subi un état d'endommagement, il restaure sa raideur, les fissures précédemment ouvertes se referment mais la structure interne du matériau reste toujours endommagée.

CHAPITRE 7

APPLICATIONS AUX FONDATIONS : MODELISATION DU COMPORTEMENT NON-LINEAIRE DES FONDATIONS SUPERFICIELLES RIGIDES PAR LES MODELES GLOBAUX

7.1. Introduction

L'analyse du comportement non-linéaire des fondations superficielles, c'est un objectif majeur pour les chercheurs en génie civil. Les non linéarités des fondations superficielles rigides sont liées d'une part à la plastification du massif de sol sous fondation (non-linéarité matérielle), et d'autre part au décollement de l'interface entre le sol et la fondation (non-linéarité géométrique). Ils sont liés à la nature des matériaux (sols + fondations), mais aussi aux types de chargements. Ces derniers peuvent être statiques, cycliques et dynamiques, ils provoquent des déplacements verticaux, des déplacements horizontaux et des rotations des fondations (figure 7.1). Les systèmes de fondation sont aussi soumis à l'action des sollicitations sismiques et ils sont endommagés avec des conséquences parfois très graves pour les structures (Chatzigogos et 2007). Les méthodes de calcul conventionnelles ou celles que donnent les réglementations actuelles ne suffisent pas à donner une représentation fiable de la réponse des fondations superficielles avec la pris en compte de l'interaction sol-fondation.

Dans ce chapitre nous présentons une méthode de modélisation numérique fiable simplifiée, capable de prendre en compte l'interaction sol-structure en considérant toutes les non-linéarités associées au décollement de la fondation et à la plastification des sols, elle utilise un élément « gap » connecté en série avec un « ressort non-linéaire obéit à la plasticité de Wen(1976)» afin de former un nouveau macroélément. Le comportement horizontal de la fondation est contrôlé par un ressort horizontal non linéaire. Le système sol-fondation peut être modélisé par un seul macroélément localisé au centre de la semelle, comme il peut être modélisé par une poutre rigide reposant sur un ensemble des macroéléments verticaux conformément à l'approche de Winkler (1967) (voir paragraphe 7.3).

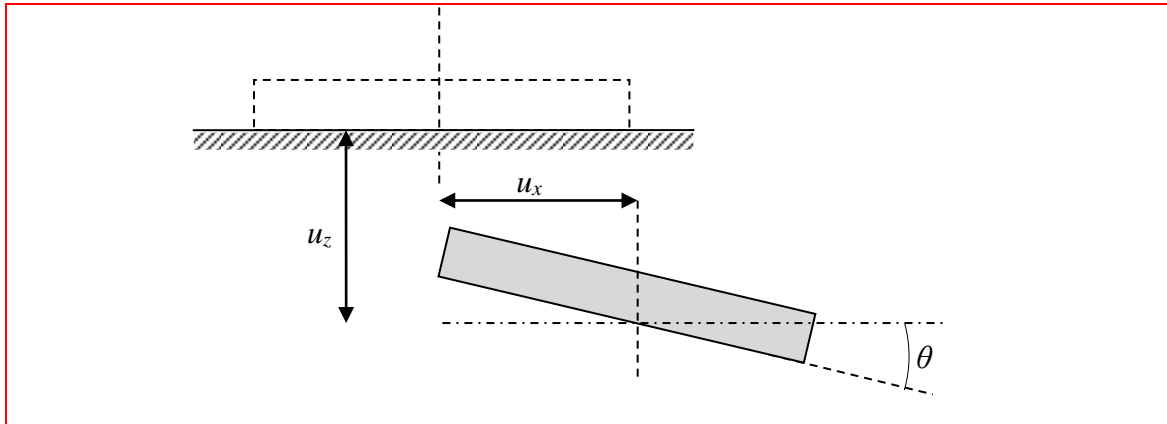


Figure 7.1- Réponse bidimensionnelle d'une fondation superficielle rigide

7.2. Présentation du macroélément

Le macroélément développé dans le présent travail c'est un élément « gap » connecté en série avec un ressort non-linéaire (figure 7.6). Il est capable de décrire les non-linéarités matérielles et géométriques.

L'élément « gap » (figure 7.2) est utilisé pour simuler le décollement de la semelle. Cet élément porte uniquement les chargements de compression ; il a une rigidité nulle lorsqu'il est soumis à la traction. La relation non-linéaire force-déplacement est donnée par :

$$F = \begin{cases} k_g(u + open) & \text{si } u + open > 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (7.1)$$

avec k_g rigidité élastique, $open$ est l'ouverture initiale de la « gap » qui égale zéro ou une valeur positive et u est le déplacement (positive en compression).

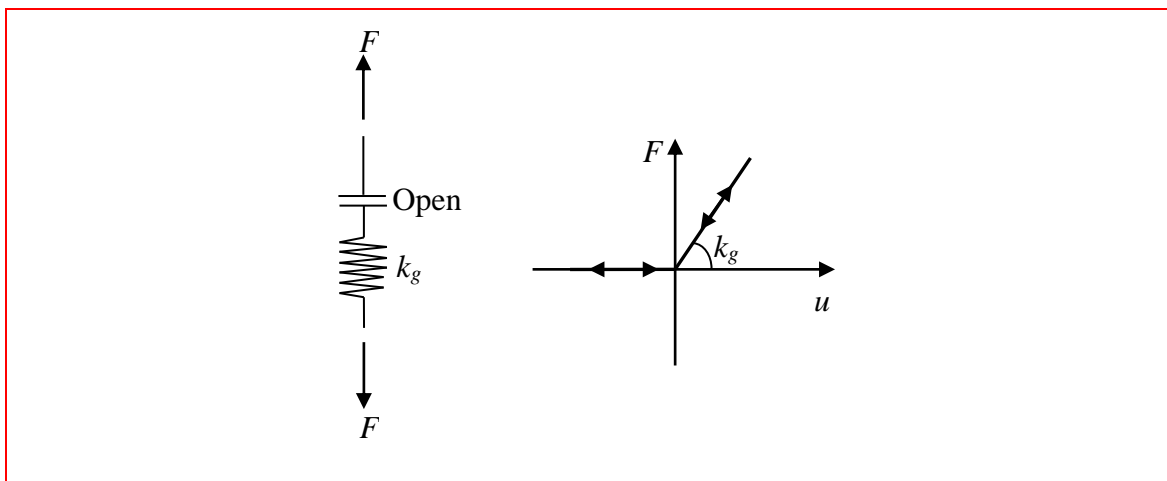


Figure 7.2- Structure et comportement de l'élément gap

Le ressort non-linéaire (figure 7.4) est utilisé pour simuler la plasticité du sol au-dessous de la fondation. Le modèle de plasticité est basé sur le comportement hystérésis proposé par Wen (1976). La relation non-linéaire force-déplacement est donnée par :

$$F = a \times \frac{F_y}{u_y} \times u + (1 - a) \times F_y \times z \quad (7.2)$$

avec u est le déplacement, F_y le seuil de plasticité, u_y le déplacement relatif au seuil de plasticité, a le rapport entre la rigidité post-plastique et la rigidité élastique (pré-plasticité) et z est un paramètre sans dimensions d'hystérésis qui obéit à une équation non linéaire caractérisé par un l'état initial nul :

$$\dot{z} = \frac{k_i}{F_y} \begin{cases} \dot{u}(1 - |z|^{exp}) & \text{si } \dot{u}z > 0 \\ \dot{u} & \text{si non} \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{u_y} \begin{cases} \dot{u}(1 - |z|^{exp}) & \text{si } \dot{u}z > 0 \\ \dot{u} & \text{si non} \end{cases} \quad (7.4)$$

avec exp est un exposant supérieur ou égal à 1 (figure 7.3). L'équation de \dot{z} est équivalente au modèle de Wen avec $A = 1$ et $\alpha = \beta = 0.5$.

La force F de l'équation 7.2 peut être divisée à une partie élastique et une partie hystérésis comme suit :

$$F^{el} = a \times \frac{F_y}{u_y} \times u \quad (7.5)$$

$$F^h = (1 - a) \times F_y \times z \quad (7.6)$$

Ainsi le modèle peut être utilisé deux ressorts connectés en parallèle (figure 7.4) avec $k_i = F_y/u_y$ et $k_f = ak_i$ sont la rigidité initiale et la rigidité du domaine pos-plastique du système (figure 7.5).

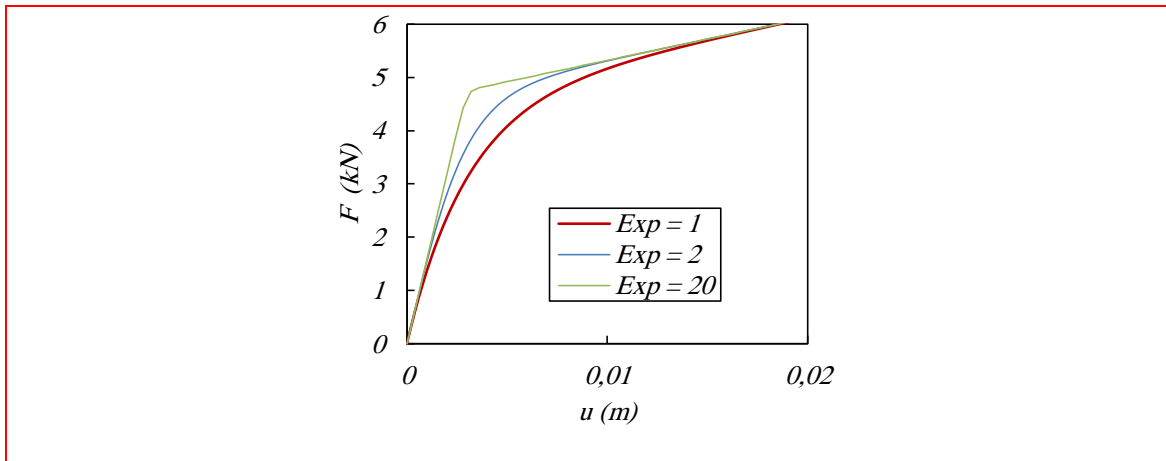


Figure 7.3- Acuité de plasticité

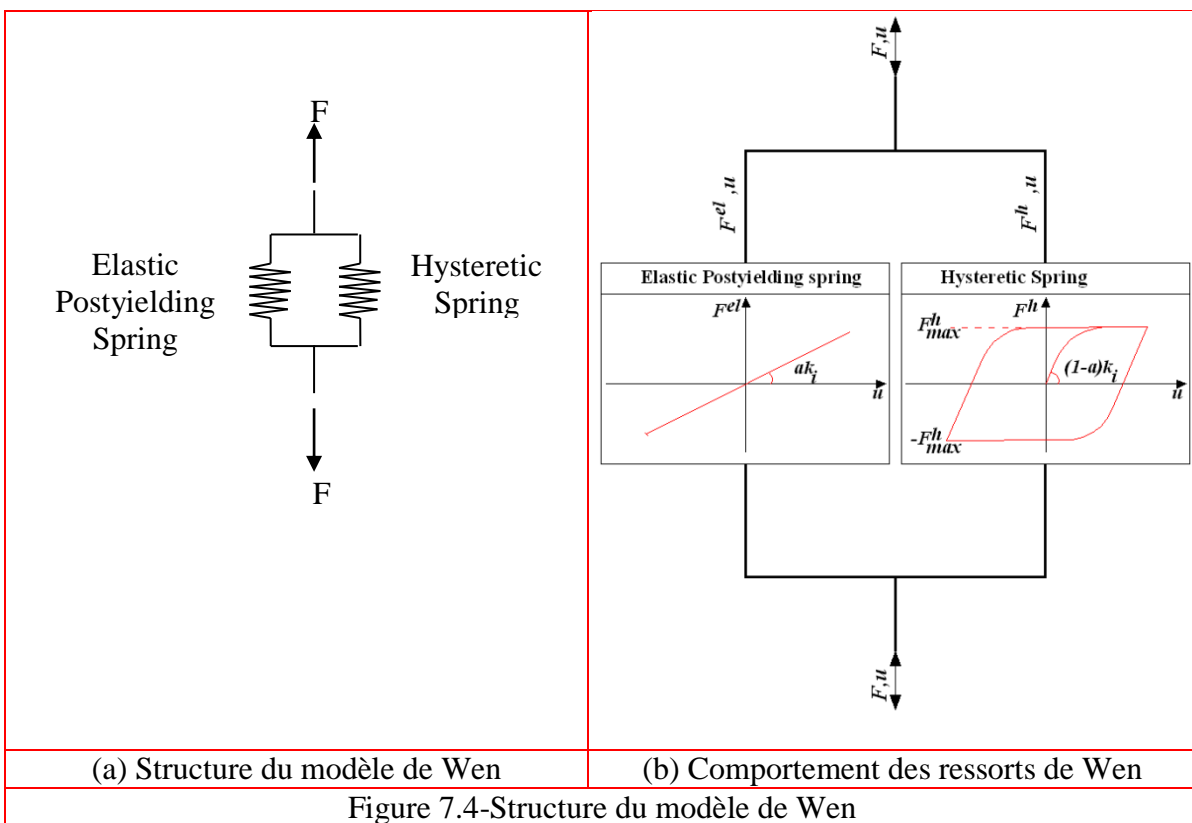


Figure 7.4-Structure du modèle de Wen

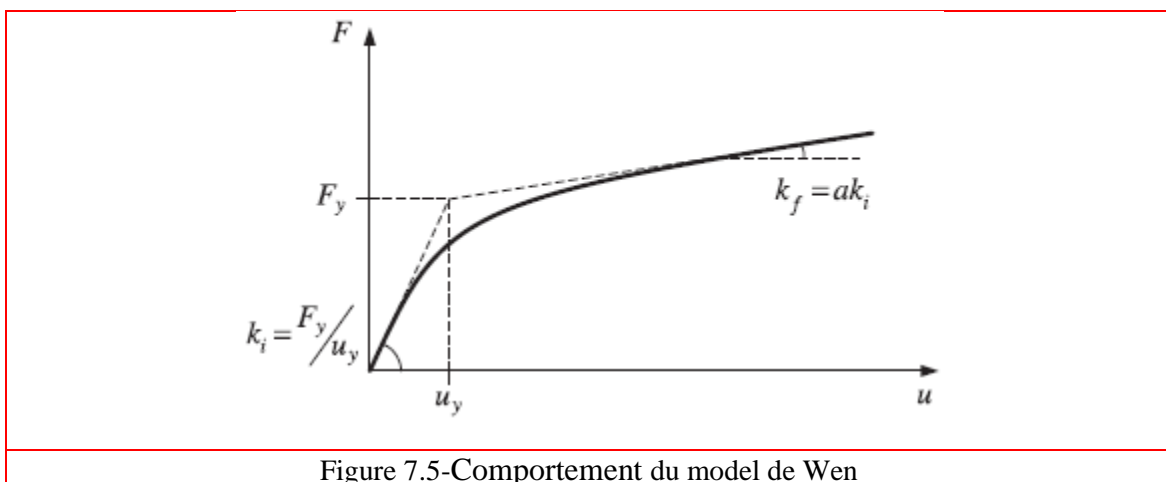
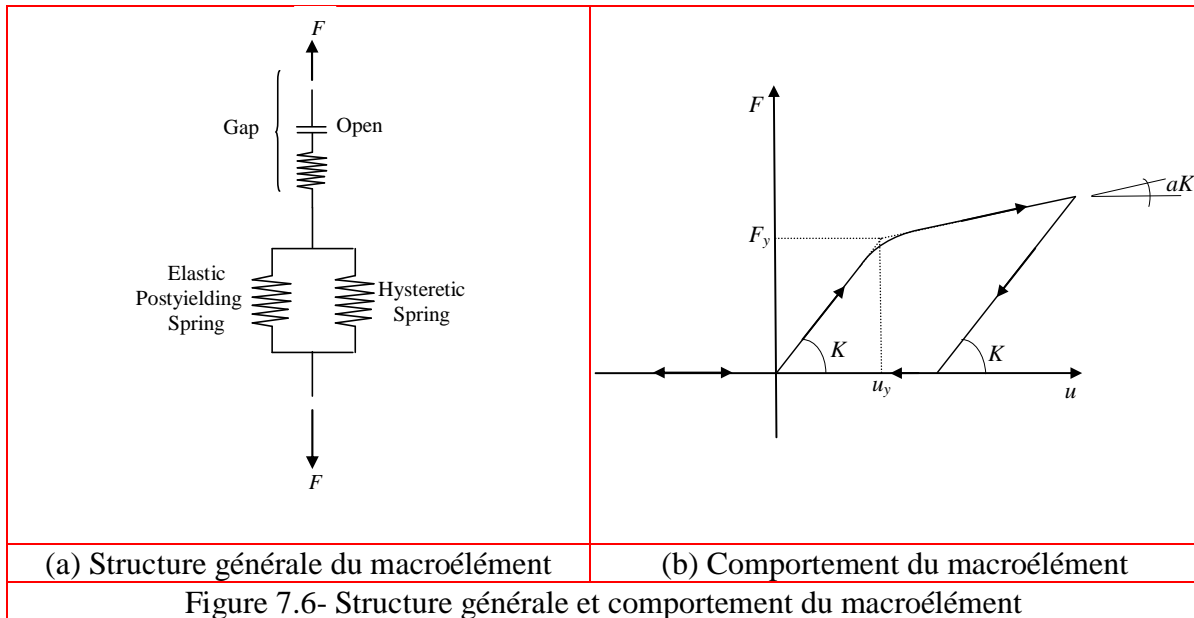


Figure 7.5-Comportement du model de Wen

La figure 7.6 présente la structure générale du macroélément non-linéaire. La loi de comportement associée à ce macroélément est non-symétrique (figure 7.6) et est caractérisée d'une part, par une charge ultime en compression F_y et d'autre part, par une réduction de la force de rappel à mesure que la fondation se soulève, force qui finit par tendre vers zéro.



La rigidité élastique globale K du macroélément est calculée comme suit :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{k_g} + \frac{1}{k_i} \quad (7.7)$$

Soit

$$K = \frac{k_g \times k_i}{k_g + k_i} \quad (7.8)$$

Selon la forme de la fondation et en fonction des caractéristiques de sol, Gazetas (1991) a été développé des équations permettent de calculer cette rigidité.

La charge ultime de compression du sol F_y est donnée par la relation suivante adaptée pour une fondation rectangulaire (Davis et Booker, 1973), (Matar et Salençon, 1979) et (Philipponnat et Hubert, 2003) :

$$F_y = \left[\left(1 - 0.2 \frac{B}{L} \right) \gamma \frac{B}{2} N_\gamma + q_0 N_q + \left(1 + 0.2 \frac{B}{L} \right) c N_c \right] BL \quad (7.9)$$

Où q_0 représente la contrainte verticale effective amenée par le sol à la base de la fondation (dans le cas où cette dernière ne serait pas à la surface du massif de sol mais

reposerait à une certaine profondeur), γ est le poids volumique du sol, N_γ est le terme de surface, N_q le terme dépendant de la profondeur de la fondation, et N_c le terme de cohésion. Les relations permettant de calculer N_γ , N_q et N_c sont données dans (Caquot et Kérisel, 1966). Ces termes ne dépendent seulement que de la cohésion c et de l'angle de frottement φ du sol.

7.3. Répartition de la rigidité verticale

Des nombreux résultats des travaux expérimentaux menés sur le comportement sous chargements cycliques des fondations superficielles ont mis en évidence que, lorsque le phénomène de basculement survient, le sol a tendance à se tasser et à se densifier aux extrémités des fondations. Cela s'explique par le fait que lorsqu'une des extrémités se soulève, l'autre se retrouve fortement chargée. La rigidité aux extrémités de la fondation se retrouve donc plus élevée que celle au centre. Afin de prendre en compte ce comportement dans une modélisation de Winkler, il est possible d'associer le degré de densification du sol au degré de couplage qui existe entre la rigidité verticale et la rigidité rotationnelle du système. Le FEMA356 (American Society of Civil Engineers ASCE.2000) propose une méthode simplifiée pour tenir compte de ce phénomène. Il conseille d'utiliser une distribution non uniforme de la rigidité verticale des ressorts. La fondation se retrouve alors divisée en deux régions : une à chaque extrémité de la fondation pour modéliser l'effet de la rigidité rotationnelle et une zone centrale à laquelle est associée la rigidité verticale. Pour le calcul de la rigidité surfacique de la zone centrale k_{mid} , la fondation supposée comme étant infiniment longue (le rapport $\frac{L}{B} \rightarrow \infty$ (Harden 2005)). Dans cette condition la rigidité surfacique de la zone centrale k_{mid} est calculée par l'expression :

$$k_{mid} = \frac{0.73G}{(1-\nu)B} \quad (7.10)$$

Pour ce qui est de la rigidité surfacique des zones d'extrémités k_{end} , le FEMA 356 suppose que leur longueur vaut $\frac{B}{6}$. Dans cette condition la rigidité k_{end} est calculée par l'expression:

$$k_{end} = \frac{6.83G}{(1-\nu)B} \quad (7.11)$$

Avec G et le module de cisaillement et ν le coefficient de Poisson.

Finalement, cette variation de la rigidité le long de la fondation procure implicitement au système une rigidité rotationnelle. En plus de cette variation de la rigidité verticale, le long de la fondation, la méthode conseille de rapprocher les ressorts dans les zones d'extrémité dans le cas où les systèmes étudiés sont fortement dominés par le basculement des fondations.

A partir de cette méthode, Harden et al. (2005), ont développé une façon plus rigoureuse pour estimer k_{mid} et k_{end} . Alors que dans FEMA 356, la longueur L_{end} des zones d'extrémité est constante et égale à $\frac{B}{6}$, la méthode proposée par Harden et al. suppose que L_{end} est fonction du ratio $\frac{B}{L}$. Cette méthode part de l'hypothèse que la longueur L_{end} est contrôlée par la valeur de la rigidité rotationnelle qui n'est pas fournie par la rigidité surfacique verticale, autrement dit par leur degré de couplage. Soit C_{R-V}^K un paramètre traduisant à la fois le déficit de rigidité rotationnelle du système et le couplage entre la rigidité verticale et la rigidité rotationnelle, calculé à l'aide de l'équation :

$$C_{R-V}^K = \frac{K_{\theta y} - \frac{K_z}{BL} I_y}{K_{\theta y}} \quad (7.12)$$

Où BL est l'aire de la fondation et I_y est son inertie rotationnelle.

$$I_y = \frac{BL^3}{12} \quad (7.13)$$

Si C_{R-V}^K est nul, K_z and $K_{\theta y}$ ne sont pas couplés. Dans ce cas, la rigidité surfacique est constante sur toute la longueur de la fondation et égale à k :

$$k = \frac{K_z}{BL} = \frac{K_{\theta y}}{I_y} \quad (7.14)$$

Dans le cas contraire, une rigidité supérieure est nécessaire aux extrémités pour que la rigidité rotationnelle globale du système soit correcte. L'expression de L_{end} est donnée par l'équation (Harden et al. 2005) :

$$L_{end} = 0.5L - L \left(\frac{1 - C_{R-V}^K}{8} \right)^{1/3} \quad (7.15)$$

Une fois que L_{end} est connue, les rigidités surfaciques verticales des zones d'extrémités et de la zone centrale peuvent être calculées de façon à ce que les rigidités verticale et rotationnelle du système soient équivalentes à celles du sol :

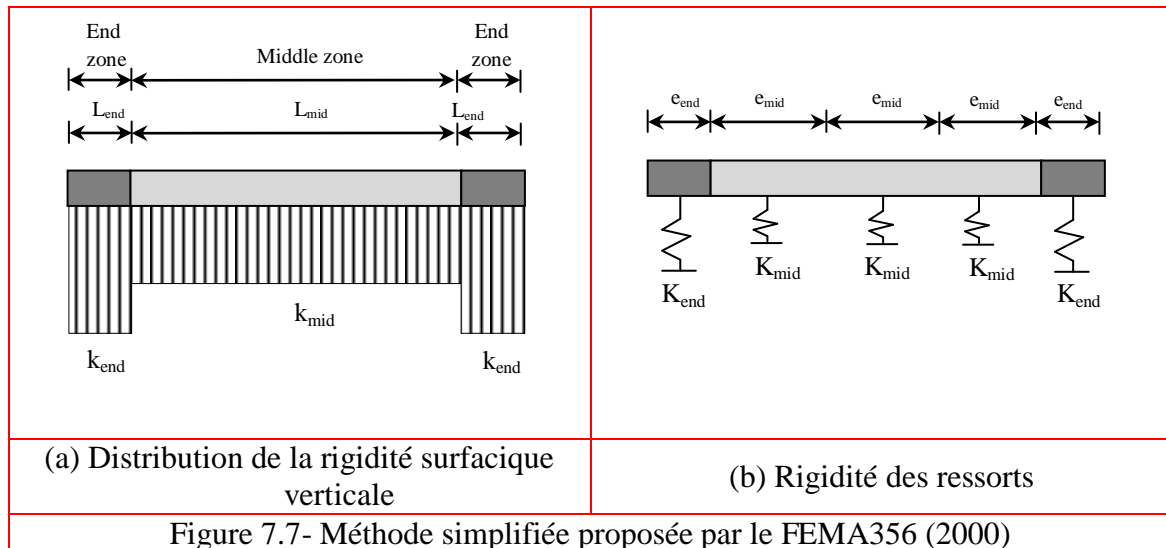
$$k_{mid} = \frac{K_z}{BL} \quad (7.16)$$

$$k_{end} = \frac{K_z}{BL} + C_{R-V}^K \frac{K_{\theta y}}{I_y} \quad (7.17)$$

La rigidité associée à chaque ressort du modèle ISS est ensuite obtenu en multipliant la rigidité surfacique par la surface tributaire du ressort :

$$K_{mid}^{ressort} = k_{mid} B e_{mid} \quad (7.18)$$

$$K_{end}^{ressort} = k_{end} B e_{end} \quad (7.19)$$



7.4. Applications

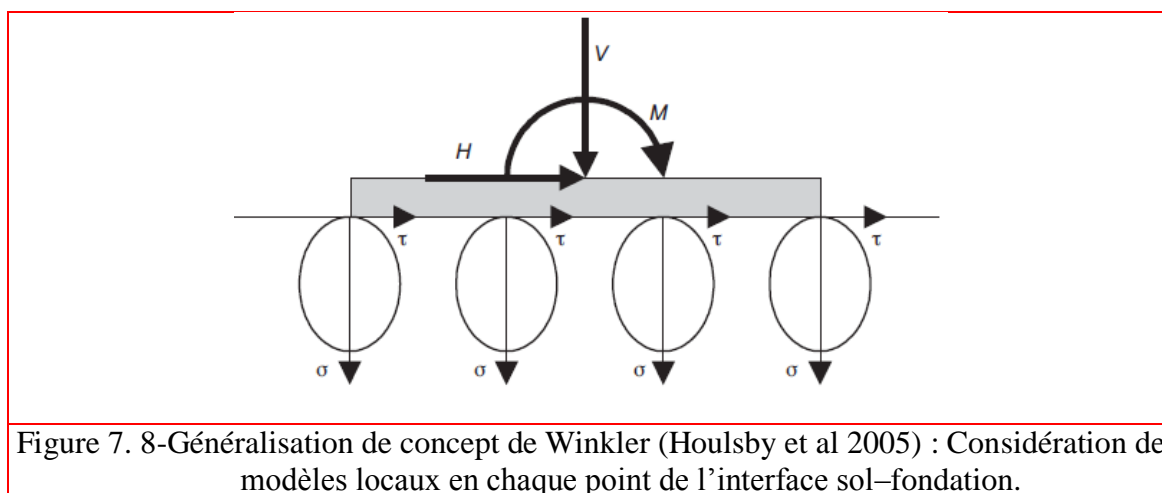
7.4.1. Comportement d'une fondation circulaire sous chargement vertical centré

7.4.1.1. Chargement monotone

Afin de voir si le macroélément est capable de reproduire le comportement d'une fondation sous chargement verticale statique monotone, nous avons choisi de modéliser une

fondation circulaire de diamètre $D=1\text{m}$, reposant sur une couche d'argile dont les paramètres sont les suivants : $G = 200\text{kPa}$, $c = 1\text{kPa}$ et $\nu = 0.5$.

Houlsby et al (2005) ont étudié analytiquement et numériquement la réponse de la même fondation. Ils ont utilisé le formalisme de théorie d'hyperplasticité afin d'examiner le potentiel de modélisation du comportement globale d'une fondation superficielle en adoptant l'hypothèse des ressorts découplés de Winkler. L'idée de base est de définir une surface de charge en termes des contraintes normales et tangentielles (σ , τ) pour chaque point de l'interface sol-fondation. C'est une généralisation de la notion de ressorts de Winkler qui définit un modèle local en tout point de l'interface. Cette idée est représentée sur la figure 7.8. Le comportement global de la fondation peut être obtenu par intégration du comportement de chaque point sur toute l'interface. L'hypothèse principale du modèle est qu'il n'y a pas de couplage contraintes-déplacements entre deux points voisins sur l'interface sol-fondation. Le grand avantage de cette hypothèse est qu'elle permet d'obtenir le comportement global de la fondation analytiquement.



Dans le présent travail la fondation et le sol sous-jacent sont modélisés par un seul macroélément non-linéaire localisé au centre de la fondation sur lequel un déplacement vertical monotone est imposé (un seul macroélément est suffisant puisque, seule la translation selon l'axe verticale est possible et la fondation est considérée infiniment rigide). La rigidité verticale élastique du macroélément est calculée en utilisant l'équation développée par Gazetas (1991) :

$$K_z = \frac{2GD}{1-\nu} \quad (7.20)$$

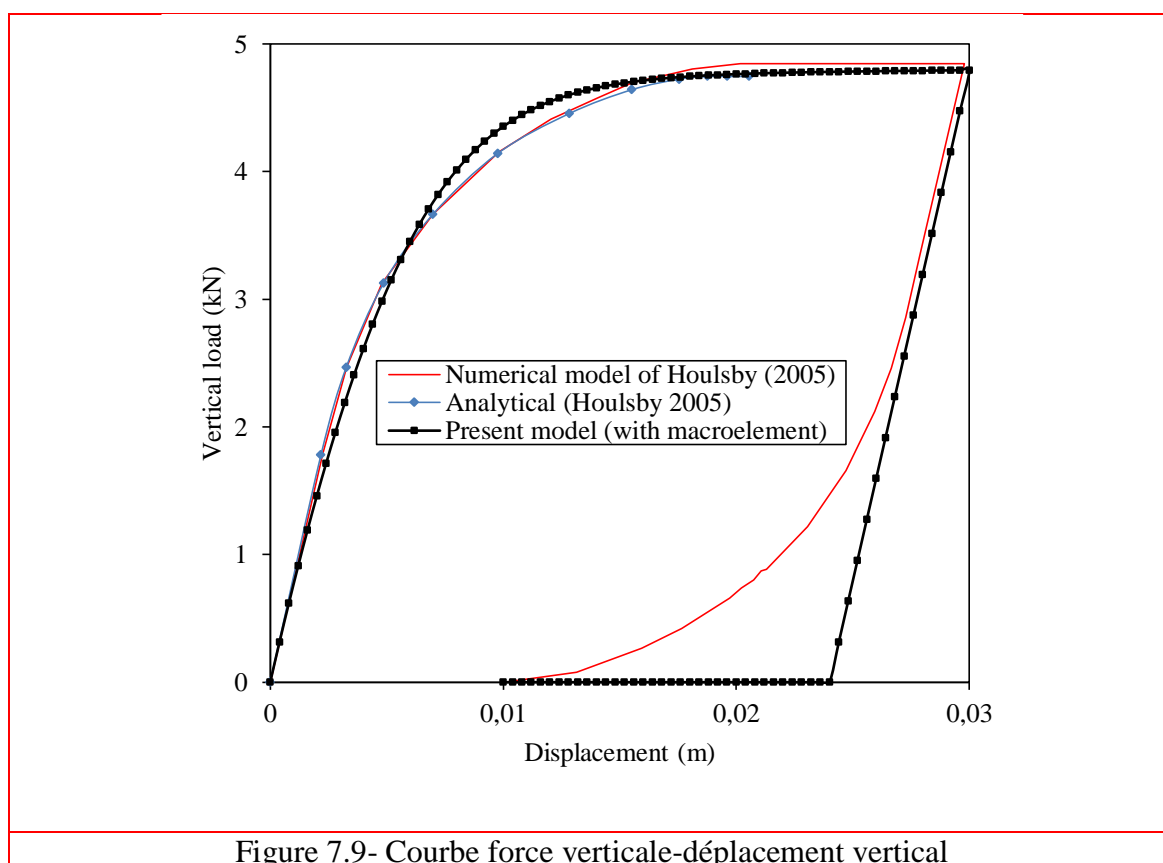
La force verticale maximale supportée par la fondation F_y pour un sol purement cohérent et homogène est donnée par :

$$F_y = 6.06c \frac{\pi D^2}{4} \quad (7.21)$$

Les paramètres numériques du macroélément sont présentés dans le tableau 7.1.

Tableau 7.1 : Paramètres du macroélément

Rigidité verticale élastique K_z	Charge limite F_y	a	Exp
800 kN/m	4.7571 kN	0.001	1



La figure 7.9 présente une comparaison entre les résultats obtenus par notre macroélément et ceux de Houlsby et al (2005). Nous voyons que la réponse non-linéaire de fondation décrite par le macroélément est pratiquement la même que celle décrite analytiquement et numériquement par Houlsby et al (2005) lors de la phase de chargement. En ce qui concerne la phase de déchargement nous avons constaté un écart entre les résultats, puisque la réponse de la fondation décrite par le modèle numérique de Houlsby et al (2005) lors de la phase de

déchargement et après un très grand déplacement, produit irréaliste soulèvement de la fondation, comme il est présenté sur la figure 7.9, où on note une diminution très importante de la tangente à la courbe dans la phase de déchargement (c'est une faiblesse du modèle de Houslsby).

Le diagramme de la figure 7.9 montre aussi que le macroélément permet de bien décrire d'une part les non-linéarités matérielles de la fondation au cours de la phase de chargement, et d'autre part le comportement parfaitement élastique lors du déchargement, suivi par une bonne description des non-linéarités géométrique (décollement de la fondation) lors de l'inversion du signe du chargement (annulation de la force par l'activation de l'élément gap). On note que durant ce cycle de chargement-déchargement, les deux composantes du déplacement total sont observées clairement, à savoir le déplacement élastique et le déplacement plastique.

7.4.1.2. Chargement cyclique

On va examiner maintenant la réponse cyclique d'une fondation circulaire de diamètre $D=1\text{m}$ reposant sur un sol purement cohérent homogène. La même fondation a été étudiée par Chatzigogos (2007) au moyen d'une série de « swipe tests » numériques. Le tableau 7.2 regroupe les caractéristiques du sol. La force verticale maximale supportée par la fondation est donnée par l'équation (7.21).

Tableau 7.2 Caractéristiques du sol

Cohésion c_0	Module de cisaillement G	Coefficient de Poisson ν	Poids volumique du sol γ	force verticale maximale F_y
1 kPa	1000 kPa	0.3	20 kN/m ³	4.76 kN

Les raideurs élastiques normalisées du système sont calculées par (Sieffert et Cevaer.1992 d'après Chatzigogos .2007) :

$$K_z = \frac{2GD^2}{F_y(1-\nu)} \quad (7.22)$$

$$K_x = \frac{4GD^2}{F_y(1-\nu)} \quad (7.23)$$

$$K_{\theta} = \frac{GD^2}{3F_y(1-\nu)} \quad (7.24)$$

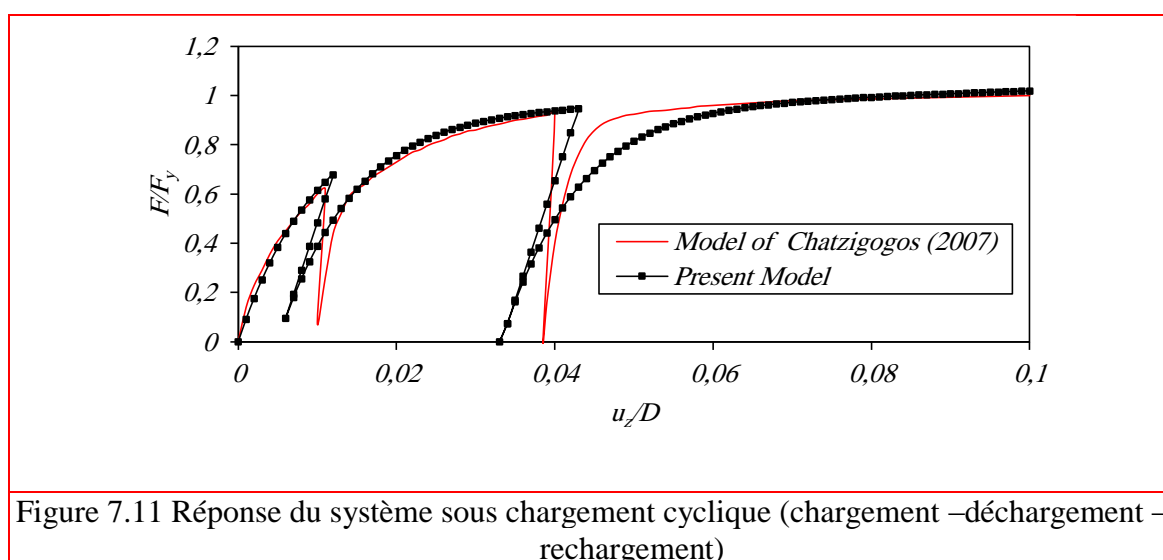
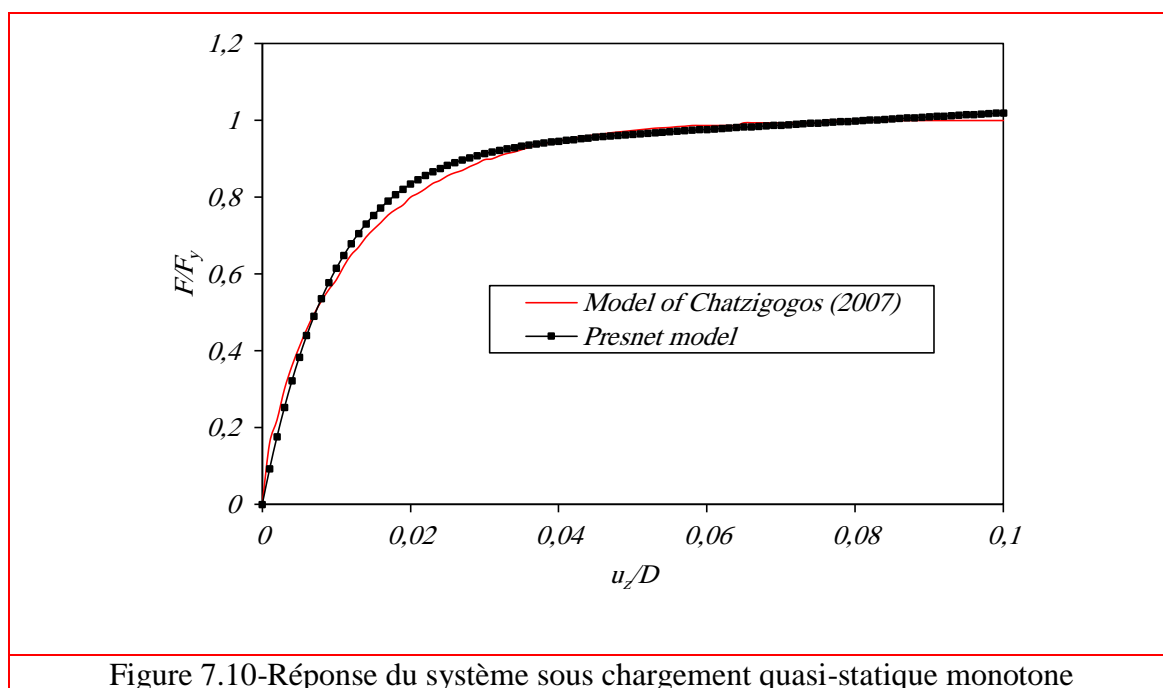
Nous avons modélisé la fondation et le sol par un macroélément non-linéaire localisé au centre de la fondation. Les raideurs élastiques normalisés de ce macroélément sont calées par rapport aux essais numériques « swipe tests » réalisés par Chatzigogos (2007) avec un chargement verticale monotone, la figure 7.10 présente une comparaison de la réponse de la fondation sous chargement monotone centré obtenue par notre macroélément et celle obtenue par Chatzigogos (2007) avec des essais numériques. On observe que les deux résultats sont identiques.

Par la suite un chargement cyclique contrôlé par des déplacements est appliqué à la fondation (chargement-déchargement-rechargement).

La figure 7.11 montre le chemin de la réponse de la fondation dans le plan des paramètres généralisés $(F/F_y, u_z/D)$, elle compare les résultats obtenus par notre macroélément et ceux de Chatzigogos (2007). On note que pour les phases de chargement et rechargement, nos résultats sont très proches à ceux des essais numériques, et nous remarquons clairement que la réponse produite par notre macroélément en phase de rechargement est aussi plastique que la réponse en premier chargement. Par contre la réponse reproduite par les essais numériques en phase de rechargement est considérablement moins plastique que dans la phase de premier chargement. En plus les deux modèles peuvent correctement décrire le comportement plastique continu en phase de rechargement, c'est-à-dire qu'ils permettent le développement de déplacements plastique de manière continue.

En ce qui concerne les phases de déchargement, une certaine différence entre les deux résultats est observée, où nous avons constaté que le modèle de Chatzigogos (2007) est quasi rigide en phase de déchargement (la raideur élastique est presque infini), par contre la rigidité de déchargement de notre macroélément est pratiquement la même que celle élastique en phase de chargement.

On peut alors noter que le macroélément développé dans cette thèse est capable de reproduire le comportement non-linéaire d'une fondation circulaire sous chargement quasi-statique monotone et cyclique.



7.4.2. Comportement d'une fondation circulaire sous chargement horizontal

Afin d'étudier le comportement d'une fondation superficielle sous chargement horizontal monotone et cyclique, on utilise encore les « swipe tests » réalisés par Chatzigogos (2007). Dans ce cas la fondation est initialement soumise à un déplacement vertical qui amène le système à un certain niveau de plastification. Ensuite, on applique un déplacement horizontal jusqu'à la rupture.

Sur la figure 7.12, on présente le modèle numérique du système sol-fondation, dans lequel nous avons modélisé le comportement vertical par le macroélément développé précédemment et présenté sur la figure 7.6. En ce qui concerne le comportement horizontal du système, on utilise un macroélément horizontal dans lequel le modèle de plasticité est basé sur le comportement hystérésis proposé par Wen (1976) (figures 7.4-7.5). La charge horizontale maximale du macroélément est donnée par (Chatzigogos et al. 2009) :

$$F_y^H = c_0 A \quad (7.25)$$

Avec A est la surface de la fondation.

Les résultats que l'on présente concernent les courbes de la réponse horizontale de la fondation sous un chargement monotone et cyclique (un cycle et cinq cycles) respectivement, en terme des paramètres généralisés (F_H/F_y , u_x/D). L'histoire des déplacements définie pour chaque cas est la suivante :

Dans le premier cas (figure 7.13.(a)) : On applique initialement un déplacement vertical $u_z = 0.03m$. Ensuite, on garde le déplacement vertical constant et on applique un déplacement horizontal jusque la valeur $u_x = 0.01m$.

Dans le deuxième cas (figure 7.13.(b)) : On applique un déplacement vertical $u_z = 0.01m$, ce qui amène le système à une valeur $F_V/F_y = 0.6$. Ensuite, on applique un cycle parfait (chargement – déchargement – chargement négatif – déchargement) en arrivant jusqu'à la valeur $u_x = \pm 0.005m$.

Dans le troisième cas (figure 7.14.(a)-(b)) : L'essai est initié par l'application d'un déplacement vertical égal à $u_z = 0.01m$. Ensuite, on applique cinq cycles de chargement horizontal. Dans chaque nouveau cycle, on augmente linéairement le déplacement horizontal appliqué. Pour le premier cycle on a $u_x = \pm 0.001m$ et au cinquième on arrive à $u_x = \pm 0.005m$. Le diagramme $F_H/F_y - u_x/D$ met en évidence que chaque nouveau cycle contient les cycles précédents, qui sont moins importants.

On note finalement que le modèle numérique du présent travail, permet la description du comportement non-linéaire du système, aussi bien pour le chargement horizontal monotone que pour le chargement horizontal cyclique. Une bonne concordance avec les essais effectués par Chatzigogos (2007) est observée. Néanmoins des légers écarts sont constatés surtout pour les phases de déchargement.

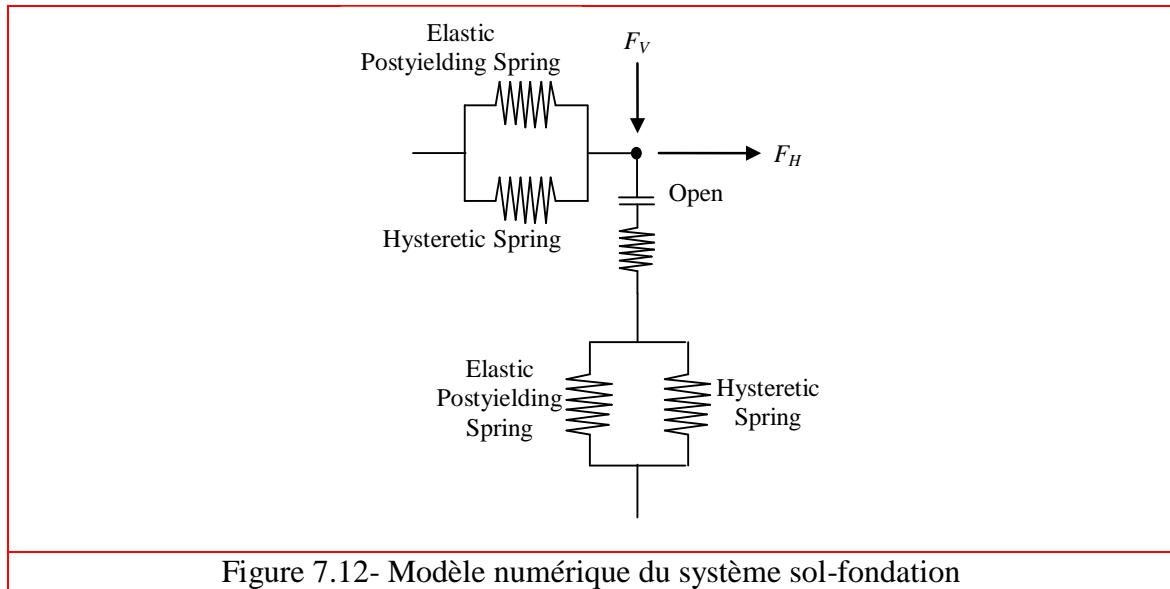
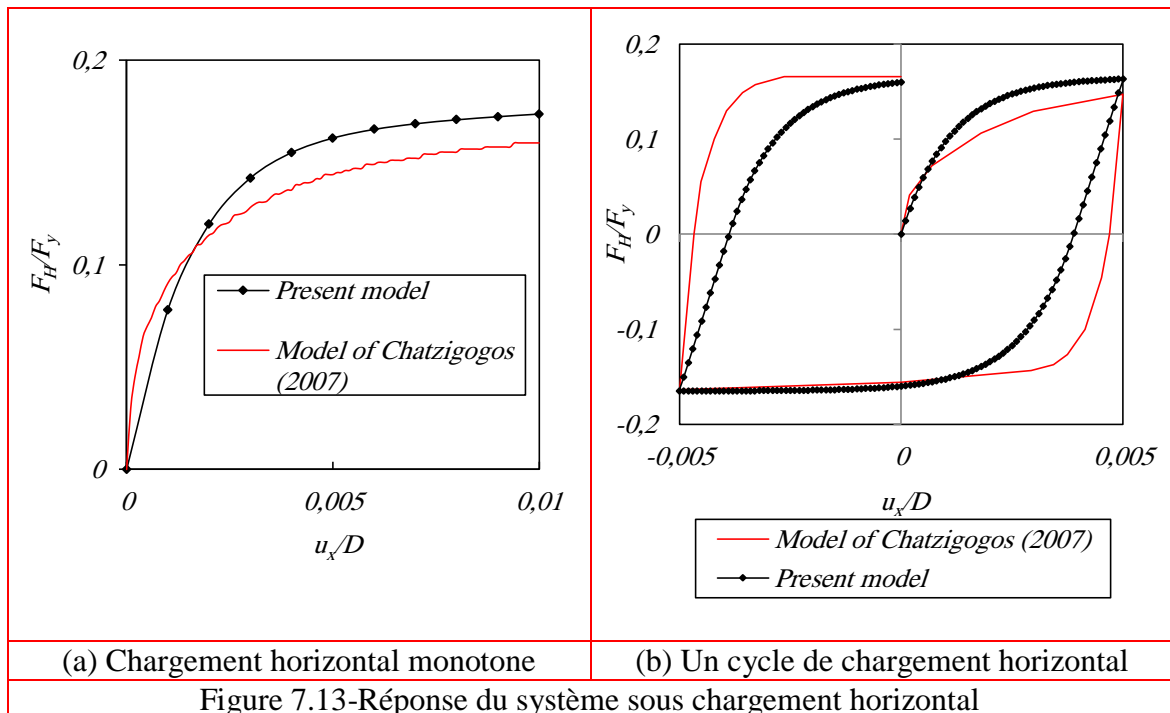


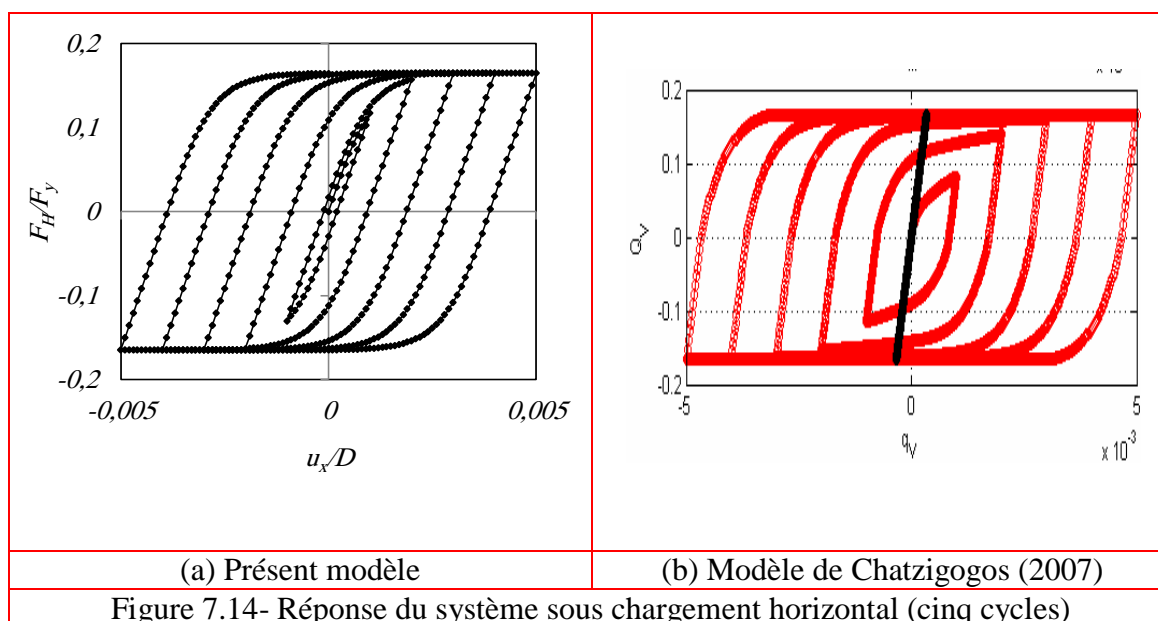
Figure 7.12- Modèle numérique du système sol-fondation



(a) Chargement horizontal monotone

(b) Un cycle de chargement horizontal

Figure 7.13-Réponse du système sous chargement horizontal



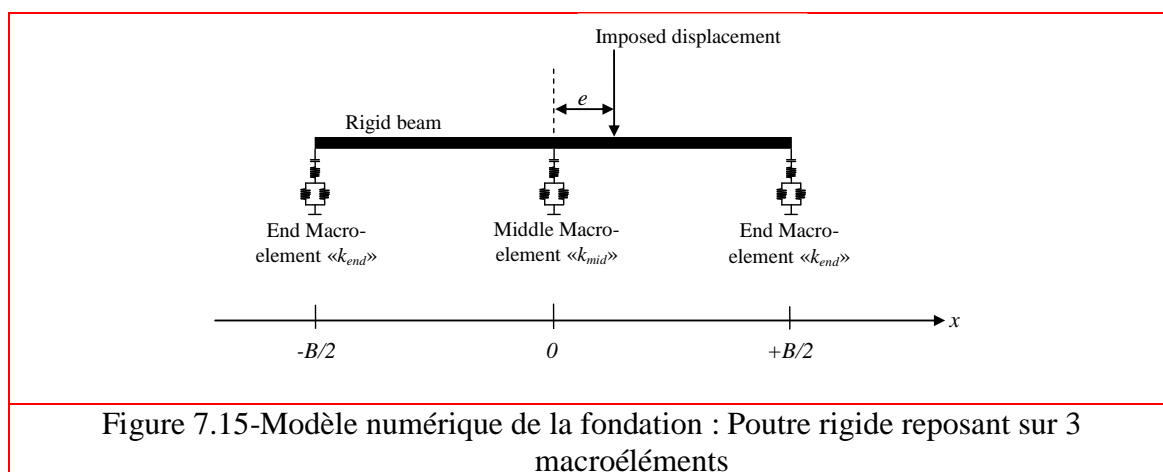
7.4.3. Modélisation non-linéaire d'une fondation filante sous un chargement statique excentré d'intensité croissante :

Dans cette partie nous étudions le comportement non-linéaire d'une fondation filante de 1m de largeur, reposant sur une couche de sol homogène « purely frictional soil ». Le tableau 7.3 regroupe les paramètres de sol. Un déplacement imposé monotone est appliqué à plusieurs excentricités par rapport au centre de la fondation (le chargement en déplacements imposés permet de donner une investigation direct du critère de rupture, puisque la courbe de réponse (en effort) l'épouse parfaitement). Loukidis (2008) a été analysé aussi le comportement de la même fondation sous un chargement statique vertical d'intensité croissante appliqué à plusieurs excentricités. Il utilise des éléments finis pour modéliser le sol et la semelle à l'aide du code SNAC développé par Abbo et Sloan (2000). Dans sa modélisation, Loukidis a été ignoré le décollement de la semelle (aucun élément d'interface entre la fondation et le sol n'a été utilisé lors de sa modélisation), il prend en considération uniquement la plasticité du sol avec un comportement élastique-parfaitement plastique selon le critère de rupture de Mohr-Coulomb.

Dans le présent travail nous modélisons la fondation par une poutre rigide reposant sur trois macroéléments non-linéaires indépendants (figure 7.15), les non-linéarités matérielles et géométriques sont prises en considération. La rigidité verticale du système sol-fondation est distribuée par deux méthodes, dans la première nous avons considéré qu'elle est

uniformément répartie le long de la fondation, et dans la deuxième méthode nous avons utilisé une distribution non-uniforme de la rigidité verticale des macroéléments conformément à l'approche de Harden (2005). Les cinq cas d'excentricité suivants sont étudiés : $e = 0$, $e = B/12$, $e = B/6$, $e = B/4$ et $e = B/3$.

Les paramètres de la fondation et des macroéléments sont représentés dans les tableaux 7.4 et 7.5 respectivement.



Pour des raisons de comparaison nous avons également modélisé la même fondation (seulement pour le cas d'une excentricité nulle) mais cette fois-ci avec la méthode des éléments finis en utilisant le code Plaxis. Dans ce modèle le sol est discrétisé en éléments triangulaires à 15 noeuds et la semelle par un déplacement imposé uniformément répartie le long de la largeur de la semelle (semelle rigide). Le modèle de comportement employé est le modèle élasto-plastique de Mohr-Coulomb avec une loi d'écoulement associée ($\psi = \phi$). La figure 7.16 montre les détails de cette modélisation (conditions aux limites, chargement et maillage).

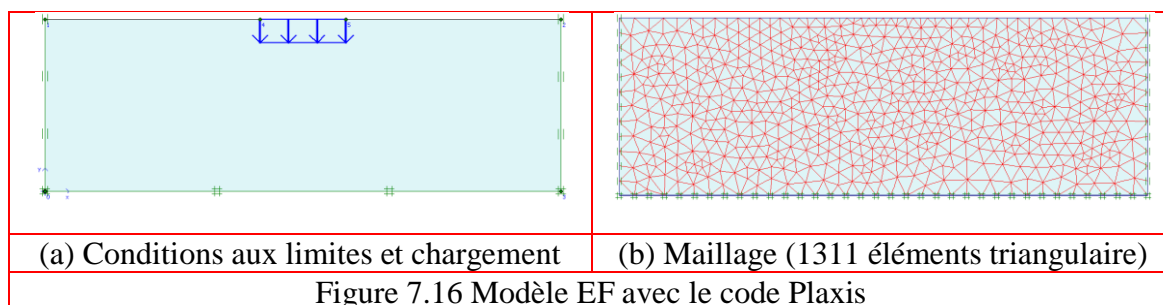


Tableau 7.3 Paramètres du sol

Poids volumique γ	Angle de frottement φ	Angle de dilatation de sol ψ	Coefficient de Poisson ν	Module de cisaillement G
20 kN/m ³	35°	35°	0.35	29630 kPa

Tableau 7.4 Paramètres de la fondation

Rigidité verticale élastique de la fondation K_z	78000 kN/m
Force maximale de la fondation F_y	360.9 kN

Tableau 7.5 Paramètres des macroéléments

Paramètres des macroéléments	Répartition uniforme	Répartition selon Harden
Surface tributaire du macroélément central $B \times L_{mid}$	1m \times 0.5m	1m \times 0.741m
Surface tributaire du macroélément de rive $B \times L_{end}$	1m \times 0.25m	1m \times 0.13m
Rigidité du macroélément central k_{mid}	39000 kN/m	57783 kN/m
Rigidité du macroélément de rive k_{end}	19500 kN/m	24865 kN/m
Coefficient de rigidité post-plasticité (pour tous les macroéléments) a	0.001	0.001
<i>Exp</i> pour tous les macroéléments)	2	2

Le premier résultat que l'on présente concerne la courbe de la réponse force verticale-déplacement, pour le cas d'excentricité nulle. La figure 7.17 présente une comparaison entre les résultats obtenus par nos simulations (par macroéléments et par EF avec Plaxis) d'une part et ceux de Loukidis (2008) d'autre part. Nous voyons que notre modélisation par macroéléments donne dans l'ensemble des résultats comparables avec ceux de Loukidis (2008). Cependant, les légères différences entre les résultats peuvent être imputables à un effet de maillage du modèle de Loukidis. Nous observons aussi une concordance entre les résultats obtenus par EF (avec le code Plaxis) et ceux de macroéléments et Loukidis, et nous constatons une légère différence des résultats obtenus par EF avec Plaxis par rapport aux autres modèles. Cette différence est liée aux dimensions du modèle, type de maillage et l'incrément de charge,...

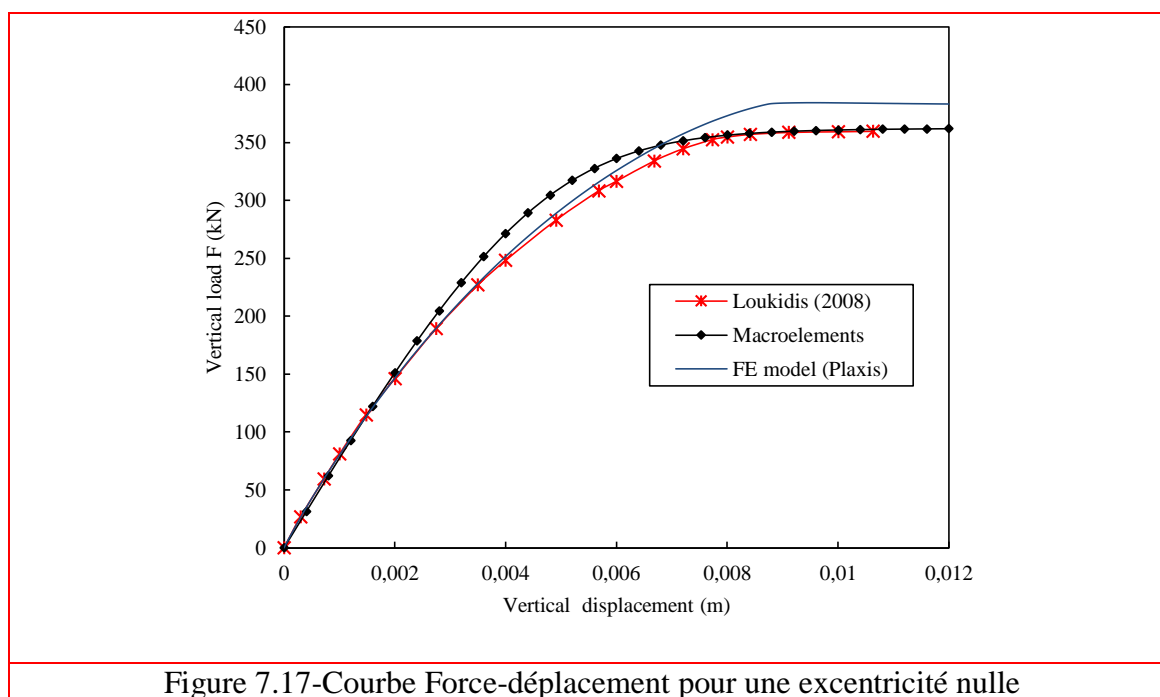
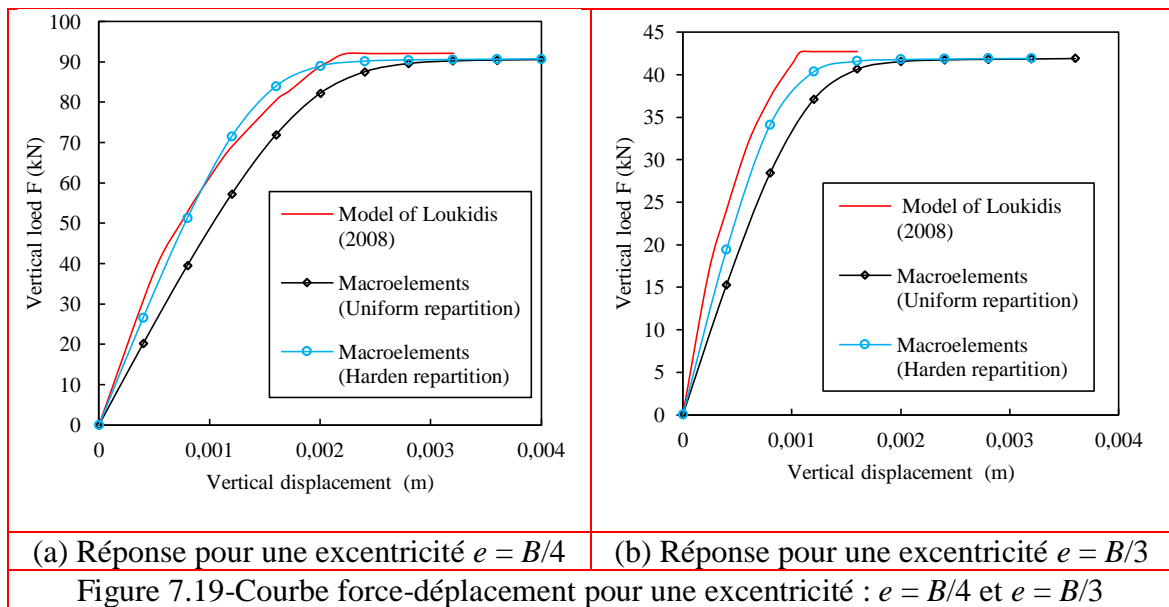
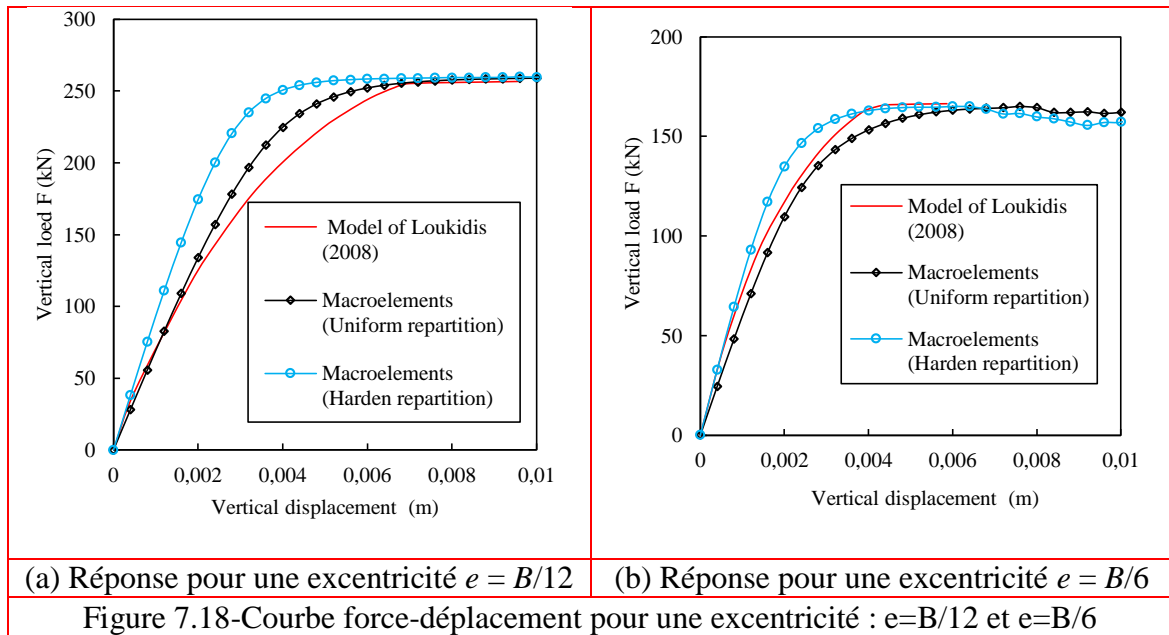


Figure 7.17-Courbe Force-déplacement pour une excentricité nulle

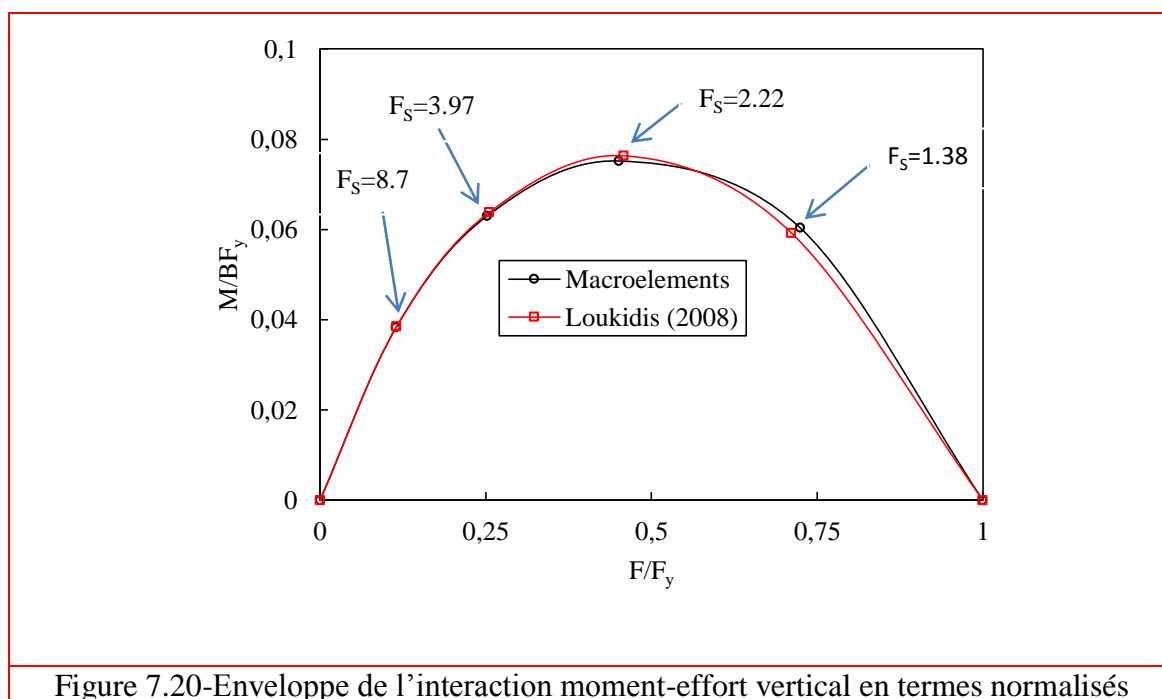
On présente ensuite sur les figures 7.18 et 7.19, les réponses non-linéaires de la semelle pour les excentricités $e = B/12$, $e = B/6$, $e = B/4$ et $e = B/3$ respectivement. Nous voyons que les résultats obtenus par notre simulation (avec les macroéléments) sont très proches à ceux de Loukidis (2008). Cependant, les légères différences entre les résultats sont prévisibles, puisque Loukidis a été ignoré les non-linéarités géométriques par contre, toutes les non-linéarités sont considérés lors de notre modélisation par macroéléments. Nous observons aussi que la rigidité du système sol-fondation représentée par celle des macroéléments est diminuée lorsque l'excentricité augmente. Cette diminution est causée principalement par le décollement de la fondation.

Nous remarquons aussi une certaine différence entre les résultats des deux simulations effectuées par macroéléments (avec une répartition uniforme et avec une répartition non-uniforme (Harden (2005))), où on note que la réponse du modèle décrite par des macroéléments avec une répartition non-uniforme, est plus rigide que celle obtenue par des macroéléments avec une distribution uniforme de la rigidité verticale, surtout pour le cas d'une faible excentricité ($e = B/12$), puisque dans ce cas le basculement de la fondation est aussi faible (il n'y eu a que du tassement du sol sous la fondation), et par conséquent la répartition de la rigidité des macroéléments le long de la fondation est normalement distribuer d'une manière uniforme, c'est pourquoi pour le cas de l'excentricité $e = B/12$ la réponse du système décrite par des macroéléments dont la rigidité est uniformément répartie est très proche à celle de Loukidis (2008). En ce qui concerne les chargements dont les excentricités

sont significatives nous constatons une bonne concordance entre les résultats des trois modèles, néanmoins une légère diminution de rigidité du système est observée pour le modèle avec une distribution uniforme de la rigidité des macroéléments.

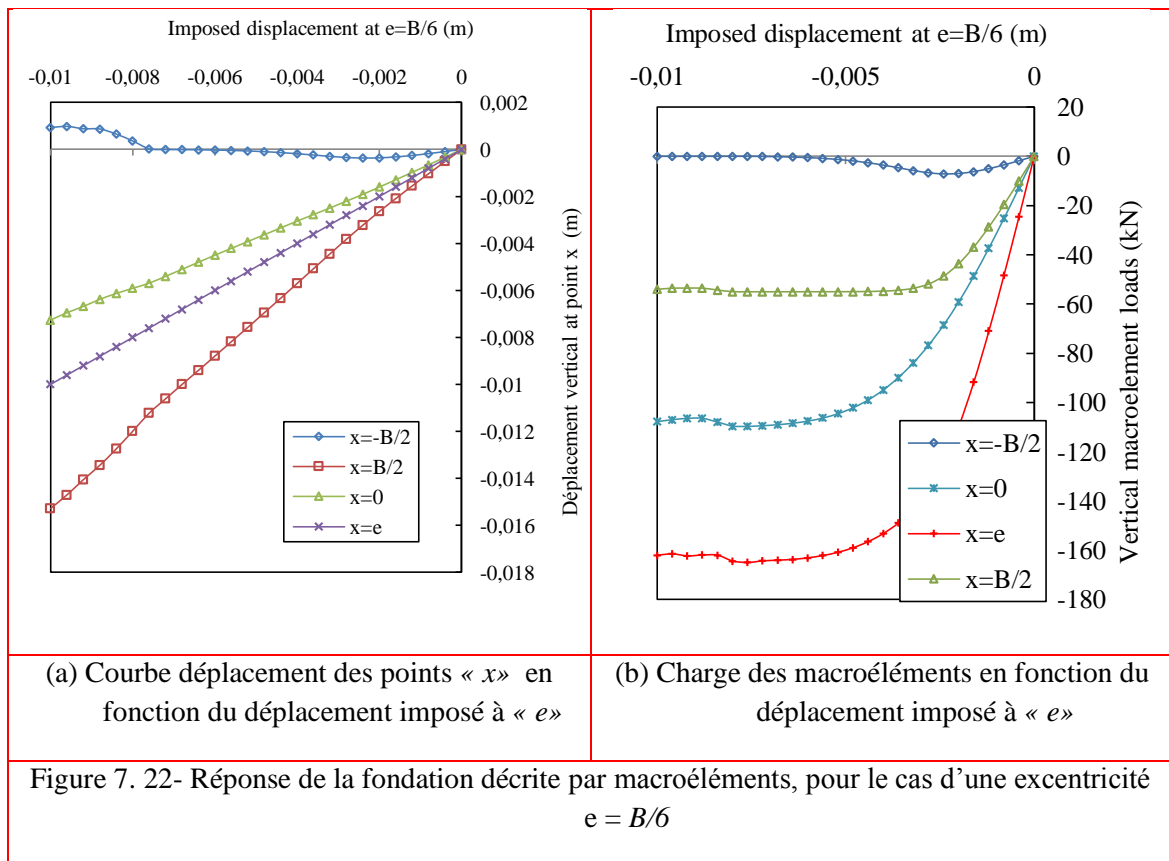
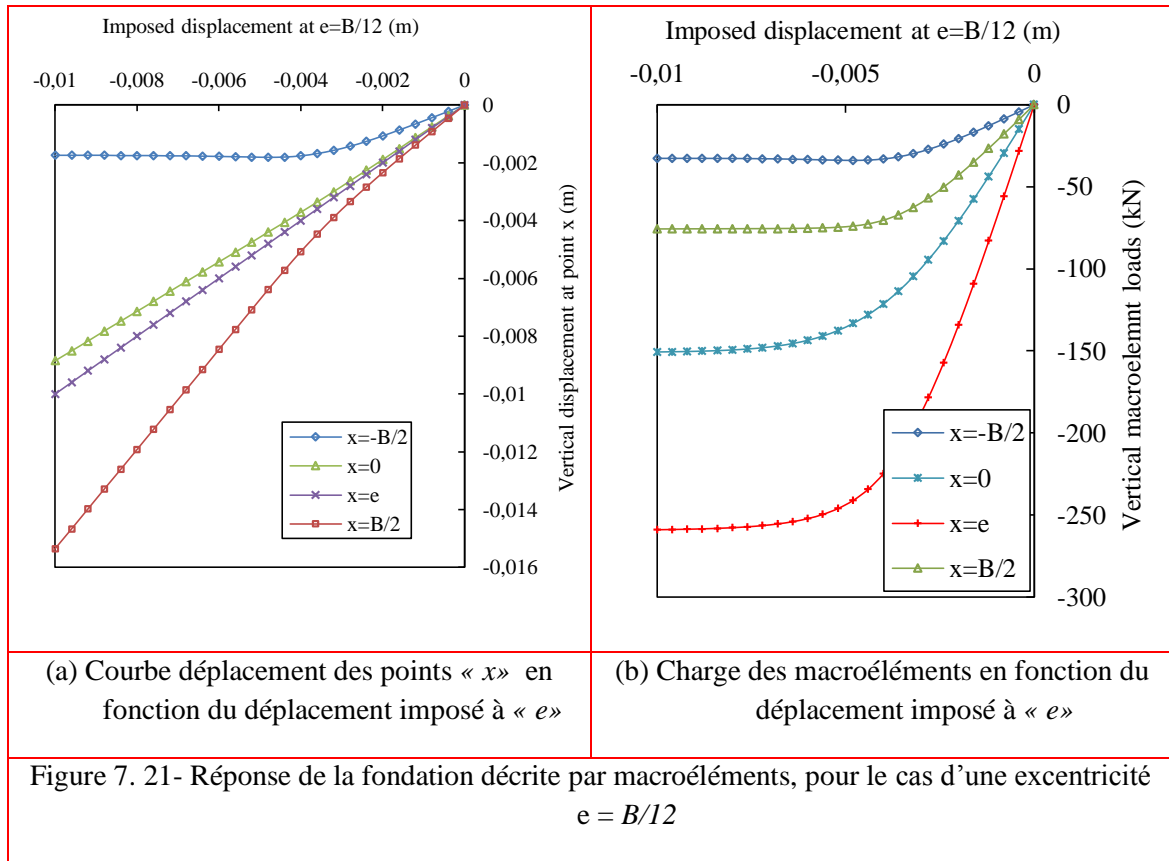


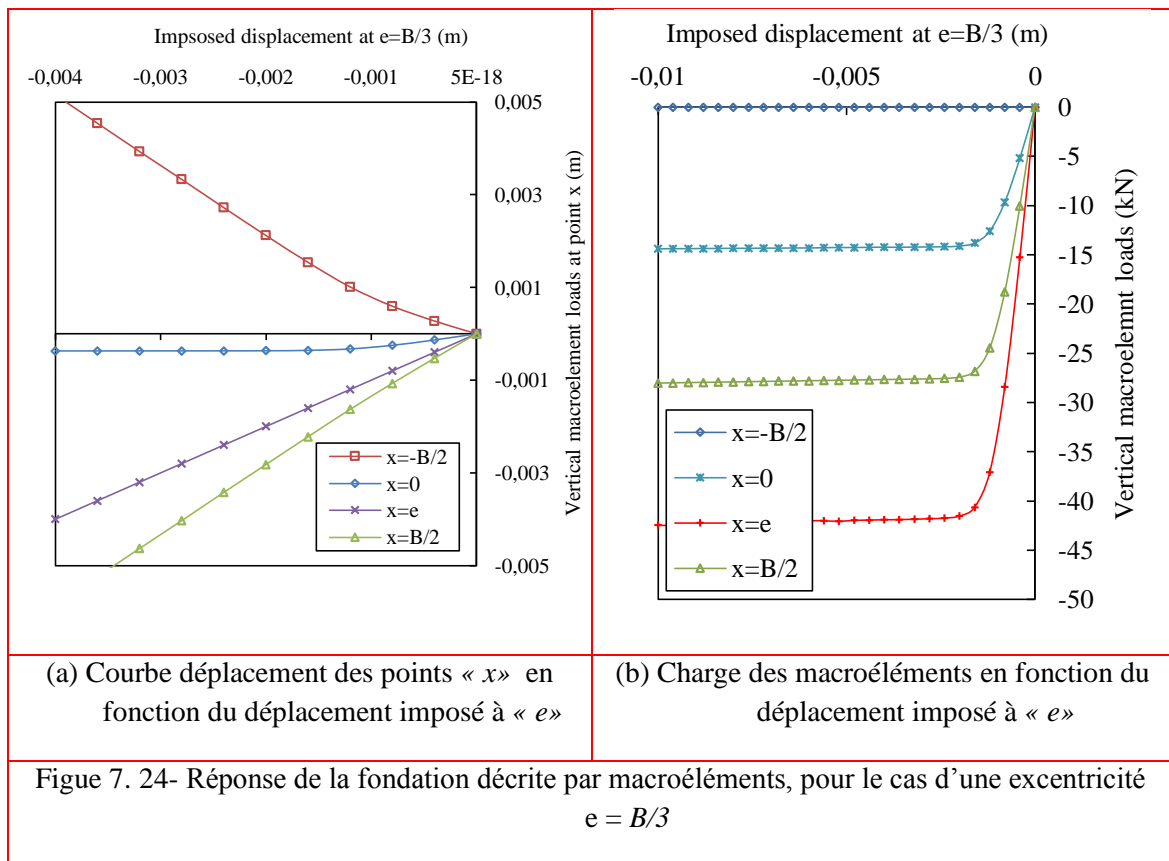
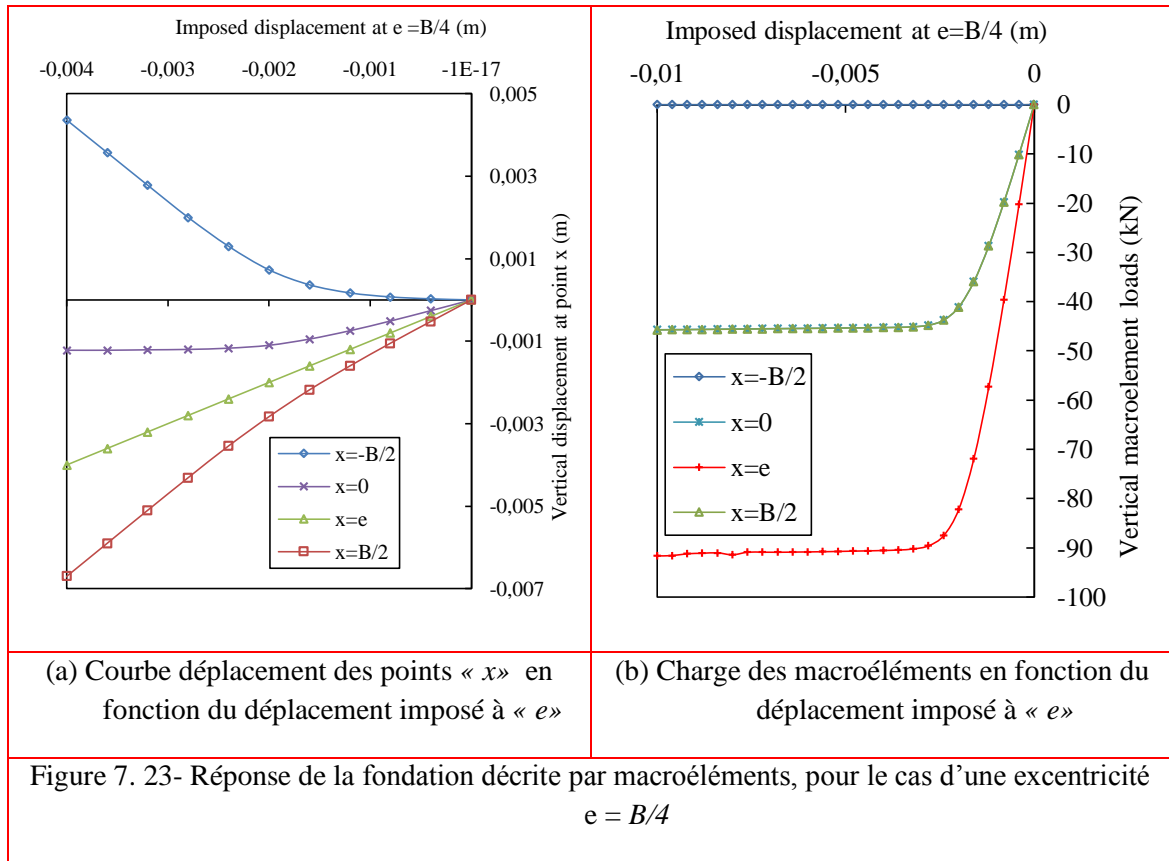
Le diagramme de la figure 7.20 présente l'enveloppe normalisée de l'interaction moment-force verticale ($M/BF_y - F/F_y$). Il indique que lorsque le coefficient de sécurité $F_s = F_y/F$ est inférieur à 2, le mécanisme prépondérant est celui de la plasticité. Par contre, pour les valeurs de F_s supérieures de 2, le mécanisme du décollement devient le mécanisme prépondérant.



La figure 7.21 montre que les non-linéarités produites pour le cas d'excentricité $e = B/12$, sont liées uniquement à la plasticité du sol au-dessous de la fondation, aucun décollement n'a été observé à cause de faible excentricité du chargement (il n'y a pas de décollement tant que l'effort vertical est appliqué dans le noyau central de la fondation, c'est-à-dire e compris entre $[-B/6, B/6]$). La figure 7.22 montre que les non-linéarités produites pour le cas d'excentricité $e = B/6$, sont liées à la plasticité du sol au-dessous de la fondation. Néanmoins une initiation au décollement de la fondation est observée.

Les figures 7.23 et 7.24 montrent que l'extrémité gauche de la fondation ($x = -B/2$) est fortement décollée lorsque l'excentricité atteint $B/4$. Pour le cas d'excentricité $B/3$, le pourcentage du décollement de la fondation est égal environ 50% (c'est-à-dire une rotation de la fondation par rapport à son centre).





7.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un nouveau macroélément orienté vers l'application du génie parasismique en insistant sur la simplicité du modèle. Il est capable de décrire les non-linéarités matérielles associées à la plasticité du sol, ainsi que les non-linéarités géométrique liées au décollement de la fondation. Cinq applications numériques de la littérature ont été étudiées afin de valider la réponse de notre macroélément sous chargements quasi-statiques monotones et cycliques. L'influence de l'excentricité des chargements (rotation de la fondation) a été aussi analysée. A la lumière de ces applications nous avons noté :

Une bonne concordance entre les résultats obtenus par notre macroélément et ceux obtenus par d'autres modèles numériques de la littérature.

Les non-linéarités du système sol-fondation est bien reproduites par notre macroélément.

Les effets de l'interaction sol-fondation doivent être pris en considération lors de dimensionnement des structures.

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

Nous avons présenté dans cette thèse une méthode de modélisation simplifiée des structures en béton armé, basée sur des éléments poutres multicouches de cinématique Euler - Bernoulli (éléments finis à couches superposées) afin d'associer dans chaque couche une loi uniaxiale pour la simulation du comportement non-linéaire de béton ou de l'acier. De cette façon il arrive à diminuer le nombre nécessaire de degrés de liberté et ainsi le temps de calcul. Les lois utilisées pour le béton et l'acier sont basées sur la mécanique de l'endommagement (La Borderie) et la plasticité respectivement. Malgré sa simplicité, le modèle permet de modéliser de façon satisfaisante le comportement global des structures en béton armé sous chargements statiques, cycliques et dynamiques (sismiques). De plus, il est capable de reproduire qualitativement le comportement local du béton (fissurations et la position des zones d'endommagement).

Dans un premier temps nous avons étudié le comportement non-linéaire d'un élément du béton sollicité au chargement monotone et cyclique de traction simple. Ensuite, nous avons étudié le comportement de l'élément sous chargement alterné (traction-compression). Les résultats obtenus montrent la capacité du modèle de La Borderie à décrire le comportement observé expérimentalement que ce soit pour des chargements monotones ou pour des chargements cycliques et alternés (traction-compression) à savoir :

- La diminution des paramètres élastiques (raideur et module de Young) lors de l'endommagement du béton (fissuration) ;
- La restauration de la raideur du béton après la refermeture des fissures ;
- Bon description des effets unilatéraux relatifs à l'ouverture et refermeture des fissures ;
- Présence de la déformation permanente lors de déchargement total.

Pour des raisons de comparaison nous avons également modélisé l'élément du béton par des éléments finis multifibres avec une loi de comportement de Mazars associée à chaque fibre. Les résultats obtenus montrent une bonne concordance entre les résultats obtenus par le

modèle de La Borderie et ceux obtenus par le modèle de Mazars lors du chargement monotone. Par contre une différence importante entre les résultats des deux modèles est observée clairement lors des chargements cycliques (charge-décharge) et alterné (traction-compression). Cette différence est prévisible puisque le modèle de Mazars ne prend pas en considération les effets unilatéraux, la restauration de la raideur et la déformation permanente.

Dans le chapitre 6 une modélisation du comportement non-linéaire des cinq structures en béton armé a été présentée et validée avec des travaux expérimentaux et numériques. La première structure est une poutre soumise à une flexion 03 points avec chargement statique d'intensité croissante appliqué à mi-travée (Benchmark MECA), la deuxième étant une poutre soumise à une flexion 03 points avec un déplacement imposé à mi-travée, le troisième c'est un test de flambement d'un poteau (poteau de Fouré), la quatrième est une poutre en flexion cyclique et la cinquième est une poutre sollicitée à un chargement sismique artificiel appliqué aux appuis de la poutre sous forme d'un accélérogramme. Les conclusions tirées de cette modélisation peuvent se résumer ci-dessous :

- Une très bonne cohérence entre les résultats de nos simulations et l'expérimentation.
- Une bonne concordance entre les résultats de nos modèles numériques et ceux d'autres modèles numériques de la littérature.
- L'analyse non linéaire reflète fidèlement le comportement des structures en bétons armés.
- Si le matériau est déchargé après avoir subi un état d'endommagement, il restaure sa raideur, les fissures précédemment ouvertes se referment mais la structure interne du matériau reste toujours endommagée.

Nous avons proposé également un nouveau macroélément orienté vers l'application du génie parasismique, sa formulation est basée sur l'approche des modèles globaux. Il est capable de décrire les non-linéarités matérielles associées à la plasticité du sol, ainsi que les non-linéarités géométrique liées au décollement de la fondation. Cinq applications numériques de la littérature ont été étudiées afin de valider la réponse de notre macroélément sous chargements quasi-statiques monotones et cycliques. L'influence de l'excentricité des chargements (rotation de la fondation) a été aussi analysée. Les résultats obtenus prouvent la performance de notre macroélément.

Concernant les perspectives, ce travail doit avoir encore des compléments :

Premièrement, l'implantation du macroélément dans un code de calcul des structures en béton armé, afin de modéliser les effets de l'ISS, avec la pris en compte des non-linéarités liées :

- à l'endommagement du béton des fondations et des structures ;
- A la plasticité des sols (non-linéarités matérielles);
- Au décollement de la fondation (non-linéarités géométriques).

Deuxièmement, l'adhérence acier-béton est supposée parfaite (déformation identique sur les deux matériaux à leur frontière $\epsilon_{\text{béton}} = \epsilon_{\text{acier}}$). Il sera intéressant et nécessaire de développer un modèle capable de décrire les phénomènes de rupture à l'interface acier-béton.

Troisièmement, les aciers transversaux ne sont pas pris en considération dans le présent modèle. Le développement d'un modèle capable de modéliser les aciers transversaux est nécessaire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Abbo, A.J., Sloan, S.W. (2000), SNAC, User manual, Version 2.0. Department of civil, Surveying and Environmental Engineering, University of Newcastle, Callaghan, Australia.
- [2] Allotey, N., El Naggar, M.H. (2003), “Analytical moment–rotation curves for rigid foundations based on a Winkler model”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 23, 367-381.
- [3] Allotey, N., El Naggar, M.H. (2008), “An investigation into the Winkler modeling of the cyclic response of rigid footings ”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 24, 44-57.
- [4] American Society of Civil Engineers, A.S.C.E. (2000), Prestandard and commentary for the seismic rehabilitation of buildings (FEMA 356), Federal Emergency Management Agency.
- [5] Antoine, L.B. (2009), “Effets du basculement des fondations superficielles sur le comportement sismique des murs de refend en béton armé”, *Mémoire de Maîtrise Es Sciences Appliquées*, Université de Montréal.
- [6] Bairrao, R., Millard, A., Jamet, P.h., Barbe, B. (1987), “A global model for reinforced concrete beams under alternate loading”, 9th SMIRT, Vol. H.
- [7] Bary, B. (1996), “Étude du couplage hydraulique-mécanique dans le béton endommagé”, *Thèse de doctorat ENS-Cachan*.
- [8] Bazant, Z.P. (1976). “Instability, ductility and size effect in strain softening concrete”. *J. Engng. Mech. ASCE*, vol. 102, 331-344.
- [9] Bazant, Z.P., Prat, P.C. (1988), “Microplane model for brittle-plastic material: 1. Theory”, *J. Engng. Mech.*, 14, No. 10, 1672-1688.
- [10] Bazant, Z.P., Xiang, Y., Prat., P.C. (1996), “Microplane model for concrete. I: Stress-strain boundaries and finite strain, II: Data delocalization and verification”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 122, 245-262.
- [11] Benouniche, S. (1979), “ Modélisation de l'endommagement du béton en compression du béton hydraulique par microfissuration en compression”, *Thèse de doctorat de docteur, Paris VI-ENSET*.

[12] Bernard, O. (2000), "Comportement à long terme des éléments de structure formés de bétons d'âges différents". Thèse de doctorat, EPFL, Lausanne, Suisse.

[13] Berthaud, Y. (1988). "Mesure de l'endommagement du béton par une méthode ultrasonore", Thèse de doctorat, Université de Paris 6

[14] Burlion, N. (1997), "Compaction des bétons : éléments de modélisation et caractérisation expérimentale", Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, Cachan.

[15] Caquot, A., Kérisel, J. (1966), *Traité de mécanique des sols*, Gautiers-Villars, France.

[16] Carol, I., Prat, P.C., Bazant, Z.P. (1992), "New explicit microplane model for concrete: theoretical aspects and numerical implementation", *Int. J. Solids Structures*, 29, No. 9, 1173-1 191.

[17] Charalampakis, A.E., Koumoussis, V.K. (2009), "A Bouc–Wen model compatible with plasticity postulates", *Journal of Sound and Vibration*, 322, 954-968.

[18] Chatzigogos, C.T. (2007), "Comportement sismique des fondations superficielles : Vers la prise en compte d'un critère de performance dans la conception", Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, France.

[19] Chatzigogos, C.T., Pecker, A., Salençon, J. (2009), "Macroelement modeling of shallow foundations", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29, 765-781.

[20] Chen, E.S., Buyukozturk, O. (1985), "Constitutive model for concrete in cyclic compression", *J. Engrg Mech.*, 11 1, No. 6, 797-8 14.

[21] Chen, W.F. (1982), "Plasticity in reinforced concrete", New York: McGraw-Hill Bookstore, 1982, 456p.

[22] Clough, R.W., Johnston, S.B. (1966), "Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements", *Japan earthquake engineering symposium*, Tokyo.

[23] Colson, A. (1984), "Modélisation des conditions aux limites de liaisons et d'assemblages en mécanique des structures métalliques", Thèse de doctorat d'état, Université Paris 6.

[24] Corn, S. (1998), "Simplification de modèles éléments finis de structures à comportement dynamique de poutre", Thèse de doctorat de l'UFR des sciences et techniques de l'université Franche-Comté.

[25] Cowper, G.R. (1966), "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory", *ASME Journal of applied Mechanics*, 33, 335-340.

-
- [26] Crémer, C. (2001), "Modélisation du comportement non linéaire des fondations superficielles sous séisme. Macro-élément d'interaction sol-structure". Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, Cachan.
- [27] Cremer, C., Pecker, A., Davenne, L. (2001), "Cyclic macro-element for soil-structure interaction: material and geometrical non-linearities", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, 25, 1257-1284.
- [28] Cremer, C., Pecker, A., Davenne, L. (2002), "Modelling of nonlinear dynamic behavior of a shallow strip foundation with macroelement", *J Earthquake Engineering*, 6(2), 175-211.
- [29] Crisfield, M.A. (1991), "Nonlinear Finite Element analysis of solids and structures", Vol I, John Wiley, Chichester.
- [30] Davenne, L., Brenet, C.h. (1998). "Macro-éléments de poutres en béton armé". Rapport interne LMT, Cachan, num. 210, juin.
- [31] Davenne, L., Ragueneau, F., Mazars, J., Ibrahimbegovic, A. (2003), "Efficient approaches to finite element analysis in earthquake engineering", *Computers and Structures*, 81, 1223-1239.
- [32] Davis, E., Booker, J. (1973), "The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clays", *Géotechnique*, 23(4), 551-563.
- [33] de Borst, R., Nauta, P. (1985) "Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model", *Engng. Comp.*, 12, 35-46.
- [34] De Ville de Goyet, V. (1989), "L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique", Thèse de doctorat, Université de Liège.
- [35] Di Maggio, F.L., Sandler, I.S. (1971), "Material models for granular soils", *J. Engng. Mech. Div.*, 97, 935-950.
- [36] Dragon, A., Mroz, Z. (1979), "A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete", *Int. J. Engng. Sci.*, 17, 121-137.
- [37] Drücker, D.C. , Prager, W. (1952), "Soils mechanics and plastic analysis or limit design", *quartely of Appl. Math.*, 10, 157-175.
- [38] Dubé, J.F. (1997), "Modélisation multicouche des voiles en béton armé", *Revue Française de Génie Civil*, vol.1, numéro 2, 285 -307.
- [39] Elachachi. (1992), "Sur l'élaboration d'une méthode simplifiée d'analyse des structures de génie civil par macro-éléments". Thèse de doctorat, Université Paris 6, France
-

- [40] Fardis, M.N., Alibe, B., Tassoulas, J.L. (1983), "Monotonie and cyclic constitutive law for concrete", *J. Engrg Mech*, 109, No. 2516-536.
- [41] Feenstra, P.H. (1993), "Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete", PhD Dissertation, Delft, University of Technology, The Netherlands.
- [42] Fichant, S., Pijaudier-Cabot, G., La Borderie, C.H. (1997), "Continuum damage modelling: approximation of crack induced anisotropy", *Mechanics Research Communications*, 24. No. 2, 109-114.
- [43] Fishinger, M., Vidic, T., Fajfar P. (1991), "Evaluation of R/C building with a structural wall designed according to Eurocode 8", *Conf. Int., Bâtiment à murs porteurs en béton en zone sismique*, Paris.
- [44] Fléjou, J.L. (1993), "Comportement dynamique des structures de génie civil avec liaison semi rigides", Thèse de doctorat, université Paris 6.
- [45] Fleury, F., Merabet, O., Reynouard, J.M. (1996), "Modélisation des structures en béton armé sous séisme : une nouvelle approche globale pour les noeuds d'ossatures", *Génie parasismique et aspects vibratoires dans le génie-civil*, Colloque national AFPS, Saint-Rémy-lès-chevreuses
- [46] Fouré, B., Virlogeux, M. (1978), "le flambement des poteaux compte tenu du fluage du béton", *Annls. de l'I.T.B.T.P.*, n° 359, Mars 1978.
- [47] Franz-Josef, ULM. (1994), "Modélisation elastoplastique avec endommagement du béton de structures. Application aux calculs statiques et dynamiques de structures en béton armé et béton précontraint", Thèse de doctorat, Ecole Nationale des ponts et Chaussées, Paris.
- [48] Friedman, Z., Kosmatka, J.B. (1993), "An improved two-node Timoshenko beam finite element", *Computers and Structures*, vol 47, No 3, 473-481.
- [49] Fukuura, N., Maekawa, K. (1998), "Multidirectional crack model for in-plane reinforced concrete under reversed cyclic actions - 4 way fixed crack formulation and verification", *Comp. Modelling of Concrete Structures, EURO-C*, 1998, 143-153.
- [50] Gazetas, G. (1991), "Formulae & charts for impedance functions of surface and embedded foundations", *Journal of Geotechnical Engineering*, 117(9), 1363-1381.
- [51] Gazetas, G. (2014), "4th Ishihara lecture: Soil–foundation–structure systems beyond conventional seismic failure thresholds", *Soil Dyn. Earthquake. Eng.*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.soildyn.2014.09.012>
- [52] Gazetas, G., Anastasopoulos, I., Adamidis, O., Kontoroupi, T.H. (2013), "Nonlinear rocking stiffness of foundations", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 47, 83-91.

-
- [53] Ghavamian, S. (2001), "MECA project benchmark: Three dimensional non linear constitutive models of fractured concrete. Evaluation-Comparison-Adaptation", Edited by EDF R&D.
- [54] Ghavamian, S., Davenne, L., Gatuingt F. (2002), "Elément de poutre multifibre (droite)", Fascicule R3.08 - Document Code Aster.
- [55] Ghavamian, S., Mazars J. (1998). "Stratégie de calculs simplifiés pour l'analyse du comportement des structures en BA : le code EFICOS", Revue Française de Génie Civil, vol.2, numéro 1, 61-90.
- [56] Giry, C. (2011), "Modélisation objective de la localisation des déformations et de la fissuration dans les structures en béton armé", Thèse de doctorat, Université de Grenoble, France.
- [57] Gopalaratnam, V.S., Shah, S.P.(1985), "Softening response of plain concrete in direct tension", ACI Materials Journal, 82, N°3, 310-323.
- [58] Grange, S. (2008), "Modélisation simplifiée 3D de l'interaction sol-structure: application au génie parasismique", Thèse de doctorat, Institut polytechnique de Grenoble, France.
- [59] Guedes, J. (1997), "seismic behaviour of reinforced concrete bridges. modelling, numerical analysis and experimental assessment", European Commission, Directorate General XII – JRC, Science, Research And Development - Joint Research Centre, Safety Technology Institute, Applied Mechanics Unit, ISPRA (VA) Italy - TP 480
- [60] Guedes, J., Pégon, P., Pinto A. (1994), "A fibre Timoshenko beam element in CASTEM 2000", Special publication Nr. I.94.31, J.R.C., I-21020, Ispra, Italy.
- [61] Gurson, A.L. (1977), "Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part 1 - Yield criteria and flow rules for porous ductile media", Engng Materials Technology, 99, 2-15.
- [62] Harden, C., Hutchinson, T.C., Martin, C.R., Kutter, B.L. (2005), Numerical modeling of the nonlinear cyclic response of shallow foundations, Pacific Earthquake Engineering Research Center PEER.
- [63] Hofstetter, G., Simo, J.C. (1993) "A modifiéci cap model: closest point solution algorithm", Comp. Struct., 46, 203-214.
- [64] Houlsby, G.T., Cassidy, M.J., Einav, I. (2005), "A generalised Winkler model for the behaviour of shallow foundations", Géotechnique, 55(6), 449-460.
- [65] Ibrahimbegovic, N., Frey, F. (1992), "Finite element analysis of linear and non linear deformations of elastic initially curved beams", LSC internal report 92/02, January, Lausanne.
-

-
- [66] Ile, N. (2000), “ contribution a la compréhension du fonctionnement des voiles en béton arme sous sollicitation sismique: apport de l’expérimentation et de la modélisation a la conception”, Thèse de doctorat, l’institut national des sciences appliquées de Lyon.
- [67] Jirásek, M. (2004). “Non-local damage mechanics with application to concrete”, *Revue française de génie civil*, 8, 683-707.
- [68] Kachanov, L.M. (1958), “On Creep Rupture Time”, *Proc. Acad. Sci., USSR, Div. Eng. Sci.*,8, 26–31.
- [69] Kachanov, L.M. (1986), “Introduction to Continuum Damage Mechanics”, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- [70] Karsan, P., Jirsa, J.O., (1969) “Behavior of concrete under compressive loading”. *Journal of Structures Div.*, Vol 95, pp 2543-2563.
- [71] Khalfallah, S., Charif, A., Guenfoud, M. (2002), “Modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé ”, *Revue française de génie civil*, 6 (7-8), 1397-1414.
- [72] Khebizi, M., Guenfoud, H., Guenfoud, M. (2014), “Modélisation des poutres en béton arme par des éléments multicouches”, *Courrier du Savoir, Université Mohamed Khider-Baskra*, N°18, Mars 2014,111-115.
- [73] Khebizi, M., Guenfoud, M. (2015), “Numerical modelling of the damaging behaviour of the reinforced concrete structures by multi-layers beams elements”, *Computers and Concrete*, 15 (4), 547-562.
- [74] Kotronis , P., Davenne, L., Mazars J. (2004), “Poutre 3D multifibre Timoshenko pour la modélisation des structures en béton armé soumises à des chargements sévères”, *Revue Française de Génie Civil*, vol. 8, issues 2-3, 329-343.
- [75] Kotronis, P. (2000), “ Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2D et 3D”, Thèse de Doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, Cachan.
- [76] Kotronis, P. (2008), “ Stratégies de modélisation de structures en béton soumises à des chargements sévères”, Mémoire d’habilitation à diriger des recherches, université Joseph Fourier, Grenoble, france.
- [77] Kotronis, P., Mazars, J. (2005a), “Simplified modelling strategies to simulate the dynamic behaviour of R/C walls”, *Journal of Earthquake Engineering*, vol. 9, issue 2, 285-306.
- [78] Kotronis. P., Ragueneau,F., Mazars, J.. (2005), “A simplified modelling strategy for R/C walls satisfying PS92 and EC8design”, *Engineering Structures*, 27, 1197-1208.
-

-
- [79] La Borderie, C. (2003), “ Stratégies et Modèles de Calculs pour les Structures en Béton”, Thèse d’habilitation à diriger les recherches, Université de Pau et des Pays de l’Adour.
- [80] Lemaitre, J. (1992), “A Course on Damage Mechanics”, Springer-Verlag, Berlin.
- [81] Lemaitre, J., Chaboche, J.L. (1986). “Mécanique des matériaux solides”, 2e édition, Dunod.
- [82] Lemaitre, J., Chaboche, J.L. (2001). “Mécanique des matériaux solides”, 2e édition (nouvelle présentation), Dunod.
- [83] Leroux, A. (2012), “ Modèle multiaxial d’endommagement anisotrope : Gestion numérique de la rupture et application à la ruine de structures en béton armé sous impacts”, Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, Cachan.
- [84] Lorrain, M. (1974), “Contribution à l’étude de la micromécanique des matériaux granulaires cohérents - Application au béton”. Thèse de doctorat, Université de Toulouse.
- [85] Loukidis, D., Chakraborty, T., Salgado, R. (2008), “Bearing capacity of strip footings on purely frictional soil under eccentric and inclined loads”, *Can.Geotech.J.*, 45, 768-787.
- [86] Ludovic, J. (2004), “relation endommagement perméabilité pour les bétons application aux calculs de structures”, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- [87] Marcio, J., Calixto, F. (2002) “Microcracking of High Performance Concrete Subjected to Biaxial Tension - Compression Stresses”, *Mat. Res.*, 5, No.3, 295-299.
- [88] Matallah, M., La Borderie, C. (2007), “Modélisation numérique de l’ouverture des fissures dans les structures en béton”, 25e rencontres de l’AUGC, Bordeaux, France, Mai 2007.
- [89] Matallah, M., La Borderie, C. (2009), “Inelasticity–damage-based model for numerical modeling of concrete cracking”, *Engineering Fracture Mechanics*, 76, 1087-1108.
- [90] Matar, M., Salençon, J. (1979), “Capacité portante des semelles filantes”, *Revue française de Géotechnique*, 9, 51-76.
- [91] Mazars, J., Berthaud, Y., Ratami, S. (1990), “The unilateral behaviour of damage concrete”, *Journal of Engineering Fracture Mechanics*. 35, 4-5, 629-635.
- [92] Mazars, J. (1984), “Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure”, Thèse de doctorat d’état, Université Paris 6.
-

-
- [93] Mazars, J. (1986), "A description of micro- and macroscale damage on concrete structures", *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, 25, 5-6, 729-737.
- [94] Mazars, J., Berthaud, Y., Ramtani, S. (1990). "The unilateral behaviour of damage concrete". *Engin. Fracture Mechanics*, Vol. 35, No 4/5, pp. 629 - 635
- [95] Mazars, J., Kotronis, P., Ragueneau, F., Casaux, G. (2006), "Using multifiber beams to account for shear and torsion . Applications to concrete structural elements", *Computer methods in applied mechanics engineering*, 195, 7264–7281.
- [96] Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G. (1989), "Continuum damage theory - application to concrete, *Journal of Engineering Mechanics*". 115(2), 345–365.
- [97] Mazars, J., Ragueneau, F., Kotronis, P. (2001), " La simulation numérique, la simulation physique, 2 approches complémentaires pour l'analyse des effets des risques naturels : le cas des séismes", XVème congrès français de mécanique, Nancy, France, Septembre 2001.
- [98] Menegotto, M., Pinto, P.E., (1973) "Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non elastic behavior of elements under combined normal force and bending". IABSE symp. on resistance and ultimate deformability of structures acted on by well-defined repeated loads, Final Report, Lisbon.
- [99] Merabet, O. (1990), "Modélisation des structures planes en béton sous chargement monotone et cyclique. Construction et validation d'un modèle numérique", thèse de doctorat de l'INSA de Lyon.
- [100] Meschke, G., Lackner, R., Mang, H.A. (1998), "An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 42, 703-727.
- [101] Mestat, P.h., Prat, M., et al. (1995), "La modélisation des ouvrages", Hermès publications, Paris.
- [102] Millard, A., et al. (1991). "Comportement cyclique et dynamique des structures en béton armé", GRECO Géomatériaux, Rapport Scientifique, Reynouard J.M. (ed), 413-452.
- [103] Monti, G., Nutti, C. (1992), "Nonlinear cyclic behaviour of reinforcing bars including buckling", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 118, No.12, 3268-3284.
- [104] Moulin, S. (2012), "Réponse statique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non linéaire", Manuel de validation, Code_Aster, fascicule V6. Août
- [105] Moulin, S. (2012.b), "Réponse sismique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non linéaire", Manuel de validation, Code_Aster, fascicule V5.02, Août
-

- [106] Moulin, S. (2012.c), “Multifibre beam element (right)”, Code_Aster,
- [107] Nadai, A. (1950), “Theory of flow and fracture of solids”, Deuxième édition, New-York, Mc Graw Hill, Vol. 1, pp. 572.
- [108] Newmark, N.M. (1959), “A method of computation for structural dynamics”. A.S.C.E. Journal of Engineering Mechanics Division, 85, 67-94.
- [109] Nguyen, T.D. (2010), “Apport de la modélisation mésoscopique dans la prédiction des écoulements dans les ouvrages en béton fissuré en conditions d'accident grave”, Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- [110] Nguyen, X.H. (2006), “Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles porteurs: expérimentation et modélisation”, Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, France.
- [111] Nguyen, X.H., Mazars J., Kotronis, P. (2005a), “Analyse prévisionnelle du comportement sismique d'une structure en béton à murs contreventés”. Colloque National MECAMAT, Aussois 24-28 Janvier, Org. Groupe Français de Mécanique des Matériaux, C.Génin, F.Hild, L.Rota et le Pôle Francilien de Dynamique.
- [112] Nguyen, X.H., Mazars, J., Kotronis, P. (2005b), “Modélisation des structures en béton armé par élément de poutre multifibre”, Congrès Français Mécanique, Troyes 29 Août- 3 Septembre, cd n° 315.
- [113] Orengo, J.R. (1990), “Modélisation numérique des structures en béton armé”, Thèse de doctorat, Ecole nationale des ponts et chaussées, France.
- [114] Ottosen, N.S. (1979), “Constitutive model for short time loading of concrete”. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 105, 127-141.
- [115] Owen, D.R.J., Hilton, E. (1980), “Finite element in plasticity: Theory and practice”, Pineridge Press Ltd, Swansea, England.
- [116] Ozbolt, J., Bazant, Z.P. (1992), “Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete”, J. Engng. Mech., ASCE, 118, No 7, 1365-1386.
- [117] Panagiotacos, T.B., Fardis, M.N. (1994), “Proposed nonlinear strut models for infill panels”, Note for PREC8 network.
- [118] Pegon, P. (1994), “A Timoschenko simple beam element in CASTEM 2000”, Special publication Nr. I.94.04. Report J.R.C, I-21020 Ispra, Italy.
- [119] Petrangeli, M., Pinto, P.E., Ciampi, V. (1999), “Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures. I: Theory”, Journal of Engineering Mechanics, vol. 125, 994- 1001, No. 9, September.

[120] Philipponnat, G., Hubert, B. (2003), *Fondations et ouvrages en terre*, Eyrolles, Paris, France.

[121] Pijaudier-Cabot, G. (1985), “Caractérisation et modélisation du béton par un essai multiaxial automatique”, Thèse de doctorat, Univ. Paris VI.

[122] Pijaudier-Cabot, G., Bazant, Z.P. (1987), “Nonlocal Damage Theory”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 113, N° 10, 1512-1533.

[123] Przemieniecki, J.S. (1985) “Theory of matrix structural analysis”. Dover Pubns, October.

[124] Ragueneau, F. (1999), “Fonctionnement dynamique des structures en béton – Influence des comportements hystérétiques locaux”, Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, Cachan.

[125] Ragueneau, F. (2006), “Comportements endommageants des matériaux et des structures en béton armé”, Mémoire d’habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

[126] Ragueneau, F., La Borderie, C., Mazars, J. (2000) “Damage model for concrete-like materials coupling cracking and friction, contribution towards structural damping: first uniaxial applications”. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 5(8), 607-625.

[127] Ramtani, S., (1990), “Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral”, Thèse de doctorat, Université Paris 6.

[128] Reissner, E. (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *J. Appl. Mech.*, pp. 69-77.

[129] Rots, J.G. (1988), “Computational modelling of concrete fracture”, PhD thesis, Delft, University of Technology (The Netherlands).

[130] Sieffert, J.G., Cevaer, F. (1992), *Manuel des fonctions d’impédances – fondations superficielles*, Ouest ed, Presses Académiques.

[131] Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1998), “Computational Inelasticity”, Springer, Berlin, (à paraître).

[132] Smith-Pardo, J.P. (2012), “Design aids for simplified nonlinear soil–structure interaction analyses”, *Engineering Structures*, 34, 572-580.

[133] Smith-Pardo, J.P., Ortiz, A., Blandon, C.A. (2014), “Biaxial capacity of rigid footings: Simple closed-form equations and experimental results”, *Engineering Structures*, 69, 149-157.

-
- [134] Spacone, E., Filippou, F.C., Taucer, F.F. (1996a), "Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of R/C Frames. I: Formulation", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25, issue 7, 711-725.
- [135] Spacone, E., Filippou, F.C., Taucer, F.F. (1996b), "Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of R/C Frames. II: Applications", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25, issue 7, 727-742.
- [136] Stéphane, M. (2012), "Réponse sismique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non linéaire", Manuel de validation, Code_Aster, fascicule V5.02, Août 2012 ;
- [137] Stéphane, M. (2012), "Réponse statique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non linéaire", Manuel de validation, Code_Aster, fascicule V6. Août 2012.
- [138] Stolarski, H., Belyschko. (1983), "Shear and membrane locking in C^0 elements", *Computers and methods in applied mechanics and engineering*, vol. 41, Issue 3, 279-296.
- [139] Takeda, T., Sozen, M.A., Nielsen, N.N. (1970), "Reinforced concrete response to simulated earthquake", *J. Engng. Div., ASCE*, 96, No ST12.
- [140] Taylor, R.L. (2000), "FEAP A finite element analysis program". University of California, Berkeley, 2000.
- [141] Terrien, M. (1980). "Emission acoustique et comportement mécanique post critique d'un béton sollicité en traction", *Bulletin de liaison des Ponts et Chaussées*, 106, 65-72.
- [142] Ulm, F.J. (1996), "Un modèle d'endommagement plastique: application aux bétons de structure". Lab. Central des Ponts et Chaussées, série ouvrages d'art OA19.
- [143] Weihe, S., Kroplin, B., de Borst, R. (1998), "Classification of smeared crack models based on material and structural properties", *Int. J. Solids Structures*, 35, No. 12, 1289-1308.
- [144] Wen, Y.K. (1976), "Method for Random Vibration of Hysteretic Systems", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 102(EM2), 249-263.
- [145] Willam, K.J., Pramono, E., Sture, S. (1987), "Fundamental issues of smeared crack models", *Int. Conf. on Fracture of Concrete and Rock, SEM/RILEM*, Shah S.P. & Swartz S.E. (eds), 142-143.
- [146] Yang, B.L., Dafalias, Y.F., Herrmann, L.R. (1985), "A bounding surface plasticity model for concrete", *J. Engng. Mech.*, 111, No. 3, 359-380.
- [147] Yazdani, S., Schreyer, L. (1990), "Combined plasticity and damage Mechanics model for plain concrete", *J. Engrg Mech.*, 116. No. 7, 1435-1451.
-