

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



## THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée à l'université 8 Mai 1945 de Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Civil et Hydraulique

Spécialité : **Génie Civil**

*Présentée par : Sekfali Nasser*

### **FIABILITE DES OUVRAGES GEOTECHNIQUES**

*Sous la Direction de : Prof. Belabed Lazhar*

#### Composition du jury :

BENMALEK M <sup>ed</sup> Larbi.	Président	<b>Prof.</b> Université 8 Mai 45 Guelma
BELABED Lazhar	Rapporteur	<b>Prof.</b> Université 8 Mai 45 Guelma
MEKSAOUINE Mohamed	Examineur	<b>Prof.</b> Université Badji Mokhtar Annaba
NOUAOURIA M <sup>ed</sup> Salah	Examineur	<b>Prof.</b> Université 8 Mai 45 Guelma
BELOUAR AbdeIghani	Examineur	<b>Prof.</b> Université de Constantine
MESSAST Salah	Examineur	<b>Prof.</b> Université 20 Aout 1955 Skikda

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

---

## ***Dédicaces***

---

*À la mémoire de ma mère pour son sacrifice,  
À ma femme pour ses encouragements,  
À mes filles (Aridj et Rouaya),  
Et à mon fils Dhiya eddine.*

---

---

# **Remerciements**

---

*Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, de m'avoir donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.*

*En second lieu, Je suis très reconnaissant envers mon encadreur le Professeur (**Lazhar Belabed**), pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période de ce travail.*

*Mes vifs remerciements vont également au **président** et aux membres du **jury** pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.*

*Enfin, Je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*



## الخلاصة

قديمًا، يستند بناء الهياكل الجيوتقنية إلى نهج حتمي تأخذ فيه جميع المعلمات قيمة ثابتة، وهذا يؤدي دائمًا إلى الإفراط في التحجيم الغير مبرر، والتقليل من قدرة حمولة التربة والإفراط في تقدير الأجهادات ومع ذلك، فإن آثار عدم اليقين المرتبطة بمعلمات التصميم على السلامة ليست مقدرة كميًا.

قمنا كذلك باستعمال طريقة بديلة لدراسة موثوقية الهياكل الجيوتقنية، التي تقوم على نظرية الاحتمالات بتطبيق عوامل السلامة الجزئية على جميع معلمات التصميم (المتغيرات العشوائية). وهذه العوامل المستمدة من الأساليب الاحتمالية تأخذ في الاعتبار تشتت معلمات التربة (النموذج العشوائي).

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تطوير رمز حساب يعتمد على طرق احتمالية لتقييم موثوقية البنيات الجيوتقنية. تم استخدام معيار للأساسات السطحية مع التحميل المحوري والسلامة المعبر عنها من خلال وجود احتمال تمزق أو مؤشر موثوقية ، مع تقييمها بواسطة رمز الحساب هذا الذي يستخدم عدة طرق احتمالية. إضافة إلى الدراسة التحليلية التي أنجزت من خلال النظر في أنواع مختلفة من وظائف توزيع المعلمة، مما سمح لنا بتقييم أفضل لآثار عدم اليقين وتحديد مجموعة المعلمات ذوي التأثير العالي. كما تمكنا أيضا بدراسة ومقارنة لمنهجين (تقليدي و شبه احتمالي) ونتائج التحليلات الأخرى لنفس المعيار في الأدبيات ، سمحت لنا بإثراء دراساتنا البارامترية وجذب معلومات مفيدة ، من بين أشياء أخرى اقترح عامل أمان عالمي جديد  $F_S = 1.89$  للمنهج القديم الذي يأخذ في الاعتبار التغير الطبيعي للمعلمات.

### الكلمات المفتاح:

الجيوتقنية. احتمال الفشل؛ مؤشر الموثوقية؛ الأساليب الاحتمالية؛ خوارزمية حسابية؛ أسس سطحية.

---

# *Résumé*

---

Traditionnellement, le dimensionnement des ouvrages géotechniques est fondé sur une démarche déterministe dans laquelle l'ensemble des paramètres prennent une valeur fixe, ce qui conduit toujours à un surdimensionnement injustifié, une sous-estimation de la capacité portante du sol et une surestimation des sollicitations. Cependant, les effets des incertitudes associées aux paramètres de conception sur la sécurité ne sont pas quantifiables.

Une méthode alternative d'étude de fiabilité des ouvrages géotechniques, qui se base sur la théorie de probabilité applique des facteurs partiels de sécurité sur tous les paramètres de conception (variables aléatoires). Ces facteurs dérivés par des méthodes probabilistes tiennent compte de la dispersion des paramètres de sol (modele stochastique).

L'objectif principal de ce travail est d'élaborer un code de calcul basé sur des méthodes probabilistes pour évaluer la fiabilité des ouvrages géotechniques. Un benchmark pour fondations superficielles avec un chargement axial a été utilisé et la sécurité exprimée au moyen d'une probabilité de rupture ou indice de fiabilité, évaluées par l'intermédiaire de ce code de calcul qui utilise plusieurs méthodes probabilistes. L'analyse est faite alors en considérant les divers types de fonctions de distributions des paramètres, ce qui nous a permis de mieux apprécier les effets des incertitudes et de cerner un ensemble de paramètres à forte incidence. Une étude comparative de deux approches (traditionnelle et semi-probabiliste), et des résultats d'autres analyses du même benchmark dans la littérature, nous ont permis d'enrichir nos études paramétriques et de tirer des renseignements utiles, entre autres de proposer un nouveau facteur global de sécurité  $F_S=1,89$  pour l'approche déterministe qui tient compte de la variabilité naturelle des paramètres.

*Mots clés : Géotechnique ; Probabilité de rupture ; Indice de Fiabilité ; Méthodes Probabilistes ; algorithme de Calcul ; Fondations superficielles.*

---

# ***Abstract***

---

Traditionally, the design of geotechnical structures is based on a deterministic approach in which all parameters take a fixed value, which leads to an oversized and unjustified *underestimation* of the bearing capacity of soil, as well as the *overestimation* of stress. However, the effects on structure safety of uncertainties associated with the design parameters are not quantifiable.

An alternative method with which to study the reliability of geotechnical structures is based on the theory of probability and involves the application of *partial safety factors* for all design parameters (random variables). These factors are derived using probabilistic methods and take into account the *dispersion* of soil parameters (stochastic model).

The main objective of this work is to develop a calculation code based on probabilistic methods to evaluate the reliability of geotechnical structures. A benchmark for superficial foundations with axial loading has been used and safety expressed by means of a failure probability or reliability index, evaluated via this calculation code which uses several probabilistic methods. The Analysis is carried out by considering the various types of parameter distributions, thereby enabling a better assessment of the effects of uncertainty and the identification of a set of parameters with high incidence. A comparative study of two approaches (traditional and semi-probabilistic), and results of other analyzes of the same benchmark in the literature, allowed us to enrich our parametric studies and to draw useful information, among others to propose a new overall safety factor  $F_S = 1.89$  for the deterministic approach that takes into account the natural variability of the parameters.

*Keywords: geotechnical; probability of failure; reliability index; probabilistic methods; calculation algorithm; shallow foundations.*

---

# *Table des matières*

---

- Introduction générale.....	1
<b>Chapitre (I)</b>	
- Concepts probabilistes pour l'ingénierie géotechnique.	
I.1. Introduction .....	3
I.2 Définition de la fiabilité .....	4
I.3 Notion du risque acceptable .....	4
I.4 Les approches successives de la sécurité.....	5
I.5 Incertitude en géotechnique.....	6
I.6 Sources d'incertitude.....	7
I.7 Types d'incertitudes.....	7
I.7.1 Incertitudes actives ou variabilité naturelle.....	8
I.7.2 Incertitudes passives ou épistémiques (l'erreur de mesure) .....	8
I.7.2.1 Erreur d'observation.....	9
I.7.2.2 Erreur d'enquête.....	9
I.7.3 Incertitude des modèles.....	10
I.8 Variables aléatoires.....	10
I.8.1 Principales caractéristiques des variables aléatoires.....	11
I.8.1.1 Les fonctions distribution de probabilité et densité de probabilité.....	11
I.8.1.2 La valeur moyenne.....	12
I.8.1.3 La variance et l'écart-type.....	13
I.8.1.4 Le coefficient de variation.....	13
I.8.1.5 L'asymétrie.....	14
I.8.1.6 La covariance et le coefficient de corrélation.....	15
I.9 Distributions de probabilité utile des variables aléatoires continues.....	17
I.9.1 Distributions normale et normale standardisée.....	18
I.9.2 Distributions log-normale standard et log-normale décalée.....	19
I.10 Analyse de fiabilité.....	20
I.10.1 Facteur de sécurité.....	21
I.10.2 Probabilité de défaillance.....	22
I.10.3 Fonction de performance.....	24
I.10.4 Indicateur de fiabilité.....	25
I.11 Couplage mécano-fiabiliste.....	26
I.11.1 Acteurs du couplage mécano-fiabiliste.....	27
I.11.2 Complexité du couplage mécano-fiabiliste.....	28
I.12 Conclusion.....	29

## Chapitre (II)

### - Produit de l'analyse de fiabilité.

II.1 Introduction.....	30
II.2 Concept d'indice de fiabilité.....	30
II.2.1 Définition de Cornell.....	30
II.2.2 Définition de Hasofer et Lind.....	33
II.3 Indice de fiabilité exact et invariant.....	33
II.4 Application au cas élémentaire Gaussien.....	34
II.5 Désignation du point $P^*$ .....	35
II.6 Transformations probabilistes.....	36
II.6.1 Transformation isoprobabiliste.....	36
II.6.2 Transformation de Rosenblatt.....	37
II.6.3 Transformation de Nataf.....	38
II.7 Recherche du point de défaillance.....	39
II.7.1 Principe des algorithmes d'optimisation.....	40
II.7.2 Méthode du gradient projeté.....	40
II.7.3 Algorithme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler.....	42
II.8 Critères de qualité.....	45
II.9 Problèmes particuliers.....	46
II.10 Niveau d'analyse de sécurité.....	46
II.11 Conclusion.....	48

## Chapitre (III)

### - Méthodes probabilistes de quantification des incertitudes

III.1 Introduction.....	49
III.2 L'Approche probabiliste.....	49
III.3 Méthode Analytique.....	50
III.4 Méthode de fiabilité du premier ordre (FORM) .....	50
III.4.1 Etat limite non linéaire .....	52
III.4.2 Distributions normales équivalentes.....	54
III.4.3 Variables aléatoires corrélées.....	55
III.4.4 Avantages et Inconvénients.....	56
III.5 Méthode d'estimation Ponctuelle.....	57
III.5.1 Avantages et Inconvénients.....	60
III.6 Méthode de fiabilité de second ordre (SORM) .....	61
III.6.1 Approximation du Premier et second ordre de la fonction d'état limite..	61
III.6.1.1 Transformations orthogonales.....	61
III.6.1.2 Approximation du premier ordre.....	63
III.6.1.3 Approximation du second ordre.....	64
III.6.2 Formulation de Breitung.....	66
III.6.3 Formulation de Tvedt.....	67
III.6.4 Avantages et Inconvénients.....	68

III.7	Méthode de simulation de Monte Carlo.....	69
III.7.1	Introduction.....	69
III.7.2	Nombres pseudo-aléatoires uniformes.....	70
III.7.2.1	Générateur congruentiel mixte.....	70
III.7.2.2	Générateur multiplicatif.....	71
III.7.2.3	Générateur congruentiel additif.....	71
III.7.3	Générateurs de distributions non uniformes.....	71
III.7.3.1	Méthode de transformation inverse.....	71
III.7.3.2	Méthode de composition.....	72
III.7.3.3	Méthode de rejet-acceptation.....	72
III.7.4	Principes des méthodes de simulations.....	73
III.7.4.1	Simulations de Monte-Carlo classique.....	74
III.7.4.2	Simulations directionnelles.....	76
III.7.4.3	Simulations d'importance.....	76
III.7.4.4	Simulations Hyper-Cube Latin.....	77
III.7.5	Avantages et Inconvénients.....	78
III.8	Conclusion.....	78

## Chapitre (IV)

### -Principes de l'Eurocode 7

IV.1.	Introduction : .....	79
IV.2.	Structure de l'Eurocode 7.....	79
IV.3	Principes généraux de l'Eurocode 7.....	80
IV.3.1	Relations entre les autres Eurocodes.....	80
IV.3.2	Champ d'application de l'Eurocode 7.....	80
IV.3.3	Organisation des études géotechniques.....	81
IV.3.3.1	Catégories géotechniques.....	81
IV.3.3.2	Procédure de justification.....	82
IV.3.3.3	Rapport géotechnique.....	83
IV.4	Règles de dimensionnement des ouvrages géotechniques.....	83
IV.4.1	Situations de calcul.....	83
IV.4.2	Exigences Fondamentales de calcul.....	84
IV.4.3	Classification des actions.....	87
IV.4.4	Propriétés des terrains.....	87
IV.4.5	Valeurs caractéristiques.....	88
IV.4.5.1	Valeurs caractéristiques et valeurs représentatives des actions.....	89
IV.4.5.2	Valeurs caractéristiques des paramètres géotechniques.....	89
IV.4.5.3	Valeurs caractéristiques des données géométriques.....	89
IV.4.6	Valeurs de calcul.....	90
IV.4.6.1	Valeurs de calcul des actions.....	90
IV.4.6.2	Valeurs de calcul des paramètres géotechniques.....	90
IV.4.7	Etats limites ultimes.....	90
IV.4.7.1	Vérification de l'équilibre statique.....	91
IV.4.7.2	Vérification de la résistance pour les états limites de la structure	

(STR) et du terrain (GEO) dans les situations permanentes et transitoires.....	92
IV.4.7.2.1 Valeurs de calcul des effets des actions.....	93
IV.4.7.2.2 Valeurs de calcul des résistances.....	94
IV.4.7.2.3 Approches de calcul.....	95
IV.4.8 Etats limites de service.....	96
IV.4.9 Fondations superficielles.....	96
IV.4.9.1 Etats limites.....	96
IV.4.9.2 Actions et situations de calcul.....	97
IV.4.9.3 Calcul à l'état limite ultime.....	97
IV.4.9.3.1 Stabilité générale.....	97
IV.4.9.3.2 Portance.....	97
a) Méthode analytique.....	98
b) Méthode semi-empirique.....	98
c) Méthode perspective utilisant une valeur présumée de la portance.....	98
IV.4 Conclusion.....	98

## Chapitre (V)

### - Etudes paramétriques

V.1 Introduction.....	100
V.2 Modèle mécanique.....	100
V.3 Modèle stochastique.....	102
V.4 Etudes paramétriques.....	103
V.4-1 Analyse de la fiabilité .....	105
V.4-1-1 Méthode de Rosenblueth.....	106
V.4-1-2 Méthode analytique.....	107
V.4-1-3 Méthode approximative.....	107
V.4-2 Interprétation des résultats.....	109
V.4-2-1 Méthode analytique .....	109
V.4-2-2 Méthode FORM.....	111
V.4-2-2-1 Approche Traditionnel (cas 1) .....	111
V.4-2-2-2 Approche Semi-probabiliste (cas 2) .....	115
V.5 Conclusion.....	117
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>119</b>
<b>Perspectives.....</b>	<b>121</b>
<b>Liste des tableaux.....</b>	<b>122</b>
<b>Liste des figures.....</b>	<b>123</b>
<b>Notations.....</b>	<b>125</b>
<b>Références Bibliographiques.....</b>	<b>128</b>
<b>Annexe</b>	
<b>A. Algorithmes de calcul.....</b>	<b>133</b>

# *Introduction*



## Introduction générale

L'incertitude est un fait de la vie courante et plus pratiquement dans la géotechnique. La nature dans sa complexité offre des formes de profils de sol souvent très différentes de ceux assumés lors de l'analyse et de la conception. Les charges et les conditions environnementales défient de même les prévisions les plus précises. Les surfaces limitées, les erreurs de mesures et les variétés des procédures d'analyse compliquent d'avantage la tâche de l'ingénieur.

La conception de tout ouvrage en génie civil, en particulier la géotechnique (fondations, murs de soutènement .etc.) a comme objectif principal un comportement satisfaisant sous des conditions de chargements réglementaires, tout en gardant à l'esprit la nécessité de satisfaire un double impératif de sécurité et d'économie. Il est bien évident qu'un comportement dommageable reste possible sous des conditions particulières, l'ingénieur établit un niveau raisonnable de sécurité à travers des résultats empiriques et de son expérience personnelle. La question qui vient alors est comment évaluer le niveau de sécurité qui peut être considéré comme acceptable ? Un concepteur expérimenté peut intuitivement apprécier l'effet, sur les performances des ouvrages, des facteurs tels que les variations des charges et des résistances, les erreurs de modèles, la qualité d'exécution des travaux, et les conditions de site imprévues.

Dans la pratique traditionnelle de conception, le dimensionnement est obtenu par l'intermédiaire d'un facteur de sécurité global dans lequel l'ensemble des paramètres prennent une valeur fixe. Ce facteur de sécurité est essentiellement fondé sur l'expérience acquise des projets similaires. Une telle appréciation du niveau de sécurité dépend fortement du cadre de l'analyse, et ne fait aucune distinction entre les incertitudes de modèle et les incertitudes des paramètres.

Dans l'approche probabiliste on renonce à la notion classique du facteur global de sécurité, auquel une appréciation du risque peut être obtenue en incorporant les diverses incertitudes modélisées par des variables aléatoires dans une formulation mathématique du risque. Ces incertitudes proviennent le plus souvent de variabilités liées aux imperfections des conditions d'essais, base de données limitée, effet d'échelle entre éprouvettes d'expérimentation, à des facteurs incontrôlés ou simplement de la difficulté d'accéder à certaines données ou informations.

Les paramètres du sol varient généralement dans l'espace dans les directions horizontales et verticales (Jiang & al, 2015; Chu & al, 2015). En raison de cette nature, l'approche probabiliste qui intègre l'incertitude pour évaluer la capacité la capacité portante des fondations, telle que la

variabilité spatiale inhérente des propriétés du sol, domine souvent de nombreux événements ou problèmes d'intérêt pour les ingénieurs géotechniques. Dans la littérature, un certain nombre d'auteurs ont étudié l'effet de la variabilité spatiale dans les propriétés du sol sur la capacité portante des fondations (par exemple Li & al, 2015, Barakat et al 2015). La réglementation exige que le danger et les risques associés avec les ouvrages géotechniques, en particulier les fondations superficielles, être quantifiés. Statistiques, danger et évaluation des risques sont des outils importants pour tenir compte des incertitudes dans une conception et aident au processus de prise de décision.

L'idée de base dans ce travail, est d'utiliser un nouveau concept qui a pour objet de mesurer la sécurité d'un ouvrage, en prenant en compte ces divers incertitudes sous un angle probabiliste, qui est exprimée par la probabilité de rupture  $P_f$  ou par l'indice de fiabilité  $\beta$  défini par Hasofer/Lind. Ce nouveau concept permet en théorie une comparaison objective et rationnelle des différents modes de rupture d'une structure et même des différentes structures à travers un indice de fiabilité homogène et invariable. On évalue à cette occasion des facteurs partiels dérivés des méthodes probabilistes pour couvrir la dispersion aléatoire des paramètres influant sur la stabilité de l'ouvrage au lieu d'un facteur global de sécurité (concept conventionnel). L'objectif de ce travail est l'application d'une nouvelle approche semi-probabiliste dans la vérification de la stabilité des ouvrages géotechniques en générale et les fondations superficielles en particulier, et d'éclaircir l'influence de plusieurs paramètres (mécaniques, statistiques). Une étude comparative de deux approches classique et semi-probabiliste nous montre que cette dernière est de loin la plus défavorable. De plus, cette approche assure l'utilisation souvent économique des matériaux et met la situation du côté de la sécurité. Ceci nous a également permis de proposer une nouvelle valeur du facteur de sécurité global  $F_S=1.89$  inférieure à la valeur habituelle qui est égale à (2), qui prend en compte la variabilité naturelle des paramètres.

## **Chapitre (I)**

# *Concepts probabilistes dans l'ingénierie géotechnique*

## Chapitre I

### Concepts probabilistes pour l'ingénierie géotechnique

#### I.1 Introduction

On reconnaît depuis longtemps que les incertitudes, telles que la variabilité spatiale inhérente des propriétés du sol, dominent souvent de nombreux événements ou problèmes d'intérêt pour les ingénieurs géotechniciens. Traditionnellement, les ingénieurs essayent de résoudre ces problèmes par un calcul déterministe en utilisant des facteurs de sécurité globale et en adoptant des hypothèses conservatrices dans le processus de planification et de conception d'ingénierie. De cette façon, un système d'ingénierie peut être surévalué et extrêmement coûteux. En outre, même les méthodes déterministes avancées deviennent inutiles lorsque l'incertitude est très élevée. En conséquence, le niveau de fiabilité d'une structure géotechnique ne peut être estimé quantitativement.

L'évaluation des incertitudes géotechniques n'est pas une tâche facile. En fait, l'incertitude est inévitable, en raison du manque de connaissances parfaites ou de l'information incomplète sur les données disponibles. Pour cette raison, la détermination de l'incertitude nécessite nécessairement l'application de la théorie des probabilités, qui quantifie et intègre l'incertitude dans le processus de conception de manière cohérente. Malgré les avantages tirés d'une analyse probabiliste, les ingénieurs sont souvent encore sceptiques en adoptant cette approche, car ils pensent, à tort, que l'effort de calcul requis est beaucoup plus important que pour une analyse déterministe. En outre, des difficultés sont parfois rencontrées pour comprendre et interpréter les résultats probabilistes. L'analyse probabiliste ne doit cependant pas être considérée comme un substitut à la conception déterministe conventionnelle, c'est en fait une mesure complémentaire pour faire face aux incertitudes.

Le présent chapitre a pour objet de fournir les données statistiques et Concepts probabilistes de variables aléatoires continues, qui sont fondamentales pour cette étude, comme la valeur moyenne ou l'écart-type. Pour des descriptions plus détaillées sur le contexte mathématique de la théorie des probabilités, l'auteur se réfère à Ang et Tang (1975). Le chapitre commence par examiner les sources primaires et les types d'incertitude dans le domaine géotechnique, Soulignant l'importance d'utiliser des méthodes probabilistes comme alternative à l'analyse déterministe pour quantifier les incertitudes.

Il continue en fournissant une définition de variables aléatoires et en décrivant leurs caractéristiques principales et certaines distributions de probabilités continues utiles. Enfin, le chapitre abordera l'analyse de la fiabilité, soulignant l'importance d'évaluer la probabilité de défaillance d'un système d'ingénierie.

## I.2 Définition de la fiabilité

La maîtrise de l'incertain devienne suffisante pour que les risques soient bien évalués et restent acceptables, faute de quoi, ce serait jouer à l'apprenti sorcier. C'est l'objet des théories de la fiabilité. Une définition technique de ce mot est donnée par le texte retenu par l'AFNOR :

*-« aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée, le terme est aussi utilisé comme caractéristique désignant une probabilité de succès ou un pourcentage de succès ».*

Ceci présente l'intérêt d'une définition qualitative (aptitude) et d'une définition quantitative (probabilité) étroitement associées. Il faut noter qu'une telle définition tranche immédiatement un débat possible en associant la maîtrise de l'incertain à une modélisation probabiliste. Elle privilège l'approche par l'utilisation des variables aléatoires et des processus stochastiques, qui n'est pas la seule : les méthodes et outils de la logique floue, des ensembles convexes, de la robustesse peuvent également apporter leur contribution.

La fiabilité peut être considérée comme un élément d'un ensemble plus vaste constituant la sûreté de fonctionnement qui se décline elle-même en fiabilité (objet de cet ouvrage), en maintenabilité (aptitude d'un dispositif ou d'un bien à être maintenu ou rétabli en vue d'accomplir une mission requise), en disponibilité (aptitude d'un dispositif ou d'un bien à accomplir une mission requise à un instant donné) et, enfin, en sécurité (relative aux risques de dommages corporels, matériels et environnementaux liés au dispositif ou au bien considéré).

## I.3 Notion du risque acceptable

La théorie de fiabilité utilise comme mesure l'estimation d'une probabilité. Que cette probabilité soit acceptable ou non est une question très complexe et il est clair qu'une décision implique de prendre en compte la qualité de l'information disponible. L'ouvrage est dit fiable si sa probabilité de défaillance est inférieure à un seuil préfixé. Ce seuil dépend de plusieurs facteurs : la durée de vie escomptée de l'ouvrage, la qualité des données introduite dans la démarche de l'étude, les conséquences de l'éventuelle défaillance sur l'entourage, et de l'optimisation économique comme le coût de remplacement ou de maintenance.

Le tableau suivant, souvent cité dans les documents concernant les constructions civiles, indique le seuil de probabilité à prendre en compte dans l'analyse de fiabilité des structures en fonction du nombre de personnes mises en danger.

**Tableau I.1** : ordre de grandeur des probabilités cibles en construction [lemaire2005].

NB Moyen de personnes Mises en danger	Conséquences économiques		
	Sans gravité	Graves	Très graves
Petit (<0.1)	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Moyen	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
Grand (>10)	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$

#### I.4 Les approches successives de la sécurité

**a** – Si l'on fait encore appel à l'histoire des constructions, l'époque byzantine ou du moyen âge européen occidental par exemple, nous montre une procédure qu'on pourrait appeler « d'expérimentation en vrai grandeur ». On trouve beaucoup d'édifices religieux, comme les cathédrales gothiques conçues pour « l'éternité », construits sur le même modèle, c'est-à-dire sur le modèle du premier qui ait tenu, à la limite de l'impossible, avec des variantes ou des parties inachevées (les flèches des tours) quand l'amélioration était réfutée par les lois de la nature.

D'autre part, parmi des modèles identiques, certains sont arrivés jusqu'à nous, d'autres pas, en fonction des sollicitations qu'ils ont pu connaître : l'exemple le plus frappant est celui des drakkars vikings considérés comme de petites merveilles de la construction navale mais dont on ne connaît pas le pourcentage de ceux qui ont péri dans des tempêtes extrêmes. On peut citer aussi la cathédrale de Borsa (Syrie) qui aurait été construite à l'identique de l'église Sainte Sophie (Istanbul) mais qui fut rasée par un tremblement de terre. Les « villes mortes » au nord de la Syrie comptent encore quelques belles coupôles byzantines en pierre qui ont résisté plus ou moins aux sollicitations sismiques.

**b** – Ce n'est que dans un passé récent (18<sup>ème</sup> siècle en Europe occidentale) que l'approche empirique (art de construire et expérimentation en vrai grandeur) et statistique (observation des accidents) a été remplacée par une approche numérique, à laquelle les travaux de Hooke, Navier, Cauchy, Saint Venant, ont ouvert la voie. Mais cette nouvelle approche basée sur l'analyse des contraintes et de leurs effets eut pour conséquences de réduire le concept de sécurité à une notion

déterministe : le critère de ruine du matériau avec sa limite de rupture puis sa limite élastique et un coefficient modérateur qui permettait d'obtenir la contrainte admissible.

Ce coefficient modérateur fut appelé « Coefficient de Sécurité », laquelle fut ainsi réduite à un seul nombre, englobant ainsi la somme des ignorances-certains l'appelèrent du reste « facteur d'ignorance ». On voit que les éléments essentiels que sont les événements extrêmes et l'analyse de la pathologie des ouvrages, laquelle prend plus directement en compte leur comportement limite, ont disparu.

c – La première contestation du coefficient de sécurité vint du professeur Streletsky au congrès international de Vienne, en 1928, ou il déclara que « le coefficient de sécurité était dépourvu de sens ». Il fut traité de nihiliste. Il fallut attendre 20 ans pour une nouvelle attaque, cette fois en règle, contre les concepts déterministes au 3<sup>ème</sup> congrès de l'AIPC de Liège en 1948, par M. Prot, R. Levi et J. Dutheil. Le relais fut pris, pour les structures, dans les années 50 par Freudenthal, qui devint le chef de file de l'approche probabiliste de la sécurité et, pour les sols, à la fin des années 50 et au début des années 60 avec R. Levi et G. Lazard.

Depuis, l'approche probabiliste de la sécurité a considérablement avancé dans le domaine des structures – depuis le 1<sup>er</sup> règlement aux états limites en 1966 pour la construction métallique mais relativement peu pour les sols.

## **I.5 Incertitude en géotechnique**

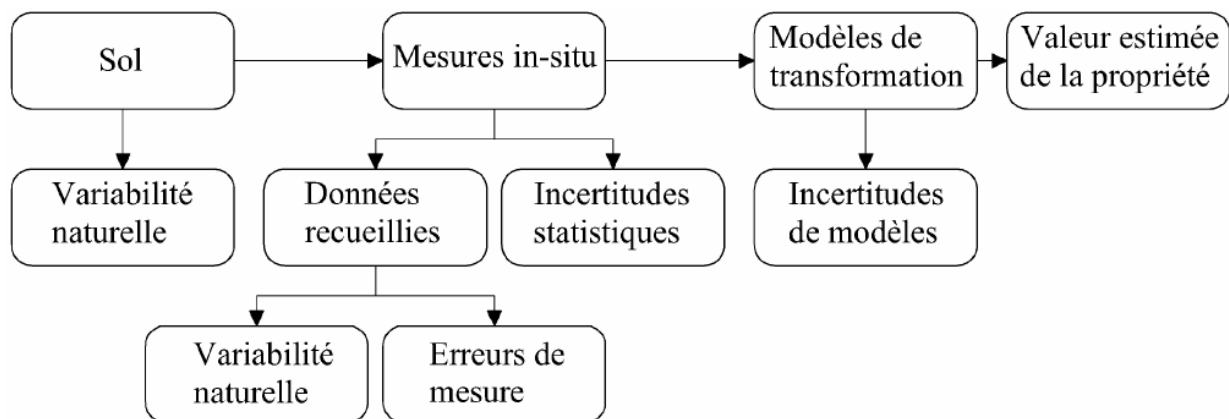
De nombreuses sources d'incertitudes existent dans le domaine de la géotechnique allant de la variabilité des propriétés du sol à la technique d'échantillonnage et d'essai. Les géotechniciens tentent toujours de faire face à ces problèmes en utilisant des analyses déterministes, qui sont fondées sur la notion classique du facteur global de sécurité. Cependant, l'expérience pratique montre que l'approche déterministe, fondé sur des conceptions conservatrices, ne sont pas toujours à l'abri de l'échec, et ne convient pas pour traiter rationnellement l'incertitude. Par conséquent, la fiabilité d'un système ne peut pas être correctement évaluée.

Les auteurs Einstein et Baecher (1982) ont déclaré dans un de leurs articles que « En réfléchissant sur les sources d'incertitude en géologie de l'ingénieur, on se retrouve avec le fait que l'incertitude est inévitable. On essaie de la réduire autant que possible, mais finalement elle doit être confrontée. La question n'est pas de savoir ce qu'il faut faire face à l'incertitude, mais comment ».

À cet égard, une évaluation rigoureuse de l'incertitude liée à des problèmes géotechniques exige nécessairement l'application de la théorie probabiliste comme un complément aux analyses déterministes classiques. En fait, les concepts probabilistes et les méthodes, associés à la théorie statistique, offrent une base théorique pour quantifier les incertitudes de manière cohérente, les rendant en termes mathématiques précis. De cette façon, un cadre logique est fourni pour la fiabilité et l'analyse des risques.

## I.6 Sources d'incertitude

La variabilité géotechnique résulte des différentes sources d'incertitudes. Selon Kulhawy (1992), l'identification des incertitudes en géotechnique consiste à modéliser trois types d'incertitude (Figure I.1) : la variabilité naturelle du sol, l'erreur de mesure et l'incertitude des modèles.



**Figure I.1** : Type des incertitudes des propriétés du sol (Kulhawy 1992)

La variabilité inhérente résulte principalement des processus géologiques naturels qui ont créé des couches de sol in situ. L'erreur de mesure est causée par l'échantillonnage et les tests de laboratoire.

Cette erreur est accrue par l'incertitude statistique qui découle d'une quantité limitée d'informations. Enfin, l'incertitude du modèle est introduite lorsque les mesures du terrain ou de laboratoire sont transformées en paramètres d'entrée pour les modèles de conception impliquant des simplifications et des idéalizations.

## I.7 Types d'incertitudes

Les incertitudes associées à l'ingénierie géotechnique peuvent être divisées en trois catégories: l'incertitude inhérente ou naturelle (aléatoire), les incertitudes dues à l'absence de connaissance parfaite (épistémique) et à l'erreur humaine.



L'incertitude aléatoire est attribuée à la variabilité naturelle ou au caractère aléatoire d'une certaine propriété, telle que la variation spatiale de la cohésion, des propriétés de la couche du sol et de l'angle de frottement interne. Elle pourrait être quantifiée par des mesures et des estimations statistiques ou par des experts. Ce type d'incertitude est imprévisible et donc irréductible par la collecte des données expérimentales en plus ou l'utilisation de modèles plus raffinés. Pour ce type d'incertitude, le terme probabilité signifie la fréquence d'occurrence d'un événement aléatoire, qui est une propriété innée de la nature.

L'incertitude épistémique (à partir de l'épithème grecque) signifie le manque de connaissance d'un système et elle est liée à des données limitées ou ambiguës, à une erreur de mesure, à une connaissance incomplète, à des modèles imparfaits et à un jugement subjectif. Elle peut en principe être quantifiée par des experts, mais non mesurée. Ce type d'incertitude peut être réduit en recueillant davantage de données expérimentales, en améliorant les méthodes de mesure et de calcul et en utilisant des modèles plus raffinés. Pour ce type d'incertitude, le terme probabilité signifie le degré de croyance dans l'occurrence d'un événement aléatoire, qui est une interprétation subjective de l'individu, i.e. Le jugement technique d'un expert. En géotechnique, les incertitudes aléatoires et épistémiques coexistent dans la plupart des applications pratiques.

### **I.7.1 Incertitudes actives ou variabilité naturelle**

Ce type d'incertitude est lié à la réalisation du phénomène physique que l'on observe. Imaginons que chaque mesure de la propriété du sol est parfaite. Cependant, cette propriété varie d'un point à un autre dans l'espace. Cette source d'incertitude résulte principalement des processus géologiques (érosion, transport, sédimentation et mouvements tectoniques, etc.) qui ont produit et modifié continuellement les propriétés du sol. Elle peut avoir divers degrés et donc entraîner différents moyens d'investigation, de prise en compte et de modélisation.

### **I.7.2 Incertitudes passives ou épistémiques (l'erreur de mesure)**

Une propriété d'un sol, pour un lieu et un instant donné, a une valeur vraie, exacte. La mesure que l'on fait de cette propriété donne une valeur approchée de la valeur vraie. La différence entre la valeur vraie et la valeur mesurée est appelée erreur. Les incertitudes passives sont liées à la mesure que l'on fait d'un phénomène (Dubost 2009).

### I.7.2.1 Erreur d'observation

On distingue trois types d'erreurs d'observation :

- **Erreur de mesure  $e_{mes}$**  : Cette erreur est liée à l'appareil de mesure et à l'opérateur.

Avec le progrès de la métrologie et l'acquisition automatique, les erreurs d'imprécision et d'opérateur ont été considérablement réduites.

- **Erreur de représentativité  $e_{rep}$**  : Elle provient de la transformation de la mesure physique (i.e. pour obtenir la grandeur de la propriété recherchée dont les grandeurs mesurées sont des déplacements, des longueurs, des masses et des températures).

Cette transformation peut être directe, l'erreur est alors liée à l'étalonnage et au tarage de l'appareil ; ou bien indirecte, comme par exemple pour déterminer à partir d'un essai préssiométrique les valeurs déduites de la courbe d'expansion de la sonde.

- **Erreur de l'instant  $e_{inst}$**  : Elle provient de la variation de la propriété entre le moment de mesure et le moment où le matériau est mis en œuvre. On peut citer la variation de teneur en eau d'un sol qui peut varier en fonction des conditions climatiques, de son transport éventuel et de son remaniement.

### I.7.2.2 Erreur d'enquête

- **Erreur d'enquête proprement dit** : Elle est liée à une mauvaise conduite des reconnaissances géotechniques. Les mesures effectuées ne sont pas représentatives du problème et on peut citer comme exemple le cas d'une zone d'investigation insuffisante au regard de l'ouvrage projeté : zone d'ancrage des clous d'un mur de soutènement non investiguée, profondeur de sondage insuffisante pour caractériser le sol sollicité par une fondation, etc...

- **Erreur d'échantillonnage** : Elle n'est pas, à proprement dite, une erreur. Dans la pratique, l'erreur d'échantillonnage est due au fait que les mesures réalisées représentent seulement un échantillon d'une population finie ou infinie. Plus le nombre d'échantillons est grand, plus ce type d'erreur est réduit. On parle alors d'intervalle de confiance lorsque l'on donne un intervalle qui contient, avec un certain degré de confiance, la valeur à estimer d'une propriété d'un matériau. Le degré de confiance est en principe exprimé sous la forme d'une probabilité, habituellement de l'ordre de 90% à 99%.

### **I.7.3 Incertitude des modèles**

La modélisation d'un matériau est une démarche ayant pour but de décrire et de comprendre sa situation réelle, et si possible de donner des éléments de prévision sur son évolution. Cette modélisation nécessite d'introduire une loi de comportement qui simplifie la situation concrète du matériau, alors que le comportement réel de ce dernier est très compliqué à comprendre. Même s'il y a certaines lois de comportement qui sont mieux que d'autres, toutes ne font qu'approcher le modèle réel. De toute façon, tout modèle n'est ni vrai ni faux, il est acceptable dans un cadre d'hypothèses, de données disponibles et pour un objectif qui sont fixés (Boissier et al. 2005). Par ailleurs, on ne peut pas nier que certaines sollicitations naturelles appliquées aux constructions présentent un caractère essentiellement aléatoire : les actions sismiques, le vent, les sollicitations des vagues sur les structures marines, les efforts de la température ou les gradients thermiques dans les chaussées ou les barrages en béton sont des exemples typiques. Les exemples sont innombrables, même en se limitant au domaine des infrastructures, et une réflexion critique conduit rapidement à admettre que les actions connues avec une incertitude pouvant être considérée négligeable constituent plutôt l'exception : poids propre des ouvrages, certaines surcharges permanentes, etc. En conclusion, on fait une erreur de modèle indépendamment de l'erreur que l'on fait sur la mesure des paramètres du modèle choisi.

### **I.8 Variables aléatoires**

Dans une analyse probabiliste, les paramètres géotechniques, qui représentent les principales sources d'incertitudes, sont traités comme des variables aléatoires. Une variable aléatoire est une fonction mathématique définie sur un espace échantillon qui attribue une probabilité à chaque événement possible dans l'espace échantillon.

En pratique, c'est une variable pour laquelle la valeur précise (ou plage de valeurs) ne peut pas être prédit avec certitude, mais seulement avec une probabilité associée, qui décrit le résultat possible d'une expérience particulière en termes de nombres réels.

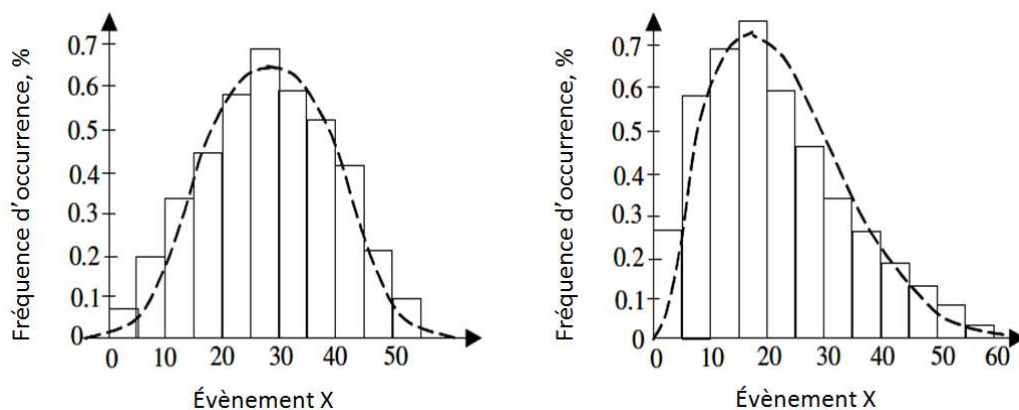
Dans cette étude, les paramètres de résistance au cisaillement du sol, cohésion et angle de frottement interne sont considérés comme des variables aléatoires pour l'analyse probabiliste du problème de capacité portante.

### I.8.1 Principales caractéristiques des variables aléatoires

Les paramètres statistiques les plus importants liés à la variabilité de la couche de sol sont la valeur moyenne, l'écart-type, l'asymétrie et les coefficients de corrélation entre les propriétés du sol. Une autre caractéristique importante est la longueur d'autocorrélation, ou échelle de fluctuation, qui décrit la variabilité spatiale d'une propriété du sol dans la direction horizontale et verticale. Comme l'information sur ce paramètre est assez limitée dans la littérature, elle est ignorée dans cette étude. Toutefois, son examen peut contribuer à réduire l'incertitude du modèle. Pour définir tous ces paramètres, nous devons recueillir beaucoup de données expérimentales sur les propriétés du sol à l'aide de tests in situ et en laboratoire.

La variabilité de ces données peut alors être tracée graphiquement sous forme d'histogrammes ou de diagrammes de fréquence, comme le montre la Figure (I.2).

L'utilisation des histogrammes, permet de vérifier la cohérence des données d'un certain événement et d'identifier les tendances, les biais dans les mesures, les erreurs dans les résultats et les valeurs aberrantes.



**Figure I.2 :** Diagramme de fréquence d'un événement donné et fonctions de densité de probabilité [Lemaire2005]

#### I.8.1.1 Les fonctions distribution de probabilité et densité de probabilité

La fonction de distribution de probabilité  $F_X(x)$ , souvent appelée fonction de distribution cumulative ou simplement CDF, décrit les mesures de probabilité qu'une variable aléatoire  $X$  prend sur une valeur inférieure ou égale à un nombre  $x$ , pour toute valeur  $x$ . Cette fonction est définie comme suit :

$$F_X(x) = P(X \leq x) , \quad \text{pour } -\infty < x < +\infty \quad (\text{I.1})$$

Pour une variable aléatoire discrète, la fonction de distribution cumulative se détermine en additionnant toutes ses mesures de probabilité sur un espace d'échantillon donné. Alors, si la variable aléatoire est continue, ses mesures de probabilité peuvent également être décrites en termes d'une fonction de densité de probabilité  $f_X(x)$ , ou simplement PDF. Cette fonction peut être intégrée pour obtenir la probabilité que la variable aléatoire prend une valeur comprise dans un intervalle donné. Formellement, la PDF est la dérivée du CDF, exprimée par la relation suivante :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (I.2)$$

Considérons les Equations. (I.1) et (I.2), la probabilité qu'une variable aléatoire  $X$  soit comprise à l'intervalle  $[x_1, x_2]$ , peut être évalué comme suit :

$$\int_{x_1}^{x_2} f_X(x) = F(X_2) - F(X_1) = P(x_1 < X \leq x_2) \quad (I.3)$$

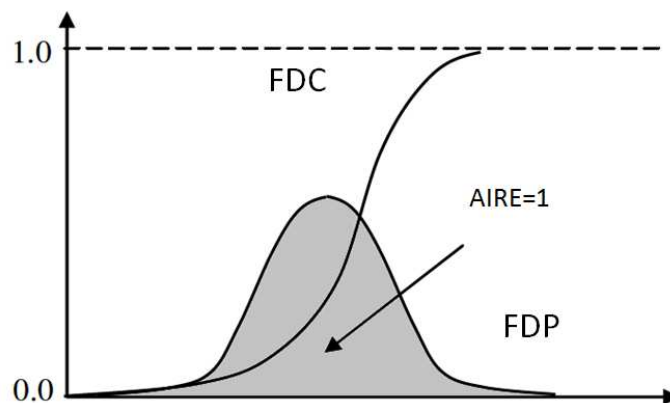


Figure I.3 : FDC et FDP pour une variable aléatoire continue [Lemaire2005]

### I.8.1.2 La valeur moyenne

La valeur moyenne d'une variable aléatoire, également définie comme prévu ou valeur centrale, est la somme de la probabilité de chaque résultat possible d'une expérience multipliée par sa valeur. Elle représente donc la moyenne pondérée de toutes les données expérimentales disponibles de la variable en fonction de la fréquence d'occurrence correspondante.

$$\mu_X = E(X) = \sum x_i \cdot P_X(x_i) \quad (I.4)$$

Alors, si  $X$  est une variable aléatoire continue, telle que les paramètres de résistance au cisaillement d'un sol homogène, et  $f_X(x)$  sa fonction de densité de probabilité, alors sa valeur moyenne est donnée par :

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f_X(x) dx \quad (I.5)$$

La valeur moyenne est également désignée comme étant le premier moment central ou centre de gravité d'une fonction de densité de probabilité, qui peut être, en même temps que la variance ou le deuxième moment central, c'est les informations que pratiquement on peut obtenir sur les données d'un sol.

### I.8.1.3 La variance et l'écart-type

Une autre caractéristique importante d'une variable aléatoire est sa mesure de dispersion ou de variance, également appelée deuxième moment central, ou moment d'inertie, de la variable. Cette quantité indique la dispersion des valeurs de la variable autour de la valeur moyenne. Pour une variable aléatoire continue  $X$  avec une fonction de densité de probabilité  $f_X(x)$ , la variance est exprimée par la relation suivante :

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) dx \quad (I.6)$$

Une mesure de dispersion plus compréhensible est l'écart-type  $\sigma$  donné par la racine carrée de la variance, et exprimée comme suit :

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \quad (I.7)$$

Comme son nom l'indique, il donne sous une forme standard une indication des écarts possibles par rapport à la valeur moyenne. Il sera possible d'observer aussi dans les chapitres suivants que l'écart-type est d'une grande importance dans l'évaluation des incertitudes des variables aléatoires d'entrée et de leurs conséquences.

### I.8.1.4 Le coefficient de variation

Il sera difficile de préciser si la dispersion d'une variable est grande ou petite seulement sur la base de l'écart type, mais il est plus commode d'utiliser un autre paramètre appelé coefficient de variation, ou simplement  $V$ . Ce coefficient non dimensionnel décrit si la dispersion par rapport à la valeur centrale d'une certaine variable aléatoire est grande ou petite. Il est défini comme le rapport de l'écart-type par rapport à la valeur moyenne de la variable aléatoire, c'est-à-dire.

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (I.8)$$

Certains auteurs ont recueilli des informations sur les fourchettes de valeurs des coefficients de variation de la variabilité spatiale des différentes propriétés du sol, telles qu'elles sont tirées par des mesures in situ des sols et de la variabilité due aux erreurs de mesure. Des études faites sur les valeurs de  $V$ , parmi lesquelles celle de Phoon et Kulhaway (1999), donnant une bonne indication de l'ordre de grandeur pour les valeurs de  $V$  de la variabilité du sol. Présenta des données pour un sable et une couche d'argile à des valeurs de  $V$  entre 5-15% pour l'angle de frottement effective. Cette fourchette a également été proposée par Harr (1989) et Cherubini (1997). Des valeurs plus élevées de  $V$  trouvées pour l'angle de frottement, comme dans le rapport de Moormann et Katzenbach (2000), où une valeur d'environ 30% est indiquée pour l'argile de toute la région de Francfort.

Compte tenu de la cohésion effective, Harr suggère dans son travail une valeur d'environ 20%. Cherubini présente des valeurs comprises entre 20 et 30%, Li et Lumb (1987) rapportent une couche d'argile particulière avec un COV de 40% et Moormann et Katzenbach citent 50% pour l'argile de Francfort. En se référant au poids volumique du sol, Cherubini (1998) indique que sa variabilité est plutôt limitée (c'est-à-dire inférieure à 10%) et c'est pour cette raison que ce paramètre sera considéré comme déterministe dans cette étude.

Fenton et Griffiths (2004) ont indiqué qu'il est encore difficile de choisir la valeur du coefficient de variation qui devrait être utilisée pour la caractérisation des paramètres du sol. En général, les valeurs représentatives de COV sont celles dérivées d'origines géologiques similaires et collectées sur des étendues spatiales limitées du site d'investigation en utilisant une bonne qualité de l'équipement et des procédures de contrôle.

### I.8.1.5 L'asymétrie

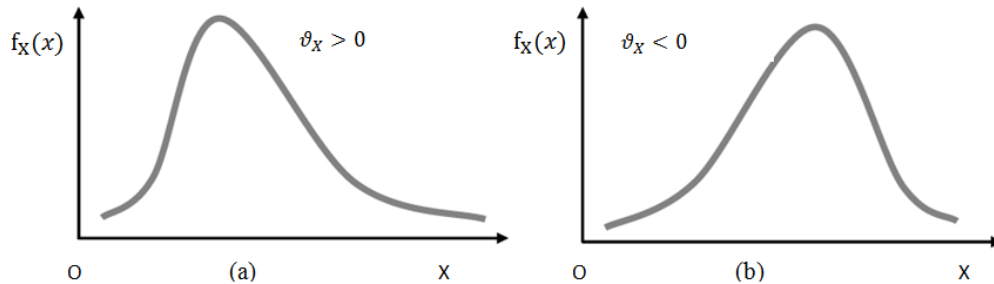
Un autre descripteur utile d'une variable aléatoire est l'asymétrie ou le troisième moment central. C'est une mesure du degré d'asymétrie d'une distribution autour de sa moyenne. Il est défini par :

$$\text{Assymétrie} = E[(X - \mu_X)^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu_X)^3 \cdot f_X(x) dx \quad (I.9)$$

La valeur de  $E[(X - \mu_X)^3]$  peut être positive ou négative. La mesure non dimensionnelle de l'asymétrie appelée coefficient d'asymétrie notée  $\vartheta_X$  est exprimé par la relation suivante :

$$\vartheta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(X - \mu_X)^3}{\sigma_X^3} \cdot f_X(x) dx \quad (I.10)$$

Lorsque le coefficient d'asymétrie est nul, alors une fonction est symétrique, comme dans le cas d'une distribution normale gaussienne. Sinon, il peut être positif ou négatif. Si  $\vartheta_X$  est positif la dispersion est plus au-dessus de la moyenne que sous la moyenne (Figure I.4a) ; et, si  $\vartheta_X$  est négative, la dispersion est plus inférieure à la moyenne (Figure I.4b).



**Figure I.4 :** Distributions Asymétriques

La Figure. I.4 (a) nous montre le cas d'une distribution positivement asymétrique, qui se présente avec une pente raide pour les faibles valeurs de la variable aléatoire et plane pour les grandes valeurs. Par contre la distribution négativement asymétrique Figure. I.4 (b) est plane pour les faibles valeurs de la variable aléatoire et raide pour les grandes valeurs.

Compte tenu des données fournies par Moormann et Katzenbach & El Ramly et al (2005), il semblerait que le coefficient d'asymétrie de l'angle de frottement effectif pourrait être négligé. D'autre part, ces auteurs trouvent une asymétrie de  $\vartheta = 1.7$  (Moormann et Katzenbach) et  $\vartheta = 4$  (El Ramly et al) pour la cohésion effective.

### I.8.1.6 La covariance et le coefficient de corrélation

La covariance, également appelée moment mixte du deuxième ordre, est une mesure du degré de dépendance linéaire entre deux ou plusieurs variables aléatoires. En considérant les variables aléatoires continues X et Y, la covariance est définie par :

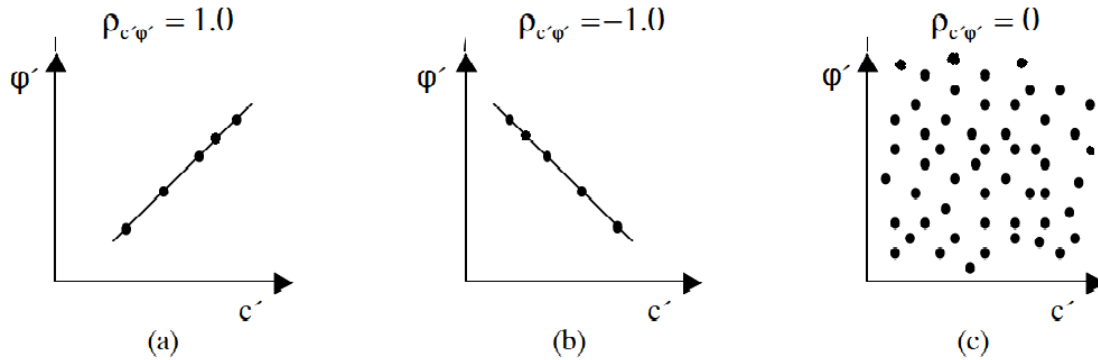
$$Cov(X, Y) = \iint_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} (X - \mu_X)(Y - \mu_Y)f_{XY}(X, Y)dxdy \quad (I.11)$$

Pour deux variables X et Y statistiquement indépendantes, la covariance sera égale à zéro. Au lieu de la covariance, on préfère utiliser la covariance normalisée ou le coefficient de corrélation, qui est donné par l'expression :

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}} \quad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \quad (I.12)$$



Lorsque le coefficient de corrélation est égal à  $\pm 1$ , il existe une relation linéaire parfaitement positive, respectivement négative, entre les variables  $X$  et  $Y$ , comme la montre la Figure. I.5(a) et I.5(b) pour la cohésion effective et l'angle de frottement interne. Cependant, quand il est nul, les variables  $X$  et  $Y$  sont dites non corrélés, représentées dans la Figure. I.5(c).



**Figure I.5 :** Corrélation des propriétés du sol

Dans le cas d'un vecteur aléatoire  $\{X\}$ , l'ensemble des termes  $Cov(X_i, X_j)$  (moments centrés  $E[X_i, X_j]$ ) forme une matrice carrée appelée matrice de covariance :

$$[C_X] = \begin{bmatrix} var(X_1) & cov(X_1, X_2) & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & var(X_2) & \cdots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \cdots & var(X_n) \end{bmatrix} \quad (I.13)$$

La matrice carrée composée des termes  $\rho_{X_i X_j}$  est la matrice de corrélation :

$$[\rho_X] = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{X_1 X_2} & \cdots & \rho_{X_1 X_n} \\ \rho_{X_2 X_1} & 1 & \cdots & \rho_{X_2 X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_n X_1} & \rho_{X_n X_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (I.14)$$

Sur la base des données expérimentales LUMB (1969) a été le premier à étudier la corrélation entre la cohésion et l'angle de frottement interne. Il a trouvé une corrélation négative entre les paramètres de résistance au cisaillement dans la gamme de  $-0.3 < \rho_{c'\phi'} < -0.7$  pour un sable limoneux. Nottrodt (1990), a pu montrer l'existence d'une relation inversement proportionnelle entre les paramètres de cisaillement effectives du sol ( $\phi'$  et  $c'$ ) : Les petites valeurs de  $\phi'$  correspondent à des grandes valeurs de  $c'$  et vice versa. Cherubini (1998), et par l'intermédiaire des essais triaxiales drainés effectués sur les argiles bleues de matera, confirme la présence d'une importante corrélation d'un ordre de  $\rho = -0.6$  entre les paramètres de cisaillement effectifs du sol.

## I.9 Distributions de probabilité utiles des variables aléatoires continues

Les caractéristiques principales d'une variable aléatoire peuvent être complètement décrites si la fonction de densité de probabilité et ses paramètres associés sont connus. Dans de nombreux cas, malheureusement, la forme de la fonction de distribution est inconnue et souvent une description approximative est nécessaire. Plusieurs distributions continues, qui jouent un rôle important dans le génie civil ainsi que dans de nombreux autres domaines techniques, peuvent être utilisées comme une bonne approximation pour une variable aléatoire.

- ✓ *Distribution Normale*: C'est la distribution la plus connue et la plus communément utilisée parmi toutes les lois de distribution de probabilité. Elle est caractérisée par deux moments statistiques qui sont la moyenne et l'écart-type ;
- ✓ *Distribution Lognormale*: La loi Lognormale décrit la distribution d'une variable dont le logarithme suit une loi normale. Elle est surtout utilisée pour modéliser des variables qui n'admettent pas des valeurs négatives. Comme pour la distribution normale, la distribution lognormale est caractérisée par deux moments statistiques qui sont la moyenne et l'écart-type ;
- ✓ *Distribution Exponentielle*: C'est une fonction à un seul paramètre. Elle est souvent utilisée pour la modélisation des données géométriques comme par exemple la distance séparant les joints des roches. Elle est aussi adaptée à la modélisation des charges sismiques (Haldar et Mahadevan 2000) ;
- ✓ *Distribution Gamma*: Cette distribution ressemble à la distribution Lognormale.
- ✓ *Distribution Bêta* : Cette distribution est recommandée dû à sa flexibilité et à ses bornes inférieure et supérieure. Elle est surtout utilisée pour modéliser des variables bornées telles que l'angle de frottement interne du sol (Harr 1987, Fenton et Griffiths 2003). Cette distribution dépend de quatre paramètres.

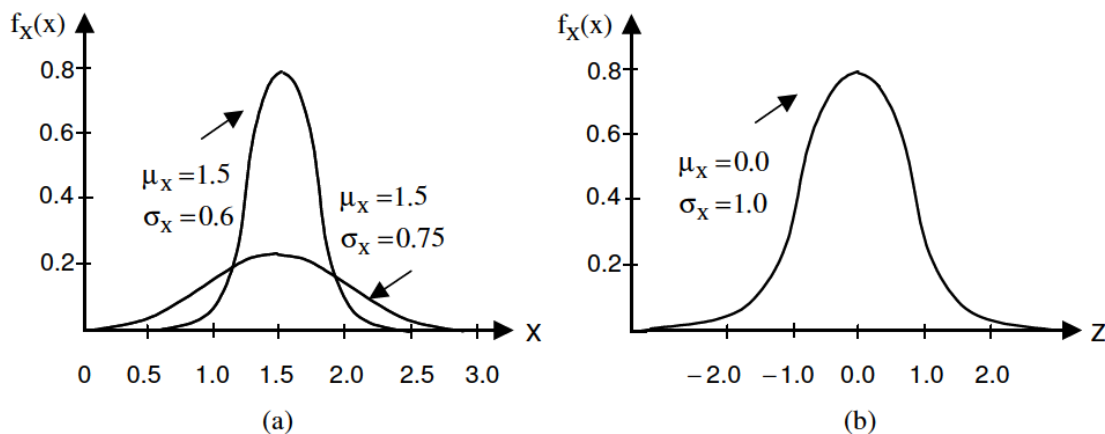
Les travaux reportés dans la littérature ont montré que chaque propriété du sol peut suivre des distributions de probabilité différentes suivant les sites. Harr (1977), Ejezie et Harrop-Williams (1984) et Failmezger (2001) recommandent une distribution Bêta pour les propriétés de cisaillement du sol ( $\phi'$  et  $c'$ ). Lacasse et Nadim (1996) proposent que la densité de probabilité de l'angle de frottement interne du sol est normalement distribuée dans les sables. Ils ont suggéré aussi une distribution Lognormale pour la cohésion dans les argiles et une loi Normale pour les limons argileux. Fenton et Griffiths (2003) suggèrent une loi Lognormale pour la cohésion et une

loi Bêta pour l'angle de frottement interne. Ces distributions continues sont appliquées lorsque les variables aléatoires peuvent prendre n'importe quelle valeur dans une certaine plage, telle que les distributions normale et lognormal décalée.

### I.9.1 Distributions normale et normale standardisée

La distribution gaussienne (ou normale) est la distribution de probabilité la plus fréquemment utilisée en raison de sa symétrie et de sa simplicité mathématique. Elle est couramment utilisée pour caractériser de nombreuses variables aléatoires dont le coefficient de variation est inférieur à environ 30%. Une variable aléatoire  $X$  est dite gaussienne ou normalement distribuée avec moyenne  $\mu_X$  et écart type  $\sigma_X$  si sa fonction de densité de probabilité  $f_X(x)$  est donnée par :

$$f_X(x) = N(\mu_X, \sigma_X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_X} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \quad \text{pour } -\infty < x < +\infty \quad (I.15)$$



**Figure I.6 :** Fonctions densité de probabilité Normale (a) et Normale standardisée (b) [Lemaire2005]

Dans la Fig. I.6 (a) la fonction de densité de la distribution normale est donnée pour deux ensembles de valeurs de paramètres. On voit que, en maintenant la valeur moyenne  $\mu_X$  constante, l'écart-type  $\sigma_X$  gouverne la propagation des courbes. Pour simplifier les calculs en utilisant l'équation (I.15), une distribution normale arbitraire peut être convertie en une distribution normale standard, tracée dans la Fig. I.6 (b), par transformation de la variable normale  $X$  en une variable centrée réduite  $Z$ , comme elle est décrite ci-dessous :

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (I.16)$$

Où  $Z$  est une variable de moyenne 0 et d'écart type 1, c'est-à-dire  $N(0,1)$ . Sa fonction de densité de probabilité correspondante est donnée par la relation :

$$\varphi_Z(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right), \quad -\infty < X < +\infty \quad (I.17)$$

Les probabilités associées à la distribution  $\varphi_Z(Z)$  sont largement tabulées dans la littérature et sont disponibles dans les bibliothèques de logiciels de la plupart des systèmes informatiques. Du point de vue géotechnique, cette distribution permet des valeurs négatives des propriétés du sol, qui sont physiquement irréalistes. Pour cette raison, cette distribution ne pourrait jamais être plus qu'une approximation grossière au mieux.

### I.9.2 Distributions log-normale standard et log-normale décalée

La distribution log-normale joue un rôle important dans la conception probabiliste car les valeurs négatives des phénomènes d'ingénierie sont parfois physiquement impossibles. On trouve des utilisations typiques de la distribution log-normale dans les descriptions des défaillances en fatigue, des taux d'échec et d'autres phénomènes impliquant un large éventail de données.

On peut dire qu'une variable aléatoire  $X$  à une distribution log-normale si son logarithme naturel  $Y = \ln(X)$  a une distribution normale, elle peut être spécifiée par sa moyenne  $\mu_X$ , son écart type  $\sigma_X$  et son coefficient d'asymétrie  $\vartheta_X$ . Alternativement, elle peut être aussi spécifiée par la valeur moyenne  $\mu_{\ln X}$  et l'écart-type  $\sigma_{\ln X}$  d'une variable normale  $\ln(X)$ .

La formule générale de la fonction de densité de probabilité d'une distribution lognormal décalée Fig.(I.7), définie aussi comme distribution logarithmique de trois paramètres, est donnée par la relation :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot (x - x_0) \cdot \sigma_{\ln(X)}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln(x - x_0) - \mu_{\ln(X)}}{\sigma_{\ln(X)}}\right]^2\right\}, \quad x_0 < x < +\infty \quad (I.18)$$

Où  $x_0$  est le paramètre de localisation ou de décalage de la variable aléatoire  $X$ . Lorsque ce paramètre est nul, on retourne à la distribution log-normale standard, qui est alors appelée distribution log-normale de deux paramètres.

L'utilisation de la distribution log-normal décalée, est possible en faisant correspondre non seulement la valeur moyenne et l'écart-type d'une certaine population de données, comme dans le cas de la fonction log-normale standard, mais aussi le coefficient d'asymétrie. Ce qui permet un ajustement de données plus réaliste. Ceci est possible en utilisant la transformation de la variable aléatoire log-normal  $X$  à la variable normale standard  $Y=\ln(X)$  par l'intermédiaire des équations suivantes :

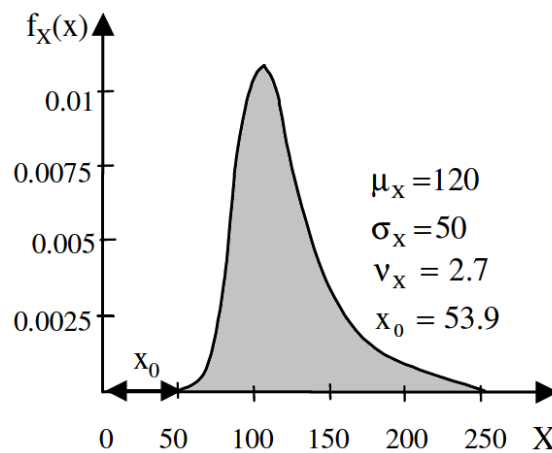
$$\mu_{\ln(x)} = \ln(\mu_X - x_0) - \frac{1}{2} \cdot \ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_X}{\mu_X - x_0} \right)^2 \right] \quad (I.19)$$

$$\sigma_{\ln(x)} = \sqrt{\ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_X}{\mu_X - x_0} \right)^2 \right]} \quad (I.20)$$

$$\vartheta_x = 3 \cdot \frac{\sigma_X}{\mu_X - x_0} + \left( \frac{\sigma_X}{\mu_X - x_0} \right)^3 \quad (I.21)$$

La distribution log-normale est généralement utilisée pour modéliser de nombreuses propriétés du sol, car elle est strictement non négative. Donnant souvent une forme raisonnable dans le cas où le coefficient de variation est supérieur à 30%, comme pour le cas de la cohésion effective. De plus, les propriétés du sol telles que la cohésion sont souvent mesurées sous la forme d'une moyenne géométrique sur un certain volume, dont la distribution tend vers la distribution log-normale par le théorème central limite.

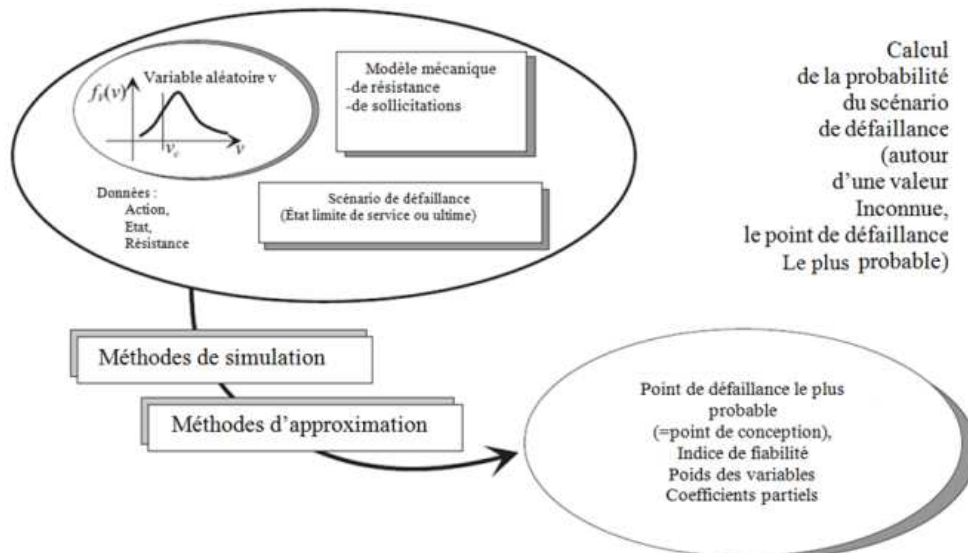
On peut conclure que les distributions normales et log-normale peuvent bien représenter la distribution naturelle pour de nombreuses propriétés du sol variant spatialement.



**Figure I.7** : fonction de densité log-normale décalée[Russelli2008]

## I.10 Analyse de fiabilité

L'analyse de fiabilité exige en plus un scénario de défaillance (Fig. I.8). Il sépare les situations que le concepteur décide de considérer acceptable ou non. La décision peut être totalement déterminée et séparer deux domaines de manière binaire, elle peut être floue en associant un degré de satisfaction croissant progressivement des situations défaillantes vers les situations de bon fonctionnement (ou de sécurité).



**Figure I.8** : analyse de fiabilité [Lemaire 2005]

Le scénario est représenté par une (ou plusieurs) fonctions de performance délimitant les deux domaines, à savoir le domaine de sécurité, lorsque la fonction de performance prend des valeurs positives  $Z(x) > 0$ , et le domaine de défaillance, lorsqu'elle prend des valeurs négatives  $Z(x) < 0$ . La fonction d'état limite est donc la fonction de performance nulle  $Z(x) = 0$  ; Elle est exprimée en fonction des variables de base. Il s'agit notamment des données relatives aux actions, aux paramètres d'état, mais aussi aux résistances.

Il est souvent possible de construire deux modèles de calcul indépendants, l'un ayant pour résultat l'évaluation des sollicitations  $S(x)$ , et l'autre à l'évaluation des résistances  $R(x)$ . Dans ce cas, la différence entre la sollicitation et la résistance est une marge  $Z(x) = R(x) - S(x)$ , qui est une variable aléatoire. Dans un contexte statique, l'objectif de l'analyse de fiabilité est alors d'évaluer la probabilité que la marge ait une valeur positive.

$$P_s = P(Z(X_i) > 0) = P(R(X_i) > S(X_i)) \quad (I.22)$$

### I.10.1 Facteur de sécurité

L'approche déterministe traditionnelle repose sur la notion du facteur de sécurité global  $F_S$ , défini généralement par le rapport entre les valeurs de résistance aux valeurs de sollicitations, Les valeurs typiques du facteur de sécurité couramment adopté dans le domaine de la géotechnique sont, par exemple,  $F_S = 2$  ou  $3$  pour le problème de capacité portante et  $F_S = 1.5$  pour le cas de la stabilité des pentes.

Malheureusement, cette analyse conventionnelle conduit à des conceptions conservatrices car les incertitudes dans les paramètres d'analyse ne sont pas prises en compte lors du calcul du facteur de sécurité. En ce sens, le facteur de sécurité n'est pas un indicateur suffisant de sécurité car les

incertitudes associées aux paramètres de conception peuvent influencer de façon significative la probabilité de rupture. La situation met le concepteur devant un important défi, qui est la sécurité de l'ouvrage en incluant les composantes d'incertitudes et en faisant une analyse de fiabilité sur laquelle il peut fonder ses décisions. Afin d'atteindre des niveaux de fiabilité constants, qui sont soumis à d'importantes contraintes économiques et sociales, des méthodes appropriées sont nécessaires.

### I.10.2 Probabilité de défaillance

Le scénario de fonctionnement ou de sécurité est la disponibilité d'une résistance supérieure à la sollicitation, s'est à dire :

$$Z(R, S) = R - S > 0 \quad (I.23)$$

Et le scénario de non fonctionnement, ou de défaillance, est alors :

$$Z(R, S) = R - S \leq 0 \quad (I.24)$$

La mesure de la défaillance est alors la probabilité associée à l'évènement  $\{R - S \leq 0\}$ , soit :

$$\text{probabilité de défaillance} = P_f = \text{Prob}(\{R - S \leq 0\}) \quad (I.25)$$

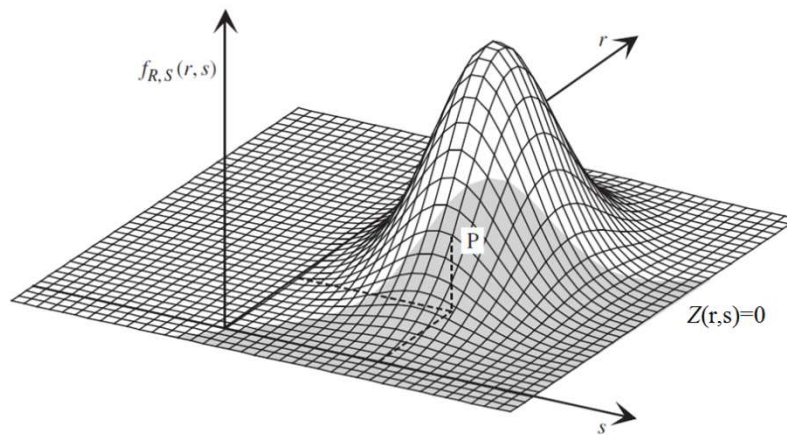
Ou la notation de l'indice f vient du mot anglais failure. La fiabilité est, pour sa part, définie comme le complément de la probabilité de défaillance :

$$\text{Fiabilité} = 1 - P_f \quad (I.26)$$

R et S sont deux variables aléatoires caractérisées par une densité conjointe de probabilité notée  $f_{R,S}(r, s)$ , et la probabilité  $P_f$ , associée à la marge Z, est le poids probabiliste de la partie de l'espace constituée par le domaine  $D_f : z = r - s \leq 0$  :

$$P_f = \text{Prob}(R - S \leq 0) = \int_{r-s \leq 0} f_{R,S}(r, s) dr ds \quad (I.27)$$

Cette expression à pour illustration représentée par la figure (I.9) ou la densité conjointe de probabilité des variables R et S est gaussienne, les variables étant corrélées. Alors  $f_{R,S}(r, s)$  est une surface et  $P_f$  le poids probabiliste représenté par le volume situé sous la partie grisée qui est généralement inférieur à l'unité.



**Figure I.9 :** représentation de  $P_f$  pour une loi gaussienne à deux variables corrélées [Lemaire2005]

Une description plus détaillée sur la figure (I.10) où les ellipses sont les «courbes de niveau» d'isodensité de probabilité. La corrélation est traduite par la rotation des axes principaux des ellipses par rapport aux axes de coordonnées des variables aléatoires. Pour deux variables aléatoires statiquement indépendantes, la densité conjointe de probabilité est le produit des densités de chaque variable :

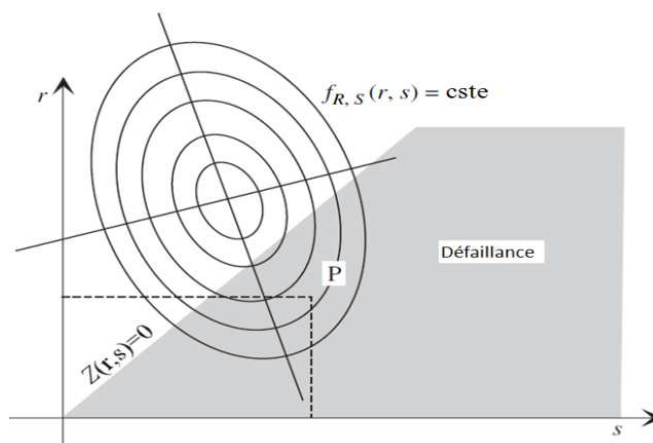
$$f_{R,S}(r, s) = f_R(r) \cdot f_S(s) \tag{I.28}$$

Alors la probabilité de défaillance peut être exprimée par la relation suivante :

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) \cdot F_R(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_S(x)) \cdot f_R(x) dx \tag{I.29}$$

Où  $F_R$ ,  $F_S$  et  $f_R$ ,  $f_S$  sont respectivement les fonctions de répartition et les densités de probabilité des résistances  $R$  et des sollicitations  $S$ . Rappelons que :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1 \tag{I.30}$$



**Figure I.10 :** représentation de  $P_f$  par courbes d'isodensité de probabilité [Lemaire2005]



Cette probabilité de ruine n'est pas représentée, comme cela a pu être dit par erreur au début de l'utilisation de cette approche, par la surface sous l'intersection des deux fonctions de densité de probabilité Figure (I.11).

On peut déduire la fiabilité comme suit :

$$P_S = 1 - P_f = \int_{-\infty}^{\infty} F_S(x) \cdot f_R(x) dx \quad (I.31)$$

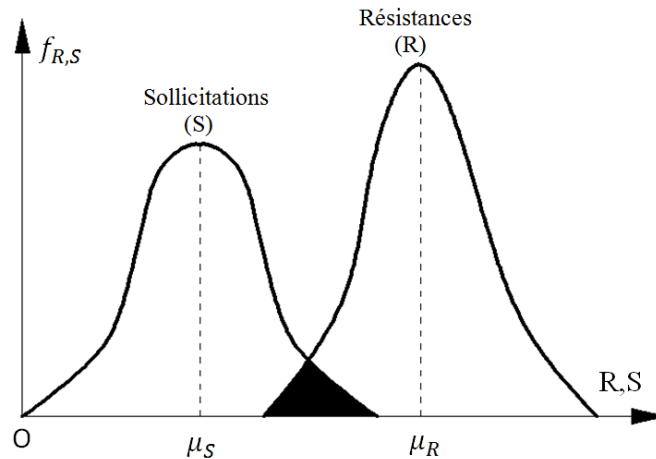


Figure I.11 : Schéma de Meyerhof(1970)

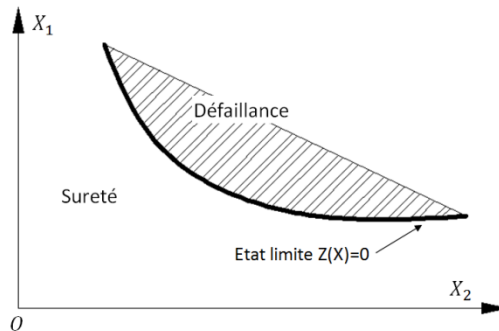
### I.10.3 Fonction de performance

Le concept fiabiliste sous point de vue mathématique exige en premier lieu de définir le critère de performance et les paramètres de conception (variables aléatoires)  $x_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$  ainsi que leurs interrelations. Ces paramètres représentant les variables de base, peuvent être des variables définissant les actions extérieures, ou les caractéristiques du matériau, ou encore les caractéristiques géométriques d'un composant ou d'un système mécanique. Mathématiquement, la fonction de performance exprimée en fonction des variables aléatoires  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est la surface de défaillance ou état limite définie par la condition  $Z = 0$  Figure (I.12). Cette surface marque la frontière entre les domaines de sûreté et de défaillance dans l'espace physique des paramètres aléatoire de conception. Les variables aléatoires peuvent apparaître explicitement ou implicitement dans la fonction d'état limite. La probabilité de défaillance peut être déterminée par l'expression :

$$P_f = \int \dots \int_{Z(x) < 0} f_x(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (I.32)$$

Où  $f_x(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est la Fonction Densité de Probabilité (PDF) conjointe des variables aléatoires. Si ces variables sont statistiquement indépendantes, alors la PDF accumulée pourra être substituée dans l'intégrale par le produit des PDF marginales des variables aléatoires.

En général, le nombre de variables aléatoires est élevé et ils n'apparaissent pas explicitement dans la fonction de performance, de telle sorte que la PDF accumulée est impossible à obtenir. Et l'évaluation de l'intégrale multiple résulte extrêmement compliquée en fonction de la corrélation des variables et de la complexité de l'intégration. Pour surmonter à ces difficultés, des méthodes d'approximation ont été élaborées. Parmi ces méthodes, les plus utilisées sont les méthodes de résolution analytique : méthode d'intégration numérique, méthode d'analyse de fiabilité du premier ordre (FORM) et méthode d'estimation ponctuelle (PEM) proposée par Rosenblueth (1975,1981).



**Figure I.12** : Illustration de l'état limite en fonction de deux variables aléatoires [Le maire2005]

#### I.10.4 Indicateur de fiabilité

Si la résistance et la sollicitation suivent des distributions normales, l'intégrale multiple (I.32) peut être évaluée comme suit :

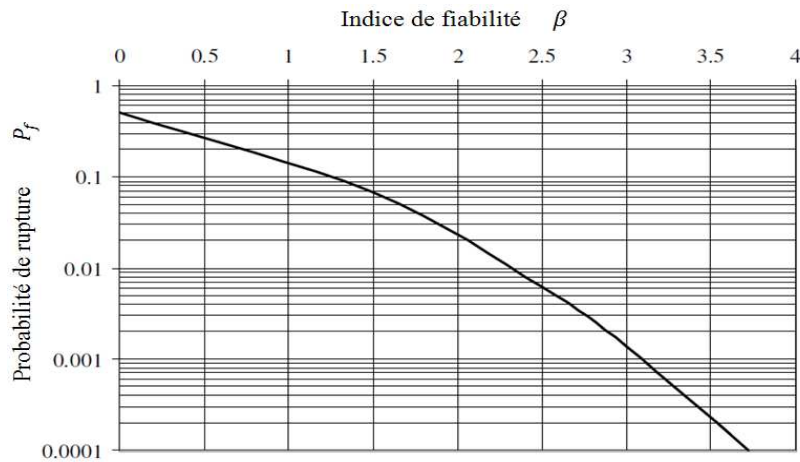
$$P_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \quad (I.33)$$

Où  $\Phi$  désigne la fonction de distribution normale standard et  $\beta$  est le paramètre le plus utile pour caractériser le degré de sécurité, généralement appelé indice de fiabilité. Ce paramètre été en premier lieu proposé par Rjanitzyne dans les années 1950, en Union Soviétique. Cependant c'est CORNELL (1969) qui a popularisé l'idée en donnant une définition à cet indice et qui s'exprime par la relation :

$$\beta_c(\text{normale}) = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 \pm 2 \cdot \rho_{RS} \cdot \sigma_R \cdot \sigma_S}} = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (I.34)$$

Avec  $\mu_R$ ,  $\mu_S$  et  $\mu_Z$ , respectivement  $\sigma_R$ ,  $\sigma_S$  et  $\sigma_Z$  les valeurs moyennes, respectivement les écarts types de la résistance, sollicitation et la marge de sécurité. Tandis que  $\rho_{RS}$  est le coefficient de corrélation entre résistance et sollicitation. Pour des variables de conception non corrélées le terme avec le coefficient de corrélation s'annule.

La Figure (I.13) montre la relation entre probabilité de défaillance et l'indice de fiabilité pour une fonction de performance avec une distribution normale. Il est clair comment l'indice de fiabilité est monotoniquement lié à la probabilité de défaillance, de sorte que des valeurs plus élevées de  $\beta_c$  impliquent des valeurs inférieures de  $P_f$ .



**Figure I.13** : Probabilité de défaillance  $P_f$  par rapport à l'indice de fiabilité  $\beta$  pour une Distribution normale [Lemaire2005]

Pour deux variables aléatoires non corrélées, ayant une densité de probabilité lognormal l'indice de fiabilité s'exprime par la relation :

$$\beta_c(\text{lognormale}) = \frac{\ln\left(\frac{\mu_R}{\mu_S} \cdot \sqrt{\frac{1+V_S^2}{1+V_R^2}}\right)}{\sqrt{\ln[(1+V_R^2) \cdot (1+V_S^2)]}} = \frac{\mu_{\ln Z}}{\sigma_{\ln Z}} \quad (I.35)$$

Avec  $V_R$  et  $V_S$  les coefficients de variation de résistance et de sollicitation, tandis que  $\mu_{\ln Z}$  et  $\sigma_{\ln Z}$  sont respectivement la valeur moyenne et l'écart type de la variable normale  $\ln(Z)$ .

## I.11 Couplage mécano-fiabiliste

La mise en œuvre des méthodes fiabilistes dans des situations techniques réelles exige donc d'être capable d'assurer le dialogue entre le modèle mécanique et le modèle fiabiliste. C'est l'objet du couplage mécano-fiabiliste. Les études sont tous appuyées sur une fonction de performance  $Z(x_i)$  définie explicitement. Cette fonction traduit le comportement mécanique qui doit souvent être modélisé par des solutions numériques approchées, à partir desquelles seules les réalisations de  $Z(x_i)$  sont calculables.

La modélisation numérique des comportements mécaniques la plus performante est actuellement la méthode des éléments finis (MEF). Chaque calcul de  $Z(x_i)$  est un calcul éléments finis complet pouvant être d'une grande ampleur, particulièrement en cas de non-linéarité. Le nombre

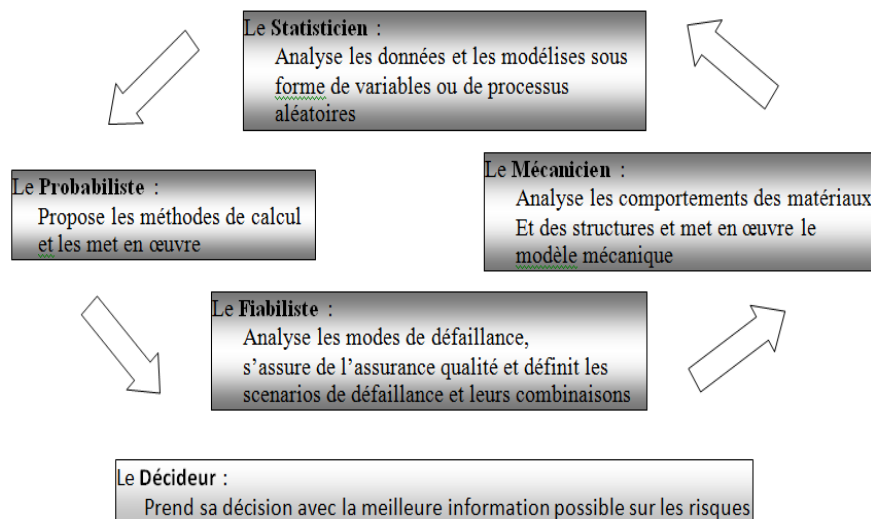
des calculs nécessaires sera donc un indicateur pertinent de l'efficacité d'une méthode couplée : il doit être le plus faible possible.

Tout calcul couplé revient à répéter des calculs mécaniques. Piloté par une des méthodes, le modèle fiabiliste définit les réalisations des données aléatoires à prendre en compte dans les modèles mécaniques. Trois méthodes de pilotage qui peuvent être décrites :

- ✓ Le couplage direct, dans lequel le code fiabiliste appelle le code éléments finis chaque fois que le calcul de  $Z(x_i)$  est nécessaire.
- ✓ Le couplage par surface de réponse, dans lequel un plan d'expériences numériques permet de construire une réponse explicite approchée de la fonction de performance  $Z(x_i)$ .
- ✓ Le couplage par optimisation, dans lequel le problème d'optimisation conduisant au calcul de l'indice  $\beta$  est résolu par les procédures d'optimisation disponibles dans le code éléments finis.

Le couplage direct comprend les méthodes de simulation de type Monte-Carlo. Sous leur forme classique, elles sont irréalistes dans leur mise en œuvre pour évaluer des probabilités faibles. Cependant, elles interviennent sous une forme conditionnée comme outil de validation des résultats de FORM/SORM.

### I.11.1 Acteurs du couplage mécano-fiabiliste



**Figure I.14 :** Acteurs du couplage mécano-fiabiliste [Lemaire2005]

La figure (I.14) présente les partenaires de l'approche mécano-fiabiliste. Une collaboration entre les différents spécialistes est sollicitée afin de permettre au décideur de prendre la décision la plus pertinente. Chacun d'eux joue un rôle dans le processus d'analyse Fiabiliste. Premièrement,

le rôle statisticien consiste dans l'analyse des données et la modalisation des variables aléatoires. Il doit dialoguer avec le mécanicien pour comprendre l'origine de la variabilité. Deuxièmement, le probabiliste propose les méthodes du calcul des probabilités. Troisièmement, le fiabiliste définit et analyse les scénarios de défaillances. Finalement, le mécanicien analyse le comportement des structures et garantit la bonne utilisation des modèles mécaniques.

### **I.11.2 Complexité du couplage mécano-fiabiliste**

Il existe quatre critères permettant, selon les modalités qu'ils prennent, de définir la complexité du couplage d'un modèle mécanique et d'un modèle fiabiliste, ils sont relatifs :

- ✓ à la nature des aléas :
  - externes (actions et résistances) ;
  - internes (états) ;
  - indépendance ou non des aléas ;
- ✓ à l'effet du temps :
  - contexte statique ;
  - cyclique ou dynamique ;
  - vieillissant (dégradation mécanique et physico-chimique) ;
- ✓ au modèle mécanique :
  - calcul élastique linéaire ;
  - calcul élastoplastique par séquences linéaire ou linéarisées ;
  - calcul élastoplastique par formulation non linéaire explicite ou implicite ;
  - calcul élastoplastique par les théorèmes aux états limites ;
  - calcul non linéaire géométrique et matériel ;
  - calcul dynamique linéaire ;
  - calcul dynamique non linéaire ;
- ✓ à la forme de la fonction de performance :
  - à séparation des variables de sollicitations et de résistances ;
  - explicite et linéaire des variables aléatoires ;
  - régulière ou non ;
  - à forte courbures ;
  - à points singuliers ;
  - explicite implicite.

Des problèmes simples incluant aléas externes, statique linéaire, fonction explicite résistance-sollicitation sont d'une résolution très aisée alors que ceux conduisant à des fonctions implicites dans des modèles non linéaires vont requérir des moyens de calcul très importants. C'est l'enjeu du risque encouru qui décidera de la précision de la modélisation et des moyens à mettre en œuvre.

## **I.12 Conclusion**

Dans ce chapitre nous venons de présenter un aperçu sur les types d'incertitudes pour l'examen des propriétés des sols, celle qui tiennent à leur variabilité naturelle, celles qui tiennent à leurs connaissances et celles qui tiennent aux modèles que l'on choisit pour ces propriétés. La prise en compte des effets d'incertitudes en géotechnique, est assurée par l'utilisation de l'approche probabiliste qui devient indispensable afin d'assurer un certain niveau de sécurité. L'incertitude était prise en compte sur les moments (espérance, variance et le coefficient de variation) de ces paramètres par des intervalles de confiance. L'approche probabiliste (fiabiliste) en géotechnique est souvent mis en œuvre dans le cadre des contrôles de qualité. Ceux-ci permettent d'observer la dispersion de telle ou telle quantité, et de suivre leur variabilité. Les statistiques en sont l'outil essentiel et les modélisations par variables aléatoires s'appuient sur un retour d'expérience. Il est à noter aussi, que les méthodes probabilistes fondées sur une certaine connaissance statistique dont l'évaluation des probabilités pouvait apporter une précision supplémentaire qui se révèle, utile dans plusieurs champs disciplinaires et techniques. Ceci nous nous permet de présenter dans ce qui suit les bases des méthodes de fiabilité en géotechnique pour un dimensionnement optimisé.

## **Chapitre (II)**

*Produit de l'analyse de fiabilité*

## Chapitre II

### Produit de l'analyse de fiabilité

#### II.1 Introduction

La fiabilité est la probabilité pour qu'un « ouvrage soit utilisé sans défaillance pendant une période de temps déterminée, dans des conditions opérationnelles spécifiées ». Un ouvrage de génie civil est un équipement complexe composé de sous-équipements plus ou moins simples fonctionnant en série ou en parallèle. L'analyse de risque permet d'optimiser les paramètres de projet de l'ouvrage en examinant le fonctionnement incertain de chacun de ses éléments, ce qui aide à l'évaluation d'un indice de fiabilité  $\beta$  qui correspond à la sécurité minimale, et qui dépend non seulement des valeurs moyennes des paramètres mais également de leurs incertitudes associées.

#### II.2 Concept d'indice de fiabilité

Il semble que le premier indice de fiabilité proposé puisse être attribué à Rja-nitzyne dans les années 1950, en Union Soviétique. Cependant, c'était en 1970 que Cornell vient de popularisé cette idée. Par la suite, plusieurs propositions ont été faites, Mais la forme la plus complète est créditée à Hasofer et Lind en 1974, qui s'appuient sur une définition rigoureuse (Lem 2005).

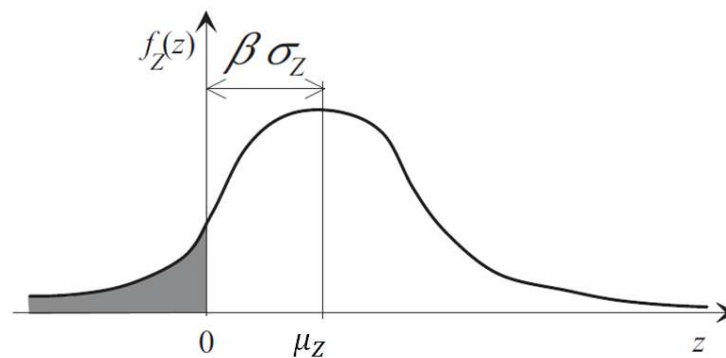


Figure II.1 : Représentation de l'indice de CORNELL [Lemaire2005]

##### II.2.1 Définition de Cornell

La définition proposée est très simple : l'indice  $\beta_c$  (indice de Cornell) est obtenu par le rapport de la moyenne  $m_z$  et de l'écart type  $\sigma_z$  de la variable d'état limite  $Z=R-S$  :



$$\beta_c = \frac{m_z}{\sigma_z} \quad (II.1)$$

L'indice  $\beta_c$  apparaît donc comme l'inverse du coefficient de variation de la variable aléatoire  $Z$ . La représentation graphique (Figure II.1) montre que cet indice indique le nombre d'écart types entre le point moyen  $m_z$  et l'état limite ( $z = 0$ ).  $\beta_c$  est un nombre sans dimension physique. Il reflète la pratique fréquente dans l'ingénierie de se déplacer de quelques écart types de la moyenne pour être dans le domaine de sécurité, et les valeurs habituelles d'un indice de fiabilité sont de quelques unités.

**Exemple (Cas R-S) :**

Soit un état limite représenté par la marge  $Z=R-S$  dont la moyenne  $m_z$  et l'écart type  $\sigma_z$  sont :

$$m_z = m_R - m_S \quad (II.2)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (II.3)$$

On a alors :

$$\beta_c = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (II.4)$$

Pour des variables corrélées, le résultat est valable en considérant de l'expression suivante :

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\text{cov}[R, S] \quad (II.5)$$

Lorsque les variables  $R$  et  $S$  suivent des lois normales de Gauss, sous cette hypothèse la marge de sécurité  $Z=R-S$  suit également une loi normale de densité figure (II.1) :

$$f_Z(Z) = \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Z - m_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right) \quad (II.6)$$

La figure (II.1) montre que la probabilité de défaillance est obtenu par :

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_Z(Z) dz = \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Z - m_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right) dZ \quad (II.7)$$

Posant  $u = (z - m_z)/\sigma_z$  :

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\beta_c} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \Phi(-\beta_c) \quad (II.8)$$

Avec  $\Phi(\dots)$  est la fonction de repartition de la loi normale centrée réduite. La transformation  $z \rightarrow u$  introduit la variable  $u$ , Gaussienne de moyenne nulle et d'écart type unitaire. La rupture est associée à la portion de la densité de probabilité de la marge de sécurité correspondant à une valeur négative de cette marge, c'est-à-dire à  $z < 0$  représentée par des hachures sur la figure (II.1). la surface hachurée est la probabilité de rupture ou de ruine  $P_f$  calculée au moyen de l'intégrale (II.9) (Spathe 1987) :

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_z dz \quad (II.9)$$

Au lieu de la probabilité de rupture  $P_f$ , Cornell exprime la sécurité par un indice de fiabilité  $\beta_c$ , qui apparait comme l'inverse du coefficient de variation de la variable aléatoire  $Z$ . Cet indice n'est correct que dans le cas des variables Gaussiennes et un état limite linéaire dans l'espace physique. Cette condition est suffisante mais pas nécessaire. En effet pour un même état limite on peut avoir une représentation différente de la marge  $Z$ . si la marge est définie par  $Z = \frac{R}{S} - 1$ , le calcul de la moyenne et de l'écart type de  $Z$  n'est plus possible et  $Z$  n'est pas une variable aléatoire Gaussienne, c'est une variable de Cauchy qui ne possède même pas de moment.

On voit donc apparaître deux difficultés :

- La première est liée à la non invariance de l'indice de fiabilité  $\beta_c$  dans différentes représentations d'une même fonction d'état limite.
- La deuxième est liée au passage de l'indice  $\beta_c$  à la probabilité de défaillance. C'est-à-dire dans le cas des variables aléatoires non Gaussiennes, L'indice  $\beta_c$  est évalué par l'expression (II.1) mais la relation avec  $P_f$  dépend toujours de la loi de  $Z$ .

L'indice  $\beta_c$  ne donne pas directement la probabilité  $P_f$ . D'autre part, la définition de Cornell n'est pas invariante vis-à-vis de la formulation de la fonction de performance : c'est ce qui à conduit Hasofer et Lind à leurs développements.

## II.2.2 Définition de Hasofer et Lind

Pour surmonter le problème de la non invariance de  $\beta_c$ , Cinq ans plus tard Hasofer et Lind (1974) proposent un changement de variables de l'espace physique vers un espace de variables normées centrées réduites et indépendantes, de moyennes nulles et d'écart type unitaires. Une nouvelle définition de l'indice de fiabilité  $\beta_{HL}$  représenté par la plus courte distance euclidienne dans l'espace normé, de l'origine à l'équation de performance  $Z(u)=0$ .

$$X_i \rightarrow U_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \text{ vecteur normé centré réduit } N(0,1) \quad (II.10)$$

Avec :  $U_i$  est la variable aléatoire centrée réduite de moyenne  $m_{U_i} = 0$  et d'écart type  $\sigma_{U_i} = 1$ .

La transformation résultant de la relation (II.10) est appelée transformation iso-probabiliste, elle conserve la linéarité de l'état limite est immédiate dans le cas des variable Gaussiennes indépendantes. Pour des variables aléatoires indépendantes de lois quelconques, le principe de la transformation est généralement exprimé par l'intermédiaire des fonctions de répartitions :

$$\Phi(u) = F_x(x) \Rightarrow x \rightarrow u = \Phi^{-1}(F_x(x)) \quad (II.11)$$

Elle est appliquée pour une variable normée sous l'hypothèse que la fonction de répartition  $F_x(x)$  soit continue et strictement croissante.

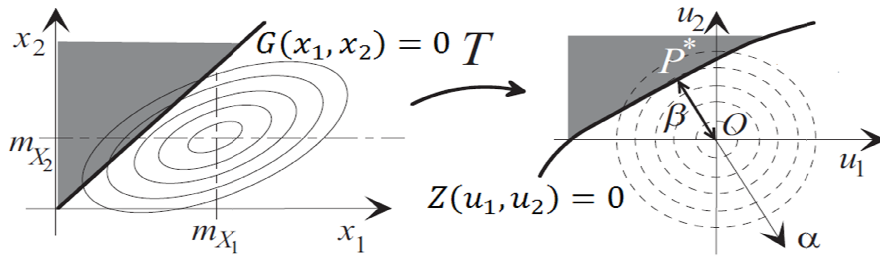
## II.3 Indice de fiabilité exact et invariant

Dans l'espace Gaussien standard des variables  $U_i$ , l'indice de fiabilité  $\beta$  est défini comme la distance de l'origine  $O$  au point  $P^*$  le plus proche situé sur la surface d'état limite (Figure II.2).  $P^*$  est appelé point de défaillance le plus probable (ou point de conception). Considérant la transformation donnée par la relation (II.10) pour le cas des variables normées :

$$X_i \rightarrow U_i \Rightarrow G(x_i) \rightarrow Z(u_i) \quad (II.12)$$

L'indice de fiabilité de Hasofer et Lind  $\beta_{HL} = \beta$  :

$$\beta_{HL} = \beta \equiv \text{distance } (O, Z(u_i) = 0) = \min_{Z(u_i) \leq 0} \sqrt{\{u\}^t \{u\}} \quad (II.13)$$



**Figure II.2 :** Représentation de l'indice de Hasofer et Lind [Lemaire 2005]

Sous réserve de la construction de la transformation des variables dans l'espace normé, la procédure permet une détermination invariante d'un indice  $\beta_{HL}$  qui peut être évalué d'une manière très simple lorsque les variables sont Gaussiennes (ou log-normales) et un état limite linéaire.

#### II.4 Application au cas élémentaire Gaussien

Soit un vecteur à deux variables aléatoires  $x_i = \{R, S\}$  Gaussiennes et statiquement indépendantes, la transformation est alors :

$$u_R = \frac{r - m_R}{\sigma_R} \quad \text{et} \quad u_S = \frac{s - m_S}{\sigma_S} \quad (II.14)$$

La surface d'état limite dans l'espace des variables physique définie par l'équation  $r - s = 0$ , et par substitution son expression devient :

$$u_R \cdot \sigma_R - u_S \cdot \sigma_S + m_R - m_S = 0 \quad (II.15)$$

Il s'agit d'une droite  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$  et l'indice de Hasofer et Lind est la distance de l'origine à la droite :

$$\beta = \text{distance}(O, \Delta) = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (II.16)$$

Cette expression est identique à celle de  $\beta_c$ , compte tenu des hypothèses, la probabilité de défaillance est évaluée directement :

$$P_f = \Phi(-\beta_c) = \Phi(-\beta) \quad (II.17)$$

Les coordonnées du point  $P^*$  dans l'espace normées sont  $u_R^*$  et  $u_S^*$ , qui seront définies dans l'espace physique par les relations suivantes :

$$r^* = u_R^* \cdot \sigma_R + m_R = m_R - \beta \cdot \alpha_R \cdot \sigma_R = m_R(1 - \beta \cdot \alpha_R \cdot V_R) \quad (II.18)$$

$$s^* = u_S^* \cdot \sigma_S + m_S = m_S - \beta \cdot \alpha_S \cdot \sigma_S = m_S(1 - \beta \cdot \alpha_S \cdot V_S) \quad (II.19)$$

Avec  $\alpha_i$  et  $V_i$  sont respectivement les facteurs de sensibilité (cosinus directeurs) et les coefficients de variation des variables aléatoires ( $R$  et  $S$ ).

## II.5 Désignation du point $P^*$

Comme la densité multi-normale de Gauss présente une symétrie de révolution et une décroissance depuis l'origine, le point  $P^*$  est le point de l'état limite correspondant au maximum de la densité de probabilité dans l'espace normé. Il a été désigné ainsi tout d'abord par Freudenthal (1956) sous le terme de *most probable failure point* dont la traduction fut point de défaillance le plus probable. Cette dénomination est relative au rôle de ce point dans l'analyse de fiabilité au sens de l'indice de Hasofer et Lind, sa dénomination est *design point* traduit par point de conception. L'ouvrage récent de Ditlevsen et Madsen (1996) utilise le terme de *Most central limit-state point* ou bien celui de *most central failure point* renonçant ainsi à la dénomination initiale.

Dans l'espace variable physique, le point de fonctionnement réel de la structure, de coordonnées  $x_i$ , sont réparties selon une distribution de probabilité  $F_{x_i}(x_i)$ . Selon la théorie du maximum de vraisemblance, le point de défaillance le plus probable, qui n'est pas nécessairement unique, est celui dans lequel la densité de probabilité admet une valeur maximale dans le domaine de défaillance, ce qui n'a de sens que si la distribution  $F_{x_i}(x_i)$  admet une densité  $f_{x_i}(x_i)$  à n'importe quel point du domaine de défaillance.

En passons maintenant à l'espace normalisé. La densité est une distribution gaussienne multi-normale  $\Phi_n(u_i)$ , et son maximum est en  $P^*$  en vue de la symétrie de la révolution et de sa décroissance en fonction de  $\beta$ , distance à l'origine.

## II.6 Transformations probabilistes

La détermination de l'indice de fiabilité  $\beta$ , selon Hasofer et Lind comporte deux étapes essentielles :

- ✓ Le passage de l'espace des variables physiques aux variables normées, centrées réduite et indépendantes.
- ✓ La recherche de la distance de l'origine à la frontière de l'état limite dans l'espace standard.

On peut constater les transformations les plus utilisées pour le passage des variables d'un espace physique vers un espace des variables normées en fonction de l'information disponible sur les lois des vecteurs aléatoires.

### II.6.1 Transformation iso-probabiliste

En particulier dans le cas des variables indépendantes, la transformation notée par T (iso-probabiliste) sera facilement utilisée et le problème devient largement simplifié. Cette transformation (T) représenté par la Figure (II.2) peut être définie comme suit :

$$u_i = T_i(x_j) \text{ et } Z(u_i) = G \left( T_j^{-1}(u_i) \right) \quad (II.20)$$

Pour des variables aléatoires indépendantes deux cas se présentent :

#### a) Variables Gaussiennes

Il s'agit d'une transformation linéaire qui associe une loi Gaussienne pour  $x_i$  à une loi Gaussienne (de moyenne nulle et de variance unitaire) pour  $u_i$ . C'est une transformation immédiate effectuée par l'intermédiaire de la relation (II.10).

#### b) Variables quelconques

soit  $x_i$  des variables aléatoires de loi quelconque de fonction de répartition  $F_{X_i}(x_i)$ , la transformation peut être décrite sous l'hypothèse d'égalité de probabilité pour les variables  $x_i$  et  $u_i$  :

$$x_i - T \rightarrow u_i \text{ définie par: } \Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i) \quad (II.21)$$

D'où

$$x_i - T \rightarrow u_i = \Phi^{-1} \left( F_{X_i}(x_i) \right) \tag{II.22}$$

Si  $F_{X_i}(x_i)$  est inversible pour toute valeur de  $x_i$ , la transformation inverse est effectuée par :

$$u_i - T^{-1} \rightarrow x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i)) \tag{II.23}$$

Dans le cas des lois quelconques, les transformations  $T$  et  $T^{-1}$  ne peuvent être réalisées que numériquement. Si les variables sont dépendantes, on aura recours aux transformations de Rosenblatt et de Nataf.

### II.6.2 Transformation de Rosenblatt

Cette transformation qui tient compte de la dépendance entre les variables aléatoire, a été proposée par Rosenblatt en (1950) sous l'hypothèse que la fonction de distribution conjointe  $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}$  soit connue, ce qui est particulièrement difficile à obtenir. La transformation n'est pas unique car elle suppose un choix dans l'ordre des variables, qui conduit dans la plus part des cas à différents indices de fiabilité mais à la même probabilité de défaillance, qui peut être définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \Phi^{-1} \left( F_{X_1}(x_1) \right) \\ u_2 = \Phi^{-1} \left( F_{X_2}(x_2/x_1) \right) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_i = \Phi^{-1} \left( F_{X_i}(x_i/x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) \right) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_n = \Phi^{-1} \left( F_{X_n}(x_n/x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \right) \end{array} \right. \tag{II.24}$$

Avec  $F_{X_i}(x_i/x_1, x_1, \dots, x_{i-1})$  et la fonction de distribution de  $X_i$  conditionnée par  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}$ . D'où la transformation inverse est effectuée identiquement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = F_{X_1}^{-1}(\Phi(u_1)) \\ x_2 = F_{X_2}^{-1}(\Phi(u_2/x_1)) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i/x_1, x_2, \dots, x_{i-1})) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = F_{X_n}^{-1}(\Phi(u_n/x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) \end{array} \right. \tag{II.25}$$

Ces expressions nécessitent une connaissance très riche car la densité de probabilité conjointe doit être estimée numériquement. Ce qui est difficile, en pratique on ne dispose que des densités marginales des variables aléatoires.

### II.6.3 Transformation de Nataf

Si on a pour  $F_{X_i}(x_i)$ ,  $f_{X_i}(x_i)$ , respectivement les distributions et les densités de probabilité de deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$ , on peut alors définir le couple  $\hat{U}_1$  et  $\hat{U}_2$  des variables standard corrélées par la relation suivante :

$$\hat{U}_i = \Phi^{-1} \left( F_{X_i}(x_i) \right) \quad (II.26)$$

Nataf en (1962), suppose qu'on peut associer une densité conjointe aux variables  $X_1$  et  $X_2$ , sur la base que les variables  $\hat{U}_1$  et  $\hat{U}_2$  ont une distribution normale conjointe, par l'expression suivante :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \varphi_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \rho_{0,12}) \cdot \frac{f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)}{\varphi(\hat{u}_1) \varphi(\hat{u}_2)} \quad (II.27)$$

Avec  $\varphi_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \rho_{0,12})$  la densité normale conjointe des variables  $\hat{U}_1$  et  $\hat{U}_2$  et de corrélation fictive  $\rho_{0,12}$  :

$$\varphi_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \rho_{0,12}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_{0,12}^2}} \exp \left[ -\frac{\hat{u}_1^2 - 2\rho_{0,12}\hat{u}_1\hat{u}_2 + \hat{u}_2^2}{2(1 - \rho_{0,12}^2)} \right] \quad (II.28)$$

Nous pouvons exprimer la relation entre  $\rho_{0,12}$  et  $\rho_{ij}$  obtenue en fonction des densités marginales des variables aléatoires  $X_i$  :

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{x_i(\hat{u}_i) - m_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \right) \left( \frac{x_j(\hat{u}_j) - m_{x_j}}{\sigma_{x_j}} \right) \varphi_2(\hat{u}_i, \hat{u}_j, \rho_{0,ij}) d\hat{u}_i d\hat{u}_j \quad (II.29)$$

L'expression est valable si et seulement si chaque loi marginale est continue et strictement croissante et la matrice  $[\rho_0]$  est définie positive. Alors le passage d'un espace physique vers un espace de variables centrées réduites et indépendantes s'effectue de la manière suivante :

$$u_i = T_i(x_j) = \sum_j \Gamma_{0,ij} \hat{u}_j = \sum_j \Gamma_{0,ij} \Phi^{-1} \left( F_{X_j}(x_j) \right) \quad (II.30)$$



Ou  $[\Gamma_0] = [L]^{-1}$  est l'inverse de la matrice triangulaire inférieure de la décomposition de Cholesky de  $[\rho_0]$ .

## II.7 Recherche du point de défaillance

L'évaluation de l'indice de fiabilité exige la détermination du point de défaillance le plus probable  $P^*$ . Ce dernier appelé aussi point de conception (design point) lorsqu'il est considéré comme point de référence pour un dimensionnement. Sa recherche relève d'une méthode d'optimisation non linéaire, qui doit être adaptée à la nature du problème posé. La plupart des méthodes utilisées sont basées sur la détermination du point de conception, et constituent un couplage entre le modèle mécanique et le modèle fiabiliste, dont la convergence est de la responsabilité du modèle fiabiliste qui sert à piloter les directions de recherche.

Le calcul de l'indice de fiabilité est ainsi ramené à la résolution, dans l'espace normé, du problème d'optimisation suivant :

$$\beta = \min d(u_k) = \min \left( \sqrt{\sum_i u_i^2} \right) \text{ sous la contrainte: } Z(u_k) \leq 0 \quad (II.31)$$

La solution de l'expression (II.31), impose des problèmes d'optimisations tel que :

- La convergence vers un minimum global.
- L'existence des dérivées d'ordre 1, voire d'ordre 2 de la contrainte  $Z(u_k) \leq 0$ .
- Le cout de calcul.

Pour résoudre un problème de minimisation sous contraintes, la littérature nous propose plusieurs types d'algorithmes résumés dans les catégories principales suivantes :

- a) Méthodes d'ordre zéro :
  - dichotomie ;
  - simplex non linéaire.
- b) Méthodes du premier ordre :
  - méthode du gradient ;
  - méthode du gradient projeté;
  - méthode des pénalités ;
  - méthode du lagrangien augmenté.
- c) Méthodes du second ordre :
  - méthode de newton ;
  - méthode de programmation quadratique séquentielle.

d) Méthodes hybrides :

- méthode Davidon-Powell, Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno.

### II.7.1 Principe des algorithmes d'optimisation

Ce type d'algorithmes a pour le principe de choisir une meilleure direction de descente à partir d'un point initial bien connu, et à parcourir un certain chemin selon cette direction. Le choix de la direction dépend de l'information sur la fonction d'état limite, des dérivées premières, voir secondes. La forme générale de l'itération s'exprime par la relation :

$$\{u\}^{k+1} = \{u\}^k + \alpha^k \{S\}^k \quad (II.32)$$

Où  $\alpha^k$  est la distance du pas optimal qui doit être positif et  $\{S\}^k$  la direction de descente.

### II.7.2 Méthode du gradient projeté

La méthode consiste à chercher l'optimum en se déplaçant dans l'espace tangent aux contraintes actives. Ceci s'effectue en deux étapes :

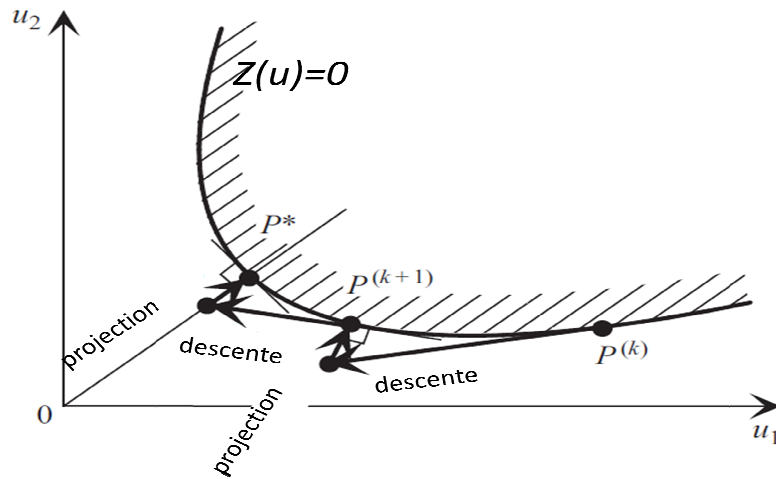
- Etape de descente : elle permet de déplacer le point dans la direction de minimisation la plus efficace
- Etape de projection : une correction du mouvement permettant d'éviter la violation des contraintes actives, qui s'effectue par projection du nouveau point sur l'état limite.

Soit le problème posé :

$$\begin{cases} \text{Minimiser : } d^2(u_k) \\ \text{sous la contrainte : } \langle \nabla_u Z \rangle \{u\} + c = 0 \end{cases} \quad (II.33)$$

L'état limite doit être linéarisé au point de conception  $P^*$  de l'itération (k), et nous obtenons le nouveau point de l'itération suivante (k+1) par l'expression (II.32) (Figure II.3). Et pour assurer un minimum dans le sous espace actif,  $\{u^k\}$  et  $\{u^{k+1}\}$  doivent satisfaire l'équation de la contrainte (ou équation d'état limite)  $Z(u_k) = 0$ . Ceci s'effectue si :

$$\langle \nabla_u Z \rangle \{S\} = 0 \quad (II.34)$$



**Figure II.3 :** Méthode itérative avec gradient projeté [Lemaire2005].

Le Lagrangien est définie par :

$$L(u_k, \lambda) = d^2(u_k) + \lambda(\langle \nabla_u Z \rangle \{u\} + c) \quad (II.35)$$

D'où la condition de Kuhn-Tucker est exprimée par :

$$\{\nabla_u d^2\} + \lambda\{\nabla_u Z\} = \{0\} \quad (II.36)$$

Comme l'état limite n'est pas linéaire, on définit le résidu par :

$$\{R\} = \{\nabla_u d^2\} + \lambda\{\nabla_u Z\} \quad (II.37)$$

Pour rester au plus près de l'état limite la méthode des moindres carrés donne :

$$\|\langle R \rangle \{R\}\|^2 = \lambda^2 \langle \nabla_u Z \rangle \{ \nabla_u Z \} + 2\lambda \langle \nabla_u Z \rangle \{ \nabla_u d^2 \} + \langle \nabla_u d^2 \rangle \{ \nabla_u d^2 \} \quad (II.38)$$

Qui sera minimale pour  $(\partial \|\langle R \rangle \{R\}\|^2 / \partial \lambda) = 0$  et l'expression précédente devienne :

$$\langle \nabla_u Z \rangle \{ \nabla_u Z \} \lambda + \langle \nabla_u Z \rangle \{ \nabla_u d^2 \} = 0 \quad (II.39)$$

D'où le multiplicateur de Lagrange :

$$\lambda = -[\langle \nabla_u Z \rangle \{ \nabla_u Z \}]^{-1} \langle \nabla_u Z \rangle \{ \nabla_u d^2 \} \quad (II.40)$$

D'où l'expression de la descente :

$$\{S\} = [P] \{ \nabla_u d^2 \} \quad (II.41)$$

Avec :

$$[P] = [I] - \{ \nabla_u Z \} [\langle \nabla_u Z \rangle \{ \nabla_u Z \}]^{-1} \langle \nabla_u Z \rangle \quad (II.42)$$

Ou  $[P]$  est la matrice de la projection sur le sous espace tangent à la contrainte active.

### II.7.3 Algorithme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler

Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (1979), ont pu mettre une bonne amélioration de l'algorithme de HL pour la recherche du point de conception. Sa convergence n'est pas assurée dans tous les cas mais il s'est montré efficace dans des situations. Rackwitz en (1990), à pu donner une amélioration de l'algorithme sur la base des travaux de Schittkowski effectués en (1986), conduisant à un algorithme globalement convergent illustré Figure (II.4) représenté par les étapes suivantes :

Pour obtenir le point de défaillance le plus probable, on démarre tout d'abord par un point  $P^k$  de coordonnées  $\{u\}^k$  nommé point origine de l'itération (k). Ce point n'a pas de nécessité d'appartenance à la contrainte, c'est à dire  $Z(u_l) \neq 0$ . Alors un développement en séries de Taylor autour de ce point est nécessaire et s'exprime comme suit :

$$Z(u_l) = Z(u_l^{(k)}) + \langle \nabla Z(u_l) \rangle_{u^{(k)}} (\{u\} - \{u\}^{(k)}) + O^2 \quad (II.43)$$

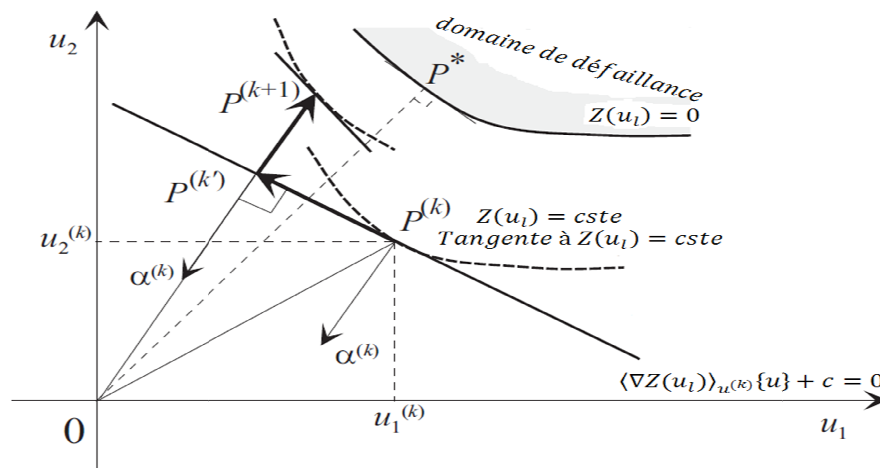


Figure II.4 : Illustration de l'algorithme HLRF [Lemaire2005].

Ce développement représente l'équation d'un hyper-plan à  $Z(u_l)$  au point  $\{u\}^{(k)}$  qui a pour une forme générale :

$$\langle \nabla Z(u_l) \rangle_{u^{(k)}} \{u\} + c = 0 \quad (II.44)$$

Un nouveau point obtenu de l'itération précédente  $P^{(k+1)}$  doit satisfaire la contrainte (appartient à l'état limite) :

$$Z(u_l^{(k+1)}) = Z(u_l^{(k)}) + \langle \nabla Z(u_l) \rangle_{u^{(k)}} (\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}) = 0 \quad (II.45)$$

Divisant (II.45) par la norme  $\|\nabla Z(u_l)\|_{u^{(k)}}$  et si on introduit le vecteur des cosinus directeurs  $\{\alpha\} = \{\nabla Z(u_l)\} / \|\nabla Z(u_l)\|$  on obtient l'équation d'état limite sous la forme :

$$\frac{Z(u_l^{(k)})}{\|\nabla Z(u_l)\|_{u^{(k)}}} + (\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)})\{\alpha\}^{(k)} = 0 \quad (II.46)$$

On peut écrire :

$$\langle u \rangle^{(k+1)}\{\alpha\}^{(k)} = \langle u \rangle^{(k)}\{\alpha\}^{(k)} - \frac{Z(u_l^{(k)})}{\|\nabla Z(u_l)\|_{u^{(k)}}} \quad (II.47)$$

Lorsque  $k \rightarrow \infty$ ,  $d(u_l)^{(k)} = \beta$  et  $\{u\} = -\beta\{\alpha\}$ , et si la convergence existe nous pouvons écrire à l'itération (k) :

$$\beta^{(k)} = -\langle u \rangle^{(k+1)}\{\alpha\}^k \quad (II.48)$$

Par substitution de l'équation (II.46), on reçoit l'expression en forme itérative de l'indice  $\beta$  :

$$\beta^{(k)} = -(\langle u \rangle^{(k)}\{\alpha\}^k) + \frac{Z(u_l^{(k)})}{\|\nabla Z(u_l)\|_{u^{(k)}}} \quad (II.49)$$

On peut résumer l'algorithme de HLRF dans les étapes suivantes :

- 1) Choisir un point de l'itération initiale  $\{u\}^0$ , généralement l'origine du repère en l'absence d'informations ;
- 2) Evaluation de l'équation d'état limite au point considéré  $Z(u_l^{(k)})$ .
- 3) Déterminer les gradients  $\{\nabla Z(u_l)\}^{(k)}$ , leurs norme  $\|\nabla Z(u_l)\|^{(k)}$  et les cosinus directeurs  $\{\alpha\}^k$ .
- 4) Evaluation de l'indice  $\beta^{(k)}$ .
- 5) Déterminer le nouveau point :  $\{u\}^{(k+1)}$ .
- 6) Tester si  $\|\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\| \leq \varepsilon$  arrêter le calcul, si non aller à l'itération (k+1)

Une nouvelle version d'un algorithme de HLRF proposée par Zhang en (1995), qui à été améliorée en intégrant une recherche d'un pas optimal. Ceci mène à une convergence inconditionnelle de l'algorithme. L'itération de HLRF représentée par l'expression (II.32) :

$$\{u\}^{k+1} = \{u\}^k + \alpha^k \{S\}^k \quad (II.50)$$

$$\{u\}^{k+1} = \{u\}^k + \alpha^k \left( \frac{\langle u \rangle^{(k)} \{\alpha\}^{(k)} - Z(u_i^{(k)})}{\|\nabla Z(u_i)\|_{u^{(k)}}} \right) \{\alpha\}^{(k)} - \{u\}^{(k)} \quad (II.51)$$

Faisant apparaître la direction de descente  $\{S\}^k$  et le pas  $\alpha^k$ . L'optimisation du pas est conditionnée par la minimisation d'une fonction de mérite exprimée sous une forme générale :

$$\{\alpha\}^{(k)} = \min_{\alpha} (\psi(\{u\}^k) + \alpha \{S\}^k) \quad (II.52)$$

Ce qui conduit à accepter une solution approchée :

$$\{\alpha\}^{(k)} = \max_l (b^l \mid \psi(\{u\}^k + b^l \{S\}^k) - \psi(\{u\}^k) \leq ab^l \|\nabla \psi(\{u\}^k)\|^2) \quad (II.53)$$

D'où la fonction de mérite proposée par Zhang est :

$$\psi(\{u\}) = \frac{1}{2} \|\{u\}\|^2 + c |Z(\{u\})| \quad (II.54)$$

Par laquelle le choix d'une constante  $c > \frac{\|\{u\}\|}{\|\nabla Z(\{u\})\|}$  assure les conditions suffisantes d'une convergence inconditionnelle.

### Application numérique :

Soit deux variables aléatoires  $r$  et  $s$  normées et indépendantes, le problème se pose avec un état limite définie par l'équation  $Z = r - s$ , et de valeurs moyennes respectivement égale à (4,2), qui seront prisent comme point de départ. Et la recherche du point de défaillance le plus probable  $s$ 'exprime par les étapes suivantes :

- Itération 0 : en premier lieu on détermine les gradients

$$\frac{\partial H}{\partial U_R} = 1,932 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial U_S} = -1,596$$

On determine :

$$\{\alpha\}^{(0)} = \frac{\{\nabla Z(u_l)\}^{(0)}}{\|\nabla Z(u_l)\|^{(0)}} = \begin{bmatrix} 0,771 \\ -0,637 \end{bmatrix}$$

$$\{\beta\}^{(0)} = -\frac{\langle \nabla Z(u_l) \rangle^{(0)} \{u\}^{(0)} - H^{(0)}}{\|\nabla Z(u_l)\|^{(0)}} = 0,994$$

$$\{u\}^{(1)} = -\beta^{(0)}\{\alpha\}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0,766 \\ 0,633 \end{bmatrix}$$

$$\{x\}^{(1)} = \{T^{-1}(\{u\}^{(0)})\} = \begin{bmatrix} 3,109 \\ 2,946 \end{bmatrix}$$

- Itération 1 : on a

$$\frac{\partial H}{\partial U_R} = 1,488 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial U_S} = -1,306$$

Et :

$$\{\alpha\}^{(1)} = \frac{\{\nabla Z(u_l)\}^{(0)}}{\|\nabla Z(u_l)\|^{(0)}} = \begin{bmatrix} 0,751 \\ -0,660 \end{bmatrix}$$

$$\{\beta\}^{(1)} = -\frac{\langle \nabla Z(u_l) \rangle^{(0)} \{u\}^{(0)} - H^{(0)}}{\|\nabla Z(u_l)\|^{(0)}} = 1,075$$

$$\{u\}^{(2)} = -\beta^{(0)}\{\alpha\}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0,808 \\ 0,710 \end{bmatrix}$$

$$\{x\}^{(2)} = \{T^{-1}(\{u\}^{(0)})\} = \begin{bmatrix} 3,048 \\ 3,044 \end{bmatrix}$$

Le résultat est correct, obtenu dans deux itérations puisque l'état limite est linéaire.

## II.8 Critères de qualité

Trois critères nécessaires pour construire un algorithme d'optimisation :

- L'efficacité, identifiée par le nombre d'itération nécessaire pour atteindre la convergence.
- La robustesse, définie par la capacité d'un algorithme de trouver le point de conception pour des configurations plus complexes.
- La capacité, de traiter des problèmes de taille importante (nombre élevé de variables).

## II.9 Problèmes particuliers

Lorsqu'une situation se présente avec un état limite à plusieurs minimums locaux, il sera difficile d'identifier l'ensemble de ces minimums. Alors la convergence n'existe pas dans ce cas, et si c'était le contraire, les résultats seront faussés par l'existence de ce minimum. La Figure (II.5) illustre le cas de deux minimums dont la technique de perturbation donne une solution. Pour détecter un minimum, la procédure suivante proposée par (Der Kiureghian en 1998) peut être utilisée :

- Chercher le premier minimum du problème ;
- Appliquer une transformation de l'état limite sous forme d'une perturbation permettant d'éloigner le point trouvé de l'origine, c'est-à-dire dilater l'état limite au voisinage du minimum identifié ;
- Chercher le second minimum par la résolution du nouveau problème d'optimisation sur l'état limite perturbé.
- Répéter les étapes 2 et 3 jusqu'à l'identification de tous les minimums.

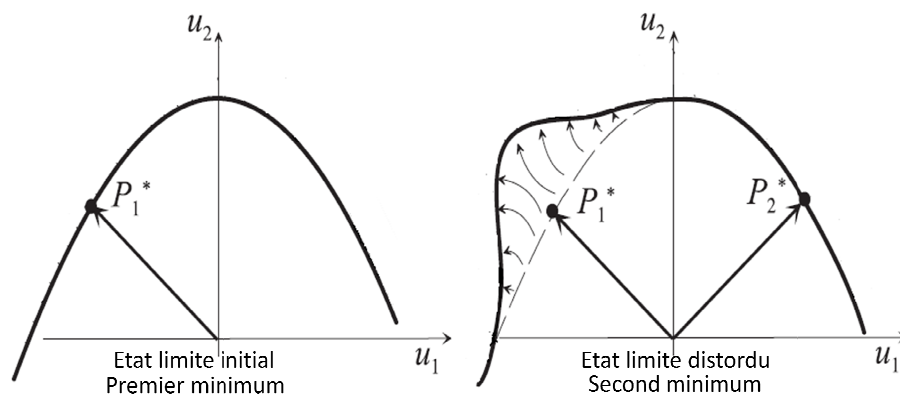


Figure II.5 : Minimums locaux [Lemaire2005].

## II.10 Niveau d'analyse de sécurité

Il existe plusieurs méthodes d'évaluation du critère de sécurité, utilisées généralement dans les calculs des structures et en particulier dans le domaine de la géotechnique. Elles sont classifiées en cinq catégories (J. Ferry Borges) (Lem 2005) :



- *Méthodes niveau I* : sont des méthodes semi-probabilistes ou méthodes aux états limite qui sont en œuvre depuis longtemps en constructions métallique (les différentes règles en CM), en béton armé (les différentes règles BAEL) et en géotechnique (l'Eurocode 7).
- *Méthodes niveau II* : ce sont des méthodes probabilistes approchées basées sur le développement en séries au premier ordre de la fonction d'état limite, en évaluant les deux premiers moments de cette fonction, qui regroupe les méthodes FOSM (First Order Second Moment), FORM (First Order Reliability Method) et SORM (Second Order Reliability Method).
- *Méthodes niveau III* : sont des méthodes purement probabilistes ou méthodes de simulation, elles s'appuient sur les méthodes de résolution des systèmes d'équations différentielles stochastiques.
- *Méthodes niveau IV* : méthodes probabilistes évaluant les paramètres de projet optimaux, utilisant les théories de la décision et visent à minimiser le risque.
- *Méthodes niveau 0* : ce sont des méthodes purement déterministes, qui tiennent compte des incertitudes à travers les valeurs des coefficients de sécurité. Ce sont celles qu'on utilise toujours en géotechnique. Leur principe est basé sur le choix d'un coefficient de sécurité global  $F_s = R/S$ , qui peut être identifié dans l'équation d'état limite par la relation :

$$g(x) = F_s - 1 \text{ ou par } g(x) = \log R - \log S \quad (II.55)$$

Ce coefficient  $F_s$  a fait l'objet de très nombreuses recommandations, vu le grand nombre d'états critiques envisagés et de fonctions de performance utilisées. Nous présentons dans le tableau suivant (II.1) les valeurs proposées par Terzaghi et Peck en 1967.

**Tableau II.1** : Valeurs du coefficient de sécurité Global [Favre2004]

Type de rupture	Ouvrage	Coefficient de sécurité
Cisaillement	Tassements	1,3 à 1,5
	Soutènements	1,5 à 2
	Fondations	2 à 3
Ecoulement	Sous-pression, soulèvement	1,5 à 2,5
	Gradient critique, renard	3 à 5

## II.11 Conclusion

Ce chapitre traite des méthodes permettant la recherche du point  $P^*$ , et d'obtenir directement l'indice de fiabilité  $\beta$  proposé par Rjanitzyne. Il rappelle aussi la formulation du problème d'optimisation en présentant les différentes méthodes de résolution. On peut dire que ce n'est pas facile d'identifier la méthode de résolution la plus exacte ou comme étant la « meilleure ». Pour chaque problème, certaines méthodes sont mieux adaptées que d'autres.

D'une manière générale les méthodes basées sur le calcul des gradients sont les plus performants dans la recherche du point de conception, présentant des résultats plus ou moins exacts. Du moment que le calcul des gradients est généralement effectué par différence finies, le cout de calcul devient énorme en particulier lorsqu'il s'agit d'un grand nombre de variables.

La solution du problème d'optimisation exige une grande attention de la part du concepteur. L'assurance d'obtenir la bonne solution ne peut pas être donnée uniquement par des critères algorithmiques, dont l'expertise du concepteur et sa connaissance du problème doivent être mises à contribution pour valider la convergence, c'est-à-dire confirmer le caractère global du minimum obtenu et vérifier si des minimums secondaires ne sont pas présents.

## **Chapitre (III)**

### *Méthodes Probabilistes de quantification des incertitudes*

## Chapitre III

### Méthodes probabilistes de quantification des incertitudes

#### III.1 Introduction

La quantification et l'analyse de l'incertitude sont des questions centrales dans l'évaluation de la fiabilité, et le développement de la conception basée sur la fiabilité associée. La méthode la plus universelle adoptée dans la quantification de la fiabilité repose sur le calcul des probabilités, sur la base d'une normalisation qui a reconnu le lien direct entre la notion de fiabilité et sa mesure par une probabilité. Les probabilités constituent un langage commun aux intervenants, décideurs, ingénieurs, scientifiques, etc. et peuvent être largement utilisées pour des problèmes d'origines diverses. Le chapitre précédent a souligné l'objectif général d'une optimisation, et a aussi décrit les quantifications basées sur les notions d'indices, ainsi que les méthodes de calcul correspondantes, mais c'est toujours à une probabilité qu'il est fait référence.

Dans ce chapitre l'étude portera sur un certain nombre de méthodes utilisées pour le calcul de la probabilité de défaillance. Nous pouvons constater différents niveaux d'approximation qui sont possibles, en fonction de la caractérisation de l'état limite et de son approximation qui est un aspect nécessaire, en tenant compte des notions vues précédemment qui jouent un rôle important dans les méthodes proposées.

Cependant, un choix efficace d'approximations adaptées aux différentes étapes de l'analyse de fiabilité rend ces outils pratiques pour de nombreux problèmes d'ingénierie à grande échelle, et conduit à une évaluation plus significative de la conception de la sécurité. Dans ce chapitre, la méthodologie des approches probabilistes est illustrée ainsi que leurs avantages et limites correspondants sont discutés.

#### III.2 L'Approche probabiliste

Dans l'approche probabiliste, les incertitudes sur les charges  $S$  et sur la résistance  $R$  sont explicitement considérées. La probabilité que la charge excède la résistance est donnée par :

$$P[S > R] = P[R \leq S] = P[R - S \leq 0] = P[G(x) \leq 0] \quad (III.1)$$

Où  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  dénote l'ensemble des variables aléatoires, et  $G(x)$  représente la fonction d'état limite (ou fonction de performance). La fonction  $G(x)$  est une fonction dont les variables sont aléatoires est construite de façon à ce que :

$G(x) = 0$  État limite, frontière du domaine de sécurité (ou défaillance)

$G(x) > 0$  Le système est stable

$G(x) < 0$  Le système est défaillant

L'analyse de fiabilité revient donc au calcul de la probabilité de défaillance définie par :

$$P_f = \int_{G(x)<0} f(x)dx \quad (III.2)$$

Où  $f(x)$  représente la fonction de densité de probabilité conjointe de X. En général, le nombre de variables aléatoires est élevé, et ils n'apparaissent pas explicitement dans la fonction de performance, de telle sorte que la fonction densité de probabilité conjointe est impossible à obtenir. L'évaluation de l'intégral multiple résulte extrêmement compliqué en fonction de la corrélation des variables et de la complexité d'intégration (III.2). Cette difficulté a conduit au développement des différentes approches qui ont été proposés dans la littérature.

### III.3 Méthode Analytique

L'expression obtenue représentée par la relation (III.2), est la forme générale de la probabilité de défaillance, dont l'intégrale est étendue à tout le domaine de la défaillance. La solution de l'intégration peut être effectuée analytiquement de deux manières suivantes :

- Par *intégration directe* : Ce type de calcul ne peut être mené que dans des cas particulièrement favorables. Si cette formulation reste simple, elle est théorique et son utilisation exige que la densité conjointe de probabilité est connue et simple et que l'intégration est possible, deux exigences qui sont rarement satisfaites.
- Par *intégration numérique* : Ce type d'intégration ne pourrait être effectuée que dans le cas d'un nombre de variables limité, cependant, la valeur de la probabilité de défaillance est en principe très faible, conduisant dans des cas à des erreurs, car  $P_f$  est de l'ordre de grandeur de l'erreur d'intégration. Des logiciels de calcul formel ou numérique constituent une aide très utile pour cette intégration.

### III.4 Méthode de fiabilité du premier ordre (FORM)

Hasofer et Lind (1974) donnent une définition exacte et invariante pour l'indice de fiabilité. Cet approche appelé souvent méthode de fiabilité du premier ordre (FORM), nécessite une définition de la fonction de performance  $G(x)$ , et exige une transformation des variables aléatoires de base

X vers un espace normal standard U, où U est le vecteur des variables normales centrées réduites et indépendantes, et  $Z(u)$  la fonction d'état limite linéaire exprimée aussi dans l'espace standard.

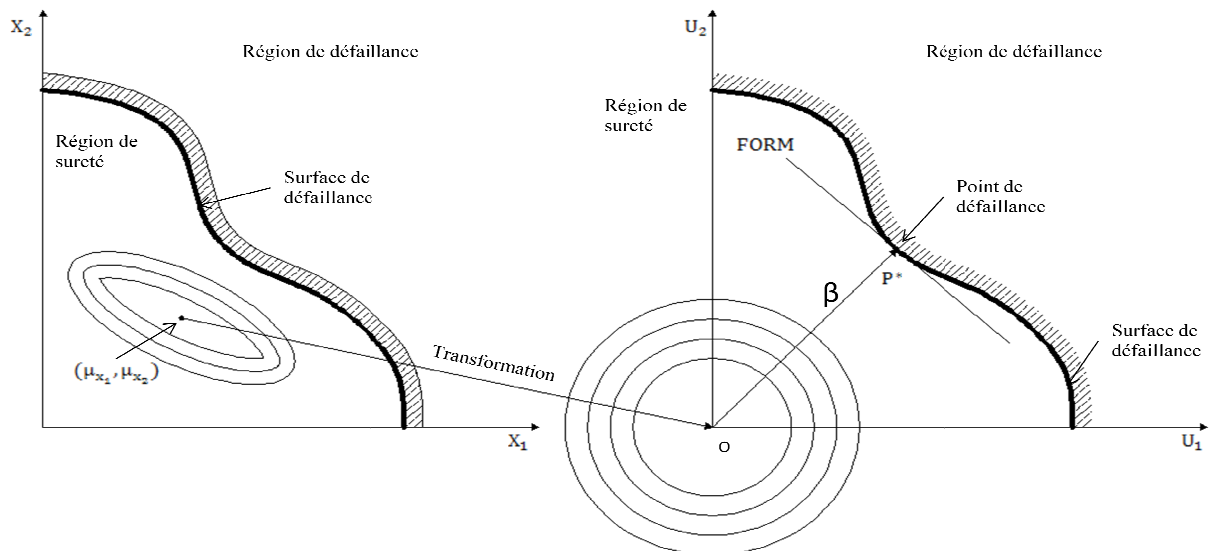
La probabilité de rupture  $P_f$  est alors ( $P[\dots]$  signifie probabilité ou ...):

$$P_f = P[Z(U) < 0] \approx P\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot U_i - \beta < 0\right] = \Phi(-\beta) \quad (III.3)$$

Où  $\alpha_i$  est le cosinus directeur de la variable aléatoire  $U_i$  appelé facteur de sensibilité,  $\beta$  indice de fiabilité,  $n$  le nombre de variables aléatoires de base, et  $\Phi(-)$  la fonction de distribution normale centrée réduite. Alors la probabilité de défaillance peut être exprimée simplement en fonction de l'indice de fiabilité  $\beta$  par la relation :

$$P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (III.4)$$

La relation est exacte lorsque la surface d'état limite est linéaire et les paramètres suivent des distributions normales, et autrement elle n'est qu'approximative.



**Figure. III.1** Illustration de l'approximation de l'état limite au voisinage du point de défaillance le plus probable au premier ordre FORM

Considérant le cas fondamental avec des variables indépendantes, de résistance  $R$ , et de sollicitation  $S$ , qui sont tous deux normalement distribués. En premier lieu, Hasofer et Lind (1974) introduisent des variables standards normalisées ( $u_R$  et  $u_S$ ) par les relations suivantes :

$$u_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad u_S = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (III.5)$$

Ou  $\mu_R$  et  $\mu_S$  sont respectivement les valeurs moyennes des variables aléatoires R et S, et  $\sigma_R$  et  $\sigma_S$  leurs écarts types. Ensuite, la surface d'état limite  $Z(R,S)=R-S=0$  dans le système original de coordonnées (R,S), est transformée en une surface d'état limite dans le système standard normalisé de coordonnées ( $u_R$  et  $u_S$ ), représentée par l'équation :

$$Z(R(u_R), S(u_S)) = Z(u_R, u_S) = u_R \cdot \sigma_R - u_S \cdot \sigma_S + (\mu_R - \mu_S) \quad (III. 6)$$

Ici, l'indice de fiabilité  $\beta$ , défini comme la distance la plus courte, à partir de l'origine du système de coordonnées ( $u_R$  et  $u_S$ ) et l'hyperplan tangent  $Z(u_R, u_S) = 0$  (Fig. III.1), est donné par l'expression :

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (III. 7)$$

le point  $P^*(u_R^*, u_S^*)$  de la surface  $Z(u_R, u_S) = 0$ , correspondant à cette distance minimale, souvent dénommé point de conception ou  $\beta$ -point, est aussi le point de la zone de défaillance qui à la plus grande probabilité d'occurrence.

### III.4.1 Etat limite non linéaire

Dans le cas général avec des variables aléatoires normalement distribuées et indépendantes, pour un espace à n dimensions, la surface de rupture est une fonction non linéaire. Elle est exprimée en termes de variables aléatoires de base  $X_i$ , pour les charges pertinentes et la résistance structurelle. Mathématiquement la fonction de performance Z peut être décrite comme suit:

$$Z = Z(X_1, X_2, \dots, X_n) = \text{Resistance structurelle} - \text{Effet de charge} \quad (III. 8)$$

Une transformation iso-probabiliste conservant la linéarité de l'état limite, est faite pour changer les variables aléatoires en leurs formes standardisées par la relation :

$$u_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (III. 9)$$

Ou  $\mu_{x_i}$  et  $\sigma_{x_i}$  représentent respectivement la moyenne et l'écart type des variables aléatoires de base  $X_i$ . La moyenne et l'écart type des variables aléatoires centrées réduites  $U_i$ , ont pour valeurs respectivement égales à zéro et à l'unité. La recherche du point  $P^*$  (est donc le calcul de  $\beta$ ) constitue un problème d'optimisation sous contrainte (Seung-Kyum, & al. 2007) :

$$\text{Minimiser } \|U\| \quad \text{tel que } Z(u) = 0 \quad (\text{III. 10})$$

L'indice de fiabilité  $\beta$  appelé souvent indice de Hasofer et Lind, représentant la courte distance de l'origine à la surface de rupture  $Z(u)=0$ , qui peut être exprimé par :

$$\beta = \min(U^T \cdot U)^{1/2} \quad \text{Tel que } U \in Z(u) = 0 \quad (\text{III. 11})$$

L'état limite donnée par l'équation (8), est transformé à :

$$Z(u) = Z(\{\sigma_{x_1} \cdot u_1 + \mu_{x_1}, \quad \sigma_{x_2} \cdot u_2 + \mu_{x_2}, \dots, \sigma_{x_n} \cdot u_n + \mu_{x_n}\}) \quad (\text{III. 12})$$

Les premiers termes de l'expansion en séries de Taylor de  $Z(u)$  au point de conception  $u^*$ , sont donnés par :

$$Z(u) = Z(u^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Z(u^*)}{\partial u_i} (u_i - u_i^*) \quad (\text{III. 13})$$

De la transformation en équation (III.9), nous avons :

$$\frac{\partial Z(u)}{\partial u_i} = \frac{\partial Z(x)}{\partial x_i} \cdot \sigma_{x_i} \quad (\text{III. 14})$$

Alors, la courte distance de l'origine à la surface approximative de rupture représentée par l'équation (III.13) peut être évaluée par la relation suivante (Seung-Kyum, & al. 2007):

$$OP^* = \beta = \frac{Z(u^*) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial Z(u^*)}{\partial x_i} \cdot \sigma_{x_i} \cdot u_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Z(u^*)}{\partial x_i} \cdot \sigma_{x_i} \right)^2}} \quad (\text{III. 15})$$

Les facteurs de sensibilité ou cosinus directeurs sont évalués par la relation :

$$\alpha_i = \frac{\frac{\partial Z(x^*)}{\partial x_i} \cdot \sigma_{x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Z(x^*)}{\partial x_i} \cdot \sigma_{x_i} \right)^2}} = \cos \theta_{x_i} \quad (\text{III. 16})$$

Ou  $\frac{\partial Z(x^*)}{\partial x_i}$ , est la dérivée partielle évaluée au point de conception  $x_i^*$ .



Les coordonnées correspondants au point de conception  $P^*$  dans l'espace original sont exprimées par :

$$x_i^* = \mu_{x_i} - \beta \cdot \sigma_{x_i} \cdot \alpha_i \quad (III.17)$$

Comme  $P^*$  est le point appartenant à la surface d'état limite alors :

$$Z(\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}) = 0 \quad (III.18)$$

### III.4.2 Distributions normales équivalentes

Si une variable aléatoire  $X$  n'est pas normalement distribuée, elle doit être transformée à une distribution normale équivalente, indiquée par l'exposant  $N$ . Les paramètres de la distribution normale équivalente,  $\mu_{x_i}^N$  et  $\sigma_{x_i}^N$ , peuvent être estimés en imposant deux conditions (Fieβler & al, 1976). La fonction de distribution et la densité de probabilité des variables non normales devraient être égales à sa valeur normale équivalente au point de conception situé à la surface de défaillance.

La première condition exprimée par :

$$\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{x_i}^N}{\sigma_{x_i}^N}\right) = F_i(x_i^*) \quad (III.19)$$

La seconde condition est :

$$\varphi\left(\frac{x_i^* - \mu_{x_i}^N}{\sigma_{x_i}^N}\right) = f_i(x_i^*) \quad (III.20)$$

Où  $F_i$  = fonction cumulative de distribution non normale

$\varphi$  = fonction de densité de probabilité d'une variable normale

$f_i$  = fonction de densité de probabilité non normale

L'écart type et la moyenne des distributions normales équivalentes sont évalués, respectivement par les relations suivantes (Rosenblatt, 1952) :

$$\sigma_{x_i}^N = \frac{\varphi\{\Phi^{-1}[F_i(x_i^*)]\}}{f_i(x_i^*)} \quad (III.21)$$

$$\mu_{x_i}^N = x_i^* - \Phi^{-1}[F_i(x_i^*)]\sigma_{x_i}^N \quad (III.22)$$

Ayant déterminé  $\sigma_{x_i}^N$  et  $\mu_{x_i}^N$  pour chaque variable,  $\beta$  peut être obtenu en suivant la même procédure des équations (III.16 à III.18).

### III.4.3 Variables aléatoires corrélées

L'analyse de fiabilité des structures gravitaires doit être fondée sur des propriétés corrélées dans les différentes couches de sol, tels que l'angle de frottement interne et la cohésion. Cette corrélation est supposée avoir lieu entre des paires de variables pour chaque couche. Aussi, les variables aléatoires corrélées sont supposées être normalement distribuées depuis qu'elles sont non normales et corrélées, exigent une information supplémentaire tels que leurs fonctions de densité de probabilité conjointe ou distributions conditionnelles pour leurs définition unique et complète (Ayyub, & al. 1998). De telles informations sont généralement non disponible et difficile à obtenir, une paire de variables aléatoires corrélées et normales avec un coefficient de corrélation  $\rho$ , peut être transformée en une paire non corrélée  $Y_1$  et  $Y_2$ , en résolvant pour deux valeurs propres  $\lambda$  dont les vecteurs propres correspondants représentés par :

$$Y_1 = \frac{1}{2\sqrt{0,5}} \left( \frac{X_1 - \mu_{x_1}}{\sigma_{x_1}} + \frac{X_2 - \mu_{x_2}}{\sigma_{x_2}} \right) \quad (III.23)$$

$$Y_2 = \frac{1}{2\sqrt{0,5}} \left( \frac{X_1 - \mu_{x_1}}{\sigma_{x_1}} - \frac{X_2 - \mu_{x_2}}{\sigma_{x_2}} \right) \quad (III.24)$$

Les variables  $Y$  sont non corrélées avec respectivement les variances qui sont égales aux valeurs propres comme suit :

$$\sigma_{y_1}^2 = \lambda_1 = 1 + \rho \quad (III.25)$$

Et

$$\sigma_{y_2}^2 = \lambda_2 = 1 - \rho \quad (III.26)$$

Pour une paire de variables aléatoires corrélées, les équations (III.16 et III.17) doivent être modifiées respectivement par les expressions suivantes :

$$\alpha_{y_1} = \frac{\left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial x_1} \right) \cdot \sqrt{0,5} \cdot \sigma_{x_1} + \left( \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right) \cdot \sqrt{0,5} \cdot \sigma_{x_2} \right] \cdot \sqrt{1 + \rho}}{\sqrt{\left( \frac{\partial Z}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 + 2 \cdot \rho \cdot \left( \frac{\partial Z}{\partial x_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right) \cdot \sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}}} \quad (III.27)$$

$$\alpha_{y_2} = \frac{\left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial x_1} \right) \cdot \sqrt{0,5} \cdot \sigma_{X_1} - \left( \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right) \cdot \sqrt{0,5} \cdot \sigma_{X_2} \right] \cdot \sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{\left( \frac{\partial Z}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \sigma_{X_1}^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \sigma_{X_2}^2 + 2 \cdot \rho \cdot \left( \frac{\partial Z}{\partial x_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right) \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}}} \quad (III.28)$$

$$X_1^* = \mu_{X_1} - \sigma_{X_1} \cdot \beta \cdot \sqrt{0,5} \cdot (\alpha_{y_1} \sqrt{1 + \rho} + \alpha_{y_2} \sqrt{1 - \rho}) \quad (III.29)$$

$$X_2^* = \mu_{X_2} - \sigma_{X_2} \cdot \beta \cdot \sqrt{0,5} \cdot (\alpha_{y_1} \sqrt{1 + \rho} - \alpha_{y_2} \sqrt{1 - \rho}) \quad (III.30)$$

Ou les dérivées partielles sont évaluées au point de conception.

### III.4.4 Avantages et Inconvénients

Les avantages les plus importants de la méthode FORM sont les suivants:

- L'indice de fiabilité et la probabilité de rupture sont indépendants de la forme de sécurité utilisée et ils peuvent également être évalués pour des fonctions non linéaires.
- C'est une méthode plus efficace pour estimer une faible probabilité de rupture par rapport à d'autres approches.
- Les facteurs de sensibilité donnent des informations supplémentaires sur l'influence des variables aléatoires de base sur la fonction de performance.

Comme pour la méthode analytique, la méthode FORM ne fournit pas la forme de la fonction de densité de probabilité, c'est-à-dire elle n'estime pas le coefficient d'asymétrie de la fonction de performance. De plus, cette méthode nécessite un logiciel spécial ou une très bonne compétence de programmation pour la procédure d'itération.

### III.5 Méthode d'estimation ponctuelle

Une autre méthode alternative pour évaluer les moments statistiques d'une fonction de performance est la méthode des points estimés, ou brièvement PEM. Cette méthode étant à l'origine proposée par Rosenblueth (1975,1981) puis développée par d'autres auteurs tels que Lind (1983), Zhou et Nowak (1988), Harr (1989), Li (1992), Evans et al (1993), Hong (1998), Christian et Bâcher (1999). La méthode d'estimation ponctuelle est une technique de calcul simple pour l'analyse d'incertitude, capable d'estimer les moments statistiques d'un model de sortie en faisant intervenir plusieurs variables stochastiques, corrélées ou non corrélées, symétriques ou asymétriques.

L'idée de base de cette méthode, est de remplacer les distributions de probabilité des variables aléatoires continues par des distributions discrètes équivalentes ayant les mêmes trois premiers moments centraux. Il s'agit fondamentalement de simuler les FDP des variables aléatoires par des poids (masses) de points localisées au plus ou au moins un écart type à partir des valeurs moyennes. Ensuite, la fonction de performance est calculée pour chaque combinaison possible des points estimés, produisant  $2^n$  solutions, ou  $n$  le nombre des variables aléatoires associées.

La procédure de mise en œuvre du PEM est décrite ci-dessous, étape par étape :

- 1- Tout d'abord la fonction de performance  $G(x_i)$  qui est une fonction de  $n$  variables aléatoires  $X_i$  devrait être envisagée.
- 2- Evaluation des unités d'écarts types  $\xi_{x_+}$  et  $\xi_{x_-}$  qui dépendent du coefficient d'asymétrie  $\vartheta_{x_i}$  des variables d'entrées par :

$$\xi_{x_+} = \frac{\vartheta_{x_i}}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\vartheta_{x_i}}{2}\right)^2} \quad (III.31)$$

Et

$$\xi_{x_-} = \xi_{x_+} - \vartheta_{x_i} \quad (III.32)$$

Si les variables de base sont réparties symétriquement, les unités d'écart type seront à la fois égaux à l'unité.

- 3- Connaissant la valeur moyenne  $\mu_{x_i}$  et l'écart type  $\sigma_{x_i}$  des variables d'entrées, les positions correspondantes aux points d'application des poids  $x_{i+}$  et  $x_{i-}$ , peuvent être calculées en utilisant les formules suivantes :

$$x_{i+} = \mu_{x_i} + \xi_{x+} \sigma_{x_i} \quad (III.33)$$

Et

$$x_{i-} = \mu_{x_i} - \xi_{x-} \sigma_{x_i} \quad (III.34)$$

- 4- Le poids  $P_i$ , également appelé probabilité concentrée, peut être maintenant déterminé pour obtenir toutes les estimations ponctuelles. Comme la fonction de densité de probabilité entourant l'air d'une unité, le poids doit avoir aussi la somme égale à l'unité et devra être positif. Un exemple de distribution des poids est représenté sur la (Fig. III.2a) et (Fig. III.2b).

Pour une seule variable aléatoire (Rosenblueth, 1975), exprime les poids en fonction des unités d'écarts types par les relations :

$$P_{x+} = \frac{\xi_{x-}}{\xi_{x+} + \xi_{x-}} \quad (III.35)$$

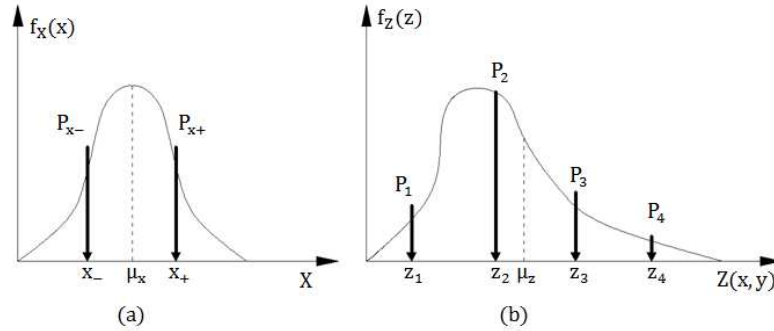
et

$$P_{x-} = 1 - P_{x+} \quad (III.36)$$

Pour une variable symétrique, les poids sont tous deux égaux à 0,5 (Fig. III.2a). Pour Deux variables aléatoires corrélées (Rosenblueth, 1981), donne les poids d'une variable de sortie exprimée par la relation :

$$P_{s_1 s_2} = P_{x_1 s_1} P_{x_2 s_2} + s_1 s_2 \left( \rho_{x_1 x_2} / \left( \left( 1 + \left( \frac{\vartheta_{x_1}}{2} \right)^3 \right) \left( 1 + \left( \frac{\vartheta_{x_2}}{2} \right)^3 \right) \right)^{1/2} \right) \quad (III.37)$$

$P_{x_1 s_1}$  et  $P_{x_2 s_2}$ , étant les poids des variables d'entrée évalués comme des variables simples.  $\rho_{x_1 x_2}$  est le coefficient de corrélation entre les variables  $x_1$  et  $x_2$ ,  $s_1 \cdot s_2$  détermine les indices du poids P indiquant l'emplacement du point qui est pondéré.



**Figure. III.2** Emplacement des points et poids pour une seule variable aléatoire (a) et pour une fonction dépendant de deux variables aléatoires (b).

Malheureusement l'équation (III.37) a des inconvénients évidents. Tout d'abord, si les coefficients d'asymétrie des variables d'entrées ont un signe différent, alors le rapport en vertu de la racine carrée peut être négatif, ce qui est mathématiquement impossible. Deuxièmement, si le coefficient d'asymétrie des variables est égale à (-2), le dénominateur du second terme de l'équation tend vers l'infini, donnant alors un poids infini. En outre, cette formule peut parfois donner des valeurs négatives. Ce fait est inacceptable, parce que les poids sont décrits comme des valeurs de probabilité, qui sont toujours positifs par définition. Pour surmonter le problème dans la formule de Rosenblueth équation (III.37), une meilleure définition pour deux variables aléatoires corrélées, étant répartis symétriquement, est donnée par Christian et al (1999), ou le poids sera évalué par les relations :

$$P_{+-} = P_{-+} = P_{x_1\pm} P_{x_2\mp} (1 - \rho_{x_1x_2}) \quad (III.38)$$

Et

$$P_{--} = P_{++} = P_{x_1\pm} P_{x_2\pm} (1 + \rho_{x_1x_2}) \quad (III.39)$$

Pour  $n$  variables aléatoires symétriques et corrélées, Christian et al (1999) définissent les poids par :

$$P_{s_1, s_2, \dots, s_n} = \frac{1}{2^n} \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (s_i s_j \rho_{ij}) \right) \quad (III.40)$$

- 5- Maintenant il est possible d'évaluer la fonction de performance  $G(x_i)$  à chaque point d'échantillonnage situé à  $x_i +$  et  $x_i -$ . Pour ce faire il suffit d'introduire les coordonnées obtenues en appliquant les équations (III.31 à III.32) dans l'expression de la fonction de performance. Pour  $n$  variables, la fonction de performance est évaluée à  $2^n$  points.

6- Enfin, les trois premiers moments de la fonction de performance, respectivement la valeur moyenne, la variance et le coefficient d'asymétrie, peuvent être déterminés en utilisant les équations suivantes :

$$\mu_{G(x_i)} = \sum_{i=1}^{2^n} P_i \cdot G(x_i = x_i) \quad (III.41)$$

$$\sigma_{G(x_i)}^2 = \sum_{i=1}^{2^n} P_i \cdot (G(x_i = x_i) - \mu_{G(x_i)})^2 \quad (III.42)$$

$$\vartheta_{G(x_i)} = \frac{1}{\sigma_{G(x_i)}^3} \sum_{i=1}^{2^n} P_i \cdot (G(x_i = x_i) - \mu_{G(x_i)})^3 \quad (III.43)$$

### III.5.1 Avantages et Inconvénients

Les avantages les plus importants de la méthode PEM sont les suivants:

- La méthode n'exige pas la connaissance de la forme particulière de la fonction de densité de probabilité des variables aléatoires d'entrée. En outre, elle fournit la solution exacte pour les fonctions de performance linéaire.
- Elle fournit non seulement la valeur moyenne et l'écart type, mais aussi le coefficient d'asymétrie de la fonction de performance.
- Elle peut mieux saisir le comportement des fonctions non-linéaires.
- Pour évaluer les valeurs statistiques d'une fonction de performance, il n'est pas nécessaire de calculer les dérivées, ni même leur continuité, et encore moins leur existence. Elle peut également être appliquée aussi aux problèmes de corrélation spatiale entre multiples variables d'entrées.

Les limites du PEM sont décrites ci-dessous:

- Les résultats par cette méthode sont médiocres et moins précis pour des fonctions discontinues ou des fonctions ayant des dérivées discontinues.
- Christian et Baecher (1999) suggèrent que PEM ne doit pas être appliquée pour évaluer des moments supérieurs à deux (c'est-à-dire la variance) en particulier pour des fonctions non linéaires.

### III.6 Méthode de fiabilité de second ordre (SORM)

La méthode FORM fonctionne habituellement bien lorsque la surface d'état limite n'a qu'un seul point de distance minimal, et la fonction est presque linéaire dans le voisinage du point de conception. Cependant, si la surface de défaillance a de grandes courbures (non linéarité élevée), la probabilité d'échec estimée par FORM à l'aide de l'indice de sécurité  $\beta$  peut donner des résultats déraisonnables et inexacts. Pour résoudre ce problème, la série Taylor de deuxième ordre (ou d'autres polynômes) est considérée. Divers procédés non linéaires approximatifs ont été proposés dans la littérature.

Breitung (1984), Tvedt (1984 et 1990), Ont développé SORM en utilisant l'approximation de deuxième ordre pour remplacer les surfaces d'origine. Wang et Grandhi (1995) et Der Kiureghian et al (1987) ont calculé les probabilités de défaillance du second ordre en utilisant des courbures approximatifs afin d'éviter les calculs exactes des dérivées du second ordre de la surface d'état limite. Nous présentons dans la suite les fondamentaux de l'approximation du second ordre de la surface de réponse avec une transformation orthogonale.

#### III.6.1 Approximation du Premier et second ordre de la fonction d'état limite

##### III.6.1.1 Transformations orthogonales

Pour faciliter l'intégration de l'équation (III.2) la nouvelle rotation de l'espace normale standard  $Y$  au lieu de l'espace  $U$  peut être considéré dans la plupart des calculs de la probabilité de rupture. Pour effectuer la rotation de l'espace normale standard  $U$  à l'espace  $Y$ , une matrice orthogonal  $H$  doit être générée dans laquelle la  $n^{eme}$  ligne de  $H$  est l'unité normale de la fonction d'état limite au point de conception  $P^*$ , c'est-à-dire  $-\nabla Z(U^*)/|\nabla Z(U^*)|$ . Pour générer  $H$ , au début, une matrice initiale est sélectionnée comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} -\frac{\partial Z(U^*)/\partial U_1}{|\nabla Z(U^*)|} & -\frac{\partial Z(U^*)/\partial U_2}{|\nabla Z(U^*)|} & \dots & -\frac{\partial Z(U^*)/\partial U_n}{|\nabla Z(U^*)|} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\} \quad (III.44)$$

Où le dernier (n-1) lignes se composent des zéros et de l'unité sur la diagonale. L'algorithme de Gram-Schmidt (Todd 1962) est utilisé pour orthogonaliser la matrice ci-dessus pour obtenir une matrice orthogonale. Tout d'abord, permettant avec  $f_1, f_2, \dots, f_n$  désignant le premier, deuxième, ..., n-ième vecteur ligne de la matrice ci-dessus, respectivement:



$$f_1 = \left\{ -\frac{\frac{\partial Z(U^*)}{\partial U_1}}{|\nabla Z(U^*)|}, -\frac{\frac{\partial Z(U^*)}{\partial U_2}}{|\nabla Z(U^*)|}, \dots, -\frac{\frac{\partial Z(U^*)}{\partial U_n}}{|\nabla Z(U^*)|} \right\}^T$$

$$f_2 = \{0, 1, 0, \dots, 0\}^T,$$

$$f_n = \{0, 0, 0, \dots, 1\}^T$$

Posons :

$$D_1 = (f_1, f_1)^{1/2}, \quad e_{11} = \frac{1}{D_1}, \quad \gamma_1 = e_{11}f_1 \quad \text{et} \quad D_2 = [(f_2, f_2) - |(f_2, \gamma_1)|^2]^{1/2}$$

$$e_{12} = -\frac{(f_2, \gamma_1)}{D_2}, \quad e_{22} = \frac{1}{D_2}, \quad \gamma_2 = e_{12}\gamma_1 + e_{22}f_2$$

Et d'une manière générale on peut écrire :

$$D_k = [(f_k, f_k) - |(f_k, \gamma_1)|^2 - |(f_k, \gamma_2)|^2 - \dots - |(f_k, \gamma_{k-1})|^2]^{1/2}$$

$$e_{1k} = -\frac{(f_k, \gamma_1)}{D_k}, \quad e_{2k} = -\frac{(f_k, \gamma_2)}{D_k}, \quad \dots, \quad e_{k-1,k} = -\frac{(f_k, \gamma_{k-1})}{D_k}$$

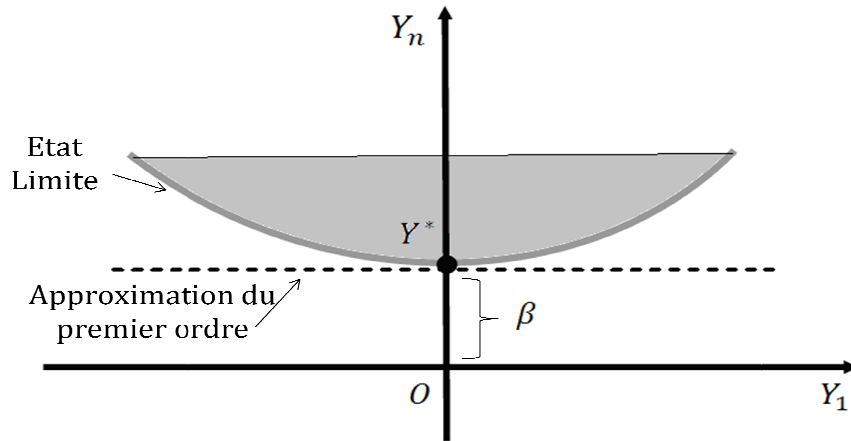
$$e_{kk} = \frac{1}{D_k}, \quad \gamma_k = e_{1k}\gamma_1 + e_{2k}\gamma_2 + \dots + e_{k-1,k}\gamma_{k-1} + e_{kk}f_k$$

Où  $(f, f)$  et  $(f, \gamma)$  représentent le produit scalaire de deux vecteurs. Il peut être vérifié que lorsque les vecteurs générés  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  soient orthogonalisés. Dont une matrice orthogonale générée exprimée:

$$H_0^T = \{\gamma_1^T, \gamma_2^T, \dots, \gamma_n^T\} \quad (III.45)$$

En fait, dans la matrice orthogonale de l'équation (III.45), la première ligne est constituée de  $-\nabla Z(U^*)/|\nabla Z(U^*)|$  en raison de  $D = 1$ . Pour satisfaire que la  $n^{\text{eme}}$  ligne de  $H$  est égal à  $-\nabla Z(U^*)/|\nabla Z(U^*)|$ , la première ligne de la matrice orthogonale est déplacée à la dernière ligne. Ce réarrangement de matrice est aussi une matrice orthogonale et satisfait que la  $n^{\text{eme}}$  ligne de  $H$  est égal à  $-\nabla Z(U^*)/|\nabla Z(U^*)|$ , donc il est définie par la matrice  $H$  est donnée par :

$$H^T = \{\gamma_2^T, \gamma_3^T, \dots, \gamma_n^T, \gamma_1^T\} \quad (III.46)$$



**Figure. III.3** Approximation du premier ordre de l'état limite

### III.6.1.2 Approximation du premier ordre

Supposant que le point de défaillance le plus probable  $P^*$  (MPP) dans l'espace  $U$  définie par le vecteur  $U^* = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ , alors l'approximation linéaire de la surface de réponse  $Z(u) = 0$  est donnée par l'expansion du premier ordre de la série de Taylor au point  $P^*$ :

$$Z(U) = Z(U^*) + \nabla Z(U^*)(U - U^*) \quad (III.47)$$

Dans cette équation,  $Z(U^*)$  est égal à 0, car le point  $U^*$  se trouve sur la surface de réponse  $Z(U) = 0$ . Divisant par  $|\nabla Z(U^*)|$ , l'équation (III.47) est réécrite sous la forme :

$$Z(U) \approx \frac{\nabla Z(U^*)}{|\nabla Z(U^*)|} (U - U^*) \quad (III.48)$$

De l'équation (III.15), nous avons :

$$\frac{\nabla Z(U^*)U^*}{|\nabla Z(U^*)|} = -\beta \quad (III.49)$$

Et par substitution de cette équation dans l'équation (III.48), nous obtenons :

$$Z(U) \approx \frac{\nabla Z(U^*)}{|\nabla Z(U^*)|} U + \beta = 0 \quad (III.50)$$

Par une rotation de  $U$  dans le nouveau changement de la série mutuellement indépendantes des variables aléatoires normales standards  $Y$  utilisant la matrice orthogonale  $H$  donnée par l'équation (III.46) nous aurons :

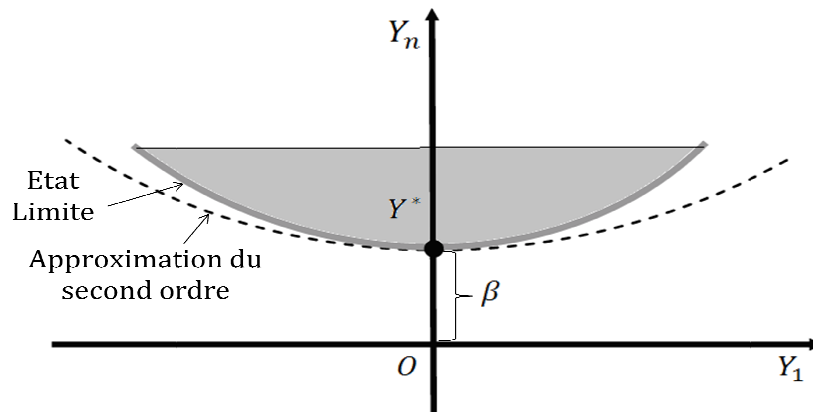
$$Y = HU \quad (II.51)$$

Dont la surface de réponse approximative représentée par l'équation (III.50) devient :

$$Z(U) \approx -y_n + \beta = 0 \quad (III.52)$$

$$\text{Ou } y_n = \beta \quad (III.53)$$

L'équation (III.53) est l'approximation du premier ordre de la surface de réponse dans la rotation de l'espace standard normal (notée Y-espace), illustré dans la figure (III.3). Si les fonctions d'état limite des problèmes pratiques sont linéaires ou quasi-linéaire, cette approximation d'une manière près ou exacte représente la surface de réponse.



**Figure. III.4** Approximation du second ordre de l'état limite

### III.6.1.3 Approximation du second ordre

L'approximation du deuxième ordre de la surface de réponse  $Z(U) = 0$  est donnée par l'expansion au second ordre de la série de Taylor au point de conception  $P^*$  :

$$Z(U) = Z(U^*) + \nabla Z(U^*)^T (U - U^*) + \frac{1}{2} (U - U^*)^T \nabla^2 Z(U^*) (U - U^*) \quad (III.54)$$

Où  $\nabla^2 Z(U^*)$  représente la matrice symétrique de dérivées secondes de la fonction de d'état limite:

$$\nabla^2 Z(U^*)_{ij} = \frac{\partial^2 Z(U^*)}{\partial u_i \partial u_j} \quad (III.55)$$

Divisant par  $|\nabla Z(U^*)|$  et considérant  $(U) = 0$ , nous obtenons :

$$Z(U) = \alpha^T (U - U^*) + \frac{1}{2} (U - U^*)^T B (U - U^*) \quad (III.56)$$

Avec :

$$\alpha = \frac{\nabla Z(U^*)}{|\nabla Z(U^*)|}, \quad \text{et} \quad B = \frac{\nabla^2 Z(U^*)}{|\nabla Z(U^*)|} \quad (III.57)$$

Physiquement, les transformations suivantes sont les coordonnées de rotations pour rendre l'axe  $Y_2$  coïncide avec le vecteur  $\beta$ , comme le montre la figure (III.4). Par substitution des équations (III.51), (III.52) et (III.56) une rotation de l'espace U de la fonction de performance représentée par :

$$Z(Y) = -y_n + \beta + \frac{1}{2} (H^{-1}Y - H^{-1}Y^*)B(H^{-1}Y - H^{-1}Y^*) \quad (III.58)$$

Où  $Y^*$  est le point le plus probable de l'espace Y ( $Y^* = \{0,0, \dots, \beta\}$ ) correspondant au point  $U^*$  de l'espace U. Dans l'espace Y, l'axe  $Y_n$  coïncide avec le vecteur  $\beta$ .

Comme la matrice H est une matrice orthogonale alors :

$$H^{-1} = H^T \quad (III.59)$$

Par substitution dans l'équation (III.58), nous avons :

$$Z(Y) = -y_n + \beta + \frac{1}{2} (Y - Y^*)^T H B H^T (Y - Y^*) \quad (III.60)$$

Avec :

$$(Y - Y^*)^T = (y_1, y_1, \dots, y_n - \beta)^T \quad (III.61)$$

Par une série de transformations orthogonales,  $H_1, H_2, \dots, H_m$ , et pour le premier n-1 variables, nous pouvons écrire :

$$\bar{Y}' = H_1 H_1, \dots, H_m \bar{Y} \quad (III.62)$$

Les quantités associées à n-1 variables sont notées avec une barre. Finalement, le premier (n-1)(n-1) ordre pour matrice de  $H B H^T$  deviennent une matrice diagonale:

$$\bar{H} \bar{B} \bar{H}^T = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \quad (III.63)$$

Et l'équation (III.60) devienne :

$$y_n = \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_i y_i'^2 \quad (III.64)$$

En faite, la procédure ci-dessus pour la détermination de la matrice diagonale peut être traitée comme un problème aux valeurs propres. Alors,  $k$  sont donnés par :

$$k_{ij} = (\bar{H}\bar{B}\bar{H}^T)_{ij} \text{ tel que } (i, j = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (III. 65)$$

Où  $k_{ij}$  représente la courbure de la surface de réponse au point de conception  $P^*$ .

L'équation (III.64) est l'approximation de deuxième ordre de la surface de réponse dans la rotation de l'espace normal standard. Le principal coût de calcul est dans le calcul de la dérivée seconde  $B$  de la fonction d'état limite à au point MPP. Les dérivés exacte de deuxième ordre de  $g(U)$  exigent additionnellement  $n(n+1)/2$  simulations de la fonction d'état limite au calcul par différences finies.

### III.6.2 Formulation de Breitung

Afin d'expliquer la formulation Breitung, d'abord, nous définissons une méthode de Laplace qui donne une approximation asymptotique des intégrales multidimensionnelles est nécessaire :

$$I(\beta) = \int_{Z(y)<0} \exp\left(\frac{-\beta^2|Y|^2}{2}\right) dY \quad (III. 66)$$

Où  $I(\beta)$  est une intégrale sur un domaine fixe, dont la fonction à intégrer est une fonction exponentielle dépendant linéairement du paramètre  $\beta^2$ . La forme asymptotique de  $I(\beta)$  peut aussi être écrite sous la forme :

$$I(\beta) \sim (2\pi)^{(n-1)/2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) \beta^{-(n+1)} |J|^{-\frac{1}{2}} \text{ tel que } \beta \rightarrow \infty \quad (III. 67)$$

Où  $J$  est une quantité indépendante de  $\beta$ , et ne dépend que de la première et seconde dérivées de la surface de rupture au point de conception. Dans le cas des variables aléatoires normales standards et indépendantes, la fonction de densité de probabilité conjointe (PDF) est donnée par :

$$P_f = (2\pi)^{-n/2} \int_{Z(u)<0} \exp\left(-\frac{|U|^2}{2}\right) dU \quad (III. 68)$$

Substituant  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n)$  avec  $y_i = \beta^{-1}u_i$

$$P_f = (2\pi)^{-n/2} \beta^n \int_{Z(y)<0} \exp\left(-\beta^2 \frac{|Y|^2}{2}\right) dY \quad (III. 69)$$

Substituant l'équation (III.67) dans cette équation, on obtient :

$$P_f \sim (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \beta^{-1} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) |J|^{-\frac{1}{2}}, \beta \rightarrow \infty \quad (III.70)$$

Comme la surface de rupture est approchée par l'expansion quadratique en série de Taylor au point  $P^*$ ,  $|J|$  peut être calculée en fonction de l'équation suivante :

$$|J| = \sum_{i=1}^p |J_i| = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n-1} (1 + k_{ij}\beta) \quad (III.71)$$

Où  $p$  est le nombre de points sur  $Z(u) = 0$  avec la plus courte distance  $\beta$  de l'origine à la surface de rupture, et  $k_{ij}$  est la courbure principale de la surface de rupture au point  $P^*$ . Et la probabilité de défaillance peut être exprimée par :

$$P_f \approx \phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + k_j\beta)^{-\frac{1}{2}} \quad (III.72)$$

C'est une équation analytique, elle est facile de mettre en œuvre dans un algorithme.

### III.6.3 Formulation de Tvedt

Elle est basée sur l'approximation au second ordre de la surface de rupture donnée par l'équation (III.69), la région approximative de rupture  $\Omega$  est défini par :

$$\Omega = \left\{ Y \left| y_n - \left( \beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_i y_i'^2 \right) \right| > 0 \right\} \quad (III.73)$$

La probabilité de rupture donnée dans l'équation (III.2) peut être calculée à partir d'une formulation dans l'espace  $Y$ :

$$P_f = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_1) \dots \varphi(y_{n-1}) \int_{\beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_i y_i'^2}^{\infty} \varphi(y_n) dy_n dy_{n-1} \dots dy_1 \quad (III.74)$$

Tvedt a tiré un rapprochement à trois termes de cette équation par un développement en série de puissance en termes de  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_i y_i'^2$ , en ignorant les termes d'ordre supérieur à deux. Le rapprochement qui en résulte pour  $P_f$  est :

$$\left[ \begin{array}{l}
 A_1 = \phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2} \\
 A_2 = [\beta \phi(-\beta) - \varphi(\beta)] \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2} - \prod_{i=1}^{n-1} (1 + (\beta + 1)k_i)^{-1/2} \right\} \\
 A_3 = (\beta + 1)[\beta \phi(-\beta) - \varphi(\beta)] \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-\frac{1}{2}} \right\} - Re \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + (\beta + 1)k_i)^{-1/2} \right\} \\
 P_f = A_1 + A_2 + A_3
 \end{array} \right.$$

Le premier terme,  $A_1$ , est la formule de  $Re\{\cdot\}$  Désigne la partie réelle. Cette méthode a été trouvée pour donner une très bonne approximation dans la plupart des cas. Le comportement asymptotique des trois termes peut être comparé dans le sens asymptotique utilisé dans l'équation (III.72).

### III.6.4 Avantages et Inconvénients

Quant à la méthode SORM, il s'agit d'améliorer le calcul de la probabilité de défaillance. Le principe est de remplacer l'état limite par une approximation géométrique au point de conception, que ce soit une approximation parabolique ou quadratique. L'influence de cette approximation sur la qualité des résultats paraît significative dans la plupart des cas.

Il convient de souligner aussi les difficultés de mise en œuvre de la méthode SORM :

- Il faut souligner que la formule asymptotique (III.72) est d'autant meilleure que la valeur de l'indice est plus grande. En pratique, il convient de considérer des indices au moins  $\beta \geq 3$ , ce qui n'est pas toujours vérifié.
- La validité des résultats dépend étroitement du nombre de variables aléatoires et de la distance à la valeur critique -1 du terme  $\beta_k$  (concavité tournée vers l'origine), ce qui ne permet pas à utiliser la méthode asymptotique ( $\beta_k = -1$ ).
- L'approximation géométrique de la surface d'état limite, définie au voisinage du point de conception, n'est plus nécessairement valable dès qu'on s'éloigne de ce point. Ceci peut conduire à des valeurs sans signification réelle, lorsque le domaine de défaillance diffère de façon trop radicale d'une forme régulière.
- Le calcul numérique du Hussien doit être effectué avec soin.

## III.7 Méthode de simulation de Monte Carlo

### III.7.1 Introduction

Simuler signifie représenter mathématiquement un phénomène physique, c'est-à-dire remplacer ce dernier par un système équivalent ; Le terme méthode de Monte-Carlo, ou méthode Monte-Carlo, désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, a été inventé en 1953 par Nicholas Metropolis. Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes, et consistent à isoler un certain nombre de variables-clés du projet, tels que les paramètres de base, et à leur affecter une distribution de probabilité. Pour chacun de ces facteurs, un grand nombre de tirages aléatoires est effectué dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de trouver la probabilité d'occurrence de chacun des résultats. Pour chacun des tirages, la fonction d'état limite est évaluée pour conclure si la configuration tirée est dans le domaine de sureté ou dans le domaine de défaillance. Un comptage des défaillances permet d'estimer la probabilité recherchée. D'une manière générale, les simulations constituent le moyen le plus coûteux, mais certainement le plus sûr, pour l'évaluation de la probabilité de défaillance, sous réserve de la qualité du générateur de nombres pseudo-aléatoires.

La procédure s'exprime par les étapes suivantes [Lemaire2005] :

- a) Engendrer les réalisations des variables aléatoires selon leur densité de probabilité conjointe, ou selon leurs densités marginales et leurs corrélations ;
- b) Evaluer la fonction d'état limite ;
- c) Deux cas se présentent :
  - S'il existe une défaillance, incrémenter ce cas ;
  - Si non, aller dans (a) ;
- d) Répéter (a) à (b) jusqu'à ce que le nombre de tirage suffisant soit atteint ;
- e) Calculer la probabilité définie comme le rapport des cas défaillants au nombre total de réalisations.

Un générateur de nombres aléatoires, (random number generator RNG) en anglais, est un dispositif capable de produire une séquence de nombres dont on ne peut pas « facilement » tirer des propriétés déterministes, de façon que cette séquence puisse être appelée « suite de nombres aléatoires ». La construction d'échantillons selon une loi donnée est particulièrement importante,



et la validation de la qualité du générateur est essentielle, en particulier pour une analyse multidimensionnelle.

Pour des raisons techniques, un bon générateur doit également satisfaire les exigences suivantes :

- Rapidité. Durant une simulation un grand nombre de variables aléatoires sont à engendrer et, donc, la complexité de cette génération peut peser sur la complexité de l'algorithme.
- Reproductibilité. Il est aussi souhaitable que la suite puisse se refaire de façon identique d'une exécution à une autre. Cette exigence est motivée par les soucis de recherche d'erreurs dans le programme de simulation. En effet, ces derniers sont souvent de nature complexe et la détection des erreurs nécessite souvent une répétition du même processus d'exécution.

### III.7.2 Nombres pseudo-aléatoires uniformes

La nécessité d'obtenir des données aléatoires est présente dans bien d'autres domaines. Certains domaines peuvent se contenter de données pseudo-aléatoires et utilisent des générateurs qui s'approchent plus ou moins d'un aléa parfait. La génération pour une loi quelconque passe d'abord par la génération des réalisations des variables à distribution uniforme dans l'intervalle  $[0, 1[$ . Comme le processus de génération est totalement déterministe, il est possible de démontrer que les nombres engendrés obéissent à une loi de distribution uniforme et sont relativement indépendants. Nous pouvons distinguer les générateurs les plus connues :

#### III.7.2.1 Générateur congruentiel mixte

C'est le générateur le plus utilisé, dont le principe est d'engendrer une suite  $x_i$  basée sur la détermination du reste de la division par un nombre entier  $m$  ; l'expression la plus utilisée est écrite sous la forme générale :

$$x_{i+1} = (ax_i + c)(\text{mod } m), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.75})$$

Avec  $a$ ,  $c$  et  $m$ , sont respectivement le multiplicateur, l'incrément et le dénominateur  $m$ , sont des entiers non négatifs ;  $\text{mod}$  est l'opérateur de division des entiers. On peut donner une autre forme d'expression équivalente :

$$x_{i+1} = ax_i + c - mk_i, \quad \text{et} \quad k_i = \text{integer}\left(\frac{ax_i + c}{m}\right) \quad (\text{III.76})$$

Ou l'opérateur  $\text{integer}(\cdot)$  désigne la partie entière de la division. Notons que le nombre obtenu  $x_i$  appartient à l'intervalle  $[0, m[$ , et pour avoir un nombre  $u_i$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1[$ , il suffit de diviser par  $m$ .

### III.7.2.2 Générateur multiplicatif

Ce type se diffère du générateur mixte par son incrément nul c'est-à-dire en posant ( $c = 0$ ) dans l'expression (III.75) :

$$x_{i+1} = (ax_i)(\text{mod } m), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.77})$$

La période complète dans ce type n'est pas atteinte, seulement une période maximale est à rechercher, obtenue dans le cas où  $x_0$  n'est pas un facteur premier de  $m$  et à respecter certaines conditions.

### III.7.2.3 Générateur congruentiel additif

Il a pour une forme générale exprimé par la relation :

$$x_{i+1} = x_i + x_{i-k}(\text{mod } m), \quad k = 1, 2, \dots, i - 1 \quad (\text{III.78})$$

Les propriétés de ce générateur ne sont pas satisfaisantes, mais elles s'améliorent pour les grandes valeurs de  $k$ .

## III.7.3 Générateurs de distributions non uniformes

La méthode générale pour la génération des variables aléatoires de distribution quelconque est la transformation d'une variable aléatoire de distribution uniforme. Pour ce faire, nous disposons de trois méthodes générales et de méthodes spécifiques à certaines lois dont la loi de Gauss :

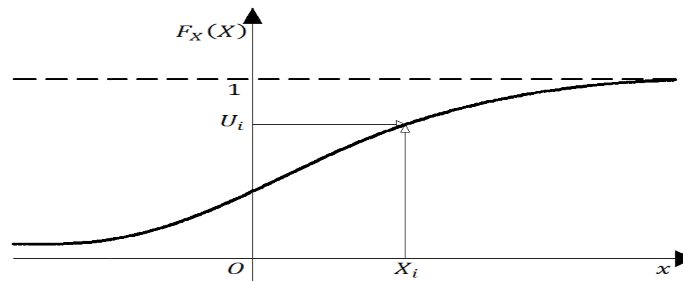
### III.7.3.1 Méthode de transformation inverse

Le procédé majeur pour générer une variable aléatoire  $X$ , est l'inversion. Soit  $U$ , une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle  $[0, 1[$ , alors la variable  $X$ , définie par la relation :

$$X = F_X^{-1}(U) \quad (\text{III.79})$$

Et possédant une fonction de répartition  $F_X(X)$ . Alors comme  $F_X(X)$  est strictement croissante on peut écrire :

$$Prob(X \leq x) = Prob[F_X^{-1}(U) \leq x] = Prob[U \leq F_X(X)] = F_X(X) \quad (III.80)$$



**Figure. III.5** Construction d'une variable aléatoire par inversion [Lemaire2005]

Il suffit de donner un nombre  $u_i$  et d'en déduire la variable correspondante  $x_i$  par l'expression  $x_i = F_X^{-1}(u_i)$  (Fig III.5).

### III.7.3.2 Méthode de composition

Dans ce cas la densité de probabilité à engendrer est exprimée par une combinaison d'un certain nombre de distributions judicieusement choisies. Soit  $g_X(x|u)$  une densité de probabilité, ou  $u$  définit une fonction  $g_X(x)$ . Si une réalisation de  $U$  est tirée à partir d'une fonction de répartition  $F_U(u)$  uniforme sur  $[a, b]$  et si  $X$  est tirée sur  $g_X(x)$ , alors pour une valeur donnée de  $u$  la densité de  $X$  est exprimée par la relation :

$$f_X(x) = \int g_X(x|u) dF_U(u) \quad (III.81)$$

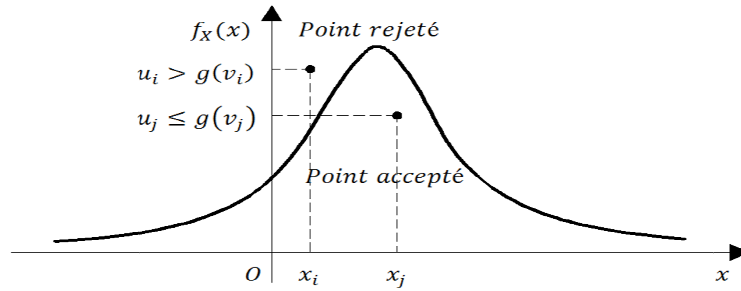
La technique permet d'engendrer des distributions complexes à partir de distributions plus simples qui peuvent être générées par la méthode de la transformation inverse.

### III.7.3.3 Méthode de rejet-acceptation

Elle consiste à tirer un nombre aléatoire à partir d'une distribution appropriée et à tester ce nombre en vue de déterminer s'il est rejeté ou accepté. Soit  $f_X(x)$  une densité à générer (Fig III.6). On peut choisir une densité  $h(x)$  et une constante  $C$  de tel sorte que  $f_X(x) \leq Ch(x)$ . Alors la procédure est décrite comme suit :

On génère deux variables :  $U$  à partir d'une distribution uniforme  $[0, 1[$  et  $V$  à partir de  $h(v)$ . et on teste la condition  $u_i \leq g(v_i) = f_X(v_i)/Ch(v_i)$  :

- Si  $u_i \leq g(v_i)$  on accepte  $v_i$  comme un nombre généré de  $f_X(x)$ .
- Si  $u_i > g(v_i)$  on rejette le couple  $(u_i, v_i)$  et on recommence le tirage.



**Figure. III.6** Représentation de la méthode rejet-acceptation [Lemaire2005]

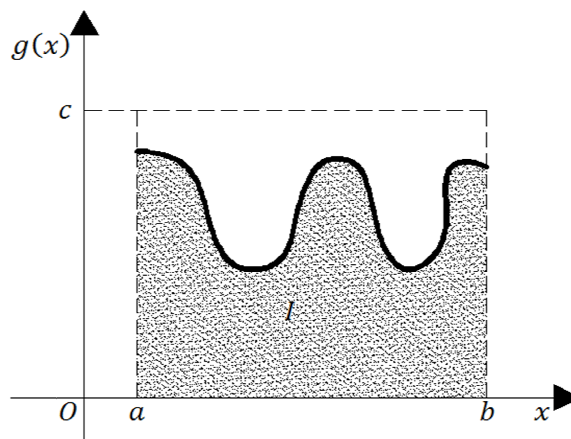
### III.7.4 Principes des méthodes de simulations

L'application de la méthode de Monte Carlo aux problèmes d'analyse probabiliste des structures est relativement récente, devenant pratique uniquement avec l'avènement des ordinateurs numériques. C'est un puissant outil mathématique pour déterminer la probabilité approximative d'un événement spécifique qui est le résultat d'une série de processus stochastiques. Elle constitue une méthode d'intégration numérique, en choisissant quelques points au hasard dans le domaine d'intégration au lieu de faire un balayage dans toutes les directions. La valeur d'intégration est obtenue de l'espérance mathématique des tirages.

A titre d'exemple le calcul de l'intégrale de la fonction  $g(x)$  sur le domaine  $[a, b[$  exprimé par la relation :

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad (III.82)$$

Cette expression représente l'air limitée par la fonction  $g(x)$  et les limites du domaine (Fin III.7)



**Figure. III.7** Intégration par simulation

Si la fonction justifie les conditions tel que  $0 < g(x) < c$  pour  $a < x < b$ , dans ce cas deux variables uniformes indépendantes (X,Y) peuvent être générés avec  $a \leq x < b$  et  $0 \leq y < c$ , et de fonction de répartition conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{c(b-a)} & \text{si } a \leq x < b \text{ et } 0 \leq y < c \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (III.83)$$

D'où on représente le rapport de la surface sous la fonction par rapport à l'air totale :

$$p = \frac{\int_a^b g(x)dx}{(c-0)(b-a)} = \frac{I}{c(b-a)} \quad (III.84)$$

Si on effectue N tirages aléatoires pour les deux variables (X et Y), le rapport s'exprime par la relation :

$$\tilde{p} = \frac{N_{y \leq g(x)}}{N} \quad (III.85)$$

Avec  $N_{y \leq g}$  et le nombre de tirages pour lesquels  $y_i \leq g(x_i)$ , dont l'estimation de l'intégrale est exprimée par l'équation :

$$I \approx c(b-a) \frac{N_{y \leq g}}{N} \quad (III.86)$$

D'où on peut exprimer l'espérance par :

$$E[I] = \int_{y \leq g(x)} f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (III.87)$$

Notons que l'efficacité de la méthode dépend que du rapport  $N_{y \leq g}/N$ , et les tirages les plus utiles sont ceux pour lesquels  $y \leq g(x)$ .

### III.7.4.1 Simulations de Monte-Carlo classique

Cette méthode est simple sous sa forme classique, et facile à être implémenter dans des codes de calcul numérique. Cependant, elle est très consommatrice de calcul, sans apporter la certitude de pouvoir conclure. Alors les tirages effectués suivant la loi multi-normale (Fig III.8) ont pour objectif d'évaluer la probabilité de défaillance :

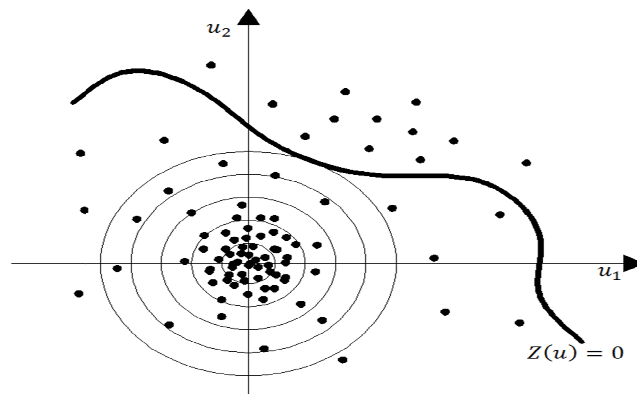
$$P_f = \int_{D_f} \varphi_n(u) du_1 du_1 \dots du_n \quad (III.88)$$

Avec  $D_f$  est le domaine de défaillance défini par  $Z(u) \leq 0$ , et  $\varphi_n(u)$  est la densité multi-normale de dimension  $n$ . on peut introduire un indicateur de défaillance  $I_{D_f}$  défini par :

$$I_{D_f} = \begin{cases} 1 & \text{si } Z(u) \leq 0 \\ 0 & \text{si } Z(u) > 0 \end{cases} \quad (III.89)$$

Alors la probabilité de défaillance en fonction de l'indicateur, s'écrit sous la forme :

$$P_f = \int_{R^n} I_{D_f} \varphi_n(u) du_1 du_2 \dots du_n = E [I_{D_f}] \quad (III.90)$$



**Figure. III.8** Simulation de Monte-Carlo [Lemaire2005].

Alors la moyenne empirique de  $I_{D_f}$  est une estimation non biaisée de  $P_f$  :

$$P_f = E [I_{D_f}] \approx \tilde{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N I_{D_f}^r(u_i) \quad (III.91)$$

Dont la variance est exprimée par la relation :

$$Var(\tilde{P}_f) \approx \frac{1}{N} \tilde{P}_f (1 - \tilde{P}_f) \quad (III.92)$$

Et le coefficient de variation de l'estimateur par :

$$V = \sqrt{\frac{1 - P_f}{NP_f}} \approx \sqrt{\frac{1}{NP_f}} \Big|_{P_f \rightarrow 0} \quad (III.93)$$

D'une manière générale, pour estimer correctement une probabilité d'ordre  $10^{-n}$ , il faut réaliser  $10^{n+2}$  à  $10^{n+3}$  simulations. Ce qui est difficile et presque impossible à utiliser pour les grands systèmes à faible probabilité.

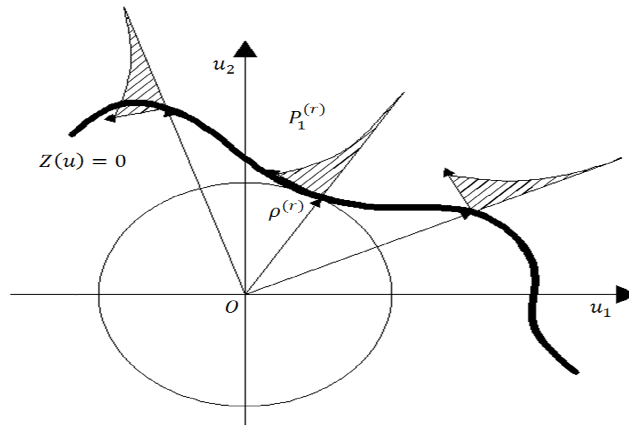
### III.7.4.2 Simulations directionnelles

Ce type de méthodes, constituent un moyen plus au moins économique que celui de la simulation de Monte-Carlo tout en ne nécessitant pas d'informations supplémentaires. Comme la densité de probabilité multi-normale présente une symétrie rotationnelle dans l'espace standard, les tirages sont alors effectuées radialement. Et la probabilité de défaillance sera évaluée conditionnellement à la direction (Fig III.9).

L'estimateur de probabilité est évalué par l'expression :

$$\tilde{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N (1 - \chi_n^2(\rho^r)^2) \quad (III.94)$$

Avec  $r$  est le numéro du tirage,  $\chi_n^2$  la loi de répartition à  $n$  degré de liberté, et  $\rho^r$  le rayon.



**Figure. III.9** Tirage directionnels sur une sphère unitaire [Lemaire2005].

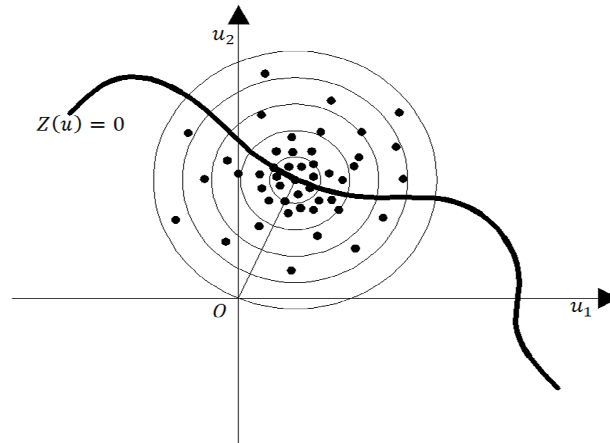
### III.7.4.3 Simulations d'importance

Du moment que le poids de la probabilité de défaillance est généralement situé au voisinage du point de conception  $P^*$ , il serait préférable de concentrer les tirages au voisinage de ce point (Fig III.10). Il s'agit de rechercher en premier lieu le point de défaillance le plus probable, et de réaliser ensuite un tirage autour de ce point.

L'estimateur de probabilité est évalué par l'expression :

$$\tilde{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N (I_{D_f}^{(r)} \exp(-\sum_i u_i^* u_i^{(r)} - \frac{\beta^2}{2})) \quad (III.95)$$

Avec  $\beta$  étant l'indice de Hasofer et Lind, donné par  $\sqrt{\sum_i u_i^{*2}}$ .



**Figure. III.10** Tirage directionnels sur une sphère unitaire [Lemaire2005].

### III.7.4.4 Simulations Hyper-Cube Latin

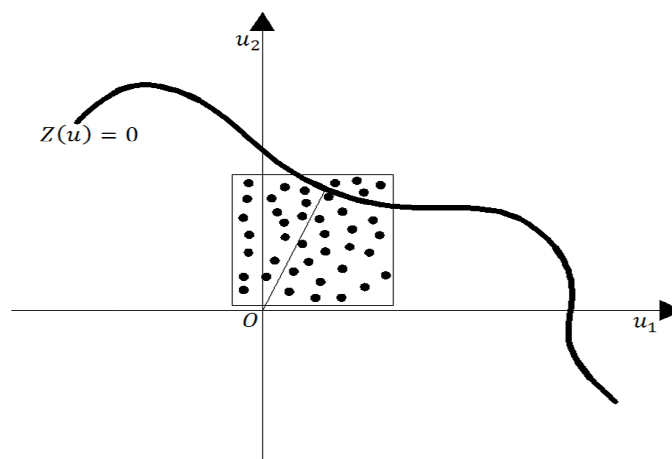
Dans cette méthode les tirages sont effectués d'une façon uniforme dans un pavé centré par le point de conception, et dont les cotés sont parallèles aux axes du repère (Fig. III.11).

L'estimateur de probabilité est évalué par l'expression :

$$\tilde{P}_f = \frac{V_{(P)}}{N} \sum_{r=1}^N I_{D_f}^{(r)} \varphi_n(u_k^{(r)}) \quad (III.96)$$

Avec  $V_{(P)}$  est le volume du pavé.

Cette méthode est réputée peu efficace pour les faibles probabilités.



**Figure. III.11** Tirages uniformes dans un pavé [Lemaire2005].



### III.7.5 Avantages et Inconvénients

Les méthodes de simulations ont l'avantage de pouvoir traiter des cas très complexes, tel que les états limites combinés des systèmes série ou parallèle. L'efficacité d'une méthode est augmentée en intégrant les informations disponibles sur le problème si celles-ci sont pertinentes.

En pratique, les choix sont imposés par la disponibilité des outils et des compétences. Quelle que soit la méthode retenue, elle a un cout. Le temps de calcul dépend essentiellement du nombre de variables et de la précision demandée. Cette méthode est évidemment plus lourde à mettre en œuvre que les méthodes du type FORM/SORM, mais elle donne beaucoup plus de résultats. Cependant, un nombre important d'évaluation du modèle mécanique, les simulations n'offrent pas beaucoup d'information sur le comportement fiabiliste du système. En plus les méthodes basées sur la connaissance du point de conception peuvent donner une fausse estimation de la probabilité de défaillance si le point de calcul est un minimum local, ou bien s'il existe plusieurs minimums.

### III.8 Conclusion

Ce chapitre a pour objectif, la présentation d'un certain nombre de méthodes de calcul de la probabilité de défaillance. Nous avons constaté que différents niveaux d'approximation sont possibles, en fonction de la caractérisation de l'état limite, en s'appuyant sur les notions vues, qui continuent à jouer un rôle important dans les méthodes proposées. Le choix des outils d'analyse de la fiabilité dépend fortement du problème posé. Il n'existe pas de méthode universelle permettant de faire face à la multiplicité des situations de la réalité pratique. Les décisions méthodologiques résultent donc de l'expérience acquise dans le métier.

L'approximation FORM présente en pratique un grand avantage : elle nécessite un effort de calcul généralement faible pour l'obtention d'une bonne approximation dans la plupart des cas. Et pour aller plus loin, on utilise les approximations SORM dont on a vu qu'elles étaient multiples. Elles sont fondées sur une connaissance de la géométrie de l'état limite au voisinage du point de conception, et la qualité de la solution dépend de celle de l'approximation parabolique ou quadratique. Mais il faut noter que SORM peut parfois donner des résultats moins précis que FORM ; son utilisation doit donc être contrôlée dans un certain nombre de cas significatifs.

Selon notre cas qui dépend de deux paramètres, on propose d'utiliser la méthode analytique. Outre son intérêt intrinsèque, elle peut être également utilisée pour confirmer ou non les résultats de la méthode FORM, aussi prise en considération dans l'évaluation de la probabilité de défaillance.

## **Chapitre (IV)**

### ***Principes de l'Eurocode 7***

## Chapitre IV : Principes de l'Eurocode 7

### IV.1.Introduction

L'Eurocode 7 « Calcul géotechnique » constitue l'un des chapitres d'un ensemble de textes dont la préparation a été commandée par la Commission des Communautés Européennes au début des années 80, aux fins d'harmoniser les règles de conception et de calcul des constructions courantes et de rendre plus égales les conditions de concurrence dans les différents pays d'Europe. Par rapport à la pratique traditionnelle de la géotechnique en Europe et dans le monde, l'Eurocode 7 se distingue par la volonté délibérée d'appliquer systématiquement le formalisme du dimensionnement aux états limites (ultimes et de service) et de traiter la sécurité au moyen de facteurs partiels appliqués séparément aux charges, aux propriétés des matériaux et aux méthodes de calcul. La référence aux états limites est un remodelage des pratiques existantes, mais l'utilisation de facteurs partiels, au lieu d'un coefficient de sécurité global spécifique à chaque type de calcul et à chaque type d'ouvrage, est une modification beaucoup plus importante qui a nécessité et nécessitera au cours des prochaines années beaucoup d'études de recalage par rapport à l'expérience. Le présent chapitre décrit le contenu de l'Eurocode 7 expérimental, dont la publication a eu lieu en 1994. Il analyse en particulier les similitudes et différences de ce texte par rapport aux pratiques généralement suivies en Europe dans l'étude des ouvrages géotechniques, puis commente les possibilités pratiques d'utilisation de ce texte en attendant la publication des normes complémentaires prévues ultérieurement par types d'ouvrages.

### IV.2. Structure de l'Eurocode 7

L'Eurocode 7, comme tous les autres Eurocodes, comprend un texte principal, qui est d'application obligatoire, et des règles d'application, qui constituent des modèles reconnus d'application des prescriptions de l'Eurocode 7 mais peuvent être remplacées par des procédures « équivalentes » du point de vue de la sécurité des ouvrages et du respect des principes généraux du dimensionnement. Le texte approuvé au niveau européen, dans le cadre des travaux du CEN (Comité Européen de Normalisation), contient de plus des paramètres dits « encadrés », dont les valeurs peuvent être librement fixées dans chaque pays. Un « document d'application nationale » est donc publié avec chaque Eurocode pour préciser les conditions d'application de cet Eurocode dans chaque pays et définir en particulier les valeurs nationales des paramètres encadrés et les règles admises comme équivalentes aux règles d'application décrites dans l'Eurocode.

Ce document contient neuf chapitres, dont les premiers présentent les concepts de base du dimensionnement des ouvrages, tandis que les chapitres suivants décrivent leur application au dimensionnement des grandes catégories d'ouvrages géotechniques. Il est à noter que les Eurocodes ont généralement le principe de traiter seulement des questions de conception et de calcul des ouvrages, les normes relatives à l'exécution des travaux étant élaborées dans un autre cadre (Comité technique 288 du CEN).

## **IV.3 Principes généraux de l'Eurocode 7**

### **IV.3.1 Relations entre les autres Eurocodes**

L'ensemble composé d'une collection complète des « Eurocodes structuraux » comprend jusqu'à l'heure actuelle neuf volumes :

Eurocode 1 – Bases du calcul et actions sur les structures

Eurocode 2 – Calcul des structures en béton

Eurocode 3 – Calcul des structures en acier

Eurocode 4 – Calcul des structures mixtes acier-béton

Eurocode 5 – Calcul des structures en bois

Eurocode 6 – Calcul des structures en maçonnerie

Eurocode 7 – Calcul géotechnique

Eurocode 8 – Résistance des structures aux séismes

Eurocode 9 – Calcul des structures en aluminium

L'Eurocode 1 (ENV 1991) décrit les principes généraux de la conception et du calcul des ouvrages et impose ces règles aux autres Eurocodes. En définissant notamment les concepts d'états limites ultime et de service, la notion de situation de calcul, les principes de détermination des valeurs de calcul des charges et des propriétés des matériaux et aussi le vocabulaire commun à tous les Eurocodes. Par contre les autres Eurocodes sont indépendants les uns des autres, sauf l'Eurocode 8, qui complète les Eurocodes 2 à 9 pour la justification des ouvrages en zone sismique. Différents problèmes d'interaction sol-structure font toutefois intervenir l'Eurocode 7 en même temps qu'un autre Eurocode et la compatibilité des règles de ces Eurocodes a dû être assurée.

### **IV.3.2 Champ d'application de l'Eurocode 7**

Certain documents comme le Document d'Application Nationale (DAN) français, précise que l'Eurocode 7 n'est pas suffisant pour le dimensionnement des barrages, tunnels et ouvrages souterrains (hors tranchées couvertes) et ouvrages en mer et qu'il ne s'applique pas aux

terrassements routiers et ferroviaires, ni aux problèmes de dragage en mer ou en rivière. Il faut d'abord éclaircir que l'Eurocode 7 n'est pas un code pour le dimensionnement des ouvrages, bien au contraire c'est un règlement destiné pour la justification des projets. Il ne faut pas ce mettre à la recherche sur la meilleure façon de concevoir, il vaut mieux prendre la meilleur technique de construction. Comme toutes autres Eurocodes, son objectif est de définir les règles à appliquer dans le domaine de la géotechnique pour arriver a un certain seuil de sécurité.

Enfin, les rédacteurs de l'Eurocode 7 ont tenu compte de la diversité des pratiques, des conditions de terrain et des méthodes de justification actuelles des ouvrages géotechniques dans les différents pays membres du CEN et ont laissé beaucoup de souplesse dans l'application concrète des principes de justification de l'Eurocode. Il fallait en effet, dans l'énoncé des principes obligatoires de justification des ouvrages, tenir compte de l'extrême diversité des matériaux rencontrés en géotechnique et de l'existence de traditions nationales incontournables.

### **IV.3.3 Organisation des études géotechniques**

Dans le domaine de la géotechnique toutes justifications des ouvrages s'appuient bien évidemment sur les conclusions de la reconnaissance du site, à titre d'exemple les cas des études géologiques, des sondages et essais en place, des prélèvements et essais de laboratoire, voire des expérimentations en vraie grandeur. L'importance de cette reconnaissance géotechnique et les méthodes de justification utilisées dépendent non seulement de la nature de l'ouvrage et des terrains (sols ou roches) rencontrés sur le site, mais aussi de l'importance de l'ouvrage représentée par des catégories.

#### **IV.3.3.1 Catégories géotechniques**

La notion de « catégorie géotechnique » est introduite dans l'Eurocode 7 pour différencier l'importance des « ouvrages simples » des autres ouvrages géotechniques et permettant l'emploi de méthodes de justification simplifiées pour ces ouvrages simples, afin de permettre le maintien des pratiques en vigueur sans dommages particuliers dans les différents pays d'Europe.

On définit trois catégories géotechniques :

- a) *la catégorie géotechnique 1* : Ce type rassemble les ouvrages de faible importance, dans lesquels on peut admettre que les exigences fondamentales (sécurité, aptitude au service et durabilité) seront satisfaites en utilisant l'expérience acquise et des reconnaissances géotechniques qualitatives, avec des risques négligeables. Cette catégorie correspond typiquement à des maisons à des édifices de faible hauteurs un ou deux niveaux, à des bâtiments agricoles de faible importance sur fondations superficielles classiques ou sur

pieux, à des murs de soutènement et fouilles blindées où la différence de niveau des terrains n'excède pas 2 m, à de petites excavations pour la pose de canalisations ou de drains.

- b) *la catégorie géotechnique 2* : Ce cas comprend les types d'ouvrages et de fondations qui n'ont pas de risques anormaux ou des conditions de terrain et de chargement inhabituelles ou exceptionnellement difficiles. Alors dans ce cas les reconnaissances et les calculs de justification sont nécessaires, la catégorie comprend les types classiques de fondations superficielles, de fondations sur radiers, de fondations sur pieux, les murs et les autres ouvrages retenant ou soutenant du sol ou de l'eau, les excavations, les appuis et culées de ponts, les remblais et terrassements pour le bâtiment et les ouvrages d'art, les ancrages et autres systèmes de tirants, les tunnels simples.
- c) *la catégorie géotechnique 3* : Elle rassemble les ouvrages de très inhabituels, c'est-à-dire les ouvrages de très grandes risques, ou édifiés dans des terrains de grande complexités ou dans des zones de forte sismicité.

### IV.3.3.2 Procédure de justification

Les justifications de tous ouvrages géotechniques permettent d'assurer et de prouver que, dans chaque situation de calcul, aucun des états limites identifiés n'est atteint. La démarche classique pour procéder à cette vérification consiste à effectuer les calculs suivant:

- calcul des efforts déstabilisants et des efforts résistants ;
- calcul des déplacements ou déformations ;

Et d'assurer par une vérification que les états limites ultimes (de stabilité et de déformations), ou les états limites de service (en stabilité et en déformations) ne soient pas atteintes. Toutefois, cette procédure de justification n'est pas la seule qui soit admise pour les ouvrages de géotechnique.

On peut admettre selon l'expérience acquise dans la pratique de la géotechnique, qu'il existe quatre façons de justifier un ouvrage :

1. *justification par le calcul* : où l'on utilise des modèles de calcul, des actions comme celle des charges imposées ou des déplacements imposés, des propriétés de sols, roches ou autres matériaux, des données géométriques et des valeurs limites de déformations, de profondeurs de fissures, de vibrations, etc.
2. *justification par des mesures prescriptives* : elle concerne le choix classique sur les matériaux, les détails de réalisation, leur exécution. Le dimensionnement peut s'effectuer en particulier pour les ouvrages simples, suivant une expérience acquise des constructions semblables ayant les mêmes conditions de terrain. Il est généralement

adapté pour traiter les questions de durabilité vis-à-vis du gel et des attaques chimiques et biologiques, pour lesquelles des calculs ne sont en général pas appropriés.

3. *justification par des essais de chargement ou des essais sur modèles physiques* : qui suppose toutefois de maîtriser les effets de temps, d'échelle et de différences éventuelles des conditions de terrain entre l'essai et l'ouvrage à construire.

### IV.3.3.3 Rapport géotechnique

Un rapport de dimensionnement géotechnique qui devra être établi pour chaque projet, dans le sens de la vérification et de la justification de l'ouvrage en question, qui complète la reconnaissance géotechnique. Il comprend deux parties : la première qui concerne présentation des informations géotechniques disponibles, les caractéristiques géologiques et d'autres données nécessaires pour le projet, et la seconde qui rassemble les hypothèses de l'établissement des paramètres géotechniques utilisées pour le dimensionnement du projet.

## IV.4 Règles de dimensionnement des ouvrages géotechniques

### IV.4.1 Situations de calcul

Une *situation de projet* d'une structure est un ensemble de conditions physiques représentant les circonstances réelles susceptibles de se présenter pendant une certaine période de temps au cours de laquelle il sera vérifié qu'aucun état limite pertinent du projet n'est dépassé. Il est présumé que, pendant cet intervalle de temps, les facteurs affectant la sécurité structurelle demeurent inchangés. Chaque situation potentielle, en particulier celles survenant pendant la construction de l'ouvrage défini, doit faire l'objet de vérifications indépendantes.

Les situations examinées dans la présente Instruction sont les suivantes:

- *Situations de projet durables* correspondant à des conditions d'utilisation normales de la structure pendant sa durée de vie utile.
- *Situations transitoires* qui se produisent lorsque les conditions d'utilisation ou l'état de la structure sont provisoires, par exemple pendant sa construction ou réparation, ou pour lesquelles une durée correspondante est définie. En l'absence d'études plus détaillées, une situation de ce type d'une durée d'un an peut être acceptée.
- *Situations accidentelles* correspondant à des conditions exceptionnelles affectant la structure telles que celles causées par un choc ou la défaillance d'un élément. Il s'agit de situations instantanées (sauf dans le cas où la défaillance peut ne pas être détectée).
- *Situations sismiques* correspondant à des conditions exceptionnelles affectant la structure pendant un événement sismique. La situation sismique se distingue des autres situations

accidentelles par le fait que différents niveaux de magnitude de l'action sont définis en fonction des exigences de sécurité et de service.

#### **IV.4.2 Exigences Fondamentales de calcul**

La présente Instruction a été rédigée en prenant en compte les exigences fondamentales suivantes:

(1) Dans le but d'atteindre les niveaux de sécurité adoptés à chaque situation de calcul géotechnique, il doit être vérifié qu'en aucun cas état limite pertinent, au sens de la norme EN 1990:2002, n'est atteint.

(2) Au cours de la définition des situations de calcul et des états limites, il convient de considérer les facteurs suivants :

- les conditions du site en termes de stabilité globale et de mouvements du terrain ;
- la nature et la taille de la structure et de ses éléments, y compris des exigences spéciales comme la durée de vie de calcul ;
- les conditions relatives au voisinage du projet (par exemple, structures avoisinantes, circulation, réseaux divers, végétation, produits chimiques dangereux) ;
- les conditions de terrain ;
- l'état des eaux souterraines ;
- la sismicité régionale ;
- l'influence de l'environnement (hydrologie, eaux superficielles, affaissements et subsidence, variations saisonnières de la température et de l'humidité).

(3) Les états limites peuvent être atteints séparément dans le terrain ou dans la structure ou simultanément dans le terrain et la structure.

(4) Il convient de vérifier les états limites par l'un ou par une combinaison des moyens suivants :

- l'utilisation de calculs
- l'adoption de mesures prescriptives
- des modèles expérimentaux ou des essais de chargement
- une méthode observationnelle

(5) Dans la pratique, l'expérience montre souvent le type d'état limite qui gouverne le calcul de l'ouvrage et l'on pourra comme même se contenter d'un contrôle pour vérifier que les autres états limites ne sont pas atteints.



(6) Il convient aussi de protéger les bâtiments contre la pénétration, des eaux souterraines ou la transmission de vapeur ou de gaz.

(7) Si c'est possible, il est préférable de procéder à une vérification des résultats des calculs par rapport à des expériences comparables.

(8) Pour établir les exigences minimales relatives à l'ampleur et au contenu des reconnaissances géotechniques, des calculs et des contrôles d'exécution des travaux, la complexité de chaque étude géotechnique doit être identifiée, ainsi que les risques associés. En particulier, une distinction doit être faite entre :

- les ouvrages légers et simples pour lesquels il est possible d'assurer que les exigences minimales seront satisfaites avec un risque négligeable ;
- les autres ouvrages géotechniques.

(9) L'utilisation de procédures de calcul simplifiées est admise, pour le cas des structures et des terrassements qui présentent une faible complexité géotechnique et un risque faible.

(10) Trois catégories géotechniques (1, 2 et 3) peuvent être considérées, pour établir les exigences relatives au calcul géotechnique.

(11) Il sera juste d'effectuer une classification préliminaire de l'ouvrage dans l'une des catégories géotechniques, et de vérifier ensuite où modifier si nécessaire cette catégorie à chaque étape du processus de conception et de construction.

(12) La justification d'un projet considéré comme plus économique ou plus approprié, nécessite l'utilisation d'une catégorie plus élevée.

(13) Les traitements qui correspondent à des catégories géotechniques différentes, peuvent être nécessaires dans la conception des différents aspects du calcul d'un projet. Il n'est pas nécessaire de traiter la totalité d'un projet conformément à la plus élevée de ces catégories.

(14) *La catégorie géotechnique 1* ne devrait être considérée que pour les ouvrages simples et relativement petits :

- Dans lesquels on admet que les exigences fondamentales seront satisfaites en utilisant l'expérience et des reconnaissances géotechniques qualitatives ;
- avec un risque négligeable.

(15) Les procédures de la catégorie géotechnique 1 ne sont utilisées que dans le cas d'un risque en matière de stabilité globale et de mouvements du terrain est négligeable, ou lors d'une expérience comparable montrant qu'elles sont suffisamment simples pour permettre à l'utilisation des méthodes de routine dans le calcul et l'exécution des fondations.

(16) Les procédures de la catégorie géotechnique 1 ne sont aussi utilisées que lorsqu'on est à l'abri des excavations prévues sous le toit une nappe, ou lorsqu'il s'agit d'une expérience semblable indiquant qu'une excavation sous le niveau de la nappe ne présente pas de risque et peut être réalisée sans aucune difficulté.

(17) La catégorie géotechnique 2 est désignée pour les ouvrages classiques et les fondations qui ne présentent pas de risque exceptionnel ou les conditions de terrain ou les chargement difficiles.

(18) La catégorie géotechnique 2 contient des données géotechniques quantitatives et des calculs pour permettre à la satisfaction des exigences fondamentales.

(19) Les ouvrages de la catégorie géotechnique 2 nécessitent l'utilisation des procédures de routine tel que, les essais en place et en laboratoire et pour la conception et l'exécution des travaux. Les ouvrages suivants sont des exemples de structures ou parties de structures qui entrent dans la catégorie géotechnique 2:

- fondations superficielles ;
- fondations sur radiers ;
- fondations sur pieux ;
- murs et autres ouvrages de soutènement retenant du sol ou de l'eau ;
- excavations ;
- piles et culées de ponts ;
- remblais et terrassements ;
- ancrages et autres systèmes de tirants ;
- tunnels dans les roches dures non fracturées, sans conditions spéciales d'étanchéité ou autres exigences.

(20) La catégorie géotechnique 3 désignée pour le type d'ouvrages qui sortent des catégories géotechniques 1 et 2.

(21) La catégorie géotechnique 3 devrait normalement faire appel à des dispositions ou règles alternatives à celles de cette norme. Elle comprend les types d'ouvrages suivants :

- les ouvrages très grands ou inhabituels :

- les ouvrages impliquant des risques anormaux ou des conditions de terrain ou de chargement inusuelles ou exceptionnellement difficiles ;
- les ouvrages construits dans des zones très sismiques ;
- les ouvrages situés dans des zones sujettes à des instabilités ou des mouvements permanents du terrain qui nécessitent des reconnaissances séparées ou des mesures spéciales.

#### IV.4.3 Classification des actions

L'Eurocode 1 définit trois catégories d'actions (ou charges au sens large, puisqu'il peut s'agir de forces, de moments ou de déplacements imposés) correspondant à des durées et fréquences d'application différentes :

- les *actions permanentes* (poids des structures et des sols, pressions d'eau, pressions des terres, précontrainte, etc.) ;
- les *actions variables* (charges de circulation, charges de vent et neige, etc.) ;
- les *actions accidentelles* (explosions, charges dynamiques, chocs, séismes, etc.).

L'Eurocode 7 précise que la durée des actions doit être appréciée par référence aux effets du temps sur les propriétés mécaniques du sol, notamment la perméabilité, les conditions de drainage et la compressibilité des sols fins. Suivant les calculs effectués, certaines forces ou déplacements imposés peuvent, de plus, être ou non traités comme des actions (frottement négatif et pressions des terres, par exemple).

#### IV.4.4 Propriétés des terrains

(1) Les propriétés des massifs de sols ou de roches, évaluées pour les calculs de conception représentant les paramètres géotechniques, doivent être déduites à partir des essais en place ou en laboratoire, soit directement soit par des corrélations, des théories ou des raisonnements empiriques, ainsi que des autres données pertinentes.

(2) Les valeurs déduites des résultats d'essais et des autres données doivent être interprétées de façon appropriée à l'état limite considéré.

(3) Il convient de tenir compte des différences possibles entre les propriétés du terrain et les paramètres géotechniques obtenus à partir des résultats d'essais et ceux qui gouvernent le comportement de l'ouvrage géotechnique.

(4) Les différences mentionnées dans la clause 2.4.3(3)P peuvent provenir des facteurs suivants :

- beaucoup de paramètres géotechniques ne sont pas de vraies constantes mais dépendent du niveau de contraintes et du mode de déformation ;
- la structure des sols et des roches (par exemple, les fissures, les structures laminaires ou les grosses particules) qui peuvent jouer un rôle différent dans l'essai et dans l'ouvrage géotechnique ;
- les effets de temps ;
- l'effet ramollissant de l'eau qui percole sur la résistance du sol ou de la roche ;
- l'effet ramollissant des actions dynamiques ;
- le caractère fragile ou ductile du sol ou de la roche dans l'essai ;
- la méthode d'exécution de l'ouvrage géotechnique ;
- l'influence de l'exécution sur les terrains artificiels ou améliorés ;
- l'effet des activités de construction sur les propriétés du terrain.

(5) Au cours de l'établissement des valeurs des paramètres géotechnique, il est nécessaire de tenir compte des points suivants :

- l'information publiée et reconnue concernant l'utilisation de chaque type d'essais dans les conditions de terrain appropriées ;
- la valeur de chaque paramètre géotechnique par comparaison avec les données publiées pertinentes et avec l'expérience locale et générale ;
- la variation des paramètres géotechniques qui sont pertinents pour le projet ;
- les résultats des essais en vraie grandeur et des mesures effectuées sur les constructions voisines ;
- les corrélations entre les résultats d'au moins deux types d'essais ;
- toute détérioration significative des propriétés du terrain qui pourrait se produire pendant la durée de vie de la structure.

(6) Les valeurs représentant le comportement du sol et de la roche pour un état limite considéré, sont obtenues par l'application des facteurs d'étalonnage sur les résultats des essais en place ou en laboratoire exécutés selon la norme EN 1997-2.

#### **IV.4.5 Valeurs caractéristiques**

La notion de valeur caractéristique d'un paramètre de dimensionnement (charge ou propriété mécanique d'un matériau) est liée à une conception probabiliste de la sécurité : c'est une valeur « représentative » ayant une certaine probabilité d'être dépassée du côté défavorable au comportement de l'ouvrage (c'est ainsi, par exemple, que l'on choisit en général des valeurs

caractéristiques inférieures à la moyenne pour la résistance et des valeurs supérieures pour les charges).

#### **IV.4.5.1 Valeurs caractéristiques et valeurs représentatives des actions**

Ces valeurs caractéristiques et représentatives des actions doivent être déterminées conformément à la norme EN 1990:2002 et aux différentes parties de la norme EN 1991.

#### **IV.4.5.2 Valeurs caractéristiques des paramètres géotechniques**

La détermination des valeurs caractéristiques des paramètres géotechniques s'appuient toujours sur les mesures dérivées des essais in-situ ou en laboratoire, et complétées par les informations de l'expérience. Elles doivent être estimées avec prudence, dont le choix dépend des points suivants :

- l'existence d'informations préalables, d'ordre géologique ou autre, telle que des données de projets antérieurs ;
- la variabilité des valeurs mesurées des propriétés et les autres informations pertinentes, par exemple, à partir de connaissances existantes ;
- le volume des investigations menées en place et en laboratoire ;
- le type et le nombre d'échantillons ;
- les dimensions de la zone du terrain qui gouverne le comportement de l'ouvrage géotechnique pour l'état limite considéré ;
- la capacité de l'ouvrage géotechnique à transférer les charges des zones faibles aux zones plus résistantes du terrain.

De ce point de vue, une estimation prudente de la valeur moyenne consiste à choisir la valeur moyenne d'un ensemble limité de valeurs du paramètre géotechnique avec un niveau de confiance de 95 % ; par rapport à une rupture locale, une estimation prudente de la valeur la plus faible est un fractile à 5 %.

#### **IV.4.5.3 Valeurs caractéristiques des données géométriques**

Il faut que les valeurs caractéristiques que ce soit celles des niveaux du terrain, de la nappe ou de l'eau libre doivent être des valeurs par excès ou par défaut des niveaux mesurés, nominaux ou estimés. D'une manière générale les dimensions des ouvrages géotechniques soient des valeurs nominales.

#### **IV.4.6 Valeurs de calcul**

Les valeurs de calcul, qui sont, comme leur nom l'indique, les valeurs des paramètres qui seront utilisées pour contrôler l'occurrence des états limites dans chaque situation de calcul, sont déduites des valeurs caractéristiques par application d'un coefficient minorateur ou majorateur, suivant que l'augmentation du paramètre va ou non dans le sens de la sécurité.

#### IV.4.6.1 Valeurs de calcul des actions

La valeur de calcul des actions obtenue conformément à la norme EN 1990:2002, et doit être déduite de la valeur représentative de l'action par l'intermédiaire de la relation suivante :

$$F_d = \gamma_F \cdot F_{rep} \quad (IV.1)$$

$$F_{rep} = \Psi \cdot F_k \quad (IV.2)$$

Où  $\Psi$  est un facteur appliqué aux valeurs caractéristiques, dont ces valeurs doivent être prises dans la norme EN 1990:2002. Et  $\gamma_F$  est un facteur partiel des situations permanentes ou transitoires défini dans l'annexe A.

#### IV.4.6.2 Valeurs de calcul des paramètres géotechniques

La valeur de calcul d'un paramètre géotechnique  $X_d$  est obtenue de la valeur caractéristique en utilisant l'expression suivante :

$$X_d = X_k / \gamma_M \quad (IV.3)$$

$\gamma_M$  Est un facteur partiel des situations permanentes ou transitoires défini dans l'annexe A.

En géotechnique, le coefficient partiel de sécurité d'un même paramètre peut être minorateur dans certaines situations de calcul et majorateur pour d'autres situations. Pour une même situation de calcul, le même paramètre peut avoir un sens défavorable par rapport à certaines actions et sens favorable par rapport à d'autres.

#### IV.4.7 Etats limites ultimes

L'objectif principal du dimensionnement des ouvrages géotechniques, est de satisfaire un certain nombre de conditions de sécurité et d'aptitude au service, spécifiques à chaque type d'ouvrages et à son utilisation prévue. Les Eurocodes distinguent deux grandes catégories d'états limites, qui sont les états au-delà desquels les exigences de sécurité (pour les états limites ultimes) et d'aptitude au service (pour les états limites de service) ne sont plus satisfaites.

Les états limites ultimes concernent à la fois la sécurité de la structure (qui ne doit pas être gravement endommagée) et la sécurité des personnes. Il convient alors de vérifier que les états limites suivants ne sont pas dépassés, lorsqu'ils sont pertinents :

- perte d'équilibre de la structure ou du terrain (EQU)
- rupture interne ou déformation excessive de la structure ou d'éléments de structure (STR)
- rupture ou déformation excessive du terrain (GEO)
- soulèvement global de la structure ou du terrain (UPL)
- soulèvement local du terrain, érosion interne ou érosion régressive du terrain, sous l'effet des gradients hydrauliques (HYD)

#### IV.4.7.1 Vérification de l'équilibre statique

Dans les états limites d'équilibre statique ou de déplacement global de la structure ou du terrain (EQU), on doit vérifier que :

$$E_{dst;d} \leq E_{stb;d} + T_d \quad (IV.4)$$

$$E_{dst;d} = E\{\gamma_F F_{rep}; X_k/\gamma_M; a_d\}_{dst} \quad (IV.5)$$

$$E_{stb;d} = E\{\gamma_F F_{rep}; X_k/\gamma_M; a_d\}_{stb} \quad (IV.6)$$

Où  $E_{dst;d}$  est la valeur de calcul de l'effet des actions déstabilisatrices. Et  $a_d$  la valeur de calcul des données géométriques.

Les valeurs des facteurs partiels peuvent être fixées dans l'annexe nationale. Les tableaux (IV.1) et (IV.2) donnent les valeurs recommandées.

Pour la vérification de l'état d'équilibre limite (EQU), on doit appliquer aux actions les facteurs suivants représentés dans le Tableau (IV.1):

- $\gamma_{G;dst}$  pour les actions permanentes défavorables déstabilisatrices ;
- $\gamma_{G;stb}$  pour les actions permanentes favorables stabilisatrices ;
- $\gamma_{Q;dst}$  pour les actions variables défavorables déstabilisatrices ;
- $\gamma_{Q;stb}$  pour les actions variables favorables stabilisatrices.

**Tableau (IV.1) :** Facteurs partiels pour les actions ( $\gamma_F$ ) [Eurocode7]

Action	Symbole	Valeur
<i>Permanente</i>		

<i>Défavorable<sup>a)</sup></i>	$\gamma_{G;dst}$	1,1
<i>Favorable<sup>b)</sup></i>	$\gamma_{G;stb}$	0,9
<i>Variable</i>		
<i>Défavorable<sup>a)</sup></i>	$\gamma_{Q;dst}$	1,5
<i>Favorable<sup>b)</sup></i>	$\gamma_{Q;stb}$	0
a) Déstabilisatrice b) Stabilisatrice		

La vérification de l'état d'équilibre limite (EQU), nécessite aussi l'application des facteurs partiels  $\gamma_M$  (Tableau IV.2) suivants pour les paramètres de sols lorsque l'on inclut des résistances au cisaillement de faible importance :

- $\gamma_{\varphi'}$  pour la tangente de l'angle de frottement interne ;
- $\gamma_{c'}$  pour la cohésion drainée ;
- $\gamma_{cu}$  pour la cohésion non drainée ;
- $\gamma_{qu}$  pour la résistance en compression simple ;
- $\gamma_{\gamma}$  pour le poids volumique.

**Tableau (IV.2) :** Facteurs partiels pour les paramètres de sol ( $\gamma_M$ ) [Eurocode7]

Paramètre du sol	Symbole	Valeur
Angle de frottement interne <sup>a)</sup>	$\gamma_{\varphi'}$	1,25
Cohésion effective	$\gamma_{c'}$	1,25
Cohésion non drainée	$\gamma_{cu}$	1,4
Resistance en compression simple	$\gamma_{qu}$	1,4
Poids volumique	$\gamma_{\gamma}$	1,0
a) Ce facteur est appliqué à $\tan\varphi'$		

#### IV.4.7.2 Vérification de la résistance pour les états limites de la structure (STR) et du terrain (GEO) dans les situations permanentes et transitoires

Les états limites de rupture ou de déformation excessive d'un élément de structure (STR) ou du terrain (GEO) et, doivent vérifier en tout cas l'inégalité suivante:

$$E_d \leq R_d \quad (IV.7)$$

##### IV.4.7.2.1 Valeurs de calcul des effets des actions



On applique les facteurs partiels sur les actions elles mêmes ( $F_{rep}$ ) ou sur les effets des actions (E) comme suit :

$$E_d = E\{\gamma_F F_{rep} ; X_k / \gamma_M ; a_d\} \quad (IV.8)$$

Ou

$$E_d = \gamma_E E\{F_{rep} ; X_k / \gamma_M ; a_d\} \quad (IV.9)$$

Les valeurs des facteurs partiels peuvent être fixées dans l'annexe nationale. Les tableaux (IV.3) et (IV.4) donnent les valeurs recommandées. Dont la vérification des états limites de structure (STR) et géotechnique (GEO), permet d'appliquer les facteurs A1 ou A2 sur les actions ( $\gamma_F$ ) ou sur les effets des actions ( $\gamma_E$ ) :

- $\gamma_G$  pour les actions permanentes favorables ou défavorables ;
- $\gamma_Q$  pour les actions variables défavorables ou favorables.

**Tableau (IV.3) :** Facteurs partiels pour les actions ( $\gamma_F$ ) ou les effets des actions ( $\gamma_E$ ) [Eurocode7]

Action	Symbole	Ensemble	
		A1	A2
Permanente	Défavorable	1,35	1,0
	Favorable	1,0	1,0
Variable	Défavorable	1,5	1,3
	Favorable	0	0

La vérification des états limites de la structure (STR) et géotechniques (GEO), nécessite aussi l'application des ensembles M1 et M2 des facteurs partiels de résistance  $\gamma_M$  (Tableau IV.4) pour les paramètres de sols :

- $\gamma_{\varphi'}$  pour la tangente de l'angle de frottement interne ;
- $\gamma_{c'}$  pour la cohésion drainée ;
- $\gamma_{cu}$  pour la cohésion non drainée ;
- $\gamma_{qu}$  pour la résistance en compression simple ;
- $\gamma_\gamma$  pour le poids volumique.

**Tableau (IV.4) :** Facteurs partiels pour les paramètres de sol ( $\gamma_M$ ) [Eurocode7]

Paramètres du sol	Symbole	Ensemble	
		M1	M2
Angle de frottement interne <sup>a)</sup>	$\gamma_{\varphi'}$	1,0	1,25
Cohésion effective	$\gamma_{c'}$	1,0	1,25
Cohésion non drainée	$\gamma_{cu}$	1,0	1,4
Compression simple	$\gamma_{qu}$	1,0	1,4
Poids volumique	$\gamma_{\gamma}$	1,0	1,0

a) Ce facteur est appliqué à  $\tan\varphi'$

#### IV.4.7.2.2 Valeurs de calcul des résistances

On peut appliquer les facteurs partiels aux propriétés du terrain (X) ou aux résistances (R) ou aux deux simultanément, comme suit :

$$R_d = R\{\gamma_F F_{rep}; X_k/\gamma_M; a_d\} \quad (IV.10)$$

$$R_d = R\{\gamma_F F_{rep}; X_k; a_d\}/\gamma_R \quad (IV.11)$$

$$R_d = R\{\gamma_F F_{rep}; X_k/\gamma_M; a_d\}/\gamma_R \quad (IV.12)$$

Lorsque les facteurs partiels sont appliqués aux effets des actions, alors le facteur partiel des actions est pris égal à l'unité ( $\gamma_F = 1$ ).

La vérification des états limites de la structure (STR) et géotechniques (GEO) dans le cas des fondations superficielles, nécessite l'application des ensembles R1, R2, ou R3 des facteurs partiels de résistance ( $\gamma_R$ ) Tableau (IV.5) :

- $\gamma_{R;v}$  Pour la portance;
- $\gamma_{R;h}$  Pour la résistance au glissement.

**Tableau (IV.5) :** Facteurs partiels de résistance ( $\gamma_R$ ) [Eurocode7]

Résistance	Symbole	Ensemble		
		R1	R2	R3
Portance	$\gamma_{R;v}$	1,0	1,4	1,0
Glissement	$\gamma_{R;h}$	1,0	1,1	1,0

#### IV.4.7.2.3 Approches de calcul

Dans les états limites ultimes qui comportent les défaillances dans le sol, nommés états limites ultimes GEO, l'Eurocode 7 définit trois approches de calcul 1, 2 et 3. La façon d'appliquer les

équations (IV.8 à IV.12) est déterminée par le choix de l'une des trois approches de calcul définies ci-après, dont les facteurs partiels sont groupés en ensembles notés A (pour les actions ou effets des actions), M (pour les paramètres du sol) et R (pour les résistances). Ils sont sélectionnés en fonction de l'approche de calcul utilisée.

### ✓ Approche de calcul 1

Sauf pour le calcul des pieux sous charge axiale et des ancrages, on doit vérifier qu'aucun état limite de rupture ou de déformation excessive ne sera atteint sous chacune des deux combinaisons d'ensembles de facteurs partiels suivantes :

- Combinaison 1 : A1 «+» M1 «+» R1
- Combinaison 2 : A2 «+» M2 «+» R1      où «+» signifie : «à combiner avec».

Dans les combinaisons 1 et 2, les facteurs partiels sont appliqués aux actions et aux paramètres de résistance du terrain.

### ✓ Approche de calcul 2

On doit vérifier qu'aucun état limite de rupture ou de déformation excessive ne sera atteint avec la combinaison d'ensembles de facteurs partiels suivante :

- Combinaison : A1 «+» M1 «+» R2

Dans cette approche, les facteurs partiels sont appliqués aux actions ou aux effets des actions et aux résistances du terrain. De plus si cette approche est utilisée pour les calculs de stabilité de pente ou de stabilité générale, l'effet résultant des actions sur la surface de rupture est multiplié par  $\gamma_E$  et la résistance globale au cisaillement sur la surface de rupture est divisée par  $\gamma_{R,e}$ .

### ✓ Approche de calcul 3

On doit vérifier qu'aucun état limite de rupture ou de déformation excessive ne sera atteint avec la combinaison d'ensembles de facteurs partiels suivante :

- Combinaison : (A1\* ou A2†) «+» M2 «+» R3

Avec \* sur les actions provenant de la structure, et † sur les actions géotechniques.

Dans cette approche, les facteurs partiels sont appliqués aux actions ou aux effets des actions et aux paramètres de résistance du terrain. Pour les analyses de stabilité de pente ou de stabilité globale, les actions appliquées au sol (par exemple les actions provenant de la structure ou les

charges de circulation) sont traitées comme des actions géotechniques, en utilisant l'ensemble de facteurs partiels  $A_2$ .

#### IV.4.8 Etats limites de service

Les états limites de service définissent les conditions au-delà desquelles les spécifications de service de l'ouvrage ne sont plus remplies, que ce soit en termes de fonctionnement mécanique, de confort, d'aspect, etc. Ce sont souvent des conditions relatives aux tassements relatifs maximaux ou déformations maximales acceptables, à des vibrations, sources d'inconfort, à la fissuration de l'ouvrage, qui peut compromettre sa durabilité.

La vérification par rapport aux états limites de service dans le terrain ou dans une section, un élément ou une connection de la structure, peut soit exiger que :

$$E_d \leq C_d \quad (IV.13)$$

Il convient normalement de donner aux facteurs partiels pour les états limites de service une valeur de 1,0.

#### IV.4.9 Fondations superficielles

Les dispositions suivantes s'appliquent aux fondations superficielles, y compris les semelles isolées, les semelles filantes et les radiers. Certaines de ces dispositions peuvent être appliquées aux fondations profondes comme le cas des caissons.

##### IV.4.9.1 Etats limites

L'Eurocode 7 donne la liste suivante pour les états limites à éviter pour les fondations superficielles :

- instabilité d'ensemble (fondations sur pente, en tête de talus, près d'une excavation ou d'un mur de soutènement, dans une zone minière ou à proximité d'ouvrages souterrains). cette instabilité est analysée par les méthodes définies pour les ouvrages en terre (remblais et talus) ;
- défaut de capacité portante ;
- rupture par glissement ;
- rupture combinée dans le sol et dans l'ouvrage ;
- rupture de la structure due à un mouvement du sol de fondation ;
- tassements excessifs ;
- soulèvement excessif ;
- vibrations inacceptables.

### IV.4.9.2 Actions et situations de calcul

Les actions à prendre en compte sont de façon générale les mêmes que pour les fondations profondes, en tenant compte de la rigidité globale de la structure, du niveau de l'eau dans le sol, de toutes les sollicitations extérieures diverses susceptibles d'influer sur leur comportement. Lorsque la rigidité de la structure est importante, il convient d'analyser l'interaction de la structure et du terrain afin de déterminer la distribution des actions.

### IV.4.9.3 Calcul à l'état limite ultime

#### IV.4.9.3.1 Stabilité générale

D'une manière La stabilité de l'ensemble, avec ou sans les fondations, la réglementation exige une vérification particulière dans les situations suivantes :

- près de ou sur une pente naturelle ou créée par l'homme ;
- près d'une excavation ou d'un ouvrage de soutènement ;
- près d'une rivière, d'un canal, d'un lac, d'un réservoir ou d'une côte ;
- près de mines ou d'ouvrages enterrés.

Selon les principes de stabilité décrites précédemment, il convient de démontrer que toute instabilité d'un massif de terrain contenant la fondation est suffisamment peu probable.

#### IV.4.9.3.2 Portance

La condition de stabilité de la fondation superficielle vis-à-vis du poinçonnement, exprimée par l'inégalité suivante doit être vérifiée pour tous les états limites ultimes :

$$V_d \leq R_d \quad (IV.14)$$

Avec  $V_d$  : La charge de calcul à l'état limite ultime, appliquée normalement à la semelle de la fondation, incluant le poids de la fondation elle-même et le poids des matériaux de remblai éventuels, et toutes les pressions des terres, favorables ou défavorables. Les pressions d'eau qui ne sont pas dues à la charge appliquée au sol par la fondation doivent être comptées parmi les actions. Et  $R_d$  capacité portante de calcul du sol de fondation sous charge normale à la surface. Sa valeur est donc le produit de la méthode de calcul analytique ou numérique ou empirique utilisée par l'ingénieur géotechnicien dans les conditions du projet.

##### a) Méthode analytique

Il convient d'utiliser une méthode analytique communément reconnue. Le calcul analytique des valeurs à court terme et à long terme de  $R_d$  doit être considéré, en particulier dans les sols fins.

La détermination de la capacité portante de calcul d'une fondation reposant sur un massif stratifié, dont les propriétés varient fortement d'une couche à l'autre, les valeurs de calcul des propriétés du terrain doivent être déterminées pour chaque couche.

L'Eurocode 7 fournit en annexe (informative) une méthode de calcul analytique (expressions de  $N_\gamma$ ,  $N_c$  et  $N_q$ , avec des coefficients de correction pour la forme, l'inclinaison et l'excentricité).

### **b) Méthode semi-empirique**

Dans ce cas l'estimation de la valeur de calcul de la capacité portante d'une fondation superficielle reposant sur un sol, est obtenue sur la base des essais en place tels que l'essai pressiométrique.

### **c) Méthode perspective utilisant une valeur présumée de la portance**

Ce type de méthodes, sont généralement fondées sur une valeur présumée de la portance. Lorsqu'on se trouve dans le cas des fondations reposant sur les roches très résistantes, comme les roches ignées intactes, les roches gneissiques, les calcaires et les grès, la capacité portante présumée est limitée par la résistance à la compression de la fondation en béton. IL convient aussi d'évaluer le résultat du calcul sur la base d'expériences comparables.

## **IV.5 Conclusion**

Ce chapitre dresse une synthèse des principales procédures de calcul, de dimensionnement et de justification des ouvrages géotechniques selon l'Eurocode 7. Les détails précis de calcul des fondations superficielles se trouvent dans les Annexes (A et B) (Eurocode 7). Bien que ces normes de calcul définissent des principes de justification, il ne faut pas oublier que le travail de conception de l'ingénieur reste prépondérant. Les normes fournissent des listes de mécanismes de rupture et de déformation à prendre en compte pour les justifications aux ELU et aux ELS, mais elles ne sont pas exhaustives. Pour chaque projet, l'ingénieur doit donc développer une stratégie spécifique de conception et de dimensionnement.

Dans les codes anciens totalement déterministes, les coefficients dits « de sécurité » couvraient l'ensemble des incertitudes ou ignorances sur les grandeurs considérées, y compris les dispersions statistiques des variables aléatoires. Dans les codes récents semi-probabilistes, des valeurs caractéristiques d'effets des actions et de résistances sont introduites, qui tiennent compte des lois des variables aléatoires associées et de leur coefficient de variation. Les facteurs

partiels appliqués à ces valeurs caractéristiques pour obtenir les valeurs de dimensionnement, couvrent les autres incertitudes ou erreurs de modèle.

## **Chapitre (V)**

### *Etudes paramétriques*



## Chapitre V : Etude paramétrique

### 1 Introduction

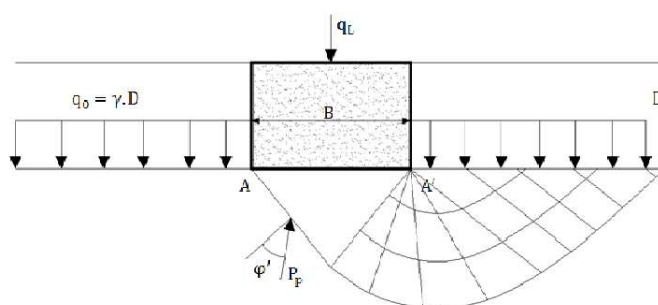
Par rapport à la pratique traditionnelle de la géotechnique, l'Eurocode 7 se distingue par la volonté délibérée d'appliquer systématiquement le formalisme du dimensionnement aux états limites et de traiter la sécurité au moyen des facteurs partiels appliqués séparément aux charges et aux propriétés des matériaux. La référence aux états limites est un remodelage des pratiques existantes, mais l'utilisation des facteurs partiels, au lieu d'un coefficient de sécurité global spécifique à chaque type de calcul et à chaque type d'ouvrage, est une modification plus importante qui nécessitera toujours beaucoup d'études de recalage par rapport à l'expérience.

Le présent chapitre décrit le contenu d'une étude paramétrique, basée sur l'utilisation d'un nouveau concept qui a pour objet de mesurer la sécurité d'un ouvrage en prenant en compte ces divers incertitudes. Et une analyse comparative avec l'approche déterministe, permettant de cerner les paramètres les plus influents sur la stabilité de l'ouvrage en question.

### 2 Modèle mécanique

La modélisation mécanique à la rupture des fondations superficielle par poinçonnement, est effectuée dans la littérature par plusieurs méthodes qui sont en général inspirées de la théorie classique de Prandtl (1921): formation d'un cône rigide solidaire à la fondation (Fig. V.1). Une fondation superficielle du type filante a été prise dans notre cas conformément aux hypothèses suivantes :

- Le sol est un massif homogène horizontal ne présente pas de discontinuité.
- L'effet des contraintes de cisaillement au contact sol-fondation est négligé.
- Le sol situé au dessus de l'horizontal AA' de la base de la fondation agit comme une surcharge verticale constante d'intensité  $\gamma D$  (Fig. V.1).
- Aucune nappe d'eau n'est présente.



**Figure. V.1** Equilibre des terres sous la fondation (charge verticale centrée)

Un seul cas de charge verticale centrée à été analysé pour une semelle filante de largeur B enterrée dans le massif à une profondeur D (Fig. V.1).

Le modèle mécanique de rupture choisi, est le modèle classique proposé par Terzaghi (1940) pour l'évaluation de la capacité portante des fondations superficielles. L'équation d'état limite générale exprimant la contrainte limite de rupture par poinçonnement est donnée par la relation.

$$q_L = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma + \gamma \cdot D \cdot N_q + c' \cdot N_c \quad (\text{V.1})$$

Ou  $\gamma$  est le poids volumique du sol et  $c'$ , la cohésion effective du sol.  $N_\gamma$ ,  $N_q$  et  $N_c$  sont les facteurs de capacité portante ou de portance, dépendant généralement de l'angle de frottement interne  $\phi'$ . Le tableau (V.1) regroupe ces facteurs qui ont été choisis selon les exigences de l'Eurocode 7 (2004).

**Tableau V.1** Facteurs de capacité portante [Eurocode7]

Approche portance	Facteurs de $N_\gamma$	$N_q$	$N_c$
Eurocode 7 (2004)	$2(N_q - 1) \operatorname{tg} \phi'$	$\operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) e^{\pi \operatorname{tg} \phi'}$	$\cot \phi' (N_q - 1)$

Par substitution de ces facteurs dans l'équation (V.1), et en tenant compte de la relation trigonométrique suivante :

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2} \right) = \left[ \operatorname{tg} \phi' + (1 + \operatorname{tg}^2 \phi')^{1/2} \right] \quad (\text{V.2})$$

La contrainte limite de rupture exprimée en fonction des paramètres mécaniques (variables aléatoires) s'écrit :

$$q_L = \frac{c'}{\operatorname{tg} \phi'} \left\{ e^{\pi \operatorname{tg} \phi'} \left[ \operatorname{tg} \phi' + (1 + \operatorname{tg}^2 \phi')^{1/2} \right]^2 - 1 \right\} + q_0 \cdot e^{\pi \operatorname{tg} \phi'} \left[ \operatorname{tg} \phi' + (1 + \operatorname{tg}^2 \phi')^{1/2} \right]^2 + 2 \cdot \gamma \cdot \operatorname{tg} \phi' \left\{ e^{\pi \operatorname{tg} \phi'} \left[ \operatorname{tg} \phi' + (1 + \operatorname{tg}^2 \phi')^{1/2} \right]^2 - 1 \right\} \quad (\text{V.3})$$

### 3 Modèle stochastique

Les paramètres géométriques (encastrement de la semelle  $D$ , largeur de la semelle  $B$ , etc.) présentent en général une dispersion négligeable par rapport à celle des paramètres de cisaillement du sol et des charges (Nottrodt, 1990; Gäßler, 1987). Les calculs probabilistes effectués par Nottrodt (1990), Genske & Walz (1987) et Gäßler (1987) ont montré, que d'un côté le facteur de sensibilité  $\alpha$  pour le poids volumique du sol  $\gamma$ , est très faible comparativement aux paramètres mécaniques du sol, et d'un autre côté les facteurs partiels de sécurité dérivés pour le poids volumique du sol sont très proches de l'unité. C'est pourquoi on les considère comme des paramètres déterministes.

Sur la base des résultats de Genske & Walz (1987) et Belabed (1996), les calculs ont été réalisés avec des combinaisons de paramètres de cisaillement considérées comme relativement typiques en mécanique des sols (tableau, V.2). De plus, on néglige dans notre travail l'effet de l'autocorrélation, et on suppose que les valeurs caractéristiques des paramètres ont été déterminées avec prudence conformément aux recommandations de l'Eurocode 7 (2004).

Wolf (1985), et Lacasse & Nadim (1996), suggèrent que la densité de probabilité des paramètres de cisaillement ( $\phi'$  et  $c'$ ), est normalement distribuée pour les sables. Considérons les données rapportées par Moorman & Katzenbach (2003) et Elramly & al (2005) ; il semblerait que le coefficient de dissymétrie de l'angle de frottement interne effectif, pourrait être ignoré et le choix d'une distribution normale semble approprié. D'autre part ces auteurs trouvent un coefficient de l'ordre de  $\mathfrak{S} = 1,7$  (Moorman & Katzenbach) et de  $\mathfrak{S} = 4$  (Elramly & al) pour la cohésion effective, ainsi une densité log-normale semble être la plus convenable. Sur la base de ces données on a proposé des distributions de probabilité résumées dans le tableau (V.2).

Plusieurs auteurs, négligent dans leurs études probabilistes l'effet de la corrélation entre les paramètres de cisaillement du sol, ceci à pour but de simplifier les calculs. Lumb (1996), était le probablement premier à étudier la corrélation entre la cohésion et l'angle de frottement interne. Sur la base des données expérimentales, il indique une corrélation négative entre ces paramètres dans un rang de  $-0,3 < \rho < -0,7$  pour le sable limoneux. Nottrodt (1990), a pu montrer l'existence d'une relation inversement proportionnelle entre les paramètres de cisaillement effectives du sol ( $\phi'$  et  $c'$ ) : Les petites valeurs de  $\phi'$  correspondent à des grandes valeurs de  $c'$  et vice versa. Cette relation est exprimée par un coefficient de corrélation négatif élevé. Cherubini (1998), et par l'intermédiaire des essais triaxiales drainés effectués sur les argiles bleues de Matera, confirme la présence d'une importante corrélation d'un ordre de  $\rho = -0,6$  entre les paramètres de

cisaillement effectifs du sol. Par conséquent, il semblerait que la prise en compte d'une valeur de  $\rho = -0,6$  entre les paramètres mécaniques du sol dans nos calculs serait plus réaliste.

Les paramètres mécaniques à la rupture dans les sols, présentent des incertitudes aléatoires, du fait de l'hétérogénéité du matériau, ou de l'erreur de mesure liée au dispositif utilisé. Ces incertitudes proviennent de la variabilité intrinsèque de ces paramètres. La plupart des synthèses publiées, montrent que l'angle de frottement interne  $\phi'$  est moins dispersé comparativement à la cohésion  $c'$ . Sanchez Lizarraga & al (2014), examine l'effet de la variabilité spatiale des propriétés du sol sur la réponse sismique d'un barrage en remblai, une description statistique des paramètres d'entrées adoptées dans son étude, offre des valeurs du coefficient de variation de la cohésion et de l'angle de frottement interne :  $V_{c'} = 40\%$  et  $V_{\phi'} = 9\%$ . Srivastava & al (2009), étudient la variabilité du sol sur la capacité portante d'une argile dans les problèmes de stabilité des pentes. Les paramètres statistiques de conception obtenues à partir des testes de pénétration du cône statique (SCPT) représentées comme suit :  $V_{c'} = 39\%$  et  $V_{\phi'} = 11\%$ . Ogunsanwo (1985), à étudié la variation des caractéristiques de la résistance au cisaillement d'un sol latérique provenant d'une amphibolite à grain fin, cette dernière est recherchée en se servant des essais de compression triaxiale de consolidation non drainée. Les résultats montrent que les coefficients de variation pour la cohésion effective  $c'$  s'élève à 65,1% et pour l'angle de frottement interne  $\phi'$  s'élève à 16,1%. Sur la base de ces résultats et de ceux de Orr (2000) et Shneider (1999), nos calculs ont été établis en choisissant un coefficient de variation de 10% pour l'angle de frottement effective interne et de 40% pour la cohésion effective.

**Tableau V.2** Données statistiques des variables aléatoires

Paramètre	Type de distribution	Coefficient de variation	Valeur caractéristique
Angle de frottement interne $\phi'$ [degrés]	Normale	10%-13%	20 à 40
Cohésion $c'$ [KN/m <sup>2</sup> ]	Log-normale	40%-80%	0 à 35

## 4 Etudes paramétriques

Cette partie présente l'application des méthodes probabilistes dans une étude paramétriques, qui a pour objectif d'étudier l'influence des valeurs caractéristiques des paramètres mécaniques et de leurs informations sur l'évaluation des facteurs partiels de sécurité. Ces derniers sont les principaux éléments constitutifs d'un format de dimensionnement, dénommé format aux facteurs partiels, obtenues selon notre cas par le rapport des valeurs caractéristiques aux valeurs de calcul

des paramètres mécaniques (Lemaire, 2005). L'étude est effectuée en utilisant deux méthodes, qui sont implémentées dans un code de calcul sous plate forme Matlab:

- Une méthode analytique, qui sert à déterminer les valeurs de calcul, par l'intermédiaire des valeurs statistiques (moyennes et écarts types), d'un domaine composé de valeurs critiques des paramètres mécaniques.
- Une méthode approximative considérée comme la plus efficace en termes de rapport entre temps de calcul et précision de la réponse, qui se base sur la théorie de fiabilité du premier ordre (FORM). Son principe consiste, à rechercher le point de défaillance le plus probable, appelé point de conception représentant avec ces coordonnées les valeurs de calcul des paramètres mécaniques.

Le modèle de fondation choisi dans l'étude paramétrique, est un benchmark pris dans la littérature par Russeli (2008) , représenté par une semelle filante de largeur  $B=2\text{m}$ , un sol homogène ne présentant pas de discontinuité dont le poids volumique est de  $15 \text{ KN/m}^3$ , et une surcharge de  $10 \text{ KN/m}^2$  représentant l'ancrage de la semelle.

Différents cas on été considérés en faisant varier les paramètres de calcul suivants :

- Caractéristiques du sol (sol cohérent et pulvérulent)
- Prise en compte de la corrélation entre les paramètres mécaniques
- Coefficients de variations (modèle de Russeli (2008))

**Tableau V.3** Types de sols

Sols	Corrélation	Paramètres $\phi'$ [degrés]/ $c'$ [ $\text{kn/m}^2$ ]	Valeurs Caractéristiques		Coefficient de variation	
			$\text{Tan}(\phi')$	$c'$	$V_{\phi'}$	$V_{c'}$
1	0	40/0	0,838	(-)	10%	(-)
2	0	35/0	0,700	(-)	10%	(-)
3	0	30/0	0,577	(-)	10%	(-)
4	0/-0,6	25/4	0,466	4	10%	40%
5	0/-0,6	*25/4	0,466	4	13%	80%
6	0/-0,6	35/5	0,700	5	10%	40%
7	0/-0,6	30/10	0,577	10	10%	40%
8	0/-0,6	25/20	0,466	20	10%	40%
9	0/-0,6	20/35	0,364	35	10%	40%

## 4-1 Analyse de la fiabilité

La prise en compte de l'incertain probabiliste en conception des ouvrages géotechniques, a conduit au développement d'une analyse de fiabilité qui recherche les conditions de défaillance en vue d'assurer un dimensionnement optimal. Pour cela différents types de sol ont été considérés en faisant varier les paramètres de cisaillement ( $\tan \phi'$  et  $c'$ ), qui sont décrites par leurs distributions respectivement normale et log-normale et des valeurs statistiques correspondantes (Tableau, V.3). La notion de fiabilité étant posé un critère de défaillance, qui est défini à l'aide d'une fonction dite de performance (ou d'état limite) notée  $Z$ , et qui dépend des variables aléatoires du modèle.

Considérant la fonction d'état limite  $Z$  représentée par :

$$Z = q_L - \frac{\mu_{q_L}}{F_S} \quad (V.4)$$

Où  $q_L$  = capacité portante ultime représentant la résistance du système, considérée comme variable aléatoire dépendant des paramètres mécaniques du sol.

$\frac{\mu_{q_L}}{F_S}$  = est la sollicitation déterministe du système, obtenue par l'intermédiaire de la valeur statistique (moyenne) de la charge limite, divisée par un facteur de sécurité.

Deux cas se présentent pour une définition d'un état limite :

**Cas (1) :** Selon l'approche déterministe (conventionnel), la sécurité est exprimée à l'aide d'un facteur global de sécurité  $F_S$ , qui est généralement pris égal à (2). Dont l'état limite peut être exprimé par la relation :

$$Z = q_L - \frac{\mu_{q_L}}{2} \quad (V.5)$$

**Cas (2) :** D'après l'approche semi-probabiliste (Eurocode 7,2011). Le poinçonnement correspond à un état limite de rupture ou de déformation excessive d'un élément de structure ou du terrain (STR et Geo-2) représenté par l'équation :

$$R_d - S_d = 0 \quad (V.6)$$

Où  $R_d$  = la résistance de calcul ou capacité portante et  $S_d$ , la sollicitation (charge) de calcul.

Selon l'Eurocode 7 on a :

$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_R} \quad \text{et} \quad S_d = \gamma_G \cdot G + \gamma_Q \cdot Q \quad (V.7)$$

Avec  $Q = 0$  (dans notre cas), et Par substitution dans l'équation (V.6) :

$$\frac{R_k}{\gamma_R} - \gamma_G G = 0 \quad \text{alors} \quad G = \frac{R_k}{\gamma_R \cdot \gamma_G} \quad (V.8)$$

Avec  $R_k = q_L$ ,  $\gamma_G = 1,35$  et  $\gamma_R = 1,4$  (cas pertinent d'après Eurocode 7), On peut écrire :

$$G = \frac{q_L}{1,35 \cdot 1,4} \quad (V.9)$$

La sollicitation du système est évaluée par l'expression :

$$G = \frac{\mu_{q_L}}{1,89} \quad (V.10)$$

Est l'équation d'état limite peut être décrite par la relation :

$$Z = q_L - \frac{\mu_{q_L}}{1,89} \quad (V.11)$$

Les équations (V.5) et (V.11) se distinguent seulement dans le dénominateur. Ces deux cas seront pris dans l'étude paramétrique pour une comparaison en utilisant la méthode (FORM).

#### 4-1-1 Méthode de Rosenblueth

La charge limite de la semelle filante, qui représente la variable aléatoire d'intérêt, est exprimée dans une équation comme le résultat d'une opération mathématique d'autres variables aléatoires ( $\tan \phi'$  et  $c'$ ) équation (V.3). Alors la méthode des points estimés développée par Rosenblueth (1975), prévoit une procédure de calcul directe et facile pour obtenir des estimations de moments pour cette variable. En particulier, ces moments statistiques sont la moyenne, écart type et le coefficient d'asymétrie, dont la procédure de mise en œuvre a été implémentée dans un code de calcul représenté par l'algorithme suivant :

1. Définition de l'équation d'état limite  $Z(x_i)$  dépendant des variables aléatoires de base.
2. Estimation des unités d'écart types  $\xi_{x_-}$  et  $\xi_{x_+}$  et les coordonnées des points d'application des poids  $x_{i+}$  et  $x_{i-}$  pour tous variables équations (III.31- III.34).
3. Evaluation des probabilités concentrées des variables de base  $P_{x_+}$  et  $P_{x_-}$  équations (III.35- III.36).
4. Détermination des poids  $P_{s_1 s_2}$  de la fonction de performance équations (III.38- III.39).
5. Evaluation de la fonction de performance  $Z(x_i)$  pour tous points localisés à  $x_{i+}$  et  $x_{i-}$ .
6. Détermination des trois premiers moments de la fonction de performance équations (III.41- III.43).

### 4-1-2 Méthode analytique

Cette méthode, qui a pour objectif de rechercher l'intervalle réduit des paramètres mécaniques de base. Ces intervalles contiennent les valeurs de la cohésion et de l'angle de frottement interne, qui causent la rupture. Deux façons différentes pour la détermination de ces rangs, soit en les choisissant sur la base des connaissances des experts ou en utilisant une procédure itérative. Dans notre cas, la procédure itérative est implémentée dans un code de calcul sous plate forme matlab, qui considère les différentes combinaisons des paramètres mécaniques et détermine ceux qui causent la rupture. Ces valeurs sont obtenues lorsque la valeur de la borne supérieure du domaine de rupture de la capacité portante, est considérée comme étant égale à sa valeur moyenne divisée par un facteur de sécurité égal à 2.

Les paramètres statistiques correspondants à ces intervalles, représentant les valeurs d'intérêts (valeurs de calcul), sont évalués par l'intermédiaire d'une intégration numérique sur le domaine réduit de chaque paramètre. Ces derniers sont définis mathématiquement par l'expression suivante :

$$\mu_{x,red} = \frac{\int_{0^+}^{x_m} x f_x(x) dx}{\int_{0^+}^{x_m} f_x(x) dx} \quad (V.12)$$

Ou `red` désigne l'intervalle réduit

$x, f(x)$  désigne la variable du paramètre en question et sa fonction densité de probabilité

$x_m$  la valeur extrême droite de l'intervalle réduit

$0^+$  la valeur extrême gauche de l'intervalle réduit qui devrait être supérieure à zéro. Pour des solutions pratiques une valeur de  $10^{-1}$  est adoptée.

### 4-1-3 Méthode approximative

La littérature nous propose de nombreuses méthodes pour la résolution d'un problème de minimisation sous contraintes (Freudenthal, & al. 1966), parmi lesquels nous venons de choisir celle qui se base sur la théorie de fiabilité du premier ordre appelée (FORM). Elle est la plus utilisée et convient dans la majorité des cas. Son implémentation dans un code de calcul exige l'efficacité et la précision numérique de l'algorithme d'optimisation, qui consiste à partir d'un point initial, à déterminer la meilleure direction de descente et à parcourir un certain chemin selon cette direction (Lemaire, 2005). La résolution du problème donne des valeurs (valeurs de calcul) des coordonnées d'un point de défaillance le plus probable, appelé point de conception



$P^*$ , d'où découlent immédiatement les cosinus directeurs  $\alpha_i$  et une valeur  $\beta$  qui correspond à l'indice de fiabilité proposé par Hasofer & Lind (1974). L'implémentation de cette méthode dans un code de calcul sous plate forme matlab, est représentée par un algorithme qui sera récapitulé par les étapes suivantes :

1. Définir la fonction d'état limite qui convient à l'équation (III.8).
2. Assigner la valeur moyenne comme point de conception initial, i.e.,  $x_{i,k} = \mu_{x_i}$ . Ici,  $x_{i,k}$  est le  $i^{\text{eme}}$  élément dans le vecteur  $x_k$  de la  $k^{\text{eme}}$  itération.
3. Evaluer les moyennes et écarts types pour les variables non normales équations (III.21- III.22).
4. Décorrélation des variables corrélées équations (III.23- III.24).
5. Déterminer les dérivées partielles  $\left(\frac{\partial Z}{\partial x_i}\right)$ , de la fonction de performance par rapport à chaque variable aléatoire, évaluées au point de conception  $\{x_i^*\}$ .
6. Evaluer les cosinus directeurs  $\{\alpha_i\}$ , en utilisant l'équation (III.16) (pour les variables aléatoires non corrélées), et les équations (III.27) et (III.28) (pour les variables aléatoire corrélées).
7. Calculer l'indice de fiabilité  $\beta$  par substitution des équations, (III.17) (pour les variables aléatoires non corrélées) et (III.29) à (III.30) (pour les variables aléatoires corrélées), dans l'équation (III.18). Et satisfaisant l'état limite  $Z=0$  en utilisant un procédé itératif de recherche de la racine numérique.
8. Déterminer le nouveau point de calcul (point de conception), en substituant la valeur de l'indice  $\beta$  obtenu en étape 7, dans l'équation (III.17) (pour les variables aléatoires non corrélées) et (III.29) à (III.30) (pour les variables aléatoires corrélées).
9. Répétez les étapes 3 à 8 jusqu'à ce que l'indice  $\beta$  converge avec une tolérance acceptable :  $|\beta^{k+1} - \beta^k| < \varepsilon$ .

**Tableau V.4** Résultats de la méthode analytique

Sols $\phi'/c'$	Corrélation	Moyenne de $q_L$	Résultats (Valeurs de calcul)		Facteurs partiels de sécurité	
			$\text{Tan}(\phi'_{\text{red}})$	$c'_{\text{red}}$	$\phi'$	$c'$
40/0	0	2458	0,7031	(-)	1,19	(-)
35/0	0	1090	0,571	(-)	1,23	(-)
30/0	0	524,5	0,458	(-)	1,26	(-)
25/4	0	344,7	0,393	2,939	1,19	1,36
	-0,6	341,4	0,392	2,939	1,19	1,36

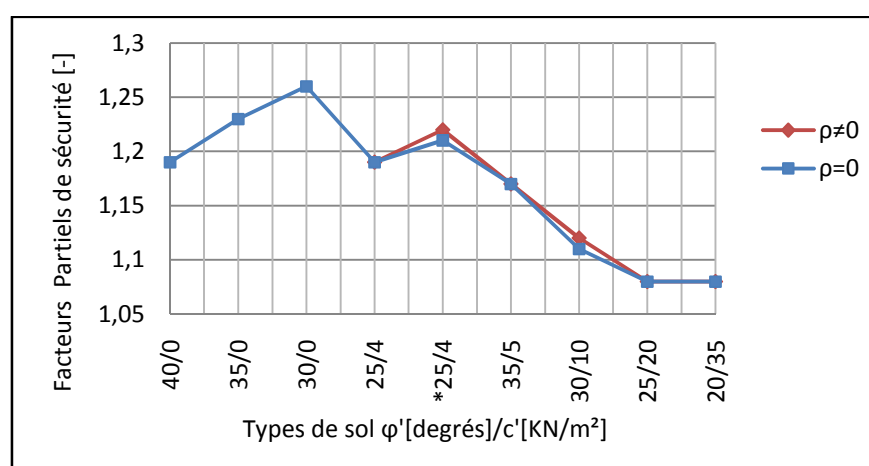
*25/4	0	350,5	0,3856	2,2748	1,21	1,76
	-0,6	342,9	0,3829	2,2748	1,22	1,76
35/5	0	1328	0,5988	3,6747	1,17	1,36
	-0,6	1315	0,5974	3,6747	1,17	1,36
30/10	0	835,5	0,5188	7,3494	1,11	1,36
	-0,6	821,1	0,5168	7,3494	1,12	1,36
25/20	0	685,4	0,4314	14,6988	1,08	1,36
	-0,6	669,2	0,4314	14,6988	1,08	1,36
20/35	0	641,2	0,3361	25,2043	1,08	1,39
	-0,6	625,8	0,3361	25,7228	1,08	1,36

## 4-2 Interprétation des résultats

### 4-2-1 Méthode analytique

Le tableau (V.4), donne les résultats des facteurs partiels de sécurité des paramètres mécaniques (cohésion et angle de frottement interne) pour les différents types de sol, obtenues par le rapport des valeurs caractéristiques sur les résultats des valeurs de calcul, qui sont à leurs tour évaluées analytiquement par intégration sur le domaine de rupture (domaine réduit).

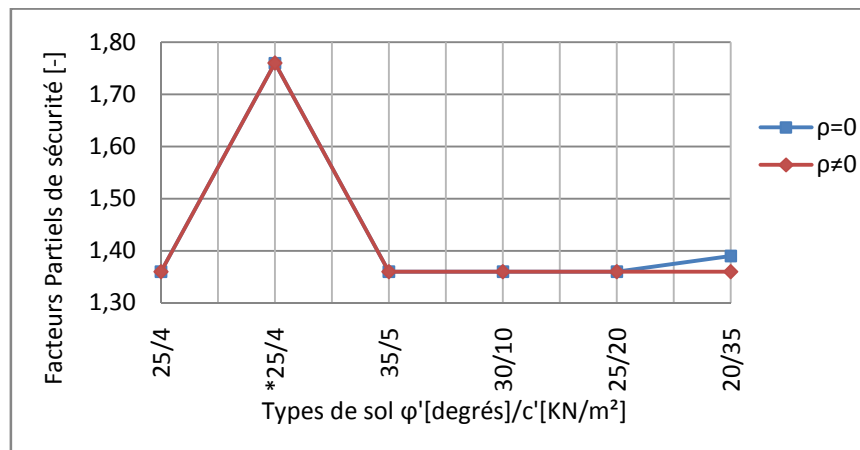
Ces résultats montrent que, dans les sols pulvérulents et de faible cohésion ( $c \leq 10$ ), le facteur partiel de sécurité de la variable ( $\tan \phi'$ ) présente une fine sensibilité aux variations de la valeur caractéristique. Il prend des valeurs ayant pour intervalle de (1,11÷1,26). Alors que pour les deux sols de forte cohésion ( $c \geq 20$ ), les FSP restent constants à une valeur de l'ordre de (1,08) (Fig. V.2). Cette fine sensibilité est due au fait que la capacité portante présente une forte non linéarité avec ( $\tan \phi'$ ), qui l'un des variables d'entrées jouant un rôle important dans cette analyse.



**Figure. V.2** Facteurs partiels de sécurité de l'angle de frottement interne d'après la méthode analytique.

Par ailleurs les facteurs partiels de sécurité de la variable ( $c'$ ) ne présentent aucune sensibilité à la valeur caractéristique, ils prennent les mêmes valeurs (valeurs constantes) dans les sols de faible à moyenne cohésion ( $c \leq 20$ ), et deviennent très peu sensible à dépendance directe dans les sols à forte cohésion ( $c > 20$ ) (Fig. V.3). A l'exception du modèle de Russelli (\*25/4) mis en comparaison au (25/4), représentant un cas loin de la réalité dans lequel l'influence de la dispersion ( $V_c$ ) sur le calcul probabiliste de sécurité est très remarquable (voir Fig. V.3), plus le coefficient de variation est grand plus la valeur du facteur partiel de sécurité est grande. Cette influence à été signalée par Rjanitzine il ya 60 ans (Lemaire, 2005), dont il attire l'attention sur le rôle essentiel des coefficients de variation.

En plus la présence de la corrélation qui n'a aucune influence sur les FSP des paramètres mécaniques ( $\phi$  et  $c$ ), présentant des valeurs identiques aux cas non corrélés sur toutes la fourchette des sols étudiés.



**Figure. V.3** Facteurs partiels de sécurité de la cohésion d'après la méthode analytique.

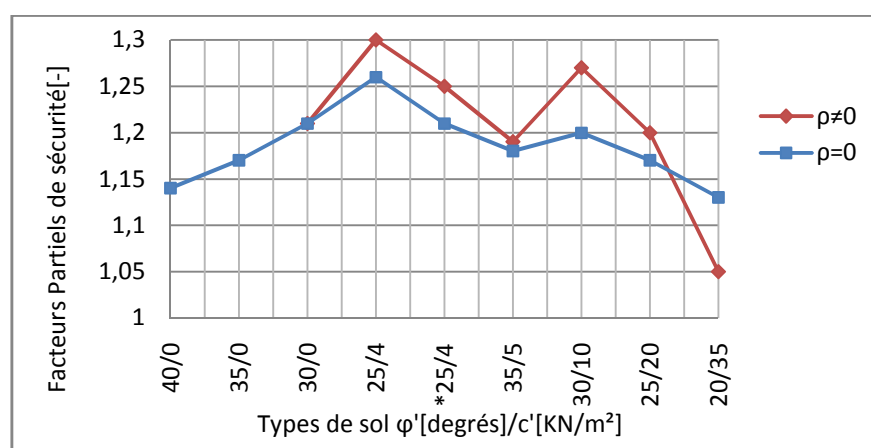
D'une manière générale, les résultats confirment les études paramétriques effectuées dans la littérature, indiquant que les facteurs partiels de sécurité des paramètres mécaniques sont insensibles aux valeurs caractéristiques à coefficient de variation et lois constants (Lemaire, 2005). Les valeurs des facteurs partiels de sécurité obtenus pour  $\phi$  varient à peu près d'une valeur de ( $\cong 1,25$ ), sont proches de ceux proposés par l'Euro-code 7 dans les sols pulvérulents et de faible à moyenne cohésion ( $c < 20$ ). A l'exception des sols de forte cohésion ( $c \geq 20$ ), les valeurs des facteurs partiels de sécurité pour  $\phi$  sont vus plus petits que ceux de l'Euro-code 7 ( $1,08 < 1,25$ ). Alors de même les facteurs partiels de sécurité pour  $c$  donnent aussi des valeurs plus grandes à ceux de l'Euro-code 7 ( $= 1,25$ ), d'un ordre de ( $1,36 \div 1,39$ ) dans tous les sols étudiés.

## 4-2-2 Méthode FORM

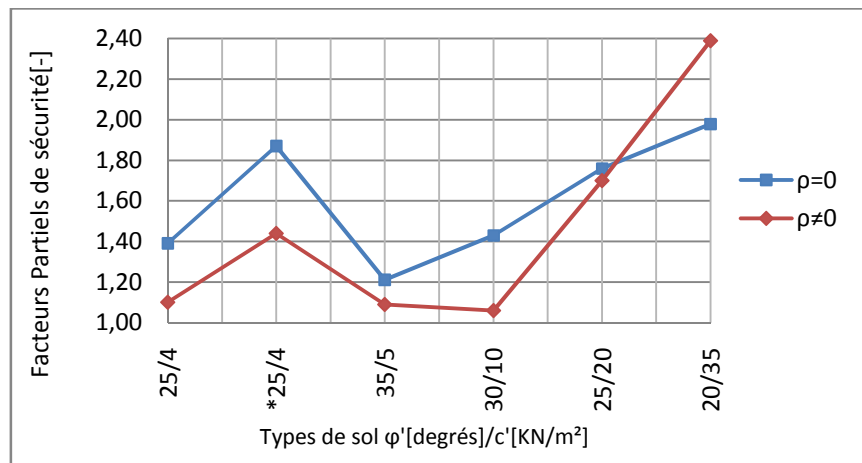
### 4-2-2-1 Approche Traditionnel (cas 1)

**Tableau V.5** Résultats de la méthode approximative (FORM)

Sols $\phi'/c'$	Corrélation	Indice de Fiabilité $\beta$	Résultats (Valeurs de calcul)		Facteurs de Sensibilité		Facteurs partiels de sécurité	
			$\tan(\phi'_{red})$	$c'_{red}$	$\alpha_{\phi'}$	$\alpha_{c'}$	$\phi'$	$c'$
40/0	0	1,33	0,733	(-)	1,00	(-)	1,14	(-)
35/0	0	1,48	0,596	(-)	1,00	(-)	1,17	(-)
30/0	0	1,68	0,478	(-)	1,00	(-)	1,21	(-)
25/4	0	2,09	0,3707	2,8811	0,9491	0,3149	1,26	1,39
	-0,6	2,79	0,3478	4,2947	0,8259	0,5637	1,34	0,93
*25/4	0	1,52	0,3846	2,1421	0,9360	0,3519	1,21	1,87
	-0,6	Situation non convergente						
35/5	0	1,56	0,592	4,135	0,9810	0,1920	1,18	1,21
	-0,6	1,86	0,574	6,05	0,6640	0,7470	1,22	0,83
30/10	0	1,81	0,48	7,007	0,9140	0,4040	1,20	1,43
	-0,6	2,60	0,453	9,46	0,8860	0,4630	1,27	1,06
25/20	0	1,92	0,398	11,37	0,7490	0,6620	1,17	1,76
	-0,6	3,15	0,388	11,79	0,9960	0,0800	1,20	1,70
20/35	0	1,85	0,321	17,68	0,5240	0,8520	1,13	1,98
	-0,6	2,88	0,345	14,67	0,9440	-0,3270	1,05	2,39



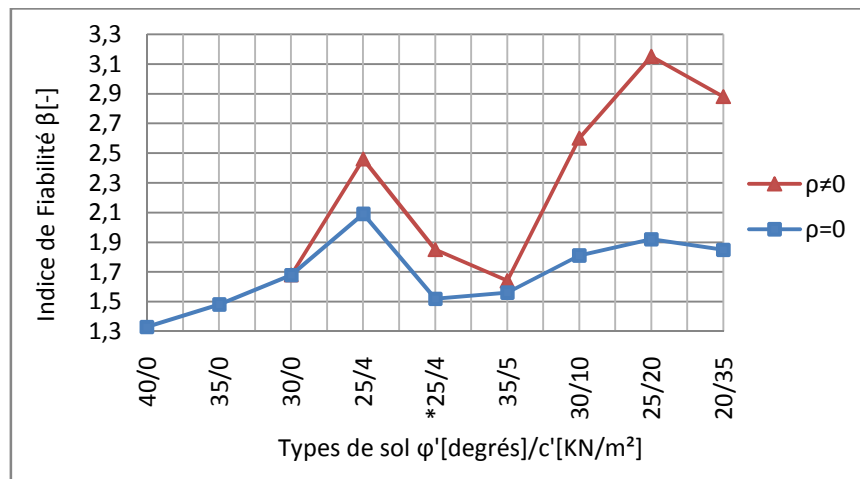
**Figure. V.4** Facteurs partiels de sécurité de l'angle de frottement interne d'après la méthode FORM.



**Figure. V.5** Facteurs partiels de sécurité de la cohésion d'après la méthode FORM.

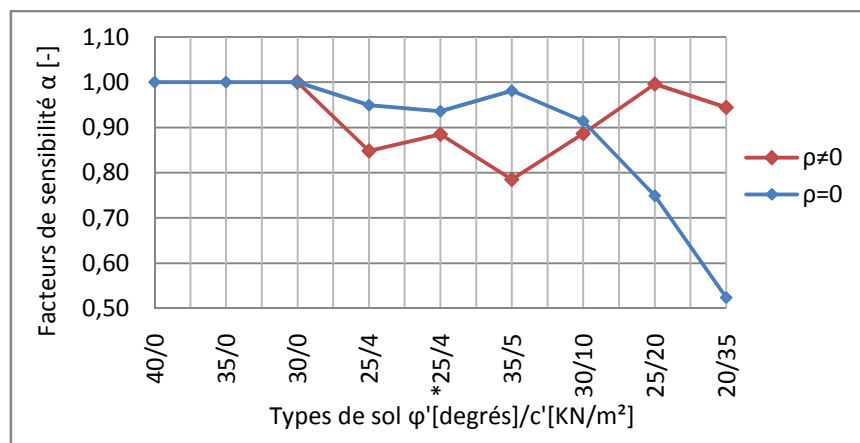
En considérant les mêmes types de sol, le tableau (V.5) regroupe les résultats obtenus par la méthode (FORM). Son avantage par rapport à la méthode précédente réside non seulement dans la détermination du point de conception, mais aussi dans l'évaluation de l'indice de fiabilité et des facteurs de sensibilité.

Les figures (V.4 et V.5) montrent en premier lieu l'influence considérable de la corrélation, qui augmente les FSP de  $\phi$  et diminue ceux de  $c$  dans les sols de moyenne à faible cohésion ( $c \leq 20$ ), et qui devienne inverse en augmentant les FSP de  $c$  et diminuant ceux de  $\phi$  dans les sols à forte cohésion ( $c > 20$ ). En second lieu l'évolution exprimée d'une part par une légère sensibilité des FSP de  $\phi$  aux valeurs caractéristiques, ayant pour intervalles de (1,14÷1,21) dans les sols pulvérulents, de (1,18÷1,30) dans les sols de faible cohésion ( $c \leq 10$ ), et de (1,05÷1,20) dans les sols à forte cohésion ( $c \geq 20$ ). D'autre part, la sensibilité apparente des FSP de  $c$  aux valeurs caractéristiques, donnant des valeurs de (1,06÷1,43) dans les sols de faible cohésion ( $c \leq 10$ ), et de (1,70÷2,39) dans les sols à forte cohésion ( $c \geq 20$ ) (voir tableaux V.5 et V.6). Nous pouvons conclure que les résultats des FSP obtenus dans les sols pulvérulents et de faible cohésion ( $c \leq 10$ ), moyennant des valeurs proches à ceux proposés par l'Eurocode 7, à l'exception des sols de forte cohésion ( $c \geq 20$ ), ou les résultats des FSP de  $c$  sont vus plus grandes que ceux proposés par l'Eurocode 7 mais proches de ceux proposés par Meyerhof (1970) (2÷2,5).

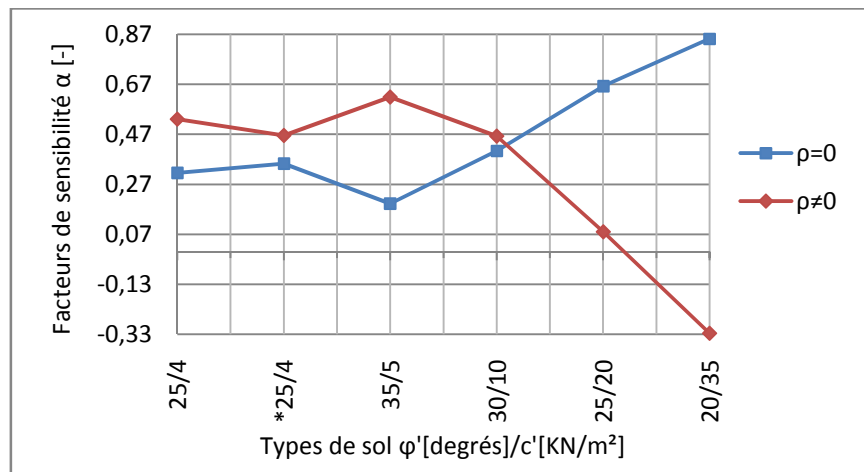


**Figure. V.6** Indice de fiabilité d'après la méthode FORM.

La prise en compte d'une corrélation négative entre les paramètres de cisaillement, modifie considérablement les résultats par rapport au cas non corrélé. Pour un même type de distribution ( $\mu$  et  $\sigma$ ), sa présence qui intervienne d'une part, par augmentation des valeurs de l'indice de fiabilité sur toute la fourchette des sols (Fig. V.6). Et d'autre part, par modification de dépendance des facteurs de sensibilité aux valeurs caractéristiques des paramètres mécaniques observée dans les sols de moyenne à forte cohésion ( $c > 10$ ).



**Figure. V.7** Facteurs de sensibilité de l'angle de frottement interne.



**Figure. V.8** Facteurs de sensibilité de la cohésion.

A l'exception des sols de faible cohésion, une corrélation de (-0,6) paraît assez grande, elle conduit dans la majorité des cas à des résultats erronés (facteurs partiels inférieurs à l'unité), et parfois à des situations de non convergence plus particulièrement dans les sols à grande variabilité (\*25/4). Cet ordre de grandeur de cohésion choisie pour les types de sol (25/4, \*25/4 et 35/5), est souvent rencontré dans la pratique dans les sables humides appelé (cohésion apparente), dont la prise en compte d'une valeur de (-0,6) demeure excessive pour ce genre de sol.

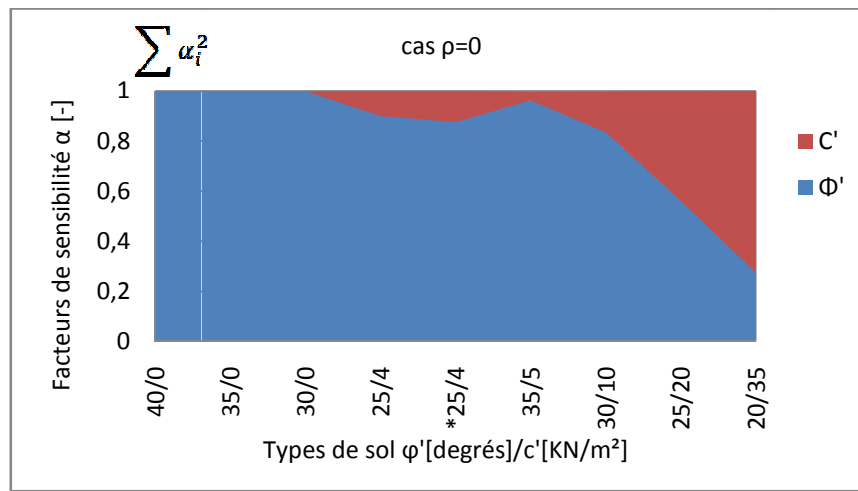
Et l'évitement de ces problèmes rencontrés, a été justifié par un choix des valeurs de corrélation prises d'un ordre de (-0,4, -0,4 et -0,2) respectivement pour les sols (25/4, \*25/4 et 35/5) résumées dans le tableau (V.6). Comme les petites valeurs de  $c$  peuvent éventuellement disparaître, il est préférable de prendre le cas non corrélé pour être du côté de la sécurité car  $\rho$  augmente  $\beta$ .

**Tableau V.6** Résultats de la méthode approximative (FORM) (Cas de corrélation modifiée)

Sols $\phi'/c'$	Non corrélées Corrélées	Indice de Fiabilité $\beta$	Résultats (Valeurs de calcul)		Facteurs de Sensibilité		Facteurs partiels de sécurité	
			$\tan(\phi'_{red})$	$c'_{red}$	$\alpha_{\phi'}$	$\alpha_c$	$\phi'$	$c'$
25/4	0	2,09	0,3708	2,872	0,9491	0,3149	1,26	1,39
	-0,4	2,46	0,3582	3,6384	0,8478	0,5303	1,30	1,10
*25/4	0	1,52	0,3846	2,1421	0,9360	0,3519	1,21	1,87
	-0,4	1,85	0,3724	2,7737	0,8851	0,4654	1,25	1,44
35/5	0	1,56	0,5926	4,135	0,9810	0,1920	1,18	1,21
	-0,2	1,64	0,5879	4,59	0,7850	0,6194	1,19	1,09

Différemment à la méthode analytique, FORM nous offre la possibilité de connaître le taux de contribution de chaque paramètre de base à la probabilité de ruine, à travers des facteurs de sensibilité appelés aussi (cosinus directeurs). Les figures (V.7 et V.9) nous confirment la contribution majeure de l'angle de frottement interne par rapport à la cohésion, observée par des valeurs proches de l'unité dans les sols pulvérulents et de faible cohésion ( $c \leq 10$ ).

la présence de la corrélation modifie l'importance des paramètres mécaniques ; d'une part par augmentation de  $\alpha_\phi$  et diminution de  $\alpha_c$  dans les sols de moyenne à forte cohésion ( $c > 10$ ), et d'autre part par diminution de  $\alpha_\phi$  et augmentation de  $\alpha_c$  dans les sols à faible cohésion ( $c \leq 10$ ).



**Figure. V.9** Facteurs de sensibilité de l'angle de frottement interne et de la cohésion.

#### 4-2-2-2 Approche Semi-probabiliste (cas 2)

**Tableau V.7** Résultats de la méthode approximative (FORM)

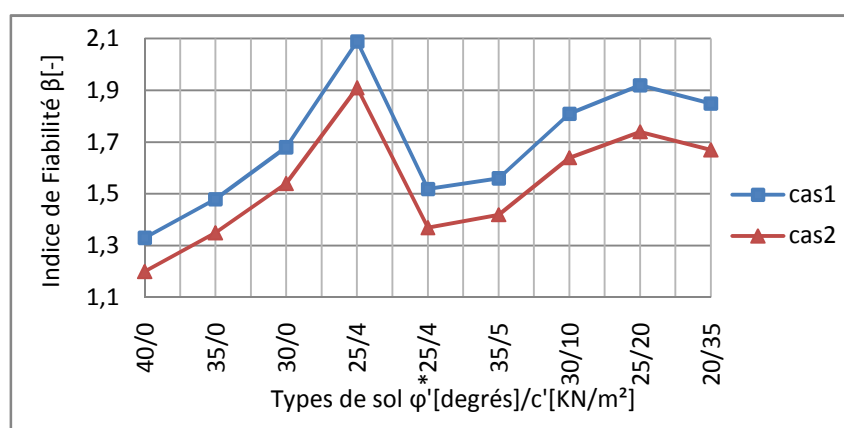
Sols $\phi'/c'$	Non corrélées Corrélées	Indice de Fiabilité $\beta$	Résultats (Valeurs de calcul)		Facteurs de Sensibilité		Facteurs partiels de sécurité	
			$\tan(\phi'_{red})$	$c'_{red}$	$\alpha_\phi$	$\alpha_c$	$\phi'$	$c'$
40/0	0	1,20	0,7436	(-)	1,00	(-)	1,13	(-)
35/0	0	1,35	0,6056	(-)	1,00	(-)	1,16	(-)
30/0	0	1,54	0,4878	(-)	1,00	(-)	1,18	(-)
25/4	0	1,91	0,3795	2,94	0,9493	0,3142	1,23	1,36
	-0,4	2,24	0,3677	3,67	0,8435	0,5370	1,27	1,09
*25/4	0	1,37	0,3929	2,21	0,9350	0,3545	1,19	1,81
	-0,4	1,68	0,3813	2,82	0,8829	0,4695	1,22	1,42
35/5	0	1,42	0,6023	4,18	0,9817	0,1903	1,16	1,20
	-0,2	1,48	0,5981	4,60	0,7827	0,6224	1,17	1,09



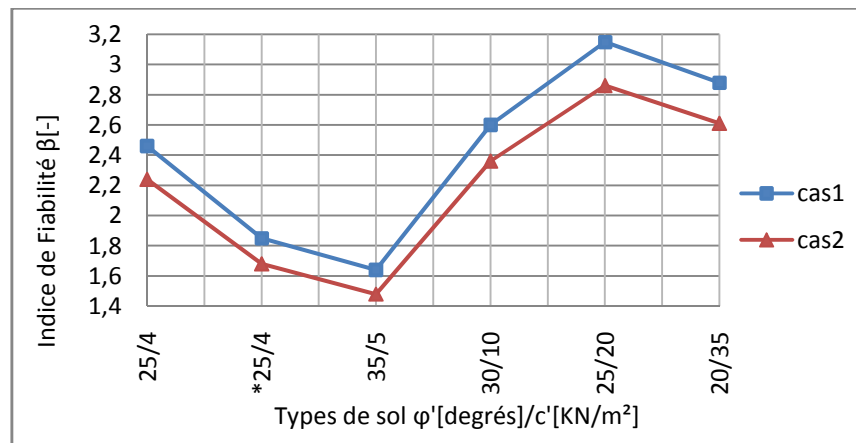
30/10	0	1,64	0,4900	7,16	0,9143	0,4048	1,18	1,40
	-0,6	2,36	0,4639	9,55	0,8810	0,4731	1,24	1,05
25/20	0	1,74	0,4049	11,88	0,7447	0,6673	1,15	1,68
	-0,6	2,86	0,3964	12,2	0,9970	0,0760	1,18	1,64
20/35	0	1,67	0,3252	18,67	0,5170	0,8559	1,12	1,87
	-0,6	2,61	0,3485	15,61	0,9376	-0,3475	1,04	2,24

Le Tableau (V.7), regroupe les résultats de l'approche semi-probabiliste (cas 2) pour les différents types de sols, obtenus par l'intermédiaire de la méthode (FORM). Les figures (V.10 et V.11) présentent l'évolution de l'indice de fiabilité ( $\beta$ ) pour les deux approches, et nous montrent que l'approche semi-probabiliste est de loin le plus défavorable. Il donne le minimum de sécurité comparativement à l'approche traditionnel, observé par des valeurs inférieures sur toute la fourchette des sols étudiés. Ces valeurs inférieures mettent la situation du côté de la sécurité. D'autre part, cet approche (cas 2) donne aussi des valeurs inférieures pour les FSP des paramètres mécaniques ( $\tan \phi', c'$ ) par rapport à l'approche classique (Tableau V.7). Ce qui conduit à un dimensionnement plus économique.

A titre comparatif les principaux résultats du (cas 2), obtenus à partir d'une proposition basée sur l'approche semi-probabiliste (Euro-code 7, 2011) pour un facteur de sécurité  $F_S=1,89$ , nous permettent de choisir ce cas parcequ'il est justifié par (Euro-code 7). Ceci peut être effectué en gardant l'approche classique seulement avec un facteur de sécurité  $F_S=1,89$ .



**Figure. V.10** Evolution de l'indice de fiabilité  $\beta$  selon les deux approches (cas non corrélé).



**Figure. V.11** Evolution de l'indice de fiabilité  $\beta$  selon les deux approches (cas corrélé).

A l'issue de ces études, on propose les valeurs des FSP des paramètres mécaniques suivants (Tableau V.8).

**Tableau V.8** Facteurs partiels de sécurité

Type de sols	Paramètres	Coefficients de Variation	Facteurs Partiels de sécurité
Pulvérulent	$\phi'$	10%	1,25
Faible cohésion	$\phi'$	10%	1,25
	$c'$	40%	1,40
Forte cohésion	$\phi'$	10%	1,10
	$c'$	40%	2,00

## 5 Conclusion

Cette étude paramétrique de l'analyse probabiliste d'une semelle filante, nous a permis de faire une comparaison objective des différents types de sols, d'évaluer les effets d'incertitudes des paramètres de conception sur l'indice de fiabilité, et d'obtenir les conclusions suivantes :

- Le calcul probabiliste de sécurité par la méthode analytique, malgré son exactitude il présente des limitations. Un nombre de variables aléatoires supérieurs à deux rend le calcul très complexe et pénible, et les exemples numériques présentés montrent que la précision fournie par la méthode de First Order Reliability Method (FORM) est suffisante pour des applications pratiques en géotechniques.

- La pratique traditionnelle de conception des fondations qui utilise des facteurs de sécurité peut être fallacieuse. Des fondations conçus avec de grands facteurs de sécurité ne sont pas exempts du risque de rupture en particulier si les incertitudes sur les paramètres de conception sont grandes.
- Une nouvelle analyse du problème fondée sur la théorie probabiliste (Euro-code 7), en remplaçant le facteur de sécurité global par des facteurs partiels de sécurité, qui tiennent compte de la variabilité naturelle (dispersion) des paramètres de conception, pour une bonne évaluation de la fiabilité des ouvrages géotechniques. L'analyse comparative avec l'approche déterministe effectuée, nous montrent que l'approche semi-probabiliste est de loin le plus défavorable. De plus cette approche assure un emploi souvent économique des matériaux et met la situation du côté de la sécurité. Son application peut être effectuée en gardant l'approche classique seulement avec un facteur de sécurité  $F_S=1,89$ .
- Les problématiques rencontrées, d'une part lors de la prise en compte d'une corrélation négative de (-0,6) dans les sols à faible cohésion ( $c<10$ ), et plus précisément le cas du sol (6), paraît physiquement irréaliste. Et d'autre part l'apparition des facteurs de sensibilité négatives, qui dépendent à leurs tour de la fonction d'état limite (Lemaire, 2005), nous obligent aussi à reformuler le mécanisme de rupture par poinçonnement pour les sols à forte cohésion ( $c>20$ ).
- Pour la fonction d'état limite considérée dans l'analyse probabiliste, la capacité portante des fondations superficielles dépende fortement de l'angle de frottement interne  $\varphi$ . Le calcul de l'indice de fiabilité est très important pour l'évaluation de la sécurité qui à son tour augmente en présence de la corrélation.

## Conclusion générale

Les principales sources et types d'incertitudes, qui affectent fortement l'ingénierie géotechnique, ont été décrits. Malgré les progrès des ressources informatiques modernes et des technologies de l'information pour faire face aux incertitudes, la connaissance des ingénieurs sur les paramètres incertains impliqués dans une conception reste imparfaite. Comme l'a souligné Christian (2004), l'incertitude peut être ignorée en appliquant l'approche déterministe, avec le risque d'être aussi conservateur, conduisant aussi à des projets trop coûteux. Les analyses probabilistes et statistiques sont un moyen puissant de faire face aux incertitudes, en leur fournissant un cadre mathématique plus logique. En dépit de la réticence des experts dans l'application des concepts et méthodes probabilistes, ces dernières années, ces techniques trouvent une application croissante dans le domaine géotechnique.

Au chapitre V, des méthodes probabilistes bien connues ont été appliquées à une étude paramétrique de la capacité portante d'une semelle filante, reposant sur un sol homogène caractérisé par la cohésion effective et l'angle de frottement interne. Ces paramètres sont sélectionnés pour être représentés comme variables aléatoires car ils ont le plus grand impact sur la capacité portante du sol. Cette étude a été effectuée en considérant différents types de sol à différents coefficients de variations pour les cas corrélés et non corrélés. Il a été démontré que l'utilisation de la méthode FORM exige seulement une connaissance fondamentale des statistiques et de la théorie des probabilités pour résoudre le problème de la capacité portante. Les résultats numériques présentés en termes de facteurs partiels de sécurité, montrent que la précision fournie par cette méthode (FORM) est suffisante pour des applications pratiques en géotechniques. Malgré ces résultats qui sont similaires à ceux de la méthode analytique, cette dernière considérée à son tour exacte puisqu'elle se base sur l'intégration numérique, les résultats de FORM sont approximatifs et la précision diminue à mesure que la non-linéarité de l'état limite augmente ou le nombre de paramètres sera grand.

Une nouvelle analyse du problème, fondée sur la théorie probabiliste (Eurocode 7) est effectuée, en remplaçant le facteur de sécurité global par des facteurs partiels de sécurité, qui tiennent compte de la variabilité naturelle (dispersion) des paramètres de conception, pour une bonne évaluation de la fiabilité des ouvrages géotechniques. Les résultats d'une analyse comparative

avec l'approche déterministe, ont été montrés en termes d'indice de fiabilité et de facteurs partiels de sécurité pour les paramètres du sol non corrélés et négativement corrélés. Ils Montrent que l'approche semi-probabiliste est de loin le plus défavorable. De plus elle assure un emploi souvent économique des matériaux et met la situation du coté de la sécurité. Son application peut être effectuée facilement en gardant l'approche classique seulement avec un facteur de sécurité  $F_S=1,89$ .

## Perspectives

L'application des méthodes probabilistes bien connues au problème de la capacité portante a montrée la nécessité de fournir un cadre mathématique pour faire face aux incertitudes de manière plus rationnelle. La combinaison de l'approche déterministe traditionnelle et de l'analyse probabiliste de recherches ultérieures peut être bénéfique pour la pratique de l'ingénierie géotechnique, en soutenant le jugement de l'ingénierie et en améliorant le processus décisionnel.

En outre, l'approche proposée pourrait à l'avenir être un outil important pour la prise en compte des incertitudes en géotechniques. Par conséquent, la prochaine étape devrait être une mise en œuvre conviviale de cette approche en codes d'éléments finis et son extension à certaines études de cas réelles, telles que le problème de la stabilité de la pente. Cela améliorerait son applicabilité dans la conception pratique et permettrait un jugement plus définitif sur ses avantages et ses limites.

Il doit être clair que cette recherche a montrée les résultats d'une analyse probabiliste simplifiée du problème de capacité portante, en ignorant certains facteurs importants d'incertitude, comme l'hétérogénéité des propriétés du sol. Alors, la probabilité de rupture peut être surestimée, ce qui entraîne un surdimensionnement. Ainsi, le prochain défi consiste à utiliser l'approche probabiliste dans des modèles géotechniques plus complexes (par exemple très non linéaire, 3D) compte tenu de toutes les sources d'incertitude importantes, telles que la variabilité spatiale inhérente des paramètres du sol.

## *Liste des Tableaux*

### **Chapitre(I)**

I.1	ordre de grandeur des probabilités cibles en construction [lemaire2005].....	5
-----	--	---

### **Chapitre(II)**

II.1.	Valeurs du coefficient de sécurité Global.....	47
-------	--	----

### **Chapitre(IV)**

IV.1	Facteurs partiels pour les actions ( $\gamma_F$ ).....	92
IV.2	Facteurs partiels pour les paramètres de sol ( $\gamma_M$ ).....	92
IV.3	Facteurs partiels pour les actions ( $\gamma_F$ ) ou les effets des actions ( $\gamma_E$ ).....	93
IV.4	Facteurs partiels pour les paramètres de sol ( $\gamma_M$ ).....	94
IV.5	Facteurs partiels de résistance ( $\gamma_R$ ) pour les fondations superficielles.....	94

### **Chapitre(V)**

V.1.	Facteurs de capacité portante.....	101
V.2	Données statistiques des variables aléatoires.....	103
V.3.	Types de sols.....	104
V.4	Résultats de la méthode analytique.....	108
V.5.	Résultats de la méthode approximative (FORM).....	111
V.6.	Résultats de la méthode approximative (FORM) (Cas de corrélation modifiée).....	114
V.7	Résultats de la méthode approximative (FORM).....	115
V.8	Facteurs partiels de sécurité.....	117

**Liste des figures****Chapitre(I)**

I.1	Type des incertitudes des propriétés du sol (Kulhawy 1992).....	7
I.2	Diagramme de fréquence d'un événement donné et fonctions de densité de probabilité..	11
I.3	FDC et FDP pour une variable aléatoire continue .....	12
I.4	Distributions Asymétriques .....	15
I.5	Corrélation des propriétés du sol.....	16
I.6	Fonctions Densité de probabilité Normale (a) et Normale standardisée (b).....	18
I.7	fonction de densité lognormale decalée.....	20
I.8	analyse de fiabilité [Lemaire 2005].....	21
I.9	représentation de $P_f$ pour une loi gaussienne à deux variables corrélées .....	23
I.10	représentation de $P_f$ par courbes d'isodensité de probabilité.....	23
I.11	Schéma de Meyerhof(1970).....	24
I.12	Illustration de l'état limite en fonction de deux variables aléatoires.....	25
I.13	Probabilité de défaillance $P_f$ par rapport à l'indice de fiabilité $\beta$ pour une distribution normale.	26
I.14	Acteurs du couplage mécano-fiabiliste.....	27

**Chapitre(II)**

II.1	Représentation de l'indice de CORNELL.....	30
II.2	Représentation de l'indice de Hasofer et Lind [Lem 2005].....	34
II.3	Méthode itérative avec gradient projeté.....	41
II.4	Illustration de l'algorithme HLRF.....	42
II.5	Minimums locaux.....	46

**Chapitre(III)**

III.1	Illustration de l'approximation de l'état limite au voisinage du point de défaillance le Plus probable au premier ordre FORM.....	51
III.2	Emplacement des points et poids pour une seule variable aléatoire (a) et pour une Fonction dépendant de deux variables aléatoires (b).....	59
III.3	Approximation du premier ordre de l'état limite.....	63
III.4	Approximation du second ordre de l'état limite .....	64
III.5.	Construction d'une variable aléatoire par inversion .....	72



<i>III.6</i>	Représentation de la méthode rejet-acceptation .....	73
<i>III.7</i>	Intégration par simulation .....	73
<i>III.8</i>	Simulation de Monte-Carlo.....	75
<i>III.9.</i>	Tirage directionnels sur une sphère unitaire.....	76
<i>III.10</i>	Tirage directionnels sur une sphère unitaire.....	77
<i>III.11</i>	Tirages uniformes dans un pavé.....	77

## **Chapitre(V)**

<i>V.1</i>	Equilibre des terres sous la fondation (charge verticale centrée) .....	100
<i>V.2</i>	Facteurs partiels de sécurité de l'angle de frottement interne d'après la méthode analytique.....	109
<i>V.3</i>	Facteurs partiels de sécurité de la cohésion d'après la méthode analytique.....	110
<i>V.4</i>	Facteurs partiels de sécurité de l'angle de frottement interne d'après la méthode FORM.....	111
<i>V.5</i>	Facteurs partiels de sécurité de la cohésion d'après la méthode FORM.....	112
<i>V.6</i>	Indice de fiabilité d'après la méthode FORM.....	113
<i>V.7</i>	Facteurs de sensibilité de l'angle de frottement interne.....	113
<i>V.8</i>	Facteurs de sensibilité de la cohésion.....	114
<i>V.9</i>	Facteurs de sensibilité de l'angle de frottement interne et de la cohésion.....	115
<i>V.10</i>	Evolution de l'indice de fiabilité $\beta$ selon les deux approches (cas non corrélé).....	116
<i>V.11</i>	Evolution de l'indice de fiabilité $\beta$ selon les deux approches (cas corrélé).....	117

***Notations Principales***

$P_f$	: Probabilité de rupture
$F_S$	: Facteur de sécurité globale
$F_X(x)$	: Fonction de répartition
$f_X(x)$	: Fonction densité de probabilité
$\varphi'$	: Angle de frottement interne effectif du sol
$c'$	: Cohésion effective du sol
$\mu_X$	: Valeur moyenne d'une variable aléatoire
$Var(X)$	: Variance d'une variable aléatoire
$\sigma_X$	: Ecart type d'une variable aléatoire
$V_X$	: Coefficient de variation d'une variable aléatoire
$\vartheta_X$	: Coefficient d'asymétrie d'une variable aléatoire
$Cov(X, Y)$	: Covariance
$\rho_{XY}$	: Coefficient de corrélation
$[C_X]$	: Matrice de covariance
$[\rho_X]$	: Matrice de corrélation
$Z$	: Variable aléatoire centrée réduite
$\varphi_Z(Z)$	: Densité de probabilité centrée réduite
$x_0$	: Paramètre de décalage de la variable aléatoire X
$f_{R,S}(r, s)$	: Densité cumulative
$\beta$	: Indice de fiabilité
$\emptyset$	: Fonction de distribution normale standard
$\beta_c$	: Indice de Cornell
$m_z$	: Moyenne de l'état limite
$\sigma_z$	: Ecart type de l'état limite
$\emptyset(u)$	: Fonction de répartition d'une variable centrée réduite
$G(x_i)$	: Etat limite dans l'espace physique
$Z(u_i)$	: Etat limite dans l'espace centré réduit
$T_i(x_j)$	: Transformation iso-probabiliste
$\hat{U}$	: Variable standard corrélée
$[\Gamma_0]$	: Matrice triangulaire inférieur de la décomposition de Cholesky
$d(u_k)$	: Distance de l'origine à l'état limite

---

$\{S\}^k$	: Vecteur de la direction de descente
$\alpha^k$	: Distance du pas optimal
$\nabla_u Z$	: Gradient de l'état limite
$L(u_k, \lambda)$	: Le Lagrangien
$\lambda$	: Le multiplicateur de Lagrange
$[P]$	: Matrice de la projection sur le sous espace tangent à la contrainte active.
$\ \nabla Z(u_l)\ $	: Norme de l'état limite
$P^*$	: Point de calcul
$\alpha_i$	: Facteur de sensibilité ou cosinus directeur
$\frac{\partial Z(x^*)}{\partial x_i}$	: Dérivée partielle évaluée au point de conception $x_i^*$
$x_i^*$	: Coordonnées correspondants au point de conception $P^*$ dans l'espace original
$\mu_{x_i}^N$	: Moyenne normalisée
$\sigma_{x_i}^N$	: Ecart type normalisé
$Y_i$	: Variables aléatoires non corrélées
$\lambda_i$	: Valeurs propres
$\xi_{x_+}$ et $\xi_{x_-}$	: Unités d'écart types
$x_{i+}$ et $x_{i-}$	: Coordonnées des points d'applications
$P_i$	: Probabilité concentrée d'une variable aléatoire
$P_{s_1 s_2}$	: Estimations ponctuelles ou poids des variables
$(f, f)$	: Produit scalaire de deux vecteurs
$[H_0^T]$	: Matrice orthogonale
$k_{ij}$	: Courbure de la surface de réponse au point de conception $P^*$
$\Omega$	: Région approximative de rupture
$I_{D_f}$	: Indicateur de défaillance
$F_d$	: Valeur de calcul des actions
$F_{rep}$	: Valeur représentative de l'action
$F_k$	: Valeur caractéristique de l'action de l'action
$X_d$	: Valeur de calcul d'un paramètre géotechnique
$X_k$	: Valeur caractéristique d'un paramètre géotechnique
$\gamma_M$	: Facteur partiel des situations permanentes ou transitoires
$E_{dst;d}$	: Valeur de calcul de l'effet des actions déstabilisatrices
$a_d$	: Valeur de calcul des données géométriques.
$R_d$	: Valeur de calcul de résistance

---

$\gamma$	: Poids volumique du sol
$q_L$	: Contrainte limite de rupture par poinçonnement
$\mu_{q_L}$	: Moyenne de la charge limite
$\mu_{x,red}$	: Moyenne de l'intervalle réduit

---

## *Bibliographie*

Ang A H S, Tang WH (1975) Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Vol. I: Basic Principles. John Wiley and Sons, New York.

Ayyub B M, Chao R J (1998) Reliability and stability assessment of concrete gravity structures. Theoretical manual, US Army corps of engineers.

Barakat S, Alzubaidi R, Omar M (2015) Probabilistic-based assessment of the bearing capacity of shallow foundations. *Arabian Journal of Geosciences*, Vol. 8:pp. 6441–6457

Belabed L (1996) Zuverlässigkeitsuntersuchung des Tragsystems. Mehrfach verankerte Stützwände, mit probabilistischen methoden. Thèse de doctorat, université de Weimar, Allemagne.

Boissier D, Bacconnet C, et Alhajjar J (2005) Autour du hazard et dans le sol. *Revue Française de la géotechnique*, 112, 3<sup>ième</sup> trimestre, 11-20.

Breitung K (1984) Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 110, No. 3, Mar., pp 357-366.

Cherubini C (1997) Data and considerations on the variability of geotechnical properties of soils. *Proceedings of the International Conference on Safety and Reliability (ESREL) 97, Lisbon*, Vol. 2: pp. 1583-1591.

Cherubini C (1998) Reliability of shallow foundation bearing capacity on  $c'$ ,  $j'$  soils. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 37: pp. 264-269.

Cherubini C (2000) Reliability evaluation of shallow foundation bearing capacity on  $c'$ ,  $\phi'$  soils. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 37: pp. 264-269.

Christian J T, Baecher G B (1999) Point Estimate Method as Numerical Quadrature. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*: pp. 779-786.

Chu X, Li L, Wang Y (2015) Slope reliability analysis using length-based representative slip surfaces. *Arabian Journal of Geosciences*. DOI: 10.1007/s12517-015-1905-5

Cornell C A (1969) A probability-based structural code. *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 66: pp. 974-985.

Der Kiureghian, A, Lin H Z, and Hwang S J (1998) Second Order Reliability Approximations. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 113, pp.1208-1225.

Ditlevsen O, Madsen H O (1996) Structural reliability methods. Chichester: John Wiley & Sons.

Dubost J (2009) Variabilité et incertitudes en géotechnique: de leur estimation à leur prise en compte. Thèse Université Bordeaux 1, 327p.

Einstein H H, Baecher G B (1982) Probabilistic and statistical methods in engineering geology. I. Problem statement and introduction to solution. *Rock Mechanics, Supp.* 12, pp. 47-61.

- Ejezie S, et Harrop-Williams K (1984) Probabilistic characterization of Nigerian soils. In Probabilistic Characterization of Soil Properties, Bridge Between Theory and Practice, ASCE, 140-156.
- El-ramly H, Morgenstern N R, Cruden DM (2005) Probabilistic assessment of stability of a cut slope in residual soil. *Géotechnique*, 55: 77-84.
- Eurocode 7 (2011) Geotechnical design. Part 1 «general rules».
- Evans M, Hastings N, Peacock B (1993) Statistical distributions. Wiley, New York.
- Failmezger A (2001) Discussions on Factor of safety and reliability in geotechnical engineering. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 703-704.
- Favre J L (2004) *Géotechnique, sécurité des ouvrages, risqué*. Technosup, Ellipses.
- Fenton G A, et Griffiths D V (2003) Bearing capacity prediction of spatially random  $C-\phi$  soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 40, 54-65.
- Fenton G A, et Griffiths D V (2004) Reply to the discussion by R. Popescu on Bearing Capacity Prediction of Spatially Random  $c-j$  soils. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 41: pp. 368-369.
- Fießler B, Hawranek H & Rackwitz R (1976) Numerische Methoden für probabilistische Bemessungsverfahren und Sicherheitsnachweise, Heft 14, TU München, Germany.
- Freudenthal A M, Garrelts J M, and Shinozuka M (1966) The Analysis of Structural Safety. *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 92, No. ST1, pp. 267-325.
- Gäßler G (1987) Vernagelte Geländesprünge-Tragverhalten und Standsicherheit. Thèse de doctorat, Heft 108, université de Karlsruhe, Allemagne.
- Genske D D, Walz B (1987) Anwendung der probabilistischen Sicherheitstheorie auf Grundbruchberechnungen nach DIN 4017. *Geotechnik* n°10, p. 53-66.
- Haldar A, et Mahadevan S (2000) Reliability assessment using stochastic finite element analysis. John Wiley and Sons, New York, 328p.
- Harr M E (1977) *Mechanics of particulate media: a probabilistic approach*. McGraw-Hill, New York, 543 pages.
- Harr M E (1987) *Reliability-based design in civil engineering*. McGraw-Hill Book Company, New York, 290p.
- Harr M E (1989) Probabilistic estimates for multivariate analyses. *Appl. Math. Modelling*, Vol. 13(5): pp. 313-318.
- Hasofer A M & Lind N C (1974) Exact and Invariant Second-Moment Code Format. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 100(EM), pp.111-121.
- Hong H P (1998) An efficient point estimate method for probabilistic analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 59(3): pp. 261-267.

- Jiang S H, Li D Q, Cao Z J, Zhou C B, Phoon K K (2015) Efficient system reliability analysis of slope stability in spatially variable soils using Monte Carlo simulation, *J. Geotech. Geoenviron. Eng.* 141(2), 04014096.
- Katzenbach R, Moormann C (2003) Überlegungen zu stochastischen Methoden in der Bodenmechanik am Beispiel des Frankfurter Tons. Beiträge anlässlich des 60. Geburtstages von Herrn Prof. Dr. S. Semprich, Heft 16 der Gruppe Geotechnik, Technische Universität Graz: pp. 255-282.
- Kulhawy F H (1992) On evaluation of static soil properties". In *Stability and performance of slopes and embankments II (GPS 31)*. American Society of Civil Engineers, Seed, R. B., Boulanger, R. W., eds, pp. 95-115.
- Lacasse S, Nadim F (1996) Uncertainties in Characterizing Soil Properties. In *Uncertainty in the Geologic Environment: from Theory to Practice, Proceedings of Uncertainty 96*, ASCE Geotechnical Special publication No. 58, C.D. Shackelford, P.P. Nelson, M.J.S. Roth, eds, pp. 49-75.
- Lemaire M (2005) *fiabilité des structures-Couplage mécano-fiabiliste statique*. Hermès.
- Li K S, Lumb P (1987) Probabilistic design of slopes. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 24: pp. 520-535.
- Li K S (1992) Point-estimate method for calculating statistical moments. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 118(7): pp. 1506-1511.
- Li D Q, Qi X H, Cao Z J, Tang X S, Zhou W, Phoon K K, Zhou C B (2015) Reliability analysis of strip footing considering spatially variable undrained shear strength that linearly increases with depth, *Soils Found.* 55(4), 866–880
- Lind N C (1983) Modelling uncertainty in discrete dynamical systems. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 7(3): pp. 146-152.
- Lumb P (1969) Safety factors and the probability distribution of soil strength. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 7(3): pp. 225-242.
- M. Prot and R. Levi . (1951) : Conceptions modernes relatives a la sécurité des constructions, , *Revue Générale des Chemins de Fer*.
- Metropolis N, Rosenbluth AW, Rosenbluth, M.N, Teller A H, and Teller E (1953) Equations of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087{1092.
- Nottrodt H P (1990) Beitrag zur Einführung semiprobabilistischer Methoden in der Geotechnik. Thèse de doctorat, université de Weimar, Allemagne.
- Ogunsanwo O (1985) Variability in the shear strength characteristics of an Amphibolite Driven laterite soil. *Bulletin of the international Association of Engineering Geology*, N°32, Paris.
- Orr T L L (2000) Selection of characteristic values and partial factors in geotechnical designs to Eurocode 7. *Computers and Geotechnics* 26, p. 263-279.

- 
- Phoon K-K, Kulhawy F H (1999) Evaluation of geotechnical property variability. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 36: pp. 625-639.
- Prandtl L (1921) Eindringungsfestigkeit und Festigkeit von Schneiden. *Zeitung für angewendete Mathematik und Mechanik*, Vol. 1:15.
- Rackwitz R, and Fießler B (1979) Structural reliability under combined random load sequences. *Computers and Structures*, 9: 489-494.
- Rackwitz R (1990) Methods of system reliability evaluation. Joint Research Centre, Ispra, Italy, Commission of the European Communities, November.
- R Levi, G Lazard (1949) Calculs probabilistes de la sécurité des constructions. *Annales des Ponts et Chaussées* 26, July–August.
- Rosenblatt M (1952) Remarks on a Multivariate Transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 23, No. 3, pp. 470-472.
- Rosenblueth E (1975) Point estimates for probability moments. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, Vol. 72 (10): pp. 3812-3814.
- Rosenblueth E (1981) Two-point estimates in probabilities. *Appl. Math. Modelling*, Vol. 5(2): pp. 329-335.
- Russelli C (2008) Probabilistic Methods applied to the bearing capacity problem. These de doctorat, Université de Stuttgart, Allemagne.
- Sanchez Lizarraga H, Lai C G (2014) Effects of spatial variability of soil properties on the seismic response of an embankment dan. *Soil dynamics and Earthquake Engineering* 64, 113-128.
- Schittkowski K (1986) A Fortran subroutine solving constrained non linear programming problems. *Annals Operations Research*, 5: 485-500.
- Schneider H R (1999) Definition and determination of characteristic soil properties. In: *Proceeding XII International conference on soil Mechanics and geotechnical Engineering*, Vol 4, Hamburg, 1999, p 2271-4.
- Seung-Kyum C, Ramana V G & Robert A C (2007) *Reliability-Based Structural Design*. Springer-verlag London Limited 2007.
- Srivastava A, Babu G L S (2009) Effect of soil variability on the bearing capacity of clay and in slope stability problems. *Engineering Geology* 108, 142-152.
- Terzaghi K (1943) *Theoretical Soil Mechanics*. Wiley, New York.
- Todd J (1962) *Survey of Numerical Analysis*. Mc Graw Hill, NY.
- Tvedt L ( 1984) Two Second-order Approximations to the Failure Probability. Section on Structural Reliability, A/S Vertas Research, Hovik, Norway.



Tvedt L ( 1990) Distribution of Quadratic Forms in Normal Space Applications to Structural Reliability. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 116, pp. 1183-1197.

Wang L P, and Grandhi R V (1995) Improved Two-point Function Approximation for Design Optimization. AIAA Journal, Vol. 32, No. 9, pp. 1720-1727.

Wolf T H (1985) Analysis and design of embankment dam slopes a probabilistic approach. Phd Thesis, purdue University, Lafayette, Indiana.

Zhang Y, and DerKiureghian, A.: Two improved algorithms for reliability analysis. In R. Rackwitz, A. Augusti and A. Borri, editors, Proceedings of the 6th IFIP WG7.5 Reliability and Optimization of Structural Systems, 1995.

Zhou J, Nowak A S (1988) Integration formulas to evaluate functions of random variables. Structural safety, Vol. 5: pp. 267-284.

**Annexe**

*Algorithmes de calcul*

## A. Algorithmes de calcul

Le but de cette annexe est de décrire les programmes implémentés dans MATLAB® version 13.0 pour évaluer les principaux paramètres tels que la Moyenne, Ecart type, indice de Fiabilité et la Probabilité de défaillance du problème de capacité portante. Ces derniers ont été exposés dans le Chapitre (V).

### A.1 Programme principal pour évaluer les paramètres de l'intervalle réduit

Un programme principal conçu pour évaluer les paramètres statistiques correspondants aux intervalles réduits, qui représentent les valeurs d'intérêts (valeurs de calcul), sont évalués par l'intermédiaire d'une intégration numérique sur le domaine réduit de chaque paramètre.

Ce programme débute par l'introduction des données de la manière suivante :

```
clear
clc
global n;
n=input('nombres de variables---->');
for i=1:n;
    clc;
    disp('(1)Normale (2)lognormale');
    j=1;
    tv(i,j)=input('type de variables---->');
    if tv(i,j)==1;
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Moment Central---->');
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Ecart type---->');
    elseif tv(i,j)==2;
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Moment Central---->');
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Ecart type---->');
    end
end
end
moy=input('Moyenne de la charge limite---->');
```

*% Ou tv(i,j) désigne le type de variable à introduire*

```

for i=1:n;
    mu(i,1)=tv(i,2);
    sg(i,1)=tv(i,3);
end
mul(1,1)=tan(pi*mu(1,1)/180);
sgl(1,1)=tan(pi*sg(1,1)/180);
mul(2,1)=mu(2,1);
sgl(2,1)=sg(2,1);

```

### **% Normalization de la variable Lognormal**

```

for i=1:n;
    if tv(i,1)==1;
        sy(i,1)=sgl(i,1);
        my(i,1)=mul(i,1);
    elseif tv(i,1)==2;
        sy(i,1)=sqrt(log((sgl(i,1)/mul(i,1)).^2+1));
        my(i,1)=log((mul(i,1))/(sqrt(1+(sgl(i,1)/(mul(i,1)).^2))));
    end
end

```

### **% Initialisation des variables de calcul est évaluation de l'intervalle réduit, par l'intermédiaire d'un sous programme (reduced).**

```

ph=mu(1,1);
co=mu(2,1);
[maxphi, maxc]=feval('reduced2V',ph,co,moy);
lf=[0.0001;tan(pi*maxphi/180)];
lc=[0.0001;maxc];

```

### **% Calcul des integrales**

```

if tv(1,1)==1;
    A(1,1)=quad(@(x)(1./sqrt(2.*pi).*sy(1)).*exp(-0.5.*((x-my(1))./sy(1)).^2),lf(1),lf(2));
    A(2,1)=quad(@(x)(x.*(1./sqrt(2.*pi).*sy(1)).*exp(-0.5.*((x-my(1))./sy(1)).^2)),lf(1),lf(2));
    muf=A(2,1)/A(1);
    A(3,1)=quad(@(x)((x-muf).^2.*(1./sqrt(2.*pi).*sy(1)).*exp(-0.5.*((x-my(1))./sy(1)).^2)),lf(1),lf(2));

```

```

A(4,1)=quad(@(x)((x-muf).^3.*(1./sqrt(2*pi).*sy(1)).*exp(-0.5.*((x-
my(1))./sy(1)).^2)),lf(1),lf(2));
elseif tv(1,1)==2;
A(1,1)=quad(@(x)((1./sqrt(2*pi).*sy(1).*x)).*exp(-0.5.*((log(x)-
my(1))./sy(1)).^2)),lf(1),lf(2));
A(2,1)=quad(@(x)(x.*(1./sqrt(2*pi).*sy(1).*x)).*exp(-0.5.*((log(x)-
my(1))./sy(1)).^2)),lf(1),lf(2));
muf=A(2)./A(1);
A(3,1)=quad(@(x)((x-muf).^2.*(1./sqrt(2*pi).*sy(1).*x)).*exp(-0.5.*((log(x)-
my(1))./sy(1)).^2)),lf(1),lf(2));
A(4,1)=quad(@(x)((x-muf).^3.*(1./sqrt(2*pi).*sy(1).*x)).*exp(-0.5.*((log(x)-
my(1))./sy(1)).^2)),lf(1),lf(2));
end
sgf=sqrt(A(3)./A(1));nuf=A(4)/(sgf.^3.*A(1));
if tv(2,1)==1;
B(1,1)=quad(@(x)(1./sqrt(2.*pi)*sy(2))).*exp(-0.5.*((x-my(2))./sy(2)).^2),lc(1),lc(2));
B(2,1)=quad(@(x)(x.*(1./sqrt(2.*pi)*sy(2))).*exp(-0.5.*((x-my(2))./sy(2)).^2),lc(1),lc(2));
muc=B(2)./B(1);
B(3,1)=quad(@(x)((x-muc).^2.*(1./sqrt(2.*pi)*sy(2))).*exp(-0.5.*((x-
my(2))./sy(2)).^2),lc(1),lc(2));
B(4,1)=quad(@(x)((x-muc).^3.*(1./sqrt(2.*pi)*sy(2))).*exp(-0.5.*((x-
my(2))./sy(2)).^2),lc(1),lc(2));
elseif tv(2,1)==2;
B(1,1)=quad(@(x)((1./sqrt(2*pi).*sy(2).*x)).*exp(-0.5.*((log(x)-
my(2))./sy(2)).^2),lc(1),lc(2));
B(2,1)=quad(@(x)(x.*(1./sqrt(2*pi).*sy(2).*x)).*exp(-0.5.*((log(x)-
my(2))./sy(2)).^2),lc(1),lc(2));
muc=B(2)./B(1);
B(3,1)=quad(@(x)((x-muc).^2.*(1./sqrt(2*pi).*sy(2).*x)).*exp(-0.5.*((log(x)-
my(2))./sy(2)).^2),lc(1),lc(2));
B(4,1)=quad(@(x)((x-muc).^3.*(1./sqrt(2*pi).*sy(2).*x)).*exp(-0.5.*((log(x)-
my(2))./sy(2)).^2),lc(1),lc(2));
end
sgc=sqrt(B(3)./B(1));nuc=B(4)/(sgc.^3.*B(1));
Phi_red=[muf;sgf;nuf];C_red=[muc;sgc;nuc];

```

```
disp(' Phi_red   C_red');
```

```
disp([Phi_red   C_red ])
```

Nous pouvons évaluer non seulement la moyenne, mais aussi l'Ecart type et le coefficient d'Asymétrie de l'intervalle réduit représentés par les expressions suivantes :

$$\mu_{x,\text{red}} = \frac{\int_{0^+}^{x_m} x f_x(x) dx}{\int_{0^+}^{x_m} f_x(x) dx}, \quad \sigma_{q_f,\text{red}}^2 = \frac{\int_{0^+}^{x_m} (x - \mu_{q_f,\text{red}})^2 f_x(x) dx}{\int_{0^+}^{x_m} f_x(x) dx}, \quad \vartheta_{q_f,\text{red}} = \frac{\int_{0^+}^{x_m} (x - \mu_{q_f,\text{red}})^3 f_x(x) dx}{\sigma_{q_f,\text{red}}^3 \int_{0^+}^{x_m} f_x(x) dx}$$

Ces paramètres sont représentés respectivement par les termes les suivants :

- $\mu_f = A(2)/A(1)$ ; pour l'Angle de Frottement Interne, et  $\mu_c = B(2)/B(1)$ ; pour la Cohésion.
- $\text{sgf} = \sqrt{A(3)/A(1)}$ ; et  $\text{sgc} = \sqrt{B(3)/B(1)}$ ;
- $\text{nuf} = A(4)/(\text{sgf}^3 \cdot A(1))$ ; et  $\text{nuc} = B(4)/(\text{sgc}^3 \cdot B(1))$ ;

### A.1.1 Sous Programme pour évaluer les bornes de l'intervalle réduit

Cette procédure, qui a pour objectif de rechercher l'intervalle réduit des paramètres mécaniques de base. Dont ces intervalles contiennent les valeurs de la cohésion et de l'angle de frottement interne, qui causent la rupture. L'exécution du sous programme s'effectue par un appel à la fonction (reduced2V) dans le Programme principal.

*% Sous programme des intervalles réduits*

```
function [maxphi,maxc]=reduced2V(ph,co,moy)
```

```
clc
```

```
I=1;
```

```
par1=[];
```

```
par2=[];
```

```
for c=0.0001:co/10000:co;
```

```
for phi=0.0001:ph/10000:ph;
```

```
qf=(c./(tan(phi*pi/180))).*(exp(pi.*tan(phi*pi/180)).*(tan(phi*pi/180)+(1+(tan(phi*pi/180)).^2).^0.5).^2-1)+10.*(exp(pi.*tan(phi*pi/180)).*(tan(phi*pi/180)+(1+(tan(phi*pi/180)).^2).^0.5).^2)+30.*tan(phi*pi/180).*(exp(pi.*tan(phi*pi/180)).*(tan(phi*pi/180)+(1+(tan(phi*pi/180)).^2).^0.5).^2-1);
```

```
if qf <= moy/2;
```

```
par1(I)=c;
```

```
par2(I)=phi;
```

```
end
```

*end*

$I=I+1;$

$maxc=max(par1);$

$maxphi=max(par2);$

*end*

Le résultat se réalise par un affichage des bornes supérieures des intervalles pour les paramètres en question (*maxphi et maxc*).

### **Exemple Numérique**

Nous pouvons considérer comme exemple le sol (7) cité dans le Tableau (V.3), pour le cas corrélé et non corrélé.

Les données du problème sont représentées comme suit:

#### **1) Cas non Corrélé**

- Pour l'angle de frottement interne : Moy=30 et Ecart type=3
- Pour la Cohésion : Moy=10 et Ecart type=4
- Moyenne de la charge limite Moy=835.5

Le programme affiche les résultats statistiques des paramètres :

Phi_red	C_red	
0.5188	7.3494	La moyenne de $\varphi'$ et de $c'$
0.0275	1.6334	L'Ecart type de $\varphi'$ et de $c'$
-0.9933	-0.3721	Le Coefficient d'Asymétrie de $\varphi'$ et de $c'$
Avec maxphi = 28.9381 et maxc = 9.9991		

#### **2) Cas Corrélé**

- Pour l'angle de frottement interne : Moy=30 et Ecart type=3
- Pour la Cohésion : Moy=10 et Ecart type=4
- Moyenne de la charge limite Moy=821.1
- Corrélation  $\rho=-0.6$

Le programme affiche les résultats statistiques des paramètres :

Phi_red	C_red	
0.5168	7.3494	La moyenne de $\varphi'$ et de $c'$
0.0270	1.6334	L'Ecart type de $\varphi'$ et de $c'$
-0.9932	-0.3721	Le Coefficient d'Asymétrie de $\varphi'$ et de $c'$
Avec maxphi = 28.8151 et maxc = 9.9991		

## A.2 Programme principal de la méthode approximative (FORM)

La méthode de Hasofer-Lind, également connue sous le nom de méthode de fiabilité du premier ordre, ou FORM, peut être utilisée en calculant les dérivées de la marge de sécurité à un point critique sur la surface de rupture, également appelé point de conception. Une solution itérative est généralement requise pour trouver ce point, mais le processus tend à converger très rapidement selon l'efficacité et la précision numérique de l'algorithme d'optimisation. L'implémentation de cette méthode dans un code de calcul sous plate forme matlab, est effectuée conformément à l'algorithme représenté en (Page 108).

L'introduction des données s'effectuent de la manière suivante :

```
% Methode FORM avec Lognormal Tronquée
clear
clc
eps=0.1;
global n;
n=input('nombres de variables---->');
for i=1:n;
    clc;
    disp('(1)Normale (2)Gaussienne (3)lognormale (4)Weibull');
    disp('(5)Beta (6)Exponentielle (7)Gamma (8)Poisson');
    j=1;
    tv(i,j)=input('type de variables---->');
    if tv(i,j)==1;
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Moment Central---->');
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Ecart type---->');
    elseif tv(i,j)==2;
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Moment Central---->');
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Ecart type---->');
    elseif tv(i,j)==3;
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Moment Central---->');
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Ecart type---->');
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Valeur Tronquée---->');
    elseif var(i,j)==4;
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Moment Central---->');
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Ecart type---->');
    elseif tv(i,j)==5;
        j=j+1;
        tv(i,j)=input('Moment Central---->');
```



```

    j=j+1;
    tv(i,j)=input('Ecart type---->');
elseif tv(i,j)==6;
    j=j+1;
    tv(i,j)=input('Moment Central---->');
    j=j+1;
    tv(i,j)=input('Ecart type---->');
elseif var(i,j)==7;
    j=j+1;
    tv(i,j)=input('Moment Central---->');
    j=j+1;
    tv(i,j)=input('Ecart type---->');
else
    j=j+1;
    tv(i,j)=input('Moment Central---->');
    j=j+1;
    tv(i,j)=input('Ecart type---->');
end
end
vdc=input('les variables sont corrélées 1 / 2 ?');
if n==1;
    rho(1,1)=1;
    tv(1,1)=0;
else
    for i=1:n-1;
        for j=i+1:n;
            if vdc==1;
                rho(i,j)=input('coefficient de corrélation----->');
                rho(j,i)=rho(i,j);
            elseif vdc==2;
                rho(i,j)=0;
                rho(j,i)=rho(i,j);
            elseif vdc~=(1&2);
                disp('veuillez SVP réintroduire vos données');
                return
            end
        end
    end
end
end
end

```

Le programme principal, selon sa conception utilise des sous programmes les suivants :

**% Sous programme de Normalisation des variables non normales appelé par la fonction  
% (equnCond) dans le programme principal.**

```
function [Mn Sgn]=equnCond(x,mu,sg,my,sy,tv,xtr)
```

```
n=length(x);
```

```
Mn=[];Sgn=[];
```

```
for i=1:n;
```

```
    if tv(i,1)==1;
```

```
        mn(i)=mu(i);
```

```

sgn(i)=sg(i);
elseif tv(i,1)==2;
    Dig(i)=(x(i)-mu(i))/sg(i);
    Gf(i)=normpdf(Dig(i),0,1);
    f(i)=normpdf(x(i),0,1);
    sgn(i)=Gf(i)/f(i);
    mn(i)=x(i)-sgn(i)*Dig(i);
elseif tv(i,1)==3;
    del=0.0001;
    if x(i)<=xtr(i);
        x(i)=xtr(i)+del;
    end
    sgn(i)=(x(i)-xtr(i))*sy(i);
    mn(i)=x(i)-(x(i)-xtr(i))*(log(x(i)-xtr(i))-my(i));
elseif tv(i,1)==4;
    Dig(i)=(x(i)-mu(i))/sg(i);
    Gf(i)=normpdf(Dig(i),0,1);
    f(i)=wblpdf(x(i),A,B);
    sgn(i)=Gf(i)/f(i);
    mn(i)=x(i)-sgn(i)*Dig(i);
elseif tv(i,1)==5;
    Dig(i)=(x(i)-mu(i))/sg(i);
    Gf(i)=normpdf(Dig(i),0,1);
    f(i)=betapdf(x(i),A,B);
    sgn(i)=Gf(i)/f(i);
    mn(i)=x(i)-sgn(i)*Dig(i);
elseif tv(i,1)==6;
    Dig(i)=(x(i)-mu(i))/sg(i);
    Gf(i)=normpdf(Dig(i),0,1);
    f(i)=exppdf(x(i),mu);
    sgn(i)=Gf(i)/f(i);
    mn(i)=x(i)-sgn(i)*Dig(i);
elseif tv(i,1)==7;
    Dig(i)=(x(i)-mu(i))/sg(i);
    Gf(i)=normpdf(Dig(i),0,1);

```

```

f(i)=gampdf(x(i),A,B);
sgn(i)=Gf(i)/f(i);
mn(i)=x(i)-sgn(i)*Dig(i);

```

```
else
```

```

Dig(i)=(x(i)-mu(i))/sg(i);
Gf(i)=normpdf(Dig(i),0,1);
f(i)=poisspdf(x(i),lam);
sgn(i)=Gf(i)/f(i);
mn(i)=x(i)-sgn(i)*Dig(i);

```

```
end
```

```
Mn=[Mn;mn(i)];
```

```
Sgn=[Sgn;sgn(i)];
```

```
end
```

*% Sous programme des dérivées appelé par la fonction (dsig) dans le programme principal*

```
function [dg]=dsig(fonc,x,sg)
```

```
n=length(x);
```

```
dg=zeros(1,n);
```

```
for k=1:n;
```

```

md=zeros(1,n);

```

```

mg=zeros(1,n);

```

```
for i=1:n;
```

```

if i==k;

```

```

md(i)=x(i)+sg(i);

```

```

mg(i)=x(i)-sg(i);

```

```
else
```

```

md(i)=x(i);

```

```

mg(i)=x(i);

```

```
end
```

```
end
```

```
xp=md;
```

```
xg=mg;
```

```
y2=feval(fonc,xp);
```

```
y1=feval(fonc,xg);
```

```
dg(1,k)=(y2-y1)/sg(k)/2;
```

*end*

$dg=dg'$ ;

*end*

**% Sous programme d'évaluation de la fonction d'état limite**

$G(k+2,1)=feval('mod2',x)$ ;

*function*  $y=mod2(x)$

$c=exp(pi*x(1))$ ;

$b=sqrt(1+x(1)^2)$ ;

$a=c*(x(1)+b)^2$ ;

$y=(x(2)/x(1))*(a-1)+10*a+2*15*x(1)*(a-1)$ ;

*end*

Ou « mod2 », est le nom du model choisi, et « feval » la fonction d'évaluation de l'état limite à l'itération (k+2).

Les résultats obtenus sont affichés selon le mode suivant :

*format short g*

$disp(' \quad G(x) \quad MuZ \quad SgZ \quad Bta \quad Pf')$ ;

$disp([G \ MuZ \ SgZ \ Bta \ Pf])$ ;

$plot((1:1:k+2),Bta, '-'), grid('on')$

$xlabel('Iteration')$

$ylabel('Indice de Fiabilité')$

$title('Methode Form')$

### **Exemple Numérique**

Nous gardons le même exemple du sol (7) cité dans le Tableau (V.3), pour le cas corrélé et non corrélé.

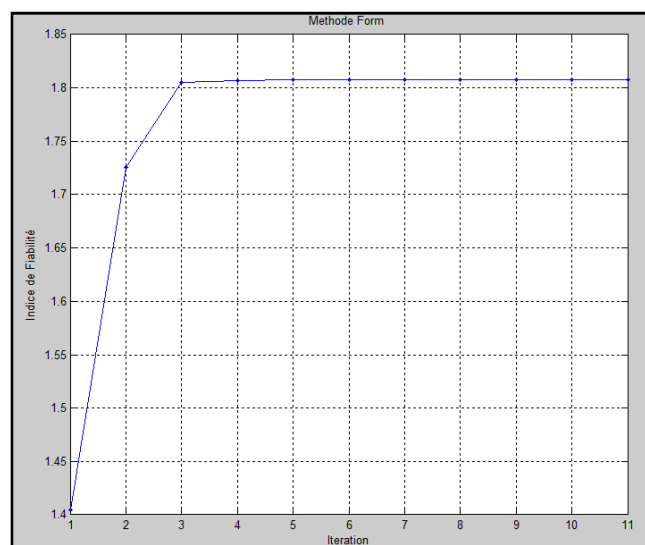
Les données du problème sont représentées comme suit:

#### **1) Cas non Corrélé**

- Pour l'angle de frottement interne : Moy=0.58 et Ecart type=0.06
- Pour la Cohésion : Moy=10 et Ecart type=4
- Moyenne de la charge limite Moy=835.5

Le programme affiche les résultats des paramètres et la convergence se réalise à partir de la cinquième itération:

G(x)	MuZ	SgZ	Bta	Pf
379.73	379.73	270.34	1.4047	0.08006
52.361	279.81	162.14	1.7257	0.0422
11.936	268.66	148.81	1.8054	0.035508
0.2315	261.82	144.9	1.8069	0.035385
0.057386	261.78	144.84	1.8073	0.035354
0.00089697	261.75	144.82	1.8073	0.035354
6.6941e-05	261.75	144.82	1.8073	0.035354
-4.1011e-07	261.75	144.82	1.8073	0.035354
6.6095e-07	261.75	144.82	1.8073	0.035354
-1.1534e-07	261.75	144.82	1.8073	0.035354
2.6015e-08	261.75	144.82	1.8073	0.035354



Convergence de l'indice de Fiabilité

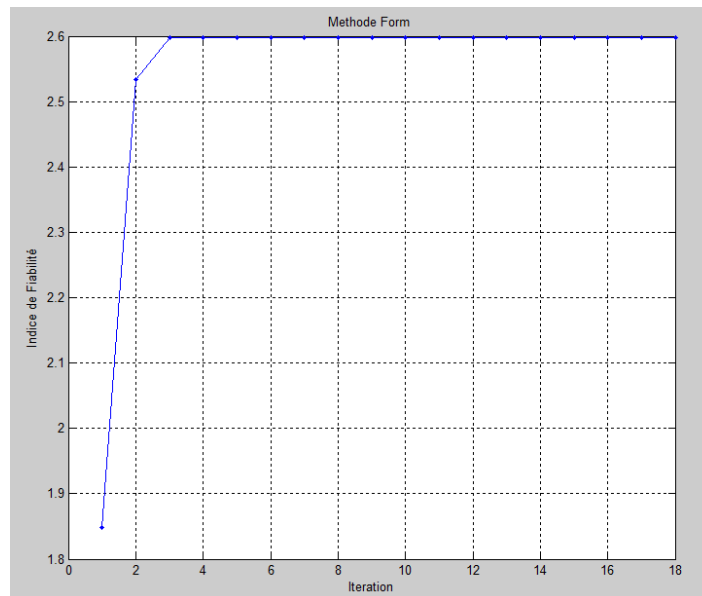
## 2) Cas Corrélé

- Pour l'angle de frottement interne : Moy=0.58 et Ecart type=0.06
- Pour la Cohésion : Moy=10 et Ecart type=4
- Moyenne de la charge limite Moy=821.1
- Corrélation  $\rho=-0.6$

Les résultats de calcul sont :

G(x)	MuZ	SgZ	Bta	Pf
386.93	364.36	197.05	1.8491	0.032219
82.869	300.05	118.41	2.534	0.0056379
5.6682	261.69	100.73	2.5979	0.0046903
0.05678	257.26	99.008	2.5984	0.0046827
-0.0034604	257.9	99.253	2.5985	0.0046822
-0.00014962	257.47	99.085	2.5985	0.0046817
-0.00084765	257.75	99.193	2.5985	0.0046817
0.00015722	257.57	99.124	2.5985	0.0046816
-0.00026042	257.69	99.168	2.5985	0.0046816
0.00010152	257.61	99.139	2.5985	0.0046816
-9.2146e-05	257.66	99.158	2.5985	0.0046816

4.8007e-05	257.63	99.146	2.5985	0.0046816
-3.5375e-05	257.65	99.153	2.5985	0.0046816
2.0812e-05	257.64	99.149	2.5985	0.0046816
-1.4127e-05	257.65	99.152	2.5985	0.0046816
8.7447e-06	257.64	99.15	2.5985	0.0046816
-5.7416e-06	257.64	99.151	2.5985	0.0046816
3.6295e-06	257.64	99.15	2.5985	0.0046816



Convergence de l'indice de Fiabilité

### A.3 Programme principal de la méthode (PEM)

Alors la méthode des points estimés développée par Rosenblueth (1975), prévoit une procédure de calcul directe et facile pour obtenir des estimations de moments pour la charge limite d'une fondation superficielle. En particulier, ces moments statistiques sont la moyenne, écart type et le coefficient d'asymétrie, dont la procédure de mise en œuvre a été implémentée dans un code de calcul représenté par l'algorithme (Page 106).

L'introduction des données s'effectuent de la même manière que celle de la méthode (FORM).

*% Estimation des unités d'écart types  $\xi_{x_-}$  et  $\xi_{x_+}$  et les coordonnées des points d'application des poids  $x_{i+}$  et  $x_{i-}$  pour tous variables par la boucle imbriquée la suivante :*

```
for i=1:n
    ksp(i,1)=nu(i,1)/2+sqrt(1+(nu(i,1)/2)^2);
    ksm(i,1)=ksp(i,1)-nu(i,1);
    xp(i,1)=mu(i,1)+ksp(i,1)*sg(i,1);
    xm(i,1)=mu(i,1)-ksm(i,1)*sg(i,1);
    pp(i,1)=ksm(i,1)/(ksp(i,1)+ksm(i,1));
    pm(i,1)=1-pp(i,1);
end
```

% Evaluation des probabilités concentrées des variables de base  $P_{x+}$  et  $P_{x-}$

```

if n==1;
    P(1,1)=pp(1,1);
    P(2,1)=pm(1,1);
elseif n==2;
    P(1,1)=pp(1,1)*pp(2,1)*(1+rho(1,2));
    P(2,1)=pp(1,1)*pm(2,1)*(1-rho(1,2));
    P(3,1)=pm(1,1)*pp(2,1)*(1-rho(1,2));
    P(4,1)=pm(1,1)*pm(2,1)*(1+rho(1,2));
else
    for i=1:m;
        s=0;
        for k=1:n-1;
            for j=k+1:n;
                s=s+vor(i,k)*vor(i,j)*rho(k,j);
            end
        end
        P(i,1)=(1/m)*(1+s);
    end
end

```

Les résultats sont affichés de la façon suivante:

```

disp(' P      x      Z');
disp(num2str([P,x,Z],4));
disp(' MuZ    SgZ    CvZ    NuZ')
disp(num2str([MuZ SgZ CovZ NuZ],4));

```

### Exemple Numérique

Nous gardons toujours le même exemple du sol (7) cité dans le Tableau (V.3), pour le cas corrélé et non corrélé.

Les données du problème sont représentées comme suit:

#### 1) Cas non Corrélé

- Pour l'angle de frottement interne : Moy=0.58 et Ecart type=0.06
- Pour la Cohésion : Moy=10 et Ecart type=4
- Coefficient d'Asymétrie  $\vartheta = 1.26$

Les résultats de calcul sont :

Signe	P	x	Z
++	0.1167	0.64	17.25
+-	0.3833	0.64	7.792
-+	0.1167	0.52	17.25

-- 0.3833 0.52 7.792 533.4

MuZ	SgZ	CvZ	NuZ
835.5	278	0.3327	0.3432

## 2) Cas Corrélé

- Pour l'angle de frottement interne : Moy=0.58 et Ecart type=0.06
- Pour la Cohésion : Moy=10 et Ecart type=4
- Coefficient d'Asymétrie  $\vartheta = 1.26$
- Corrélation  $\rho = -0.6$

Les résultats de calcul sont :

Signe	P	x	Z	
++	0.1	0.64	13.65	1219
+-	0.4	0.64	6.316	945.1
-+	0.4	0.52	13.65	678.7
--	0.1	0.52	6.316	496.8

MuZ	SgZ	CvZ	NuZ
821.1	201.6	0.2455	0.3062



